Decisión Bayesiana con R

teoriadecision_funciones_bayesiana.R

```
## LLAMADA A FUNCIÓN
func_estudio_arbolbayesiano_completo(probs_estados,
                                     probs_X_cond_estados,
                                     tv,
                                     favorable,
                                     baselogaritmo,
                                     nb_alt,nb_est,nb_X)
```

1. Un grupo editorial va a poner a la venta una nueva revista quincenal de información general. Los beneficios dependerán del precio de venta de la revista y de la aceptación que ésta tenga en el mercado. En cuanto al precio de venta se barajan tres posibilidades: que sea de 3.5 euros (A_1), que sea de 5 euros, llevando cada número un regalo (A_2), o bien que sea de 1.5 euros los dos primeros números y 4 euros el resto (A_3). En cuanto a la cuota de mercado se consideran tres niveles: un 10 % (E_1), con una probabilidad de ocurrencia de 0.3; un 30 % (E_2), con una probabilidad de 0.4; y un 60 % (E_3), con una probabilidad de 0.3. La tabla siguiente recoge el beneficio estimado, en miles de euros, para el primer año:

E	0.3	0.4	0.3
A	E_1	E_2	E_3
A_1	-500	200	550
A_2	-600	600	1200
A_3	-300	600	1050

El grupo editorial tiene la posibilidad de contratar los servicios de un analista de mercado, que le informará sobre si la nueva revista será aceptada por el mercado o no. Si la cuota de mercado es de un 60 %, la probabilidad de que el informe indique que es aceptada es de 0.5; si la cuota es del 30 %, dicha probabilidad será de 0.4 y de 0.2 si la demanda se sitúa en un 10 %.

(a) Si el informe le cuesta a la editorial 3000 euros, ¿cuál será la regla de decisión óptima?

(b) ¿Qué valor otorga el decisor al informe del experto si éste dice que la revista no será aceptada por el mercado?

1. Un grupo editorial va a poner a la venta una nueva revista quincenal de información general. Los beneficios dependerán del precio de venta de la revista y de la aceptación que ésta tenga en el mercado. En cuanto al precio de venta se barajan tres posibilidades: que sea de 3.5 euros (A_1), que sea de 5 euros, llevando cada número un regalo (A_2), o bien que sea de 1.5 euros los dos primeros números y 4 euros el resto (A_3). En cuanto a la cuota de mercado se consideran tres niveles: un 10 % (E_1), con una probabilidad de ocurrencia de 0.3; un 30 % (E_2), con una probabilidad de 0.4; y un 60 % (E_3), con una probabilidad de 0.3. La tabla siguiente recoge el beneficio estimado, en miles de euros, para el primer año:

E	0.3	0.4	0.3
A	E_1	E_2	E_3
A_1	-500	200	550
A_2	-600	600	1200
A_3	-300	600	1050

El grupo editorial tiene la posibilidad de contratar los servicios de un analista de mercado, que le informará sobre si la nueva revista será aceptada por el mercado o no. Si la cuota de mercado es de un 60 %, la probabilidad de que el informe indique que es aceptada es de 0.5; si la cuota es del 30 %, dicha probabilidad será de 0.4 y de 0.2 si la demanda se sitúa en un 10 %.

(a) Si el informe le cuesta a la editorial 3000 euros, ¿cuál será la regla de decisión óptima?

(b) ¿Qué valor otorga el decisor al informe del experto si éste dice que la revista no será aceptada por el mercado?

- **Decisor**: el grupo empresarial

A1 es siempre peor que A3. Se elimina A1

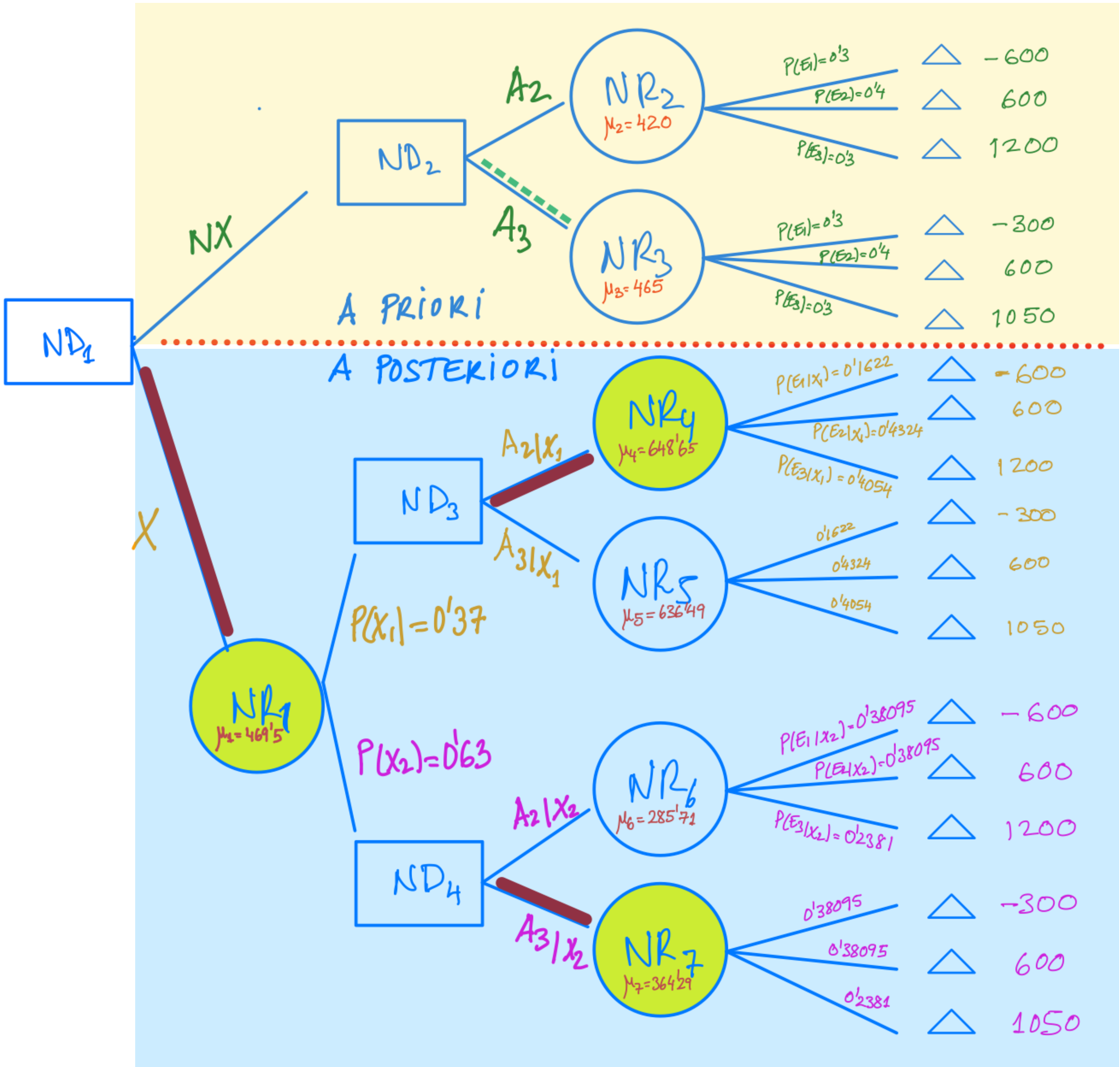
- **Alternativas**:
  - A1 = precio de 3.5 euros
  - A2 = precio de 5 euros más regalo
  - A3 = precio inicial de 1.5 euros y posterior de 4 euros
- **Estados de la naturaleza**:
  - E1: 10 %
  - E2: 30 %
  - E3: 60 %

$$P(E_1) = 0.3,\ P(E_2) = 0.4,\ P(E_3) = 0.3$$

- **de evaluación**: (miles de euros) beneficios obtenidos
- **Información adicional aleatoria** (X):
  - X1 = que el informe indique que la revista será aceptada por el mercado
  - X2 = que el informe indique que la revista no será aceptada por el mercado.

$$P(X_1|E_1) = 0.2,\ P(X_2|E_1) = 0.8$$
$$P(X_1|E_2) = 0.4,\ P(X_2|E_2) = 0.6$$
$$P(X_1|E_3) = 0.5,\ P(X_2|E_3) = 0.5$$

Representación en árbol



Estudio a priori

Estudio a posteriori

P	X_j	
E_i	$P(E_i, X_j)$	$P(E_i)$
	$P(X_j)$	

R	E_i
A_k	$R_{k,i}$

Generalmente la información conocida es:

$$P(E_i) \quad \text{y} \quad P(X_j|Ei)$$

$$P(E_1) = 0.3,\ P(E_2) = 0.4,\ P(E_3) = 0.3$$

$$P(X_1|E_1) = 0.2,\ P(X_2|E_1) = 0.8$$
$$P(X_1|E_2) = 0.4,\ P(X_2|E_2) = 0.6$$
$$P(X_1|E_3) = 0.5,\ P(X_2|E_3) = 0.5$$

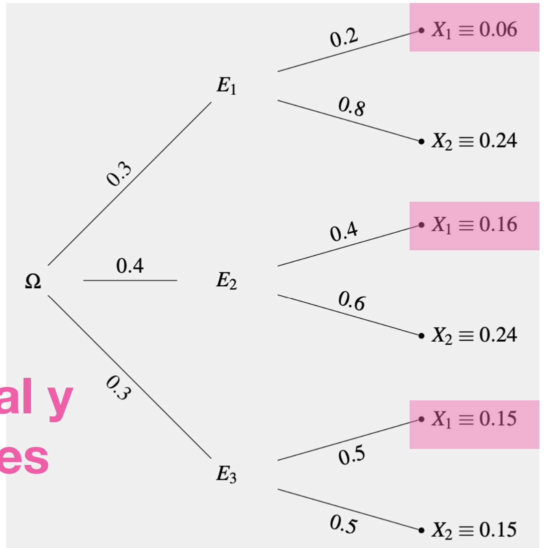
```r
## DATOS
n = 2 # num. alternativas  (A_k)
m = 3 # num. estados (E_i)
q = 2 # num. modalidades X (X_j)
probs_estados = c(0.3,0.4,0.3)
# Cada fila asociada a E_i (P(Xj|Ei))
# Las filas:
##  0.2, 0.8 representa: Xj|E1  (debe sumar 1)
##  0.4, 0.6 representa: Xj|E2  (debe sumar 1)
##  0.5, 0.5 representa: Xj|E3  (debe sumar 1)
# Las columnas:
##  0.2, 0.4, 0.5 representa: X1|Ei
##  0.8, 0.6, 0.5 representa: X2|Ei
probs_X_cond_estados = matrix(c(0.2,0.8,
                                0.4,0.6,
                                0.5,0.5),nrow=m,ncol=q,byrow=TRUE)
# Filas: Ak (alternativas)
# Columnas: Ei (estados)
# A3 es siempre mejor que A1, de ahí que se elimina A1
tv = matrix(c(-600,600,1200,
              -300,600,1050),nrow=n,ncol=m,byrow=TRUE)
favorable = TRUE
baselogaritmo = 2
## LLAMADA A FUNCIÓN
res = func_estudio_arbolbayesiano_completo(probs_estados,
                                     probs_X_cond_estados,
                                     tv,
                                     favorable,
                                     baselogaritmo,nb_alt = c("A2","A3"))
res
```

Solución obtenida COSTE-BENEFICIO

Datos

$P(E_1)=0.3,\ P(E_2)=0.4,\ P(E_3)=0.3$

$P(X_1|E_1)=0.2,\ P(X_2|E_1)=0.8$
$P(X_1|E_2)=0.4,\ P(X_2|E_2)=0.6$
$P(X_1|E_3)=0.5,\ P(X_2|E_3)=0.5$



T.P.Total y T.Bayes

```
$informe_benefcostes$probs_conjunta
     X1   X2
E1 0.06 0.24
E2 0.16 0.24
E3 0.15 0.15
```

$$P(E_i,X_j)=P(E_i)\cdot P(X_j|E_i)$$

```
$informe_benefcostes$probs_marginal_X
  X1   X2
0.37 0.63
```

$$P(X_j)=\sum_i P(E_i,X_j)$$

```
$informe_benefcostes$probs_E_cond_X
          X1        X2
E1 0.1621622 0.3809524
E2 0.4324324 0.3809524
E3 0.4054054 0.2380952
```

$$P(E_i|X_j)=\frac{P(E_i,X_j)}{P(X_j)}$$

```
$informe_benefcostes$val_esperadas_apriori
 A2  A3
420 465
```

```
$informe_benefcostes$mejor_val_alt_apriori
[1] 465
```

$$\boxed{RER=mejor_i\ E(A_i)=E(A_p^*)}$$

```
$informe_benefcostes$mejor_alts_apriori
[1] "A3"
```

```
$informe_benefcostes$mat_val_esperadas_aposteriori
         X1       X2
A2 648.6486 285.7143
A3 636.4865 364.2857
```

```
$informe_benefcostes$mejor_val_alt_aposteriori
      X1       X2
648.6486 364.2857
```

```
$informe_benefcostes$mejor_alt_aposteriori
  X1   X2
"A2" "A3"
```

```
$informe_benefcostes$valor_REII
[1] 469.5
```

$$REII=\sum_s E(A^*/X_s)\ P(X_s)$$

```
$informe_benefcostes$valor_RER
[1] 465
```

```
$informe_benefcostes$valor_VEX
[1] 4.5
```

$$= VEX = REII - RER :$$

- Si $CIX \leq VEX$, el decisor adquirirá la información perfecta X.
  Así, la regla de decisión óptima será la que se sigue del análisis pre-a-posteriori, es decir, si se produce lo que establece X_s, la alternativa óptima será A^*/X_s. Y en este caso, el resultado que el decisor espera conseguir será $E(A^*/X_s)$, y el valor otorgado a esa regla de decisión vendrá dado por VEX.
- Si $CIX > VEX$, el decisor no adquirirá la información perfecta X. En este caso, la regla de decisión óptima será la que se sigue del análisis a priori, es decir, sea cual sea la concreción de la información que se presente, la alternativa óptima será A_p^* y el resultado que el decisor espera conseguir vendrá dado por $E(A_p^*)=RER$.

Solución obtenida COSTE-BENEFICIO

$$P(E_1) = 0.3,\ P(E_2) = 0.4,\ P(E_3) = 0.3$$

$$P(X_1|E_1) = 0.2,\ P(X_2|E_1) = 0.8$$
$$P(X_1|E_2) = 0.4,\ P(X_2|E_2) = 0.6$$
$$P(X_1|E_3) = 0.5,\ P(X_2|E_3) = 0.5$$

```
$informe_benefcostes$probs_conjunta
     X1   X2
E1 0.06 0.24
E2 0.16 0.24
E3 0.15 0.15
```

$$P(E_i, X_j) = P(E_i) \cdot P(X_j|E_i)$$

```
$informe_benefcostes$probs_marginal_X
   X1   X2
0.37 0.63
```

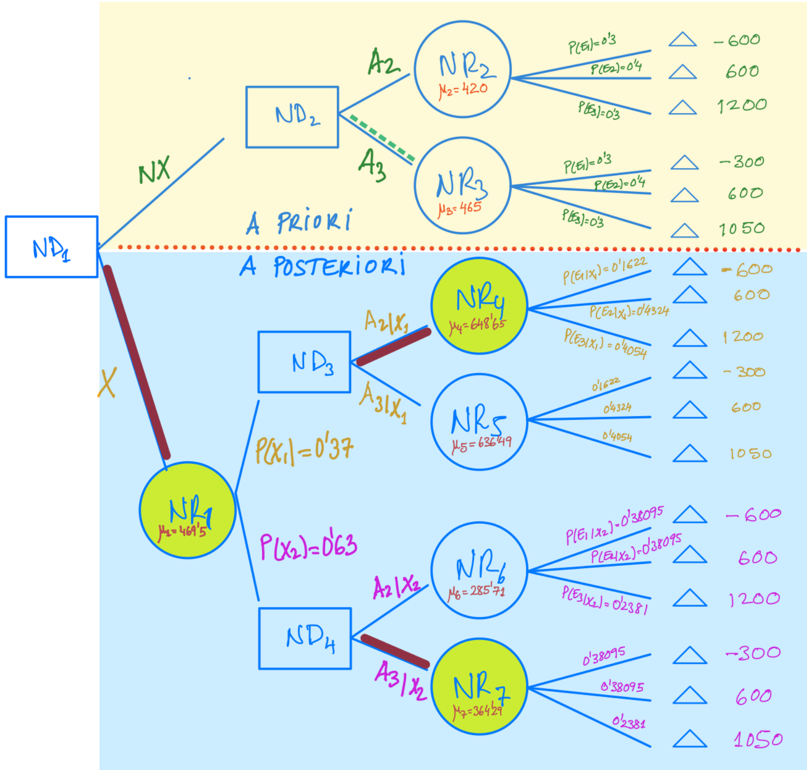
$$P(X_j) = \sum_i P(E_i, X_j)$$

```
$informe_benefcostes$probs_E_cond_X
          X1        X2
E1 0.1621622 0.3809524
E2 0.4324324 0.3809524
E3 0.4054054 0.2380952
```

$$P(E_i|X_j) = \frac{P(E_i, X_j)}{P(X_j)}$$

```
$informe_benefcostes$val_esperadas_apriori
 A2  A3
420 465
```

```
$informe_benefcostes$mejor_val_alt_apriori
[1] 465
```



E_j	$P(E_j)$	$P(X_1\|E_j)$	$P(X_2\|E_j)$	$P(E_j, X_1)$	$P(E_j, X_2)$	$P(E_j\|X_1)$	$P(E_j\|X_2)$
E_1	0.3	0.2	0.8	0.06	0.24	0.1621622	0.3809524
E_2	0.4	0.4	0.6	0.16	0.24	0.4324324	0.3809524
E_3	0.3	0.5	0.5	0.15	0.15	0.4054054	0.2380952
	1	−−	−−	$P(X_1) = 0.37$	$P(X_2) = 0.63$	1	1

Solución obtenida COSTE-BENEFICIO

```
$informe_benefcostes$mejor_alts_apriori
[1] "A3"
```

```
$informe_benefcostes$mat_val_esperadas_aposterio
         X1       X2
A2 648.6486 285.7143
A3 636.4865 364.2857
```

```
$informe_benefcostes$mejor_val_alt_aposteriori
      X1       X2
648.6486 364.2857
```

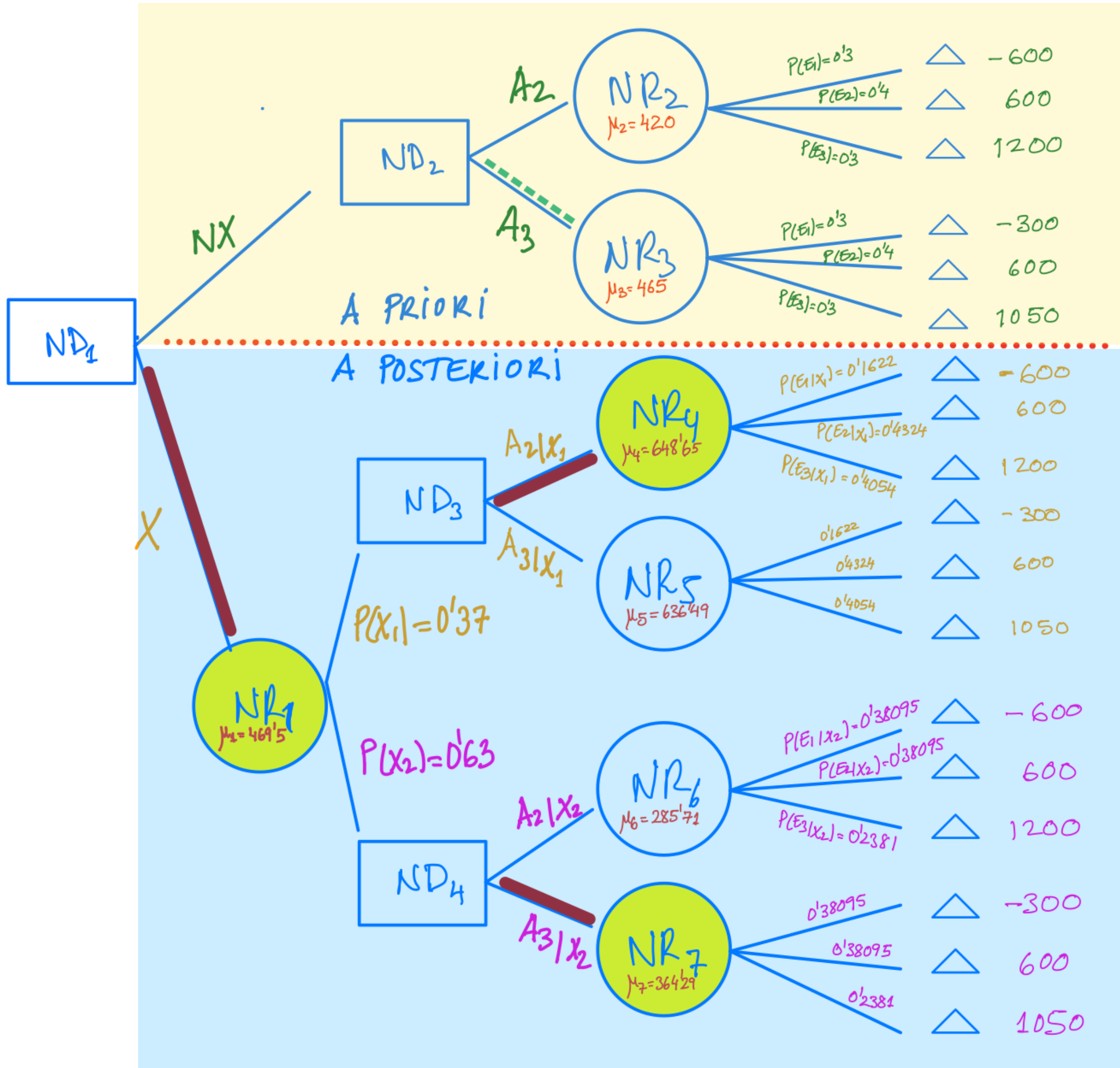
```
$informe_benefcostes$mejor_alt_aposteriori
  X1   X2
"A2" "A3"
```

```
$informe_benefcostes$valor_REII
[1] 469.5
```

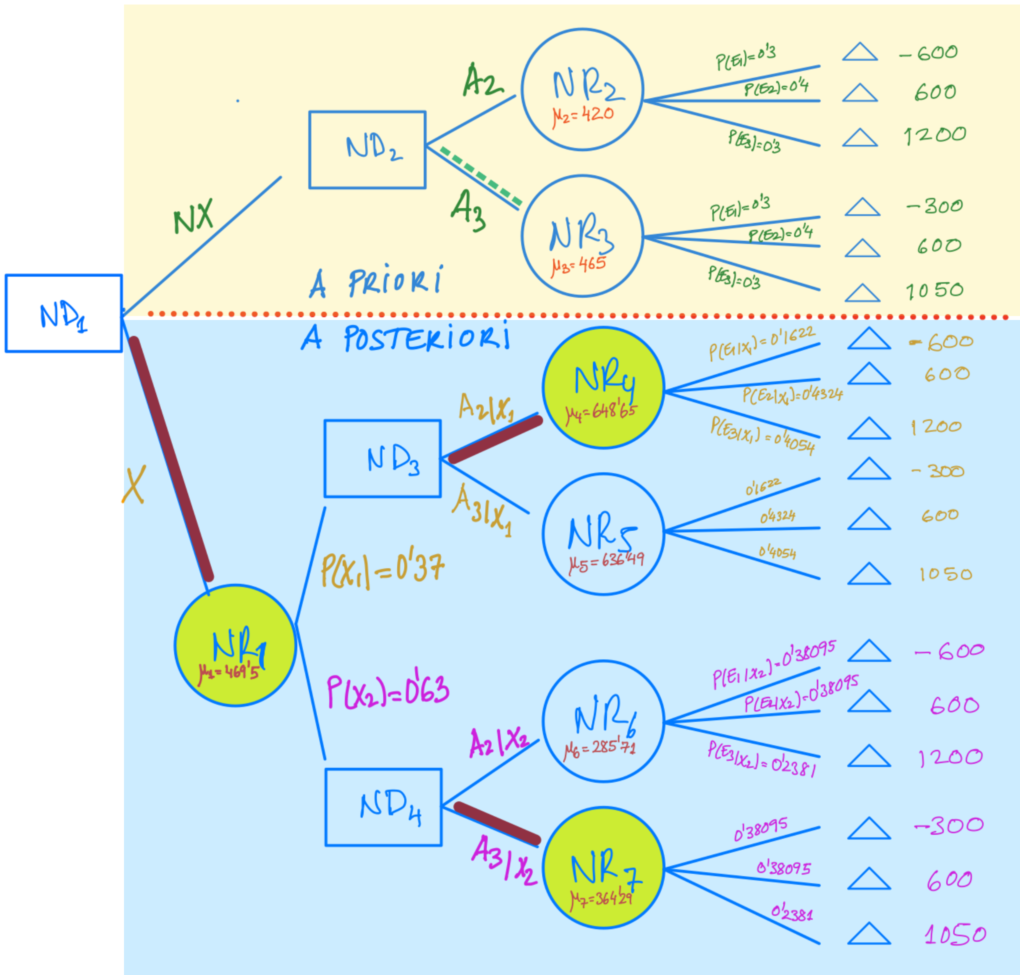
```
$informe_benefcostes$valor_RER
[1] 465
```

```
$informe_benefcostes$valor_VEX
[1] 4.5
```

$= VEX = REII - RER:$



DECISIÓN FINAL




```
##
## $informe_benefcostes$valor_VEX
## [1] 4.5
```

$= VEX = REII - RER :$

- **Alternativas**:
  - A1 = precio de 3.5 euros
  - A2 = precio de 5 euros más regalo
  - A3 = precio inicial de 1.5 euros y posterior de 4 euros
- **Información adicional aleatoria** (X):
  - X1 = que el informe indique que la revista será aceptada por el mercado
  - X2 = que el informe indique que la revista no será aceptada por el mercado.

(a) Si el informe le cuesta a la editorial 3000 euros, ¿cuál será la regla de decisión óptima?

Decisión final

Como $CIA = 3 < VEX =$ **4.5** el decisor debe comprar la información adicional aleatoria.

- Si el informe indica que el mercado aceptará la revista, la opción óptima será A_2, esto es, un precio de 5 euros más regalo.
- Si el informe dice que el mercado no aceptará la nueva publicación, el precio óptimo será de 1.5 euros los dos primeros números y el resto 4 euros (A_3).

Solución obtenida COSTE-BENEFICIO: valor económico cada concreción

Las mejores alternativas han sido:

- A priori:

```
res$informe_benefcostes$mejor_alts_apriori
```

```
## [1] "A3"
```

- A posteriori según la concreción:

```
res$informe_benefcostes$mejor_alt_aposteriori
```

```
##   X1   X2
## "A2" "A3"
```

Utilizando:

```
res$informe_benefcostes$mat_val_esperadas_aposteriori
```

```
##          X1       X2
## A2 648.6486 285.7143
## A3 636.4865 364.2857
```

- El valor que el decisor le otorga a cada una de las concreciones se encuentra en la columna "VEXi":

```
res$informe_benefcostes$valor_VEX_Xi
```

```
##       REMAXi REaltpriori     VEXi
## X1  648.6486    636.4865 12.16216
## X2  364.2857    364.2857  0.00000
```

Para el decisor la concreción X2 no tiene valor económico, ya que en este caso no cambia la decisión óptima que tomó a priori: A3.

Solución obtenida EFICIENCIA DE LA INFORMACIÓN (ENTROPÍA)

La función de entropía representa la cantidad media de información que aporta la realización de un fenómeno cuando se presenta, dicho de otra forma, mide el grado de desorden del sistema (grado de información).

$$H(X) = \sum_{i=1}^{n} I_{X_i} P(X_i) = \sum_i -\log P(X_i)\, P(X_i) = -\sum_i P(X_i)\, \log P(X_i)$$

```
## $informe_entropia
## $informe_entropia$marginal_X
##   X1   X2
## 0.37 0.63
##
## $informe_entropia$entropia_apriori
## [1] 1.570951
##
## $informe_entropia$entropias_aposteriori
##        X1        X2
## 1.476666 1.553763
##
## $informe_entropia$entropia_aposteriori
## [1] 1.525237
##
## $informe_entropia$informacion_canal
## [1] 0.04571343
##
## $informe_entropia$coeficiente_redundancia
## [1] 0.02909921
##
## $informe_entropia$coeficiente_redundancia_porc
## [1] 2.909921
```

$$p_{\cdot j} = P(X = X_j) = \sum_i p_{ij}$$

$$H(E)$$

$$H(E|X)$$

3. La cota máxima para la entropía de un fenómeno aleatorio X con n concreciones es $\log n$. Ese valor se alcanza para el fenómeno aleatorio de n concreciones con máximo desorden, es decir, el equiprobable.
   Sea $X: X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_n$, entonces $H(X) \leq \log n$.

$$\boxed{H(E) = -\sum_i p_{i\cdot} \log p_{i\cdot}, \qquad H(X) = -\sum_j p_{\cdot j} \log p_{\cdot j}}$$

Definición 6.3 Definimos la entropia del E a posteriori a X como:

$$\boxed{H(E|X) = E(H(E|X = X_j)) = \sum_j H(E|X = X_j) p_{\cdot j} = -\sum_i \sum_j (p_{i|j} \log p_{i|j})\ p_{\cdot j}}$$

$$I_c(E,X) = H(E) - H(E|X)$$

$$\boxed{R_c(E,X) = \frac{I_c(E,X)}{H(E)} = \frac{H(E) - H(E|X)}{H(E)} = 1 - \frac{H(E|X)}{H(E)}}$$

- Si $R_c = 0$, la información aportada por X no es eficiente y el desorden de E permanece igual.
- Si $R_c = 1$, la información aportada por X es completamente eficiente y el desorden de E se reduce a cero.

Solución obtenida EFICIENCIA DE LA INFORMACIÓN (ENTROPÍA)

```
## $informe_entropia
## $informe_entropia$marginal_X
##   X1   X2
## 0.37 0.63
##
## $informe_entropia$entropia_apriori
## [1] 1.570951
##
## $informe_entropia$entropias_aposteriori
##        X1       X2
## 1.476666 1.553763
##
## $informe_entropia$entropia_aposteriori
## [1] 1.525237
##
## $informe_entropia$informacion_canal
## [1] 0.04571343
##
## $informe_entropia$coeficiente_redundancia
## [1] 0.02909921
##
## $informe_entropia$coeficiente_redundancia_porc
## [1] 2.909921
```

$$p_{\cdot j} = P(X = X_j) = \sum_i p_{ij}$$

$$H(E)$$

Definición 6.3 Definimos la entropia del E a posteriori a X como:

$$\boxed{H(E|X) = E(H(E|X = X_j)) = \sum_j H(E|X = X_j) p_{\cdot j} = -\sum_i \sum_j (p_{i|j} \log p_{i|j})\ p_{\cdot j}}$$

$$H(E|X)$$

E_j	$P(E_j\|X_1)$	$log_2 P(E_j\|X_1)$	$P(E_j\|X_1) \times log_2 P(E_j\|X_1)$
E_1	0.1621622	−2.624491	−0.4255932
E_2	0.4324324	−1.209453	−0.5230067
E_3	0.4054054	−1.302563	−0.5280661

$$\rightarrow H(E|X_1) = -\sum_j P(E_j|X_1) log_2 P(E_j|X_1) = 1.476666$$