# Montecarlo por cadenas de Markov

## Algoritmo de Metropolis-Hastings

objetivo

El objetivo del *algoritmo de Metropolis-Hastings* es construir una cadena de Markov que tenga como distribución invariante una distribución con una función de densidad $f$ específica. Para ello, una vez elegida una distribución condicional con función de densidad $q(y \mid x)$, establece la distribución de transición de la cadena de Markov como sigue:

Dado el estado actual $x_t$

1. Proponer un nuevo estado $y$ según la *densidad instrumental* $q(\cdot \mid x_t)$.
2. Calcular la *razón de Hastings*

¿de donde sale? queremos la propriedad de balance detallado con f

$$r(y \mid x_t) = \frac{f(y)q(x_t \mid y)}{f(x_t)q(y \mid x_t)}$$

3. Aceptar el nuevo estado $y$ con probabilidad $a(y \mid x_t) = \text{mín}(1, r(y \mid x_t))$.

   ↳ para obtener una probabilidad

   Es decir,

$$x_{t+1} = \begin{cases} y & \text{con probabilidad } a(y \mid x_t), \\ x_t & \text{con probabilidad } 1 - a(y \mid x_t). \end{cases}$$

↳ si no lo acepto $x_{t+1} = x_t$, no esperamos de generar un nuevo hasta que se acepta

Observaciones:

- Basta conocer una versión no normalizada de $f$. En efecto, si $f = cf_{\text{u}}$, entonces

podemos conocer f salvo una const. multiplicativo

$$r(y \mid x_t) = \frac{f(y)q(x_t \mid y)}{f(x_t)q(y \mid x_t)} = \frac{\cancel{c}f_{\text{u}}(y)q(x_t \mid y)}{\cancel{c}f_{\text{u}}(x_t)q(y \mid x_t)} = \frac{f_{\text{u}}(y)q(x_t \mid y)}{f_{\text{u}}(x_t)q(y \mid x_t)}$$

↳ se anulan

- El estado inicial $x_0$ debe ser tal que $f(x_0) > 0$. En caso contrario, $r(y \mid x_0)$ no estaría bien definido.

- Asumiendo $f(x_0) > 0$, se tiene que $f(x_t) > 0$ y $r(y \mid x_t)$ está bien definido para todo $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. En efecto, dado $f(x_t) > 0$, sea $y$ el estado propuesto para $x_{t+1}$. Entonces debe ser $q(y \mid x_t) > 0$ y el denominador de la razón de Hastings es mayor que $0$. Por otra parte, si $f(y) = 0$ la razón de Hastings es $0$, por lo que se rechaza con probabilidad $1$ el estado propuesto y $x_{t+1} = x_t$. En consecuencia, $f(x_{t+1}) > 0$ en cualquier caso.



- INVARIANCIA: consecuencia de (2) ⇝ BALANCE DETALLADO
- IRREDUCIBILIDAD: depende de la elección de q

## Muestreador de Gibbs

El *muestreador de Gibbs* es otro algoritmo para construir una cadena de Markov que tenga como distribución invariante una distribución con una función de densidad multidimensional $f(x_1, \dots, x_d)$ específica. Aunque su origen es independiente, posteriormente se demostró que es un caso particular del algoritmo de Metropolis-Hastings.

Asumiendo que es sencillo generar valores aleatorios de las *densidades condicionales completas* $f_i(x_i | x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d)$, el algoritmo establece la distribución de transición de la cadena de Markov como sigue:

Dado el estado actual $\boldsymbol{x}_t = (x_{1t}, \dots, x_{dt})$

1. Generar $x_{1t+1} \sim f_1(\cdot \mid x_{2t}, \dots, x_{dt})$.
2. Generar $x_{2t+1} \sim f_2(\cdot \mid x_{1t+1}, x_{3t}, \dots, x_{dt})$.

   $\vdots$

*d*. Generar $x_{dt+1} \sim f_d(\cdot \mid x_{1t+1}, \dots, x_{d-1t+1})$.

Entonces $\boldsymbol{x}_{t+1} = (x_{1t+1}, \dots, x_{dt+1})$.

---

MC por cadenas de Markov

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} g(X_t)$$

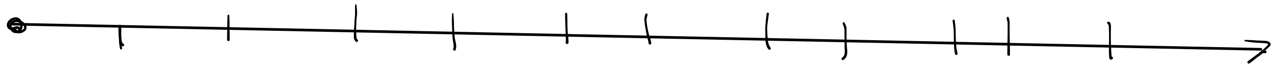
$X_1, \dots, X_t$ realización de la cadena

$$Var(\hat{\mu}) = \frac{1}{n^2} \sum_{t_1, t_2 = 1}^{n} Cov(g(X_{t_1}), g(X_{t_2}))$$

$$= \frac{Var(g(X))}{n} + \boxed{\sum_{t_1 \neq t_2} Cov(g(X_{t_1}), g(X_{t_2}))}$$

additional term

# Partición en lotes (BATCHES)



$n$: estados total

$b$: numero lotes

$m = \frac{n}{b}$ tamaño de los lotes

$\forall i = 1, \dots, b$

Por lote el $i$-esimo lote:

$$X_{(i-1)m+1} \dots X_{i \cdot m} : \hat{\mu}_i = \frac{1}{m} \sum_{t=(i-1)m+1}^{i \cdot m} g(X_t)$$

↳ obtenemos $b$ valores de $\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_b$

⇒ mas o menos independentes cuanto mayor sea el tamaño $m$ de los lotes

Al final:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{b} \sum_{t=(i-1)m+1}^{i \cdot m} g(X_t)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} g(X_t)$$

($\sim$ algoritmo MC con $b$ valores en este caso)

Queremos:

- Alto numero de lotes $b$
- Alto ~~numero~~ tamaño de lotes $m$

Pero estos dos son en contradición si $n$ es fijado

# Muestreador de Gibbs

El *muestreador de Gibbs* es otro algoritmo para construir una cadena de Markov que tenga como distribución invariante una distribución con una función de densidad multidimensional $f(x_1, \ldots, x_d)$ específica. Aunque su origen es independiente, posteriormente se demostró que es un caso particular del algoritmo de Metropolis-Hastings.

Asumiendo que es sencillo generar valores aleatorios de las *densidades condicionales completas* $f_i(x_i | x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d)$, el algoritmo establece la distribución de transición de la cadena de Markov como sigue:

Dado el estado actual $\boldsymbol{x}_t = (x_{1t}, \ldots, x_{dt})$

componentes del vector

1. Generar $x_{1t+1} \sim f_1(\cdot \mid x_{2t}, \ldots, x_{dt})$.
2. Generar $x_{2t+1} \sim f_2(\cdot \mid \underline{x_{1t+1}}, x_{3t}, \ldots, x_{dt})$.

$\vdots$

actualizado

$d$. Generar $x_{dt+1} \sim f_d(\cdot \mid x_{1t+1}, \ldots, \underline{x_{d-1t+1}})$.

Entonces $\boldsymbol{x}_{t+1} = (x_{1t+1}, \ldots, x_{dt+1})$.

objetivo: generar valores aleatorios según una densidad multidimensional $f(x_1, \ldots, x_d)$ con $d > 1$

requisitos: saber generar valores aleatorios de las distribuciones condicionales completas, es decir, según las densidades $f_i(x_i \mid x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d)$

la dificultad es determinar estas distribuciones