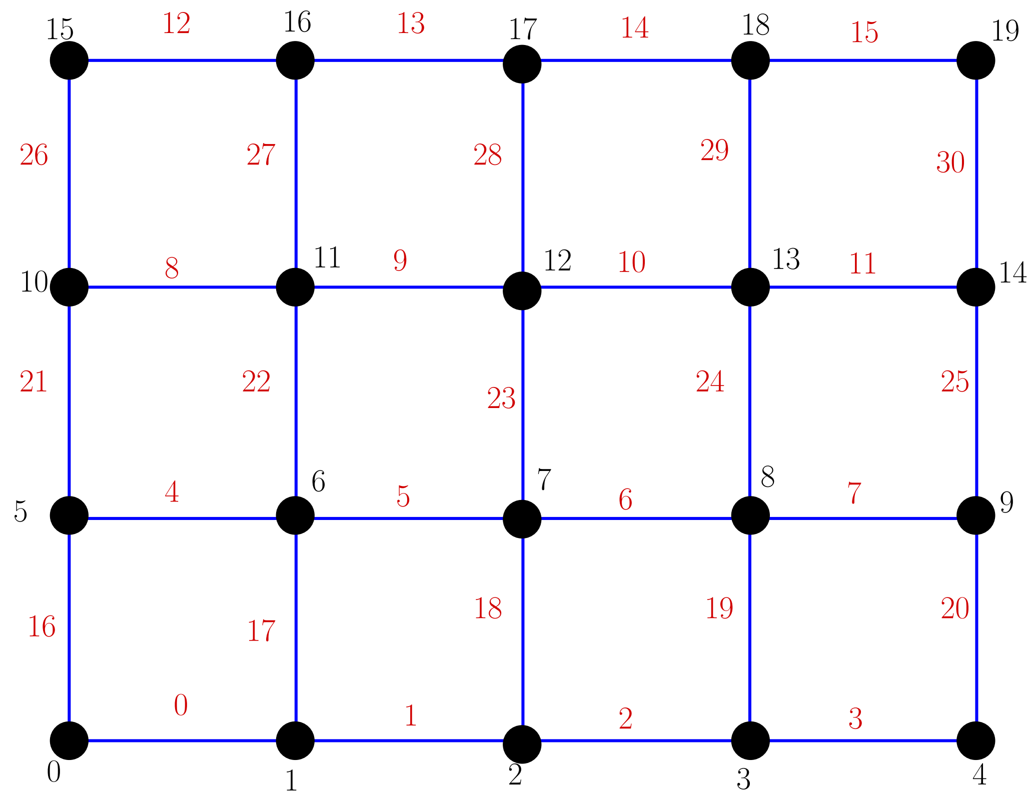
Roberto F. Ausas

rfausas@icmc.usp.br
`www.lmacc.icmc.usp.br/~ausas/`

Parte 1: Resolução de Redes em python

- Antes de começar a realizar o tarefa se recomenda estudar com as Jupyter Notebook apresentadas pelo professor.
- A tarefa e o relatório serão feitos em grupo (máximo 3 integrantes).
- O relatório será feito na própria Jupyter Notebook desenvolvida com algumas explicações e os resultados obtidos ao rodar.
- NÃO ENTREGRAR ARQUIVOS .zip OU QUALQUER OUTRO FORMATO QUE NÃO SEJA O DA JUPYTER NOTEBOOK .ipynb, POIS SERÃO DESCONSIDERADOS.
- **Todos os exercícios devem estar no mesmo arquivo e as células devem ter sido executadas para que o professor possa ver os resultados.**
- Cada aluno deverá colocar o relatório no escaninho.
- Na jupyter notebook deverá constar o nome de todos os participantes.
- A data de entrega será até às 6am do dia 22/05/2023 no escaninho do Tidia.

Vamos trabalhar com redes tipo grade. Na figura mostra-se apenas um exemplo, no qual o número de pontos na horizontal `n = 5` e na vertical `m = 4`. Notar a numeração de nós e arestas gerada pela função `GeraRede()` disponibilizada pelo professor. **Lembrar que em python a numeração começa desde 0 e por isto temo indexado os nós e arestas dessa forma.**



Exo. A. Programar uma função:

```
def ResolveRede( ...  ):
```

que encapsula todos os cálculos referentes a uma rede de tipo grade como as estudadas. A função deve receber todos os argumentos que sejam necessários e retornar como resultados, o vetor de pressões e a pressão máxima. Considerar:

- Conexões do tipo 1, em que uma fonte `QB` é conectada num certo nó `nB` e num outro nó `natm` é fixada a pressão 0
- Conexão altenativa, do tipo 2, na qual uma pressão `Pr` é fixada num certo nó `nr` e no resto dos nós 'e colocado um consumo;

Testar a função numa rede e plotar as pressões como contornos de nível. Considerar diferentes nós para conectar a fonte, e o reservatório em cada caso.

Exo. B. Dada uma rede cuja matriz de conectividades é `conec` o vetor de condutâncias $\mathbf{C}$, e o vetor de pressões $\mathbf{p}$, calcular a vazão pelos canos da rede, i.e.,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K}\,\mathbf{D}\,\mathbf{p}$$

em que $\mathbf{K}$ é a matriz diagonal com as conductâncias dos canos definida por

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{cases} C_i & \text{se } i = j \\ \\ 0 & \text{no resto} \end{cases}$$

e **D** é a matriz definida por:

$$\mathbf{D}_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = \texttt{conec[k,0]} \\ -1 & \text{se } j = \texttt{conec[k,1]} \\ 0 & \text{no resto} \end{cases}$$

Testar a função num exemplo concreto e mostrar os resultados. Modificar a função do **Exo. A** para incorporar este cálculo e retornar adicionalmente o vetor **Q**.

Exo. C. Calcular a potência consumida pela bomba via o cálculo das perdas na rede:

$$W = \mathbf{p}^\intercal \left(\mathbf{D}^\intercal \mathbf{K}\, \mathbf{D}\right) \mathbf{p}$$

Testar a função num exemplo concreto e mostrar os resultados. Modificar a função do **Exo. B** para incorporar este cálculo e retornar adicionalmente o valor de W.

Exo. D. **Cálculos Monte Carlo em redes:** Baseado nas slides, desenvolver um código que gera um gráfico da probabilidade de que algum dos nós da rede com conexão do tipo 2, esteja a pressão menor que 1.15, como funcão da probabilidade a, de entupimento individual dos canos. Considerar:

- A rede nominal das slides com `n = m = 10`, `Pr = 5` e `consumo = -0.1`
- Para fazer o gráfico, barrer valores da probabilidade a, de entupimento individual dos canos indo desde 2% até 25%.

Parte 2: Resolução de Sistemas lineares

Exercício Teórico E: Provar por indução o **Teorema 2** (ver “An introduction to Numerical Analysis”, Cambridge, E. Süli & D. Mayers, pag. 50).

Exercício Teórico F: Provar que matrizes definidas positivas ($x^T A\,x > 0\ \forall x \neq 0$), satisfazem a condição do **Teorema 2**.
(*Dica: Calcular* $x^\intercal A\,x$ *para* $x = [x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots, 0]^\intercal,\ k = 1, 2, \ldots, n-1.$)

Exercício Teórico G: Deduzir as fórmulas dadas para a fatoração de Cholesky. Explicar porque este tipo de decomposição não pode ser aplicado a matrizes que possuem determinante negativo.

Exercício Computational H: Considerar redes hidráulicas de diferente tamanho (10×10, 20×20, $\ldots$, 100×100) com um reservatório fixando a pressão $p_0 = 10$ no nó 0 e um consumo de 0.1 dos nós restantes (como visto anteriormente). Medir o tempo de cálculo para resolver os sistemas de equações como função do número de incógnitas considerando as matrizes em formato denso e em formato esparso.

Bonus: Pensar uma forma de fixar a pressão do sistema sem quebrar a simetria da matriz e nesse caso, resolver o sistema com o método de Cholesky (para matrizes densas e esparsas). Comparar.

Os Exos. teóricos podem ser feitos no papel, tirar foto com celular e colocar um arquivo em formato pdf no escaninho do tidia.