Calenπario 2022

Questi sono i testi, e le soluzioni, della prima edizione del Calenπario, una specie di calendario dell'avvento di giochi matematici, pubblicati ogni tre giorni a partire dal 14 marzo, giornata internazionale della matematica, fino al 28 giugno. Grazie a Maddmaths! e al lavoro di Riccardo Moschetti.

1 Quadrati più cubi.

La gelateria millegusti non smette mai di stupire. Eri in coda, pregustando il sapore del tuo gelato preferito quando improvvisamente una persona misteriosa entra dalla porta principale.

— Manca poco tempo — esclama — sembra che qualcosa di misterioso stia... cambiando. Cambiando l'universo! — Tu e altri clienti guardate questa figura con aria confusa.

— L'universo! Il Pi greco! Non chiedetemi come sia possibile, ma quando penso distrattamente al problema dell'area del cerchio mi sembra chiaro che Pi greco debba essere uguale a 3.

La noia e forse la voglia di avere il tuo gelato ti distraggono. Tanto meglio, pensi, meno calcoli da fare! Poi realizzi che se Pi greco fosse uguale a 3, ci sarebbe meno gelato nella pallina che ti stanno per servire, e questo è un problema serio.

— Spiegati meglio — chiedi alla figura misteriosa.

— Nessuno sa che cosa stia succedendo, sembra solo che riflettere su qualche problema matematico possa aiutare a far luce su questa strana faccenda. Forse è questa la chiave per addentrarci in questo mistero.

Pensi per un attimo al primo problema matematico che ti passa per la mente, ed è il nome della gelateria a darti ispirazione.

Il numero 1000 ha questa caratteristica: può essere scritto come somma di un quadrato più un cubo, perché $1000 = 28^2 + 6^3$. Qual è il più grande numero minore di 1000 che ha la stessa proprietà, cioè che può essere scritto come somma di un quadrato più un cubo? I quadrati e i cubi devono essere interi positivi.

Questo potrebbe essere un buon inizio, pensi. Vediamo se risolvere questo problema aiuta a scoprire qualcosa di più sul mistero del Pi greco.

(Problema di Maurizio Codogno, dal libro Quizzini della domenica, numero 15)

`[996]` Non serve una grande strategia per rispondere a questo problema. Conviene partire dai cubi dei numeri da 1 a 8 e procedere per esclusione: si verifica che $8^3 + 26^2 = 996$ è il più grande numero con la proprietà richiesta.

2 Un disegno con tanti incroci.

Non smettevo di pensare ai cerchi. Anche dopo il gelato era rimasta quella sensazione che qualcosa non andasse nel verso giusto: è bastato dare un'occhiata a quel segnale di attraversamento pedonale. Quelle linee nere sono parallele? Certo che no! Ma cosa significa parallele? E cosa significa linee? Su un cartello stradale, poi! E i cerchi invece? Quella sensazione è rimasta fino al mio rientro a casa, quando complice una sedia e una tisana ho finalmente avuto la possibilità di fare un disegno. — Una cosa ti rimane in testa finché non la disegni —- mi dicevano, e così ho fatto. Un cerchio, una linea, un altro cerchio, un altro ancora. Poi mi fermo e ammiro il disegno sul foglio: tre cerchi, una linea, e undici — anzi no — dodici punti di intersezione. Chissà se ce ne possono essere di più, e chissà cosa succede aumentando gli elementi disegnati.

Quante intersezioni si possono ottenere disegnando opportunamente 3 circonferenze e 3 rette? Pensiamoci un po' su...

`[27]` Tre circonferenze si intersecano al massimo in 6 punti. Una retta può intersecare tre circonferenze in un massimo di 6 punti; così, quando tracciamo la prima retta, otteniamo ulteriori 6 punti di intersezione. Quando tracciamo la seconda retta, oltre a 6 nuovi punti di intersezione con le circonferenze possiamo ottenere un ulteriore punto di intersezione con la retta precedente, e quando tracciamo la retta possiamo ottenere altri 6 punti di intersezione con le circonferenze e 2 punti di intersezione con le due rette precedenti. Il risultato è quindi $6 + 6 + 7 + 8 = 27$.

3 Cancellando cifre.

Erano passati tre giorni dall'ultima volta che ho pensato a un problema matematico. Incredibile. Forse disegnare rette e cerchi mi ha stancato più del dovuto. Mi siedo al tavolino di un bar per prendere un succo di frutta e iniziare bene la giornata. Al tavolino di fianco a me sono sedute due persone. Apparentemente hanno già consumato e pagato, perché le sento disquisire abbastanza animatamente. Stanno forse decidendo chi deve pagare? Non dovrei ascoltare, ma le loro parole catturano la mia attenzione.

— No, non puoi cancellare lo zero! non ha senso! —

— Certo che ha senso, perché dopo c'è un nove! —

Ditemi voi come avrei potuto resistere! Giro la sedia e guardo meglio: vedo che stanno scrivendo qualcosa a matita sui tovaglioli del bar.

— Scusate, non volevo ascoltarvi, ma mi avete incuriosito. Perché non si può cancellare lo zero? —

Mi guardano con curiosità: forse non si aspettavano questa interruzione.

— Stiamo cercando di risolvere un enigma: si inizia scrivendo in ordine i numeri da 1 a 60, uno a fianco all'altro —

Mi mostra il tovagliolo dove, tra i vari scarabocchi vedo scritto 1 2 3 4 ... 57 58 59 60

— Sono un sacco di numeri! — esclamo.

— Centoundici cifre, per la precisione — Fanno loro. — Il problema richiede di cancellarne 100 in modo che il numero che si ottiene compattando le cifre rimaste senza spostarle sia il maggiore possibile.

Che problema curioso: rimane un numero da 11 cifre, chiaramente, ma non possono essere tutti 9, perché non ci sono abbastanza 9 tra i numeri da 1 a 60. Ci penso un attimo e scribacchio anche io qualcosa sul mio tovagliolo.

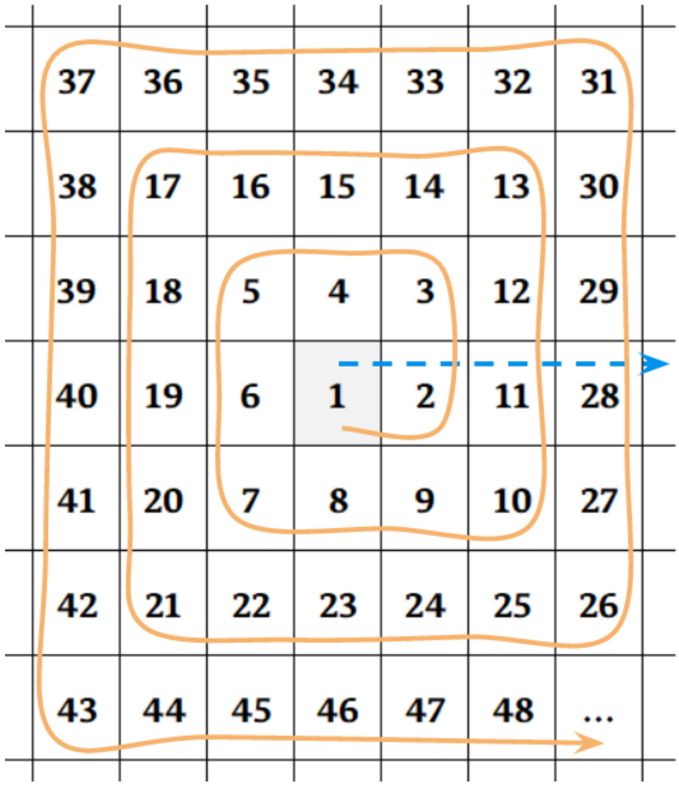
(Problema di Maurizio Codogno, dal libro Quizzini della domenica, numero 38)

`[99999785960]` I numeri da 1 a 60 sono composti in tutto da 111 cifre: 102 per i 51 numeri di due cifre compresi tra 10 e 60, e 9 per quelli di una cifra. Togliendone 100 ne rimangono 11. Di cifre uguali a 9 ce ne sono 6: non le possiamo mettere tutte all'inizio perché non avremmo abbastanza cifre ulteriori, quindi ne mettiamo solo 5 all'inizio, ottenendo $99999xxxxxx$. La sesta cifra non può essere un 9, come detto, e nemmeno un 8 (che potremmo prendere soltanto dal numero 58, cosa che non ci lascia abbastanza cifre per proseguire), pertanto deve essere un 7. Le cinque cifre finali si ottengono eliminandone una da 585960: conviene togliere dunque il primo 5. Il risultato è quindi 99999785960.

4 Pulci che passeggiano.

Non riuscivo a dimenticare la conversazione dell'altro giorno al bar. Dopo una lunga discussione su quello strano problema di cifre che si cancellano, la conclusione era stata: — interssante il tuo modo di ragionare, chissà se ci rivedremo —. Ripensandoci, è un modo un po' strano di salutarsi dopo una conversazion al bar, ma in effetti anche scarabocchiare sequenze di numeri sui tovaglioli lo è.

Stavo passando davanti allo stesso bar, notando che questo pomeriggio era tristemente vuoto, quando l'occhio mi cade su una bacheca che si trova all'esterno. Uno di quei posti dove in un istante lo sguardo passa dalle ripetizioni di latino all'open day della nuova palestra. Un volantino in particolare attira la mia attenzione: la carta su cui è stampato ha una qualità che lo fa risaltare rispetto agli altri. Pensandoci non è solo la carta, ma anche la grossa tabella di numeri stampata sopra. Un breve testo descrive l'immagine:



Una pulce si muove all'interno di una scacchiera infinita creando una sorta di spirale, come in figura, e numerando progressivamente tutte le caselle che incontra. Una seconda pulce, invece, partendo dalla casella che contiene il numero 1, si sposta facendo 3737 passi verso destra. Quale numero conterrà la casella su cui arriva proprio dopo 3737 passi?

Infine, sembra che sotto il disegno ci sia una casella, al momento vuota, che invita proprio a scriverci dentro la soluzione. In tasca ho una penna: come resistere?

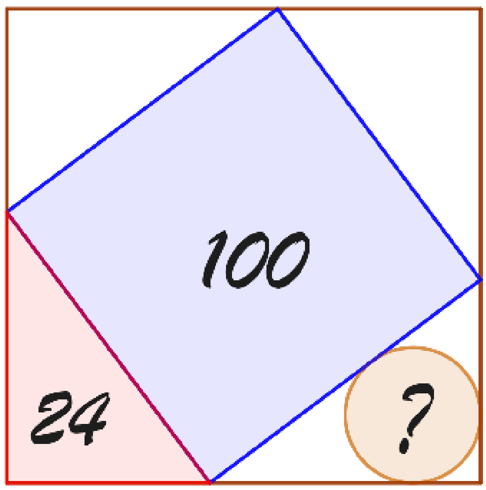
(Problema di Roberto Zanasi)

`[55849466]` Lungo la diagonale che va verso destra e in basso si trovano i quadrati dei numeri dispari: 1, 9, 25,.... Se cominciamo a contare dalla casella contenente 1, questi quadrati possono essere indicati con $(2k+1)^2$, con $k = 0, 1, \ldots$. Per raggiungere le caselle indicate dalla freccia blu, si osserva che devono essere fatti questi passi: se si parte dal numero 1, è sufficiente un passo verso destra e si raggiunge la casella 2. Se si parte dal numero

9, si deve fare un passo a destra e un passo verso l'alto, raggiungendo il numero 11. Se si parte dal numero 25, si deve fare un passo verso destra e due verso l'alto, e si arriva al 28. In generale, per calcolare il numero che si trova dopo aver fatto k passi verso destra, occorre arrivare al quadrato precedente (e cioè $(2k-1)^2$) e sommare k passi. La formula generale è quindi $(2k-1)^2 + k = 4k^2 - 4k + 1 + k = 4k^2 - 3k + 1$, che, per $k = 3737$, dà come risultato 55849466.

5 La busta misteriosa.

La lettera era nella cassetta della posta. La carta la stessa del volantino. Le poche parole erano scritte a mano, con una calligrafia elegante. Subito sotto la scritta una figura.



Notevole la facilità con cui hai risolto il problema sulla bacheca. Noi ci incontriamo ogni tre giorni, alle tre e un quarto del pomeriggio alla biblioteca. Saremo nella sala P, quella che è sempre chiusa a chiave. Bussa tante volte quanti π ci sono nel punto di domanda. Quante volte bussi alla porta?

(Un problema di Catriona Shearer)

`[4]` Il quadrato grande è diviso in un quadrato di lato 10 e in quattro triangoli rettangoli congruenti. Il cerchio inscritto nel triangolo è tangente a tutti e tre i lati, quindi è possibile calcolare l'area del triangolo moltiplicando il perimetro per il raggio del cerchio, e dividendo tutto per 2. I segmenti di tangenti uscenti dai tre vertici del triangolo sono a due a due congruenti, e quelli uscenti dall'angolo retto sono congruenti al raggio della circonferenza: se li indichiamo rispettivamente con x, y e r, abbiamo che $x + y = 10$ (lunghezza dell'ipotenusa) e che $(x+y+r)r = 24$ (calcolo dell'area del triangolo).

Sostituendo la prima equazione nella seconda si arriva a

$$r^2 + 10r - 24 = 0,$$

che si scompone in $(r + 12)(r - 2) = 0$. Si hanno due soluzioni, di cui solo quella positiva è accettabile: dunque il raggio del cerchio è 2 e la sua area è 4π, quindi la risposta è 4.

6 La sala P.

Lo ammetto: pensavo fosse uno scherzo. Magari qualche studente, uno di quelli appassionati agli enigmi che, dopo la prima sfida, non mancano di replicare. Magari qualche collega. Fattostà che non avevo impegni quel pomeriggio alle tre e un quarto: sembrava proprio una giornata ideale per passare qualche momento in biblioteca. Nell'edificio storico che ospita la biblioteca, la sala P è al pian terreno in uno di quei posti facili da dimenticare perché troppo vicino all'uscita. Busso come mi è stato indicato. — Entra, ti stavamo aspettando —

Il mio cuore fa un sobbalzo: fino a quel momento vivevo l'idea che fosse tutto un grosso scherzo, niente di più che un pomeriggio sprecato a fare due passi in biblioteca. Mi stanno aspettando? Chi? Perché? Ho un modo solo per scoprirlo.

Apro la porta. Una sala elegante, la sala P. Non mi sorprendo che rimanga sempre chiusa: le pareti di legno, il profumo di libri, la luce buona ma non intensa: meraviglioso. Nella sala ci sono una decina di persone: i miei occhi scorrono velocemente tra di loro. Alcuni seduti a un tavolo, alcuni su dei divanetti, alcuni per terra. Hanno tutti in mano un foglio e una penna.

— Buongiorno, c-cosa ci faccio qui? — Una tra loro mi passa un foglio e mi dice — Aiutaci a finire e poi ti spieghiamo tutto. Dai un'occhiata a questo. Hai da scrivere? —

Porto sempre un piccolo quadernino con me. Lo prendo e prendo il foglio che mi passa questa ragazza... Ma io la conosco! Lei era una delle persone sedute al bar che giocavano al problema delle cifre.

Sul foglietto un problema. Tra tutte le possibili soluzioni intere di $x^2 - y^2 = 3141$ scegli quella in cui x e y sono positivi, e $x + y$ ha il valore minore. Quanto vale $x + y$?

Mi siedo su una poltroncina rimasta libera e penso alla soluzione.

(Problema di Roberto Zanasi).

[349] Scomponiamo a destra e a sinistra:

$$(x + y)(x - y) = 3^2 \times 349.$$

Ci sono queste possibilità:

$$\begin{cases} x+y=3141 \\ x-y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=1047 \\ x-y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=349 \\ x-y=9 \end{cases}$$

Il valore minore che può assumere $x+y$ è quindi 349.

7 Il Libro.

Un pomeriggio interessante, passato a risolvere problemi, discutere di logica, riflettere, apprezzare la magnificenza della sala P. — Grazie per il meraviglioso pomeriggio, ma soprattutto grazie per la piccola caccia al tesoro che mi ha fatto arrivare qui — dico, rivolgendomi agli altri. — Posso chiedervi qualcosa in più su chi siete? Immagino facciate parte di un qualche gruppo di utenti della biblioteca.

— Non esattamente — mi dice la ragazza del bar. Il motivo per cui ci troviamo, il motivo per cui ci siamo sempre trovati, è... quello.

Mi giro seguendo il cenno che mi fa con la mano. In un angolo della sala c'è un libro, appoggiato aperto sopra un drappo di velluto rosso. Rimango senza fiato: non tanto perché il testo è chiaramente molto antico, né tantomeno per la maestosità del velluto, quanto perché il libro è posizionato esattamente all'opposto della porta di ingresso: prima, entrando, non c'era.

Mi accorgo che tutti hanno smesso di parlare, mi guardano mentre mi avvicino alle pagine. Il libro è decisamente antico; probabilmente più antico di qualsiasi cosa io abbia mai visto. La trama della pagina è strana, non sembra nemmeno che sia carta. Sulla pagina a cui è aperto c'è scritto qualcosa.

I numeri da 1 a 3141 (estremi compresi) sono scritti in ordine su un cerchio. Partendo da 1, si cerchia un numero saltando di 15 in 15 (1, 16, 31, 46, e così via, proseguendo lungo il cerchio). Si va avanti finché non si raggiunge un numero che è già stato cerchiato. Quando questo accade, quanti sono i numeri che non sono stati cerchiati?

— Mi sembra che tu riesca a vedere il Libro — dice a bassa voce la ragazza. — È un piacere darti il benvenuto nel Circolo.

(Tratto da un problema di Yaglom, Challenging Mathematical Problems With Elementary Solutions Vol 1, numero 10)

`[2094]` Dopo il primo giro sono stati cerchiati tutti i numeri che danno resto 1 nella divisione per 15, l'ultimo dei quali è 3136. Il primo numero che sarà cerchiato all'inizio del secondo giro è $3136+15-3141=10$. Durante il secondo giro saranno cerchiati tutti i numeri che danno resto 10 nella divisione per 15, l'ultimo dei quali è 3130. Il primo numero che sarà cerchiato all'inizio del terzo giro è $3130+15-3141=4$. Durante il terzo giro saranno allora cerchiati tutti i numeri che danno resto 4 nella divisione per 15, l'ultimo dei quali è 3139. Il primo numero che sarà cerchiato all'inizio del quarto giro è $3139+15-3141 = 13$. Durante il quarto giro saranno cerchiati tutti i numeri che danno resto 13 nella divisione per 15, l'ultimo dei quali è 3133. Il primo numero che sarà cerchiato all'inizio del quinto giro è $3133 + 15 - 3141 = 7$. Durante il quinto giro saranno cerchiati tutti i numeri che danno resto 7 nella divisione per 15, l'ultimo dei quali è 3127. Il primo numero che sarà cerchiato all'inizio del sesto giro è $3127 + 15 - 3141 = 1$, che è già stato cerchiato in precedenza.

Riassumendo: vengono cerchiati tutti i numeri che nella divisione per 15 danno resto 1, 4, 7, 10, 13, che sono esattamente i numeri che danno resto 1 nella divisione per 3. Di questi numeri ce ne sono $3141/3 = 1047$, quindi i numeri che non saranno cerchiati sono $3141 - 1047 = 2094$.

8 Problemi di apici.

Quella notte ho fatto fatica ad addormentarmi: niente ha più senso! — Ma che libro è? Sembra quasi che sia apparso dal nulla proprio quando lo avete nominato! — ho chiesto alle persone nella stanza.

— Il Libro è la ragione per cui siamo qui. Il Circolo esiste, esiste da quando esiste il Libro. Siamo un gruppo di persone con il solo scopo di proteggerlo e rispondere alle Sue domande. —

— Domande di che tipo? — Ho replicato.

— Domande e problemi di matematica, proprio come quello che hai appena visto. Il Libro propone e noi rispondiamo, è quello che si è sempre fatto.

— Non riesco a capire, cosa vuol dire che il Libro... propone?

— Semplicemente quando è il momento giusto lo apriamo, e alla pagina compare un problema. Sempre diverso. Noi lo risolviamo, e a turno scriviamo la soluzione nella stessa pagina, per poi richiudere il Libro; è quello che si è sempre fatto.

— Per esempio, ricordo un quesito molto interessante di qualche settimana fa. Stavo scrivendo al computer un testo, e volevo scrivere il numero $2^a 9^b$, ma ho dimenticato gli apici e ho scritto il numero di quattro cifre $2a9b$. Però mi è andata bene: il numero scrtto in maniera errata è comunque uguale a quello che volevo scrivere come prodotto di due potenze. Qual è questo numero?

`[2592]` Se $a = 0$, rimane da scoprire se per qualche b è vera l'uguaglianza $9^b = 2090 + b$. Se un tale b esiste, deve essere

$$2090 \leq 9^b \leq 2099,$$

e quindi

$$\log_9 2090 \leq b \leq \log_9 2099.$$

Calcolando i logaritmi, si ottiene (ricordando che b deve essere un numero naturale) che $4 \leq b \leq 3$, che è impossibile.

Se invece $a \neq 0$, allora il numero $2^a 9^b = 2a9b$ è pari, e quindi b è un multiplo di 2. Esaminiamo i vari casi: se $b = 0$ si ottiene

$$2090 \leq 2^a \leq 2990,$$

e passando ai logaritmi si ottiene

$$\log_2 2090 \leq a \leq \log_2 2990.$$

Calcolando i logaritmi, si ottiene che $12 \leq a \leq 11$, impossibile.

Se $b = 2$ si ottiene

$$2092 \leq 2^a 9^2 \leq 2992,$$

e cioè

$$\log_2 \frac{2092}{9^2} \leq a \leq \log_2 \frac{2992}{9^2}.$$

Calcolando i logaritmi, si ottiene che $5 \leq a \leq 5$. Dunque $a = 5$ è un valore accettabile, e per verifica diretta si ottiene proprio che $2^5 9^2 = 2592$.

Se $b = 4$ si ottengono (ora tagliamo un po' di passaggi) valori negativi per gli estremi dell'intervallo all'interno del quale può variare a. Lo stesso succede per tutti gli altri valori di b. Quindi l'unico numero per il quale vale la proprietà richiesta dal tipografo è proprio 2592.

9 L'anno non speciale.

Incredibile come un incontro possa cambiare le prospettive. Non vedevo l'ora di ritornare nella sala P. Non vedevo l'ora di scoprire il prossimo problema che il Libro avrebbe suggerito.

— Mi chiedo ancora come sia possibile che il Libro, se è così antico, scriva in una lingua che riusciamo a comprendere —, chiedo a uno degli altri partecipanti al Circolo.

— Questo non lo sappiamo, anche se da quello che si racconta, il Libro si evolve rispecchiando le personalità e i costumi che lo circondano.

Era uno dei primi pomeriggi dopo l'inverno in cui il sole inizia a filtrare dalle finestre della sala P. Quando l'ora è corretta apriamo il Libro e leggiamo.

Il 2022 è un anno speciale: si può scrivere come somma di numeri naturali consecutivi: $2022 = 504 + 505 + 506 + 507$. Pensandoci, anche il 2021 è un anno speciale: $2021 = 26 + 27 + 28 + \cdots + 68$. Pensandoci ancora un po', anche il 2020 è speciale. Nel terzo millennio (tra il 2000 e il 3000) c'è un solo anno che non si può esprimere come somma di numeri naturali consecutivi. Quale?

(Da un problema dei Rudi Mathematici)

`[2048]` Se indichiamo con $m+1$ l'intero positivo di partenza e con n l'intero positivo finale, e se ricordiamo la formula del piccolo Gauss sulla somma dei primi interi, che è la seguente:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

allora la proprietà richiesta dal problema si può esprimere in formule in questo modo:

$$\begin{aligned} N &= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}(n^2 + n - m^2 - m) \\ &= \frac{1}{2}((n-m)(n+m) + (n-m)) \\ &= \frac{1}{2}(n-m)(n+m+1). \end{aligned}$$

Ma questo significa che l'anno cercato N deve contenere almeno un fattore dispari, perché o $n-m$ é dispari, oppure lo é $n+m+1$. Fra tutti gli anni del terzo millennio solo $2048 = 2^{11}$ non contiene nemmeno un fattore dispari.

10 La torre di potenze.

I problemi presentati dal Libro erano vari: ogni tanto lunghi, ogni tanto corti. Ci buttavamo nella soluzione, che solitamente avveniva entro una o al massimo due ore, per poi lasciare tempo al relax e a qualche chiaccherata sul lavoro, o su qualche curiosità matematica interessante. Capitava che questi problemi fossero formati solamente da poche parole, come questo pomeriggio.

$$9^{8^{7^{6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}}}}$$

è un numero molto grande. Quali sono le sue ultime due cifre?

(Problema tratto dal newsgroup rec.puzzles)

`[21]` Studiamo le potenze di 9 modulo 100: $9^1 = 9$, $9^2 = 81$, $9^3 = 729 \equiv 29$, $9^4 \equiv 29 \times 9 \equiv 61$, $9^5 \equiv 61 \times 9 \equiv 49$, $9^6 \equiv 49 \times 9 \equiv 41$, $9^7 \equiv 41 \times 9 \equiv 69$, $9^8 \equiv 69 \times 9 \equiv 21$, $9^9 \equiv 21 \times 9 \equiv 89$, $9^{10} \equiv 89 \times 9 \equiv 1$, e qui ci possiamo fermare: le potenze di 9 modulo 100 formano un ciclo che si ripete ogni 10 moltiplicazioni. Ci basta quindi calcolare

$$8^{7^{6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}}} \mod 10.$$

Studiamo allora le potenze di 8 modulo 10: $8^1 = 8$, $8^2 \equiv 4$, $8^3 \equiv 4 \times 8 \equiv 2$, $8^4 \equiv 2 \times 8 = 6$, $8^5 \equiv 6 \times 8 \equiv 8$, e qui ci fermiamo: l'ultima cifra delle potenze di 8 si ripete dopo 4 moltiplicazioni. Ci basta quindi calcolare

$$7^{6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}} \mod 4.$$

Studiamo allora le potenze di 7 modulo 4: $7^1 = 7$, $7^2 = 49 \equiv 1$, e abbiamo già trovato una ripetizione. Le potenze di 7 modulo 4 si ripetono ogni due moltiplicazioni, quindi ci basta studiare

$$6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}} \mod 2,$$

ma questo è molto semplice, perché le potenze di 6 sono tutte pari, quindi quest'ultimo risultato è zero. Ripercorrendo all'indietro i calcoli fatti, abbiamo quindi che

$$7^{6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}} \equiv 7^0 = 1 \mod 4,$$

e quindi

$$8^{7^{6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}}} \equiv 8^1 = 8 \mod 10,$$

e infine

$$9^{8^{7^{6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}}}} \equiv 9^8 \equiv 21 \mod 100.$$

Quindi il risultato è 21.

11 La torre di potenze II.

Eravamo in gelateria e discutevamo di qualche curiosità legata all'ultimo problema.

— Il procedimento che abbiamo usato è elegante, ma avete notato che bastava cercare la soluzione su Wolfram alpha per avere direttamente la risposta? — Commenta una delle persone del Circolo, che ho scoperto essere insegnante. — Se lo assegno ai miei studenti cercherebbero immediatamente lì la soluzione senza riflettere sul procedimento.

— Dovresti complicare il problema. Se partissi da 99? Potresti chiedere loro le ultime due cifre di

$$99^{98^{97^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}}}.$$

Rifletto un attimo su questo consiglio, ma c'è qualcosa che non mi torna.

— Aspetta, se parti da 99 è troppo facile, anche senza usare il computer. Secondo me per una buona sfida potresti inziare dal numero 98:

$$98^{97^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}}.$$

è un numero molto grande. Quali sono le sue ultime due cifre?

[48] Non conosco un metodo rapido per cercare la ciclicità delle ultime due cifre delle potenze di 98. Andando per tentativi, si osserva che le ultime due cifre delle potenze di 98 sono

$$98, 4, 92, 16, 68, 64, 72, 56, 88, 24, 52, 96, 8, 84, 32, 36, 28, 44, 12, 76, 48, 4.$$

Si vede quindi che si ripetono con un periodo 20, a partire però dalla seconda posizione. Quindi è sufficiente studiare le potenze di 97 modulo 20. In questo caso, per non procedere di nuovo per tentativi, si può usare il teorema di Eulero-Fermat, che dice che

$$97^{\varphi(20)} \equiv 1 \mod 20.$$

Il numero $\varphi(20)$ è il numero dei numeri minori di 20 e primi rispetto a 20, che sono 8 (in realtà l'analisi per tentativi mostra che il periodo delle potenze di 97 modulo 20 è addirittura 4). Ci basta quindi studiare le potenze di 96 modulo 8 (o modulo 4). Ma 96 è multiplo di 8, quindi le sue potenze modulo 8 (e modulo 4) sono tutte uguali a 0.

Quindi $97^0 = 1$, ma non dobbiamo fare l'errore di considerare come risposta al quesito il numero 98^1: l'esponente di 98 in quella torre di potenze non è certamente uguale a 1, quindi dobbiamo scartare il primo valore dall'elenco delle ultime due cifre delle potenze di 98 (perché non fa parte del periodo) e prendere il 21-esimo, cioè 48.

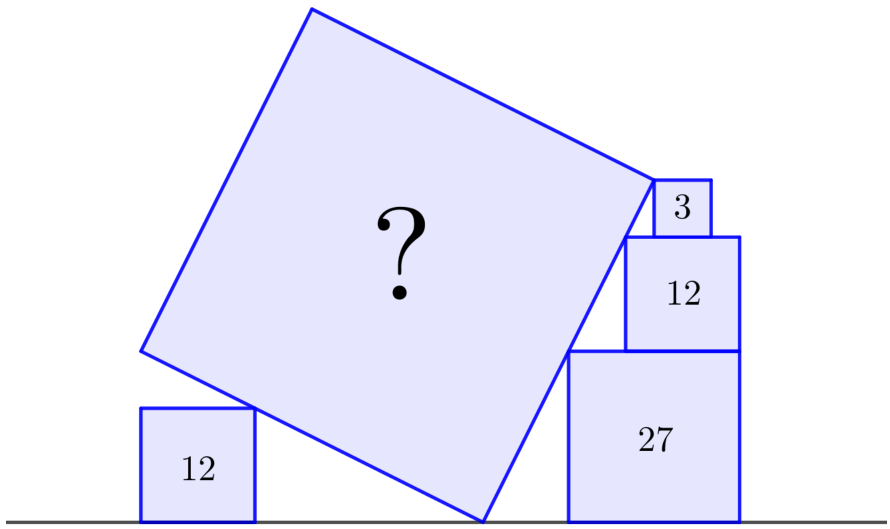
12 Quadrati accatastati.

— Per curiosità, voi sapete qualcosa di più di questo Libro? — La curiosità mi stava divorando: apparentemente sono centinaia di anni che questo gruppo di persone si raduna per risolvere problemi matematici e fare sì che il Libro non si rovini, e venga mantenuto nel tempo.

— Non sappiamo praticamente nulla, se non quello che ci si racconta tra una generazione e l'altra del Circolo. Ti pongo solo questa domanda: non ti è capitato di recente di notare qualcosa di strano? Magari qualcosa legato alla matematica che cambia?

— Ora che mi ci fai pensare si: qualche settimana fa ricordo qualche pensiero in gelateria — Rispondo.

— Ecco, non è un caso. Apparentemente, le risposte che diamo ai problemi che ci propone il Libro sono legate al modo in cui percepiamo la matematica. Nessuno sa il perché. Sappiamo solo che è essenziale fare del nostro meglio per dare le risposte corrette. Ma basta parlare, è ora di vedere il problema che il Libro ci propone oggi —



(Problema di Catriona Shearer).

`[135]` La figura sembra avere informazioni sovrabbondanti. Si notano vari triangoli rettangoli simili, per i quali il rapporto tra cateto maggiore e cateto minore vale 2. Il triangolo più grande (quello che ha come ipotenusa il lato del quadrato) ha il cateto maggiore lungo $6\sqrt{3}$, quello minore lungo $3\sqrt{3}$, dunque il quadrato costruito sull'ipotenusa ha area $(6\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{3})^2 = 135$.

13 Le sei piramidi.

Il Libro mi appariva sempre più come un oggetto misterioso. Ogni domanda fatta per saziare una qualche mia curiosità diventava sempre una miniera di nuovi interrogativi. — Cosa succede se non rispondiamo? Apparentemente nulla: il Libro semplicemente propone un nuovo enigma, questa volta alla pagina successiva. Solitamente però il Circolo riesce a dare una risposta, e si ricomincia.

— Cosa succede se diamo la risposta errata? Nulla di particolare, all'apparenza. Se non questi fenomeni misteriosi, che apparentemente nessuno è ancora riuscito a collegare direttamente con il Libro. Anzi, sembra sia già capitato che il Circolo si accorgesse di un errore nella soluzione dopo aver osservato questi fenomeni. Causalità o Correlazione? Chi lo sa. Era un pomeriggio piovoso, e questo rendeva la sala P addirittura più confortevole del solito. Apriamo il Libro.

Si sceglie un punto all'interno di un cubo e lo si collega con i suoi sei vertici, formando sei piramidi aventi come basi le facce del cubo. I volumi di cinque delle sei piramidi sono 2, 5, 10, 11 e 14. Qual è il volume della sesta piramide? (Da un quesito Kangourou).

`[6]` Il volume di ognuna delle piramidi è proporzionale alla sua altezza, e ogni coppia di piramidi aventi basi opposte ha somma delle altezze costanti, uguale al lato del cubo. Quindi le piramidi aventi basi opposte hanno lo stesso volume complessivo. I valori dati dal testo possono essere accoppiati in modo da avere somma costante soltanto in questo modo: $(5, 11)$, $(2, 14)$. La somma costante è quindi 16, e dunque la terza coppia è formata dai numeri 10 e 6. Il volume mancante è dunque uguale a 6.

14 Quante combinazioni.

Verso la fine del pomeriggio uscivamo dalla sala P. La città dove ci troviamo non è molto grande, così molti di noi si muovono in bicicletta. Arrivati al parcheggio noto una bici molto bella, con un pesante lucchetto che la tiene legata.

— Ma che bella! Appartiene a qualcuno di voi?

Uno dei membri del Circolo risponde — Si, è mia. Anzi, ti sfido a un piccolo enigma che riguarda questa combinazione. Ti do anche un aiuto!

Un lucchetto ha la combinazione di 4 cifre, da 0000 a 9999. Sappiamo che la somma delle prime due cifre è uguale alla somma delle altre due. Quante combinazioni soddisfano i requisiti? (Semifinali junior kangourou 2018)

`[670]` La somma delle prime due cifre può essere un numero compreso tra 0 e 18. C'è un modo solo per ottenere 0 (e cioè $0 + 0$) e 18 $(9 + 9)$, ci sono due modi per ottenere 1 $(1 + 0$ e $0 + 1)$ e 17 $(9 + 8$ e $8 + 9)$, tre modi per ottenere 2, e così via, fino a dieci modi per ottenere 9. In generale, quindi, ci sono $n + 1$ modi di ottenere la cifra n.

Per ogni modo di ottenere n sommando le prime due cifre, poi, ci sono $n + 1$ modi di ottenere lo stesso risultando sommando le altre due cifre. Il risultato, quindi, è

$$2\sum_{n=1}^{9} n^2 + 10^2 = 670.$$

15 Tom e Mary.

Non avevo mai visto il Circolo così agitato. A posteriori era ovvio: ci eravamo dimenticati una soluzione. Ma al momento nessuno ci aveva pensato, e la risposta data al Libro era chiaramente quella sbagliata. Quello che però rendeva tutto estremamente curioso è la maniera con cui ce ne siamo accorti. Uscendo ci stavamo salutando, dandoci come sempre appuntamento per l'incontro successivo.

— Ci vediamo! Come al solito apriamo la sala P alle tre meno un quarto.

— In che senso? Tre meno un quarto fa un mezzo, che orario è?

Sembrava un lapsus, ma è proprio quello che ha creato agitazione. Siamo rientrati, come se già gli altri sapessero che c'era un errore nella nostra soluzione. E effettivamente ce ne siamo accorti in poco tempo, e questo ci ha tranquillizzati quanto bastava per accomiatarci.

Dopo qualche giorno ci ritroviamo per il problema successivo, e prima di iniziare provo a chiedere qualche informazone in più su quello che era successo. Mi rispondono così:

— Quando facciamo un errore, è come se cambiasse qualcosa. Ce ne accorgiamo da semplici errori di ragionamento, cose ridicole. L'ultima volta io ho preso l'ascensore per salire dal piano 4 al piano 1. Succede principalmente a noi, ma le cose peggiorano se non ci affrettiamo a correggere la risposta.

— Ma come è possibile che rispondere sbagliato provochi questo? Non siamo mica in un film.

— Non lo sappiamo. Ci sono delle leggende che si tramandano da generazioni di membri del circolo. Storie di magia e di mistero. Personalmente non ci ho mai prestato attenzione. Ma ti possiamo raccontare qualcosa, se ti va.

— Volentieri, forse però adesso è il momento di aprire il Libro.

Se sommi il quadrato dell'età di Tom all'età di Mary, ottieni 62. Ma se sommi il quadrato dell'età di Mary all'età di Tom, ottieni 176. Quanto vale la somma dell'età di Tom e dell'età di Mary?

[20] Le richieste si traducono nel sistema di equazioni

$$\begin{cases} T^2 + M = 62 \\ T + M^2 = 176 \end{cases}$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima si ha:

$$T + M^2 - T^2 - M = 176 - 62 = 114,$$

che si può riscrivere come

$$T - M + (M + T)(M - T) = 114.$$

Si può raccogliere un fattore comune e ottenere:

$$(M - T)(M + T - 1) = 114 = 2 \times 3 \times 19.$$

Ci sono allora quattro possibilità:

$$\begin{cases} M - T = 1 \\ M + T - 1 = 114 \end{cases} \qquad \begin{cases} M - T = 2 \\ M + T - 1 = 57 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M - T = 3 \\ M + T - 1 = 38 \end{cases} \qquad \begin{cases} M - T = 6 \\ M + T - 1 = 19 \end{cases}$$

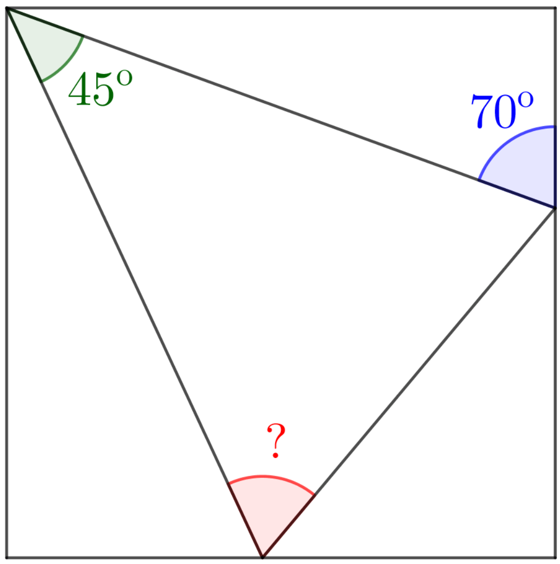
L'ultima dà come risultato $M = 13$ e $T = 7$, che è l'unico risultato compatibile con i dati, visto che $T^2 + M = 62$. La somma delle due età è quindi 20.

16 Un triangolo dentro a un quadrato.

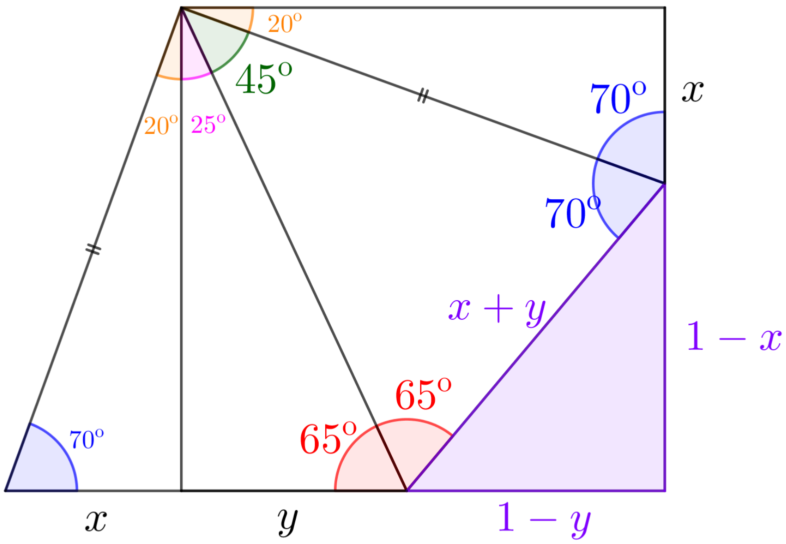
Nel pomeriggio avevo appuntamento per un gelato con una dei membri del circolo. Mentre siamo in coda chiedo:

— Per curiosità, qual era l'ultimo problema a cui avete dato una risposta errata?

— Me lo ricordo bene! Era uno di quei giorni in cui sul Libro compare solo un'immagine. Voglio proprio vedere se riesci a risolverlo! Scarabocchiando sul tovagliolo con una matita mi propone un disegno.

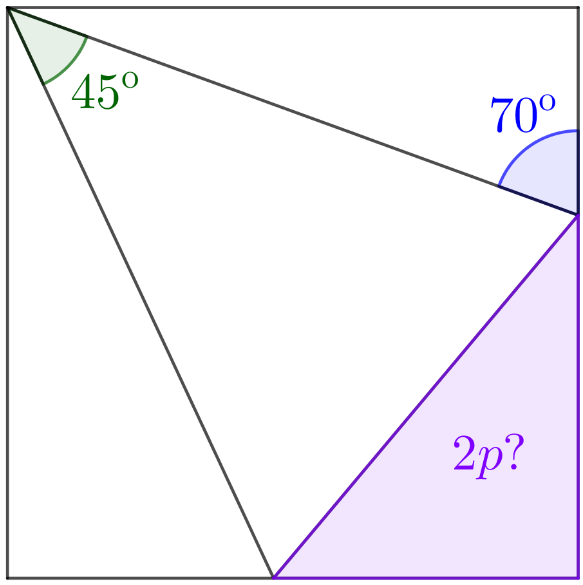


`[65]` La seguente costruzione mostra la risposta: si costruiscono due triangoli congruenti e si deduce, quindi, che l'angolo è di 65 gradi.



17 Un triangolo dentro a un quadrato II.

Mi sembra chiaro che il Libro deve avere qualche relazione con noi, con il nostro mondo, con il nostro modo di pensare. Avevo ancora in mente quel problema della gelateria, quando mi accorgo che il problema proposto dal Libro è chiaramente un proseguimento di quello. Come mai proprio oggi? Come mai dopo che hanno posto il quesito a me?



Supponiamo che il lato del quadrato sia lungo 1. Quanto vale il perimetro del triangolo in basso a destra?

`[2]` La figura che risolve il quesito precedente risolve anche questo: la somma dei lati del triangolo è uguale a 2.

18 Anagrammi.

Dopo l'ultimo errore la vita era tornata alla normalità. Eravamo riusciti a risolvere senza troppe difficoltà i quesiti posti dal Libro. Le domande rimanevano, e ogni tanto anche la curiosità. . . Provare a sfogliare qualche pagina, al posto di limitarsi a risolvere il prolema. Provare a scrivere la risposta in un'altra lingua. Provare a porre al Libro una domanda e vedere cosa succede. Ho qualche perplessità sul proporre queste idee agli altri membri del Circolo. D'altra parte però. . . che male ci sarebbe? Non sembra ci sia un regolamento su cosa fare e cose non fare. Tra un pensiero e l'altro era arrivato anche questa volta il giorno in cui risolvere un nuovo problema. Apriamo il Libro.

Quanti sono gli anagrammi della parola `PIGRECO`, anche privi di significato, in cui non compaiono consonanti in posizioni consecutive?

`[144]` Se le consonanti non possono apparire in posizioni consecutive, devono essere separate da vocali. Ma le vocali sono solo 3, quindi c'è un unico modo di sistemare i due tipi di lettere per poter soddisfare la richiesta del problema: si devono alternare consonanti e vocali, partendo con una una consonante.

Le quattro consonanti, poi, possono essere mescolate in $4! = 24$ modi diversi, mentre le tre vocali possono essere mescolate in $3! = 6$ modi diversi. La risposta è quindi $24 \times 6 = 144$.

19 Il milionario.

Caspita, appena in tempo! Penso, mentre entro nella sala P per incontrare gli altri membri del Circolo.

— Scusate, il traffico! Avete iniziato senza di me o mi avete aspettato?

— Il Libro si è aperto puntualissimo anche questa volta, però abbiamo qualche difficoltà a interpretare il problema. Io pensavo di averlo già sentito, ma forse mi sbaglio. Mi confondo sempre tutte le volte che vedo scritto... al più! Ecco, leggi qui:

Un anziano milionario matematico ha deciso di lasciare a ognuno dei suoi eredi una quantità di monete d'oro che sia una potenza di 7 (incluso 7^0). Inoltre non ci devono essere sette o più persone che ricevono la stessa cifra. Sapendo che il capitale del matematico ammonta a un milione di monete, quanti possono essere, al più, i pretendenti all'eredità? (Da un quesito dei Rudi Mathematici)

`[16]` Indicando con a_k il numero di eredi che riceveranno una quota pari a 7^k (e ricordando che $a_k < 7$), risolvere il problema significa trovare i valori di a_k che rendono vera l'equazione

$$\sum_{k=0}^{N} a_k 7^k = 10^6.$$

Detto in altri termini, questo significa trasformare 10^6 in base 7. Eseguendo i calcoli si ottiene che

$$(10^6)_{10} = (11333311)_7.$$

Gli eredi saranno quindi pari alla somma delle cifre di 11333311, cioè 16.

20 I due cerchi uguali.

A voi non appassionano quelle volte in cui il problema quasi non ha parole? L'impressione iniziale è quasi quella di non sapere come muoversi, di dover trovare una risposta in un mare di domande. Forse è proprio l'assenza di una frase iniziale a creare questa sensazione di mistero. Se ci penso è un po' come per il Libro. Scoprire da dove arriva, perché esiste, come mai si trova qui... Tutte domande che sembrano non avere un inizio. Poi ci si mette a ragionare, poco alla volta, partendo dalle basi più semplici.

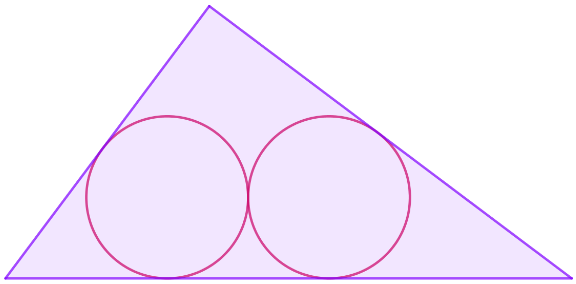
— La prima pagina! Posso provare ad aprire il Libro alla prima pagina?

— Ma li non ci sono problemi, perché lo vorresti fare?

— Per curiosità. Proviamo.

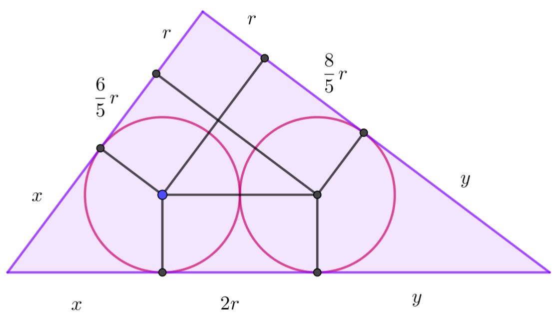
Ancora non capisco perché non mi sia venuto in mente prima. Apro il libro, questa volta alla pagina appena dopo la copertina. Mi aspettavo di trovare tutto bianco, ma non è così. Faccio appena in tempo a intravedere uno scarabocchio, quasi inciso nella pagina, ma è subito il momento di aprire la pagina centrale, per il problema che stiamo aspettando. Devo ricordarmi di controllare meglio una volta finito.

Il triangolo ha dimensioni 21, 28, 35. Quanto vale il raggio delle circonferenze (che sono uguali)?



(Da un sangaku giapponese)

[5]



Indichiamo con r il raggio delle due circonferenze. I segmenti di tamgente uscenti da ognuno dei vertici adiacenti all'ipotenusa sono congruenti: inoltre, tracciando dai centri delle circonferenze tre segmenti paralleli ai lati del triangolo si ottiene un triangolo simile a quello dato, di ipotenusa $2r$. Grazie alla similitudine è possibile calcolarne i cateti, che misurano $\dfrac{6}{5}r$ e $\dfrac{8}{5}r$.

Valgono quindi le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x + y + 2r = 35 \\ x + \dfrac{6}{5}r + r = 21 \\ y + \dfrac{8}{5}r + r = 28 \end{cases}$$

Cioè

$$\begin{cases} x + y + 2r = 35 \\ x + \dfrac{11}{5}r = 21 \\ y + \dfrac{13}{5}r = 28 \end{cases}$$

Ricavando x e y dalle ultime due equazioni e sostituendo nella prima si ottiene

$$21 - \frac{11}{5}r + 28 - \frac{13}{5}r + 2r = 35,$$

ovvero

$$\frac{14}{5}r = 14.$$

Da questa relazione si ricava $r = 5$.

21 Una divisione intera.

Non so nemmeno cosa posso aver trovato. Devo chiamarlo indizio? Devo chiamarlo messaggio? Ripenso ancora allo scarabocchio. Sono due lettere greche, a testimonianza che il Libro potrebbe essere effettivamente molto antico, o forse uno scherzo molto elaborato.

$\pi \quad \sigma$

Le lettere compaiono in una pagina bianca, sembra non esserci altro, ma mi riprometto di controllare di nuovo, dopo che, sperabilmente, saremo riusciti a risolvere insieme la proposta di oggi. Tocca ancora a me aprire il Libro. Per quanti numeri interi la seguente espressione fornisce un numero intero?

$$\frac{n}{n - 314}.$$

[8] L'espressione può essere scritta in questo modo:

$$\frac{n}{n - 314} = \frac{n - 314 + 314}{n - 314} = 1 + \frac{314}{n - 314}.$$

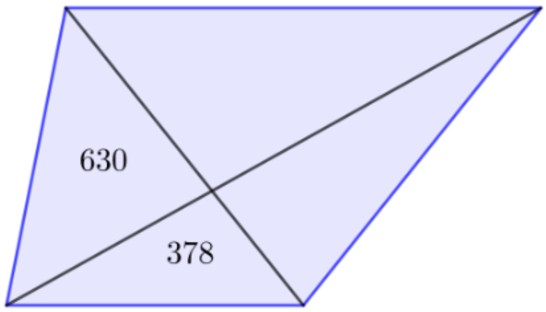
Dobbiamo quindi studiare per quali valori di n risulta intera la frazione $\frac{314}{n-314}$.

I divisori di 314 sono 1, 2, 157 e 314, e quindi il denominatore $n - 314$ può assumere solo uno di quei quattro valori, *in valore assoluto*. Risultano quindi 8 casi possibili, che corrispondono a n uguale a 0, 157, 312, 313, 315, 316, 471, 628.

22 Il trapezio.

Tra un problema e l'altro proseguo a chiedere agli altri membri del Circolo se hanno qualche idea sulle due lettere che ho trovato all'inizio del Libro. A parte qualche supposizione putroppo non c'è nessuna notizia certa, le leggende tramandate negli anni dai membri del Circolo non aiutano in questo senso: si trova tutto e il contrario di tutto. L'unica cosa certa è che in qualche momento del tempo, qualcuno che conosce il greco ha scritto sul Libro. Devo pensare a trovare qualche altro indizio. Mi riprometto di dare un'occhiata ancora alle due lettere greche dopo aver, sperabilmente, rsolto il problema di oggi.

Quanto vale l'area di questo trapezio?



`[2688]` Il triangolo con vertice opposto a quello di area 630 ha la sua stessa area, 630, dato che se a entrambi i triangoli sommiamo quello di area 378 otteniamo due triangoli aventi la stessa base e la stessa altezza.

Le aree dei due triangoli a sinistra stanno tra loro come le rispettive basi, che sono anche le basi dei due triangoli di destra. Se chiamo x l'area del triangolo in alto, ho quindi che $630/378 = x/630$, cioè $x = 630^2/378 = 1050$. L'area del trapezio è quindi uguale a $378 + 630 + 630 + 1050 = 2688$.

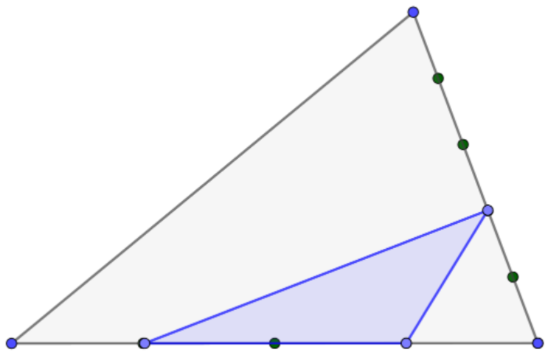
23 Triangolo dentro triangolo.

Mancavano pochi minuti prima di mettersi a risolvere il problema di oggi. Di recente le cose andavano bene: problemi risolti facilmente e tante curiosità che emergevano continuamente dalla storia del Libro. Mentre mi avvicino per aprire la pagina del problema, ripenso alle lettere iniziali, e inizio a sfogliare il Libro dall'inizio. Nella prima pagina intravedo le lettere, che ora riconosco immediatamente. Con curiosità giro la pagina. Nella stessa posizione altre due lettere.

'AK

Che strano, potrebbe essre un codice: in un attimo riemerge la mia passione per i cifrari, e penso come si potrebbe creare una frase iniziando con quelle lettere. Purtroppo il tempo non basta, e mi ritrovo ad aprire le pagine centrali per leggere il problema proposto dal Libro.

L'area del triangolo grande vale 65940. Quanto vale l'area del triangolo piccolo, colorato in blu?



`[13188]` Due triangoli che hanno la stessa altezza hanno le aree che stanno fra loro come le rispettive basi: la base del triangolo evidenziato è i $\frac{2}{4}$ della base del triangolo più grande. Lo stesso ragionamento può essere fatto sui triangoli che hanno la stessa base: le aree stanno fra loro come le rispettive altezze; l'altezza del triangolo evidenziato è i $\frac{2}{5}$ di quella del triangolo più grande. Quindi l'area richiesta è

$$\frac{2}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

di quella del triangolo dato, cioè

$$\frac{1}{5} \cdot 65940 = 13188.$$

24 I numeri strani.

Sembravano una A e una K, anche se i caratteri erano leggermente diversi da come li avrei scritti io. Il tempo fugge sempre troppo velocemente, e non riesco a pensare a nulla che accomuni le lettere, e nemmeno a un qualche codice che le possa associare a numeri conosciuti. Il problema di oggi non aveva immagini: possibile che questi problemi siano legati in qualche modo alle lettere iniziali?

Scriviamo i numeri naturali in base 10 e definiamo i numeri *strani* con la seguente legge:

- Un numero di una sola cifra è strano se e solo se è primo.
- Un numero primo di almeno due cifre è strano se e solo se sono strani i due numeri ottenuti sopprimendo da esso una volta la prima e una volta l'ultima cifra.

Trovare tutti i numeri strani, e fornire come risposta il numero che si ottiene accostando tutti i numeri strani ordinati in ordine crescente. (Dalla gara del 15 aprile 2000 della Mathesis di Udine)

`[235723375373373]` I numeri strani di una sola cifra sono solo i primi: 2, 3, 5, 7.

Un numero strano di due cifre può essere ottenuto utilizzando solo le cifre 2, 3, 5 e 7; inoltre, dovendo essere primo, le due cifre devono essere fra loro diverse e la seconda non può essere né 2 né 5. Basta dunque controllare i numeri 23, 27, 37, 53, 57, 73. Tra essi, gli unici numeri strani di due cifre sono 23, 37, 53, 73.

I numeri strani di tre cifre possono cominciare e finire solo con 23, 37, 53 e 73. Le possibili combinazioni sono le seguenti: 237, 373, 537, 737. Fra essi l'unico primo è 373.

Un numero strano di quattro cifre dovrebbe cominciare e finire con 373, ma ciò è impossibile. Non esistono dunque numeri strani di quattro cifre. Non ne esistono nemmeno con n cifre, con $n > 4$. Infatti questi dovrebbero cominciare e finire con un numero strano di $n - 1$ cifre che, a sua volta, dovrebbe cominciare e finire con un numero strano di $n - 2$ cifre, e così via, fino ad arrivare a un numero strano di quattro cifre, ma ciò non è possibile. I numeri strani sono quindi soltanto nove e sono 2, 3, 5, 7, 23, 37, 53, 73, 373.

La risposta è 235723375373373.

25 Poligoni regolari.

Questa volta ho trovato il tempo per arrivare nella sala P un paio d'ore prima. Tra l'altro è sempre un'occasione per parlare con altre persone del Circolo, dato che spesso ci si ritrova prima proprio per discutere di problemi di matematica.

Il Libro è difficile da sfogliare: innanzitutto è un oggetto antico; sebbene sia in buono stato non ci arrischiamo mai a girare le pagine troppo spesso. Anzi, solitamente l'attività del Circolo si limita ad aprire la pagina centrale e risolvere il problema che il Libro suggerisce. Inoltre il Libro è sempre circondato da un'aura di mistero, quasi fosse un'entità pensante e con una sua volontà. Nonostante questo mi arrischio a dare un'occhiata alle pagine dopo la prima e la seconda, ed è quello che mi aspettavo: ogni pagina una coppia di lettere, e avanti e avanti, con l'inchiostro che sembra quasi cambiare di intensità da una pagina all'altra. Mi riprometto di fare un secondo tentativo associando numeri e lettere, per scoprire se qualche dato in più basta per intuire una qualche relazione. Ora però è il momento di aprire le pagine centrali!

Quanti sono i poligoni regolari (di almeno 3 lati) aventi gli angoli interni che misurano un numero intero di gradi sessagesimali?

`[22]` La misura di ogni angolo interno di un poligono regolare è $180(n-2)/n = 180 - 360/n$.

Basta determinare, quindi, il numero di divisori di 360. Dato che $360 = 2^3 3^2 5$, esso è pari a $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Da questi 24 divisori occorre però sottrarne due, e cioè i numeri 1 e 2, perché non danno risultati accettabili.

Esistono quindi 22 poligoni regolari i cui angoli interni misurano un numero intero di gradi sessagesimali.

26 Numeri con tanti divisori.

π, σ, $'A$, K, σ, Γ, K. E così via. Nessuna apparente regolarità, almeno dal mio punto di vista. Nessuna idea da parte delle altre persone del Circolo. A quanto pare altre persone si erano interessate in passato di questo piccolo mistero, ma non ci sono appunti, non ci sono note che suggeriscono una possibile risposta. Poi, da una chiacchera all'altra si arriva a parlare di qualche enigma matematico.

— Vi è mai capitato in qualche enigma di dover fattorizzare un numero? Quello è sempre un passaggio relativamente meccanico.

— Di sicuro: una cosa che ho notato però è che quando poi si parla di lavorare sui divisori di un numeri capita spesso di confondersi, ed è curioso: dato che i divisori e i fattori primi sono tanto legati tra loro.

— Mi viene in mente un piccolo enigma per giocare un poco su questi concetti! Che ne pensate? Qual è il più piccolo numero con 100 divisori?

`[45360]` Se vogliamo ottenere il più piccolo numero con 100 divisori, dobbiamo distribuire i fattori di 100 tra i primi numeri primi in modo da ottenere il risultato più piccolo possibile. Per esempio, 2^{99} ha 100 divisori, ma anche $2^{49} \cdot 3$ ne ha 100 ed è minore del precedente. Conviene allora scomporre 100 nel prodotto $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$ e costruire il numero $2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 = 45360$, che è il più piccolo numero con 100 divisori.

27 Contando lati e diagonali.

Mi stupisco sempre di quanta dedizione alla soluzione di questi problemi c'è tra le persone del Circolo. Io sono qui da qualche settimana, ma ci sono persone che da anni si prendono cura del Libro, praticamente senza pause.

Forse è dovuto a questa aura di mistero e di curiosità che ci spinge spesso anche a fermarci dopo aver risolto un problema per andare avanti a discuterne un po'.

— Ma secondo voi la difficoltà di questi problemi è controllata da qualcosa?

— Non credo, o almeno, io non ho mai avuto questa impressione. Ricordo sia quesiti molto molto difficili, che quesiti estremamente facili.

— Fammi un esempio di qualche domanda che secondo te era estremamente facile.

— Con piacere, anzi, vediamo quanto impieghi a risolverla!

In un poligono regolare il cubo del numero dei lati è uguale al quadrato del numero delle diagonali. Qual è il numero dei lati?

`[9]` Il numero di diagonali in un poligono regolare di n lati (con $n > 2$) è $\frac{n(n-3)}{2}$. Si deve risolvere l'equazione

$$n^3 = \left(\frac{n(n-3)}{2}\right)^2,$$

cioè

$$n^2((n-3)^2 - 4n) = 0,$$

da cui si ottiene

$$n^2(n^2 - 10n + 9) = n^2(n-1)(n-9) = 0.$$

L'unica soluzione maggiore di 2 è $n = 9$.

28 Anagrammi II.

— Tra l'altro, alcuni problemi sono più complicati, ma non richiedono grandi teoremi o raffinate tecniche. Solo molta pazienza.

— Come se ci fossero presonalità diverse che scrivono i problemi?

— Sì, esatto.

Questa informazione mi lascia un sacco di domande, forse più di quelle che avevo prima. Forse è questo il momento in cui nella mia mente inizia a formarsi una piccola idea, come una tentazione. Ma se chiedessimo noi un problema al Libro?

Riflettendo su questa curiosità mi butto a capofitto nel problema di oggi. Scriviamo tutti gli anagrammi, anche quelli privi di significato, della parola `PIGRECO` in ordine alfabetico. In che posizione si trova `PIGRECO`?

`[4029]` Consideriamo la prima lettera: ci sono $6!$ parole che iniziano con `C`, altrettante che iniziano con `E`, e così via per `G`, `I`, `O`. In totale, abbiamo contato $5 \times 6!$ parole, e la successiva inizierà con `P`.

Consideriamo ora la seconda lettera: ci sono $5!$ parole che iniziano con `PC`, altrettante che iniziano con `PE` e `PG`. In totale, abbiamo altre $3 \times 5!$ parole, e la successiva inizierà con `PI`.

Passiamo alla terza lettera: ci sono $4!$ parole che iniziano con `PIC` e altre $4!$ che iniziano con `PIE`. In totale, abbiamo $2 \times 4!$ parole, e la successiva inizierà con `PIG`.

Ora passiamo alla quarta lettera: ci sono $3!$ parole che iniziano con `PIGC`, altrettante che iniziano con `PIGE` e `PIGO`. In totale, $3 \times 3!$ parole, e la successiva inizierà con `PIGR`.

Arrivamo quindi alla quinta lettera: ci sono 2 parole che iniziano con `PIGRC`, e la successiva inizierà con `PIGRE`.

Ed eccoci arrivati: la prossima parola sarà proprio `PIGRECO`. In totale abbiamo contato

$$5 \times 6! + 3 \times 5! + 2 \times 4! + 3 \times 3! + 2 + 1 = 4029$$

parole.

29 Quattordicesime potenze.

L'idea di scrivere qualcosa sul Libro che non fosse la semplice risposta al problema mi incuriosiva sempre di più. Quello che non capivo è quanto le altre persone del Circolo sarebbero state d'accordo. In fondo, trattiamo il Libro con un tale rispetto che la sola idea di deviare dal percorso che abbiamo sempre seguito suona quasi come imbrattare un'opera d'arte.

Ma pensandoci... le personalità del libro sono differenti, perché mai non dovremmo aggiungere noi uno spunto di problema? Non so se parlarne con le altre persone. D'altronde, perché no? Scriviamo già sul Libro, e non ci sono regole che determinano cosa possiamo e cosa non possiamo fare. Mentre penso a questo, mi viene in mente quale problema si potrebbe provare a scrivere. Ho questa idea:

Quanto vale la somma delle quattordicesime potenze delle soluzioni dell'equazione $x^7 - x - 1 = 0$?

`[7]` Dato che $x^7 = x + 1$, avremo che $x^{14} = x^2 + 2x + 1$.

Se indichiamo con x_i, con $i = 1, \ldots, 7$ le sette soluzioni dell'equazione, la richiesta del problema diventa il calcolo della somma

$$\sum_{i=1}^{7} x_i^{14} = \sum_{i=1}^{7} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{7} x_i + \sum_{i=1}^{7} 1.$$

Data un'equazione del tipo $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, sappiamo[1] che l'informazione relativa alla somma delle radici è contenuta in a_{n-1} (più precisamente, la somma delle radici è uguale a $-a_{n-1}$, che nell'equazione data è $a_6 = 0$. Quindi $\sum_{i=1}^{7} x_i = 0$.

Notiamo poi che

$$\sum_{i=1}^{7} x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{7} x_i\right)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots x_6x_7),$$

e l'informazione relativa alla somma dei prodotti a due a due delle radici è contenuta in a_{n-2}, ma anche questo coefficiente è nullo. Dunque $\sum_{i=1}^{7} x_i^2 = 0$, e il calcolo si riduce a

$$\sum_{i=1}^{7} x_i^{14} = \sum_{i=1}^{7} 1 = 7.$$

30 Solo 20 centesimi.

Ho deciso. Aspetterò di aver risolto il problema di oggi, mi fermerò nella sala P un po' più a lungo del solito. Non è raro che gli altri vadano insieme a prendere un gelato, per cui è abbastanza certo che sarò l'unica persona nella sala. E quello sarà il momento. Girerò la pagina e chiederò il problema al Libro. Vediamo cosa succede! Per prima cosa... risolvere il problema di oggi!

Ho a disposizione monete da 1, 2, 5, 10 e 20 centesimi di euro. Un modo per avere esattamente 20 centesimi è avere 3 monete da 1 centesimo, 1 moneta da 2 centesimi e 3 monete da 5 centesimi. Quanti sono tutti i possibili modi di avere 20 centesimi?

`[41]` Cominciamo con un caso semplice: quanti sono i modi di ottenere 6 con le monete da 1, 2, 5 centesimi? Siccome non sono tanti, possiamo elencarli tutti:

- $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
- $1 + 1 + 1 + 1 + 2$
- $1 + 1 + 2 + 2$

[1] Formule di Viète

- $2 + 2 + 2$
- $1 + 5$

Possiamo divedere l'elenco precedente in due gruppi: tutti i modi di ottenere 6 usando solo le monete da 1 e 2 centesimi, e tutti i modi di ottenere 6 usando almeno una moneta da 5 centesimi. Per contare gli elementi del secondo gruppo, che contengono obbligatoriamente almeno una moneta da 5 centesimi, mi basta contare quanti sono i modi di ottenere $6 - 5 = 1$ con le monete da 1,2 e 5 centesimi. Infatti, se riesco ad arrivare a 1, poi posso aggiungere una moneta da 5 per arrivare a 6.

Adottiamo quindi la seguente notazione: si indica con $n(a, S)$ il numero di modi di ottenere a usando le monete presenti nell'insieme S. Se ordiniamo gli elementi di S in ordine crescente, e li indichiamo con m_1, m_2, ..., m_k, abbiamo che

$$n(a.\{m_1, m_2, \dots, m_k\}) = \\ n(a, \{m_1, m_2, \dots, m_{k-1}\}) + n(a - m_k, \{m_1, m_2, \dots, m_k\}).$$

Il problema ci chiede di calcolare $n(20, \{1, 2, 5, 10, 20\})$.

Facciamo una considerazione preliminare, a partire ancora una volta da un esempio: vogliamo calcolare $n(4, \{1, 2\})$, cioè il numero di modi di ottenere 4 usando le monete da 1 e da 2. Secondo la relazione ricorsiva scritta poco sopra, risulta che:

$$n(4, \{1, 2\}) = n(4, \{1\}) + n(2, \{1, 2\}),$$

che significa che il numero di modi di ottenere 4 usando le monete da 1 e da 2 è uguale al numero di modi di ottenere 4 usando solo la moneta da 1 (cioè un modo solo, $1 + 1 + 1 + 1$) più il numero di modi di ottenere 2 usando le monete da 1 e da 2. A sua volta, questo valore è dato da

$$n(2, \{1, 2\}) = n(2, \{1\}) + n(0, \{1, 2\}),$$

cioè il numero di modi di ottenere 2 usando solo la moneta da 1 (un solo modo, $1 + 1$) e il numero di modi di ottenere 0 usando le monete da 1 e da 2 (ho un solo modo di ottenere 0, cioè non fare niente, perché parto proprio da 0; questa scelta è valida perché una volta ottenuto 0 posso poi raggiungere 2 sommando 2).

Il risultato è quindi che

$$\begin{aligned} n(4, \{1, 2\}) &= n(4, \{1\}) + n(2, \{1, 2\}) \\ &= 1 + n(2, \{1\}) + n(0, \{1, 2\}) \\ &= 1 + 1 + 1 = 3, \end{aligned}$$

e infatti i modi di ottenere 4 sono proprio questi tre: $1+1+1+1$, $1+1+2$, $2+2$.

Se volessimo calcolare $n(6,\{1,2\})$ dovremmo ripercorrere gli stessi calcoli appena fatti aggiungendo un passaggio in più:

$$\begin{aligned} n(6,\{1,2\}) &= n(6,\{1\}) + n(4,\{1,2\}) \\ &= 1 + n(4,\{1\}) + n(2,\{1,2\}) \\ &= 1 + 1 + n(2,\{1\}) + n(0,\{1,2\}) \\ &= 1+1+1+1 = 4, \end{aligned}$$

e infatti i modi di ottenere 6 sono proprio questi quattro: $1+1+1+1+1+1$, $1+1+1+1+2$, $1+1+2+2$, $2+2+2$. In generale, quindi, possiamo affermare che vale la seguente formula:

$$n(2m,\{1,2\}) = m+1.$$

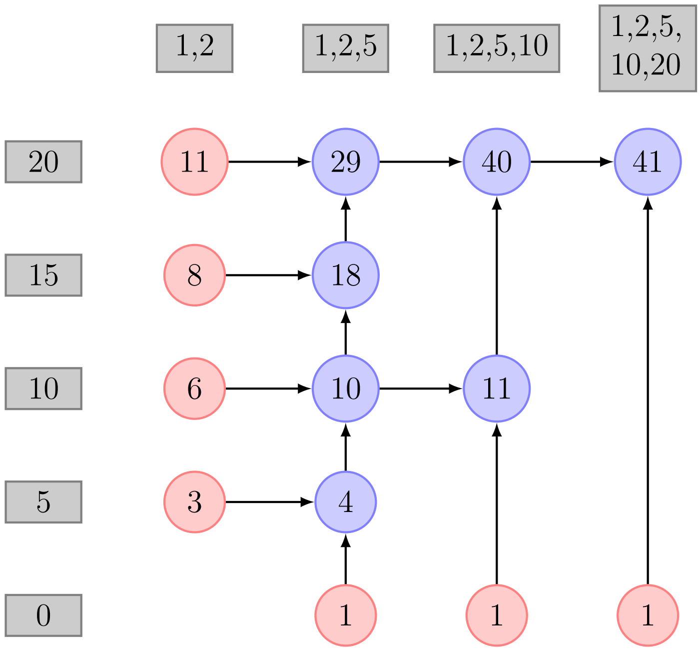
Possiamo fare un calcolo simile per i numeri dispari. Prendiamo per esempio il calcolo di $n(3,\{1,2\})$: esso è uguale a $n(3,\{1\}) + n(1,\{1,2\})$, e entrambi questi addendi sono uguali a 1. Infatti c'è un solo modo di ottenere 3 usando solo la cifra 1 (e cioè $1+1+1$) e c'è un solo modo di ottenere 1 usando le cifre 1 e 2 (e cioè, semplicemente, scrivendo 1).

Passiamo al calcolo di $n(5,\{1,2\})$. Esso è uguale a $n(5,\{1\})+n(3,\{1,2\}) = 1+2 = 3$, e infatti i modi per ottenere 5 sono questi tre: $1+1+1+1+1$, $1+1+1+2$, $1+2+2$.

Possiamo quindi concludere che la formula relativa ai numeri dispari è

$$n(2m+1,\{1,2\}) = m+1.$$

Usando la relazione ricorsiva trovata all'inizio e le due formule per il calcolo diretto di n usando numeri pari e numeri dispari, possiamo affrontare il calcolo di $n(20,\{1,2,5,10,20\})$. La relazione ricorsiva è riassunta dalla seguente tabella:



in cui sulle righe sono indicate le somme di denaro che si vogliono ottenere, e sulle colonne le monete che si possono usare. I cerchi rossi corrispondono alle condizioni iniziali, quelli blu alle quantità che si possono ricavare dalla relazione ricorsiva. La risposta è quindi nel cerchio in alto a destra: 41.

31 Multipli di 5.

Un disastro! Non oso pensare a cosa succederà al prossimo incontro. All'inizio è andato tutto come doveva: abbiamo letto il problema, siamo riusciti a risolverlo e, dopo aver scritto la risposta sul Libro, ho aspettato nella sala P che le altre persone del Circolo uscissero. Poi ho semplicemente riaperto il Libro sulla pagina centrale, osservato che come sempre il problema era già sparito, e ho scritto il mio problema sulla pagina vuota.

E... niente! Il problema è rimasto li, con la mia grafia, un piccolo atto vandalico nei confronti di un oggetto così misterioso. Ho chiuso, aperto, richiuso, riaperto ma niente, come aver scritto su una pagina di un libro normale.

Non so cosa succederà tra tre giorni, ma temo di scoprire cosa diranno le altre persone quando si accorgeranno di questo stupido esperimento. Tornando a casa mi ricordo a tratti il problema, forse l'ultimo nella storia, che il Libro aveva proposto quel pomeriggio.

Sia $p(n) = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$. Per quanti valori di n compresi tra 1 e 100 (estremi inclusi) $p(n)$ è multiplo di 5?

`[75]` Ragionando modulo 5, abbiamo che $4 \equiv -1$ e che $3 \equiv -2$. Se consideriamo allora un n dispari, abbiamo che

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n \equiv 1^2 + 2^n + (-2)^n + (-1)^n + 5^n = 5^n,$$

quindi $p(n)$ è multiplo di 5; ci sono 50 numeri con questa proprietà.

Se invece n è pari, possiamo scriverlo come $n = 2m$. In questo caso $p(n)$ diventa

$$\begin{aligned} 1^{2m} + 2^{2m} + 3^{2m} + 4^{2m} + 5^{2m} &= 1^m + 4^m + 9^m + 16^m + 25^m \\ &\equiv 1^m + (-1)^m + (-1)^m + 1^m + 25^m. \end{aligned}$$

Se m è dispari, la somma precedente diventa congruente a 25^m, e quindi è un multiplo di 5. Se m invece è pari, la somma è congruente a 4 e quindi non è un multiplo di 5. Ci sono 25 numeri con questa caratteristica, e quindi i multipli di 5 sono in tutto $50 + 25 = 75$.

32 Un polinomio misterioso.

Ancora non mi capacito di quello che è successo. Sono passati tre giorni, nel pieno dell'agitazione, in cui non ho rimesso piede nella sala P. Arriva il momento di aprire il Libro, mi avvicino quasi tremante, apro la pagina. Tutto normale. Tutto normale?!

Nessuna traccia di quello che avevo scritto, come se non fosse successo. Il problema proposto dal Libro è li, come sempre.

$p(x)$ è un polinomio misterioso di grado 999, tale che

- $p(1) = 1$,
- $p(2) = \dfrac{1}{2}$,
- $p(3) = \dfrac{1}{3}$,
- ...
- $p(1000) = \dfrac{1}{1000}$.

Quanto vale $p(1001)$?

Nessuno si accorge di nulla, nemmeno delle mie mani che tremano scrivendo la soluzione quasi quanto la prima volta.

La cosa più strana però è successa dopo! Rimango ancora nella sala P quando gli altri sono usciti: voglio controllare ancora la pagina in cui ho scritto: cercando segni della penna, macchie di inchiostro. Saluto l'ultima persona del Circolo che sta uscendo, dicendo di dovermi fermare per chiudere le finestre. Mentre lo sto facendo sento all'improvviso un rumore, come un frusciare di pagine. Mi giro ed è il Libro. Si è aperto... da solo.

`[0]` Consideriamo il polinomio $q(x) = xp(x) - 1$: esso è tale che $q(1) = q(2) = \ldots q(1000) = 0$. Quindi, per il teorema di Ruffini, e tenendo conto che esso ha grado 1000, $q(x)$ sarà

$$q(x) = (x - 1)(x - 2) \ldots (x - 1000)k.$$

Se si svolgono le moltiplicazioni, si conclude che il termine noto di $q(x)$ è uguale a $k1000!$, e quindi $k = -\frac{1}{1000!}$.

Ora possiamo calcolare

$$q(1001) = 1001p(1001) - 1 = 1000 \cdot 999 \cdot 998 \ldots \frac{-1}{1000!} = -1,$$

e quindi possiamo concludere che

$$1001p(1001) - 1 = -1,$$

cioè $p(1001) = 0$.

33 Dieci cifre tutte diverse.

Era chiaro che non poteva essere stato un colpo di vento: avevo appena chiuso le finestre! Mi avvcino al Libro e controllo meglio la pagina. Sta quasi all'inizio. Anzi, dopo un controllo veloce mi accorgo che sembra essere la prima pagina libera dopo tutte le coppie di lettere che si trovano nelle pagine iniziali.

Questa era una cosa che non avevo controllato! Sfogliando le prime pagine del Libro, però, si nota in modo molto evidente anche il fatto che le ultime lettere sembrano più nitide, con caratteri più moderni. Curiosamente, l'ultima pagina scritta non ha due lettere, ma tre: ACS. Curiosamente... queste tre lettere non mi sono nuove, è come se le avessi già sentite da qualche altra parte. Cosa sta cercando di dirmi il Libro? Rimango per qualche giorno a pensare a questa cosa, tornando nella sala P per l'usuale incontro per il problema.

Trovare un numero naturale di dieci cifre $abcdefghij$ tutte diverse tale che

- a è divisibile per 1
- ab è divisibile per 2

- abc è divisibile per 3
- $abcd$ è divisibile per 4
- $abcde$ è divisibile per 5
- $abcdef$ è divisibile per 6
- $abcdefg$ è divisibile per 7
- $abcdefgh$ è divisibile per 8
- $abcdefghi$ è divisibile per 9
- $abcdefghij$ è divisibile per 10

`[3816547290]` Dalle condizioni di divisibilità risulta immediatamente che $j = 0$ e, di conseguenza, $e = 5$. Inoltre sia $a + b + c$ che $d + e + f$ e $g + h + i$ devono essere divisibili per 3. Inoltre le cifre a, c, e, g, i sono dispari, mentre b, d, f, h, j sono pari.

Consideriamo il numero formato dalle tre cifre def, cioè $d5f$. I numeri che soddisfano le richieste trovate finora sono 258, 852, 456 e 654. Analizziamole una per una: se def fosse il numero 258, allora c potrebbe essere soltanto 1, dato che $abcd$ deve essere divisibile per 4, e quindi cd deve esserlo. Rimane allora solo una possibilità per abc, e cioè 741. Ma se così fosse, non si riuscirebbe a trovare un valore per g che renda $741258g$ divisibile per 7. Dunque $def = 258$ è impossibile.

Vediamo il caso $def = 852$. In questo caso non si riuscirebbe a trovare un valore di c accettabile, cioè che renda $c8$ divisibile per 4. Anche questo caso è da scartare.

Se $def = 456$ andremmo incontro allo stesso problema: non troveremmo nessun valore compatibile per c.

Dunque rimane il caso $def = 654$, e di conseguenza $c = 1$.

Ora consideriamo i valori compatibili per ab: abbiamo due casi, che sono 32 e 38. Nel primo caso, il numero richiesto dal quesito potrebbe essere $321654ghij$, e l'unico valore di g compatibile con la divisibilità per 7 è 9. Le altre cifre sono obbligate, e il numero quindi risulterebbe essere 3216549870, ma la divisibilità per 8 non sarebbe soddisfatta.

Dunque ab deve essere 38, e in questo caso la divisibilità per 7 ci dice che $g = 7$. Anche in questo caso le altre cifre sono obbligate, e il numero risulta quindi uguale a 3816547290, che soddisfa tutte le richieste.

34 ACS.

ACS... ACS... Queste lettere continuano a suonarmi nella mente per i giorni successivi, senza che mi venga nessuna idea. Poi improvvisamente... l'illuminazione! Succede mentre sto andando alla biblioteca per il problema di oggi. Giusto fuori dall'entrata mi cade l'occhio su una targhetta.

ACS. La biblioteca prende oggi il nome di Alice Caterina Salco, che l'ha fondata nel 1864. Possibile che sia una coincidenza? Possibile che le lettere non fossero un enigma ma fossero... iniziali?

Una volta nella sala P chiedo a qualche altra persona del Circolo.

— Si, certo, nessuno di noi ha mai conosciuto Alice di persona, ovviamente, ma le storie che si raccontano dicono che sia stata lei a spostare il Libro in questa sala. Mio nonno, che è diventato membro del Circolo tramite lei, ne ha sempre parlato molto molto bene.

Incredibile... se davvero le iniziali sono le sue, perché non c'è qualche altro nome scritto dopo il suo? — Ma questa Alice era una figura particolare nel Circolo?

— Sicuramente si, tutti la seguivano come leader, almeno fin quando non se ne è andata.

— In che senso?

— Sempre mio nonno raccontava che da un giorno all'altro Alice è semplicemente sparita senza dire niente a nessuno. Nessuno l'ha più vista. Questa è una storia incredibile. Davvero quindi ACS sono le sue iniziali? E cosa è successo ad Alice? Vado avanti a pensarci mentre leggo il problema di oggi.

Esistono due soli triangoli isosceli non equilateri con questa proprietà: almeno uno dei loro angoli misura x gradi e il rapporto tra la lunghezza del lato maggiore e la lunghezza del lato minore vale $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Quanto vale x?

[36] Nel caso in cui x sia uno degli angoli alla base del triangolo isoscele, allora l'angolo al vertice sarà $180^\circ - 2x$. Se invece x è l'angolo al vertice, allora gli angoli alla base saranno $90^\circ - \dfrac{x}{2}$. Se $x < 60^\circ$, allora sia $180^\circ - 2x$ che $90^\circ - \dfrac{x}{2}$ sono maggiori di 60°: questo significa che uno dei due triangoli isosceli considerati ha la base maggiore del lato obliquo, e l'altro invece ha il lato obliquo maggiore della base.

Applicando allora il teorema dei seni ai due triangoli, e ricordando l'affermazione precedente, si arriva all'equazione

$$\frac{\sin x}{\sin(180^\circ - 2x)} = \frac{\sin x}{\sin\left(90^\circ - \dfrac{x}{2}\right)},$$

dalla quale ricaviamo

$$\sin(180^o - 2x) = \sin\left(90^o - \frac{x}{2}\right).$$

Si hanno quindi due casi: il primo afferma che $180^o - 2x = 90^o - \frac{x}{2} + k360^o$, da cui si ricava $x = 60^o + k240^o$, la cui unica soluzione compatibile con un triangolo è $x = 60^o$, che però non corrisponde a un triangolo isoscele non equilatero.

Il secondo caso afferma che $180^o - 2x = 180^o - 90^o + \frac{x}{2} + k360^o$, la cui unica soluzione compatibile con un triangolo è $x = 36^o$.

35 Le mie iniziali.

Ripensavo a quello che è successo nelle ultime settimane: io che scrivo sul Libro, la scritta che si cancella, il Libro che si apre da solo sulla pagina di ACS. Mi stava magari comunicando un messaggio? Alice Caterina è stata l'ultima persona a scrivere le sue iniziali sul Libro, e questo non è successo poi così tanto tempo fa. Magari è questo, magari devo scrivere le mie iniziali! Forse anche Alice Caterina aveva prima provato a scrivere un problema. Ho deciso! Lo farò oggi, con la solita scusa di chiudere la sala P.

Arriva il momento di leggere il problema.

a, b, c, d sono quattro numeri positivi tali che $a+b+c+d = 5.$. Quanto vale, al massimo, $ab^2c^3d^4$?

Dopo aver pensato e scritto la risposta sul Libro, saluto le altre persone del Circolo. — Oggi penso io a chiudere le finestre e a chiudere la sala. Ci vediamo magari più tardi per un gelato?

— Volentieri! A dopo!

Come la volta scorsa aspetto che tutti escano. Mi avvicino al libro e scorro fino alla pagina su cui si trova la sigla ACS. Giro alla pagina successiva. Stranamente mi sembra che le pagine del Libro, solitamente abbastanza pesanti, si aprano con più facilità. Quasi che il Libro sia d'accordo con quello che sto facendo. Il momento è arrivato: con la mia migliore calligrafia scrivo le mie iniziali sulla pagina vuota.

Quel giorno, la sala P rimase aperta.

`[27]` Per risolvere questo quesito occorrre ricordare la disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica: la media geometrica è sempre minore o uguale della media aritmetica, e l'uguaglianza vale solo quando le quantità di cui stiamo calcolando le medie sono tutte uguali fra loro.

Scriviamo allora $a+b+c+d$ come $a + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{c}{3} + \frac{c}{3} + \frac{d}{4} + \frac{d}{4} + \frac{d}{4} + \frac{d}{4}$.

La media aritmetica dei precedenti valori è

$$\frac{a+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}+\frac{c}{3}+\frac{c}{3}+\frac{d}{4}+\frac{d}{4}+\frac{d}{4}+\frac{d}{4}}{10}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}.$$

La media geometrica è invece

$$\sqrt[10]{\frac{ab^2c^3d^4}{2^2 3^3 4^4}}.$$

Per quanto è stato affermato precedentemente, la media geometrica è sempre minore della media aritmetica, e al massimo è uguale a essa quando tutti i termini sono uguali. Il massimo valore che può quindi raggiungere la media geometrica è

$$\sqrt[10]{\frac{ab^2c^3d^4}{2^2 3^3 4^4}}=\frac{1}{2},$$

da cui possiamo ricavare che

$$ab^2c^3d^4=\frac{2^2 3^3 4^4}{2^{10}}=\frac{2^{10}3^3}{2^{10}}=3^3=27.$$

Questo valore viene raggiunto quando tutti i termini di cui abbiamo calcolato la media sono uguali fra loro; questo significa che $a=\frac{1}{2}$, $b=1$, $c=\frac{3}{2}$, $d=2$.

36 Finale.

Non so cosa sia successo, ma è bastato un battito di ciglia. Ero nella sala P, avevo appena staccato la penna dal Libro dopo aver scritto le mie iniziali, e un attimo dopo sono in questa... come la posso chiamare? Terrazza, forse. Niente panico, niente panico,... Panico!!

— Cosa è successo? Dove sono? Dove sono tutti? Mi metto quasi a urlare mentre mi guardo in giro. Noto delle persone in lontananza, si avvicinano in due: un uomo con la barba mediamente lunga e dei riccioli abbastanza vistosi e una donna, capelli neri che cammina abbasstanza in fretta.

— $\chi\alpha\iota\rho\varepsilon$, mi fa l'uomo. E io lo guardo con un'aria mista tra il confuso e il terrorizzato. La donna lo guarda con aria divertita e con aria tranquilla si rivolge a me.

— Lascialo perdere, è da qualche secolo che si diverte facendo spaventare le nuove persone che arrivano parlando loro in greco. Piacere, puoi chiamarmi Alice. Scommetto che hai molte domande. E prima che io possa replicare, continua. — Prima però devi fare qualcosa per noi. Mi passa un foglietto con scritto un problema. — Devi risolvere questo, poi ti spiegheremo tutto.

— Ma dove sono? In che lingua mi ha parlato? Dove è finita la sala P?

— Risolvi il problema, poi avremo tutto il tempo per spiegarti. Non hai mai lasciato la sala P: il luogo dove ci troviamo ora è quello che tu chiami Libro. E lui è una persona che conosci sicuramente, e nella tua lingua lo chiami Pitagora.

Quanto vale al minimo l'espressione

$$\sqrt{x^2 - 2x + 17} + \sqrt{x^2 - 2xy + y^2 + 49} + \sqrt{y^2 - 18y + 97},$$

dove x e y sono numeri reali?

(Problema di Roberto Zanasi)

`[17]` Per poter risolvere questo quesito bisogna interpretare le radici quadrate come se fossero il risultato del calcolo di una distanza tra due punti. Bisogna quindi ricostruire, in ogni radicando, una somma di quadrati. Ecco allora che il primo radicando diventa

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 2x + 17} &= \sqrt{x^2 - 2x + 1 - 1 + 17} \\ &= \sqrt{(x-1)^2 + 16} \\ &= \sqrt{(x-1)^2 + 4^2},\end{aligned}$$

e, scritto in questo modo, esso può essere interpretato come la distanza tra i punti $A(0, 1)$ e $B(4, x)$.

Il secondo radicando diventa invece

$$\sqrt{x^2 - 2xy + y^2 + 49} = \sqrt{(x-y)^2 + (11-4)^2},$$

che può essere interpretato come la distanza tra il punto $B(4, x)$ e il punto $C(11, y)$.

Infine, il terzo radicando diventa

$$\begin{aligned}\sqrt{y^2 - 18y + 97} &= \sqrt{y^2 - 18y + 81 - 81 + 97} \\ &= \sqrt{(y-9)^2 + 16} \\ &= \sqrt{(y-9)^2 + (15-11)^2}\end{aligned}$$

che può essere interpretato come la distanza tra il punto $C(11, y)$ e il punto $D(15, 9)$.

L'espressione da minimizzare è quindi interpretabile come la lunghezza della somma di tre segmenti: essa è minima quando i tre segmenti sono allineati, e diventa uguale alla distanza tra il punto A e il punto D, cioè

$$\sqrt{(15-0)^2 + (9-1)^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17.$$

Osservando la figura qui sotto, vediamo che la spezzata blu ha lunghezza maggiore del segmento rosso (la cui lunghezza è la minore possibile).