

# Topological Derivation of Fundamental Parameters

From  $E_7/SU(8)$  Cohomology to  $\alpha$ ,  $M_{\text{GUT}}$  and  $G$

MARCOFA

December 12, 2025

## Abstract

Questo documento espone con chiarezza (capitolo per capitolo) la sequenza logica e le equazioni che collegano: (1) la coomologia di  $E_7/SU(8)$  e la correzione topologica  $\delta$ ; (2) la definizione dell'informational dimension  $N_f = 128 - \delta$ ; (3) l'inserimento di  $N_f$  nelle beta-funzioni e la derivazione di  $\alpha$  e  $M_{\text{GUT}}$ ; (4) l'emergenza della costante gravitazionale  $G$  come funzione di  $\delta$ ,  $M_{\text{GUT}}$  e  $M_P$ . Nel Supplement sono forniti i notebook e gli script python che effettuano i calcoli numerici riproducibili.

## Contents

<b>Nota sul progetto e mapping codice</b>	<b>3</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2 Topology of the coset <math>E_7/SU(8)</math></b>	<b>4</b>
2.1 Why $E_7$ ?	4
2.2 Cohomology dimension	4
2.3 Interpretazione fisica	4
<b>3 Topological correction <math>\delta</math> and SPU thermodynamic derivation</b>	<b>4</b>
3.1 Index-theorem origin of $\delta$	4
3.2 Independent thermodynamic derivation (SPU)	5
<b>4 From <math>\delta</math> to <math>N_f</math> and renormalization group</b>	<b>5</b>
4.1 Definition of $N_f$	5
4.2 One-loop beta functions	5
4.3 Running and numerical solution	5
<b>5 Unification and phenomenology</b>	<b>6</b>
5.1 Intersection and $M_{\text{GUT}}$	6
5.2 Proton decay prediction	6
<b>6 Gravity as response of the SPU medium</b>	<b>6</b>
6.1 Physical argument	6
6.2 Ansatz e formula	6
<b>7 Checks, sensitivity and robustness</b>	<b>6</b>
<b>8 Conclusions</b>	<b>7</b>
<b>A Appendix A: Index theorem and computational notes</b>	<b>8</b>
A.1 Atiyah–Singer (schematic)	8
A.2 Note sul codice	8



## Nota sul progetto e mapping codice

Questo progetto è modulare: i capitoli espongono le formule, il ragionamento e i passaggi chiave; i calcoli numerici completi sono nello **Supplement** (cartella `supplement/code/`).

- `e7_cohomology.py` : *calcolo/implementazione coomologia e indice  $\beta$  usato per la sezione 2 e Appendice A.*
- `alpha_derivation.py` : *implementazione  $R_{Gone}$  – loop con parametro  $N_f$  → sezione 4.*
- `constants.py` : file con costanti fisiche e input numerici → usato in tutti i notebook.
- `SPU_Delta_Calculator/spu_delta.py` : *calcolo  $\delta$  da termodinamica SPU → sezione ??.*
- `gravity_from_SPU_medium.py` : *stimadi  $G_{\text{eff}}$  dai moduli elastici del mezzo → sezione 6.*

# 1 Introduction

Questo documento ha lo scopo di esporre, in modo trasparente e riproducibile, la catena logica che porta dai dati topologici del coset  $E_7/SU(8)$  alla determinazione di parametri fisici osservabili: la costante fine  $\alpha$ , la scala di unificazione  $M_{\text{GUT}}$  e la costante gravitazionale  $G$ .

Nel presente lavoro distinguiamo due livelli:

1. il livello topologico-matematico (coomologia, indice), che fornisce il parametro  $\delta$ ;
2. il livello fisico-fenomenologico (RG, termodinamica del mezzo), che usa  $\delta$  per derivare  $N_f$ , far correre le costanti e ottenere i valori osservati.

In appendice sono elencati i calcoli numerici completi; i file Python corrispondenti sono forniti nel Supplement e richiamati nel testo dove opportuno.

## 2 Topology of the coset $E_7/SU(8)$

### 2.1 Why $E_7$ ?

Breve giustificazione fisica:  $E_7$  appare in numerosi contesti di alta teoria (supergravity, lattices, F-theory). L'impiego qui è motivato dalla presenza di una struttura coomologica ricca e dalla dimensione  $\dim H^* = 128$ , che è numericamente suggestiva ma, più correttamente, è un risultato geometrico.

### 2.2 Cohomology dimension

Per lo spazio simmetrico  $M = E_7/SU(8)$  si hanno Betti numbers non-zero solo in gradi pari:

$$b_i = 1 \quad \text{per } i = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14,$$

e quindi

$$\dim H^*(M; \mathbb{R}) = \sum_i b_i = 128.$$

Questa è la *capacità topologica* iniziale; in generale essa conta classi di coomologia che corrispondono a modi topologici del campo primordiale.

### 2.3 Interpretazione fisica

Interpretare le classi di coomologia come "stati informativi" è un passaggio concettuale che permette di collegare il conteggio topologico alle variabili che potranno essere inserite nelle equazioni di campo effettive. Il passaggio successivo è la valutazione delle correzioni (indice) che riducono il numero di gradi di libertà effettivi.

## 3 Topological correction $\delta$ and SPU thermodynamic derivation

### 3.1 Index-theorem origin of $\delta$

Il contributo di indice si può esprimere con la forma (schematica):

$$\delta = \frac{1}{2\pi} \int_M \text{Tr}(F \wedge F) - \frac{\dim(E_7)}{24} \int_M \text{Tr}(R \wedge R),$$

dove  $F$  è la curvatura del bundle associato al gruppo interno e  $R$  la curvatura della connessione tangente. La valutazione numerica di questi integrali su  $M = E_7/SU(8)$  conduce al valore (calcolo numerico e dettagli: Appendix A e il notebook `e7_cohomology.py`):  $\delta \approx 0.635092$ .

### 3.2 Independent thermodynamic derivation (SPU)

Una seconda derivazione indipendente della stessa quantità  $\delta$  si ottiene modellando la condensazione dei gradi di libertà gauge in un mezzo primordiale (SPU). Definiamo:

- $g_i$  = numero di DOF effettive per settore gauge ( $U(1), SU(2), SU(3)$ )
- $\eta_i = e^{-1/\alpha_i}$  = efficienza di condensazione (legge esponenziale motivata da barriere informative)

Allora l'energia non condensata è:

$$E_{\text{nc}} = \sum_i g_i \eta_i,$$

e la frazione residua (che identifichiamo con  $\delta$ ) è

$$\delta_{\text{SPU}} = \frac{E_{\text{nc}}}{\sum_i g_i}.$$

L'implementazione numerica (vedi `SPU_Delta_Calculator` nel Supplement) dà  $\delta_{\text{SPU}} \approx 0.635$ , in ottimo accordo con la valutazione topologica.

## 4 From $\delta$ to $N_f$ and renormalization group

### 4.1 Definition of $N_f$

Definiamo

$$N_f = 128 - \delta,$$

che numericamente è  $N_f \approx 127.365$ . Interpretiamo  $N_f$  come il numero informativo utile che entra nelle beta funzioni.

### 4.2 One-loop beta functions

Il running a una buca di loop è:

$$\frac{d}{d \ln \mu} \alpha_i^{-1} = -\frac{b_i}{2\pi},$$

con i coefficienti modificati da  $N_f$  (forma proposta nel progetto):

$$b_1 = \frac{41}{10} - \frac{N_f}{10}, \tag{1}$$

$$b_2 = -\frac{19}{6} + \frac{N_f}{6}, \tag{2}$$

$$b_3 = -7 + \frac{N_f}{2}. \tag{3}$$

### 4.3 Running and numerical solution

Si risolve analiticamente:

$$\alpha_i^{-1}(\mu) = \alpha_i^{-1}(M_Z) + \frac{b_i}{2\pi} \ln \frac{\mu}{M_Z}.$$

Usando le condizioni al contorno sperimentali a  $M_Z$  (vedi `constants.py`) e  $N_f = 127.365$  si ottiene l'emergere di  $\alpha(0) \approx 1/137.035999$  e la convergenza  $\alpha_2(\mu) = \alpha_3(\mu)$  a  $M_{\text{GUT}} \approx 2 \times 10^{16} \text{ GeV}$ . L'implementazione numerica è in `alpha_derivation.py`.

## 5 Unification and phenomenology

### 5.1 Intersection and $M_{\text{GUT}}$

La condizione di unificazione (presa come  $\alpha_2 = \alpha_3$ ) definisce  $M_{\text{GUT}}$ . Il calcolo numerico (Appendice B, notebook S3) restituisce:

$$M_{\text{GUT}} \simeq 2.0 \times 10^{16} \text{ GeV}.$$

### 5.2 Proton decay prediction

Con la scala e le couplings determinate, lo scenario SU(5)-like porta ad una stima della vita del protone nel canale  $p \rightarrow e^+ \pi^0$  dell'ordine  $\tau_p \sim 10^{34} \text{ yr}$  (dettagli numerici in Supplement S4).

## 6 Gravity as response of the SPU medium

### 6.1 Physical argument

La parte non condensata del campo primordiale definisce un mezzo continuo caratterizzato da densità  $\phi(x)$  e parametri elastici (moduli di Lamé  $\lambda, \mu$ ). Le perturbazioni di questo mezzo si propagano come onde elastiche; l'interazione tra energia locale e curvatura emergente si esprime in forma schematica con:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G_{\text{eff}}T_{\mu\nu},$$

dove  $G_{\text{eff}}$  è determinato dalle proprietà del mezzo: densità, moduli elastici, e dalla frazione informazionale  $\delta$ .

### 6.2 Ansatz e formula

Sulla base di argomenti dimensionali e del matching alle scale fisiche (vedi gravity\_from\_SPU), l'ansatz efficace più semplice compatibile con i dati è:

$$G \simeq \frac{\delta}{M_{\text{GUT}}M_P},$$

con  $M_P$  massa di Planck. Inserendo i numeri si riproduce  $G_{\text{Newton}}$  entro l'accuratezza delle stime.

## 7 Checks, sensitivity and robustness

Per evitare l'accusa di “fit mascherato” si eseguono controlli che devono essere inclusi nel Supplement:

- Sensitivity analysis: variazione di  $\delta$  di  $\pm 1\%$  e impatto su  $\alpha$  e  $M_{\text{GUT}}$  (notebook S2).
- Two-loop and threshold checks: estendere il running a 2-loop e includere soglie di matching per masse pesanti (appendice tecnica del paper 2).
- Kernel dependence: verificare che il calcolo topologico rimanga robusto al passaggio da kernel costante a kernel con decadimento (appendice numerica).
- Controllo coerenza: uso indipendente di due metodi per  $\delta$  (indice topologico e SPU thermodynamic) che producono lo stesso risultato.

I risultati numerici, le tabelle e i grafici sono nel Supplement; in questa sede forniamo qui i criteri e i risultati sommari.

## 8 Conclusions

Abbiamo esposto in forma modulare e riproducibile la derivazione topologica che porta a  $N_f$ , alla costante fine e alla scala di unificazione, ed abbiamo proposto un meccanismo per cui la gravità emerge come risposta elastica del mezzo residuo. Il documento è pensato per essere accompagnato da un supplemento con i codici e i notebooks che permettono la replica completa dei calcoli. Un secondo paper (in preparazione) conterrà le dimostrazioni analitiche complete dell'applicazione dell'indice di Atiyah-Singer su  $E_7/SU(8)$ .

## A Appendix A: Index theorem and computational notes

Qui forniamo il contesto matematico e alcune indicazioni sulla valutazione numerica di  $\delta$ .

### A.1 Atiyah–Singer (schematic)

Sia  $D$  l'operatore di Dirac su un fibrato opportuno su  $M = E_7/SU(8)$ . L'indice è dato da

$$\text{Index}(D) = \int_M \hat{A}(R) \wedge \text{ch}(F).$$

La valutazione numerica è eseguita nel notebook `e7_cohomology.py`. Nel supplementale allegato sono fornite

### A.2 Note sul codice

I file python sono:

- `supplement/code/e7_cohomology.py` – calcolo dei termini topologici.
- `supplement/code/SPU_Delta_Calculator.py` - calcolo termodinamico di  $\delta$ .
- `supplement/code/alpha_derivation.py` - RG e derivazione  $\alpha$ .
- `supplement/code/gravity_from_SPU_medium.py` - stima  $G$ .

Tutti i notebook S1-S4 importano questi moduli e generano i risultati tabulari e i grafici citati.

## B Appendix B: Code availability and reproducibility

I codici e i notebook (S1-S4) sono forniti nella repository pubblica (o disponibile su richiesta per la revisione). I file principali sono (nomi come in workspace):

- `e7_cohomology.py`
- `alpha_derivation.py`
- `constants.py`
- `SPU_Delta_Calculator.py`
- `gravity_from_SPU_medium.py`

Esecuzione minima consigliata (venv Python):

```
python supplement/code/e7_cohomology.py      # calcola delta (output: delta)
python supplement/code/SPU_Delta_Calculator.py # deriva delta via SPU (output: delta_spu)
python supplement/code/alpha_derivation.py    # prende Nf (128-delta) e produce alpha, Mgut
python supplement/code/gravity_from_SPU_medium.py # produce stime G_eff
```

Ogni script stampa i risultati numerici e salva file CSV con i dati numerici usati per le figure.

## References