

Quantum optimal control of two-qubit gates in Rydberg atoms

Tesi triennale in fisica

Laureando: Marco Dall'Ara

26/09/2022

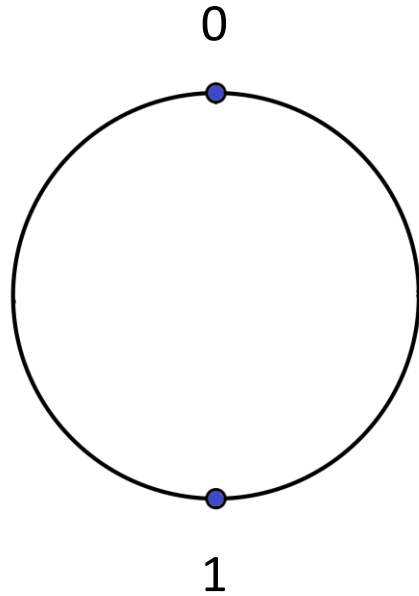
Relatore: Simone Montangero

Quantum Computing

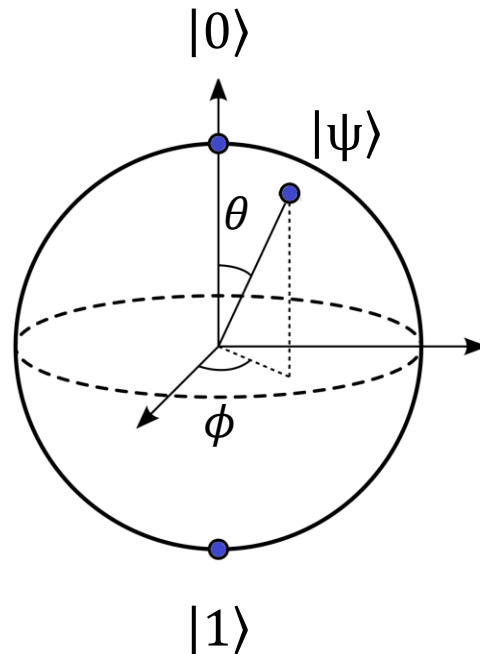
Teoria



Bit



Qubit



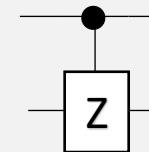
$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} |1\rangle$$

Alcuni algoritmi quantistici sono più efficienti di quelli classici (algoritmo di Shor).

Ogni algoritmo quantistico si può decomporre con un numero finito di gate (set universale di gate):

- Gate a singolo qubit
- Gate a più qubit

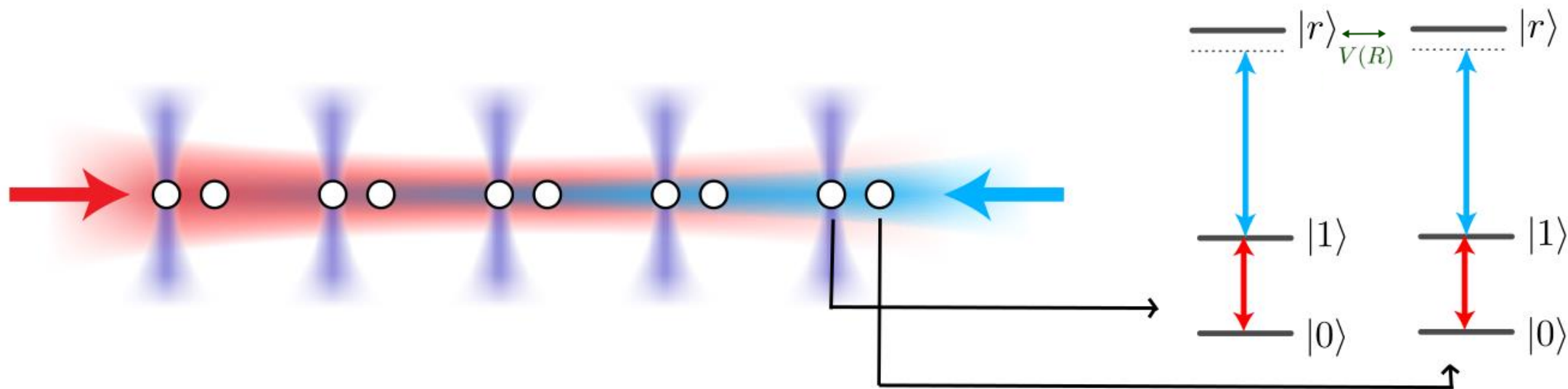
Controlled-Z gate



Input	Output
$ 00\rangle$	$ 00\rangle$
$ 01\rangle$	$ 01\rangle$
$ 10\rangle$	$ 10\rangle$
$ 11\rangle$	$- 11\rangle$

Quantum Computing

Implementazione



Limiti

- **Fidelity** dei gates a più qubit
- Rapporto **tempo di decoerenza/tempo del gate**

Atomi di Rydberg

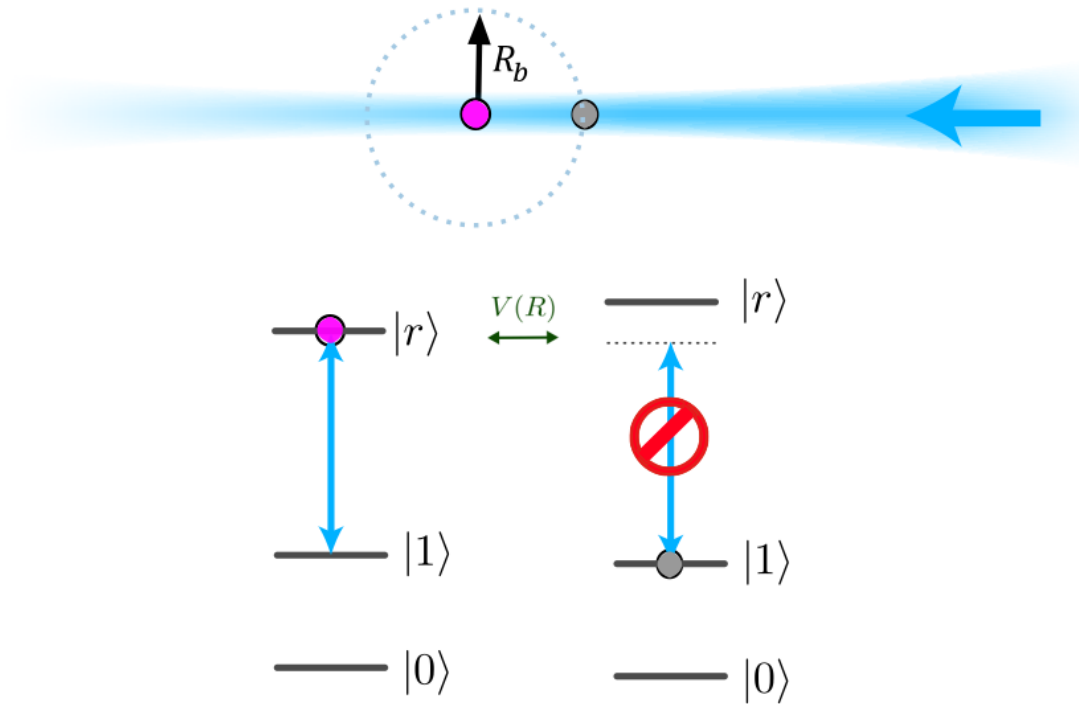
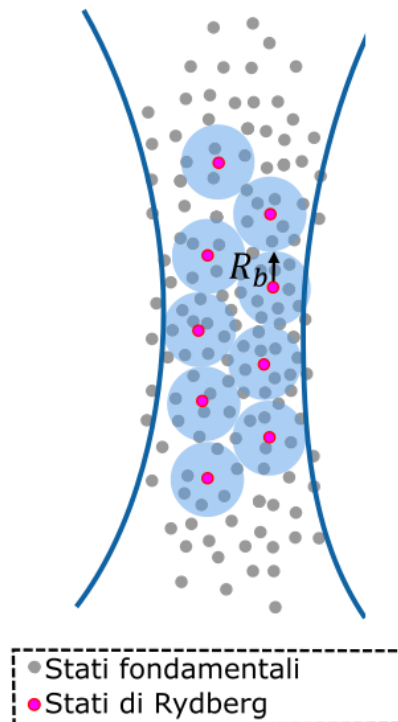
Proprietà e Rydberg blockade



Sono atomi con grande numero quantico principale n .

- Vita media $\propto n^3$

- Momento di dipolo elettrico $\propto n^2$ ➔ **RYDBERG BLOCKADE**



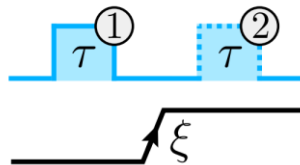
Ottimizzazione Controlled-Z gate

Protocolli esistenti e lavoro svolto



1 H. Levine et al., PRL 123, 170503 (2019).

- Due impulsi identici di tempo τ con un salto di fase intermedio di ξ
- Tempo del gate pari a **0.85 μ s**

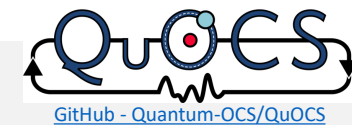


2 A. Pagano et al., PRR 4, 033019 (2022).

- Simulazione ottimizzata con controllo ottimale quantistico
- Impulso singolo simmetrico
- Tempo del gate pari a **0.77 μ s**, migliorato del 10%

Lavoro svolto

- Ho riprodotto e simulato 1 nei regimi di *perfect* e *imperfect blockade*.
- Ho ritrovato i miglioramenti indicati di 2, utilizzando tecniche di controllo ottimale quantistico implementate sul pacchetto software QuOCS. Infine ho analizzato il tempo del gate in funzione della distanza interatomica.



Controllo ottimale quantistico

Una veloce panoramica

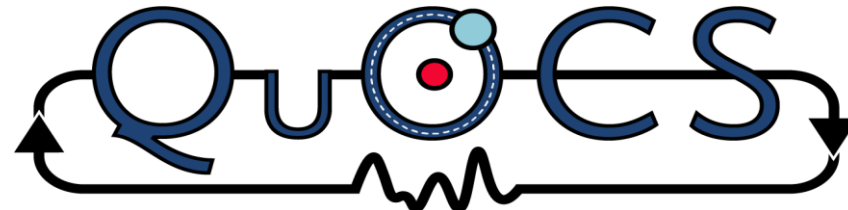


Consiste in un insieme di tecniche per controllare sistemi quantistici. Queste hanno lo scopo comune di minimizzare una funzione J chiamata **figura di merito**, che dipende dal problema.

Esempio: **problema del trasferimento di stato**

$J = 1 - |\langle \psi_f | \psi(T) \rangle|^2$, con $\psi(T)$ evoluto temporale dello stato iniziale ψ_0 e ψ_f stato target. Se ψ_f è uno stato di Bell, J è detta **Bell infidelity**.

Ogni ottimizzazione è stata svolta utilizzando il software QuOCS.



[GitHub - Quantum-OCS/QuOCS](https://github.com/Quantum-OCS/QuOCS)

Ottimizzazione Controlled-Z gate ²

Applicazione del controllo ottimale quantistico

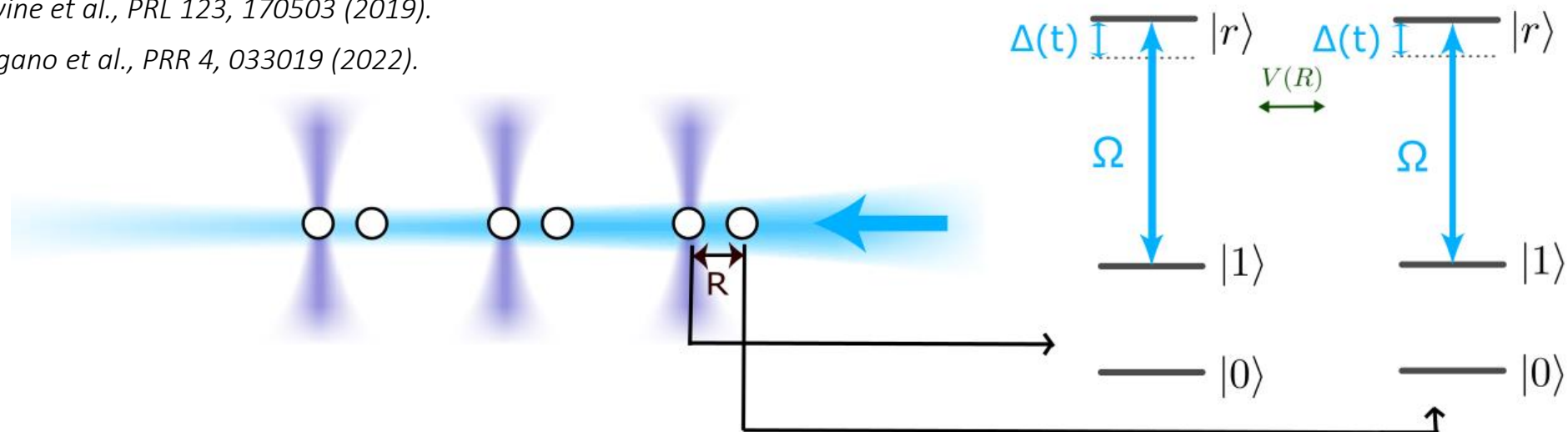
$\Delta :=$ "detuning"

$\Omega :=$ "frequenza di Rabi"

$R :=$ "distanza interatomica"

¹ H. Levine et al., PRL 123, 170503 (2019).

² A. Pagano et al., PRR 4, 033019 (2022).



Il controllo ottimale quantistico, tramite la minimizzazione di una Bell infidelity, fornisce un impulso $\Delta(t)$ vincolato ad essere simmetrico, tale da realizzare un Controlled-Z gate nel minor tempo possibile.

Ottimizzazione Controlled-Z gate 2

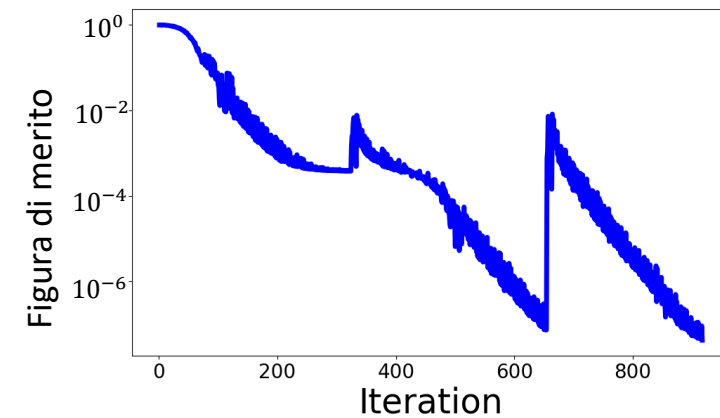
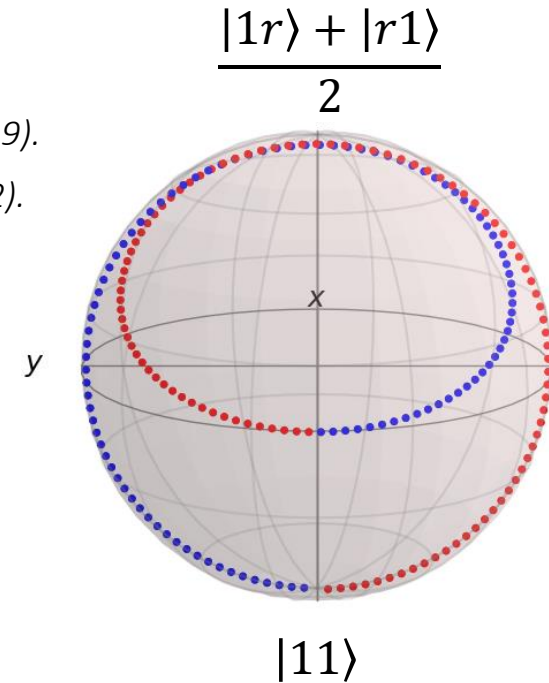
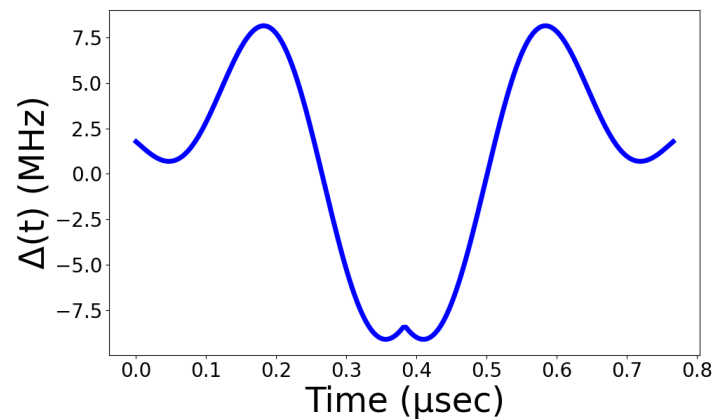
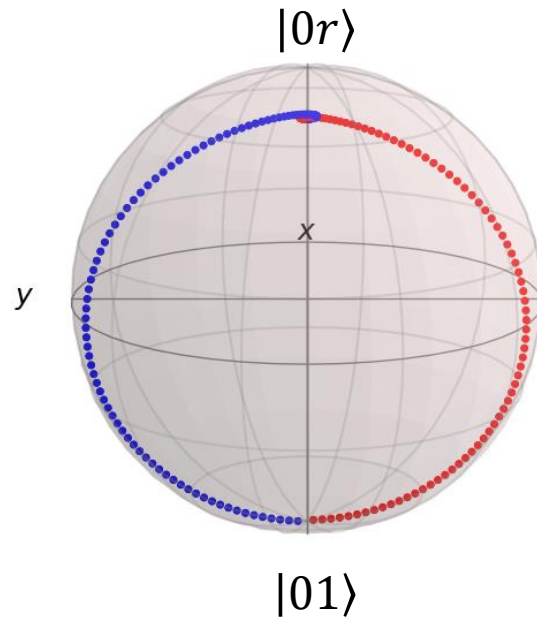
Risultati



$\Delta := \text{"detuning"}$

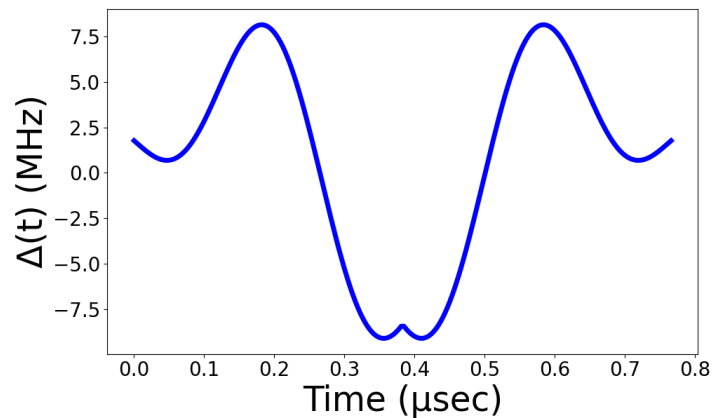
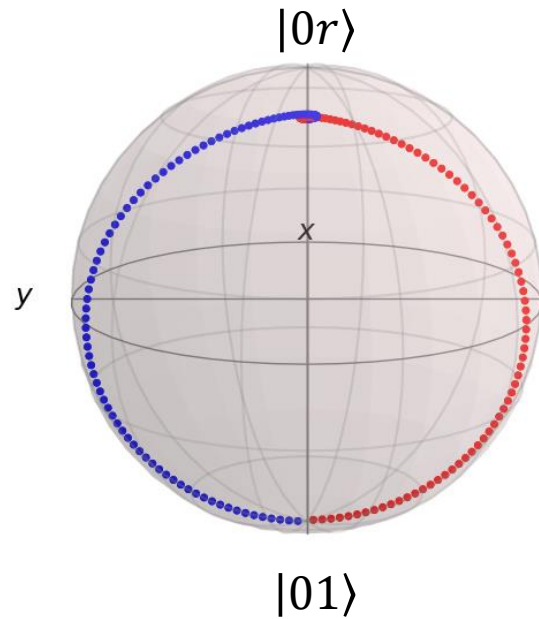
1 *H. Levine et al., PRL 123, 170503 (2019).*

2 *A. Pagano et al., PRR 4, 033019 (2022).*



Ottimizzazione Controlled-Z gate 2

Risultati

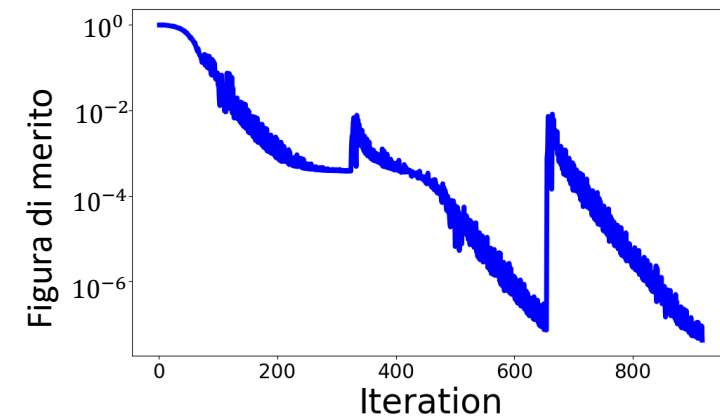
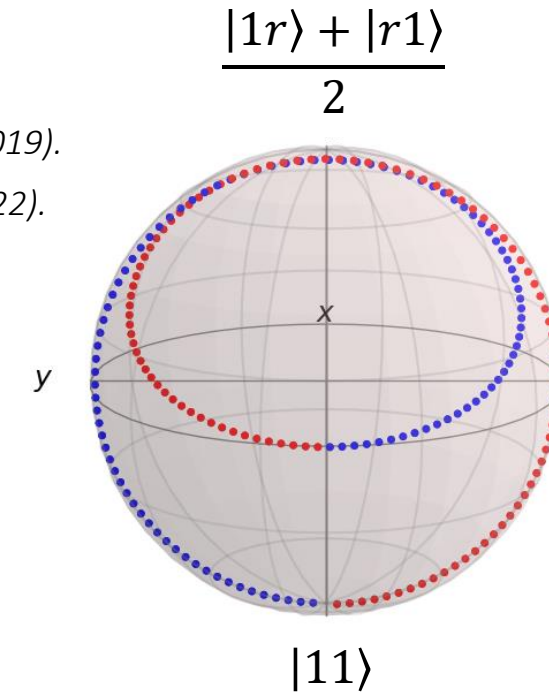


$\Delta := \text{"detuning"}$

1 *H. Levine et al., PRL 123, 170503 (2019).*

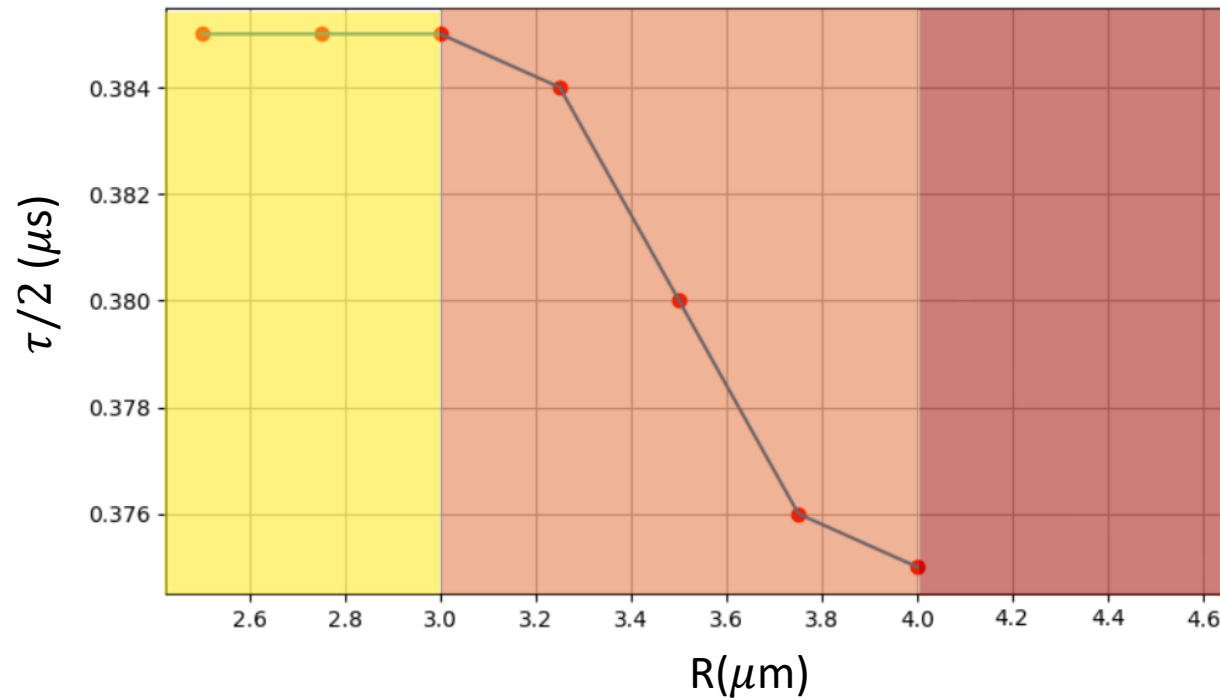
2 *A. Pagano et al., PRR 4, 033019 (2022).*

Ritroviamo tempo del gate pari a $0.77\mu\text{s}$, migliorato del 10% rispetto a 1



Ottimizzazione Controlled-Z gate 2

Tempo del gate vs distanza interatomica



τ := "tempo del gate"

R := "distanza interatomica"

1 H. Levine et al., PRL 123, 170503 (2019).

2 A. Pagano et al., PRR 4, 033019 (2022).

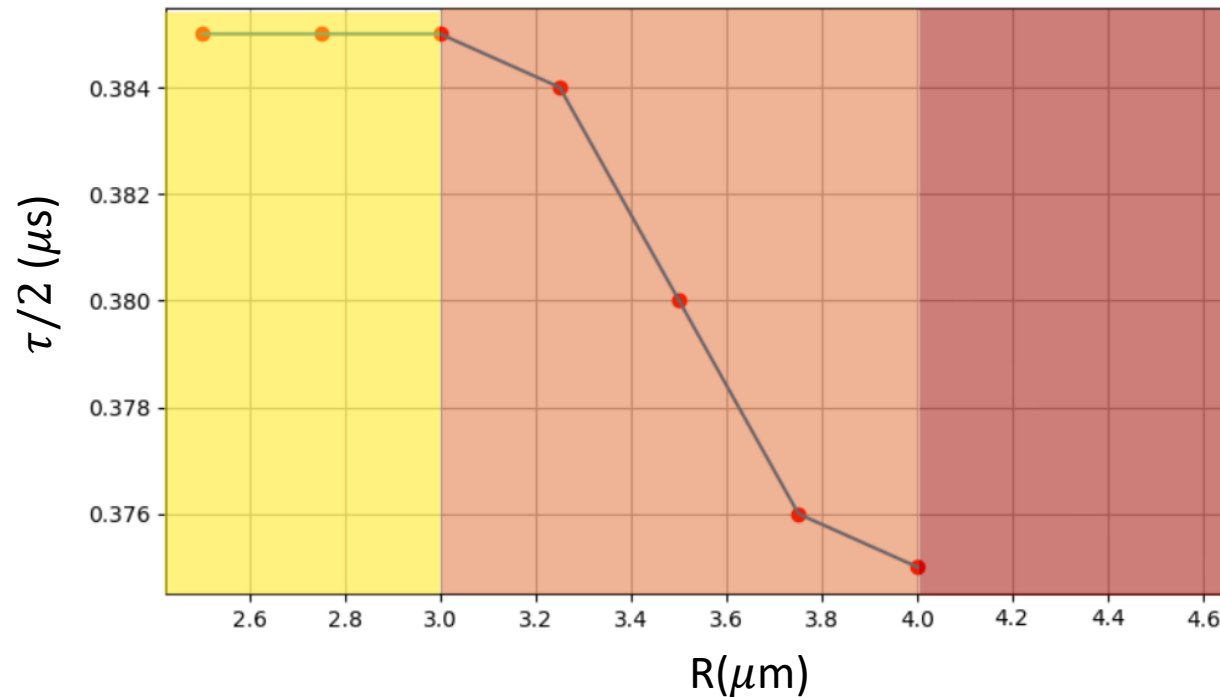
$R < 3 \mu\text{m}$: Convergenza rapida a perfect blockade

$3 < R < 4 \mu\text{m}$: Tempo del gate diminuisce con distanza interatomica

$R > 4 \mu\text{m}$: Ottimizzazione smette di convergere

Ottimizzazione Controlled-Z gate 2

Tempo del gate vs distanza interatomica



τ := "tempo del gate"

R := "distanza interatomica"

1 H. Levine et al., PRL 123, 170503 (2019).

2 A. Pagano et al., PRR 4, 033019 (2022).

Potenziale miglioramento
del tempo del gate di un
ulteriore 3%

$R < 3\mu\text{m}$: Convergenza
rapida a perfect blockade

$3 < R < 4\mu\text{m}$: Tempo
del gate diminuisce con
distanza interatomica


$R > 4\mu\text{m}$: Ottimizzazione
smette di convergere

Conclusioni

- ① *H. Levine et al., PRL 123, 170503 (2019).*
- ② *A. Pagano et al., PRR 4, 033019 (2022).*



Ho presentato gli atomi di Rydberg e delle loro applicazioni nel Quantum Computing

Ho riprodotto i risultati di ① e ②, implementando tecniche di controllo ottimale quantistico nel pacchetto software , riottenendo il miglioramento del **10%** del tempo del gate.

Con il protocollo in ②, ho analizzato come varia il tempo del gate al variare della distanza interatomica, con un potenziale ulteriore miglioramento del **3%** del tempo del gate.

BACKUP SLIDES



Interazione luce-atomo

Si consideri un atomo a due livelli $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ e un' onda piana monocromatica $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}'_0 \cos(\omega t + \phi) = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_0^* e^{i\omega t}$ con $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}'_0 e^{i\phi} / 2$.

- $\hat{H}_{int} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(t)$

Usando la Rotating Wave Approximation e mettendoci in un sistema rotante otteniamo:

- $\hat{H} = -\hbar\Delta |1\rangle \langle 1| + \hbar(\Omega |1\rangle \langle 0| + \Omega^* |0\rangle \langle 1|),$

dove $\Omega_0 = \hbar^{-1} \langle 1|\mathbf{p}|0\rangle \mathbf{E}'_0$ è la frequenza di Rabi, $\Omega = -\frac{\Omega_0}{2} e^{-i\phi}$

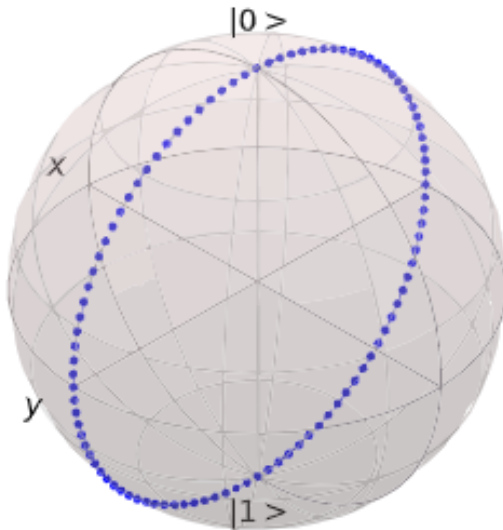
, $\hat{\Omega} = -\frac{\Omega_0}{2} e^{i\phi}$ e il Detuning $\Delta := \omega - (\omega_{|1\rangle} - \omega_{|0\rangle})$.

Gates a singolo qubit

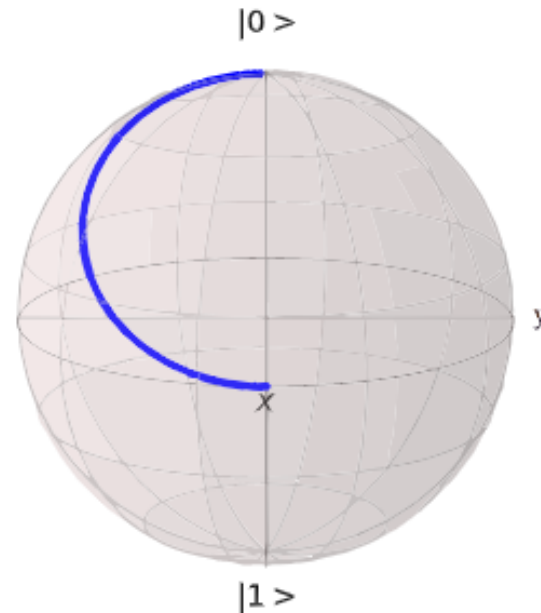


Ogni trasformazione unitaria su singolo qubit può essere realizzata come combinazione di Hadamard e X-rotations gates.

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2}\Delta |0\rangle\langle 0| - \hbar/2\Delta |1\rangle\langle 1| + \hbar(\Omega |1\rangle\langle 0| + \Omega^* |0\rangle\langle 1|)$$



Simulazione con $\Delta = 0$.



Simulazione con $\Delta = \Omega_0$.

Interazione Rydberg-Rydberg

Se la distanza interatomica R tra due atomi è molto maggiore del raggio dello stato di Rydberg, possiamo descrivere i nostri atomi come dipoli elettrici $\mathbf{p} = -e\mathbf{d}$.

- $$V_{dd} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2 - 3(\mathbf{d}_1 \cdot \hat{\mathbf{u}}_R)(\mathbf{d}_2 \cdot \hat{\mathbf{u}}_R)}{|\mathbf{R}|^3}$$

Fissando uno stato di Rydberg specifico $|r\rangle$ e con perturbazioni al secondo ordine:

- $V = C_{6,rr}/R^6$, dove $C_{6,rr}$ è il coefficiente di Van Der Waals e scala con n^{11} .

Rydberg blockade



Si consideri un sistema di due atomi ognuno con due livelli, $|1\rangle$ stato di base e $|r\rangle$ stato di Rydberg, e un laser risonante tra questi.

- $\hat{H} = \hbar(\Omega |r\rangle \langle 1| \otimes 1 + \Omega 1 \otimes |r\rangle \langle 1| + H.c...) - C_{6,rr}/R^6 |rr\rangle \langle rr|$

Cambiando nella base $\{|11\rangle, |+\rangle = (|1r\rangle + |r1\rangle)/\sqrt{2}, |rr\rangle\}$,

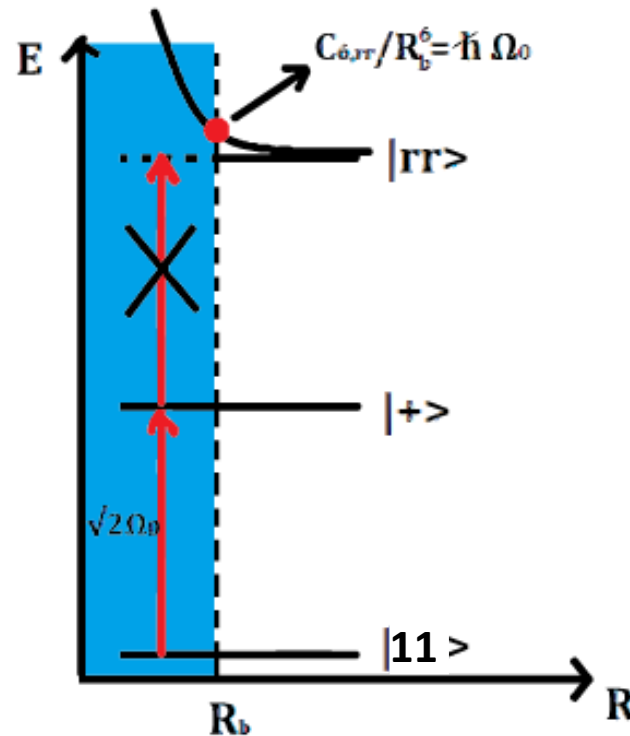
otteniamo:

- $\hat{H}' = \hbar\sqrt{2}(\Omega |11\rangle \langle +| + \Omega |+\rangle \langle rr| + H.c...) - C_{6,rr}/R^6 |rr\rangle \langle rr|$

Rydberg blockade



In analogia con la dinamica dell'interazione luce-atomo, lo stato $|rr\rangle$ è shiftato fuori risonanza dall'interazione Rydberg-Rydberg.



Controlled-Z gate



Consideriamo due atomi identici, ognuno come un sistema a tre livelli $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|r\rangle$, dove i primi due stati sono ground states e $|r\rangle$ è uno stato di Rydberg. La transizione tra $|1\rangle$ e $|r\rangle$ avviene grazie ad un laser con detuning Δ , simultaneamente per entrambi gli atomi. $H = H_{\Delta=0} + H_{\Delta}$, con $H_{\Delta} = -\hbar\Delta(|r\rangle\langle r| \otimes 1 + 1 \otimes |r\rangle\langle r|)$.

- $|0\rangle$ è disaccoppiato, quindi la dinamica di $|01\rangle$ è descritta da un sistema a due livelli $\{|01\rangle, |1r\rangle\}$ con frequenza di Rabi Ω_0 .
- $|11\rangle$, come già visto, segue una dinamica descritta da $\{|11\rangle, \frac{|1r\rangle + |r1\rangle}{\sqrt{2}}\}$ con frequenza di Rabi $\sqrt{2}\Omega_0$

Controlled-Z gate

- Dinamiche differenti di $|01\rangle$ e $|11\rangle$
- Vincolo che impulso del laser faccia tornare gli stati in se stessi dopo l'evoluzione

Permettono a questi stati di acquisire fasi differenti:

$$\begin{aligned} |00\rangle &\rightarrow |00\rangle \\ |01\rangle &\rightarrow |01\rangle e^{i\phi_{01}} \\ |10\rangle &\rightarrow |10\rangle e^{i\phi_{10}} \\ |11\rangle &\rightarrow |11\rangle e^{i\phi_{11}} . \end{aligned} \tag{1}$$

Dove $\phi_{01} = \phi_{10}$ per la simmetria della dinamica. Se le fasi soddisfano :

$$\phi_{11} = 2\phi_{01} + \pi , \tag{2}$$

Allora abbiamo realizzato un controlled-Z gate.

Controllo ottimale quantistico



- *State transfer* figura di merito: $J = 1 - \langle \psi_f | \psi(T) \rangle^2$, dove $|\psi(T)\rangle = U(T, 0) |\psi_0\rangle$, con l'operatore evoluzione temporale U che dipende dai parametri di controllo.
- CRAB: espande segnale in input in una serie troncata, con coefficienti c_i . Minimizza $J(f(t)) = J(c_1, c_2 \dots c_N)$.
- dCRAB: $f^j(t) = c_0^j f^{j-1}(t) + \sum_{i=1}^N c_i^j f_i^j(t)$

Il dCRAB attenua il problema delle false traps:

$$\delta J(f) = 0 \quad \forall \delta f = \sum_{i=1}^N f_i(t) \delta c_i \quad \& \quad \exists \delta f \in L_2 : \delta J(f) \neq 0$$

Ottimizzazione CZ gate



- Stato iniziale: $\psi_0 = \frac{|01\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$
- Stato target: $\psi_f = \frac{|01\rangle + e^{i(\phi_{01}-\pi)} |11\rangle}{\sqrt{2}}$
- Figura di merito: $J = 1 - |\langle U(T)\psi_0 | \psi_f \rangle|^2$
$$= 1 - \left| \left(e^{i\phi_{01}} \frac{|01\rangle + e^{i(\phi_{11}-\phi_{01})} |11\rangle}{\sqrt{2}} \right) \cdot \left(\frac{|01\rangle + e^{i(\phi_{01}-\pi)} |11\rangle}{\sqrt{2}} \right) \right|^2$$

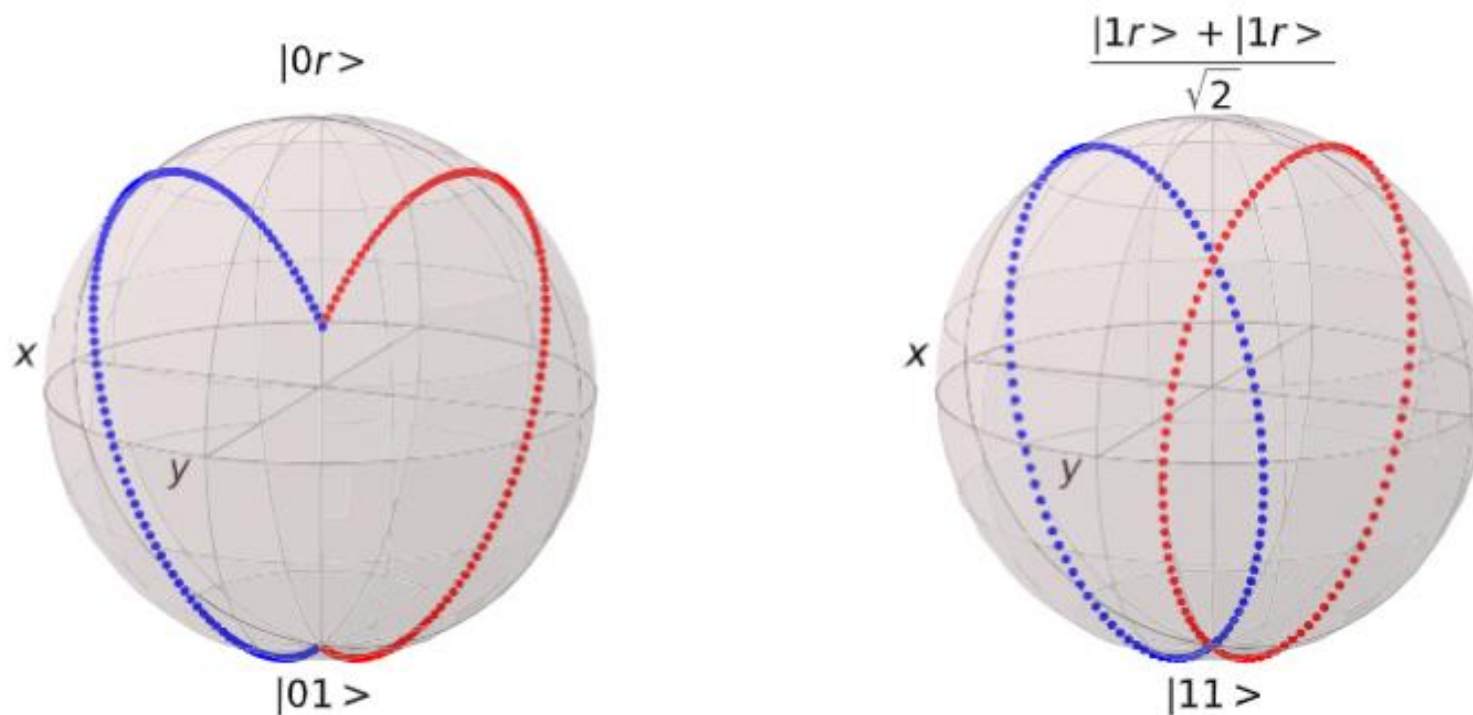
Sorgente più rilevante d'errore in gate di questo tipo è data da decadimento atomi di Rydberg \rightarrow cerchiamo protocolli con tempo medio passato in atomi di Rydberg minori, e quindi anche con gate time minori.

Detuning costante e salto di fase (perfect blockade)



- Detuning Δ costante, salto di fase tra due impulsi ξ , durata impulso τ
- Perfect blockade
- $|11\rangle$ deve tornare in se stesso dopo gate $\rightarrow \tau(\Delta/\Omega_0)$
- $|01\rangle$ deve tornare in se stesso dopo gate $\rightarrow \xi(\Delta/\Omega_0)$
- Si trova anche $\phi_{01}(\Delta/\Omega_0)$ $\phi_{11}(\Delta/\Omega_0)$ e da vincolo fasi del CZ gate troviamo $\Delta/\Omega_0 = 0.377$

Detuning costante e salto di fase (perfect blockade)

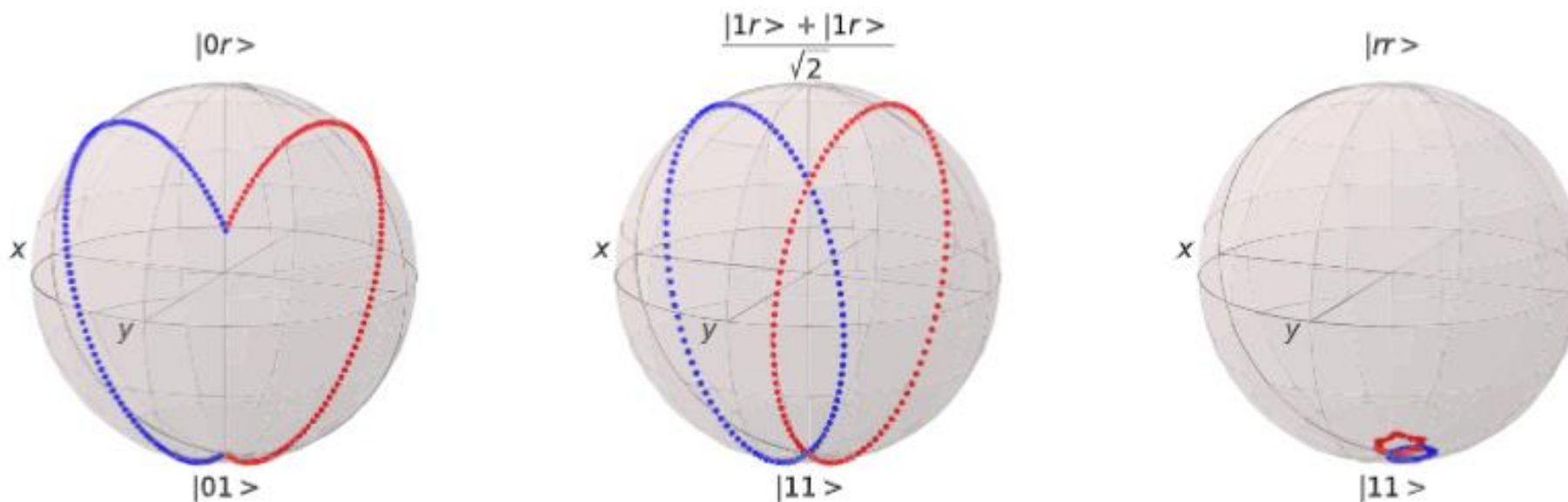


Parametri	Ω_0	ξ	τ	Δ	V/\hbar	J
Valori	10 MHz	3.90	$0.43 \mu s$	3.77 MHz	∞	$3.5 \cdot 10^{-6}$

Detuning costante e salto di fase (imperfect blockade)

- Detuning Δ costante, salto di fase tra due impulsi ξ , durata impulso τ
- Imperfect blockade, atomi di Stronzio-88 a distanza $3\mu\text{m}$, \rightarrow influisce solo su dinamica $|11\rangle$
- $|11\rangle$ deve tornare in se stesso dopo gate $\rightarrow \tau(\Delta/\Omega_0)$ (diverso da perfect blockade, qua soluzione numerica)
- $|01\rangle$ deve tornare in se stesso dopo gate $\rightarrow \xi(\Delta/\Omega_0)$ (uguale a perfect blockade)
- Minimizziamo J con metodo Nelder-Mead attraverso parametri τ e Δ

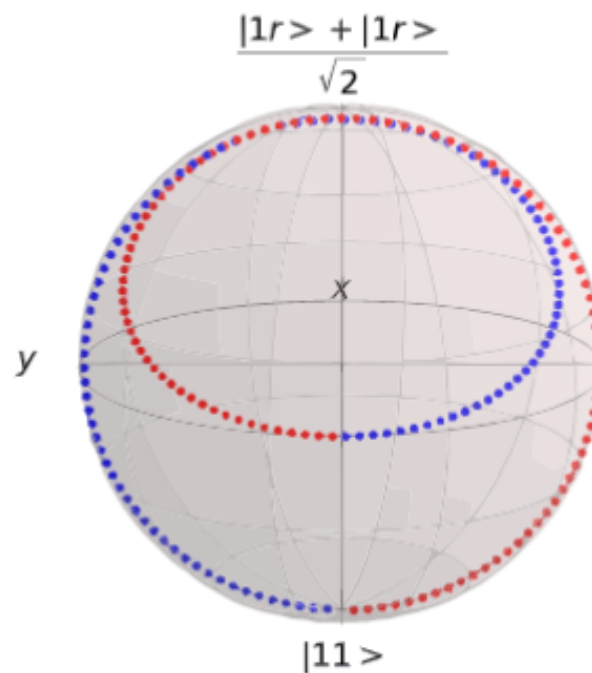
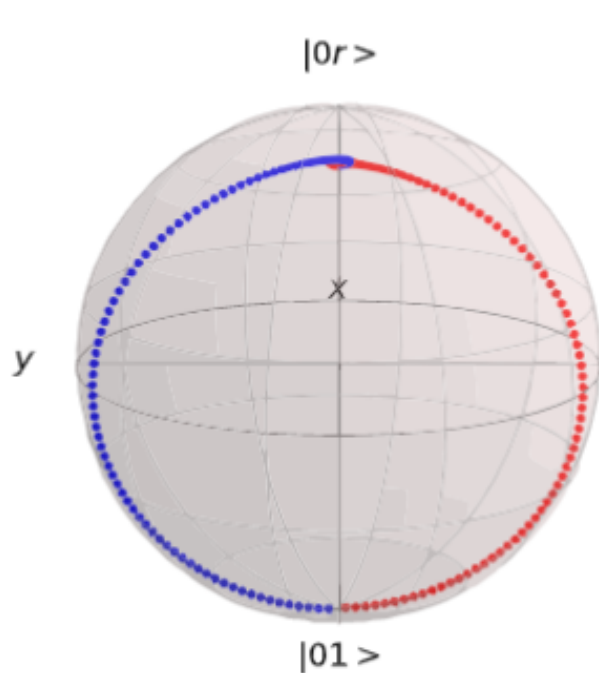
Detuning costante e salto di fase (imperfect blockade)



Parametri	Ω_0	ξ	τ	Δ	V/\hbar	J
Valori	10 MHz	3.93	$0.43 \mu s$	3.91 MHz	211 MHz	$7 \cdot 10^{-6}$

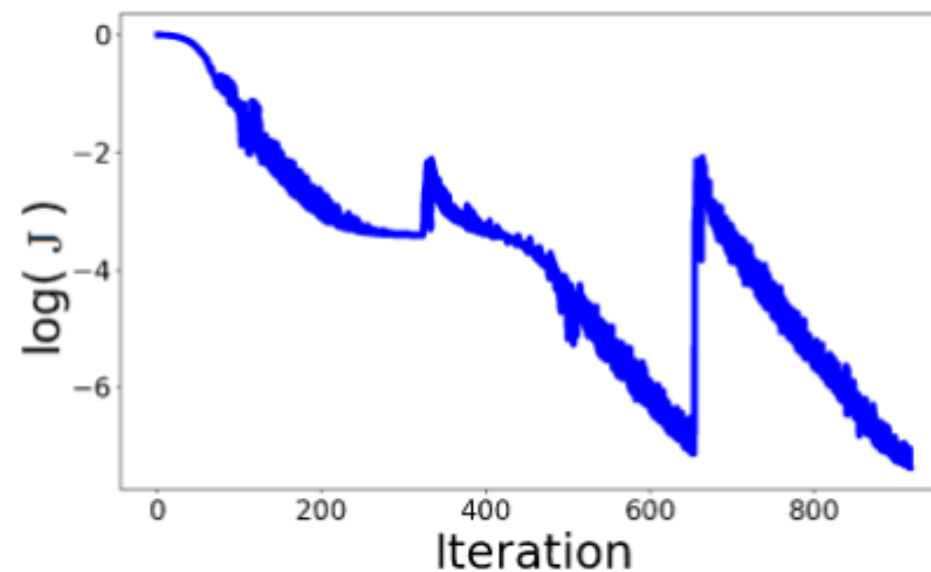
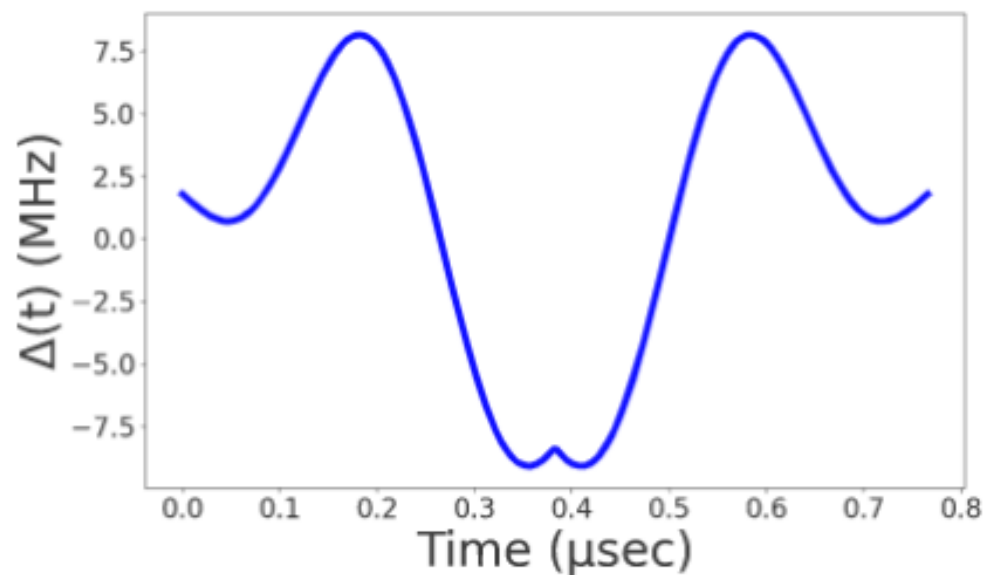
Ottimizzazione del detuning con dCRAB

- Detuning $\Delta(t)$ dipendente dal tempo e simmetrico, durata gate τ'
- Applico dCRAB per trovare $\Delta(t)$ tale che, sia per $|01\rangle$ che per $|11\rangle$, dopo un tempo $\tau'/2$ evolvo nel piano XZ della sfera di Bloch.



192

Ottimizzazione del detuning con dCRAB



Parameters	Ω_0	$\tau'/2$	V/\hbar	J
Value	10 MHz	$0.385 \mu\text{s}$	211 MHz	$4.1 \cdot 10^{-8}$