

Proyecto Final Ecuaciones Diferenciales 1 - Sección 60

Marco Fuentes (18188), Gian Luca Rivera (18049), Francisco Rosal (18676), Camila González (18398)

Introducción

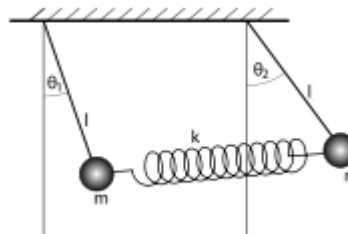
El presente proyecto pretendió dar respuesta al problema de encontrar la evolución temporal de un sistema físico complejo compuesto por dos péndulos de igual masa y longitud, unidos por un resorte ligero en el plano que los contiene, cuando se le saca de su posición de equilibrio (en reposo).

Para este propósito se utilizaron técnicas de física elemental, mecánica lagrangiana, ecuaciones diferenciales no lineales de orden superior en conjunto con el método de aproximación numérica de Runge-Kutta de orden 4.

El procedimiento se dividió en 2 partes. La primera, usando aproximaciones de primer grado para ángulos pequeños de θ y ϕ y así poder encontrar los modos normales de oscilación del sistema, y la segunda, usando el método de Runge-Kutta para aproximar la curva solución de la ecuación de movimiento del sistema en ciertos intervalos de tiempo.

Finalmente se concluyó que el medio elástico conectando los péndulos en este sistema funciona como un mediador de energía entre los componentes del sistema, logrando que la energía cinética de un péndulo se transfiera al otro en un proceso cíclico, el cual, de no haber ningún tipo de fricción, nunca acabaría.

Deducción de ecuaciones



Considerando el sistema ilustrado (para este planteamiento, $\theta_1 = \phi$ y $\theta_2 = \theta$) y recordando que el lagrangiano de un sistema se define como $\mathcal{L} = E_c - E_p$, se considera cada masa como una partícula bajo una fuerza neta. De esta forma se obtiene:

$$\begin{aligned} E_{c_1} &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2, & E_{p_1} &= mgy_1 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 \\ E_{c_2} &= \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2, & E_{p_2} &= mgy_2 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 \end{aligned}$$

Si se parametriza las coordenadas x y y en términos de θ y L para la masa 1:

$$\begin{aligned} x_1 &= L \sin \phi, & y_1 &= L(1 - \cos \phi) \\ \dot{x}_1 &= L \cos \phi \dot{\phi} & \dot{y}_1 &= L \sin \phi \dot{\phi} \end{aligned}$$

Se obtiene entonces el lagrangiano asociado:

$$\mathcal{L}_1 = E_c - E_p = \frac{1}{2}m_1L^2\dot{\phi}^2 - mgL(1 - \cos \phi) - \frac{1}{2}kL^2(\sin \phi - \sin \theta)^2$$

La ecuación de Euler-Lagrange establece que, para este sistema:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \phi} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \dot{\phi}}$$

Con la condición de masas iguales, luego de un poco de álgebra y un procedimiento similar para x_2 y y_2 se llega al sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de orden 2 que +:

$$\begin{aligned} mL^2\ddot{\theta} &= -mgL \sin \theta - kL^2 \cos \theta (\sin \theta - \sin \phi) \\ mL^2\ddot{\phi} &= -mgL \sin \phi - kL^2 \sin \phi \cos \phi + kL^2 \sin \theta \cos \phi \end{aligned}$$

Dada la complejidad del sistema, encontrar una solución requiere que se tomen suposiciones físicas del sistema o bien que se utilicen métodos numéricos.

Soluciones físicas

Desde un punto de vista físico, el modelo usado solo tiene sentido cuando se consideran desplazamientos angulares iniciales relativamente pequeños. Si la posición angular inicial de los péndulos es suficientemente pequeña, se puede hacer uso de la aproximación

$$\begin{aligned}\theta &\approx 0, & \sin \theta &\approx \theta, & \cos \theta &\approx 1 \\ \phi &\approx 0, & \sin \phi &\approx \phi, & \cos \phi &\approx 1\end{aligned}$$

Entonces, el sistema queda reducido al siguiente:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \theta \left(\frac{-g}{L} - \frac{k}{m} \right) + \phi \frac{k}{m} \\ \ddot{\phi} &= \phi \left(\frac{-g}{L} - \frac{k}{m} \right) + \theta \frac{k}{m}\end{aligned}$$

Para obtener los **modos normales** del sistema se plantean dos casos simples.

Caso 1: $\theta = \phi$

En este caso se propone que las posiciones angulares iniciales son iguales. Es lógico intuir que, al no existir desfase entre las condiciones iniciales, el resorte en el sistema nunca se verá comprimido, lo cual reducirá el movimiento del sistema al de un péndulo simple. Sustituyendo:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \theta \left(\frac{-g}{L} - \frac{k}{m} \right) + \theta \frac{k}{m} \\ \ddot{\theta} + \theta \frac{g}{L} &= 0\end{aligned}$$

Al resolver esta última ecuación diferencial lineal de orden 2, se obtiene que:

$$\begin{aligned}\theta(t) &= c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right) \\ \phi(t) &= c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right)\end{aligned}$$

Caso 2: $\theta = -\phi$

En este caso se propone que los péndulos son liberados desde posiciones angulares opuestas. De nuevo, es lógico pensar que la solución será un movimiento armónico.

$$\ddot{\theta} = \theta \left(\frac{-g}{L} - \frac{k}{m} \right) - \frac{k}{m} \theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta + \frac{2k}{m} \theta = 0$$

$$\therefore \theta(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}} t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}} t\right)$$

$$\phi(t) = -c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}} t\right) - c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}} t\right)$$

Se puede notar que ambas soluciones tienen la misma forma, pero con una frecuencia ligeramente distinta. Esta pequeña diferencia entre frecuencias provoca que exista interferencia entre ambos modos, y que ésta interferencia sea por momentos constructiva, y por momentos destructiva. Es decir, la posición angular de una de las masas del sistema se ve así:

```
In [1]: import math
import numpy as np
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt

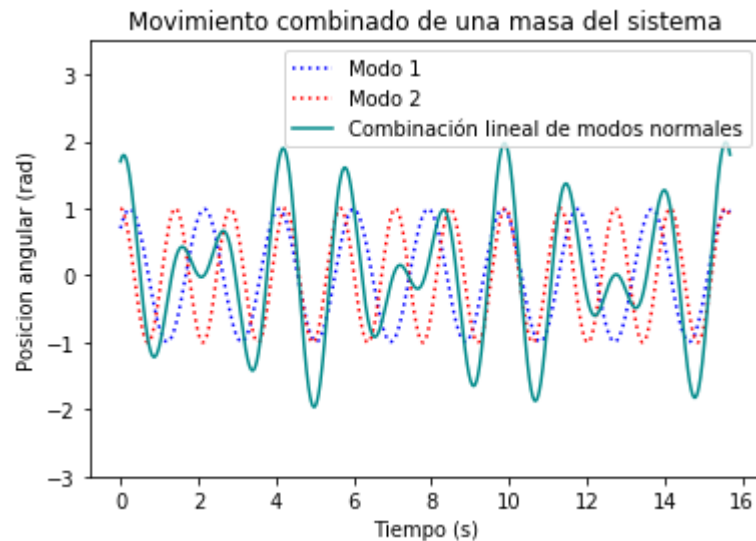
m = 0.2
l = 0.915
g = 9.8
k = 0.9

def theta_1(t,c_1,c_2):
    return c_1*math.sin(math.sqrt(g/l)*t)+c_2*math.cos(math.sqrt(g/l)*t)

def theta_2(t,c_1,c_2):
    return c_1*math.cos(math.sqrt((g/l)+(2*k/(m)))*t + c_2)
t = np.arange(0,5*3.14,0.01)
t_1 = []
t_2 = []
t_3 = []
for i in t: t_1.append(theta_1(i,0.7,0.7))

for j in t: t_2.append(theta_2(j,1,0))

for k in range(len(t)): t_3.append(t_1[k]+t_2[k])
plt.title('Movimiento combinado de una masa del sistema')
plt.plot(t,t_1,'b:',label='Modo 1')
plt.plot(t,t_2,'r:',label='Modo 2')
plt.plot(t,t_3,'darkcyan',label='Combinación lineal de modos normales')
plt.ylabel('Posición angular (rad)')
plt.xlabel('Tiempo (s)')
plt.legend(loc='upper right')
plt.ylim(-3,3.5)
plt.show()
```



Observaciones

La amplitud del movimiento de la masa a considerar cambia periódicamente, como se puede notar en la gráfica. El teorema de conservación de la energía establece que la energía que *pierde* la masa al disminuir la amplitud de su movimiento debe ser absorbida por otro elemento. En este caso, la energía total está dada por las condiciones iniciales del sistema.

En el caso en el que se levanta una masa mientras que la otra se fija en su lugar y luego se suelta de equilibrio, el resorte actúa como un mensajero de energía entre ambas masas, permitiendo que sus amplitudes puedan variar periódicamente sin violar de ninguna manera el principio de conservación de la energía.

Métodos Numéricos

El problema que se trató de resolver es el de predecir la trayectoria de un sistema físico conformado por dos péndulos de igual masa y longitud, acoplados por un resorte cuya constante de elasticidad es conocida. Usando el procedimiento de Lagrange en el sistema, se llegó al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$mL^2\ddot{\theta} = -mgL \sin \theta - kL^2 \cos \theta (\sin \theta - \sin \phi)$$

$$mL^2\ddot{\phi} = -mgL \sin \phi - kL^2 \sin \phi \cos \phi + kL^2 \sin \theta \cos \phi$$

El problema es que este sistema no es lineal, y por tanto encontrar una solución exacta es muy complicado. Sin embargo, el método de Runge-Kutta de orden 4 ofrece una opción para encontrar una solución aproximada para este sistema. Para poder aplicarlo se introducen las variables mudas $x = \dot{\theta}$ y $y = \dot{\phi}$ al sistema:

$$f(\theta, \phi) = \begin{cases} \dot{\theta} = y \\ \dot{y} = -\frac{g}{L} \sin \theta - \frac{k}{m} \cos \theta (\sin \theta - \sin \phi) \\ \dot{\phi} = x \\ \dot{x} = -\frac{g}{L} \sin \phi - \frac{k}{m} \sin \phi \cos \phi + \frac{k}{m} \sin \theta \cos \phi \end{cases}$$

Las ecuaciones del método son las siguientes:

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

En donde

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(\theta_i, \phi_i) \\ k_2 &= hf\left(\theta_i + \frac{1}{2}h, \phi_i + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left(\theta_i + \frac{1}{2}h, \phi_i + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_4 &= hf(\theta_i + h, \phi_i + k_3) \end{aligned}$$

Para comprobar el método, se puede usar de nuevo la aproximación física de ángulos pequeños para que el sistema queda reducido al siguiente:

$$f(\theta, \phi) = \begin{cases} \dot{\theta} = y \\ \dot{y} = \theta \left(\frac{-g}{L} - \frac{k}{m} \right) + \phi \frac{k}{m} \\ \dot{\phi} = x \\ \dot{x} = \phi \left(\frac{-g}{L} - \frac{k}{m} \right) + \theta \frac{k}{m} \end{cases}$$

Con esto se puede proceder al código de Python3:

```
In [2]: #Cada una de estas funciones representa una ED del sistema
def thetadot(t,x,y,theta,phi):
    return y

#Ecuacion simplificada
def ydot(t,x,y,theta,phi):
    return theta*(-(g/l) - k/m) + phi*k/m

def phidot(t,x,y,theta,phi):
    return x

#Ecuacion simplificada
def xdot(t,x,y,theta,phi):
    return phi*(-(g/l) - k/m) + theta*k/m

#Ecuacion original
def xdotR(t,x,y,theta,phi):
    return -(g/l)*math.sin(phi) - (k/m)*math.sin(phi)*math.cos(phi) + (k/m)*math.sin(theta)*math.cos(theta)

#Ecuacion original
def ydotR(t,x,y,theta,phi):
    return -(g/l)*math.sin(theta) - (k/m)*math.cos(theta)*(math.sin(theta) - math.sin(phi))
```



```

In [3]: # Se define el metodo de Runge-Kutta de orden 4 que resolverá el sistema
def RungeKutta(thetadot, ydot, phidot, xdot, tI, thetai, yi, phii, xi, tF, h):
    #Como es una aproximación numérica, el resultado se guarda en arreglos de datos tipo numérico.
    # El primer elemento de cada arreglo representa las condiciones iniciales.
    t, theta, y, phi, x = [tI], [thetai], [yi], [phii], [xi]
    i = 0
    while t[i] <= tF:
        #Se calculan los valores de K respectivos asociados a cada ecuación
        k1theta = thetadot(t[i], x[i], y[i], theta[i], phi[i])
        k1y = ydot(t[i], x[i], y[i], theta[i], phi[i])
        k1phi = phidot(t[i], x[i], y[i], theta[i], phi[i])
        k1x = xdot(t[i], x[i], y[i], theta[i], phi[i])

        k2theta = thetadot(t[i]+h/2, x[i]+(h/2)*k1x, y[i]+(h/2)*k1y, theta[i]+(h/2)*k1theta, phi[i]+(h/2)*k1phi)
        k2y = ydot(t[i]+h/2, x[i]+(h/2)*k1x, y[i]+(h/2)*k1y, theta[i]+(h/2)*k1theta, phi[i]+(h/2)*k1phi)
        k2phi = phidot(t[i]+h/2, x[i]+(h/2)*k1x, y[i]+(h/2)*k1y, theta[i]+(h/2)*k1theta, phi[i]+(h/2)*k1phi)
        k2x = xdot(t[i]+h/2, x[i]+(h/2)*k1x, y[i]+(h/2)*k1y, theta[i]+(h/2)*k1theta, phi[i]+(h/2)*k1phi)

        k3theta = thetadot(t[i]+h/2, x[i]+(h/2)*k2x, y[i]+(h/2)*k2y, theta[i]+(h/2)*k2theta, phi[i]+(h/2)*k2phi)
        k3y = ydot(t[i]+h/2, x[i]+(h/2)*k2x, y[i]+(h/2)*k2y, theta[i]+(h/2)*k2theta, phi[i]+(h/2)*k2phi)
        k3phi = phidot(t[i]+h/2, x[i]+(h/2)*k2x, y[i]+(h/2)*k2y, theta[i]+(h/2)*k2theta, phi[i]+(h/2)*k2phi)
        k3x = xdot(t[i]+h/2, x[i]+(h/2)*k2x, y[i]+(h/2)*k2y, theta[i]+(h/2)*k2theta, phi[i]+(h/2)*k2phi)

        k4theta = thetadot(t[i]+h, x[i]+(h/2)*k3x, y[i]+(h/2)*k3y, theta[i]+(h/2)*k3theta, phi[i]+(h/2)*k3phi)
        k4y = ydot(t[i]+h, x[i]+(h/2)*k3x, y[i]+(h/2)*k3y, theta[i]+(h/2)*k3theta, phi[i]+(h/2)*k3phi)
        k4phi = phidot(t[i]+h, x[i]+(h/2)*k3x, y[i]+(h/2)*k3y, theta[i]+(h/2)*k3theta, phi[i]+(h/2)*k3phi)
        k4x = xdot(t[i]+h, x[i]+(h/2)*k3x, y[i]+(h/2)*k3y, theta[i]+(h/2)*k3theta, phi[i]+(h/2)*k3phi)

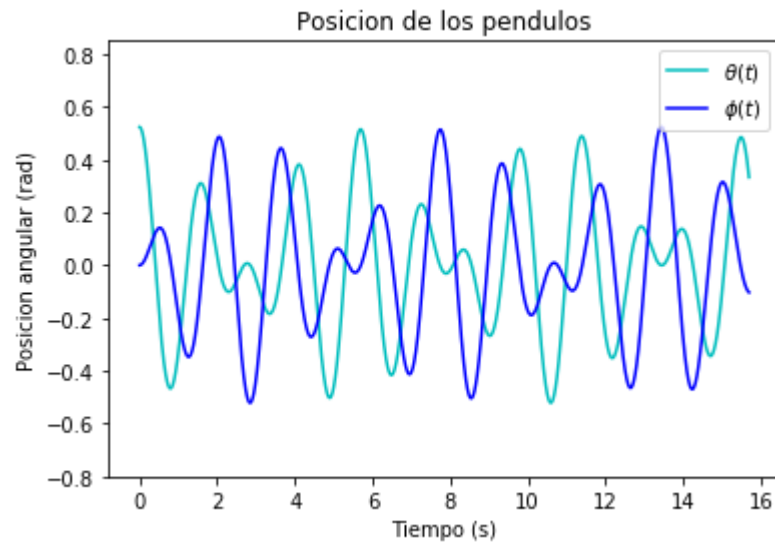
        #Los valores calculados se agregan
        x.append(x[i] + h*(k1x + 2*k2x + 2*k3x + k4x)/6)
        y.append(y[i] + h*(k1y + 2*k2y + 2*k3y + k4y)/6)
        theta.append(theta[i] + h*(k1theta + 2*k2theta + 2*k3theta + k4theta)/6)
        phi.append(phi[i] + h*(k1phi + 2*k2phi + 2*k3phi + k4phi)/6)
        t.append(t[i] + h)
        i+= 1
    #Solo retornamos theta y phi porque x,y son variables mudas
    return t, theta, phi

```

```
In [4]: import math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

m = 0.2
l = 0.915
g = 9.8
k = 0.9

#Se hace una llamada al metodo y se almacenan los resultados en los arreglos t, theta, y phi
t,theta,phi = RungeKutta(thetadot, ydot, phidot,xdot,0,3.14/6,0,0,0,5*3.14,0.0001)
#Se muestran resultados
plt. plot(t, theta,'c',label='$\\theta(t)$')
plt.plot(t, phi,'b',label='$\\phi(t)$')
plt.ylabel('Posicion angular (rad)')
plt.xlabel('Tiempo (s)')
plt.title('Posicion de los pendulos')
plt.legend(loc='upper right')
plt.ylim(-.8,0.85)
plt.show()
```



El resultado del método concuerda con las soluciones físicas del sistema. Esta gráfica ayuda a sustentar la conservación de energía que fué brevemente discutida con anterioridad. Es fácil notar que la amplitud máxima de ambas masas está dada por el desplazamiento angular inicial.

Con esto ahora se procede a realizar una aproximación a la solución del sistema original, sin depender de los ángulos pequeños.

Algunas soluciones con valores iniciales de interés

Ahora que se cuenta con una herramienta para visualizar las soluciones del sistema dependiendo de sus condiciones iniciales, el método de Runge-Kutta puede ser útil para encontrar las limitantes del modelo, hasta qué casos es aplicable antes de perder el sentido físico. Para ello se ejecutará el método Runge-Kutta con valores iniciales de $\theta = \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{6}$ y de $\phi = 0$. Ya que el sistema presenta simetría, no se presentarán casos para $\phi(0)$ distintos de 0.

```
In [24]: import math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

m = 0.2
l = 0.915
g = 9.8
k = 0.9
```

```

In [25]: t,theta,phi = RungeKutta(thetadot, ydotR, phidot,xdotR,0,3.14,0,0,0,4*3.14,0.0001)

#Se muestran resultados
plt. plot(t, theta,'c',label='$\\theta(t)$')
plt.plot(t, phi,'b',label='$\\phi(t)$')
plt.ylabel('Posicion angular (rad)')
plt.xlabel('Tiempo (s)')
plt.title('Posicion de los pendulos, $\\theta(0) = \\pi $')
plt.legend(loc='upper right')
plt.show()

t,theta,phi = RungeKutta(thetadot, ydotR, phidot,xdotR,0,3.14/2,0,0,0,4*3.14,0.0001)

#Se muestran resultados
plt. plot(t, theta,'c',label='$\\theta(t)$')
plt.plot(t, phi,'b',label='$\\phi(t)$')
plt.ylabel('Posicion angular (rad)')
plt.xlabel('Tiempo (s)')
plt.title('Posicion de los pendulos, $\\theta(0) = \\pi / 2$')
plt.legend(loc='upper right')
plt.show()

t,theta,phi = RungeKutta(thetadot, ydotR, phidot,xdotR,0,3.14/3,0,0,0,4*3.14,0.0001)

#Se muestran resultados
plt. plot(t, theta,'c',label='$\\theta(t)$')
plt.plot(t, phi,'b',label='$\\phi(t)$')
plt.ylabel('Posicion angular (rad)')
plt.xlabel('Tiempo (s)')
plt.title('Posicion de los pendulos, $\\theta(0) = \\pi/3$')
plt.legend(loc='upper right')
plt.show()

t,theta,phi = RungeKutta(thetadot, ydotR, phidot,xdotR,0,3.14/4,0,0,0,4*3.14,0.0001)

#Se muestran resultados
plt. plot(t, theta,'c',label='$\\theta(t)$')
plt.plot(t, phi,'b',label='$\\phi(t)$')
plt.ylabel('Posicion angular (rad)')
plt.xlabel('Tiempo (s)')
plt.title('Posicion de los pendulos, $\\theta(0) = \\pi/4$')
plt.legend(loc='upper right')

```

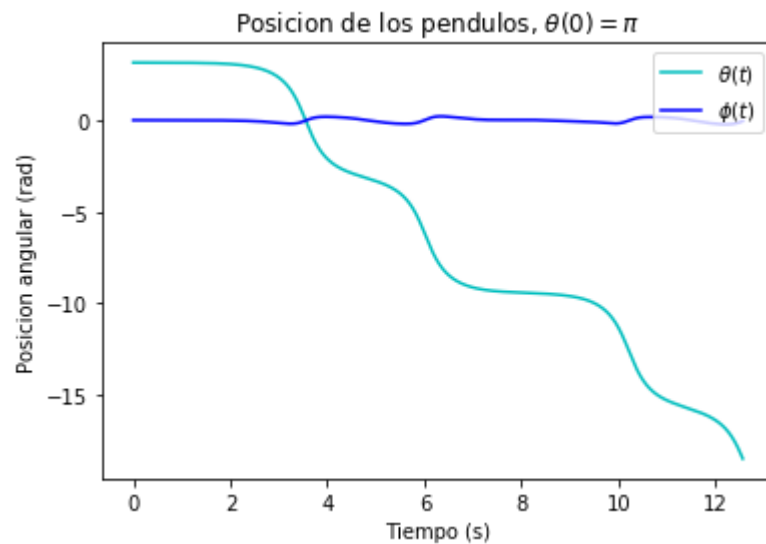
```
plt.show()

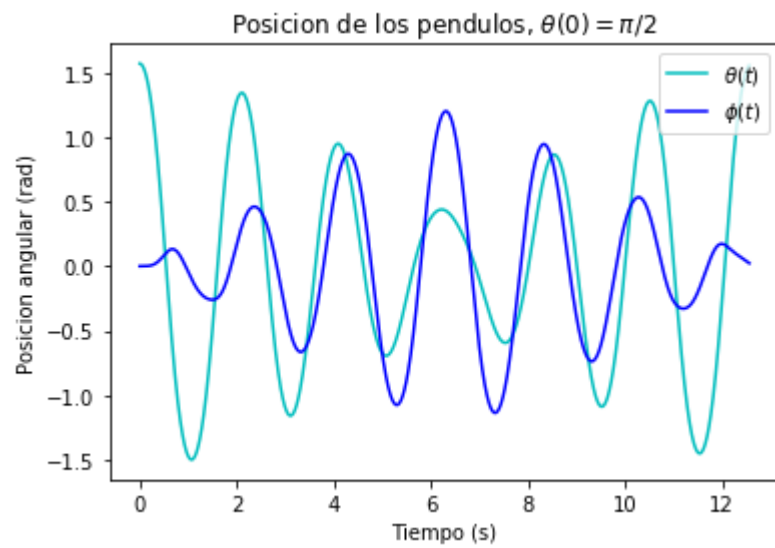
t,theta,phi = RungeKutta(thetadot, ydotR, phidot,xdotR,0,3.14/5,0,0,0,4*3.14,0.0001)

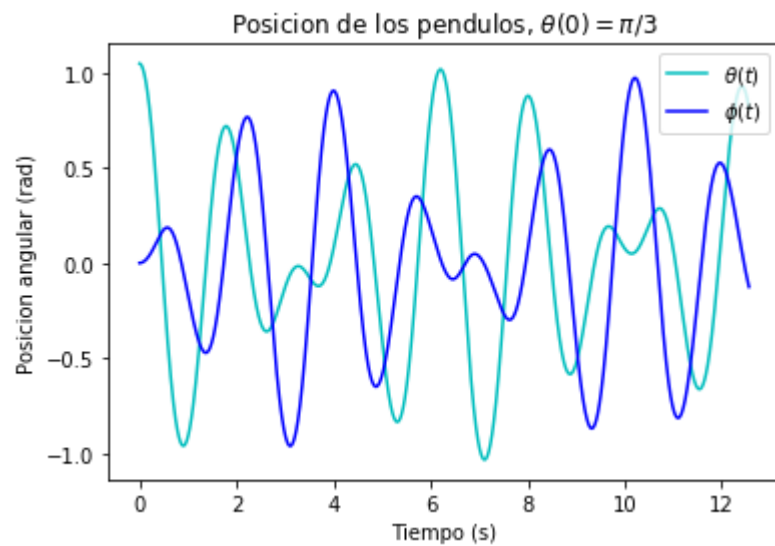
#Se muestran resultados
plt. plot(t, theta,'c',label='$\\theta(t)$')
plt.plot(t, phi,'b',label='$\\phi(t)$')
plt.ylabel('Posicion angular (rad)')
plt.xlabel('Tiempo (s)')
plt.title('Posicion de los pendulos, $\\theta(0) = \\pi/5$')
plt.legend(loc='upper right')
plt.show()

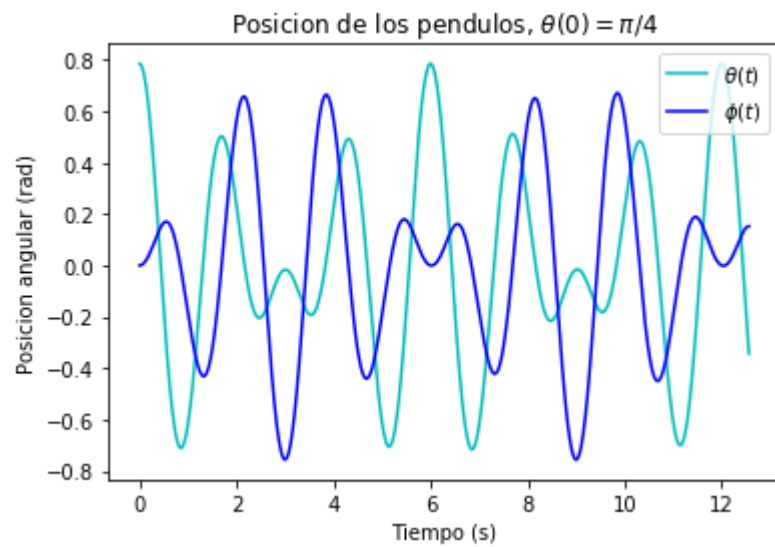
t,theta,phi = RungeKutta(thetadot, ydotR, phidot,xdotR,0,3.14/6,0,0,0,4*3.14,0.0001)

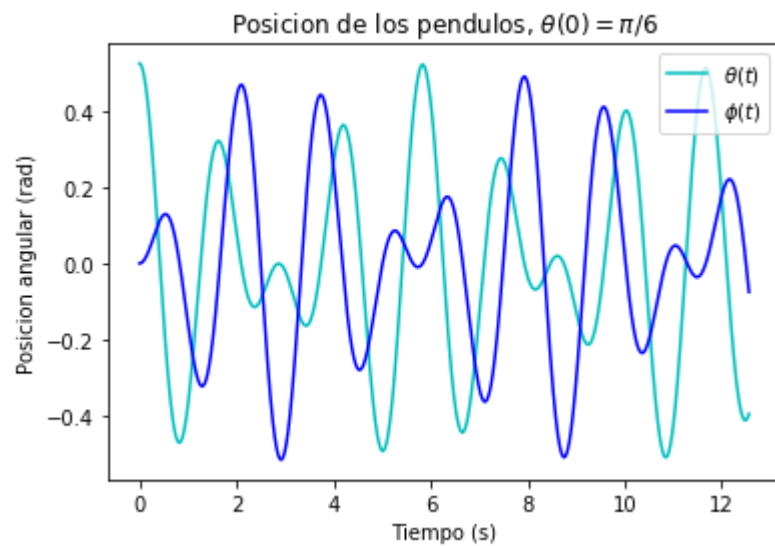
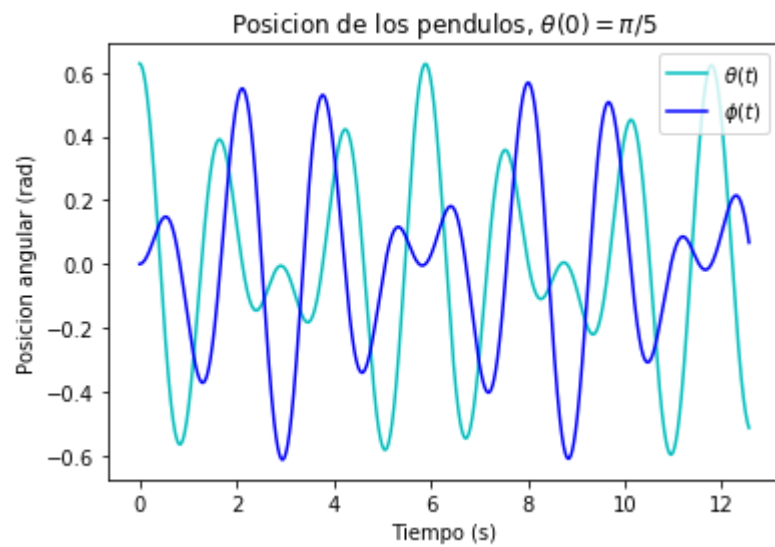
#Se muestran resultados
plt. plot(t, theta,'c',label='$\\theta(t)$')
plt.plot(t, phi,'b',label='$\\phi(t)$')
plt.ylabel('Posicion angular (rad)')
plt.xlabel('Tiempo (s)')
plt.title('Posicion de los pendulos, $\\theta(0) = \\pi/6$')
plt.legend(loc='upper right')
plt.show()
```











Como se puede notar, el modelo devuelve soluciones aceptables para valores de $\theta(0) \leq \frac{\pi}{3}$. Si el valor de la condición inicial es mayor a $\frac{\pi}{3}$, el modelo devuelve soluciones que no tienen sentido físico, como se puede notar en las primeras gráficas.

También se puede usar el método para verificar la existencia de los modos normales como solución del sistema de ecuaciones:

In [17]: `t,theta,phi = RungeKutta(thetadot, ydotR, phidot,xdotR,0,3.14/4,0,-3.14/4,0,2*3.14,0.0001)`

#Se muestran resultados

```
plt. plot(t, theta,'c--',label='$\\theta(t)$')
plt.plot(t, phi,'b--',label='$\\phi(t)$')
plt.ylabel('Posicion angular (rad)')
plt.xlabel('Tiempo (s)')
plt.title('Posicion de los pendulos, $\\theta(0) = \\pi/4$, $\\phi(0) = -\\pi/4$')
plt.legend(loc='upper right')
plt.show()
```

`t,theta,phi = RungeKutta(thetadot, ydotR, phidot,xdotR,0,-3.14/4,0,3.14/4,0,2*3.14,0.0001)`

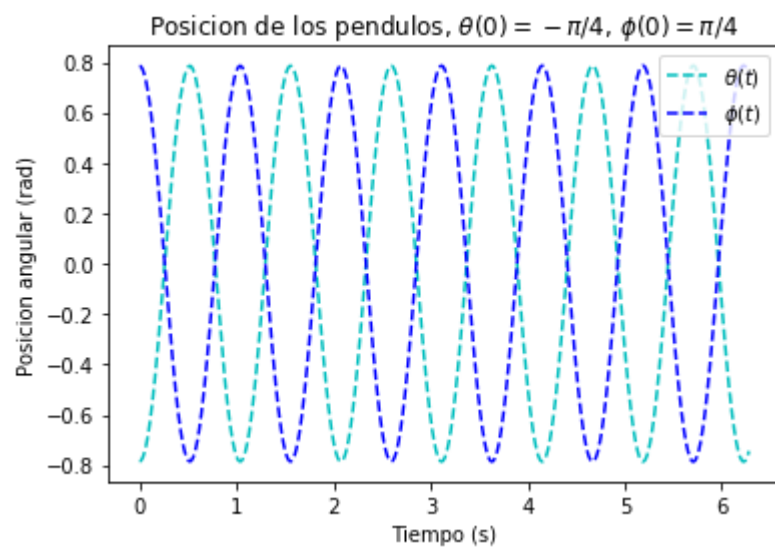
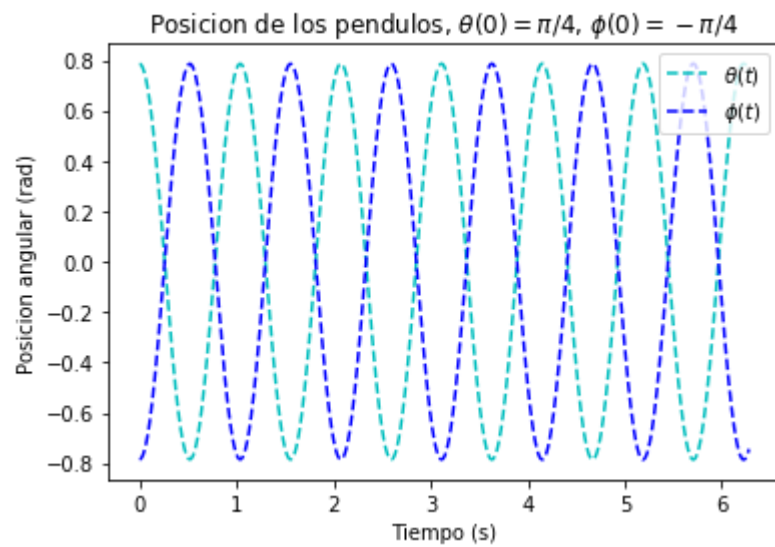
#Se muestran resultados

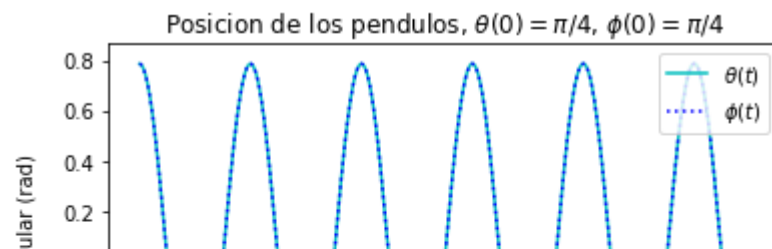
```
plt. plot(t, theta,'c--',label='$\\theta(t)$')
plt.plot(t, phi,'b--',label='$\\phi(t)$')
plt.ylabel('Posicion angular (rad)')
plt.xlabel('Tiempo (s)')
plt.title('Posicion de los pendulos, $\\theta(0) = -\\pi/4$, $\\phi(0) = \\pi/4$')
plt.legend(loc='upper right')
plt.show()
```

`t,theta,phi = RungeKutta(thetadot, ydotR, phidot,xdotR,0,3.14/4,0,3.14/4,0,2*3.14,0.0001)`

#Se muestran resultados

```
plt. plot(t, theta,'c',label='$\\theta(t)$')
plt.plot(t, phi,'b:',label='$\\phi(t)$')
plt.ylabel('Posicion angular (rad)')
plt.xlabel('Tiempo (s)')
plt.title('Posicion de los pendulos, $\\theta(0) = \\pi/4$, $\\phi(0) = \\pi/4$')
plt.legend(loc='upper right')
plt.show()
```

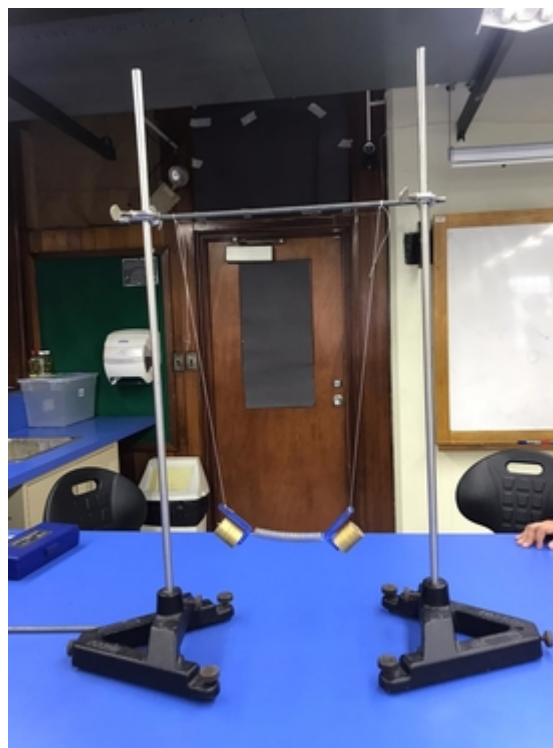




Estos resultados coinciden gráficamente con los modos normales de oscilación, lo cual sustenta el argumento físico.

Comprobación del Modelo

Con la finalidad de poner a prueba la efectividad del modelo usado para predecir el comportamiento real del sistema, se hizo un montaje experimental en el laboratorio C-111 de la Universidad:



En [este link \(https://youtu.be/6GspSPK9nUQ\)](https://youtu.be/6GspSPK9nUQ) se puede apreciar la evolución temporal cuando se somete a condiciones iniciales similares a las descritas previamente (solo una masa se suelta del reposo de una posición inicial θ distinta de 0).

Usando el software *open source* [Tracker](https://physlets.org/tracker) (<https://physlets.org/tracker>)

Conclusiones

- La energía de los péndulos se transfiere entre ellos a través del resorte que los conecta, por lo que la ley de la conservación de la energía se cumple.
- Si la posición angular inicial de ambos péndulos es idéntica u opuesta, al ser soltados se comportarán como péndulos simples autónomos, definiendo los modos normales de oscilación del sistema.
- La frecuencia del sistema depende de la masa del pendulo, la constante del resorte, el largo de la cuerda y la gravedad.