# Comparativa Frec.- Bay

Sea $X \sim Ber(p)$ y $x_1, \dots, x_n$ una m.a.s.

El estimador de máxima verosimilitud es

$$\hat{p}_{MV} = \frac{1}{n} \sum_1^n X_i$$

y una estimación máximo verosimil

$$\tilde{p}_{MV} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i .$$

Hasta aquí sería el enfoque frecuentista.
Si suponemos que a priori $p \sim U[0,1]$ ya estaríamos cuantificando la incertidumbre acerca del parámetro p suponiendo la no-información. La verosimilitud del parámetro es

$$L(p|x_1 \dots x_n) = p^{\sum_1^n x_i} (1-p)^{n-\sum_1^n x_i}$$

Obteniéndose que la distribución a posteriori es

$$\pi(p|x_1 \dots x_n) \propto I_{[0,1]}(p) \, p^{\sum x_i} (1-p)^{n-\sum x_i}$$

Es decir, $p|x_1 \dots x_n \sim Be\left(\sum_1^n x_i + 1, n - \sum_{i=1}^n x_i + 1\right)$

La estimación de Bayes para pérdida cuadrática es:

$$\hat{p}_B = E(p|x_1 \dots x_n) = \frac{\sum_1^n x_i + 1}{n+2}$$

Por tanto, $\tilde{p}_{MV} \neq \hat{p}_B$. Sin embargo,

para muestras suficientemente grandes ambas estimaciones van a ser prácticamente iguales.
Si elegimos una $Be(a_0, b_0)$ como a priori la diferencia entre ambras estimaciones va a ser más clara cuanto más pequeño sea el tamaño de la muestra y en función de $(a_0, b_0)$:

$$\hat{p}_B = \frac{\sum_{i=1}^n x_i + a_0}{a_0 + b_0 + n}$$

$$= \frac{n}{a_0 + b_0 + n}\bar{x} + \frac{a_0}{a_0 + b_0 + n}$$

También se da el caso de que al aumentar el tamaño de la muestra ambas estimaciones van a coincidir practicamente.

Como idea general podemos decir que los mètodos frecuentistas y bayesianos van a coincidir prácticamente para tamaños muestrales muy grandes aunque sus interpretaciones son diferentes.