Leggi di De Morgan: Sia $A_\alpha \subset \Omega$ famiglia di sottoinsiemi di Ω
$(\cup_\alpha A_\alpha)^C = \cap_\alpha A_\alpha^C, (\cap_\alpha A_\alpha)^C = \cup_\alpha A_\alpha^C$

Funzione misurabile: Dati $(\Omega, \mathcal{A})$ e $(F, \mathcal{F})$, una funzione $X : \Omega \to F$ è detta misurabile/variabile aleatoria se: $(X \in B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{F}$

Relazioni controimmagini-unioni, intersezioni o complementazioni
$X^{-1}\left(B^C\right) = \left(X^{-1}(B)\right)^C$
$X^{-1}(\cup_\alpha B_\alpha) = \cup_\alpha X^{-1}(B_\alpha)$
$X^{-1}(\cap_\alpha B_\alpha) = \cap_\alpha X^{-1}(B_\alpha)$

Probabilità di un intervallo:
$P((x,y]) = F(y) - F(x)$
$P([x,y]) = F(y) - F\left(x^-\right)$
$P((x,y)) = F\left(y^-\right) - F(x)$
$P([x,y)) = F\left(y^-\right) - F\left(x^-\right)$
$P(\{x\}) = F(x) - F\left(x^-\right)$

Quantile di ordine α:
$$\begin{cases} P(X \leqslant q_\alpha) \geqslant \alpha \\ P(X \geqslant q_\alpha) \leqslant 1-\alpha \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} P(X \leqslant q_\alpha) \geqslant \alpha \\ P(X < q_\alpha) \leqslant \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_X(q_\alpha) \geqslant \alpha \\ F_X(q_{\overline{\alpha}}) \leqslant \alpha \end{cases}$$

Spazi L Si ricorda che L^1 e L^2 sono spazi vettoriali.
$X : \Omega \to R$ VAR $\in L^1 \Leftrightarrow \mathbb{E}[X] \in \mathbb{R}$
$x \in L^1 \Leftrightarrow |x| \in L^1$
$X, Y \in L^p$ e $X = Y$ q.c. $\Leftrightarrow [X] = [Y] \in L^p$

Cauchy-Schwarz:
$X, Y \in L^2 \Rightarrow \mathbb{E}[XY]| \leqslant \sqrt{\mathbb{E}\left[X^2\right]\mathbb{E}\left[Y^2\right]}$
$X \in L^2 \Rightarrow \mathbb{E}[X]^2 \leqslant \mathbb{E}\left[X^2\right]$

Disuguaglianza di Markov:
X VAR $\Rightarrow P(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}[|X|]}{a} \quad \forall a > 0$

Disuguaglianza di Chebychev:
$X \in L^2$ VAR $\Rightarrow P(|x - \mu| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(x)}{a^2}$

Tasso di fallimento: $(t > 0)$
$h_X(t) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\mathbb{P}(t < X < t+\varepsilon | X > t)}{\varepsilon}$
$h_X(t) = \frac{f_x(t)}{1 - F_x(t)}$

Valore atteso e momenti

Valore atteso: $\mathbb{E}[h(X)] = \int_\Omega h(X(\omega)) I(d\omega) = \int_\Omega h(X(\omega)) P(d\omega) = \int_\mathbb{R} h(x) P^X(\mathrm{d}x) = \int_\mathbb{R} h(x) f_X(x) \mathrm{d}x$
Nel caso discreto: $\mathbb{E}[h(x)] = \sum_k h(x_k) p_k$

Varianza e covarianza:
$\mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$
$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sigma_{XY} = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$
$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$
$\mathrm{Var}(aX+b) = a^2 \mathrm{Var} X$
$\mathrm{Cov}(a, X) = 0$
$\mathrm{Cov}(aX + bY, Z) = a\mathrm{Cov}(X,Z) + b\mathrm{Cov}(Y,Z)$
$\mathrm{Cov}(X,Y) = \rho\sigma_X\sigma_Y$

Coefficiente di correlazione lineare:
$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}$

Trasformazioni affini: Dato $Y = AX + b$,
$\mathbb{E}[Y] = A\mathbb{E}[X] + b$,
$\mathrm{Var}[Y] = A\mathrm{Var}[X]A^T = C_Y = AC_XA^T$

Vettori aleatori

Sia X vettore aleatorio:
$\mathbb{E}[h(X)] = \int_\Omega h(X) d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}^n} h(x) dP^X$
$$= \begin{cases} \sum_{x \in S} h(x)p(x) & X \text{ è discreto} \\ \int_{\mathbb{R}^n} h(x)f(x)\mathrm{d}x & X \text{ è continuo} \end{cases}$$
Per calcolare la funzione di ripartizione di una variabile specifica:
Continuo: $f_k(x_k) = \int f(x_1, \ldots, n)\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{k-1}\mathrm{d}x_{k+1} \ldots \mathrm{d}x_n$
(integrale su tutte le componenti che non ci interessano, ovvero tutte tranne x_k)
Discreto: gli integrali diventano sommatorie.
X è un vett. al. continuo se C è invertibile.

Trasformazione vett. al. continuo Sia $(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ vett. al. continuo con densità $f_{(X,Y)}$. Il supporto di $P^{(X,Y)}$ è $S \subset \mathbb{R}^2$.
$(U,V) = h((X,Y)) = (h_1(X,Y), h_2(X,Y))$ con $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Se $h \in C^1(S), \det(J_h)(x,y) \neq 0$ e $\exists g = h^{-1}, g : h(S) \to S$ con $g(u,v) = (g_1(u,v), g_2(u,v))$ allora (U,V) è un vett. al. continuo e $f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}(g_1(u,v), g_2(u,v))|\det(J_g)(u,v)|$

Vettori aleatori gaussiani

Dato $X = (X_1, \ldots, X_n) \sim \mathcal{N}(\mu, C)$ dove $\mu \in \mathbb{R}^n, C \in \mathbb{R}^{n \times n}, C > 0$, allora può anche essere definito come $\varphi_{(X_{1\ldots n})}(u) = \exp\left\{i\left\langle u|\mu\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle u|Cu\right\rangle\right\} \Leftrightarrow \langle a|X\rangle \sim \mathcal{N} \quad \forall a \in \mathbb{R}^n$
Quindi $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(C)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left\langle x - \mu|C^{-1}(x-\mu)\right\rangle\right\}$

Proprietà: 1. $X_k \sim \mathcal{N}(\mu_k, C_{kk})$
2. $S_X = \mathrm{Im}(C) + \mu = \mathrm{Col}(C) + \mu = [\mathrm{Ker}(C)]^\perp + \mu$
3. X Continuo $\Leftrightarrow \det(C) \neq 0 \Leftrightarrow C > 0$
4. $X_i \perp\!\!\!\perp X_j \Leftrightarrow \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$
5. $X_i \sim \mathcal{N} \not\Rightarrow X \sim \mathcal{N}$, solo se sono anche $\perp\!\!\!\perp$

Trasformazioni affini:
$Y = AX + b, \quad Y \sim \mathcal{N}\left(A\mu + b, ACA^T\right)$
$X \sim \mathcal{N}\left(\mu_X, \sigma_X^2\right), \quad Y \sim \mathcal{N}\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$
$aX + bY \sim \mathcal{N}\left(a\mu_X + b\mu_Y, a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2ab\sigma_{XY}\right)$
Da verificare: $a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2ab\sigma_{XY} \geqslant 0$

Caso bidimensionale:
$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \mathrm{Cov}(X,Y) \\ \mathrm{Cov}(X,Y) & \sigma_Y^2 \end{bmatrix}\right)$$
$\varphi_{(X,Y)}(u,v) = \exp\left\{i(\mu_X u + \mu_Y v) - \frac{1}{2}\left(u^2\sigma_X^2 + 2\sigma_{XY}uv + v^2\sigma_Y^2\right)\right\}$
In questo caso la proprietà (3) può anche essere espressa come:
$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \text{ Cont.} \Leftrightarrow \det(C) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_X > 0 \\ \sigma_Y > 0 \\ |\rho_{X,Y}| < 1 \end{cases}$$
$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\}$$

Funzioni caratteristiche

Funzione complessa in corrispondenza biunivoca con la legge, la quale è da essa caratterizzata.
$\varphi_X(u) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle u|X\rangle} P^X(\mathrm{d}x) = \mathbb{E}\left[e^{i\langle u|X\rangle}\right] = \int_\Omega e^{i\langle u|X\rangle} d\mathbb{P}$

Funzione caratteristica e momenti:
$\frac{\partial^m}{\partial u_{k1} \cdots \partial u_{km}} \varphi(0) = i^m \mathbb{E}[X_{k1} \cdots X_{km}]$
$\mathbb{E}[X_k] = \frac{1}{i}\frac{\partial\varphi(0)}{\partial u_k}$
$\mathbb{E}\left[X_k^2\right] = -\frac{\partial^2\varphi(0)}{\partial u_k^2}, \ \mathbb{E}[X_kX_j] = -\frac{\partial^2\varphi(0)}{\partial u_k \partial u_j}$

Trasformazioni affini:
$Y = AX + b \Rightarrow \varphi_Y(u) = e^{i\langle u|b\rangle}\varphi_X\left(A^Tu\right)$

Prob. e leggi condizionate

Probabilità condizionata:
$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}$
$P(A) = \sum_n P(A \cap E_n) = \sum_n P(A|E_n)P(E_n)$

Formula di Bayes:
$P(E_k|A) = \frac{P(A|E_k)P(E_k)}{\sum_n P(A|E_n)P(E_n)}$

Leggi condizionate:
$Y|X = x \sim f_{Y|X}(\cdot|x)$
$f_{(X,Y)}(x,y) = f_{(Y|X)}(y,x) \cdot f_X(x)$
$\mathbb{E}[Y|X = x] = m(x) = \int_{S_Y} y f_{Y|X}(y,x)dy$
$\mathrm{Var}(Y|X = x) = q^2(x) = \int_{S_Y}(y - m(x))^2 f_{Y|X}(y,x)dy$
Nel caso di VA discrete è sufficiente sostituire P ad f e svolgere gli integrali come sommatorie.

Valore atteso condizionato: Se $Y \in L^1$ allora $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]$

Varianza condizionata:
$\mathrm{Var}(Y|X) = \mathbb{E}\left[Y^2|X\right] - \mathbb{E}[Y|X]^2$
$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(\mathbb{E}[Y|X]) + \mathbb{E}[\mathrm{Var}(Y|X)]$

Vettori Gaussiani condizionati 2-dim:
$X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X), \ Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y)$
$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{bmatrix}\right)$$
Se $\sigma_X = 0 \Rightarrow X \sim \mathcal{N}(\mu_X, 0) = \delta_{\mu_X}$
$\Rightarrow \mathbb{P}(X = \mu_X) = 1$
$\Rightarrow Y|X = \mu_X \sim Y \sim \mathcal{N}\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$
Se $\sigma_X > 0 \Rightarrow Y|X = s \sim \mathcal{N}\left(m(s), q^2\right)$
$m(s) = \mu_Y + \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(X)}(s - \mu_X)$
$= \mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(s - \mu_X)$
$q^2 = \mathrm{Var}(Y) - \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)^2}{\mathrm{Var}(X)} = \sigma_Y^2\left(1 - \rho^2\right)$

$\mathbb{E}[Y|X] = \mu_Y + \rho_{X,Y}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - \mu_X)$
con X, Y gaussiani:
caso n-dim: se $\det C > 0$ $\left[C = \begin{pmatrix} C_X & C_{XY} \\ C_{YX} & C_Y \end{pmatrix}\right]$
$Y|X = s \sim N(m(s), Q)$ con
$m(s) = \mu_Y + C_{YX}C_X^{-1}(s - \mu_X)$
$Q = C_Y - C_{YX}C_X^{-1}C_{XY}$

Distribuzioni

Delta di Dirac (δ_n)
$P(X = n) = 1 \quad \varphi(u) = e^{inu}$

Continua uniforme $(U(a,b))$
$f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{(a,b)}(x) \quad F(x) = \frac{x-a}{b-a}$
$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$
$\varphi(u) = e^{i\frac{a+b}{2}u}\sin\left(\frac{b-a}{2}u\right) / \left(\frac{b-a}{2}u\right)$
con $-\infty < a < b < +\infty$.

Bernoulli $(\mathrm{Be}(p))$ Misura l'esito di un esperimento vero-falso. Supporto: $\{0, 1\}$
$\mathrm{Be}(p) \Leftrightarrow \varphi_X(u) = pe^{iu} + 1 - p$, con $p \in [0,1]$
$\mathbb{E}[X] = p, \ \mathrm{Var}[X] = p(1-p)$

Binomiale $(\mathrm{Bi}(n,p))$ Somma di n $\mathrm{Be}(p)$. Supporto: $\{0, 1, 2, \ldots\}$
$p_X(k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
$\mathbb{E}[X] = np, \ \mathrm{Var}[X] = np(1-p)$
$\mathrm{Bi}(n,p) \Leftrightarrow \varphi(u) = \left(pe^{iu} + 1 - p\right)^n$,
con $p \in [0,1]$ e $n \in \mathbb{N}$.

Geometrica $(\mathcal{G}(p))$ Numero di fallimenti prima di un successo in un processo di Bernoulli. Priva di memoria. Supporto: $\{1, 2, 3 \ldots\}$
$p_X(k) = p(1-p)^{k-1}$
$F(k) = P(X \leqslant k) = 1 - P(X \geqslant k+1)$
$= 1 - (1-p)^k$
$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}, \ \mathrm{Var}[X] = \frac{1-p}{p^2}$
$\mathcal{G}(p) \Leftrightarrow \varphi(u) = \frac{pe^{iu}}{1 - e^{iu}(1-p)}$

Geometrica traslata: $P(W = k) = p(1-p)^k$

Ipergeometrica $(\mathcal{H}(n,h,r))$ Descrive l'estrazione senza reimmissione di palline da un'urna con n palline di cui h del tipo X e $n - h$ del tipo Y. La probabilità di ottenere k palline del tipo X estraendone r dall'urna è
$p_X(k) = \frac{\binom{h}{k}\binom{n-h}{r-k}}{\binom{n}{r}}$
per $\max\{0, h + r - n\} \leqslant k \leqslant \min\{r, h\}$
$\mathbb{E}[X] = \frac{rh}{n}, \ \mathrm{Var}[X] = \frac{h(n-h)r(n-r)}{n^2(n-1)}$

Poisson $(\mathcal{P}(\lambda))$ Legge degli eventi rari. Limite delle distribuzioni binomiali con $\lambda = np$. Supporto: $\{0, 1, 2, \ldots\}$
$p_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \ \mathbb{E}[X] = \lambda, \ \mathrm{Var}[X] = \lambda$
$\mathcal{P}(\lambda), \lambda > 0 \Leftrightarrow \varphi(u) = \exp\left\{\lambda\left(e^{iu} - 1\right)\right\}$

Normale $(\mathcal{N}(\mu, \sigma^2))$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$
$\mathbb{E}[X] = \mu, \ \mathrm{Var}[X] = \sigma^2, \ \mathbb{E}\left[(X-\mu)^4\right] = 3\sigma^4$
$F(x) = P(X \leqslant x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$
$= P\left(Z \leqslant \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$
con $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$
$\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right) \Leftrightarrow \varphi(u) = \exp\left\{iu\mu - \frac{\sigma^2}{2}u^2\right\}$

Lognormale $(\log\mathcal{N}(\mu, \sigma^2))$, $X = e^{\mathcal{N}}$
$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\mathbb{1}_{(0,+\infty)}$
$F(x) = \Phi_{(\mu,\sigma)}(\ln x)$
$\mathbb{E}[X] = e^{\mu + \sigma^2/2}, \ \mathrm{Var}[X] = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$

Chi-quadro $(\chi^2(k))$ Somma di k $\mathcal{N}(0,1)$ al quadrato.
$f(x) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}x^{k/2-1}e^{-x/2}\mathbb{1}_{(0,+\infty)}$
$\mathbb{E}[X] = k, \ \mathrm{Var}[X] = 2k$
$\chi^2(n) = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\chi^2(k) \Leftrightarrow \varphi(u) = (1 - 2iu)^{-k/2}$

T di Student $(T(n))$
$T = Z/\sqrt{\frac{Q}{n}}, Z \sim \mathcal{N}(0,1), Q \sim \chi^2(n), Z \perp\!\!\!\perp Q$
$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$
$\mathbb{E}[T] = 0$ se $n > 1$ oppure indefinito.
$\mathrm{Var}(T) = \frac{n}{n-2}$ se $n > 2$ oppure indefinita.

Esponenziale $(\mathcal{E}(\lambda))$ Durata di vita di un fenomeno. Priva di memoria. $\lambda > 0$

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x) \quad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
$\mathbb{E}[X^n] = \frac{n!}{\lambda^n}$, $\mathrm{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$, $\mathcal{E}(\lambda) \Leftrightarrow \varphi(u) = \frac{\lambda}{\lambda - iu}$

Gamma ($\Gamma(\alpha, \lambda)$) Somma di VA indipendenti con dist. esponenziale. $\lambda > 0, \alpha > 0$
$f(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$
$F(x) = \left(1 - \sum_{k=0}^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\right) = \frac{\gamma(\alpha, \lambda x)}{\Gamma(\alpha)}$
con $x \in [0, +\infty)$ e α intero.
$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} \mathrm{d}x$
$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \quad \Gamma(n+1) = n!$
$\Gamma(1) = 1 \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\lambda} \quad \mathrm{Var}[X] = \frac{\alpha}{\lambda^2}$
$Z^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \chi^2(1)$
$\mathbb{E}\left[X^k\right] = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{\lambda^k}$
con $k \in \mathbb{Z}, \alpha + k > 0$
$c > 0, X \sim \Gamma(\alpha, \lambda) \Rightarrow Y = cX \sim \Gamma\left(\alpha, \frac{\lambda}{c}\right)$
$\Gamma(\alpha, \lambda) \Leftrightarrow \varphi(u) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - iu}\right)^\alpha$

Weibull ($W(\lambda, k)$)
$\lambda > 0, k > 0$
$f(x) = \frac{k}{\lambda^k} x^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$
$F(x) = e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} \quad \mathbb{E}[X] = \frac{\lambda}{k}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)$
$\mathrm{Var}[X] = \frac{\lambda^2}{k^2}\left[2k\Gamma\left(\frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{k}\right)\right]$
Imponendo $k = 1$ è un'esponenziale.

Cauchy ($\mathcal{C}(x_0, \gamma)$) $\gamma > 0, x_0 \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{\pi\gamma}\left[\frac{\gamma^2}{(x-x_0)^2 + \gamma^2}\right]$
$F(x) = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x - x_0}{\gamma}\right) + \frac{1}{2}$
$\mathcal{C}(x_0, \gamma) \Leftrightarrow \varphi(u) = e^{ix_0 u - \gamma|u|}$
La distribuzione di Cauchy non ha né valore atteso né varianza, $\sim t(1)$

Convergenza di VA

Convergenza monotona: Siano le VA X_n e X tali che $0 \leqslant X_n \leqslant +\infty$, $X_n \uparrow X$ qc, allora: $\mathbb{E}[X_n] \xrightarrow{n} \mathbb{E}[X]$, cioè $\mathbb{E}[\lim_n X_n] = \lim_n \mathbb{E}[X_n]$

Convergenza dominata: Siano le VAR X_n, X, Y tali che $X_n \xrightarrow{\text{qc}} X, |X_n| \leqslant Y$ qc $\forall n, Y \in \mathcal{L}^1$, allora:
$X_n \in \mathcal{L}^1, X \in \mathcal{L}^1, \mathbb{E}[X_n] \xrightarrow{\kappa} \mathbb{E}[X]$

Certa: Simile ad una convergenza puntuale, $X_n \to X \ \forall \omega \in \Omega$

Quasi certa: $\mathbb{P}(X_n \to X) = 1$ ovvero $A = (X_n \to X) \in \mathcal{A}$ e $\mathbb{P}(A) = 1$. Questo significa che la conv. vale a meno di insiemi di misura nulla.

Negli spazi L^p $X_n \xrightarrow{L^p} X$ se $X_n \in L^p \ \forall n, X \in L^p$ e $\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \to 0$
Dato $p \geqslant q \geqslant 1$, conv. in $L^p \Rightarrow$ conv. in L^q.
Convergono i momenti
$\mathbb{E}[|X_n|^p] \xrightarrow{L^p} \mathbb{E}[|X|^p]$
Per $p = 1$ e $p = 2$:
$\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X] \quad \mathrm{Var}(X_n) \to \mathrm{Var}(X)$

Probabilità: $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0$
Esiste una sottosuccessione di X_n che converge qc a X. Se X appartiene a L^p ed è possibile trovare una Y tale che $|X_n| \leqslant Y$ allora questa converge anche in L^p.

Debole: Siano $\mathbb{P}_n$ e $\mathbb{P}$ prob su $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Allora $\mathbb{P}_n \xrightarrow{\text{deb}} \mathbb{P}$ se $\int_\mathbb{R} h d\mathbb{P}_n \to \int_\mathbb{R} h d\mathbb{P} \ \forall h$ cont. e lim.

In legge o distribuzione: $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ se $P^{X_n} \xrightarrow{\text{deb}} P^X$
Slutsky: $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$

Criteri conv. in legge: *Discreto:* $S = S_X \cup S_{X_n}$,
$\mathbb{P}(X_n = s) \to \mathbb{P}(X = s) \ \forall s \in S \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. Se $S \subseteq \mathbb{Z}$ o S finito, vale anche opposto.
Continuo: $f_n \xrightarrow{\text{qo}} f \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$
$\Leftrightarrow F_n(s) \to F(s) \ \forall s \in S$ dove F è cont.
Levy (corollario): $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow \varphi_{X_n} \to \varphi_X$
X_n conv. in $\mathcal{L} \Leftrightarrow \varphi_{X_n} \to \varphi$ e φ cont. in 0

Relazione tra le convergenze:

$$\begin{tikzcd}
 & & & \text{q.c.} \arrow[dl] \\
L^p \arrow[r, "q<p"] & L^q \arrow[r, shift right] & \mathbb{P} \arrow[l, shift right, "|X_n| \leqslant Y,\ Y \in L^q"'] \arrow[ur, "\exists \text{ sottosucce}"'] \arrow[dr, shift left] & \\
 & & & \mathcal{L} \arrow[ul, "X = c \text{ q.c}"]
\end{tikzcd}$$

Proprietà: Se $X_n \to X$ e $Y_n \to Y$, allora a seconda della convergenza possono valere alcune o tutte le seguenti proprietà:
1. $aX_n \to aX$ (qc, $L^p, \mathbb{P}, \mathcal{L}$)
2. $h(X_n) \to h(X)$ (qc, $\mathbb{P}, \mathcal{L}$)
3. $X_n + Y_n \to X + Y$ (qc, $L^p, \mathbb{P}$)
4. $X_n Y_n \to XY$ (qc, $\mathbb{P}$)
5. $Y, Y_n \neq 0 \ \forall \omega \Rightarrow \frac{X_n}{Y_n} \to \frac{X}{Y}$ (qc, $\mathbb{P}$)

Se Y converge a una costante in legge valgono anche la 3, 4 e 5 (teorema di Slutsky)

LGN: Dati $X_n \in L^1$ iid e $\mu \in \mathbb{R}$, allora $\mathbb{E}[X_n] = \mu \Leftrightarrow \overline{X}_n \xrightarrow{\text{qc}} \mu$ e $\overline{X}_n \xrightarrow{L^1} \mu$

TCL: Dati $X_n \in L^2$ iid,
$\mu = \mathbb{E}[X_n] \quad \sigma^2 = \mathrm{Var}(X_n) > 0$, allora:
$(\overline{X}_n - \mu)/\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$

PROBLEMI DI ASSORBIMENTO

λ_i : prob. di venire assorbiti in C partendo da i

se $i \in E_T \setminus C = D$:

$\lambda_i = \sum_{k \in C} p_{ik} + \sum_{j \in D} p_{ij} \lambda_j \quad \forall i \in D$

C = insieme di tutti gli stati ricorrenti, T_C^i : tempo medio di arrivo in C partendo da i

$T_C^i = 1 + \sum_{j \in E_T} p_{ij} T_C^j \quad \forall i \in E_T$

Risultati notevoli

Media campionaria: $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$
1. $\mathbb{E}[\overline{X}_n] = \mu \ \ \forall n$ (correttezza)
2. $\mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow{n} 0$ (ovvero $\overline{X}_n \xrightarrow{L^2} \mu$)
3. $\overline{X}_n \xrightarrow{\text{qc}} \mu$ per la LGN (consistenza)
4. $\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$ per il TCL.

Varianza campionaria:
$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^n (X_k - \overline{X}_n)^2$
1. $\mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \sigma^2 \ \ \forall n$ (corretto)
3. $S_n^2 \xrightarrow{\text{qc}} \sigma^2$ (consistente)
4. $\left(S_n^2 - \sigma^2\right)/\left(\sqrt{\frac{\mu_4 - \sigma^4}{n}}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$
ovvero $S_n^2 \sim AN\left(\sigma^2, \frac{\mu_4 - \sigma^4}{n}\right)$
dove $\mu_4 = \mathbb{E}\left[(X_n - \mu)^4\right] \neq \sigma^4$

Stima di una proporzione: (corr. e consist.)
$\hat{p}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_B(X_k)$
$(\hat{p}_n - p)/\left(\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$ per il TCL.

Stima della F di ripart.: (corr. e consist.)
$F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{(-\infty, t)}(X_k)$
$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{[X_k, +\infty)}(t)$
in quanto $X_k \leqslant t \Leftrightarrow t \geqslant X_k$
$F_n(t) \sim AN\left(F(t), \frac{F(t)(1 - F(t))}{n}\right)$

Prodotto di convoluzione:
$Z = X + X, \ P^Z = P^X * P^Y$
$f_Z(z) = (f_X * f_Y)(z) = \int_\mathbb{R} f_{X,Y}(z - y, y) dy$

Somma di distribuzioni: *Bernoulliane:*
$X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Be}(p)$ indip.
$\Longrightarrow X_1 + \cdots + X_n \sim \mathrm{Bi}(n, p)$
Binomiali: $X_1 \sim \mathrm{Bi}(n_1, p), X_2 \sim \mathrm{Bi}(n_2, p)$ indip.
$\Longrightarrow X_1 + X_2 \sim \mathrm{Bi}(n_1 + n_2, p)$
Gaussiane: $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ indip.
$\Longrightarrow X_1 + \cdots + X_n \sim \mathcal{N}(0, n)$
$\Longrightarrow X_1^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$
Esponenziali: $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{E}(\lambda)$ indip.
$\Longrightarrow X_1 + \cdots + X_n \sim \Gamma(n, \lambda)$
Gamma: $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda), \ Y \sim \Gamma(\beta, \lambda)$ indip.
$\Longrightarrow X + Y \sim \Gamma(\alpha + \beta, \lambda)$
Poisson: $X \sim \mathcal{P}(\lambda_X), \ Y \sim \mathcal{P}(\lambda_Y)$ indip.
$\Longrightarrow X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda_X + \lambda_Y)$

Serie:
$\sum_{k=0}^\infty q^k = \frac{1}{1-q}, \ |q| < 1$
$\sum_{k=0}^N q^k = \frac{1 - q^{N+1}}{1-q}, \ |q| < 1$
$e^x = \lim_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!}$
$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{i=1}^\infty \frac{x^i}{i} = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right), \ |x| \leqslant 1, \ x \neq 1$
$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{(n-i)} b^i = (a+b)^n$
$\sum_{i=1}^\infty i x^i = \frac{x}{(1-x)^2}$

Catene di Markov

$i \to j$ se $\exists n$: $p_{ij}^{(n)} > 0$

Classificazione Periodo
$d = \mathrm{MCD}\left\{n \geqslant 1, p_{ii}^{(n)} > 0\right\}$

i transitorio $\Leftrightarrow \exists j : i \to j \not\to i$

C irriducibile $\Rightarrow$ stati ricorrenti con stesso periodo

Chapman-Kolmogorov $p_{ij}^{(n)} = \sum_k p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n-m)}$

Invariante $\sum_i \pi_i = 1, \pi_i \in [0, 1], \pi = \pi P, \exists$ sempre (markov-kakutani)

Risultati utili $p_{ij}^{(k)} = \left(P^k\right)_{ij} \ \forall k \in \mathbb{N}$
CdM *irriducibile:*
- $\exists! \pi, \ \pi_i = 1/\mathbb{E}_i[\tau_i]$ $\rightsquigarrow$ tempo medio di arrivo in i partendo da i
- (ergodico1) $\frac{1}{n+1}\sum_{m=1}^n h(X_m) \xrightarrow[n]{\text{qc}} \sum_{i \in E} h(i)\pi_i \ \forall h : E \to \mathbb{R}, \forall v$
- (ergodico2) $\rightsquigarrow$ comportamento asint. singolo stato
$\frac{1}{n+1}\sum_{m=1}^n \mathbb{1}_{\{i\}}(X_m) \xrightarrow[n]{\text{qc}} \pi_i \ \forall i \in E, \forall v$ (fraz. di tempo che passa in i tra 0 e n tende alla fraz. che ci passa alla lunga)

se anche *aperiodica*, $v^{(n)} \xrightarrow{n} \pi, \forall v^{(0)}$
se *non riducibile*, $\exists \infty \pi$, comb. conv. di ogni π di ogni classe chiusa irrid.

Ricorda

X VA positiva e continua:
$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty}(1 - F(x))dx$
VA indip. $\Leftrightarrow$ fattorizzano: densità, φ, $\mathbb{E}$
Se (X_1, X_2) indip. $\Rightarrow \mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$
Ricondursi ai punti precedenti, usare trasformazioni
Correlazione massima quando c'è al più una densità diversa da 0 nelle colonne della densità congiunta.

Funzione di ripartizione
$F_{\max}(t) = \prod F(t)$
$F_{\min}(t) = 1 - \prod(1 - F(t))$

Campioni gaussiani $X_1 \ldots X_n$ iid
$X_k \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}, \ \sigma^2 > 0$:
1. $\overline{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$
2. $S^2 \sim \frac{\sigma^2}{n-1}\chi^2(n-1)$
3. $\overline{X}_n \perp\!\!\!\perp S^2$
4. $\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{S^2/n}} \sim t(n-1)$

Convergenza integrali
$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} \to \begin{cases} \text{converge} & \text{se } p < 1 \\ \text{diverge} & \text{se } p \geqslant 1 \end{cases}$
$\int_\alpha^{+\infty} \frac{1}{x^p} \to \begin{cases} \text{converge} & \text{se } p > 1 \\ \text{diverge} & \text{se } p \leqslant 1 \end{cases}$
$0 < \alpha < 1$,
$\int_0^\alpha \frac{1}{x^a |\ln(x)|^b} \to \begin{cases} \text{conv.} & \text{se } \begin{cases} a < 1 & \forall b \in \mathbb{R} \\ a = 1 & b > 1 \end{cases} \\ \text{div.} & \text{se } \begin{cases} a > 1 & \forall b \in \mathbb{R} \\ a = 1 & b \leqslant 1 \end{cases} \end{cases}$
$\alpha > 1$,
$\int_\alpha^{+\infty} \frac{1}{x^a (\ln(x))^b} \to \begin{cases} \text{conv.} & \text{se } \begin{cases} a > 1 & \forall b \in \mathbb{R} \\ a = 1 & b > 1 \end{cases} \\ \text{div.} & \text{se } \begin{cases} a < 1 & \forall b \in \mathbb{R} \\ a = 1 & b \leqslant 1 \end{cases} \end{cases}$
$\alpha > 1$,
$\int_1^\alpha \frac{1}{(\ln(x))^p} \to \begin{cases} \text{converge} & \text{se } p < 1 \\ \text{diverge} & \text{se } p \geqslant 1 \end{cases}$

DISTRIBUCION BETA: $\beta(a,b)$, definida sobre $[0,1]$

$$f(x) = \frac{1}{\beta(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} \quad \text{donde} \quad \beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$