Algèbre Linéaire - partie 1

Table des matières

Chapitre I
Résolution de systèmes linéaires

1 Systèmes linéaires

1.1 Linéarité

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 1.
Une équation du type $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ où $a_1, a_2, ..., a_n, b$ sont des nombres réels et $x_1, x_2, ..., x_n$ les inconnues est une **équation linéaire**.
Le membre de gauche est appelé une **combinaison linéaire** des inconnues $x_1, x_2, ..., x_n$.

Exemples d'équation linéaires :
- $2x_1 - 5x_2 + \sqrt{3}x_3 - \frac{5}{7}x_4 = 18$
- $4x + 7y - 8z = -2$
- $y - 4x = 1$

Exemples d'équation non linéaires :

- $8x_1^2x_2 + 1 = 0$
- $\frac{1}{x^2} - x^3 + y + y^2 = 0$
- $x_1x_2 + 2x_1^2 - 5x_2^3 = -1$
- $\cos(x) - \sin(xy) = 1$
- $x + xy = 1$
- $3x - 2\sqrt{y} + 2z - 1 = 0$

1.2 Solutions de systèmes

Soit n et p des nombres entiers supérieurs ou égaux à 1.
Résoudre un système linéaire de p équations à n inconnues consiste à chercher s'il existe pour les n inconnues des valeurs vérifiant simultanément les p équations linéaires du système.
On appellera alors solutions les n-uplets correspondants.

Un système peut avoir :
- **aucune solution** : par exemple, le système $\begin{cases} x + y + z = 1515 \\ x + y + z = 1789 \end{cases}$
- **une unique solution** : $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$ admet comme solution $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le couple $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- **une infinité de solutions** : $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \\ 3x + 3y = 3 \\ 4x + 4y = 4 \end{cases}$

  Ce système équivaut à l'équation $y = 1 - x$ et ses solutions sont donc tous les couples du type $(a; 1 - a)$ où $a \in \mathbb{R}$. On note alors l'ensemble des solutions $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ 1-a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R} \right\}$ ou encore $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R} \right\}$ qui n'est autre que la droite d'équation $y = x - 1$ dans le plan $\mathbb{R}^2$.

2 Algorithme du pivot de Gauss

L'algorithme du pivot de Gauss permet de résoudre des systèmes linéaires.
Nous restreignons ici son étude au cas de la résolution de systèmes de n équations à n inconnues.
En voici trois exemples.

Exemple 1 : Résolution d'un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues par l'algorithme du pivot de Gauss

On considère le système (S_1) : $\begin{cases} 2x+4y+6z=4 \\ 3x+5y+10z=3 \\ x+4y-5z=14 \end{cases}$

Ce système S_1 admet une solution unique si et seulement s'il est équivalent au système final $S_{1\,final}$: $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \\ z=\gamma \end{cases}$ où $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, c'est à dire le système $\begin{cases} 1x+0y+0z=\alpha \\ 0x+1y+0z=\beta \\ 0x+0y+1z=\gamma \end{cases}$

Les opérations effectuées au cours de l'algorithme permettent d'écrire une succession de systèmes équivalents au système S_1 initial jusqu'au système $S_{1\,final}$. Dans la pratique, on travaille avec les tableaux des coefficients. S_1 s'écrit :

L_1	2	4	6	4
L_2	3	5	10	3
L_3	1	4	-5	14

L'objectif est d'obtenir, si c'est possible, un tableau équivalent correspondant à $S_{1\,final}$, donc de la forme :

L_1	1	0	0	α
L_2	0	1	0	β
L_3	0	0	1	γ

Mise en oeuvre de l'algorithme du pivot de Gauss :

L_1	2	4	6	4
L_2	3	5	10	3
L_3	1	4	-5	14

Le coefficient en 1religne 1recolonne n'est pas nul, il vaut 2.
C'est le premier **pivot**.
On divise la 1religne par ce pivot.

$L_1 \leftarrow L_1/2$	**1**	2	3	2
$L_2 \leftarrow L_2$	3	5	10	3
$L_3 \leftarrow L_3$	1	4	-5	14

Le coefficient en 1religne 1recolonne est égal à 1. On cherche à obtenir des 0 sur les 2^{e}et 3^{e}lignes de la 1^{e}colonne

$L_1 \leftarrow L_1$	**1**	2	3	2
$L_2 \leftarrow L_2-3L_1$	**0**	**-1**	1	-3
$L_3 \leftarrow L_3-L_1$	**0**	2	-8	12

Le **pivot** est maintenant le coefficient en 2^{e}ligne 2^{e}colonne, il n'est pas nul et vaut **-1**. On le "normalise" en divisant la deuxième ligne par -1.

ATTENTION : Seules les opérations élémentaires du type
- $L_i \leftarrow L_i - kL_j$ avec $i \neq j$ et $k \in \mathbb{R}$
- $L_i \leftarrow kL_i$ avec $k \neq 0$
- $L_i \leftrightarrow L_j$

sont autorisées pour garantir l'équivalence des systèmes successifs.

$L_1 \leftarrow L_1$	**1**	2	3	2
$L_2 \leftarrow -1L_2$	**0**	**1**	-1	3
$L_3 \leftarrow L_3$	**0**	2	-8	12

Par des opérations analogues, on obtient 1 en 2eligne 2ème colonne et 0 sur la 1reet la 3eligne.

$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$	**1**	**0**	5	-4
$L_2 \leftarrow L_2$	**0**	**1**	-1	3
$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$	**0**	**0**	**-6**	6

Le dernier pivot, en 3eligne 3ecolonne, n'est pas nul, il vaut -6. On "normalise" ce pivot.

$L_1 \leftarrow L_1$	**1**	**0**	5	-4
$L_2 \leftarrow L_2$	**0**	**1**	-1	3
$L_3 \leftarrow -\frac{1}{6}L_3$	**0**	**0**	**1**	**-1**

Par des opérations analogues, on obtient en 3ecolonne un 1 en 3eligne et 0 sur la 1reet la 2eligne.

$L_1 \leftarrow L_1 - 5L_3$	**1**	**0**	**0**	**1**
$L_2 \leftarrow L_2 + L_3$	**0**	**1**	**0**	**2**
$L_3 \leftarrow L_3$	**0**	**0**	**1**	**-1**

L'objectif a été atteint.

Conclusion : le système admet pour $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ **la solution unique** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$**, c'est-à-dire** ($\mathbf{x = 1}$ **et** $\mathbf{y = 2}$ **et** $\mathbf{z = -1}$).

Dans cet exemple, on a trouvé 3 pivots (coefficients non nuls), le système possède une solution unique.

L'espace E_1 des solutions s'écrit $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ (singleton de $\mathbb{R}^3$).

Remarques :

1. Lors du déroulement de cet algorithme, il est obligatoire de faire apparaître les pivots successifs et d'indiquer les transformations effectuées sur les lignes.
2. Comme dans le déroulement de tout algorithme, il est obligatoire d'effectuer les étapes dans l'ordre défini par l'algorithme. **Toute "astuce" est prohibée.**
3. A nouveau, pour respecter l'équivalence des systèmes dans le déroulement de l'algorithme, il est nécessaire d'effectuer uniquement des opérations élémentaires décrites précédemment

Cas où le coefficient en ligne $\mathbf{i_0}$ colonne $\mathbf{i_0}$, $\mathbf{1 \leq i_0 \leq n}$, c'est-à-dire en position d'être le pivot, est nul :

On regarde alors si un des coefficients en colonne i_0 d'une ligne $i\,, i_0 < i \leq n$ est non nul.
Le premier coefficient non nul, en ligne $i_1\,, i_0 < i_1 \leq n$, et colonne i_0 devient le pivot et on échange la ligne i_0 et la ligne i_1.

Si tous les coefficients en colonne i_0 et ligne $i\,, i_0 \leq i \leq n$, sont nuls, on examine alors le coefficient en ligne i_0 et colonne (i_0+1) :
- s'il est non nul, c'est le nouveau pivot ;
- s'il est nul, on examine les coefficients en colonne (i_0+1) et ligne $i\,, i_0 < j \leq n$, comme ci-dessus. Si tous les coefficients en ligne $i\,, i_0 \leq i \leq n$, et colonne $j\,, i_0 \leq j \leq n$ sont nuls, la résolution est terminée. Voir les exemples ci-dessous.

Exemple 2 : Résolution d'un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues par l'algorithme du pivot de Gauss

$$(S_2) : \begin{cases} 2x+4y+6z=4 \\ 3x+5y+10z=3 \\ 1x+4y+1z=14 \end{cases}$$

Écriture de S_2 sous forme de tableau :

L_1	2	4	6	4
L_2	3	5	10	3
L_3	1	4	1	14

On recherche si ce système (S_2) admet des solutions, c'est-à-dire s'il est possible de transformer par l'algorithme du pivot de Gauss le tableau ci-dessus en un tableau équivalent (S_{2final}) :

L_1	1	0	0	α
L_2	0	1	0	β
L_3	0	0	1	γ

Mise en oeuvre de l'algorithme du pivot de Gauss :

L_1	2	4	6	4
L_2	3	5	10	3
L_3	1	4	1	14

$L_1 \leftarrow L_1/2$	**1**	2	3	2
$L_2 \leftarrow L_2$	3	5	10	3
$L_3 \leftarrow L_3$	1	4	1	14

$L_1 \leftarrow L_1$	**1**	2	3	2
$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$	**0**	**-1**	1	-3
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$	**0**	2	-2	12

$L_1 \leftarrow L_1$	**1**	2	3	2
$L_2 \leftarrow -1L_2$	**0**	**1**	-1	3
$L_3 \leftarrow L_3$	**0**	2	-2	12

$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$	**1**	**0**	5	-4
$L_2 \leftarrow L_2$	**0**	**1**	-1	3
$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$	**0**	**0**	**0**	6

En 3ᵉligne 3ᵉcolonne, place du 3ᵉpivot, on trouve un 0 et le membre de droite n'est pas nul, il vaut 6.

Le dernier tableau se lit :

$$S_{2final} : \begin{cases} 1x+0y+5z=-4 \\ 0x+1y-1z=3 \\ 0x+0y+0z=6 \end{cases}$$

On n'atteint donc pas le résultat attendu, en particulier aucun triplet $(x;y;z)$ ne peut vérifier l'équation $0x+0y+0z=6$.

Le système n'admet **aucune solution** et $\mathbf{E_2} = \emptyset$.

Exemple 3 : Résolution d'un système linéaire à 3 inconnues et 3 équations par l'algorithme du pivot de Gauss

$$(S_3) : \begin{cases} 2x + 4y + 6z = 4 \\ 3x + 5y + 10z = 3 \\ 1x + 4y + 1z = 8 \end{cases}$$

Ecriture de S_2 sous forme de tableau :

L_1	2	4	6	4
L_2	3	5	10	3
L_3	1	4	1	8

On recherche si ce système (S_3) admet des solutions, c'est-à-dire s'il est possible de transformer par l'algorithme du pivot de Gauss le tableau ci-dessus en un tableau équivalent (S_{3final}) :

L_1	1	0	0	α
L_2	0	1	0	β
L_3	0	0	1	γ

Mise en oeuvre de l'algorithme du pivot de Gauss :

L_1	2	4	6	4
L_2	3	5	10	3
L_3	1	4	1	8

$L_1 \leftarrow L_1/2$	**1**	2	3	2
$L_2 \leftarrow L_2$	3	5	10	3
$L_3 \leftarrow L_3$	1	4	1	8

]]

$L_1 \leftarrow L_1$	**1**	2	3	2
$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$	**0**	**-1**	1	-3
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$	**0**	2	-2	6

$L_1 \leftarrow L_1$	**1**	2	3	2
$L_2 \leftarrow -1L_2$	**0**	**1**	-1	3
$L_3 \leftarrow L_3$	**0**	2	-2	6

$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$	**1**	**0**	5	-4
$L_2 \leftarrow L_2$	**0**	**1**	-1	3
$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$	**0**	**0**	**0**	**0**

En 3^eligne 3^ecolonne, place du 3^epivot, on trouve un 0 et le membre de droite est lui aussi nul.
Le dernier tableau se lit :

$$S_{3final} : \begin{cases} 1x + 0y + 5z = -4 \\ 0x + 1y - 1z = 3 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

On n'atteint donc pas le résultat attendu, en particulier tout triplet $(x; y; z)$ de $\mathbb{R}^3$ vérifie l'équation $0x + 0y + 0z = 0$.

Il y a donc **une infinité de solutions** $(x; y; z)$ qui sont régies par les équations du système
$S_{3final} = \begin{cases} x + 5z = -4 \\ y - z = 3 \end{cases}$
Pour déterminer ces solutions, on fixe une (ou plusieurs, selon le nombre d'équations restantes, voir les exercices) des inconnues x, y, z comme paramètre, par exemple ici z, et on exprime toutes autres en fonctions de ce paramètre.

On a alors $S_{3final} : \begin{cases} x = -5a - 4 \\ y = a + 3 \\ z = a \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$.

Le système admet donc pour solution l'ensemble des triplets $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du type $\begin{pmatrix} -5a - 4 \\ a + 3 \\ a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On note $E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} -5a - 4 \\ a + 3 \\ a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R} \right\}$.

Remarques :

1. Le paramétrage des solutions n'est pas unique, selon le choix de la ou des inconnue(s) qui joue(nt) le rôle de paramètre(s), il est donc inutile de comparer ses réponses avec le voisin...
2. En revanche, il est très fortement conseillé de faire une vérification, c'est à dire de remplacer dans le système initial x , y, et z respectivement par $-5a-4$, $a+3$ et a.
3. L'ensemble E_3 des solutions peut également s'écrire $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R} \right\}$.

3 Exercices

Exercice I.1
Pour chacune des expressions suivantes, dire s'il s'agit d'une combinaison linéaire des variables x_1, x_2, x_3, x_4 :

(e_1) $5x_1^3 - 7x_2^2 + x_3$	(e_4) $cos(x_1) + sin(x_2)$	(e_7) $\frac{2x_1-4}{x_4+7} + \frac{x_2+12}{3x_3+10} - 77$
(e_2) $5x_1 - 7x_2 + x_3 + 8x_4 - 15$	(e_5) $-2x_4 + 3x_3 - 18x_2 + 27x_1$	(e_8) $ln(x_1) + ln(8x_2)$
(e_3) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^3$	(e_6) $\sqrt{6x_1^3 + 5x_4^2 - 14}$	(e_9) $\sqrt{5}x_1 + \frac{71}{19}x_2 + 5x_3 - 13\pi x_4$

Exercice I.2
Résoudre par l'algorithme du pivot de Gauss les systèmes linéaires suivants.

$$(S_1) \begin{cases} x + 3y + 4z = 4 \\ -x - 2y - 5z = -13 \\ x + 5y + z = -8 \end{cases}$$

$$(S_2) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 6x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$$

$$(S_4) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

Exercice I.3
Résoudre par l'algorithme du pivot de Gauss le système linéaire suivant :

1. $(S) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 2z = 5 \\ x + 1y + 3z = 5 \end{cases}$

   Soit E l'ensemble des solutions de (S).
2. Écrire le système linéaire (S') obtenu en menant à partir du système (S) initial les manipulations suivantes :

   $(S') \begin{cases} L_1 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_2 \end{cases}$

   Résoudre (S'). Soit E' l'ensemble des solutions de (S').
3. Comparer E et E'. Pourquoi ces deux ensembles sont-ils différents ? Que penser des manipulations de la question 2 ?

Exercice I.4

Résoudre par l'algorithme du pivot de Gauss les systèmes linéaires suivants.

On pourra résoudre en parallèle les deux systèmes suivants :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{c} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -7 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 10 \\ 7x_1 - 7x_2 + 7x_3 - 4x_4 = 25 \end{array}\right.$$

$$(S_2)\left\{\begin{array}{c} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -7 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 10 \\ 7x_1 - 7x_2 + 7x_3 - 4x_4 = 7 \end{array}\right.$$

On pourra résoudre en parallèle les trois systèmes suivants :

$$(S_3)\left\{\begin{array}{c} x + y + z = 4 \\ x - y - 2z = 3 \\ x + 5y + 7z = 6 \end{array}\right.$$

$$(S_4)\left\{\begin{array}{c} x + y + z = 4 \\ x - y - 2z = 3 \\ x + 5y + 7z = 4 \end{array}\right.$$

$$(S_5)\left\{\begin{array}{c} x + y + z = a \\ x - y - 2z = b \\ x + 5y + 7z = c \end{array}\right.$$

où a, b, c désignent des nombres réels. Montrer que ce système linéaire admet des solutions si et seulement si $3a - 2b - c = 0$; on exprimera alors ces solutions en fonction de a, b et c.

$$(S_6)\left\{\begin{array}{c} 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_4 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{array}\right.$$

$$(S_7)\left\{\begin{array}{c} 5x - 2z = 0 \\ 10x + y - 5z = 0 \\ 10x - 4z = 0 \end{array}\right.$$

$$(S_8)\left\{\begin{array}{c} 4x - 2z = 0 \\ 10x - 5z = 0 \\ 6x - 3z = 0 \end{array}\right.$$

Exercice I.5 (pour aller plus loin : n équations à p inconnues)
Résoudre par l'algorithme du pivot de Gauss les systèmes linéaires suivants.

$$(S_1) \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = a \\ 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 - x_4 = b \end{cases}$$

a et b désignant deux nombres réels : on exprimera les solutions en fonction de a et de b.
Existe-t-il des valeurs de a et de b pour lesquelles ce système admet 0 solution ? une solution unique ?

$$(S_2) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 7 \\ x_1 - 5x_2 + 10x_3 + 7x_4 = 4 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \\ 3x - 4y = 1 \\ -5x + 7y = -1 \end{cases}$$

$$(S_4) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 5x + 4y - 3z = 2 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ 5x + 4y - 3z = 4 \end{cases}$$

$$(S_5) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 5x + 4y - 3z = 2 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ 5x + 4y - 3z = 2 \end{cases}$$

Exercice I.6 (pour aller plus loin : n équations à p inconnues)

1. Quelle relation doivent vérifier les réels a, b et c pour que le système ci-dessous admette des solutions ?

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = a \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 7x_4 = b \\ x_1 - 5x_2 + 10x_3 + 7x_4 = c \end{cases}$$

2. Quelles relations doivent vérifier les réels a, b, c et d pour que le système ci-dessous admette des solutions ?

$$\begin{cases} x + y - z = a \\ 5x + 4y - 3z = b \\ 3x + 2y - z = c \\ 5x + 4y - 3z = d \end{cases}$$

Chapitre II
Matrices

1 Définitions

Une **matrice** est un tableau de nombres à n lignes et p colonnes ($n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$). Dans ce cours, les nombres, appelés aussi coefficients, des matrices seront toujours des nombres réels. On travaillera donc sur des matrices réelles.
On note $\mathbf{M(n,p)}$ l'ensemble des matrices réelles à n lignes et p colonnes.

Si A est une matrice de $M(n,p)$, on notera $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n\,,1\leqslant i\leqslant p}$, où $a_{i,j}$ est le coefficient de A en ligne i et colonne j.

Si $n=1$, A est une matrice **ligne** et si $p=1$, A est une matrice **colonne**. Si $n=p=1$, A est un réel.
La matrice de $M(n,p)$ dont tous les coefficients sont nuls est appelée **matrice nulle** et se note $0_{n,p}$.

Deux matrices $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}$ de $M(n,p)$ **sont égales** si et seulement si pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$ et pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant p$, $a_{i,j} = b_{i,j}$.

On appelle **transposée** de la matrice A de $M(n,p)$ la matrice notée ${}^tA$ de $M(p,n)$ telle que ${}^tA = \left(a'_{h,k}\right)_{1\leqslant h\leqslant p,1\leqslant k\leqslant n}$ avec $a'_{h,k} = a_{k,h}$ pour tout h,k.

Si le nombre de lignes d'une matrice A est égal au nombre de ses colonnes, on dit que A est une **matrice carrée**. On écrira $M(n,n) = M(n)$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes. Une matrice carrée de $M(n)$ est dite matrice de taille n.

Une matrice carrée A de taille n dont tous les coefficients $a_{i,j}$ vérifiant $i<j$ sont nuls est dite **matrice triangulaire inférieure**.
De même une matrice carrée A de taille n dont tous les coefficients $a_{i,j}$ vérifiant $i>j$ sont nuls est dite **matrice triangulaire supérieure**.

Une matrice carrée A de taille n dont tous les coefficients $a_{i,j}$ tels que $i \neq j$ sont nuls est dite **matrice diagonale**. On notera $A = diag\,(a_{1,1}, a_{2,2}, ..., a_{n,n})$.
La matrice diagonale de taille n telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!] \quad a_{i,i} = 1$ est la **matrice identité ou matrice unité** de $M(n)$. Elle est notée I_n avec $I_n = diag(1,1,\ldots,1)$.

2 Opérations définies dans $M(n,p)$, l'ensemble des matrices réelles à n lignes et p colonnes.

2.1 Addition de deux matrices de $M(n,p)$

Soient deux matrices $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant p}$ et $B=(b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant p}$ de $M(n,p)$.
On définit ainsi l'addition de deux matrices de $M(n,p)$:
$A+B=C$ où $C=(c_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant p}$ avec, pour tout (i,j) $\quad c_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j}$

L'addition de matrices de $M(n,p)$ possède les propriétés suivantes :

1. $A+B=B+A$ (commutativité) ;
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ (associativité) ;
3. $A+0_{n,p}=0_{n,p}+A=A$ $\quad$ ($0_{n,p}$ est élément neutre de l'addition dans $M(n,p)$.) ;
4. Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant p}$ et $A'=\left(a'_{i,j}\right)_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant p}$ avec $a'_{i,j}=-a_{i,j}$ pour tout i et j, alors $A+A'=A'+A=0_{n,p}$. On notera alors $A'=-A$. A' est l'opposée de A ;
5. ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$.

2.2 Multiplication d'une matrice de $M(n,p)$ par un nombre réel

Soit une matrice $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant p}$ de $M(n,p)$ et k un nombre réel.

On définit ainsi la multiplication d'une matrice de $M(n,p)$ par le nombre réel k :

$D=kA=(d_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant p}$ où $d_{i,j}=ka_{i,j}$ pour tout i,j.
kA est une matrice de $M(n,p)$.

Cette opération possède les propriétés suivantes :

1. Si $k=1$, alors $1A=A$;
2. si h et k sont deux nombres réels et A une matrice de $M(n,p)$, alors $(hk)A=h(kA)$;
3. si h et k sont deux nombres réels et A une matrice de $M(n,p)$, alors $(h+k)A=hA+kA$;
4. Propriété liant cette opération et l'addition dans $M(n,p)$: Si A et B sont deux matrices de $M(n,p)$ et k un nombre réel, alors $k(A+B)=kA+kB$;
5. ${}^t(kA)=k\left({}^tA\right)$.

Remarques :

- si $k=-1$, alors $(-1)A=-A$
- $kA=0_{n,p}$ si et seulement si $k=0$ ou $A=0_{n,p}$.

Ces propriétés résultent des propriétés de l'addition et de la multiplication des nombres réels.

3 Multiplication de matrices

On peut multiplier une matrice A par une matrice B si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.
Si A est une matrice de $M(n,p)$ et B une matrice de $M(p,m)$, alors la matrice produit $P=AB$

est une matrice de $M(n,m)$ définie comme suit.

$A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ et $B = (b_{h,k})_{1\leqslant h\leqslant p, 1\leqslant k\leqslant m}$

$$AB = (c_{i,k})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant k\leqslant m} \text{ où } c_{i,k} = \Sigma_{j=1}^{p} a_{i,j} b_{j,k}$$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 7 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 9 & -2 \\ 3 & 8 & -7 & 0 \end{pmatrix}$

A est une matrice de $M(3,2)$, c'est-à-dire à 3 lignes et 2 colonnes.
B est une matrice de $M(2,4)$, c'est-à-dire à 2 lignes et 4 colonnes.
Il est donc possible de calculer le produit $P = AB$. Le résultat, P, sera une matrice de $M(3,4)$, c'est-à-dire à 3 lignes et 4 colonnes.

$$AB = \begin{pmatrix} 2\times 5 + (-3)\times 3 & 2\times 4 + (-3)\times 8 & 2\times 9 + (-3)\times(-7) & 2\times(-2) + (-3)\times 0 \\ -5\times 5 + 7\times 3 & -5\times 4 + 7\times 8 & -5\times 9 + 7\times(-7) & -5\times(-2) + 7\times 0 \\ 6\times 5 + 4\times 3 & 6\times 4 + 4\times 8 & 6\times 9 + 4\times(-7) & 6\times(-2) + 4\times 0 \end{pmatrix}$$
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -16 & 39 & -4 \\ -4 & 36 & -94 & 10 \\ 42 & 56 & 26 & -12 \end{pmatrix}$$

Remarque : dans cet exemple, il n'est pas possible de multiplier B par A car le nombre de colonnes de B est 4 tandis que le nombre de lignes de A est 3. Le produit BA ne peut donc pas être effectué.

Propriétés de la multiplication de matrices :

1. Associativité
   S'il est possible de multiplier une matrice A par une matrice B puis s'il est possible de multiplier le produit AB par une matrice C, alors : $(AB)C = A(BC)$.
2. Distributivité
   Si A et B sont des matrices de $M(n,p)$ et si C est une matrice de $M(p,m)$, alors : $(A+B)C = AC + BC$
   Si A est une matrice de $M(n,p)$ et si B et C sont des matrices de $M(p,m)$, alors : $A(B+C) = AB + AC$
3. ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

ATTENTION :
La multiplication de matrice n'est pas commutative ! ! ! ! ! ! ! ! ! !

Résumons :

Soit A une matrice de $M(n,p)$ et B une matrice de $M(m,q)$.

1. Le produit AB existe ssi $p = m$.
2. Si $p = m$, A est une matrice de $M(n,p)$ et B est une matrice de $M(p,q)$. Alors AB est une matrice de $M(n,q)$. Le produit BA existe ssi $q = n$.
3. Si $p = m$ et $q = n$, A est une matrice de $M(n,p)$ et B est une matrice de $M(p,n)$. Alors AB est une matrice de $M(n,n)$ et BA est une matrice de $M(p,p)$. On peut comparer AB et BA ssi $p = n$.
4. Si $n = p = m = q$, A, B, AB et BA sont des matrices de $M(n,n)$.

En général, AB $\neq$ BA.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$
$AB = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 15 & 24 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 18 & 24 \end{pmatrix}$

4 Cas des matrices carrées de $M(n)$

4.1 Matrices commutantes dans $M(n)$.

Si A et B sont des matrices de $M(n)$, il est toujours possible de calculer AB et BA.
En général, $AB \neq BA$.
Si $AB = BA$, on dit alors que les matrices A et B commutent.
Quelle que soit la matrice A de $M(n)$, il existe des matrices commutant avec A :

1. La matrice nulle 0_n de $M(n)$ vérifie : $A0_n = 0_nA = 0_n$; 0_n commute avec A ;
2. La matrice identité ou matrice unité de $M(n)$, $I_n = diag(1,1,1)$, vérifie : $AI_n = I_nA = A$; I_n commute avec A ;
3. $AA = A^2$, A commute avec elle-même.
4. On définit par récurrence sur l'entier k non nul : $A^k = AA^{k-1} = A^{k-1}A$ (la multiplication de matrices est associative). Donc A commute avec toutes ses puissances A^k.

Remarque : ces matrices A^k sont bien des matrices de $M(n)$.

On appelle commutant de la matrice A de $M(n)$ et on note $C(A)$ le sous-ensemble de $M(n)$ constitué des matrices de $M(n)$ qui commutent avec A : $C(A) = \{B \mid B \in M(n) \text{ et } AB = BA\}$. Cet ensemble n'est donc pas vide et contient toujours 0_n, I_n, A, et tous les A^k où $k \geqslant 1$.

4.2 Matrices inversible dans $M(n)$.

Une matrice A de $M(n)$ est **inversible** ssi il existe une matrice A' de $M(n)$ vérifiant :
$AA' = A'A = I_n$. On notera $A' = A^{-1}$.
A et A' sont dites **inverses** l'une de l'autre. A' appartient au commutant de A.
Si une matrice admet une inverse, elle est unique. (preuve aisée par l'absurde.)

Attention : toutes les matrices de $M(n)$ ne sont pas inversibles !
Par exemple, si A et B sont des matrices non nulles de $M(n)$ telles que $AB = 0_n$, alors ni A ni B n'est inversible. (preuve aisée par l'absurde)

Pour rechercher si une matrice A est inversible, et trouver son inverse, nous allons poser le problème et nous rendre compte qu'il revient à utiliser l'algorithme du pivot de Gauss sur la matrice A. Explication dans l'exemple qui suit.

4.2.1 Exemple de calcul d'inverse de matrice par l'algorithme du pivot de Gauss :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ On recherche s'il existe une matrice $A' = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$
vérifiant $AA' = I_3$.

D'ou l'égalité de matrices :

$$\begin{pmatrix} x_1 + 3y_1 + 2z_1 & x_2 + 3y_2 + 2z_2 & x_3 + 3y_3 + 2z_3 \\ 2x_1 + 7y_1 + 3z_1 & 2x_2 + 7y_2 + 3z_2 & 2x_3 + 7y_3 + 3z_3 \\ x_1 + 5y_1 + z_1 & x_2 + 5y_2 + z_2 & x_3 + 5y_3 + z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On est donc amené a priori à résoudre un système linéaire de 9 équations à 9 inconnues.
Un examen attentif permet de remarquer que les variables x_1, y_1 et z_1 ne figurent que dans 3 équations, même chose pour x_2, y_2 et z_2 et pour x_3, y_3 et z_3.
Ce système linéaire de 9 équations à 9 inconnues s'écrit donc comme 3 systèmes linéaire de 3 équations à 3 inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 + 3y_1 + 2z_1 = 1 \\ 2x_1 + 7y_1 + 3z_1 = 0 \\ x_1 + 5y_1 + z_1 = 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{c} x_2 + 3y_2 + 2z_2 = 0 \\ 2x_2 + 7y_2 + 3z_2 = 1 \\ x_2 + 5y_2 + z_2 = 0 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \left\{ \begin{array}{c} x_3 + 3y_3 + 2z_3 = 0 \\ 2x_3 + 7y_3 + 3z_3 = 0 \\ x_3 + 5y_3 + z_3 = 1 \end{array} \right.$$

Un examen attentif de ces 3 systèmes linéaires permet de remarquer que les coefficients des inconnues dans les membres de gauche des 3 système sont les mêmes.
On pourra donc résoudre les 3 systèmes simultanément en écrivant à droite les 3 colonnes des seconds membres.

1	3	2	1	0	0
2	7	3	0	1	0
1	5	1	0	0	1

On constate qu'on obtient un tableau dont la partie gauche est la matrice A et la partie droite la matrice I_3.

Résolution de ce " triple " système par l'algorithme du pivot de Gauss :

L_1	**1**	3	2	1	0	0
L_2	2	7	3	0	1	0
L_3	1	5	1	0	0	1

L_1	**1**	3	2	1	0	0
$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$	0	1	-1	-2	1	0
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$	0	2	-1	-1	0	1

$L_1 \leftarrow L_1 - 3l_2$	**1**	0	5	7	-3	0
$L_2 \leftarrow L_2$	0	**1**	-1	-2	1	0
$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$	0	0	1	3	-2	1

$L_1 \leftarrow L_1 - 5l_3$	**1**	0	0	-8	7	-5
$L_2 \leftarrow L_2 + l_3$	0	**1**	0	1	-1	1
$L_3 \leftarrow L_3$	0	0	**1**	3	-2	1

Conclusion :
les solutions des 3 systèmes sont

$$\begin{cases} x_1 = -8 \\ y_1 = 1 \\ z_1 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 7 \\ y_2 = -1 \\ z_2 = -2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_3 = -5 \\ y_3 = 1 \\ z_3 = 1 \end{cases} \quad \text{c'est à dire } A' = \begin{pmatrix} -8 & 7 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On constate que, dans le dernier tableau obtenu lors du déroulement de l'algorithme du pivot de Gauss, la partie gauche du tableau est la matrice I_3 et la partie droite est la matrice $A' = A^{-1}$.

Dans le cas général, si le déroulement de l'algorithme du pivot de Gauss pour la matrice A de $M(n)$ fait apparaître n pivots (coefficients non nuls !), alors A est inversible.
Dans le cas contraire on dirait que A est non inversible.

De plus, l'algorithme fournit l'inverse de A, en effet il suffit de lire la matrice qui est apparue à droite dans le dernier tableau de l'algorithme du pivot.
La matrice A, est inversible et son inverse est $A^{-1} = A'$.
On peut d'ailleurs vérifier par le calcul que $AA' = I_3$.

4.2.2 Propriétés

1. Si A et B sont des matrices inversibles de $M(n)$, alors $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
2. Si A est une matrice inversible de $M(n)$, alors $({}^tA)^{-1} =^t (A^{-1})$ et pour tout entier k non nul, $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.

4.2.3 Caractérisation des matrices inversibles

Il existe un moyen de savoir à l'avance si une matrice est inversible, en calculant son *déterminant*.
Nous en donnons ici la formule pour une matrice de $M(2, 2)$. En dimension supérieure, le calcul du déterminant est plus complexe et ne sera pas abordé, mais sachez que la commande `det(A)`

dans de nombreux logiciels de calcul permet de l'obtenir.

Propriété Une matrice carrée A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Propriété Une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - cb \neq 0$.
Remarque On a vu qu'une matrice A carrée de taille **n** peut s'inverser si le déroulement de l'algorithme du pivot de Gauss fait apparaître **n** pivots. On a donc les propriétés suivantes :

Propriétés Soit A une matrice carrée. A **n'est pas inversible** si une des conditions suivantes est remplie :
- A contient une ligne nulle
- A contient une colonne nulle
- Une des lignes de A est combinaison linéaire des autres
- Une des colonnes de A est combinaison linéaire des autres

5 Écriture matricielle d'un système linéaire

Un système linaire de n équations à n inconnues s'écrit : $AX = b$ où A est une matrice carrée de $M(n)$ représentant les coefficients du système, X une matrice colonne de $M(n, 1)$ représentant les inconnues, et b une matrice colonne de $M(n, 1)$ représentant les seconds membres du système.

Si la matrice A est inversible et que son inverse est notée A^{-1}, le système admet une solution unique :

$$\boxed{\mathbf{X = A^{-1}b}.}$$

Exemple :

Le système (S_2) : $\begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ 2x + 7y + 3z = 3 \\ x + 5y + z = -1 \end{cases}$ s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$,

c'est-à-dire $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

On a vu, dans le paragraphe précédent, que la matrice A est inversible avec $A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 7 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Le système (S_2) admet donc, comme unique solution, le triplet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 7 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

6 Exercices

Exercice II.1

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -7 \\ -8 & 6 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

1. Calculer si c'est possible : $2B + 5C$; $3A - 2B$; $4A - 2C$.
2. Ecrire ${}^tA$; ${}^tB$; ${}^tC$; ${}^t(2B + 5C)$; $2^tB + 5^tC$.
3. Calculer, si c'est possible :
   AB ; AC ; $AB + AC$; $A(B + C)$; BA ; CA ; BC ; CB ; A^2 ; B^2 ; C^2.
4. Vérifier que ${}^t(AB) =^t B^tA$.

Exercice II.2

Soient X et Y les 2 matrices colonnes réelles : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$ $n \geqslant 2$.

Calculer, si cela est possible, les produits suivants : XY ; ${}^tXY$; X^tY ; ${}^tX^tY$.

Exercice II.3

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$.

Calculer AB, C^2 , BA.

Exercice II.4 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

1. Proposer une matrice P_0 telle que $P_0A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$
2. Proposer une matrice P_1 telle que $P_1A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. Proposer une matrice P_2 telle que $P_2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$
4. Proposer une matrice P_3 telle que $P_3A = \begin{pmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix}$

5. Proposer une matrice P_4 telle que $P_4A = \begin{pmatrix} a-3g & b-3h & c-3i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$
6. Proposer une matrice P_5 telle que $P_5A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d+2g & e+2h & f+2i \\ g & h & i \end{pmatrix}$
7. Peut-on proposer une matrice P telle que $PA = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix}$?
8. Comment et par quelle matrice faut-il multiplier la matrice A pour obtenir la matrice $\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix}$?
9. Mêmes questions pour obtenir $\begin{pmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{pmatrix}$ ainsi que $\begin{pmatrix} a-3c & b & c \\ d-3f & e & f \\ g-3i & h & i \end{pmatrix}$.

Exercice II.5
Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Comparer $A^2 - B^2$ et $(A-B)(A+B)$.

Exercice II.6
A quelles conditions sur les matrices A et B a-t-on : $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

Exercice II.7
Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Résoudre l'équation $AX = XA$ où l'inconnue est la matrice X.

Exercice II.8
Comment montrer le plus simplement possible que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ admet pour inverse la matrice $Q = \begin{pmatrix} 12 & -9 & -7 \\ -4 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Quelle est alors l'inverse de la matrice Q ?

Exercice II.9
Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Calculer AC et BC. Pourquoi ce résultat permet-il de conclure que C n'est pas inversible ?

Exercice II.10
Inverser, quand c'est possible, les matrices suivantes.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Exercice II.11
Pour chacune des matrices suivantes, dire si elle est inversible et calculer son inverse le cas échéant.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice II.12

1. Calculer, quand c'est possible, l'inverse des matrices suivantes.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 11 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & -3 \end{pmatrix} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. En déduire les solutions des systèmes suivants.

$$(S_1) \begin{cases} x - y = 2 \\ 3y - 2z = -1 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases} \qquad (S_2) \begin{cases} x - y + z = 1 \\ -2x + 2y - z = 0 \\ -2x + 3y - z = -1 \end{cases}$$

Exercice II.13

1. Reprendre tous les systèmes de l'exercice I.2 page 9 et les écrire sous forme matricielle, c'est-à-dire sous la forme $AX = B$ où A, X et B sont des matrices que l'on précisera.
2. Lorsque la matrice A est inversible, que peut-on affirmer sur le nombre de solutions du système ? Quelle est alors l'expression de X en fonction de A et B ?
3. A l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel de calcul numérique, vérifier alors les solutions de chaque système.

Chapitre III
Espaces vectoriels et matrices

1 Espace vectoriel réel

Définition : Un *espace vectoriel réel E* est un ensemble d'éléments appelés vecteurs sur lequel on a défini deux opérations :

1. Une ***addition*** notée $+$, dite opération "interne", c'est à dire que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de E, alors $\vec{u}+\vec{v}$ est un vecteur de E.
   Cette addition doit être *commutative, associative,* c'est à dire :
   Pour tous $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de E ;
   - $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ (commutativité)
   - $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ (associativité)

   De plus,
   - Il existe un *élément neutre* pour $+$, appelé vecteur nul et noté $\vec{0}_E$ tel que pour tout $\vec{u}$ de E, $\vec{u}+\vec{0}_E=\vec{0}_E+\vec{u}=\vec{u}$
   - *Tout élément est symétrisable* pour $+$, c'est à dire que pour tout $\vec{u}$ de E, il existe un vecteur noté $(-\vec{u})$ tel que $\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}_E$
2. Une ***multiplication*** par un coefficient réel (ou scalaire), notée $\cdot$ ou non notée :
   si $\vec{u}$ est un vecteur de E et k un nombre réel, alors $k\cdot\vec{u}$ est un vecteur de E.
   - $+$ et $\cdot$ doivent être *distributives* l'une par rapport à l'autre, c'est à dire que pour tous $\vec{u}$, $\vec{v}$ de E et pour tout h et k réel,
     $k\cdot(\vec{u}+\vec{v})=k\cdot\vec{u}+k\cdot\vec{v}$
     $(h+k)\cdot\vec{u}=h\cdot\vec{u}+k\cdot\vec{u}$
   - $+$ et $\cdot$ doivent être *associatives* entre elles, c'est à dire que pour tout $\vec{u}$ de E et pour tous h et k réels $(hk)\cdot\vec{u}=h\cdot(k\cdot\vec{u})$
   - Le nombre réel 1 est *neutre* pour cette multiplication : pour tout $\vec{u}$ de E, $1\vec{u}=\vec{u}$

2 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n-uplets de nombres réels, c'est-à-dire $\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,...,x_n)\,,\,x_i\in\mathbb{R}\}$.
$\mathbb{R}^n$ est naturellement muni des opérations $+$ et $\cdot$ définies par :
Pour tout $(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $(y_1,y_2,...,y_n)\in\mathbb{R}^n$, et $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ .\\ .\\ .\\ x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\ .\\ .\\ .\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\ .\\ .\\ .\\ x_n+y_n\end{pmatrix}\qquad \lambda\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ .\\ .\\ .\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x_1\\ .\\ .\\ .\\ \lambda x_n\end{pmatrix}\qquad \text{et on notera } \vec{0}_{\mathbb{R}^n}=\begin{pmatrix}0\\ .\\ .\\ .\\ 0\end{pmatrix}$$

Propriété
Muni des opérations définies précédemment, $\mathbb{R}^n$ constitue un espace vectoriel réel.

Rappel : Combinaison linéaire
Un vecteur de E du type $\alpha_1\vec{u_1}+\alpha_2\vec{u_2}+...+\alpha_i\vec{u_i}$ où $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_i$ sont des réels et $\vec{u_1},\vec{u_2},\dot{,}\vec{u_i}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, s'appelle une *combinaison linéaire* des i vecteurs $\vec{u_1},\vec{u_2},\dot{,}\vec{u_i}$ (i entier positif).

En résumé, si un ensemble est muni d'opérations qui permettent de définir la notion de combinaison linéaire, respectant les règles établies en paragraphe 1, alors on parle d'espace vectoriel.

Autres exemples d'espaces vectoriel
L'ensemble des matrices $M(n,p)$, muni de l'addition des matrices et du produit d'une matrice par un nombre réel, constitue un espace vectoriel réel.
De même, l'ensemble des matrices carrées $M(n)$, muni des mêmes opérations, est un espace vectoriel.

3 Sous-espace vectoriel

Définition 1 : Sous-espace vectoriel
F, sous ensemble de $\mathbb{R}^n$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si

- F contient $\vec{0}_{\mathbb{R}^n}$
- Pour tous $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de F, $\vec{u}+\vec{v}$ est un vecteur de F
  On dira que F est stable par $+$
- Pour tout $\vec{u}$ de F et pour tout k réel, $k\vec{u}$ est un vecteur de F
  On dira que F est stable par $\cdot$

Remarque : Dans la pratique on pourra réunir les deux dernières conditions en une seule en prouvant que pour tous $\vec{u}$, $\vec{v}$ de F et k réel, $\vec{u}+k\vec{v}$ est un vecteur de F
Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ hérite de toutes les propriétés des opérations de $\mathbb{R}^n$.

Exemple de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$:

Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène
L'ensemble E des solutions d'un système linéaire homogène (c'est-à-dire dont tous les seconds membres sont nuls) de p équations à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$:
$E=\{\vec{X}|\vec{X}\in\mathbb{R}^n$ et $A\vec{X}=0_{\mathbb{R}^p}\}$ où A est la matrice des coefficients du système linéaire et $0_{\mathbb{R}^p}$ le vecteur nul de $\mathbb{R}^p$.

Preuve :

- Le vecteur nul $\vec{0}_{\mathbb{R}^n}$ est évidemment solution de l'équation matricielle $A\vec{X} = \vec{0}_{\mathbb{R}^p}$.

- Soient $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ des éléments de E. Le vecteur $\vec{X}+\vec{Y}$ est-il alors aussi élément de E ?
  $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ sont des éléments de E donc on a $A\vec{X} = \vec{0}$ et $A\vec{Y} = \vec{0}$. Or $A(\vec{X}+\vec{Y}) = A\vec{X}+A\vec{Y} = \vec{0}+\vec{0} = \vec{0}$.
  Ainsi $\vec{X}+\vec{Y}$ est bien solution de l'équation $A\vec{X} = \vec{0}$, donc $\vec{X}+\vec{Y} \in E$. (Attention ici $\vec{0}$ est un vecteur colonne nul.)

- Soit $\vec{X} \in E$ et $k \in \mathbb{R}$. Le vecteur $k\vec{X}$ appartient-il à E ?
  $\vec{X} \in E$ donc $A\vec{X} = \vec{0}$. Or $A(k\vec{X}) = k(A\vec{X}) = k \cdot \vec{0} = \vec{0}$ donc $k\vec{X}$ est solution de l'équation $A\vec{X} = \vec{0}$ et $k\vec{X} \in E$.

Ces trois propriétés précédentes font donc de E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. CQFD

Exemples de sous-espaces vectoriels de $M(n)$:

1. Le sous-ensemble des matrices diagonales
2. Le sous-ensemble des matrices A qui vérifient $A = {}^tA$ (matrices symétriques)
3. Le sous-ensemble des matrices qui commutent avec une matrice A donnée
4. Le sous-ensemble des matrices triangulaires supérieures

Remarques :

1. tout sous-espace vectoriel de E contient nécessairement $\vec{0}_E$.
2. si k est un réel, $\vec{u}$ un vecteur de E et si $k\vec{u} = \vec{0}_E$, alors $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}_E$

4 Dépendance et indépendance linéaire

Soit E un espace vectoriel.
p désigne un entier supérieur ou égal à 1.

Définition :
On dit que des vecteurs $\vec{u_1}, ..., \vec{u_p}$ de E sont *liés* si l'un d'eux peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.
Des vecteurs non liés sont dits *linéairement indépendants*.

Propriété :
Les vecteurs $\vec{u_1}, ..., \vec{u_p}$ sont linéairement indépendants si et seulement si la seule combinaison linéaire nulle de ces vecteurs a tous ses coefficients nuls, c'est à dire que
$\alpha_1\vec{u_1} + \alpha_2\vec{u_2} + ... + \alpha_p\vec{u_p} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ...\alpha_p = 0$ ($\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p \in \mathbb{R}$.)

Exemples :

1. Démontrer que les vecteurs $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ sont linéairement indépendants.
2. Montrer que les vecteurs $\vec{c_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{c_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont liés.

Remarque :
Dire que **deux** vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont liés revient à dire qu'ils sont colinéaires. (c'est à dire qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$).
Dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont liés car colinéaires. ($\vec{v} = 3\vec{u}$ donc $\vec{v}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$).

5 Base et dimension d'un espace vectoriel

Définition :

1. Une *base* $B = (\vec{b_1}, \vec{b_2}, ..., \vec{b_n})$ de E est une famille de vecteurs de E telle que tout vecteur $\vec{u}$ de E s'écrit de manière **unique** comme combinaison linéaire des vecteurs de B :
$\vec{u} = x_1\vec{b_1} + x_2\vec{b_2} + ... + x_n\vec{b_n}$.
Les n réels $(x_1, x_2, ..., x_n)$ sont appelés les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base B et on notera $\text{Coord}_B(\vec{u}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$.
2. Toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs, c'est la *dimension* de E. On note $dim(E) = n$. On dit alors que E est de dimension finie.

En conséquence l'unique écriture du vecteur nul de E est : $\vec{0}_E = 0\vec{b_1} + 0\vec{b_2} + ... + 0\vec{b_n}$

Remarque : Il existe des espaces vectoriels n'admettant pas de base finie, comme par exemple l'ensemble des polynômes à coefficients réels $\mathbb{R}[X]$.

Il est clair que tout vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} + ... + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On note alors alors $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$,...,$\vec{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Base canonique et dimension de $\mathbb{R}^n$

La famille $(\vec{e_1}, ..., \vec{e_n})$ définie ci dessus constitue une base de $\mathbb{R}^n$, qu'on appellera ***base canonique de*** $\mathbb{R}^n$.

Ainsi on peut affirmer que **la dimension de $\mathbb{R}^n$ est n** : $\boxed{dim\,(\mathbb{R}^n) = n}$

Propriété :

Toute famille de n vecteurs linéairement indépendants dans un espace de dimension n constitue une base de cet espace.

Exemple : Les vecteurs $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

On a vu précédemment que ces 3 vecteurs sont linéairement indépendants. Or $dim(\mathbb{R}^3) = 3$ donc la famille $(\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3})$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

Equivalence :

On a ainsi l'équivalence suivante :

Les n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ $\vec{b_1}, ..., \vec{b_n}$ sont tels que

$$\alpha_1\vec{b_1} + ... + \alpha_n\vec{b_n} = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$(\vec{b_1}, ..., \vec{b_n})$ est une base de $\mathbb{R}^n$

Remarque :
Nous verrons plus tard, à l'aide des matrices, une manière équivalente de prouver qu'une famille est une base ou non de $\mathbb{R}^n$.

Définition : Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $(u_1, ..., u_p)$ est noté $Vect(u_1, ..., u_p)$.
$Vect(u_1, ..., u_p)$ est le *sous-espace vectoriel engendré* par les vecteurs $u_1, ..., u_p$.

- Dans le cas où les vecteurs $u_1, ..., u_p$ sont linéairement indépendants, la famille $(u_1, ..., u_p)$ constitue une base de $Vect(u_1, ..., u_p)$.
  Autrement dit, si les vecteurs $u_1, ..., u_p$ sont linéairement indépendants, on a $\dim(Vect(u_1, ..., u_p)) = p$.
- Si les vecteurs $u_1, ..., u_p$ sont liés, alors $\dim(Vect(u_1, ..., u_p)) < p$.

6 Recherche de base d'un sous-espace vectoriel

On a vu page 23 que les solutions d'un système linéaire homogène constituaient un espace-vectoriel. Dans la pratique on cherchera souvent à trouver une base de cet espace.

Propriété

Lors de la résolution d'un **système linéaire homogène admettant une infinité de solution** par l'algorithme du Pivot de Gauss, les **vecteurs issus du paramétrage des solutions forment une base** de l'espace vectoriel des solutions.

- **Exemple 1 : Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel E_1 de $\mathbb{R}^2$ où**
  $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + 5y = 0\}$

  Notons que l'équation $x + 5y = 0$ correspond en fait à un système linéaire 2×2 équivalent à

L_1	1	5	0
L_2	0	0	0

  En paramétrant par y on a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ Donc tout vecteur $\vec{u}$ de E_1 s'écrit $\vec{u} = a\vec{b_1}$ où $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.
  D ?où $E_1 = \{a\vec{b_1},\ a \in \mathbb{R}\} = Vect(\vec{b_1})$.
  Conclusion :
  $B = (\vec{b_1})$ est une base de E_1. Cette base ne contenant qu'un seul vecteur, la dimension de E_1 est 1, $dim(E_1) = 1$.

Remarques :

1. E_1 possède d'autres bases, elles sont toutes constituées d'un seul vecteur.
   Exemple : $B' = (\vec{b'_1})$ avec $\vec{b'_1} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}$. On a en effet $Vect(\vec{b_1}) = Vect(\vec{b'_1})$.
2. Les sous espaces vectoriels de dimension 1 sont des **droites**. E_1 est une droite de $\mathbb{R}^2$.

- **Exemple 2 :**
  Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel E_2 de $\mathbb{R}^3$ où
  $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x + 2y + z = 0\}$

- **Exemple 3 :**
  Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel E_3 de $\mathbb{R}^3$ où
  $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 4x + 2y + 5z = 0$ **et** $x + z = 0\}$

Remarques :

1. Le vecteur nul n'appartient à aucune base.
2. Une base ne possède jamais deux vecteurs colinéaires.
3. Si un espace vectoriel E est de dimension finie n, ses sous-espaces vectoriels ont des dimensions inférieures ou égales à n : Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $dim(F) \leqslant dim(E)$.
4. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
   Si $dim(F) = 0$, alors $F = \{0_E\}$; si $dim(F) = n$, alors $F = E$.

7 Changement de base

7.1 Un exemple dans $\mathbb{R}^3$

On désigne par $\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. (Rappels : $\vec{e_1} = (1, 0, 0)$, $\vec{e_2} = (0, 1, 0)$, $\vec{e_3} = (0, 0, 1)$. Toutes les bases de $\mathbb{R}^3$ possèdent trois vecteurs.

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ donné. Alors,
$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow u = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$. On note $X = Coord_E(\vec{u})$.
On considère alors trois nouveaux vecteurs :
$\vec{b_1} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} + \vec{e_3}$, $\vec{b_2} = 3\vec{e_1} + 7\vec{e_2} + 5\vec{e_3}$ et $\vec{b_3} = 2\vec{e_1} + 3\vec{e_2} + \vec{e_3}$ et note $\mathcal{B} = (\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3})$.

La famille $\mathcal{B}$ de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de manière *unique* comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$: $\vec{u} = \alpha_1\vec{b_1} + \alpha_2\vec{b_2} + \alpha_3\vec{b_3}$, autrement dit si et seulement si l'équation où les inconnues sont α_1, α_2, α_3
$\alpha_1 Coord_E(\vec{b_1}) + \alpha_2 Coord_E(\vec{b_2}) + \alpha_3 Coord_E(\vec{b_3}) = Coord_E(\vec{u})$
admet une solution unique,
c'est à dire si et seulement si il existe une solution unique pour l'équation :
$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. ($\alpha_1, \alpha_2$ et α_3 étant les inconnues.)

Il s'agit alors de résoudre le système linéaire dont la matrice des coefficients est $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

et le second membre est $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Le système linéaire s'écrit sous forme matricielle : $A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Ce système linéaire admet une solution unique, quel que soit le vecteur $\vec{u}$, si et seulement si la matrice A est inversible (c'est à dire que A admet trois pivots).

Ainsi, $\mathcal{B}$ est une base si et seulement si A est inversible.

Ici, A est inversible.

On a $A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 7 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Donc tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$: $\begin{cases} \alpha_1 = -8x_1 + 7x_2 - 5x_3 \\ \alpha_2 = x_1 - x_2 + x_3 \\ \alpha_3 = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \end{cases}$. $\mathcal{B}$ est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

On a alors les **relations de changement de base** suivantes :

$Coord_{\mathcal{E}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Coord_{\mathcal{B}}(\vec{u}) = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$

$Coord_{\mathcal{B}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ et $Coord_{\mathcal{E}}(\vec{u}) = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Notations :

On remarque que la première colonne de A^{-1} représente les coordonnées de $\vec{e_1}$ dans la base $\mathcal{B}$. En effet si $x_1 = 1$ et $x_2 = x_3 = 0$, alors $\alpha_1 = -8$, $\alpha_2 = 1$ et $\alpha_3 = 3$. De même pour les autres colonnes.

De même, A est construite de telle sorte que ses colonnes sont constituées des coordonnées de $\vec{b_1}, \vec{b_2}$ et $\vec{b_3}$ dans la base canonique $\mathcal{E}$.

On introduit donc les notations suivantes :

$Coord_{\mathcal{E}}(\mathcal{B})$ désigne la matrice de $M(3)$ dont les 3 colonnes sont $Coord_{\mathcal{E}}(\vec{b_1}), Coord_{\mathcal{E}}(\vec{b_2})$ et $Coord_{\mathcal{E}}(\vec{b_3})$.

On pourra écrire : $Coord_{\mathcal{E}}(\mathcal{B}) = \Big(Coord_{\mathcal{E}}(\vec{b_1}), Coord_{\mathcal{E}}(\vec{b_2}), Coord_{\mathcal{E}}(\vec{b_3})\Big)$.

De même, $Coord_{\mathcal{B}}(\mathcal{E})$ désigne la matrice de $M(3)$ dont les 3 colonnes sont $Coord_{\mathcal{B}}(\vec{e_1}), Coord_{\mathcal{B}}(\vec{e_2})$ et $Coord_{\mathcal{B}}(\vec{e_3})$.

Propriété : $\mathbf{Coord}_{\mathcal{B}}(\mathcal{E}) = (\mathbf{Coord}_{\mathcal{E}}(\mathcal{B}))^{-1}$ **et** $\mathbf{Coord}_{\mathcal{E}}(\mathcal{B}) = (\mathbf{Coord}_{\mathcal{B}}(\mathcal{E}))^{-1}$**.**
En résumé :

Caractérisation d'une base

Si E est une base de $\mathbb{R}^n$ et B une famille quelconque de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, alors :

B **est une base si et seulement si** $Coord_E(B)$ **est inversible.**

Relations de changement de bases pour les coordonnées d'un vecteur :

Si E et B sont deux bases de $\mathbb{R}^n$ et $\vec{u}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$, alors :

$$\boxed{\mathbf{Coord_E(u) = Coord_E(B) Coord_B(u)}}$$

$$\boxed{\mathbf{Coord_B(u) = Coord_B(E) Coord_E(u)}}$$

7.2 Cas Général

$\mathcal{B}$ désigne une base de E, espace vectoriel de dimension n.
Soit $V = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n})$ une autre base de E.
$P = Coord_{\mathcal{B}}(\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n}) = Coord_{\mathcal{B}}(V)$ est la **matrice de passage de la base B à la base V.**
Alors P est inversible et $P^{-1} = Coord_{\mathcal{V}}(B)$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de E, si on note X ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ et Y ses coordonnées dans $\mathcal{V}$, on a :

$$\mathbf{Y = Coord_{\mathcal{V}}(u) = Coord_{\mathcal{V}}(\mathcal{B}) Coord_{\mathcal{B}}(u) = P^{-1}X}$$
$$\mathbf{X = Coord_{\mathcal{B}}(u) = Coord_{\mathcal{B}}(\mathcal{V}) Coord_{\mathcal{V}}(u) = PY}$$

Propriétés :
$W = (\vec{w_1}, \vec{w_2}, ..., \vec{w_n})$ est une base de E si et seulement si $P = Coord_{\mathcal{B}}(W)$ est inversible.

8 Exercices

Exercice III.1

1. Soient $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
   Calculer les coordonnées des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ combinaisons linéaires de $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$:
   $\vec{v} = 3\vec{u_1} - 6\vec{u_2}$; $\vec{w} = -\vec{u_1} + 2\vec{u_2}$.
2. Soient $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}$ et $\vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
   Calculer les coordonnées des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ combinaisons linéaires de u_1, u_2 et u_3 :
   $\vec{v} = \vec{u_1} - \vec{u_2} + 3\vec{u_3}$; $\vec{w} = 2\vec{u_1} - 3\vec{u_2} - 6\vec{u_3}$.

Exercice III.2 Soient a, b, $c \in \mathbb{R}$.

1. (a) Soit le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2a+3b \\ b-5a \\ 9a+b \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$.
   Trouver 2 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, u_1 et u_2 tels que $\vec{u} = a\vec{u_1} + b\vec{u_2}$.

   (b) Soit le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5b \\ -6a \\ 2a-3b \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$.
   Trouver 2 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ tels que $\vec{v} = a\vec{v_1} + b\vec{v_2}$.
2. (a) Soit le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2a+3b-c \\ b-5a+2c \\ c-9a+b \\ c-a \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^4$.
   Trouver 3 vecteurs de $\mathbb{R}^4$, $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ et $\vec{u_3}$ tels que $\vec{u} = a\vec{u_1} + b\vec{u_2} + c\vec{u_3}$.

   (b) Soit le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5a-3b \\ b-5a \\ c \\ b-c-a \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^4$.
   Trouver 3 vecteurs de $\mathbb{R}^4$, $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$ tels que $\vec{v} = a\vec{v_1} + b\vec{v_2} + c\vec{v_3}$.

Exercice III.3

On considère dans $\mathbb{R}^3$ l'ensemble P des vecteurs qui peuvent s'écrire $\begin{pmatrix} 5b \\ -6a \\ 2a-3b \end{pmatrix}$ où a et b sont des nombres réels quelconques. $P = \left\{ \begin{pmatrix} 5b \\ -6a \\ 2a-3b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

1. (a) Le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$ appartient-il à P ?

   (b) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques de P. A-t-on $\vec{u} + \vec{v} \in P$?

(c) Soit $\vec{u} \in P$ et λ un nombre réel quelconque. A-t-on $\lambda\vec{u} \in P$?

(d) Que peut-on dire, d'après ce qui précède, de l'ensemble P ?

2. On considère maintenant dans $\mathbb{R}^3$ l'ensemble Q des vecteurs qui peuvent s'écrire $\begin{pmatrix} 5b \\ -6a \\ 3 \end{pmatrix}$ où a et b sont des nombres réels quelconques. $Q = \left\{ \begin{pmatrix} 5b \\ -6a \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

   Q est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Exercice III.4 Pour chacun des sous-ensembles F_i ci-dessous, dire s'il est un sous-espace vectoriel de E_i et justifier la réponse :

$E_1 = \mathbb{R}^3, \quad F_1 = \{{}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0\}$
$E_2 = \mathbb{R}^4, \quad F_2 = \{{}^t(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y - 2z - t = 5 \text{ et } x - z - t = 0\}$
$E_3 = \mathbb{R}^4, \quad F_3 = \{{}^t(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y - 2z - t = 0 \text{ et } x - z - t = 0\}$
$E_4 = \mathbb{R}^2, \quad F_4 = \{{}^t(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 0\}$
$E_5 = \mathbb{R}^3, \quad F_5 = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 / \quad \vec{u} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}\}$

Exercice III.5 On considère l'espace vectoriel $E = (M(n), +, \cdot)$ des matrices carrées de taille n, muni de l'addition des matrices et de la multiplication d'une matrice par un nombre réel.
Montrer que l'ensemble F des matrices triangulaires supérieures (c'est à dire les matrices dont tous les coefficients situés strictement en dessous de la diagonale sont nuls) est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice III.6 On considère l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni des opérations $+$ et $\cdot$ définies comme suit :
pour tout f, $g \in \mathcal{F}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f + g \; : \; \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) + g(x) \end{array} \qquad \lambda \dot{f} \; : \; \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda \times f(x) \end{array}$$

Démontrer que l'ensemble $\mathcal{F}_0$ des fonctions qui s'annulent en zéro est une sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$.

Exercice III.7 Parmi les familles de vecteurs suivantes, déterminer celles dont les vecteurs sont liés (on dira que la famille est liée) et celles dont les vecteurs sont linéairement indépendants (on dira que la famille est libre).

1. Dans $\mathbb{R}^2$: $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$
2. Dans $\mathbb{R}^2$: $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

3. Dans $\mathbb{R}^2$: $\vec{c_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{c_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{c_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2014 \end{pmatrix}$
4. Dans $\mathbb{R}^3$: $\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{d_2} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$
5. Dans $\mathbb{R}^3$: $\vec{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{f_2} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
6. Dans $\mathbb{R}^3$: $\vec{g_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{g_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{g_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$
7. Dans $\mathbb{R}^3$: $\vec{h_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{h_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{h_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
8. Dans $\mathbb{R}^3$: $\vec{i_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{i_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{i_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
9. Dans $\mathbb{R}^3$: $\vec{j_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{j_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{j_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 100 \end{pmatrix}$ et $\vec{j_4} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -98 \end{pmatrix}$

Exercice III.8

1. Trouver une base et la dimension de chacun des sous-espaces suivants de $\mathbb{R}^2$:
   $E_1 = \{^t(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + 2y = 0\}$
   $E_2 = \{^t(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x - y = 0\}$

2. Trouver une base et la dimension de chacun des sous-espaces suivants de $\mathbb{R}^3$:
   $E_1 = \{^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - 2z = 0\}$
   $E_2 = \{^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x + 2y + z = 0 \text{ et } x - 3y = 0\}$

3. Trouver une base et la dimension de chacun des sous-espaces suivants de $\mathbb{R}^4$:
   $E_1 = \{^t(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 2x + 2y - z - t = 0\}$
   $E_2 = \{^t(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 4x - 2y - t = 0 \text{ et } x + y - 2z = 0\}$
   $E_3 = \{X \in \mathbb{R}^4 / AX = 0_{\mathbb{R}^3}\}$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice III.9
$\mathbb{R}^3$ est muni de la base canonique $\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ où $\vec{e_1} = (1;0;0)$, $\vec{e_2} = (0;1;0)$, $\vec{e_3} = (0;0;1)$.
Pour chacune des familles de vecteurs de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, dire si elle est une base de $\mathbb{R}^3$:

- Si oui, écrire les deux matrices de changement de base et donner dans la nouvelle base les coordonnées du vecteur $\vec{u} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} - \vec{e_3}$, puis les coordonnées dans la base canonique du vecteur $\vec{v}$ dont les coordonnées dans la nouvelle base sont $(2;-1;2)$.
- Sinon, trouver une relation linéaire entre les vecteurs de la famille.

1. $U = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ où $\vec{u_1} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} - \vec{e_3}$; $\vec{u_2} = 2\vec{e_1} + 5\vec{e_2} - 3\vec{e_3}$; $\vec{u_3} = 3\vec{e_1} + 4\vec{e_2}$
2. $V = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ où $\vec{v_1} = \vec{e_1} + 4\vec{e_2}$; $\vec{v_2} = \vec{e_1} + 3\vec{e_2}$; $\vec{v_3} = \vec{e_1} - \vec{e_2} + \vec{e_3}$
3. $W = (\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3})$ où $\vec{w_1} = \vec{e_1} + 4\vec{e_2}$; $\vec{w_2} = \vec{e_1} + 3\vec{e_2} - \vec{e_3}$; $\vec{w_3} = \vec{e_1} - \vec{e_2} - 5\vec{e_3}$

Exercice III.10
Sans faire aucun calcul, dire pourquoi ces familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ ne sont pas des bases de $\mathbb{R}^3$:

1. $U = (\vec{u_1}, \vec{u_2})$ où $\vec{u_1} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} - \vec{e_3}$;$\vec{u_2} = 2\vec{e_1} + 5\vec{e_2} - 3\vec{e_3}$
2. $V = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4})$ où $\vec{v_1} = \vec{e_1} + 4\vec{e_2}$; $\vec{v_2} = \vec{e_1} + 3\vec{e_2}$; $\vec{v_3} = \vec{e_1} - \vec{e_2} + \vec{e_3}$; $\vec{v_4} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$
3. $W = (\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3})$ où $\vec{w_1} = \vec{e_1} + 4\vec{e_2}$; $\vec{w_2} = \vec{e_1} + 3\vec{e_2} - \vec{e_3}$; $\vec{w_3} = 3\vec{e_1} + 12\vec{e_2}$

Exercice III.11 $\mathbb{R}^2$ est muni de la base canonique $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$.
Soit la famille $B = (\vec{b_1}, \vec{b_2})$ où $\vec{b_1} = 3\vec{e_1} + 2\vec{e_2}$ et $\vec{b_2} = 4\vec{e_1} + 3\vec{e_2}$.

1. Montrer que B est une base de $\mathbb{R}^2$ et écrire les matrices de changement de base.
2. Ecrire les coordonnées dans la base B des vecteurs suivants :
   $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{b_1}$, $\vec{b_2}$, $\vec{e_1} + \vec{e_2}$; $\vec{u_1}$ tel que $Coord_E(\vec{u_1}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\vec{u_2}$ tel que $Coord_E(\vec{u_2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Ecrire les coordonnées dans la base E des vecteurs suivants :
   $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{b_1}$, $\vec{b_2}$, $\vec{e_1} + \vec{e_2}$; $\vec{v_1}$ tel que $Coord_B(\vec{v_1}) = \begin{pmatrix} -14 \\ 11 \end{pmatrix}$; $\vec{v_2}$ tel que $Coord_B(\vec{v_2}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   En déduire que $\vec{u_1} = \vec{v_1}$ et $\vec{u_2} = \vec{v_2}$.
4. Mêmes questions avec
   $\vec{b_1} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2}$ et $\vec{b_2} = 3\vec{e_1} + 5\vec{e_2}$, $\vec{v_1}$ tel que $Coord_B(\vec{v_1}) = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$,
   $\vec{v_2}$ tel que $Coord_B(\vec{v_2}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.