Decisión en ambiente de Riesgo

Árboles de Decisión

Pedro L. Luque

Dept. Estadística e Inv.Operativa

Actualizado: 2020-12-09

Decisión en Ambiente de Riesgo

- **Decisor**
- **Alternativas**: $a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_k$
- **Estados** de la Naturaleza $w_1, \ldots, w_j, \ldots, w_n$
  - Con **probabilidades de ocurrencia**:

$$P(w_1) = p_1, \ldots, P(w_j) = p_j, \ldots, P(w_n) = p_n$$

- **Criterio de evaluación o valoración**

Tabla de decisión en Ambiente de Riesgo

$Benef./Costos$	$Prob.$	p_1	$\dots$	p_j	$\dots$	p_n	
$Alt./$	$Estados.$	w_1	$\dots$	w_j	$\dots$	w_n	
a_1		v_{11}	$\dots$	v_{1j}	$\dots$	v_{1n}	$\to E(a_1) = \sum_{j=1}^{n} v_{1j} \cdot p_j$
$\vdots$		$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
a_i		v_{i1}	$\dots$	v_{ij}	$\dots$	v_{in}	$\to E(a_i) = \sum_{j=1}^{n} v_{ij} \cdot p_j$
$\vdots$		$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
a_k		v_{k1}	$\dots$	v_{kj}	$\dots$	v_{kn}	$\to E(a_k) = \sum_{j=1}^{n} v_{kj} \cdot p_j$

- **Resultado esperado mejor alternativa (REMA o RER)**

$$\boxed{REMA = RER = E(a_i^*)} \to Mejor\ \{E(a_i) \mid i = 1, \dots, k\} \to \boxed{a_i^*}$$

- **Resultado esperado con información perfecta (REIP)**

$$\boxed{REIP = \sum_{j=1}^{n} v_j^* p_j}$$

- **Valor esperado de la información perfecta (VEIP o REII)**

$$\boxed{VEIP = REIP - REMA}$$

$Benef./Costos$	$Prob.$	p_1	$\dots$	p_j	$\dots$	p_n	
$Alt./$	$Estados.$	w_1	$\dots$	w_j	$\dots$	w_n	
a_1		v_{11}	$\dots$	v_{1j}	$\dots$	v_{1n}	$\to E(a_1) = \sum_{j=1}^{n} v_{1j} \cdot p_j$
$\vdots$		$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
a_i		v_{i1}	$\dots$	v_{ij}	$\dots$	v_{in}	$\to E(a_i) = \sum_{j=1}^{n} v_{ij} \cdot p_j \ \to REMA = E(a_i^*)$
$\vdots$		$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
a_k		v_{k1}	$\dots$	v_{kj}	$\dots$	v_{kn}	$\to E(a_k) = \sum_{j=1}^{n} v_{kj} \cdot p_j$
		v_1^*	$\dots$	v_j^*	$\dots$	v_n^*	$\to REIP = \sum_{j=1}^{n} v_j^* \cdot p_j$
							$\to VEIP = REIP - REMA = \sum_{j=1}^{n} v_j^* \cdot p_j - E(a_i^*)$

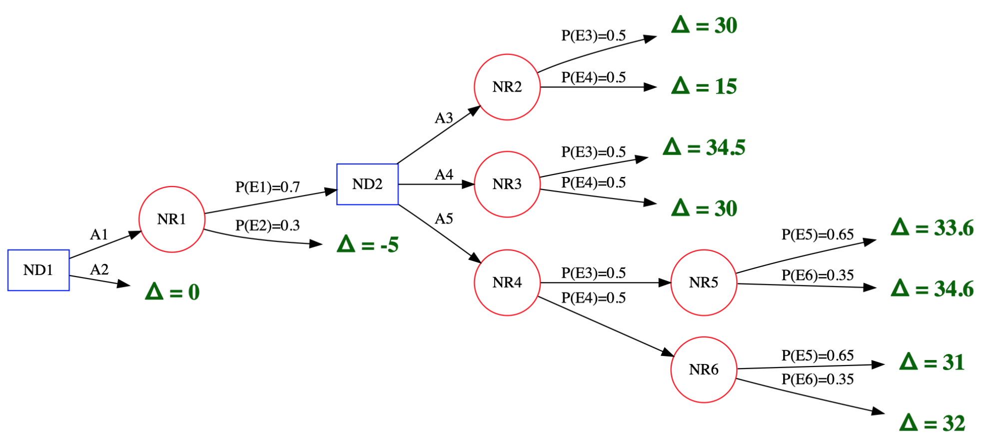
Tabla de decisión en Decisión bajo Riesgo

Benef./Costos *Alt./*	*Prob.* *Estados.*	p_1 w_1	$\dots$ $\dots$	p_j w_j	$\dots$ $\dots$	p_n w_n	
a_1		v_{11}	$\dots$	v_{1j}	$\dots$	v_{1n}	$\rightarrow E(a_1) = \sum_{j=1}^{n} v_{1j} \cdot p_j$
$\vdots$		$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
a_i		v_{i1}	$\dots$	v_{ij}	$\dots$	v_{in}	$\rightarrow E(a_i) = \sum_{j=1}^{n} v_{ij} \cdot p_j \rightarrow REMA = E(a_i^*)$
$\vdots$		$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
a_k		v_{k1}	$\dots$	v_{kj}	$\dots$	v_{kn}	$\rightarrow E(a_k) = \sum_{j=1}^{n} v_{kj} \cdot p_j$
		v_1^*	$\dots$	v_j^*	$\dots$	v_n^*	$\rightarrow REIP = \sum_{j=1}^{n} v_j^* \cdot p_j$ $\rightarrow VEIP = REIP - REMA = \sum_{j=1}^{n} v_j^* \cdot p_j - E(a_i^*)$

- La última fila recoge las mejores valoraciones por columna
  - El máximo en caso de ganancias o beneficios
  - El mínimo en caso de costos o pérdidas
- En caso de costos, habría que tener cuidado al interpretar el **VEIP** ya que sería negativo.

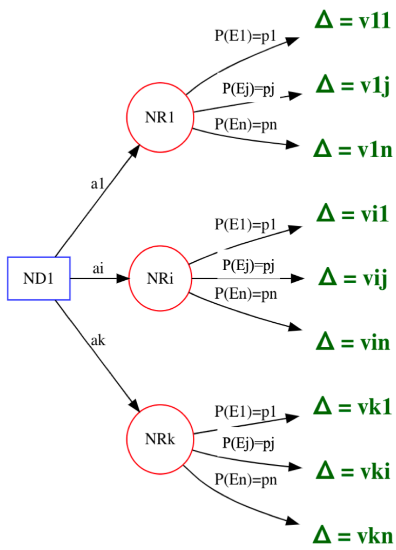
ÁRBOLES DE DECISIÓN

- **Nodo de decisión**: se representa con un **cuadrado**
- **Nodo de riesgo**: se representa con un **círculo**
- **Nodo de valoración**: se representa con un **triángulo**

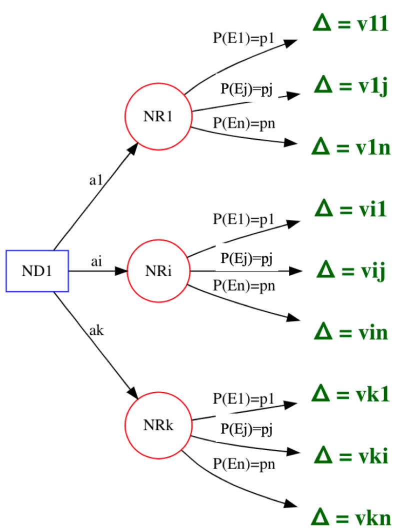


Representación decisión en ambiente de riesgo

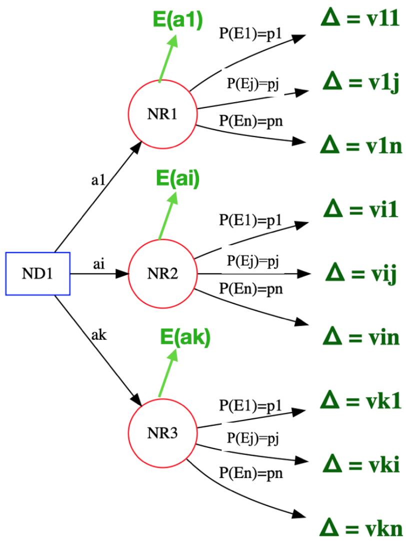
Benef./Costos Alt./	Prob. Estados.	p_1 w_1	…	p_j w_j	…	p_n w_n	
a_1		v_{11}	…	v_{1j}	…	v_{1n}	$\rightarrow E(a_1)=\sum_{j=1}^{n} v_{1j}\cdot p_j$
$\vdots$		$\vdots$	…	$\vdots$	…	$\vdots$	$\vdots$
a_i		v_{i1}	…	v_{ij}	…	v_{in}	$\rightarrow E(a_i)=\sum_{j=1}^{n} v_{ij}\cdot p_j$
$\vdots$		$\vdots$	…	$\vdots$	…	$\vdots$	$\vdots$
a_k		v_{k1}	…	v_{kj}	…	v_{kn}	$\rightarrow E(a_k)=\sum_{j=1}^{n} v_{kj}\cdot p_j$



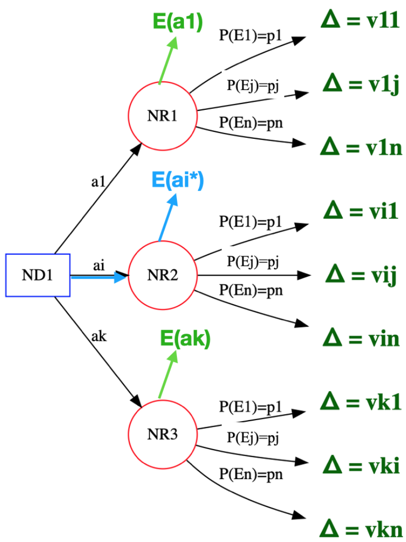
Resolución Árboles de Decisión básica (1/3)



Resolución Árboles de Decisión básica (2/3)



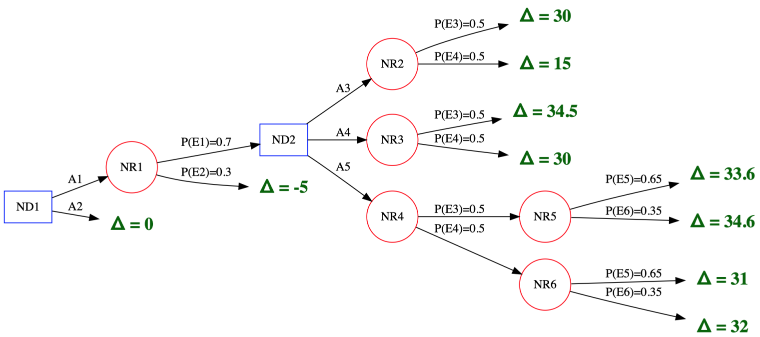
Resolución Árboles de Decisión básica (3/3)



Resolución de árboles de decisión

Resolución de derecha a izquierda

- Diferentes etapas en las que decidir
- Diferentes fuentes de estados de la naturaleza (¿en distintos niveles?)



- las alternativas son: $A1$, $A2$, $A3$, $A4$ y $A5$,
- y los estados de la naturaleza son: $E1$ y $E2$ (conjunto estados de riesgo 1); $E3$ y $E4$ (conjunto estados de riesgo 2); y $E5$ y $E6$ (conjunto estados de riesgo 3).

Funciones de Utilidad

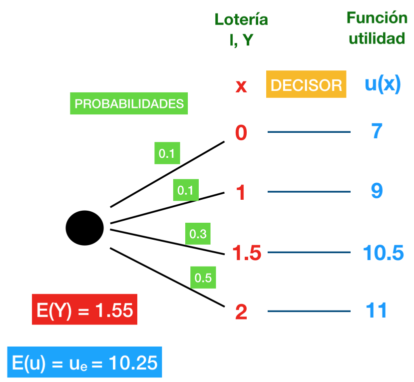
Función de utilidad

Definición: Una función $u : R \to R$ es función de utilidad si es estrictamente creciente (o creciente) tal que:

$$a_i > a_j \text{ si y sólo si } E(u(a_i)) > E(u(a_j))$$

$$a_i \sim a_j \text{ si y sólo si } E(u(a_i)) = E(u(a_j))$$

Nota importante: se supone en todo este apartado que trabajamos con "beneficios o ganancias".



Clasificación de los decisores según la función de utilidad

- Un Decisor es **PRECAVIDO** (aversión al riesgo) si su función de utilidad $u(x)$ es **cóncava**.
- Un Decisor es **NEUTRO** si su función de utilidad $u(x)$ es **lineal**.
- Un Decisor es **ARRIESGADO** si su función de utilidad $u(x)$ es **convexa**.

Equivalente cierto de una función de utilidad "u"

$$EC = t^* \text{ tal que } u(t^*) = E(u(Y))$$

Es la cantidad de dinero t^* que le reporta al decisor la misma utilidad que enfrentarse a la lotería.

FUNCIÓN AVERSIÓN LOCAL AL RIESGO

$$\boxed{r(t) = \frac{-u''(t)}{u'(t)}}$$

Observando la **función de aversión local al riesgo**, o la relación entre **la utilidad esperada** comparada con el **equivalente cierto**, un *DECISOR* puede ser

- **PRECAVIDO**: $r(t) > 0$ equivale a $E[Y] > EC$.
- **NEUTRO**: $r(t) = 0$ equivale a $E[Y] = EC$.
- **ARRIESGADO**: $r(t) < 0$ equivale a $E[Y] < EC$.

PRIMA DE RIESGO

$$\boxed{PR = \underbrace{E(Y)}_{VEM(l)} - EC}$$

Observando la **prima de riesgo**, un *DECISOR* puede ser

- **PRECAVIDO**: $PR > 0$
- **NEUTRO**: $PR = 0$
- **ARRIESGADO**: $PR < 0$

Gracias!

Transparencias creadas con el paquete R **xaringan**.

La magia llega de la mano de remark.js, **knitr**, y R Markdown.