

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO - BICOCCA

Tecnologie Quantistiche Applicate

Raccolta di appunti, dispense e libri

Anno accademico 2021/2022

**Pietro Campana, Rodolfo Carobene,
Marco Gobbo e Aurora Perego**

<https://github.com/marcogobbo/tecnologie-quantistiche>

5 maggio 2022

Indice

1	Meccanica quantistica	5
1.1	Stati e qubit	5
1.2	Matrice densità	8
1.3	Misurazioni	11
1.3.1	Misurazioni della matrice densità	12
1.3.2	POVM: Misura a valori operatoriali positivi	15
1.3.3	Cambi di base: stati puri e miscele	16
1.4	Sfera di Bloch	17
1.4.1	Matrice densità termica	18
1.5	Sistemi compositi	19
1.5.1	Matrice densità ridotta	20
1.6	Interazione con l'ambiente	21
2	Misurazioni	25
2.1	Microscopio di Heisenberg	25
2.2	Limiti quantistici standard	26
2.3	Misurazioni senza demolizione	29
2.4	Misurazioni indirette	32
3	Superconduttività	35
3.1	Introduzione alla superconduttività	35
3.1.1	Funzione d'onda e densità di corrente	35
3.1.2	Effetto Meissner	36
3.1.3	Quantizzazione del flusso magnetico	37
3.2	La giunzione Josephson	38
3.2.1	Le equazioni di Josephson	38
3.2.2	Induttanza Josephson	39
3.3	SQUID	40
3.3.1	RF SQUID	41
3.3.2	DC SQUID	42
3.4	Quantizzazione di un circuito LC	44
4	Qubit	47
4.1	Tipologie di qubit	47
4.1.1	Phase qubit	47
4.1.2	Charge qubit: Cooper Pair Box	51
4.1.3	Limite TRANSMON	55
4.2	Controllo di un qubit	57

4.2.1	TRANSMON Qubit	57
4.2.2	Phase Qubit	58
4.2.3	Oscillazioni di Rabi	59
4.2.4	Approssimazione di rotating wave (RWA)	59
4.2.5	Controllo XY	63
4.3	Misurazioni e circuit QED	66
4.3.1	Cavity QED	66
4.3.2	Limite dispersivo	69
4.3.3	Oltre all'hamiltoniana di Jaynes-Cumming	72
4.3.4	Charge qubit e CPW	72
4.3.5	Risonatore <i>lumped</i> LC	76
4.4	Caratterizzazione di un qubit superconduttivo	76
4.4.1	Identificazione delle frequenze caratteristiche	77
4.4.2	Controllo e misura (omodina e eterodina)	77
4.4.3	Misura di T1 e T2	79
	Bibliografia	82

Capitolo 1

Meccanica quantistica

LEZIONE 1 - 07/10/2021

1.1 Stati e qubit

Prima di addentrarci nello studio delle tecnologie quantistiche, risulta opportuno fare alcuni richiami di meccanica quantistica implementando alcuni concetti che ci saranno poi utili in futuro. In particolare iniziamo velocemente ricordando il primo postulato della meccanica quantistica

- **I Postulato (Stato):** Che cos'è uno stato? Utilizziamo la notazione di Dirac per rappresentare un vettore $|\psi\rangle$ di uno spazio di Hilbert \mathcal{H} (molto spesso uno spazio vettoriale finito dimensionale) e diremo che $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$. Uno stato è un **raggio** tale che $\| |\psi\rangle \| = 1$ (per la conservazione della probabilità) e $|\psi\rangle \cong e^{i\alpha} |\psi\rangle$ ⁱ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Dato che la fase globale è irrilevante, quando due stati differiscono per una fase hanno il medesimo effetto fisico.

Procediamo ora con il definire cosa sia un qubit

Definizione 1.1 (Qubit). *Un qubit è un qualsiasi sistema a due livelli. Ogni sistema quantomeccanico può essere un qubit, ad esempio si può creare utilizzando le due differenti polarizzazioni del fotone, utilizzando l'allineamento dello spin di un nucleo immerso in un campo magnetico uniforme, utilizzando la tecnica della trappola ionica, sistemi superconduttivi, ...*

Davide di Vincenzo, nel 2000, ha indicato cinque criteri necessari per la scelta di un sistema fisico adatto per la computazione quantistica:

1. Un sistema fisico scalabile con qubit ben caratterizzati;
2. La capacità di inizializzare lo stato dei qubit a un semplice stato fiduciale;
3. Tempi di decoerenza lunghi e rilevanti;
4. Un insieme "universale" di porte quantistiche;
5. Una capacità di misurazione specifica per qubit.

ⁱLa notazione \cong significa "equivalente a".

La meccanica quantistica si occupa di descrivere il comportamento del nostro sistema a due livelli mediante una hamiltoniana. Per fare ciò lavoriamo in spazi di Hilbert bidimensionali $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, quindi le hamiltoniane di questi sistemi sono degli operatori definiti su $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$. Gli stati in cui si trova il nostro sistema sono descritti da funzioni d'onda generiche $\psi \in \mathbb{C}^2$, in particolar modo possono essere decomposte sulla base computazionale $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Avremo quindi che

$$\begin{aligned}\hat{H} |0\rangle &= E_0 |0\rangle \\ \hat{H} |1\rangle &= E_1 |1\rangle ,\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}\langle 0|0\rangle &= \langle 1|1\rangle = 1 \\ \langle 0|1\rangle &= \langle 1|0\rangle = 0 .\end{aligned}$$

Per cui ogni stato generico $|\psi\rangle$ può essere scritto come combinazione lineare di $\{|0\rangle, |1\rangle\}$

$$|\psi\rangle = a |0\rangle + b |1\rangle ,$$

con $a, b \in \mathbb{C}$ e soddisfacenti la condizione di conservazione di probabilità

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 .$$

Osserviamo che, per come è definito, $|\psi\rangle$ è uno **stato puro**, ci dà la massima conoscenza che possiamo ottenere da questo sistema. Infatti abbiamo una probabilità pari a $|a|^2$ di ottenere $|0\rangle$ e una probabilità pari a $|b|^2$ di ottenere $|1\rangle$. Dobbiamo misurare un numero infinito di volte per poter ottenere queste distribuzioni di probabilità, tuttavia non possiamo eseguire una misura successiva per estrarre ulteriori informazioni sul nostro stato $|\psi\rangle$ poiché quest'ultimo sarà collassato in $|0\rangle$ oppure $|1\rangle$. Per determinare univocamente α e β si necessiterebbe un'infinità di esperimenti su un'infinità di stati tutti preparati nel medesimo stato $|\psi\rangle$. La massima conoscenza che possiamo estrarre non è molta, questo fatto è stato oggetto di discussione per molti anni. In particolar modo ci si è chiesti se la teoria meccanica quantistica fosse una teoria completa o menoⁱⁱ.

Come abbiamo già accennato, a e b sono coefficienti complessi, attraverso la notazione esponenziale possiamo scriverli come

$$a = |a|e^{i\theta_0} \quad b = |b|e^{i\theta_1} ,$$

in questo modo

$$\begin{aligned}|\psi\rangle &= |a|e^{i\theta_0} |0\rangle + |b|e^{i\theta_1} |1\rangle \\ &= \underbrace{e^{i\theta_0}}_{\text{Fase globale}} \left(|a| |0\rangle + |b| \underbrace{e^{i(\theta_1 - \theta_0)}}_{\text{Fase relativa}} |1\rangle \right) .\end{aligned}$$

Quando misuriamo uno stato, la *fase globale* risulta essere irrilevante, ciò che conta è la *fase relativa* perché può dar luogo a fenomeni come l'interferenza.

Esempio 1.1 (Fase relativa). *Consideriamo gli stati $|0\rangle$ e $|1\rangle$, per scrivere i seguenti stati*

$$|\psi_1\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad |\psi_2\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

ⁱⁱEinstein, A., Podolsky, B., & Rosen, N. (1935). Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?. Phys. Rev., 47, 777–780.

In questo caso il segno meno proviene dalla fase relativa. $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ forniscono lo stesso risultato per una misura di energia (lo si può verificare calcolando $\langle\psi_i|\hat{H}|\psi_i\rangle$), tuttavia riusciamo a distinguerli se facciamo una misura diversa. Ad esempio possiamo considerare la matrice di Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ sono autostati di σ_x con autovalori, rispettivamente, 1 e -1 .

Uno dei problemi principali nell'aver a che fare con sistemi quantistici è trovare l'evoluto temporale di un certo stato, perché abbiamo delle hamiltoniane che descrivono ad esempio il rumore degli strumenti, la temperatura dell'ambiente, ... L'equazione di Schrödinger si comporta bene nel descrivere l'evoluzione di **sistemi chiusi**, ma un qubit è, in generale, un **sistema aperto** che si lega a sistemi esterni e quindi la conoscenza sul suo stato tende a diminuire, finché non perdiamo completamente l'informazione che possedeva all'inizio. Questo fatto è legato al **tempo di coerenza**. Ci sono vari modi per tenere conto di queste interazioni così da poter descrivere al meglio il nostro sistema a due livelli. Supponiamo di avere un sistema chiuso che evolve secondo l'equazione di Schrödinger

$$\hat{H}|\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle,$$

dove $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(0)\rangle$. \hat{U} in questo caso è un operatore unitario che può essere espresso, se l'hamiltoniana è costante nel tempo, come

$$\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}.$$

Pertanto, considerando gli autostati dell'hamiltoniana

$$\hat{H}|i\rangle = E_i|i\rangle,$$

e riscrivendo il nostro stato iniziale in termini di autostati dell'hamiltoniana

$$|\psi(0)\rangle = \sum_i a_i |i\rangle,$$

possiamo valutare il nostro stato al tempo generico t come

$$|\psi(t)\rangle = \sum_i a_i e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} |i\rangle = \sum_i a_i e^{-\frac{i}{\hbar}E_i t} |i\rangle \quad \text{dove} \quad a_i(t) = a_i(0) e^{-\frac{i}{\hbar}E_i t}.$$

Da questo caso generale possiamo trattare il nostro sistema a due livelli, in questo caso l'hamiltoniana sarà

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix},$$

applicando l'equazione di Schrödinger sui coefficienti

$$i\hbar \frac{da_0(t)}{dt} = E_0 a_0(t),$$

$$i\hbar \frac{da_1(t)}{dt} = E_1 a_1(t),$$

troviamo che il nostro stato finale al tempo generico t sarà

$$|\psi(t)\rangle = \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}E_0t}}_{\text{Fase globale}} \left(a_0(0)|0\rangle + \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}(E_1-E_0)t}a_1(0)}_{\text{Fase relativa}}|1\rangle \right).$$

Ancora una volta, la fase globale non produce alcun effetto, ciò che notiamo è che l'evoluzione temporale cambia la fase relativa tra gli stati $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Questo spiega perché se abbiamo una interazione che disturba il nostro sistema possiamo avere un cambio nella fase relativa, questo è dato dal fatto che abbiamo una variazione in termini energetici. Questo disturbo è generato da tutto ciò che è esterno al sistema a due livelli. Se perdiamo il controllo su questa fase, perdiamo tutta l'informazione che abbiamo su $|\psi(t)\rangle$, e se questo accade, non abbiamo più uno stato puro. Per questo motivo necessitiamo qualcosa che vada oltre al concetto di funzione d'onda generica ψ .

1.2 Matrice densità

Vogliamo realizzare uno stato puro $|\psi\rangle$ che sia una combinazione pura di stati $|0\rangle$ e $|1\rangle$:

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle,$$

nella realtà quando cerchiamo di realizzare questo stato, abbiamo un'indeterminazione classica rappresentata da una distribuzione di probabilità di ottenere lo stato esatto oppure uno stato simile. Supponiamo di avere un insieme di stati che indichiamo con $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$, dove p_i è la probabilità classica di ottenere un generico stato. Questi stati $|\psi_i\rangle$ sono tutti stati puri, ma non sappiamo quale sia quello giusto e la sua conoscenza è persa. Tutte queste informazioni sono contenute nella **matrice densità** che rappresenta una distribuzione classica di probabilità.

Dal punto di vista della teoria della meccanica quantistica, esiste un altro modo per introdurre la teoria anziché sfruttare gli stati ψ . Quello che si fa è sfruttare la matrice densità che è un operatore che agisce nel seguente modo

$$\hat{\rho}|\psi_i\rangle = p_i|\psi_i\rangle,$$

dove p_i rappresenta la probabilità di ottenere lo stato i -esimo. La matrice densità è ora una miscela di stati puri

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

e descrive la mancanza di conoscenza sui sistemi quantistici che avevamo precedentemente. Se utilizzassimo lo stesso operatore \hat{U} per descrivere l'evoluto temporale di $|\psi_i\rangle \xrightarrow{t} \hat{U}|\psi_i\rangle$, come possiamo applicarlo a $\hat{\rho}$?

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \longrightarrow \sum_i p_i \hat{U}|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\hat{U}^\dagger$$

$$\hat{U}\hat{\rho}\hat{U}^\dagger = \hat{\rho}'.$$

Vediamo se le distribuzioni di probabilità classiche, nel caso di stati ortonormali, vengono conservate:

Dimostrazione.

A $t = 0$:

$$\hat{\rho} |\psi_i(0)\rangle = p_i |\psi_i(0)\rangle$$

A $t > 0$:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}' |\psi_i(t)\rangle &= \hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^\dagger \hat{U} |\psi_i(0)\rangle \\ &= \hat{U} \hat{\rho} |\psi_i(0)\rangle \\ &= \hat{U} p_i |\psi_i(0)\rangle \\ &= p_i \hat{U} |\psi_i(0)\rangle \\ &= p_i |\psi_i(t)\rangle \end{aligned}$$

La probabilità p_i non è cambiata nel tempo, ma lo stato sì perché ora è $|\psi_i(t)\rangle$ che non è uguale a $|\psi_i(0)\rangle$. \square

LEZIONE 2 - 12/10/2021

Vediamo alcune proprietà generali della matrice densità:

1. ρ è hermitiana e positiva.

Dimostrazione. Ricordando che $p_i \geq 0 \in \mathbb{R}$ allora

$$\left(\sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \right)^\dagger = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| .$$

La positività di un operatore A è data dalla proprietà $\langle\phi|A|\phi\rangle \geq 0$ per ogni $|\phi\rangle$, quindi

$$\langle\phi|\rho|\phi\rangle = \langle\phi| \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \phi\rangle = \sum_i p_i \langle\phi|\psi_i\rangle \underbrace{\langle\psi_i|\phi\rangle}_{\langle\phi|\psi_i\rangle^*} = \sum_i p_i |\langle\phi|\psi_i\rangle|^2 \geq 0 .$$

\square

2. $\text{Tr } \rho = 1$.

Dimostrazione.

$$\text{Tr} \left[\sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \right] = \sum_i p_i \text{Tr} |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \sum_i p_i \langle\psi_i|\psi_i\rangle = 1 ,$$

\square

3. $\text{Tr } \rho^2 \leq 1$ e $\text{Tr } \rho^2 = 1$ solo per gli stati puri.

Dimostrazione. Dato che ρ è hermitiana allora può essere diagonalizzata, quindi $\rho |n\rangle = \rho_n |n\rangle$. In particolare avremo

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \equiv \sum_n \rho_n |n\rangle\langle n| ; \quad (1.2.1)$$

quindi la matrice densità è scrivibile come somma del prodotto tra i proiettori in direzione degli autospazi e dei corrispondenti autovalori. Notiamo che la formula precedente consiste di fatto nella diagonalizzazione in notazione di Dirac. Chiaramente in generale $p_i \neq \rho_i$! Dato che $\text{Tr } \rho = 1$ allora dalla precedente si ha che $\sum_n \rho_n = 1$. Cerchiamo di valutare $\text{Tr } \rho^2 = \sum_n \rho_n^2$: dato che la matrice densità è hermitiana allora $\rho_n \geq 0 \in \mathbb{R}$, ma al tempo stesso si deve avere $0 \leq \rho_n \leq 1$ poiché $\sum_n \rho_n = 1$. Ma allora

$$0 \leq \rho_n^2 \leq \rho_n \leq 1, \quad \Rightarrow \quad \sum_n \rho_n^2 \leq \sum_n \rho_n = 1.$$

Il caso limite è dato da

$$\sum_n \rho_n^2 = 1 = \sum_n \rho_n \quad \Leftrightarrow \quad \rho_n = \rho_n^2, \quad \forall n,$$

ma per numeri tra 0 e 1 questo è vero solamente per $\rho_n = 1 \vee \rho_n = 0$: solamente un valore è diverso da 0 (uguale a 1) mentre tutti gli altri sono 0, quindi $\rho = |n\rangle\langle n|$ per un particolare n , ossia si tratta di uno stato puro. \square

Si noti che la formula $\text{Tr } \rho^2 = 1 \Leftrightarrow$ stato puro è un criterio per stabilire se effettivamente uno stato è puro. Inoltre, essendo ρ hermitiana, può sempre essere diagonalizzata secondo la (1.2.1) e quindi la sua forma non è unica.

Alla luce della definizione di matrice densità, cerchiamo di comprendere come alcuni postulati della meccanica quantistica possano essere riscritti in termini di $\hat{\rho}$. In particolare iniziamo dal

- **IV Postulato (Evoluzione temporale):** Cosa succede nel momento in cui il nostro sistema quantistico evolve? Se è descritto da una funzione d'onda $|\psi\rangle$, dopo un certo intervallo di tempo t , il nostro stato evolverà nel seguente modo

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U} |\psi\rangle,$$

dove \hat{U} è l'operatore unitario di evoluzione temporale.

Se invece il nostro sistema è descritto da un insieme di stati, con ciascuno la propria probabilità $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ e per questo insieme possiamo definire una matrice densità $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, allora considerando sistemi chiusi, la nostra matrice densità evolverà come

$$\hat{\rho}' = \sum_i p_i \hat{U} |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \hat{U}^\dagger = \hat{U} \rho \hat{U}^\dagger,$$

quindi $\hat{\rho}'$ descriverà un nuovo insieme di stati $\{p_i, \hat{U} |\psi_i\rangle\}$ dove però p_i è preservata.

Osserviamo che se il nostro stato iniziale è uno stato puro, la matrice densità che possiamo costruire è anch'essa uno stato puro. Se il nostro sistema è chiuso, cioè non interagisce con l'ambiente e quindi l'evoluzione dello stato puro rimane uno stato puro, allora anche l'evoluto della matrice densità rimane uno stato puro.

1.3 Misurazioni

Prima di addentrarci nella discussione sulle misurazioni, che saranno uno degli argomenti chiave del corso, introduciamo il postulato della meccanica quantistica relativo alle osservabili.

- **II Postulato (Osservabili):** Che cosa si può misurare in meccanica quantistica? Vengono misurate le **osservabili** rappresentate da **operatori autoaggiunti** (o **hermitiani**) \hat{A} tali che

$$\hat{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \text{ con } \hat{A}^\dagger = \hat{A},$$

dove più precisamente $\hat{A}^\dagger \equiv (\hat{A}^t)^*$. Dal punto di vista degli elementi di matrice, calcolare l'aggiunto di A_{ij} significa $A_{ij}^\dagger = A_{ji}^*$.

Focalizzando la nostra attenzione sugli operatori hermitiani, richiamiamo un importante teorema dell'algebra lineare:

Teorema 1.1 (Teorema Spettrale). *Sia \hat{A} un operatore autoaggiunto su uno spazio di Hilbert \mathcal{H} (reale o complesso). Allora esiste una base ortonormale di \mathcal{H} composta da autovettori di \hat{A} , ossia $\exists \{|a_i\rangle\} \in \mathcal{H}$ tale che $\hat{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$ dove gli autovalori $a_i \in \mathbb{R}$.*

- **III Postulato (Regola di Born):**

1. **Misurazione:** Sia \hat{A} un osservabile con autostati $|a_i\rangle$, ossia $\hat{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$. Prendiamo per semplicità $a_i \neq a_j \forall i \neq j$ (osservabile con autovalori distinti). Consideriamo uno stato generico espanso sugli autostati precedenti: $|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |a_i\rangle$. Allora una misura dell'osservabile \hat{A} produce il valore a_i con probabilità data da $|\alpha_i|^2$ (assumendo lo stato correttamente normalizzato).
2. **Collasso dello stato:** Cosa succede allo stato del sistema dopo la misurazione? Istantaneamente lo stato $|\psi\rangle$ collassa sull'autostato associato all'autovalore risultante dalla misura. Ad esempio se misurando otteniamo a_i allora $|\psi\rangle \rightarrow |a_i\rangle$. Effettuando delle misure successive sullo stato si ottiene sempre $|a_i\rangle$ con probabilità esattamente uguale a 1.

Soffermiamoci su questo postulato e analizziamone bene il contenuto. Questo tipo di misurazione prende il nome di **Von Neumann measurement** o **projective measurement**. Il motivo di quest'ultimo nome è che se noi abbiamo un'osservabile \hat{A} e a_i è l'autovalore associato allo stato $|a_i\rangle$, allora possiamo definire un operatore \hat{P}_i che prende il nome di **proiettore** relativo allo stato $|a_i\rangle$, definito come

$$\hat{P}_i = |a_i\rangle\langle a_i|.$$

La probabilità associata al fatto che il nostro generico stato $|\psi\rangle$ collassi nello stato $|a_i\rangle$ è pari a

$$\begin{aligned} p_i &= \langle \psi | \hat{P}_i | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | a_i \rangle \langle a_i | \psi \rangle \\ &= |\langle a_i | \psi \rangle|^2. \end{aligned}$$

I **proiettori** hanno alcune proprietà particolari

1. $\hat{A} = \sum_i a_i \hat{P}_i$;

2. $\sum_i \hat{P}_i = \mathbb{I}$;
3. $\hat{P}_i \hat{P}_j = \hat{P}_i \delta_{ij}$.

Per via di quest'ultima proprietà chiamiamo questo tipo di misure **orthogonal measurement** e questo concetto si rifà al punto 2 del postulato relativo alle misure. Alla luce della definizione di proiettore possiamo vedere l'operazione di misura sotto questo punto di vista: se abbiamo uno stato $|\psi\rangle$ e andiamo a misurare l'osservabile \hat{A} , proiettiamo lo stato iniziale nello stato a_i :

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &\longrightarrow \hat{P}_i |\psi\rangle = |a_i\rangle\langle a_i| \sum_k \langle a_k|\psi\rangle |a_k\rangle \\ &= |a_i\rangle\langle a_i| \sum_k \sqrt{p_k} |a_k\rangle \\ &= \sqrt{p_i} |a_i\rangle \end{aligned}$$

Affinché sia uno stato, deve essere necessariamente normalizzato: $|\psi\rangle' = \frac{P_i|\psi\rangle}{\sqrt{p_i}}$. Da qui in poi è possibile valutare il valore di aspettazione dell'osservabile $\langle A \rangle$ e l'incertezza associata ΔA :

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \langle \psi | A | \psi \rangle = \sum_i a_i \langle \psi | \hat{P}_i | \psi \rangle = \sum_i p_i a_i \\ \Delta A &= \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \end{aligned}$$

1.3.1 Misurazioni della matrice densità

Consideriamo il nostro insieme di stati $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$, dove $\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$. Abbiamo un'osservabile \hat{A} con i suoi autostati $|a_n\rangle$, autovalori a_n e possiamo definire i proiettori $\hat{P}_n = |a_n\rangle\langle a_n|$.

Se prendiamo uno stato $|\psi_i\rangle$ dall'insieme di stati e valutiamo la probabilità di ottenere lo stato $|a_n\rangle$ dato lo stato $|\psi_i\rangle$ otteniamo

$$p(a_n|i) = \langle \psi_i | P_n | \psi_i \rangle = \text{Tr} \left(\hat{P}_n |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \right)$$

In generale, per una matrice densità ρ , la probabilità di ottenere a_n è

$$\begin{aligned} p(a_n) &= \sum_i p_i p(a_n|i) \\ &= \sum_i p_i \text{Tr} \left(\hat{P}_n |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \right) \\ &= \text{Tr} \left(\hat{P}_n \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \right) \\ &= \text{Tr} \left(\hat{P}_n \hat{\rho} \right) \\ &= \text{Tr} \left(\hat{\rho} \hat{P}_n \right) \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Dopo aver eseguito la misura di a_n , otteniamo lo stato $|a_n\rangle$ che in termini di matrice densità possiamo scrivere come

$$\hat{\rho}_n = \frac{\hat{P}_n \hat{\rho} \hat{P}_n}{\text{Tr} \left(\hat{P}_n \hat{\rho} \right)} \tag{1.3.2}$$

Possiamo dimostrare che si tratta di uno stato puro.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho}_k &= \frac{\hat{P}_n \hat{\rho} \hat{P}_n}{\text{Tr}(\hat{P}_n \hat{\rho})} \\
 &= \frac{|a_n\rangle\langle a_n| \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| |a_n\rangle\langle a_n|}{\text{Tr}(\hat{P}_n \hat{\rho})} \\
 &= \frac{|a_n\rangle (\sum_i p_i \langle a_n|\psi_i\rangle \langle\psi_i|a_n\rangle) \langle a_n|}{\text{Tr}(\hat{P}_n \hat{\rho})} \\
 &= \frac{\text{Tr}(\hat{P}_n \hat{\rho})}{\text{Tr}(\hat{P}_n \hat{\rho})} |a_n\rangle\langle a_n| \\
 &= |a_n\rangle\langle a_n|
 \end{aligned}$$

□

I risultati ottenuti dalle equazioni (1.3.1) e (1.3.2) rappresentano l'equivalente del **III Postulato** per $\hat{\rho}$.

LEZIONE 3 - 14/10/2021

Abbiamo visto come sia possibile calcolare il valore di aspettazione di $\langle A \rangle$ a partire dalle funzioni d'onda. Vogliamo vedere come sia possibile sfruttare la matrice densità per ottenere il medesimo risultato. Cominciamo considerando il generico insieme di stati $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ e la matrice densità corrispondente $\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$. Per il singolo stato $|\psi_i\rangle$ avevamo visto che

$$\begin{aligned}
 \langle A \rangle_{\psi_i} &= \sum_k p_k a_k \\
 &= \sum_k \langle\psi_i|a_k\rangle \langle a_k|\psi_i\rangle a_k \\
 &= \langle\psi_i| \sum_k a_k |a_k\rangle \langle a_k|\psi_i\rangle \\
 &= \langle\psi_i| A |\psi_i\rangle
 \end{aligned}$$

Tuttavia, nel caso della matrice densità, abbiamo un insieme di funzioni d'onda, per cui

$$\begin{aligned}
 \langle A \rangle &= \sum_i p_i \langle\psi_i|\hat{A}|\psi_i\rangle \\
 &= \sum_i p_i \text{Tr}(\hat{A} |\psi_i\rangle\langle\psi_i|) \\
 &= \text{Tr}\left(\hat{A} \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right) \\
 &= \text{Tr}(\hat{A} \hat{\rho}) .
 \end{aligned}$$

Equazione di von-Neumann - Liouville

Per il **IV Postulato**, riguardante l'evoluzione temporale, la matrice densità evolve come $\hat{U}\hat{\rho}\hat{U}^\dagger$, ci chiediamo se sia possibile realizzare un'equazione analoga a quella di Schrödinger per la matrice densità. La risposta è affermativa, infatti

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\rho}}{dt} &= \sum_i p_i \left(\frac{d|\psi_i\rangle}{dt} \langle\psi_i| + |\psi_i\rangle \frac{d\langle\psi_i|}{dt} \right) \\ &= \sum_i \frac{p_i}{i\hbar} \left(\hat{H} |\psi_i\rangle \langle\psi_i| - |\psi_i\rangle \langle\psi_i| \hat{H} \right) \\ &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}]\end{aligned}$$

Consideriamo ora un paio di esempi per assodare i concetti finora trattati

Esempio 1.2. Consideriamo un qubit nella base computazionale $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ oppure possiamo pensare di prendere la base

$$|a\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$|b\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}};$$

entrambe le basi sono degli stati puri.

Consideriamo lo stato $|a\rangle$ e costruiamo la matrice densità per la base computazionale

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} |0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2} |1\rangle\langle 1|,$$

come possiamo notare, gli stati hanno la medesima probabilità. Ora possiamo fare una **projective measurement** definendo i proiettori:

- $\hat{P}_0 = |0\rangle\langle 0|;$
- $\hat{P}_1 = |1\rangle\langle 1|;$
- $\hat{P}_a = |a\rangle\langle a|.$

Andiamo a misurare le probabilità di misurare $|0\rangle$ e $|1\rangle$ sullo stato $|a\rangle$:

$$p(|0\rangle) = \langle a|\hat{P}_0|a\rangle = \frac{1}{2}, \quad p(|1\rangle) = \langle a|\hat{P}_1|a\rangle = \frac{1}{2}.$$

Cosa succede se consideriamo ρ ?

$$p(|0\rangle) = \langle 0|\hat{\rho}|0\rangle = \frac{1}{2}, \quad p(|1\rangle) = \langle 1|\hat{\rho}|1\rangle = \frac{1}{2}.$$

Come possiamo notare otteniamo in entrambi i casi la medesima probabilità, se invece andassimo a misurare $|a\rangle$?

$$\begin{aligned}p(|a\rangle) &= \langle a|\hat{P}_a|a\rangle \\ &= \langle a|a\rangle \langle a|a\rangle \\ &= 1.\end{aligned}$$

Per quanto riguarda la matrice densità

$$\begin{aligned} p(|a\rangle) &= \langle a|\hat{\rho}|a\rangle \\ &= \text{Tr}(\hat{\rho}|a\rangle\langle a|) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

In questo caso, misurare in un'altra base ci dà due risultati differenti.

Questo esempio in realtà lo possiamo incontrare, dal punto di vista pratico, se ci addentriamo nello studio dello spin di un elettrone in un atomo (esperimento di Stern-Gerlach) oppure nella trattazione della polarizzazione di un fotone.

In generale noi possiamo scrivere la matrice densità in una base e poi riscriverla in un secondo momento in un'altra base

$$\hat{\rho} = \sum_k \omega_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|,$$

dove

$$\{\omega_k, |\psi_k\rangle\} \quad \text{e} \quad |\psi_k\rangle = \sum_j a_j^k |a_j\rangle.$$

Nella nuova base, la matrice densità sarà

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sum_k \omega_k \left(\sum_j a_j^k |a_j\rangle \right) \left(\sum_i a_i^{*k} \langle a_i| \right) \\ &= \sum_{k,j,i} \omega_k a_j^k a_i^{*k} |a_j\rangle\langle a_i| \end{aligned}$$

per cui gli elementi di matrice saranno

$$\begin{aligned} \rho_{mn} &= \langle a_m|\hat{\rho}|a_n\rangle \\ &= \sum_k \omega_k a_m^k a_n^{*k} \end{aligned}$$

e gli elementi sulla diagonale

$$\rho_{nn} = \sum_k \omega_k |a_n^k|^2$$

1.3.2 POVM: Misura a valori operatoriali positivi

Molti tipi di misurazione, come ad esempio la rivelazione della posizione di un fotone, non possono essere visti come proiezioni perché lo stato dopo la misura viene distrutto. Nel caso considerato, quando misuriamo il fotone esso viene assorbito dal rivelatore e non esiste più. A differenza delle misure proiettive non posso effettuare un'ulteriore misura sullo stesso stato. La proiezione non permette inoltre di distinguere in maniera esatta due stati non ortogonali. Ad esempio presi due stati $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$, se sono tra loro ortogonali sarà facile distinguerli con i proiettori, ma se non sono ortogonali non possiamo distinguerli e gli unici risultati che possiamo dare sono:

- È nello stato $|\psi\rangle$;

- È nello stato $|\phi\rangle$;
- O in qualcos'altro.

Una misura a valori operatoriali positivi (POVM) è una misura i cui valori sono operatori semi-definiti positivi su uno spazio di Hilbert che non richiedono ortogonalità, cioè non soddisfano la terza proprietà che abbiamo visto quando abbiamo introdotto i proiettori: $\hat{P}_i \hat{P}_j = \hat{P}_i \delta_{ij}$. La POVM può essere utile per classificare uno stato con 3 possibili identificazioni (come $|\psi\rangle$, $|\phi\rangle$ o "non so") dove invece una misura proiettiva è inutile.

1.3.3 Cambi di base: stati puri e miscele

Supponiamo di avere una matrice densità $\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ e un'osservabile \hat{A} ($|a_k\rangle$, a_k). Vogliamo valutare il valore di aspettazione di questa osservabile:

$$\begin{aligned}\langle A \rangle &= \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{A}) \\ &= \text{Tr}\left(\sum_{ijk} \rho_{ij} |a_i\rangle\langle a_j| a_k |a_k\rangle\langle a_k|\right) \\ &= \sum_{ik} \rho_{ik} a_k \text{Tr}(|a_i\rangle\langle a_k|) \\ &= \sum_{ik} \rho_{ik} a_k \langle a_k | a_i \rangle \\ &= \sum_k \rho_{kk} a_k\end{aligned}$$

Quindi, solo i $\rho_{kk} = \langle a_k | \rho | a_k \rangle$ sono necessari per calcolare il valore di aspettazione e gli elementi off-diagonal nella nostra rappresentazione sono apparentemente inutili. Tuttavia, gli elementi off-diagonal spesso ci dicono se la matrice corrisponde a uno stato puro o meno. Se abbiamo una matrice di densità non diagonale in una base di un'osservabile, anche se il valore di aspettazione dell'osservabile stessa è dato solo dagli elementi diagonali, se gli elementi off-diagonal sono diversi da zero allora lo stato può essere puro, poiché la matrice diagonalizzata può avere tutte le voci uguali a 0, tranne una uguale a 1. Questi elementi fuori diagonale sono chiamati coerenza della matrice densità. Per esempio, consideriamo la seguente matrice 2×2

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c^* & b \end{pmatrix}$$

I coefficienti c e c^* prendono il nome di **coerenze**, questo perché:

- Se $c = c^* = 0$, allora abbiamo una miscela di stati;
- Se $c, c^* \neq 0$, allora possiamo avere uno stato puro, in quanto la matrice può essere diagonalizzata nella forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che, generalmente, c e c^* seguono una legge di decadimento, per cui scalano come e^{-t/T_1} , il che significa che lo stato sta perdendo la sua purezza al passare del tempo.

Questo è uno dei problemi più importanti quando si lavora con dei sistemi come i qubit, in quanto ne limita il suo utilizzo.

LEZIONE 4 - 14/10/2021

1.4 Sfera di Bloch

Esiste un modo di rappresentare lo stato di un qubit, in maniera grafica, attraverso l'utilizzo della **sfera di Bloch**. Questo espediente è comodo per comprendere che cosa sta avvenendo allo stato di un qubit, lo svantaggio principale riguarda la sua applicabilità, in quanto è possibile usarlo per singoli qubit. Come al solito noi utilizziamo la matrice densità $\hat{\rho}$ piuttosto che la funzione d'onda ψ per descrivere lo stato di un sistema a due livelliⁱⁱⁱ:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix},$$

dove $\rho_{00}, \rho_{11} \in \mathbb{R}$, $\rho_{11} = 1 - \rho_{00}$ e $\rho_{01} = \rho_{10}^*$. A questo punto ridefiniamo gli elementi di $\hat{\rho}$ come

$$\rho_{00} = \alpha, \quad \rho_{11} = 1 - \alpha, \quad \rho_{01} = \beta + i\gamma, \quad \rho_{10} = \beta - i\gamma$$

dove α, β e $\gamma \in \mathbb{R}$.

Se consideriamo l'insieme di matrici dato dall'identità e dalle matrici di Pauli $\{\mathbb{I}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ possiamo riscrivere la matrice densità in una forma particolarmente interessante

$$\hat{\rho} = a\mathbb{I} + \sum_{i=1}^3 c_i \sigma_i,$$

siccome $\text{Tr}(\hat{\rho}) \stackrel{!}{=} 1$, allora dal momento che $\text{Tr}(\sigma_i) = 0$ e $\text{Tr}(\mathbb{I}) = 2$ abbiamo che $a = \frac{1}{2}$.

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \left(\mathbb{I} + \sum_{i=1}^3 p_i \sigma_i \right).$$

Cosa sono i p_i ? Osserviamo che $\text{Tr}(\hat{\rho}\sigma_i) = p_i = \langle \sigma_i \rangle$, cioè corrispondono ai valori di aspettazione della corrispondente matrice di Pauli tracciata insieme alla matrice densità. A questo punto possiamo prendere i p_i come le componenti di un vettore $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ che si trova all'interno della sfera di Bloch come possiamo vedere in Figura 1.1. In particolare notiamo che

- Se $\hat{\rho}$ è **puro**, $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$, dove

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle$$

$\hat{\rho}$ e ψ rappresentano lo stesso stato sulla sfera di Bloch, è situato sulla superficie della sfera;

ⁱⁱⁱNel caso di un qubit, la matrice densità è rappresentata da una matrice 2×2

- Se $\hat{\rho}$ è una **miscela**

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{1+p_z}{2} & \frac{p_x - ip_y}{2} \\ \frac{p_x + ip_y}{2} & \frac{1-p_z}{2} \end{pmatrix}$$

e calcolassimo ρ^2 e poi $\text{Tr}(\rho^2)$ troveremo che

$$\rho^2 = \frac{1}{4} \left(\mathbb{I} + \sum_i p_i \sigma_i + \sum_j p_j \sigma_j + \sum_{ij} p_i p_j \sigma_i \sigma_j \right)$$

$$\text{Tr}(\rho^2) = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} \sum_i p_i^2 = \frac{1}{2} (1 + |\vec{p}|^2)$$

Se $|\vec{p}|^2$ è minore di 1 allora abbiamo una miscela, la sfera che si ottiene da \vec{p} è una sfera all'interno di quella unitaria (stato puro).

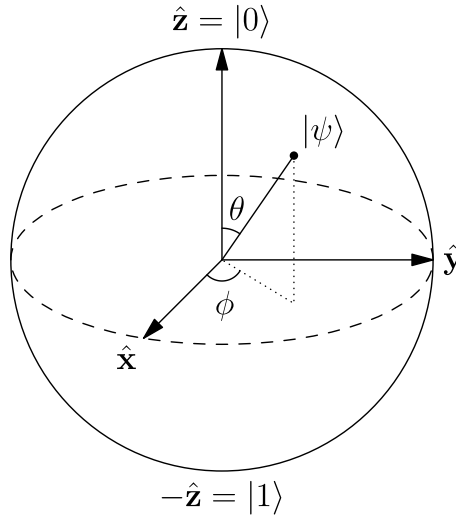


Figura 1.1: Rappresentazione generale di un qubit sulla sfera di Bloch.

1.4.1 Matrice densità termica

Supponiamo di avere $\hat{\rho} = \sum_n \omega_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$, in principio abbiamo molti modi per descrivere il nostro stato da $|\psi_n\rangle$ ognuno con probabilità ω_n . Se il nostro sistema è libero di scambiare energia con l'ambiente abbiamo a che fare con un **sistema aperto**. Dopo un lungo periodo di tempo di interazione, il nostro sistema raggiungerà un equilibrio, cosicché la nostra probabilità per lo stato $|\psi_n\rangle$ sarà

$$\omega_n \equiv \frac{e^{-E_n/k_B T}}{Z},$$

dove E_n è l'energia dello stato $|\psi_n\rangle$ e $Z = \sum_i e^{-E_i/k_B T}$ è la funzione di partizione canonica. Se prendiamo la base $|n\rangle$ tale per cui $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$ abbiamo

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\hat{H}/k_B T}}{Z}, \quad Z = \text{Tr}\left(e^{-\hat{H}/k_B T}\right) = 1, \quad \rho_{mn} = \langle m|\hat{\rho}|n\rangle = \frac{e^{-E_n/k_B T}}{Z} \delta_{mn} \equiv \omega_n.$$

Usando la base computazionale $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, con energie rispettivamente E_0, E_1 , la matrice densità sarà

$$\begin{aligned}\rho &= a_0 |0\rangle\langle 0| + a_1 |1\rangle\langle 1| \\ &= \frac{e^{-E_0/k_B T}}{Z} |0\rangle\langle 0| + \frac{e^{-E_1/k_B T}}{Z} |1\rangle\langle 1| ,\end{aligned}$$

il rapporto tra i due coefficienti è pari a $a_1/a_0 = e^{-\Delta E/k_B T}$ quindi possiamo osservare che se

- $k_B T \gg \Delta E$, $a_1/a_0 \rightarrow 1$ la matrice densità è una miscela. Il sistema sarà portato allo stato massimamente miscelato (al centro della sfera di Bloch).
- $k_B T \ll \Delta E$, $a_1/a_0 \rightarrow 0$, $a_0 \rightarrow 1$ la matrice densità è uno stato puro, poiché il sistema disperde la sua energia nell'ambiente e decade nel suo stato fondamentale.

1.5 Sistemi composti

Utilizziamo sistemi quantistici per studiarne i comportamenti quantistici, per farlo dobbiamo interagire con questi oggetti per misurare qualche loro proprietà, ad esempio sistemi macroscopici, come i rivelatori, interagiscono con sistemi microscopici. Dobbiamo trovare le connessioni che vi sono tra rivelatore e sistema. La terza componente che subentra tra rivelatore e sistema quantistico è l'ambiente, a differenza degli altri due, la sua trattazione è molto complessa per cui rimuoviamo l'ambiente e trattiamo il sistema composto rivelatore e sistema.

Trovando un modo di rimuovere l'ambiente dal nostro sistema composto, consideriamo due sistemi descritti rispettivamente da due spazi di Hilbert \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 . Il sistema composto è dato da $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$. Se $\dim \mathcal{H}_1 = n$ e $\dim \mathcal{H}_2 = m$, allora $\dim \mathcal{H} = n \times m$. Introduciamo l'ultimo postulato della meccanica quantistica

- **V Postulato (Sistemi composti):** Consideriamo un sistema quantistico composto da 2 sottosistemi 1 e 2 con spazi di Hilbert \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 rispettivamente. Lo spazio di Hilbert del sistema totale è dato da^{iv} $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

Se $|\psi\rangle_1 \in \mathcal{H}_1$ e $|\psi\rangle_2 \in \mathcal{H}_2$, allora $|\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 \in \mathcal{H}$, più precisamente se $|n\rangle_1$ e $|m\rangle_2$ sono una base per \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 , allora $|nm\rangle$ è una base per \mathcal{H} .

Quando $n = m = 2$, allora $|nm\rangle = \{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ e $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ è scrivibile come $|\psi\rangle = \sum_{n,m} a_{nm} |nm\rangle$.

Introduciamo gli **stati separabili**, come suggerisce il nome si tratta di stati che possono essere trattati separatamente e si possono combinare le rispettive soluzioni in un secondo momento, infatti

$$\underbrace{|\psi_1\rangle}_{=|0\rangle,|1\rangle} \otimes \underbrace{|\psi_2\rangle}_{=|0\rangle,|1\rangle} = \alpha a |00\rangle + \alpha b |01\rangle + \beta a |10\rangle + \beta b |11\rangle$$

Accanto agli stati, abbiamo gli operatori che lavorano in questo spazio \mathcal{H} , per esempio se $\hat{A} \in L(\mathcal{H}_1)$, $\hat{B} \in L(\mathcal{H}_2)$, allora $\hat{U} = \hat{A} \otimes \hat{B}$. Quest'ultimo operatore agisce nel seguente modo

$$\hat{U} |\psi\rangle = \hat{A} \otimes \hat{B} (|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) = \hat{A} |\psi_1\rangle \otimes \hat{B} |\psi_2\rangle$$

^{iv}Il simbolo " \otimes " indica il **prodotto tensoriale** tra spazi.

Perché ci interessa? Perché questi operatori possono essere associati ad osservabili! Come realizziamo una misura su un sistema composito? Supponiamo di avere

$$\tilde{A} = A \otimes \mathbb{I} \Rightarrow \tilde{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

\hat{A} rappresenta la misura su un sistema di qubit mentre \hat{B} l'identità. In questo caso \hat{A} possiede due proiettori

$$P_A^0 = |0\rangle\langle 0| \quad P_A^1 = |1\rangle\langle 1| ,$$

e vogliamo andare a valutare

$$\langle \tilde{A} \rangle = \langle A \otimes \mathbb{I} \rangle = \langle \psi | A \otimes \mathbb{I} | \psi \rangle = \sum_{ijk} a_{ij}^* a_{kj} \langle i | A | k \rangle ,$$

dove ovviamente $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, $|\psi\rangle = \sum_{ij} a_{ij} |ij\rangle$.

Otteniamo così

$$\langle \tilde{A} \rangle = \sum_{ij} a_{ij}^2 \langle i | A | j \rangle .$$

La funzione d'onda che andiamo a considerare è data da $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ e risulta essere definita come

$$|\psi\rangle = \alpha a |00\rangle + \alpha b |01\rangle + \beta a |10\rangle + \beta b |11\rangle ,$$

da cui otteniamo che

$$\begin{aligned} \hat{A} |0\rangle &= |0\rangle \\ \hat{A} |1\rangle &= -|1\rangle \end{aligned}$$

cioè

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e il suo valore di aspettazione è pari a

$$\langle A \rangle = (\alpha a)^2 + (\alpha b)^2 - (\beta a)^2 - (\beta b)^2 .$$

Nel caso in cui

$$\begin{aligned} A \otimes \mathbb{I} \left[\frac{|00\rangle + |01\rangle}{\sqrt{2}} \right] &\Rightarrow |00\rangle, |01\rangle \quad \text{sono stati separabili} \\ A \otimes \mathbb{I} \left[\frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} \right] &\Rightarrow |01\rangle, |10\rangle \quad \text{sono stati entangled} \end{aligned}$$

1.5.1 Matrice densità ridotta

Se abbiamo uno spazio di Hilbert \mathcal{H}_A e misuriamo l'osservabile \hat{A} (a_k , $|a_k\rangle$), abbiamo una probabilità di ottenere il risultato a_k pari a

$$p(a_k) = \text{Tr}(|a_k\rangle\langle a_k| \rho) = \text{Tr}(P_{a_k} \rho) .$$

Altre informazioni che possiamo ottenere sono

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(A \rho) ,$$

dove

$$\rho \rightarrow \frac{P_{a_k} \rho P_{a_k}}{\sqrt{\text{Tr}\{P_{a_k} \rho\}}},$$

questo discorso è valido per un qubit. Supponiamo di considerare ora un qubit connesso a un rivelatore, ambiente, ... In questo caso lo spazio di Hilbert è dato da $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, in questo caso la matrice densità ρ^{AB} è un operatore appartenere a questo spazio. Vogliamo sapere se possiamo ottenere informazioni sul sottospazio \mathcal{H}_A , ignorando completamente \mathcal{H}_B , la risposta è affermativa e lo si fa nel seguente modo

$$\rho^A = \text{Tr}_B(\rho^{AB}),$$

questa quantità prende il nome di **matrice densità ridotta**. Cerchiamo di formalizzare meglio questo risultato.

Siano $A : \mathcal{H}_A \rightarrow \mathcal{H}_A$ e $B : \mathcal{H}_B \rightarrow \mathcal{H}_B$ due operatori. La loro combinazione è definita come $A \otimes B : \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \rightarrow \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, la **traccia parziale** è data da

$$\begin{aligned} \text{Tr}_A : L(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) &\rightarrow L(\mathcal{H}_B) \\ \text{Tr}_B : L(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) &\rightarrow L(\mathcal{H}_A). \end{aligned}$$

Consideriamo il seguente esempio

Esempio 1.3. Sia $\rho^{AB} = \rho \otimes \sigma$, vogliamo valutare la traccia parziale sul sottospazio \mathcal{B} , in questo caso

$$\rho^A = \text{Tr}_B(\rho^{AB}) = \text{Tr}_B(\rho \otimes \sigma) = \text{Tr}(\sigma)\rho = \rho$$

questo per quanto riguarda **stati separabili**, ma in generale non è sempre vero! Infatti supponiamo di considerare

$$\rho = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \frac{\langle 00| + \langle 11|}{\sqrt{2}}$$

se eseguiamo la traccia parziale sul sottospazio \mathcal{H}_2 , avremmo che

$$\rho_1 = \text{Tr}_2 \rho = \frac{\mathbb{I}}{2}$$

In questo caso, abbiamo sì che $\text{Tr}(\rho_1) = 1$, ma $\text{Tr}(\rho_1^2) = \frac{1}{2}$, cioè ρ_1 è una miscela di stati!

LEZIONE 5 - 21/10/2021

1.6 Interazione con l'ambiente

Consideriamo un qubit interagire con l'ambiente. Essendo il qubit un sistema non chiuso, non possiamo descrivere la sua evoluzione temporale come sola evoluzione del qubit. Bisognerà allora tenere in conto della sua interazione con l'ambiente e per farlo possiamo sfruttare la **matrice densità**. L'equazione del moto per la matrice densità, chiamata **equazione di Liouville-von Neumann**, segue direttamente dall'equazione di Schrödinger:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt} (p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|) = \sum_j p_j \frac{1}{i\hbar} \left(\hat{H} |\psi_j\rangle\langle\psi_j| - |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \hat{H} \right) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}]. \quad (1.6.1)$$

L'evoluzione descritta dall'equazione (1.6.1) è unitaria e la sua soluzione può essere scritta come

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t)\hat{\rho}(0)\hat{U}^\dagger(t).$$

Tuttavia, questo processo descritto dalla (1.6.1) non descrive alcun cambiamento sulla sua purezza, infatti quest'ultima risulta essere preservata:

$$\hat{\xi}(t) = \text{Tr}(\hat{\rho}(t)^2) = \text{Tr}(\hat{U}(t)\hat{\rho}(0)\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t)\hat{\rho}(0)\hat{U}^\dagger(t)) = \text{Tr}(\hat{\rho}(0)^2) = \hat{\xi}(0)$$

Questo significa che l'evoluzione di uno stato puro in una miscela di stati, includendo il processo di misurazione, non può essere descritto dalla (1.6.1) ed è un processo essenzialmente non unitario.

Per risolvere questo aspetto l'hamiltoniana deve includere più termini

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_E + \hat{H}_I,$$

essi sono rispettivamente l'hamiltoniana di sistema, dell'ambiente e di interazione tra sistema e ambiente. Se assumiamo, come è ragionevole, che il sistema non abbia alcun effetto sull'ambiente e che l'hamiltoniana di interazione sia piccola (e quindi possiamo trattarla con la teoria perturbativa) possiamo facilmente studiare l'evoluzione della matrice densità nella rappresentazione d'interazione

$$\frac{d\hat{\rho}_{int}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_{intI}(t), \hat{\rho}_{int}(t)],$$

e

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}(-\infty) + \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^t dt' [\hat{H}_I(t'), \hat{\rho}(t')],$$

dove, supponendo che non solo inizialmente il sistema e l'ambiente fossero statisticamente indipendenti l'uno dall'altro, ma rimarranno tali, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(-\infty) &= \hat{\rho}_S(-\infty) \otimes \hat{\rho}_E \\ \hat{\rho}(t) &= \hat{\rho}_S(t) \otimes \hat{\rho}_E.\end{aligned}$$

A questo punto, possiamo tracciare la matrice densità sull'ambiente e ottenere una matrice densità ridotta per il sistema

$$\text{Tr}_E \hat{\rho}(t) = \hat{\rho}_S(t)$$

Tornando alla rappresentazione di Schrödinger, svolgendo un paio di conti e assunzioni che non stiamo qui a discutere, otteniamo una **master equation** nella forma di **Lindblad**

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] + \sum_a (2L_a\hat{\rho}L_a^\dagger - L_a^\dagger L_a\hat{\rho} - \hat{\rho}L_a^\dagger L_a) \quad (1.6.2)$$

Cosa rende l'equazione (1.6.2) così importante è il fatto che modelli l'evoluzione non unitaria della matrice densità del sistema. Lo stesso comportamento non potrebbe essere descritto dalla nostra equazione iniziale (1.6.1) per l'intero insieme: sistema più ambiente.

Esempio 1.4 (Evoluzione non unitaria di un qubit: rilassamento e sfasamento). *Supponiamo di considerare un sistema i cui stati siano $|0\rangle$ e $|1\rangle$. L'hamiltoniana di riferimento per questo sistema è*

$$\hat{H}_S = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}$$

Utilizzando la rappresentazione di interazione, possiamo scrivere la **master equation** come

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \sum_a (2L_a\hat{\rho}L_a^\dagger - L_a^\dagger L_a\hat{\rho} - \hat{\rho}L_a^\dagger L_a) \quad (1.6.3)$$

a questo punto possiamo considerare i primi tre termini degli operatori di Lindblad:

$$L_1 = L_1^\dagger = \sqrt{\gamma}\sigma_+\sigma_- = \sqrt{\gamma} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \sqrt{\frac{\Gamma}{2}}\sigma_- = \sqrt{\frac{\Gamma}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_2^\dagger = \sqrt{\frac{\Gamma}{2}}\sigma_+ = \sqrt{\frac{\Gamma}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_3 = \sqrt{\frac{\Gamma}{2}}\sigma_+ = \sqrt{\frac{\Gamma}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_3^\dagger = \sqrt{\frac{\Gamma}{2}}\sigma_- = \sqrt{\frac{\Gamma}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sostituendo il primo in (1.6.3) otteniamo

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma\rho_{01} \\ -\gamma\rho_{10} & 0 \end{pmatrix}$$

che integrata

$$\hat{\rho}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{00}(0) & \rho_{01}(0)e^{-\gamma t} \\ \rho_{10}(0)e^{-\gamma t} & \rho_{11}(0) \end{pmatrix}$$

I termini diagonali non vengono affatto modificati, quindi questa scelta di L_1 realizza quello che viene chiamato uno **sfasamento**. L'equazione ottenuta può essere considerata come un modello del processo di misura, in cui lo stato $|0\rangle$ o $|1\rangle$ del sistema è osservato, con $\tau_\gamma = 1/\gamma$ che fornisce il tasso di collasso dello stato.

Per quanto riguarda L_2^\dagger ed L_3 , otteniamo

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \begin{pmatrix} -\Gamma\rho_{00} & -(\Gamma/2)\rho_{01} \\ -(\Gamma/2)\rho_{10} & \Gamma\rho_{00} \end{pmatrix}$$

con soluzione

$$\hat{\rho}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{00}(0)e^{-\Gamma t} & \rho_{01}(0)e^{-(\Gamma/2)t} \\ \rho_{10}(0)e^{-(\Gamma/2)t} & 1 - \rho_{00}(0)e^{-\Gamma t} \end{pmatrix}$$

e in maniera simile per L_2 e L_3^\dagger

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \begin{pmatrix} \Gamma\rho_{11} & -(\Gamma/2)\rho_{01} \\ -(\Gamma/2)\rho_{10} & -\Gamma\rho_{11} \end{pmatrix}$$

con soluzione

$$\hat{\rho}(t) = \begin{pmatrix} 1 - \rho_{11}(0)e^{-\Gamma t} & \rho_{01}(0)e^{-(\Gamma/2)t} \\ \rho_{10}(0)e^{-(\Gamma/2)t} & \rho_{11}(0)e^{-\Gamma t} \end{pmatrix}$$

Oltre allo **sfasamento**, queste equazioni mostrano anche il **rilassamento** o **eccitamento** degli elementi diagonali. Fisicamente, ciò significa che Lindblads L_2 , L_3 descrivono

*i processi concorrenti di trasmissione di energia tra il sistema e l'ambiente. Si noti che l'evoluzione delle matrici densità ricavate portano infine a uno stato puro, a un auto-stato dell'hamiltoniana del sistema. Affinché il sistema si rilassi in uno stato misto, l'equazione principale deve includere entrambi i termini che indicano uno **sfasamento** e un'eccitazione o **rilassamento**, con pesi appropriati. Se includiamo tutte gli operatori di Lindblad, la soluzione dell'equazione principale avrà la forma*

$$\hat{\rho}(t) = \begin{pmatrix} \overline{\rho_{00}} + (\rho_{00}(0) - \overline{\rho_{00}})e^{-\Gamma t} & \overline{\rho_{01}}(0)e^{-(\Gamma/2+\gamma)t} \\ \overline{\rho_{10}}(0)e^{-(\Gamma/2+\gamma)t} & \overline{\rho_{11}} + (\rho_{11}(0) - \overline{\rho_{11}})e^{-\Gamma t} \end{pmatrix}$$

dove i valori stazionari $\overline{\rho_{00}} + \overline{\rho_{11}} = \rho_{00}(0) + \rho_{11}(0) = 1$ sono le eventuali probabilità di occupazione dei livelli. Se il sistema si rilassa verso l'equilibrio ad una certa temperatura, allora $\rho_{11}/\rho_{00} = \exp[-(E_1 - E_0)/k_B T]$,

In questo contesto possiamo definire il **tempo di coerenza**, che risulta essere caratterizzato da:

- **Relaxation time:** $\frac{1}{T_1} = \frac{\Gamma}{2}$
- **Dephasing time:** $\frac{1}{T_2} = \frac{\Gamma}{2} + \gamma$

Quando si realizza un qubit, è importante andare a misurare T_1 e T_2 , così da caratterizzare al meglio il nostro sistema a due livelli.

Capitolo 2

Misurazioni

Abbiamo già introdotto il concetto di misura proiettiva e di misura a valori operatoriali positivi, ma avevamo sempre immaginato di agire su un grande insieme di stati uguali. Al contrario, adesso, ci concentreremo su misure di singoli oggetti, come può essere un qubit. Lo strumento per misurare un singolo oggetto è, chiaramente, il fotone. Dal momento che esso può essere descritto sia come particella che come onda, più o meno localizzata, potremo studiarne la dispersione tramite il principio di indeterminazione di Heisenberg:

Definizione 2.1 (Principio di indeterminazione di Heisenberg). *Dati due osservabili \hat{A} e \hat{B} , il valore d'aspettazione della deviazione standard degli stessi su di un particolare stato $|\psi\rangle$ è limitato dalla relazione:*

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} \langle \psi | [A, B] | \psi \rangle \quad (2.0.1)$$

Da questa equazione possiamo ricavare:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Spesso viene scritta e associata al principio di indeterminazione anche una **relazione di indeterminazione energia-tempo** che, tuttavia, non rientra nella casistica prevista dal principio di indeterminazione di Heisenberg (poiché non esiste alcun operatore "tempo").

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

Le relazioni che abbiamo scritto fino ad ora descrivono limiti intrinseci nella preparazione dei sistemi quantistici, ma sono chiaramente connessi a un'incertezza relativa alle misurazioni. Vediamo ora un esempio per mostrare il collegamento fra incertezza nella preparazione e incertezza nella misura.

2.1 Microscopio di Heisenberg

Microscopio di Heisenberg: Immaginiamo di avere un elettrone di cui vogliamo misurare la posizione. Abbiamo bisogno di almeno un fotone per visualizzare l'elettrone e dobbiamo fare in modo che esso sia deflesso dall'elettrone all'interno del cono ad angolo θ (in modo da incidere sulla lente del nostro microscopio).

A seconda dell'angolo di scattering dell'elettrone esso acquisirà un momento (più alta sarà l'energia del fotone più alto sarà il momento finale dell'elettrone). Abbiamo quindi quella che viene chiamata **back action**: misurando un oggetto quantistico tramite un altro oggetto quantistico abbiamo influenzato e modificato il sistema stesso. L'ottica classica ci fornisce una legge di diffrazione tale per cui:

$$\sin \theta \approx \frac{\lambda}{D}$$

Siccome il fotone è un'onda, il microscopio arriva a ottenere la posizione dell'elettrone con un'incertezza $\Delta x = \frac{\lambda}{\sin \theta}$ per cui si avrà:

$$-\frac{h}{\lambda} \sin \theta \leq p_x \leq \frac{h}{\lambda} \sin \theta$$

Da cui discende direttamente che: $\Delta p_x = \frac{2h}{\lambda} \sin \theta$. Dunque se voglio misurare solamente la posizione posso modificare λ per avere una precisione arbitraria, ma non posso misurare in contemporanea il momento poiché:

$$\Delta p_x \Delta x = h$$

Che è una relazione evidentemente molto simile a quella ricavata dal principio di indeterminazione di Heisenberg: un'incertezza "alla Heisenberg" sulla sonda (il nostro fotone) ci porta a una necessaria incertezza sull'osservabile finale.

LEZIONE 6 - 26/10/2021

2.2 Limiti quantistici standard

Il punto fondamentale dell'esperimento del microscopio di Heisenberg è che l'azione stessa di misurare un sistema quantistico finisce per perturbarlo irrimediabilmente (si sottolinea che una *back action* è sempre non reversibile). Cerchiamo adesso di studiare quale possa essere la massima precisione raggiungibile in una misura.

Definizione 2.2 (Limiti quantistici). Per limite quantistico si intende generalmente un qualsiasi limite nella precisione di una misura. Si parla di **limiti assoluti** nel caso siano espressione del principio di indeterminazione di Heisenberg: solo questi sono i limiti ultimi codificati nei postulati della Meccanica Quantistica.

Si parla, invece, di **limiti quantistici standard** nel caso che le limitazioni siano legate agli effettivi metodi usati nella preparazione del sistema e nella sua misurazione.

Deve essere chiaro che è talvolta possibile migliorare i limiti quantistici standard, mentre è impossibile migliorare i limiti quantistici assoluti. Allo stesso tempo possiamo usare i limiti standard come limite (per lo meno come ordine di grandezza) al quale un sistema macroscopico inizia a mostrare la sua natura quantistica; è chiaro che per raggiungerli dovremo diminuire il più possibile ogni fluttuazione di tutte le forze classiche (in particolare saranno problematiche quelle relative all'energia termica). Vediamo ora qualche esempio di limiti quantistici standard.

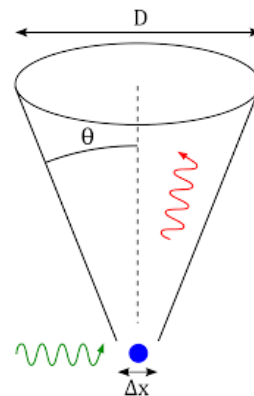


Figura 2.1: Esperimento pensato del microscopio di Heisenberg.

Esempio 2.1 (Misura di un momento con un microscopio di Heisenberg). *Volendo misurare il momento di una particella in moto (o la sua velocità o la sua traiettoria) dobbiamo effettuare una misura in due differenti istanti temporali. Ad ogni misura corrisponderà una necessaria back action.*

A tempo $t=0$ misuriamo la posizione della particella con errore Δx_{m_1} e con una corrispondente perturbazione del momento:

$$\Delta P_1 = \frac{\hbar}{2(\Delta x_{m_1})}$$

Dopo un certo tempo τ misuriamo nuovamente la posizione della particella con un'incertezza intrinseca Δx_{m_2} . A questa incertezza si aggiunge quanto deriva dalla perturbazione precedentemente calcolata:

$$\Delta x_{add} = \frac{\Delta P_1 \tau}{m}$$

Siccome il calcolo del momento è effettuato tramite $P = m \frac{x_2 - x_1}{\tau}$, ne risulta un errore derivante da tutte e tre le componenti di incertezza calcolate:

$$\Delta P = \frac{m}{\tau} [(\Delta x_{m_1})^2 + (\Delta x_{m_2})^2 + (\Delta x_{add})^2]^{\frac{1}{2}}$$

Se si vuole raggiungere la migliore precisione possibile è evidente che non è sufficiente minimizzare Δx_{m_1} perché in tal modo aumenteremo Δx_{add} . Si può facilmente ricavare che la scelta ottimale dei parametri è quella che permette l'uguaglianza $\Delta x_{m_1} = \Delta x_{add}$. Questa scelta porta, comunque a:

$$\Delta P \geq \Delta p_{SQL} \equiv \sqrt{\frac{\hbar m}{2\tau}}$$

Allo stesso modo posso ricavare:

$$\Delta x_{SQL} = \sqrt{\frac{\hbar \tau}{2m}}$$

Esempio 2.2 (Energia di un oscillatore armonico). *Per un oscillatore armonico quantistico si può calcolare il limite quantistico (E è l'energia media, m la massa e ω_m è l'auto-frequenza dell'oscillatore):*

$$\begin{aligned} \Delta X_{SQL} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_m}} \\ \Delta E_{SQL} &= \sqrt{\hbar\omega_m E} \end{aligned}$$

Generalmente per studiare la quantizzazione di un oscillatore armonico scriviamo il limite termico in relazione all'energia di punto zero dell'oscillatore:

$$KbT \leq \frac{\hbar\omega}{2} \quad (2.2.1)$$

Quest'equazione è valida nel caso in cui stiamo considerando tempi di misura τ molto maggiori del tempo di rilassamento τ^ , ma nel caso in cui $\tau \ll \tau^*$ il sistema e l'ambiente*

scambiano casualmente energie molto minori di KbT perciò il limite espresso nell'equazione 2.2.1 è da correggere. Un'analisi classica delle forze casuali legate all'ambiente dell'oscillatore (Nyquist forces) ci permette di scrivere:

$$\Delta X_{th} = \sqrt{\frac{KbT\tau}{m\omega^2\tau^*}}$$

E inserendo il limite quantistico standard si arriva a:

$$\frac{2KbT\tau}{\omega\tau^*} \leq \hbar$$

E quest'ultimo è un criterio soddisfatto a temperature ben maggiori che quelle espresse nel primo limite.

Dopo aver introdotto il concetto dei limiti quantistici standard, possiamo chiederci quali possono essere gli strumenti per avvicinarci a tali limiti ed eventualmente a superarli. Ci sono due possibilità:

- migliorare i metodi di preparazione e misura del sistema quantistico, in modo da ridurre i limiti stessi;
- utilizzare misure quantistiche senza demolizione.

Vediamo ora un esempio che vada ad analizzare il primo caso. Supponiamo di avere un oscillatore meccanico su cui viene applicata una forza esterna. Per il teorema dell'impulso abbiamo:

$$F\tau = \Delta P$$

Se F è sufficientemente piccola allora il sistema si comporterà come un oscillatore quantistico.

Supponendo che il contributo termico all'energia sia dominante, avremo $\langle E \rangle = \frac{KbT}{2}$ e, affinché il momento possa essere rivelabile dovremo avere:

$$\frac{P^2}{2m} \geq \langle E \rangle \longleftrightarrow \tau F \geq P = \sqrt{mKbT}$$

Considerando il principio di indeterminazione di Heisenberg $\Delta x \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}$ per il caso di un oscillatore armonico della forma $\langle E \rangle = \frac{\langle P^2 \rangle}{2m} + k \frac{\langle x^2 \rangle}{2}$, possiamo scrivere:

$$\langle E \rangle \geq \frac{(\Delta P)^2}{2m} + k \frac{(\Delta x)^2}{2} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{2\Delta x} \right)^2 + k \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^2 \quad (2.2.2)$$

Dove abbiamo usato, per x e in modo analogo per p :

$$\langle x^2 \rangle = \langle x \rangle^2 + (\Delta x)^2 = 0 + (\Delta x)^2$$

E l'equazione 2.2.2 è minimizzata per $\Delta x = \sqrt{\frac{k}{2m\omega}}$ che porta a un errore sull'energia:

$$\Delta E = \frac{\hbar\omega}{2}$$

Tuttavia, se siamo interessati a misurare il momento applicato dalla nostra forza esterna, non siamo interessati a minimizzare l'errore sull'energia: possiamo preparare il sistema in modo da minimizzare il più possibile ΔP , trascurando Δx .

Generalmente, tuttavia, le sonde che usiamo per misurare sono sensibili a entrambe le variabili (che siano il momento e la posizione o altre): dovremo cercare di limitarci solo a un osservabile, in modo da sfruttare il principio di indeterminazione stesso per raggiungere un'alta precisione nella misura d'interesse.

Esempio 2.3 (Limite Shot-Noise). *Assumiamo di avere un interferometro di Michelson.*

Avremo una variazione della fase $\Delta\phi = 0$ in uno dei due rami, mentre nell'altro avremo $\Delta\phi = \pi$. Vorremmo poter contare il numero di fotoni nei due rami per misurare la differenza di fase di un flusso. Dal momento che stiamo considerando un esperimento di conteggio, l'incertezza è descritta dalla legge di Poisson e va come $\frac{1}{\sqrt{N}}$.

Posso aumentare N per migliorare la mia precisione, ma solitamente non posso avere un numero infinito di fotoni e questo mi porta a un altro limite quantistico¹.

2.3 Misurazioni senza demolizione

Abbiamo introdotto in sezione 1.3 le misurazione proiettive di Von Neumann per cui, dato un osservabile A con autovalori e autovettori a_n , $|a_n\rangle$, la probabilità di ottenere un certo autovalore è:

$$p(a_n) = \text{Tr}(|a_n\rangle \langle a_n| \rho) = \langle a_n | \rho | a_n \rangle$$

Equazione che porta a $\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A)$. Una singola misurazione di A porta inevitabilmente al collasso della funzione d'onda che descrive lo stato e, per questo, ogni conseguente misurazione (eseguita immediatamente dopo la prima) non può che portare allo stesso risultato (è una **misura esatta**). Dunque, in questo caso possiamo ripetere la misura infinite volte, per lo meno idealmente: si parla di **quantum non demolition (QND) measurement** (misurazione senza demolizione). Abbiamo visto, d'altra parte, che non tutti i sistemi permettono una misura simile, basti pensare all'esperimento del microscopio di Heisenberg dove la misura distrugge totalmente il sistema (poiché viene ceduto del momento all'elettrone).

Esempio 2.4 (Misura non esatta). *Prendiamo ad esempio il famoso esperimento di Stern e Gerlach. Prima di applicare un campo magnetico lo stato è dato da:*

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) |\xi_0\rangle$$

La funzione d'onda così scritta è, evidentemente, separabile nella sua parte spaziale ($|\xi\rangle$) e di spin. Tuttavia, dopo l'applicazione del campo magnetico, diventa:

$$|\psi_f\rangle = \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle |\xi_+\rangle + |\downarrow\rangle |\xi_-\rangle)$$

In questo stato, al contrario di prima, la parte di spin e di posizione sono intrecciate (entangled).

¹Nel caso di esperimenti sulle onde gravitazionali, ad esempio, il problema dell'aumento del fotoni è estremamente rilevante poiché diventa necessaria un'eccessiva potenza per generarli.

Possiamo avere, inizialmente:

$$\langle \psi_i | \sigma_x | \psi_i \rangle = 1$$

Se la distanza fra il magnete e lo schermo finale è sufficientemente alta allora le distribuzioni spaziali finali $|\xi_+\rangle$ e $|\xi_-\rangle$ saranno fra loro ortogonali e $\langle \psi_f | \sigma_x | \psi_f \rangle = 0$, ma nel caso generico avremo (il campo magnetico è orientato lungo l'asse z):

$$\langle \psi_f | \sigma_x | \psi_f \rangle = \frac{1}{2} (\langle \xi_- | \xi_+ \rangle + \langle \xi_+ | \xi_- \rangle)$$

Nel caso limite ortogonale, dunque, la misura distrugge completamente la coerenza del sistema iniziale sullo spin. Nel caso generico, che è più realistico, il collasso è solo parziale e, dunque, una seconda misura non deve necessariamente avere lo stesso risultato della prima.

LEZIONE 7 - 28/10/2021

Una delle caratteristiche della misurazione proiettiva di Von Neumann, che abbiamo già visto, è che sono ortogonali:

$$P_i P_j = P_i \delta_{ij}$$

E questo fondamentalmente ci dice che un risultato esclude l'altro. Una tale proprietà è estremamente ideale (per questo la misura è detta "esatta"): in un caso reale, come quando descritto nell'esperimento di Sten e Gerlach, la misura è detta "approssimata" poiché non è rispettata la condizione di ortogonalità.

In una misura rumorosa o approssimata abbiamo anche una *back action* poco definita. Proviamo a vedere questo concetto più formalmente: supponiamo di avere un osservabile A con autostati $|a_k\rangle$ e autovalori a_k . Misurando, non troviamo uno degli autovalori di \hat{A} , ma \tilde{a}_k che è collegato alla precisione della misura a partire da una probabilità condizionata: $P(\tilde{a}_k | a_n)$. Dunque se preparo il mio stato iniziale con una matrice densità ρ_{init} , la probabilità di misurare un certo autovalore è data da:

$$P(a_k) = \langle a | \hat{\rho}_{init} | a_k \rangle = \text{Tr}(|a_k\rangle \langle a_k| \hat{\rho}_{init})$$

Data questa probabilità, posso cercare $P(\tilde{a}_k)$:

$$P(\tilde{a}_l) = \sum_k P(\tilde{a}_l | a_k) P(a_k)$$

E questo può essere scritto in termini di un nuovo operatore M (*Measurement*):

$$\begin{aligned} P(\tilde{a}_k) &= \sum_k P(\tilde{a}_l | a_k) \text{Tr}(|a_k\rangle \langle a_k| \hat{\rho}_{init}) = \\ &= \text{Tr} \left(\sum_k P(\tilde{a}_l | a_k) |a_k\rangle \langle a_k| \hat{\rho}_{init} \right) = \\ &= \text{Tr} \left(\hat{M}(\tilde{a}_l) \hat{\rho}_{init} \right) \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

E abbiamo definito M :

$$\hat{M}(\tilde{a}_l) = \sum_k P(\tilde{a}_l | a_k) |a_k\rangle \langle a_k|$$

Una proprietà fondamentale di questo nuovo operatore M è:

$$[\hat{M}(\tilde{a}_i), \hat{M}(\tilde{a}_j)] = 0$$

Ovvero l'operatore M per due diversi valori \tilde{a}_k commuta, in quanto condivide gli stessi autostati (poiché in M è presente la "decomposizione di unità" data da $\sum |a_k\rangle \langle a_k|$). Possiamo anche esprimere al contrario questa proprietà: ogni decomposizione di unità di operatori che autocommutano rappresenta l'operatore misura per un certo osservabile. Vogliamo ora studiare la *back action* relativa a una misura approssimata. Se partiamo da una matrice densità ρ_{init} e misuriamo lo stato $|\tilde{a}_k\rangle$ possiamo scrivere la matrice densità finale tramite l'introduzione del simil-proiettore $\hat{\Omega}$ (in analogia a quanto visto per le misurazioni esatte)ⁱⁱ:

$$\hat{\rho}(\tilde{a}_k) = \frac{1}{P(\tilde{a}_k)} \hat{\Omega}_k \hat{\rho}_{init} \hat{\Omega}_k^\dagger \quad (2.3.2)$$

Usando la definizione nell'equazione 2.3.1 e la proprietà di tutte le matrici densità per cui la loro traccia è unitaria si arriva all'uguaglianza:

$$\hat{M}(\tilde{a}_k) = \hat{\Omega}_k^\dagger \hat{\Omega}_k$$

Usando la tecnica della *left polar decomposition* possiamo riscrivere Ω tramite l'introduzione di un operatore unitario:

$$\hat{\Omega}_k = \hat{U}(\tilde{a}_k) \sqrt{\hat{M}(\tilde{a}_k)}$$

Chiaramente con:

$$\sqrt{\hat{M}(\tilde{a}_k)} = \sum_k \sqrt{P(\tilde{a}_l | a_k)} |a_k\rangle \langle a_k|$$

Immediatamente otteniamo la proprietà per cui \hat{A} e $\sqrt{\hat{M}}$ condividono gli stessi autostati e, dunque:

$$[\sqrt{\hat{M}}, \hat{A}] = 0$$

In questa rappresentazione, possiamo considerare la misurazione come un processo a doppio step:

1. il primo step considera il rumore (l'approssimazione) della misura:

$$\hat{\rho}'(\tilde{a}_k) = \frac{1}{P(\tilde{a}_k)} \sqrt{\hat{M}(\tilde{a}_k)} \hat{\rho}_{init} \sqrt{\hat{M}(\tilde{a}_k)} \quad (2.3.3)$$

2. il secondo step considera l'operatore unitario \hat{U} :

$$\hat{\rho}(\tilde{a}_k) = \hat{U}(\tilde{a}_k) \hat{\rho}'(\tilde{a}_k) \hat{U}^\dagger(\tilde{a}_k)$$

Il primo step, è importante sottolinearlo, lascia invariate le probabilità di misura dell'osservabile (poiché \hat{A} commuta con $\sqrt{\hat{M}}$).

Il secondo step considera la perturbazione unitaria della *back action*; se vale che \hat{A} e \hat{U} commutano (proprietà generalmente non vera), allora la misurazione lascia il sistema completamente imperturbato. Questo significa che la probabilità di ottenere un certo autostato o autovalore è invariata anche dopo il secondo step: si parla di **quantum nondemolition measurment** (misure senza demolizione).

ⁱⁱDimostrazione alla sezione 2.4

Definizione 2.3 (QND: Quantum NonDemolition measurement). *Una QND è un tipo speciale di misurazione di un sistema quantistico nel quale l'incertezza di misura per un certo osservabile non cresce con la normale evoluzione del sistema. Questa proprietà necessita che la misura sia in grado di preservare l'integrità del sistema e stabilisce dei vincoli sulla relazione fra "operatore di misura" e Hamiltoniana del sistema.*

Questi vincoli possono essere espressi, considerando (solamente a livello matematico) la misurazione come un processo a due step, tramite la proprietà commutazione di un operatore unitario di perturbazione con l'osservabile in questione.

LEZIONE 8 - 2/11/2021

2.4 Misurazioni indirette

Per ora abbiamo analizzato il problema di *cosa* avviene al sistema successivamente a una misurazione. Tuttavia non abbiamo ancora cercato di spiegare *come* avviene una misurazione. Generalmente, fra l'osservatore e il sistema quantistico, vi è un cosiddetto dispositivo classico di misura (*classical measuring device*)ⁱⁱⁱ. Le misurazioni in cui un dispositivo di misura classico interagisce propriamente con l'oggetto quantistico studiato vengono chiamate **misure dirette**. Chiaramente, in una misura di questo genere, stiamo utilizzando un sistema a molti gradi di libertà che vanno inevitabilmente a perturbare fortemente il sistema (abbiamo perturbazioni ben più grandi di quelle previste dai limiti di Heisenberg). Inoltre è raro che il sistema modifichi unicamente il grado di libertà studiato: con ogni probabilità porterà a una grossa perturbazione su una vasta gamma di osservabili. Per questo si tende a preferire quelle che vengono chiamate **misure indirette**. Tali misurazioni sfruttano una sonda quantistica (*quantum probe*) per mediare l'interazione sistema classico - sistema quantistico. Abbiamo un processo a due fasi:

1. la sonda quantistica interagisce con l'oggetto da misurare e fra di essi si stabilisce una correlazione;
2. la sonda viene rilevata e misurata direttamente da un dispositivo classico.

La sonda viene preparata in modo adeguato quando è ancora del tutto sconnessa al sistema e ha, in particolare, un osservabile detto **pointer observable** che ha un legame con l'osservabile d'interesse nel sistema quantistico: ovvero c'è un rapporto (idealmente 1:1) fra i valori dei due osservabili. Durante l'interazione sonda - sistema, d'altro canto, dobbiamo aspettarci che i due sistemi diventino *entangled* e questo limiterà parzialmente la nostra misura finale: benché possiamo pensare di avere alte perturbazioni nella seconda fase del processo (perché non ci interessa conservare la sonda) dovremo limitarci per non perturbare troppo il sistema originale. Per raggiungere un'alta precisione nel processo di misura cercheremo di rispettare sempre due semplici condizioni:

- il secondo step della misurazione deve avvenire solo quando il primo risulta completato;
- il secondo step non deve contribuire significativamente all'errore totale della misura.

ⁱⁱⁱEsempi di dispositivi di questo tipo sono le foto-emulsioni, la camera a nebbia di Wilson etc. etc.

Se seguiamo queste regole, dunque, le uniche fonti di errore nella misura e le sole perturbazioni del sistema saranno quelle relative a incertezze intrinseche al processo di preparazione della sonda^{iv}. Analizziamo, dunque, il processo di misura. Abbiamo due differenti

sistemi quantistici (la sonda e l'oggetto studiato) descritti dalle rispettive matrici densità $\hat{\rho}_P$ e $\hat{\rho}_{INIT}$. L'evoluzione di entrambe può essere descritta introducendo $\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$ dove \hat{H} è l'hamiltoniana totale del sistema ($\hat{H} = \hat{H}_{probe} + \hat{H}_{obj} + \hat{H}_{interaction}$):

$$(\hat{\rho}_P \hat{\rho}_{init})' = \hat{U}(t) \hat{\rho}_P \hat{\rho}_{init} \hat{U}^\dagger(t)$$

Abbiamo detto che il processo di misurazione non è unitario, ma a questo punto la non-unitarietà è tutta contenuta nella fase di interazione fra sonda e strumentazione di misura. Lo stato finale della sonda, dopo l'interazione, è dato dalla seguente formula:

$$\hat{\rho}'_{probe} = \text{Tr}_{obj} \left(\hat{U} \hat{\rho}_{probe} \hat{\rho}_{int} \hat{U}^\dagger \right)$$

Solo a questo punto utilizziamo una misura proiettiva sulla sonda. Misuriamo il *pointer observable* $P\tilde{a}$ nello spazio della sonda che è collegato con l'osservabile A nello spazio dell'oggetto studiato. Avremo l'autostato dell'operatore puntatore: $|\tilde{a}\rangle$ che corrisponderà all'autovalore (e rispettivo autostato) \tilde{a} per l'oggetto. La probabilità di avere un certo autovalore sarà:

$$P(\tilde{a}) = \text{Tr} \left(|\tilde{a}\rangle \langle \tilde{a}| \hat{\rho}'_{probe} \right)$$

E la traccia che scriviamo qui è una traccia totale che opera nello spazio della sonda. Possiamo riscrivere questa equazione:

$$P(\tilde{a}) = \text{Tr} \left(\hat{\Pi}(\tilde{a}) \rho_{init} \right)$$

Dove, a questo punto, la traccia opera solo sullo spazio dell'oggetto e abbiamo introdotto l'operatore $\hat{\Pi}$ (anch'esso opera sullo spazio dell'oggetto) che definiamo come:

$$\hat{\Pi}(\tilde{a}) = \text{Tr}_{probe} \left(\hat{U}^\dagger |\tilde{a}\rangle \langle \tilde{a}| \hat{U} \hat{\rho}_{probe} \right)$$

A questo punto l'operatore $\hat{\Pi}$ contiene lo stato in cui la sonda è preparata ($\hat{\rho}_{probe}$), lo stato finale della sonda ($|\tilde{a}\rangle \langle \tilde{a}|$) e l'evoluzione temporale (che è l'unico operatore che operava sia sullo spazio della sonda, dipendenza eliminata dalla traccia parziale, che sullo spazio dell'oggetto). Abbiamo visto la misura dal punto di vista della sonda, ma cosa sta succedendo al nostro oggetto? Avevamo scritto l'equazione 2.3.2 rimandandone la dimostrazione che, però, vediamo ora. Possiamo scrivere la matrice finale dell'oggetto (post interazione):

$$\hat{\rho}_{fin}(\tilde{a}) = \frac{1}{P(\tilde{a})} \langle \tilde{a}| \hat{U} \hat{\rho}_{probe} \hat{\rho}_{init} \hat{U}^\dagger |\tilde{a}\rangle$$

Se possiamo scrivere lo stato iniziale della sonda come: $\hat{\rho}_{probe} = \sum_i w_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ arriviamo facilmente, per sostituzione, a:

$$\hat{\rho}_{fin}(\tilde{a}) = \frac{1}{P(\tilde{a})} \sum_i \langle \tilde{a}| \hat{U} |\psi_i\rangle \hat{\rho}_{init} \langle \psi_i| \hat{U}^\dagger |\tilde{a}\rangle$$

^{iv}Non stiamo considerando interazioni coi gradi di libertà ambientali.

E ricordiamo che $|\tilde{a}\rangle$ e $|\psi_i\rangle$ sono stati della sonda e \hat{U} agisce su entrambi gli stati. Dunque gli operatori $\langle|\hat{U}|\rangle$ sono operatori dell'oggetto. Se la sonda si trova, inizialmente, in uno stato puro $\hat{\rho}_{probe} = |\psi\rangle\langle\psi|$, allora abbiamo:

$$\hat{\rho}_{fin}(\tilde{a}) = \frac{1}{P(\tilde{a})} \langle\tilde{a}|\hat{U}|\psi\rangle \hat{\rho}_{init} \langle\psi|\hat{U}^\dagger|\tilde{a}\rangle$$

E possiamo identificare:

$$\langle\tilde{a}|\hat{U}|\psi\rangle = \hat{\Omega} = \hat{U}_{obj} \sqrt{\hat{M}}$$

Con \hat{U}_{obj} (diverso dall'operatore \hat{U} precedente) che contiene le informazioni sulla perturbazione dell'oggetto causata dalla sonda. Abbiamo già visto che abbiamo una misurazione

senza demolizione nel caso in cui $[\hat{A}, \hat{\Omega}] = 0$ che ora possiamo riscrivere:

$$\langle\tilde{a}|\hat{A}, \hat{\Omega}|\psi\rangle = 0$$

Tale equazione deve essere vera per ogni autostato $|\tilde{a}\rangle$, perciò:

$$(\hat{A}\hat{U} - \hat{U}\hat{A})|\psi\rangle = 0$$

Se moltiplichiamo per \hat{U}^\dagger otteniamo:

$$\hat{U}^\dagger(\hat{A}\hat{U} - \hat{U}\hat{A})|\psi\rangle = (\hat{U}^\dagger\hat{A}\hat{U} - \hat{A})|\psi\rangle = 0$$

Otteniamo, dunque, questa equazione che è la condizione per avere una QND (*Quantum NonDemolition measurement*). Si noti che l'operatore fra parentesi corrisponde alla variazione dell'osservabile A nella rappresentazione di Heisenberg. Perché questa condizione sia rispettata vi sono due possibilità:

- che valga sempre $\hat{U}^\dagger\hat{A}\hat{U} - \hat{A} = 0$;
- che lo stato iniziale della sonda sia un autostato della differenza $\hat{U}^\dagger\hat{A}\hat{U} - \hat{A}$.

Il secondo caso non è stato particolarmente analizzato né dal punto di vista sperimentale né da quello teorico, mentre ci si è concentrati sulla prima condizione. Quest'ultima equivale a richiedere $[\hat{A}, \hat{U}] = 0$. Tale condizione è necessaria e sufficiente per avere una misura senza demolizione, ma è generalmente complesso verificare che sia verificata poiché è necessario conoscere l'evoluzione di oggetto e sonda. Per questo si preferisce richiedere una condizione più forte (sufficiente, ma non necessaria): $[\hat{A}, \hat{H}] = 0$. Tipicamente avremo l'hamiltoniana scrivibile come:

$$\hat{H} = \hat{H}_{obj} + \hat{H}_{probe} + \hat{H}_{int}$$

Chiaramente abbiamo immediatamente la commutatività con la parte relativa alla sonda: $[\hat{A}, \hat{H}_{probe}] = 0$ (poiché \hat{A} è un osservabile dell'oggetto); mentre dovremo esplicitamente richiedere:

$$[\hat{A}, \hat{H}_{obj}] = 0 \tag{2.4.1}$$

$$[\hat{A}, \hat{H}_{int}] = 0 \tag{2.4.2}$$

Capitolo 3

Superconduttività

3.1 Introduzione alla superconduttività

La realizzazione di un dispositivo quantistico controllabile è notevolmente facilitata dall'esistenza di particolari fenomeni caratterizzati dall'estensione su scala macroscopica di effetti quantistici. Il più importante di questi, su cui si basa una delle tipologie più diffuse di computer quantistici, è la superconduttività. Normalmente ci si aspetta che raffreddando un metallo la sua resistenza elettrica decresca continuamente, ma per alcuni di essi si annulla bruscamente ad una temperatura critica T_c . Ad esempio, per il niobio $T_c = 9$ K, mentre per l'alluminio $T_c = 1.7$ K. Una volta entrato nella fase superconduttiva $T < T_c$, il materiale può supportare corrente senza alcun fenomeno dissipativo, a patto che essa sia minore di un valore critico I_c . Gli elettroni di una corrente superconduttiva si muovono in un flusso macroscopicamente coerente, inoltre non contribuiscono più sia alla conduttività elettrica che a quella termica, ma solo alla prima, e gli unici conduttori di calore sono i fononi. L'esistenza della superconduttività è dovuta al fatto che, a temperature bassissime, l'interazione tra fononi ed elettroni crea una forza debolmente attrattiva tra gli elettroni, i quali si accoppiano in paia dette **coppie di Cooper**. Anche se la dimensione di queste strutture composite è generalmente maggiore della distanza media tra due elettroni in un metallo, le coppie di Cooper hanno spin totale nullo o intero, quindi sono bosoni e possono occupare macroscopicamente lo stesso stato, formando un condensato di Bose-Einstein.

3.1.1 Funzione d'onda e densità di corrente

Assumendo che tutti gli elettroni abbiano formato coppie di Cooper, che occupino lo stesso stato, la funzione d'onda del condensato $|\psi(\vec{r})\rangle$ può essere considerata come descrivente la densità di particelle in una determinata posizione, invece della semplice probabilità di trovare una particella. Considerando una densità di elettroni $n_e(\vec{r})$, la densità di coppie di Cooper $n(\vec{r})$ descritta dalla funzione d'onda è data da:

$$\langle\psi(\vec{r})|\psi(\vec{r})\rangle = n_e(\vec{r})/2 = n(\vec{r})$$

Implicando quindi:

$$|\psi(\vec{r})\rangle = \sqrt{\frac{n_e(\vec{r})}{2}} e^{-i\phi(\vec{r})}$$

La densità di carica è semplicemente $\rho(\vec{r}) = q \langle\psi(\vec{r})|\psi(\vec{r})\rangle = 2en(\vec{r})$. Lo stato è macroscopicamente coerente in quanto tutte le coppie di Cooper sono accomunate dalla stessa

fase $\phi(\vec{r})$. Infine, siccome ognuna di esse è in uno stato legato, si definisce con Δ l'energia necessaria per ottenere due elettroni liberi, che in questo contesto vengono denominati quasiparticle.

LEZIONE 9 - 4/11/2021

Vediamo ora come ricavare un'espressione per la densità di corrente superconduttiva $\vec{J}(\vec{r})$. Come sempre, l'evoluzione della funzione d'onda è determinata dall'equazione di Schrödinger. Per particelle cariche di spin nullo in un potenziale elettromagnetico, si ottiene:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi = \left[\frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla - q\vec{A})(-i\hbar \nabla - q\vec{A}) + q\phi \right] \psi$$

dove \vec{A} e ϕ sono rispettivamente il potenziale vettore e il potenziale scalare. Sostituendo l'equazione di continuità per la densità di corrente:

$$q \frac{\partial n(\vec{r})}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J}$$

e l'espressione per la funzione d'onda nell'equazione di Schrödinger, si dimostra che:

$$\vec{J}(\vec{r}) = \frac{\hbar}{m} (\nabla \phi - \frac{q}{\hbar} \vec{A}) q n(\vec{r}) = \vec{v}(\vec{r}) \rho(\vec{r}) \quad (3.1.1)$$

Se volessimo scrivere il momento

$$m\vec{v}_s(\vec{r}) = \frac{\vec{J}(\vec{r})m}{qn_s}$$

A questo punto possiamo fare due considerazioni

- Se $\vec{A} = 0$, $m\vec{v}_s(\vec{r}) = \hbar \nabla \phi(\vec{r})$, otteniamo il momento "classico", in cui tutte le coppie di Cooper si muovono coerentemente;
- Se $\vec{A} \neq 0$, $m\vec{v}_s(\vec{r}) = \hbar \nabla \phi(\vec{r}) - q\vec{A}$ il momento è noto come **momento dinamico**. La densità delle quasiparticle è quasi costante perché ci sono coppie di Cooper che sono libere di muoversi su un reticolo di cariche positive. Il movimento delle coppie di Cooper crea uno sbilanciamento di carica nello spazio che introduce delle forze.

Da questo ultimo fatto possiamo analizzare un paio di effetti interessanti:

3.1.2 Effetto Meissner

Attraversare la temperatura critica implica una vera e propria transizione di fase per un superconduttore, che non può essere semplicemente descritto come un conduttore ideale. Se ciò fosse vero, applicando un campo magnetico, prima di raffreddare il materiale, permetterebbe di mantenere il campo al suo interno anche nel regime superconduttivo. In realtà, le linee di campo vengono sempre espulse dal corpo del materiale una volta superato il punto di transizione, tale fenomeno è denominato **effetto Meissner**. Si consideri ad esempio un materiale superconduttivo in regime stazionario, questo implica che la densità di carica ρ sia praticamente uniforme e che $\nabla \cdot \vec{J} = 0$. Inoltre, poiché lo stato stazionario del condensato corrisponde a quello fondamentale, la componente

cinematica del suo momento è nulla, quindi anche $\nabla^2\phi = 0$. Considerando la divergenza di (3.1.1) si ottiene perciò:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\rho \frac{q}{m} \nabla \cdot \vec{A}$$

La divergenza di \vec{A} può essere fissata scegliendo un gauge. In questo caso, si pone $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, ottenendo quindi:

$$\vec{J} = -\rho \frac{q}{m} \vec{A} = -n \frac{q^2}{m} \vec{A}$$

Questa espressione riassume le due equazioni di London, le relazioni costitutive più semplici per descrivere un superconduttore, a patto di aver scelto il gauge opportuno. Ora, le equazioni di Maxwell dicono che, in regime stazionario:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} = \mu_0 n \frac{q^2}{m} \vec{A}$$

Di conseguenza il potenziale vettore, quindi il campo magnetico e la densità di corrente, decrescono esponenzialmente addentrandosi nel superconduttore, rimanendo localizzati prevalentemente sulla superficie entro una distanza di penetrazione data da:

$$\lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n q^2}}$$

3.1.3 Quantizzazione del flusso magnetico

Si supponga ora di avere un anello di materiale superconduttivo a $T > T_c$ immerso in un campo magnetico. Se la temperatura viene abbassata al di sotto del punto di transizione e il campo viene spento, si induce una corrente superficiale persistente, che genera a sua volta un flusso magnetico contrastante la diminuzione del campo concatenato con l'anello. Generalmente la corrente e il campo indotti verrebbero dissipati dopo un tempo caratteristico, ma in questo caso possono permanere indefinitamente. Si può dimostrare che il flusso concatenato non può assumere valori qualsiasi, ma solo multipli interi di una quantità fondamentale. Siccome per l'effetto Meissner in un superconduttore la densità di corrente è nulla, (3.1.1) implica che, considerando un percorso di integrazione al suo interno e compreso tra due punti (a, b) :

$$\begin{aligned} \hbar \nabla \phi &= q \vec{A} \\ \delta = \phi_b - \phi_a &= \frac{q}{\hbar} \int_a^b \vec{A} \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

Per $b \rightarrow a$, l'integrale sarà uguale al flusso del campo magnetico concatenato con l'anello:

$$\int_a^b \vec{A} \cdot d\vec{l} \rightarrow \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \Phi$$

La funzione d'onda deve ovviamente tornare uguale a sé stessa se gli estremi di integrazione si sovrappongono, ma ciò è sempre vero a meno di una fase $\delta = \phi_b - \phi_a = 2\pi n$, questo implica che:

$$\delta = 2\pi n = \frac{q}{\hbar} \Phi$$

Si definisce quindi il quanto di flusso magnetico $\Phi_0 = 2\pi \frac{\hbar}{q}$

$$\Phi = n\Phi_0 \quad \Phi_0 \sim 10^{-15} \text{ Wb}$$

Infine, indicando l'induttanza dell'anello come L , la corrente superficiale che sostiene il flusso magnetico (corrente schermante) è $I_{sc} = \frac{\Phi}{L}$.

3.2 La giunzione Josephson

Il materiale superconduttivo può presentare zone particolarmente assottigliate o strutturate, come giunzioni e punti di contatto con altri superconduttori, in corrispondenza delle quali la corrente critica è notevolmente ridotta. In questi casi si parla di superconduttività debole, una condizione che presenta fenomeni di origine quantistica molto interessanti. In particolare, una giunzione Josephson è ottenuta sovrapponendo tra due lamine superconduttrici uno strato isolante, il quale, se è abbastanza sottile, potrà essere attraversato per effetto tunnel dalle coppie di Cooper o da quasiparticelle.

3.2.1 Le equazioni di Josephson

Si supponga di applicare una differenza di potenziale V ai capi della giunzione, per ciascuno dei quali le coppie di Cooper sono descritte dalla funzione $\psi_j = \sqrt{n_j/2} \exp(i\phi_j)$. Considerando di introdurre il termine di tunnelling al primo ordine con una costante K , l'hamiltoniana che descrive questo sistema è:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \frac{qV}{2} & K \\ K & -\frac{qV}{2} \end{pmatrix}$$

Per l'equazione di Schrödinger, l'evoluzione delle funzioni d'onda sarà data da:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \frac{qV}{2} \psi_1 + K \psi_2 \\ i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = -\frac{qV}{2} \psi_2 + K \psi_1 \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Sostituendo le espressioni per i due stati e separando le espressioni per la parte reale da quella immaginaria, si possono ottenere le due equazioni di Josephson, che riassumono il comportamento essenziale di questo componente. Considerando la parte reale si ha:

$$\dot{n}_1 = -\dot{n}_2 = \frac{2}{\hbar} K \sqrt{n_1 n_2} \sin \delta = \frac{2}{\hbar} K n_0 \sin \delta$$

Siccome \dot{n}_i è semplicemente il rate di passaggio di elettroni superconduttivi da un lato all'altro, la corrente che attraversa la giunzione sarà proporzionale ad esso, mentre n_0 è la loro densità in assenza di tunnelling, uguale per entrambi i terminali. Si ottiene quindi la prima equazione di Josephson, descrivente l'**effetto DC Josephson**:

$$I = I_0 \sin \delta$$

Una corrente superconduttiva può quindi attraversare la giunzione senza applicarvi una differenza di potenziale, dipendendo solo dalla differenza tra le fasi delle funzioni d'onda agli estremi, a patto che sia minore di un valore critico $I_0 \ll I_c$, dove I_c è la corrente critica del bulk del superconduttore. Allo stesso tempo, la parte immaginaria delle espressioni (3.2.1) è invece pari a:

$$\begin{cases} \dot{\phi}_1 = \frac{k}{\hbar} \sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \cos \delta - \frac{qV}{\hbar} \\ \dot{\phi}_2 = \frac{k}{\hbar} \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \cos \delta + \frac{qV}{\hbar} \end{cases}$$

Che possono essere riassunte nella seconda equazione di Josephson:

$$\dot{\delta} = \frac{q}{\hbar} V(t)$$

La particolarità di questa caratteristica, denominata anche **effetto AC Josephson**, è data dal fatto che la fase, quindi la corrente, rimangano costanti solo se V è nullo. Considerando $V \neq 0$ costante, siccome $\frac{q}{\hbar} \sim 10^{15} \text{ V}^{-1}\text{s}^{-1}$ la fase evolverà linearmente molto velocemente. Per la prima equazione di Josephson, la corrente attraverso la giunzione oscillerà rapidamente, assumendo un valore medio nullo.

3.2.2 Induttanza Josephson

La giunzione Josephson presenta un comportamento induttivo non lineare. Infatti, ricordando che la caratteristica di un componente induttivo è definita da:

$$V(t) = L \frac{dI}{dt}$$

Considerando che la corrente attraverso la giunzione rimanga nel regime superconduttivo $I < I_0$, dalle due equazioni di Josephson e dall'espressione per il quanto di flusso Φ_0 si ottiene:

$$\frac{dI}{dt} = I_0 \dot{\delta} \cos \delta = I_0 \frac{q}{\hbar} V(t) \cos \delta = 2\pi \frac{I_0}{\Phi_0} V(t) \cos \delta$$

È quindi possibile definire:

$$L(I) = \frac{\Phi_0}{2\pi I_0 \cos \delta} = \frac{L_0}{\cos \delta} = \frac{L_0}{\sqrt{1 - \sin^2 \delta}} = \frac{L_0}{\sqrt{1 - (I/I_0)^2}}$$

In cui $L(0) = L_0 = \frac{\Phi_0}{2\pi I_0}$ è un parametro caratteristico della giunzione, chiamato **induttanza Josephson**. Si può anche calcolare l'energia accumulata da questo tipo di induttore, data da:

$$E = \int_{-\infty}^t I(t') V dt' = \frac{I_0 \Phi_0}{2\pi} \int_0^{\delta(t')} \sin \delta d\delta = L_0 I_0^2 (1 - \cos \delta) = E_J (1 - \cos \delta)$$

Dove $E_J = L_0 I_0^2$ è denominata **energia Josephson**. Diversamente da un induttore classico, il cui funzionamento è determinato dalla creazione di un campo magnetico variabile in cui è accumulata l'energia, la supercorrente che attraversa una giunzione non genera campo magnetico. L'origine di questo comportamento dinamico è invece dovuto all'inerzia dei portatori di carica, che si oppongono a variazioni del loro moto, il che diventa particolarmente evidente se la forzante oscilla molto velocemente. Si parla quindi di induttanza cinetica, e il fatto che questo fenomeno sia dipendente dalla stessa corrente che attraversa la giunzione ne determina la caratteristica non lineare. Ad esempio, inserendo una giunzione Josephson come induttore in un circuito LC si otterranno oscillazioni anarmoniche.

LEZIONE 10 - 9/11/2021

Se proviamo a far passare attraverso la giunzione Josephson una corrente $I > I_c$, allora l'eccesso di corrente dovrà essere trasportato dalle quasiparticle, in modo normale e dissipativo. Per indagare questa situazione, useremo un modello conveniente e solitamente abbastanza preciso di una **giunzione con derivazione resistiva** (RSJ) di una giunzione

Josephson, dove parallelamente alla giunzione Josephson vera e propria c'è una resistenza finita R . Per tutto $I < I_c$ è cortocircuitato dalla supercorrente. Poi per $I > I_c$

$$I = I_c \sin \delta(t) + \frac{V(t)}{R} = I_c \sin \delta(t) + \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\delta}{dt}$$

con soluzione implicita nella forma

$$\begin{aligned} t(\delta) &= \frac{\hbar}{2eRI_c} \int_0^\delta \frac{d\delta}{I/I_c - \sin \delta} \\ &= \frac{\hbar}{2eRI_c} \frac{2}{\sqrt{(I/I_c)^2 - 1}} \arctan \left[\frac{(I/I_c) \tan(\phi/2) - 1}{\sqrt{(I/I_c)^2 - 1}} \right]. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

La differenza di fase, e quindi la tensione, sarà una funzione periodica del tempo, con periodo

$$\begin{aligned} T_{RSJ} &= \frac{\hbar}{2eRI_c} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{I/I_c - \sin \phi} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{(I/I_c)^2 - 1}} \frac{\hbar}{2eRI_c} \\ &= \frac{2\pi}{\omega_{RSJ}}. \end{aligned}$$

La tensione media Josephson sarà di conseguenza

$$\bar{V}_J = \frac{\hbar \omega_{RSJ}}{2e} = R \sqrt{I^2 - I_c^2}.$$

La soluzione esplicita per la tensione può essere ottenuta dalla (3.2.2) nella forma

$$V(t) = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\phi}{dt} = \frac{R(I^2 - I_c^2)}{I + I_c \cos \omega_{RSJ} t},$$

tali oscillazioni sono state effettivamente osservate e seguono anche un'altra proprietà interessante e utile. Secondo la definizione generale di induttanza, $V = L \dot{I}/c^2$, la giunzione Josephson può essere considerata come un'induttanza non lineare L_J :

$$L_J(\varphi) = \frac{\hbar c^2}{2eI_c \cos \phi}.$$

Il fatto che questa induttanza possa essere sintonizzata (e persino cambiare segno) fissando una differenza di fase stazionaria attraverso la giunzione è molto utile per varie applicazioni.

3.3 SQUID

Questi dispositivi, sebbene molto semplici nel design, hanno aperto nuovi orizzonti nelle tecniche di misurazione a bassa temperatura. Molti strumenti basati su SQUID sono unici nella loro sensibilità. Gli esempi più celebri sono i magnetometri SQUID, che sono in grado di risolvere incrementi di flusso di circa 10^{-10} gauss, e i voltmetri di precisione con la sensibilità di circa 10^{-15} V. Allora, cos'è SQUID? Ci sono due tipi fondamentali di SQUID da distinguere: uno **SQUID RF** a giunzione singola e uno **SQUID DC** a due giunzioni.

3.3.1 RF SQUID

L'elemento base di uno SQUID a giunzione singola è un anello superconduttivo contenente una giunzione Josephson. Consideriamo due punti, 1 e 2, in prossimità della giunzione, come mostrato in Figura Il contorno tratteggiato 1-2 passa attraverso l'interno del superconduttore in modo tale che la sua distanza dai bordi sia ovunque maggiore di λ . Pertanto, non c'è sovracorrente in nessun punto del contorno e $v_s = 0$. Consideriamo la (3.1.1) e integriamo lungo il contorno tratteggiato dal punto 1 al punto 2.

$$\hbar \nabla \vec{\phi}(\vec{r}) - q \vec{A} = m \vec{v}_s(t),$$

da cui

$$\hbar \nabla \vec{\phi}(\vec{r}) = q \vec{A},$$

integrando

$$\begin{aligned} \hbar \int_1^2 d\vec{r} \nabla \phi(\vec{r}) &= 2e \int_1^2 d\vec{r} \cdot \vec{A} \\ \hbar (\phi_2 - \phi_1) &= 2e \int_1^2 d\vec{r} \cdot \vec{A} \\ \hbar \delta &= 2e \oint_1^2 d\vec{r} \cdot \vec{A} \\ \hbar \delta &= 2e \Phi. \end{aligned}$$

Questo perché la distanza tra i punti 1 e 2 attraverso la giunzione è molto più breve della loro distanza lungo il contorno tratteggiato e il potenziale vettore non ha particolarità in prossimità della giunzione. Dal risultato ricavato precedente abbiamo

$$\delta = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad (3.3.1)$$

dove Φ è il flusso magnetico totale racchiuso nell'anello SQUID. In generale, questo flusso Φ non è uguale al flusso Φ_e fornito esternamente. La loro differenza è dovuta alla corrente di schermatura che circola nell'anello superconduttore:

$$\Phi = \Phi_e - LI_{sc}, \quad (3.3.2)$$

dove L è l'induttanza dell'anello. Poiché la corrente I_{sc} attraversa sia l'anello che la giunzione, la sua relazione con la differenza di fase della funzione d'onda dell'elettrone superconduttore è data dalla ben nota espressione

$$I_s(\delta) = I_c \sin \delta.$$

Mettendo insieme questa equazione con la (3.3.1) e la (3.3.2), otteniamo

$$\Phi_e = \Phi + LI_c \sin(2\pi\Phi/\Phi_0).$$

Questa formula può essere considerata come una relazione implicita tra Φ e Φ_e . È illustrata graficamente in Figura

3.3.2 DC SQUID

Questo dispositivo è costituito da due giunzioni Josephson collegate in parallelo. In pratica, il circuito è costituito da due superconduttori bulk che, insieme alle giunzioni Josephson a e b , formano un anello come in Figura. Il flusso attraverso l'anello dello SQUID è generato da una bobina magnetica posta all'interno dell'anello. Per capire come funziona questo tipo di SQUID, dobbiamo sapere come la massima corrente a tensione zero I_{\max} attraverso il dispositivo dipenda dal flusso magnetico totale Φ racchiuso nell'anello SQUID. Si considerino due coppie di punti all'interno dei superconduttori: (1, 2) e (3,4), tutti vicini alle giunzioni a e b , come illustrato in Fig. 4.14. Effettuando l'integrazione della (4.22) lungo il contorno tratteggiato dal punto 1 al punto 3 e dal punto 4 al punto 2 si ottiene

$$\hbar(\phi_3 - \phi_1 + \phi_2 - \phi_4) = 2e \left(\int_1^3 \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_4^2 \vec{A} \cdot d\vec{l} \right),$$

Il termine $2mv_s$ è stato omissso perché il contorno passa ovunque attraverso l'interno del superconduttore, ben lontano dai bordi. Non c'è sovracorrente lì e $v_s = 0$. La distanza tra i punti 1 e 2, così come tra 3 e 4, è piccola rispetto alla lunghezza del contorno tratteggiato. Inoltre, il potenziale vettore \vec{A} non ha particolari caratteristiche in prossimità delle giunzioni. Pertanto, il lato destro dell'equazione precedente può essere integrato da un integrale lungo le sezioni 3-4 e 1-2. Di conseguenza otteniamo

$$\hbar(\delta_a - \delta_b) = 2e \oint \vec{A} \cdot d\vec{l},$$

oppure

$$\delta_a - \delta_b = 2\pi\Phi/\Phi_0,$$

dove Φ è il flusso magnetico totale racchiuso nel circuito dell'interferometro, $\delta_a = \phi_3 - \phi_1$, $\delta_b = \phi_4 - \phi_2$, e $\Phi_0 = \pi\hbar c/e$ è il quanto del flusso magnetico. La corrente attraverso la giunzione a è

$$I_a = I_c \sin \delta_a$$

e attraverso la giunzione b ,

$$I_b = I_c \sin \delta_b.$$

In questo caso si suppone che le giunzioni siano identiche e caratterizzate dallo stesso valore di corrente critica, I_c . La corrente totale attraverso l'interferometro è allora la somma di I_a e I_b :

$$I = I_c (\sin \phi_a + \sin \phi_b).$$

Notando che

$$\sin \phi_a + \sin \phi_b = 2 \sin[(\phi_a + \phi_b)/2] \cos[(\phi_a - \phi_b)/2],$$

possiamo riscrivere il risultato precedente come

$$I = 2I_c \cos \frac{\pi\Phi}{\Phi_0} \sin \left(\delta_b + \frac{\pi\Phi}{\Phi_0} \right).$$

Se il flusso totale racchiuso nell'anello dello SQUID è fisso, l'unico parametro che si autoregola ad una data corrente totale è δ_b . Ne consegue che la massima corrente libera da dissipazione del dispositivo è

$$I_{\max} = 2I_c |\cos(\pi\Phi/\Phi_0)|.$$

La dipendenza di I_{\max} da Φ è illustrata in Figura. Lo stato superconduttivo dell'anello è più stabile rispetto alla corrente esterna I quando un numero intero di quanti di flusso è racchiuso nell'interferometro. Al contrario, un numero semi-integrale di quanti di flusso nel ciclo corrisponde a uno stato superconduttivo instabile. Vale a dire, in quest'ultimo caso, una corrente I piccola, trascurabile è sufficiente per portare il dispositivo allo stato resistivo, con una tensione finita ai capi della giunzione (vedi Figura). Vorremmo sottolineare che Φ è il flusso totale attraverso il circuito dell'interferometro. Il flusso fornito esternamente dalla bobina magnetica, Φ_e , è correlato a Φ da

$$\Phi = \Phi_e - LI_{sc},$$

dove L è l'induttanza dell'interferometro e I_{sc} è la corrente di schermatura che circola in esso. Anche la corrente critica dello SQUID è periodica in Φ_e , con periodo Φ_0 . Questa dipendenza è illustrata in Figura.

LEZIONE 11 - 11/11/2021

Come possiamo arrivare a una descrizione quantistica di qubit superconduttivi? Le giunzioni Josephson sono degli oggetti che hanno uno strano comportamento e abbiamo trattato questo effetto utilizzando un approccio classico poiché δ è trattabile solamente in modo classico. Per vedere effetti quantistici necessitiamo di sapere quando gli SQUIDS possono essere utilizzati come qubit. Per vedere effetti quantistici, dove la fase non è ben definita, trattiamo un basso numero di coppie di Cooper. L'energia associata alla capacità è data da

$$E_c = \frac{e^2}{2C},$$

per avere un comportamento quantistico $E_c \gg k_B T$. Procediamo con un esempio numerico

Esempio 3.1. *Supponiamo di essere a una temperatura di 18 mK, questo fornisce un'energia termica pari a $k_B T = 10^{-6}$ eV. Affinché si abbia un comportamento quantistico, la capacità del condensatore deve essere $C \ll 0.1$ pF. Cioè l'area della giunzione Josephson dovrà essere 10^{-6} cm^2 .*

In principio noi vorremmo lavorare con temperature più alte, non solo, dobbiamo considerare la scala temporale del **principio di indeterminazione di Heisenberg**

$$\Delta E \Delta t = \frac{\hbar}{2},$$

quindi

$$E_c > \Delta E = \frac{\hbar}{2\Delta t},$$

siccome $\Delta t \sim RC$, R deve essere superiore di 6 k Ω , cioè $R = \frac{2\hbar}{(2e)^2}$. Questo è una possibile considerazione, altrimenti uno può valutare ad esempio l'energia della giunzione $E_J > k_B T$, dove $E_J = \frac{\hbar}{2e} I_0$, dove I_0 dipende dall'area. Il comportamento della giunzione utilizzata nei qubit dipende da E_J , E_c e $k_B T$. L'idea di base per lavorare con i qubit è quindi avere una giunzione di piccole dimensioni e lavorare a basse temperature.

3.4 Quantizzazione di un circuito LC

Dal momento che vogliamo quantizzare un qubit necessitiamo di una lagrangiana da cui costruire la corrispondente hamiltoniana e, applicando la quantizzazione canonica, otteniamo il nostro sistema quantizzato. Supponiamo di considerare un semplice circuito LC come mostrato in Figura 3.1.

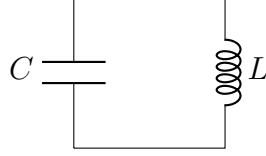


Figura 3.1: Circuito LC.

In generale, in ciascun ramo abbiamo una tensione V_b e una corrente I_b , ciò che vogliamo andare a calcolare sono Φ_b e Q_b , dove

$$\Phi_b(t) = \int_{-\infty}^t dt' V_b(t')$$

$$Q_b(t) = \int_{-\infty}^t dt' I_b(t').$$

Ciascun elemento è caratterizzato da una relazione costitutiva che collega le variazioni di corrente e tensione. Dobbiamo distinguere tra elementi capacitivi per cui la relazione è della forma

$$V_b = f(Q_b),$$

ed elementi induttivi per cui la relazione è della forma

$$I_b = g(\Phi_b).$$

Capacità e induttanze lineari usuali sono dei casi speciali in cui

$$f(Q_b) = \frac{Q_b}{C}$$

$$g(\Phi_b) = \frac{\Phi_b}{L}.$$

Un controesempio è dato dalla giunzione tunnel Josephson che è un elemento induttivo e la funzione $g(\Phi_b)$ è un seno. Tuttavia lavorare con i rami non è una scelta ottimale. Le leggi di Kirchhoff da risolvere sono sulla corrente e tensione, ma invece di utilizzare I_b e V_b usiamo la carica Q_b e il flusso Φ_b . Questo perché il flusso e la carica in un nodo sono uguali al flusso e alla carica in un ramo, anche se in generale non sono sempre lo stesso. Siccome

$$\delta = \frac{2e}{\hbar} \Phi \mod 2\pi = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}$$

$$I_L = \frac{\Phi}{L} = \ddot{\Phi} C = I_C,$$

avremo che la nostra lagrangiana sarà

$$L(\dot{\Phi}, \Phi) = C \frac{\dot{\Phi}^2}{2} - \frac{\Phi^2}{2L}.$$

Applicando la **trasformata di Legendre** con cui calcoliamo il momento coniugato

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} = C\dot{\Phi},$$

possiamo scrivere ora l'hamiltoniana del nostro sistema:

$$H = Q\dot{\Phi} - L = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L}.$$

Avendo ora a disposizione l'hamiltoniana possiamo procedere ad una quantizzazione canonica in cui

$$\begin{aligned}\Phi &\longrightarrow \hat{\Phi} \\ Q &\longrightarrow \hat{Q} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \Phi} \\ H &\longrightarrow \hat{H} = \frac{\hat{Q}^2}{2C} + \frac{\hat{\Phi}^2}{2L}\end{aligned}$$

Come possiamo notare l'hamiltoniana quantizzata appena scritta assomiglia all'hamiltoniana di un oscillatore armonico, infatti possiamo notare un'analogia con

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2,$$

$$\begin{aligned}Q &\longleftrightarrow p \\ \Phi &\longleftrightarrow x \\ C &\longleftrightarrow m \\ L &\longleftrightarrow \frac{1}{k}\end{aligned}$$

con pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

In questo contesto, ricordando che

$$E_c = \frac{e^2}{2C} \quad \text{e} \quad Q = 2en,$$

possiamo scrivere

$$\frac{Q^2}{2C} = \frac{4e^2n^2}{2C} = 4E_cn^2$$

Allo stesso modo

$$E_L = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{L},$$

quindi

$$\frac{\Phi^2}{2L} = \frac{\delta^2\Phi_0^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{2L} = \frac{1}{2}\delta^2 E_L$$

Un altro modo dunque di scrivere l'hamiltoniana è il seguente

$$\hat{H} = 4E_C\hat{n}^2 + \frac{1}{2}E_L\hat{\delta}^2.$$

se prima $[\hat{\Phi}, \hat{Q}] = i\hbar$, ora abbiamo che $[\hat{\delta}, \hat{n}] = i$. Conoscendo l'oscillatore armonico abbiamo che le soluzioni degli autovettori $|k\rangle$ e degli autovalori $E_k + 1 - E_k = \hbar\omega$ sono anche soluzioni del nostro circuito LC. Usando gli operatori di creazione \hat{a}^\dagger e distruzione \hat{a} possiamo riscrivere l'hamiltoniana come

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right)$$

con

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar z}} \left(\hat{\Phi} + iz\hat{Q} \right) \quad \text{e} \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar z}} \left(\hat{\Phi} - iz\hat{Q} \right) \quad z = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

e le relazioni inverse

$$\hat{Q} = i\sqrt{\frac{\hbar}{2z}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \quad \hat{\Phi} = \sqrt{\frac{\hbar z}{2}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a})$$

Possiamo inoltre valutare i valori medi di \hat{Q}^2 e $\hat{\Phi}^2$

$$\begin{aligned} \langle \hat{Q}^2 \rangle &= \langle 0 | \hat{Q}^2 | 0 \rangle = \frac{\hbar}{2z} \\ \langle \hat{\Phi}^2 \rangle &= \langle 0 | \hat{\Phi}^2 | 0 \rangle = \frac{\hbar z}{2} \end{aligned}$$

e prendono il nome di **zero-point fluctuations** perché $\Delta Q \Delta \Phi = \frac{\hbar}{2}$. Come possiamo notare, il circuito LC non può essere utilizzato come qubit, questo perché il gap energetico tra i vari livelli è lo stesso, inoltre non possiamo vedere un comportamento quantistico perché $\hbar\omega \ll k_B T$. Se prendessimo $T = 10$ mK, allora $\hbar\omega > 10^{-5}$ eV, cioè $\omega \gg 10$ GHz. Questo fatto è interessante, perché per avere un sistema quantistico, a questa temperatura, necessitiamo solamente di una frequenza dell'ordine di 10GHz. Questo significa che il sistema in questione deve avere una dimensione $l < \frac{\omega}{2\pi c}$, ma questo non è un problema. Il problema risiede nel fatto che dobbiamo accoppiarlo con l'ambiente. Un altro fatto di cui dobbiamo tenere conto è quello riguardante la possibilità di avere tunneling, necessitiamo quindi di lavorare con livelli meno energetici del gap che c'è tra i vari livelli in un circuito LC. La probabilità di tunneling aumenta più si eccita il sistema. Martinis, Devoret e altri fisici che studiarono questo sistema rimpiazzarono l'induttore L con una giunzione Josephson. La giunzione, comportandosi da elemento non lineare, va ad alterare la distribuzione dei livelli energetici.

Capitolo 4

Qubit

LEZIONE 12 - 16/11/2021

4.1 Tipologie di qubit

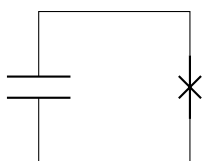
Nell'ambito dei qubit superconduttivi possiamo individuare tre tipologie di qubit:

- **Phase qubit** (*current biased Josephson junction*);
- **Charge qubit** (*single cooper pair box*: CPB);
- **Flux qubit**.

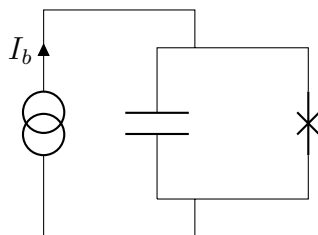
Queste tre tipologie si ramificano poi in varie sottocategorie di qubit: fra questi si noti il caso della tecnologia **XMON** (attualmente la più diffusa) che è un'evoluzione del **TRANSMON** che, a sua volta, deriva dal **CPB**.

4.1.1 Phase qubit

Studiamo ora il phase qubit e consideriamo una giunzione Josephson: abbiamo visto che possiamo approssimarla a un circuito con capacità e giunzione ideale:



A questo punto andiamo ad aggiungere una corrente di bias I_b :



Cerchiamo di capire quale sia la differenza tra il circuito LC e il circuito LC con una corrente di bias. Abbiamo già visto che l'hamiltoniana di un oscillatore armonico LC può essere scritta come:

$$H = 4E_C n^2 + \frac{1}{2} E_L \delta^2$$

Se sostituisco l'induttore L con un induttore Josephson, devo scrivere la relazione che lega la corrente I al flusso relativo alla giunzione:

$$I = I_0 \sin \delta = I_0 \sin \left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)$$

A questo punto siamo in grado di risolvere il circuito esplicitamente a partire dalle equazioni del moto. Supponiamo adesso che la corrente di bias sia nulla ($I_b = 0$) e andiamo subito a calcolare l'hamiltoniana. Sappiamo già qual è l'energia cinetica legata al circuito, dobbiamo ricavare ancora l'energia potenziale legata alla giunzione Josephson. In realtà avevamo visto anche questa, arrivando a:

$$U = \int_{-\infty}^t dt I(t) V = E_J (1 - \cos \delta) = \frac{I_0 \Phi_0}{2\pi} (1 - \cos \delta)$$

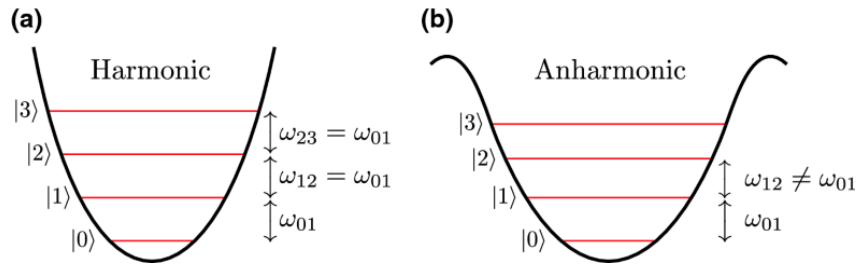
Rimuovendo il termine E_J costante dall'energia potenziale (si tratta solo di riscaldare le energie per un valore costante), possiamo scrivere l'hamiltoniana come:

$$H = 4E_C n^2 - E_J \cos \delta$$

Possiamo riscrivere l'hamiltoniana in termini del momento delle coppie di cooper:

$$H = 4E_C \frac{p^2}{\hbar^2} - E_J \cos \delta$$

Questa hamiltoniana descrive un oscillatore anarmonico:



In effetti, nel limite per $\delta \rightarrow 0$ possiamo mantenere solo il primo ordine dell'espansione di Taylor del secondo termine per riottenere un'hamiltoniana armonica:

$$H \approx 4E_C \frac{p^2}{\hbar^2} + \frac{E_J \delta^2}{2}$$

La frequenza di oscillazione diventa (introducendo $L_{J0} = \frac{\hbar}{2eI_0}$):

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{L_{J0}C}}$$

A questo punto lasciamo cadere l'assunzione per cui $I_b = 0$:

$$I_b = \frac{\hbar}{2e} C \ddot{\delta} + I_0 \sin \delta$$

Avremo i due termini energetici (li otteniamo ricavando la lagrangiana del sistema):

$$K(\dot{\delta}) = \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 \frac{C}{2} \dot{\delta}^2$$

$$U(\delta, I) = \frac{\hbar}{2e} \int_{-\infty}^t d\delta (I_0 \sin \delta - I_b) = \frac{\hbar}{2e} I_0 (1 - \cos \delta) - \frac{\hbar}{2e} I_b \delta$$

Con una serie di passaggi poco interessanti, possiamo arrivare a riscrivere l'hamiltoniana completa del circuito:

$$H = \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 C \dot{\delta}^2 - E_J \cos \delta - I \frac{\delta \hbar}{2e}$$

Rimane da rendere più chiaro il primo termine. Da adesso in poi E_C è l'energia di una singola coppia di cooper ($E_C = \frac{2e^2}{C}$) il che porta a un'energia cinetica scritta come: $K = E_C \frac{p^2}{\hbar^2}$. Dalla lagrangiana del sistema possiamo definire il momento:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}} = \frac{\hbar^2 \dot{\delta}}{2E_C} = p$$

Sapendo, per l'effetto Josephson AC, che: $V = \frac{\hbar}{2e} \dot{\delta}$, possiamo riscrivere:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}} = \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 C \dot{\delta} = \frac{\hbar}{2e} CV = \frac{\hbar}{2e} Q = \hbar n$$

Con n che rappresenta il numero di coppie di Cooper. Con quest'ultima informazione otteniamo una nuova rappresentazione per l'hamiltoniana:

$$H = E_C n^2 - E_J \cos \delta - I_b \frac{\delta \hbar}{2e}$$

LEZIONE 13 - 18/11/2021

A questo punto promuoviamo le nostre variabili a operatori (con commutatore $[\hat{n}, \hat{\delta}] = -i$):

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \delta} \quad \hat{n} = -i \frac{\partial}{\partial \delta}$$

E in questo modo possiamo riscrivere l'hamiltoniana (sempre divisa in un termine cinetico e in un termine potenziale):

$$\hat{H} = E_C \hat{n}^2 - E_J \left(\cos \hat{\delta} + \frac{I_B}{I_0} \hat{\delta} \right)$$

Con questa forma è molto più semplice capire cosa succede all'energia potenziale con l'applicazione di una corrente di bias: inizialmente essa ha un profilo prettamente sinusoidale (con molti livelli metastabili ed equidistanti); con la corrente, invece, si deforma asimmetricamente come in Figura 4.1.

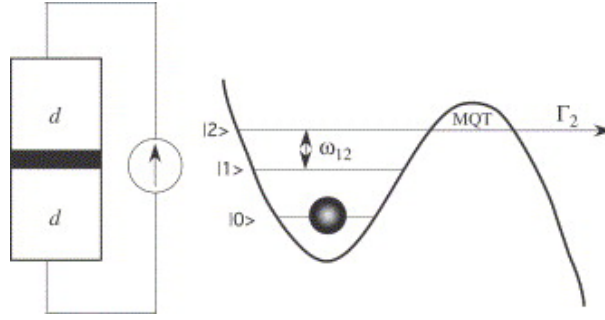


Figura 4.1

Ricordando l'effetto Josephson per cui $V = \frac{\hbar \dot{\delta}}{2e}$, avremo che una coppia di Cooper si romperà nel caso in cui $eV > \Delta$ (con Δ che rappresenta il gap fra le due buche) per un effetto che chiameremo MQT (*Macroscopic Quantum Tunneling*). Modificando la corrente di bias nel modo adeguato potremo facilmente regolare l'hamiltoniana in modo da avere soltanto pochi livelli metastabili (ciò si ottiene sperimentalmente con $I_b \sim 0.95I_0$). Derivando in δ l'hamiltoniana è facile verificare che il minimo si troverà in corrispondenza di $\delta_{min} = \arctan \frac{I_b}{I_0}$.

Definendo ora una nuova variabile $\eta = \delta - \delta_{min}$ possiamo scrivere il potenziale come (espandendo in η):

$$U(\eta) \sim -E_J \left(\sqrt{1 - \left(\frac{I_b}{I_0} \right)^2} \frac{\eta^2}{2} + \frac{I_b}{I_0} \frac{\eta^3}{6} + \dots \right)$$

Potenziale compatibile con un oscillatore armonico con $\omega_0 = 1/\sqrt{L_{J0}C}$ se non c'è corrente di bias, a cui è aggiunta un'anarmonicità del terzo ordine con la corrente. Con la corrente di bias abbiamo ($L_{J0} = \frac{\hbar}{2eI_0}$):

$$\omega_I^2 = \omega_0^2 \sqrt{1 - \left(\frac{I_b}{I_0} \right)^2} = \omega_0^2 \cos \delta = \frac{1}{L_J C} < \frac{1}{L_{J0} C}$$

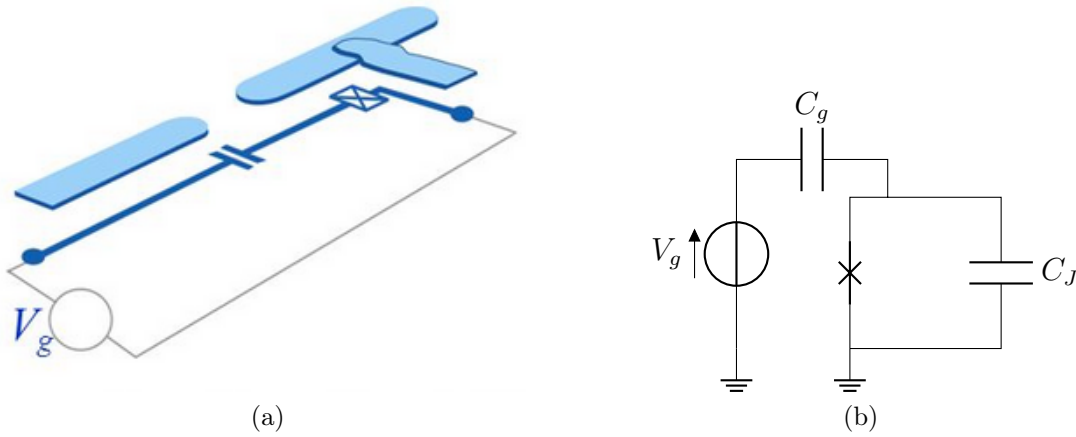
L'anarmonicità data dalla corrente di bias porta a una differenza fra le prime due frequenze di transizione nell'ordine dei 300 MHz (sono dunque facilmente distinguibili). Un'altra relazione che si può ottenere è relativa alla probabilità di decadere da uno degli stati metastabili: $\Gamma_{n+1} \sim 1000\Gamma_n$. Ovvero ogni stato eccitato decade con una probabilità mille volte superiore rispetto al livello energetico immediatamente inferiore. Avendo un qubit costruito in questo modo, siamo in grado di misurare con relativa facilità la distribuzione delle coppie di Cooper fra i primi due livelli. Ci basta irradiare il circuito alla frequenza di transizione ω_{12} : se lo stato che descrive il sistema è $|0\rangle$ non vedremo alcuna accelerazione del rate di decadimento, se invece siamo in $|1\rangle$ ecciteremo il sistema a $|2\rangle$ con una differenza di *decay rate* misurabile.

Ugualmente possiamo irradiare a frequenza costante cambiando la corrente di bias. In una misura, il circuito va leggermente modificato in modo da disaccoppiare il circuito superconduttivo con la strumentazione di misura. In ogni caso, comunque, nel circuito finale non è presente alcuna "isola" (conduttore isolato): le coppie di Cooper possono, perciò, variare senza problemi in numero. Diamo un attimo qualche numero sulla capacità da usare. La condizione che vogliamo ottenere è che E_0 (energia del primo livello metastabile) sia molto minore di E_J (l'energia della barriera di potenziale fra "i due minimi"). $E_0 \ll E_J$ è equivalente a dire: $\frac{\hbar\omega_0}{2} = \sqrt{8E_C E_J} \ll E_J$, ma siccome $E_C \propto \frac{1}{C}$ non

possiamo diminuire la capacità eccessivamente. Tipicamente si usano capacità ~ 10 pF (piuttosto grandi rispetto alla media).

4.1.2 Charge qubit: Cooper Pair Box

Il secondo tipo di circuito che analizzeremo sarà la cosiddetta *Cooper Pair Box*. Il circuito è ottenuto con due elettrodi separati da un dielettrico (il che porta a una capacità chiamata **gate capacity** C_g). Il fatto che siano superconduttori non è ora strettamente necessario. Sul primo elettrodo è collegato un generatore di tensione. Sul secondo elettrodo viene depositato (isolato in modo da creare una giunzione Josephson) un altro superconduttore collegato anch'esso al generatore.



Il termine cinetico dell'hamiltoniana del circuito è leggermente diverso e porta a:

$$K = \frac{CV^2}{2} + C_g \frac{(V_g - V)^2}{2} = \frac{C_{tot}}{2} \left(\frac{\hbar}{2e} \dot{\delta} - \frac{C_g}{C_{tot}} V_g \right)^2$$

dove $n_g = \frac{C_g}{2e} V_g$ rappresenta il numero di coppie di Cooper nella capacità di gate. Perciò possiamo scrivere tutto come prima, ma identificando il momento come:

$$\hat{p} = \hbar(\hat{n} - n_g)$$

e dunque

$$\hat{K} = E_C(\hat{n} - n_g)^2$$

L'hamiltoniana risulta quindi

$$\hat{H} = E_C(\hat{n} - n_g)^2 - E_J \cos \hat{\delta}$$

Notiamo un particolare andamento dell'energia: se rimuoviamo la giunzione Josephson ($E_J = 0$) otteniamo un'energia "a parabola" per ciascun valore fissato di \hat{n} (facendo variare n_g col potenziale esterno). Le parabole si intersecano tutte e, se reintroduciamo la giunzione Josephson, potremo saltare da una all'altra nei punti in cui l'energia è degenera: fondamentalmente attraverso la giunzione potranno saltare dentro e fuori dall'isola le coppie di Cooper. Per ogni parabola avremo infiniti punti di degenerazione (con le parabole immediatamente adiacenti e con quelle più lontane). Tali punti corrispondono ai valori per cui il sistema assume uno stato in sovrapposizione con diversi \hat{n} . Aggiungendo

il *tunneling* apriamo dei gap (che crescono con $\frac{E_J}{E_C}$) interni alle parabole e otteniamo un andamento dell'energia descritto in Figura 4.2¹.

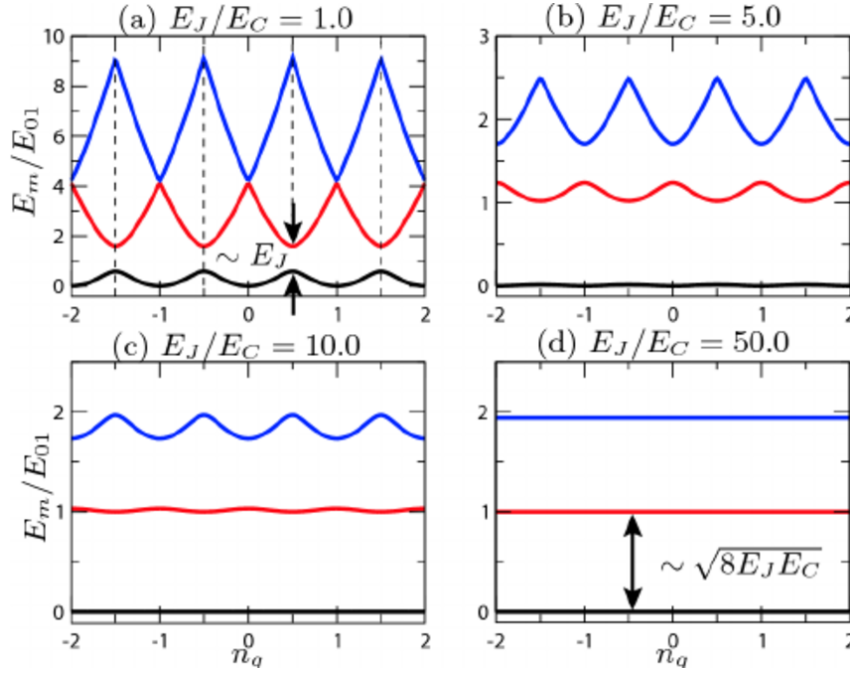


Figura 4.2: Convoluzione degli spettri energetici per una CPB.

Dunque, se aumentiamo la capacità da cui dipende E_C il sistema perde sempre più dipendenza dalla carica (ottimo, stiamo riducendo uno dei principali elementi di *dephasing*), ma anche l'anarmonicità diminuisce. Il limite $E_J/E_C \rightarrow \infty$ viene detto *transmon limit* ed è quello attualmente utilizzato nei qubit superconduttivi.

LEZIONE 14 - 25/11/2021

Abbiamo visto che l'hamiltoniana di una *Cooper Pair Box* risulta:

$$\hat{H} = E_C(\hat{n} - n_g)^2 - E_J \cos \hat{\delta}$$

Per ora abbiamo usato la base del numero di particelle, ma generalmente si tende a studiare il sistema in una base diversa detta *base di carica*. Dopo aver definito $|j\rangle$ come autostato dato dal numero di quasiparticle in un elettrodo che soddisfa $\hat{n}|j\rangle = j|j\rangle$, possiamo proiettare l'hamiltoniana su una base di questi autostati:

$$\hat{H} = \sum_{ij} |i\rangle \langle i| \hat{H} |j\rangle \langle j|$$

Considerando solo il primo termine dell'hamiltoniana, potremo scrivere che:

$$\langle j| \hat{H} |j\rangle = \langle j| \hat{n}^2 |j\rangle - 2n_g \langle j| \hat{n} |j\rangle + n_g^2 \langle j|j\rangle = j^2 - 2n_g j + n_g^2 = (j - n_g)^2$$

Dunque abbiamo, nella base della carica (i termini off-diagonal sono nulli):

$$\hat{H} = \sum_j E_C(j - n_g)^2 |j\rangle \langle j|$$

¹Osserviamo la grande similarità con i risultati dello schema degli elettroni quasi liberi in Fisica dello Stato Solido.

Vediamo ora cosa succede al coseno di δ , il secondo termine dell'hamiltoniana originale. Possiamo considerare l'identità di Eulero:

$$e^{i\delta} = 1 + i\delta - \frac{\delta^2}{2!} - i\frac{\delta^3}{3!} + \frac{\delta^4}{4!} + \dots$$

Ricavando anche i commutatoriⁱⁱ:

$$\begin{aligned} [\delta, n] &= i \\ [e^{i\delta}, n] &= -e^{i\delta} \end{aligned}$$

E troviamo che: $e^{\pm i\delta} |j\rangle = |j \pm 1\rangle$. Infine troviamo la rappresentazione in base di carica del coseno di δ :

$$\cos \delta = \sum_{ij} |i\rangle \langle i| \cos \delta |j\rangle \langle j| = \frac{1}{2} \sum_j (|j+1\rangle \langle j| + |j\rangle \langle j+1|)$$

E gli operatori che compaiono nella formula appena scritta fundamentalmente spostano una quasiparticle dentro e fuori dall'isola. Possiamo scrivere, dunque, l'hamiltoniana di una CPB nella base di carica:

$$\hat{H} = \underbrace{E_c \sum_j (j - n_g)^2 |j\rangle \langle j|}_{E_1} - \underbrace{\frac{E_J}{2} \sum_j (|j+1\rangle \langle j| + |j\rangle \langle j+1|)}_{E_2}$$

Da questa espressione dell'hamiltoniana di una CPB possiamo scrivere, concentrandoci sui primi due livelli, in forma matriciale l'hamiltoniana del qubit corrispettivoⁱⁱⁱ.

$$\begin{aligned} E_1 &= E_C \begin{bmatrix} n_g^2 & 0 \\ 0 & (1 - n_g)^2 \end{bmatrix} = E_C \begin{bmatrix} n_g^2 & 0 \\ 0 & 1 - 2n_g + n_g^2 \end{bmatrix} \\ &= E_C \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2n_g \end{bmatrix} + \cancel{E_C n_g^2 \mathbb{I}} \\ &= \frac{E_C}{2} \begin{bmatrix} -(1 - 2n_g) & 0 \\ 0 & 1 - 2n_g \end{bmatrix} + \frac{E_C}{2} \cancel{(1 - 2n_g) \mathbb{I}} \end{aligned}$$

L'idea è che abbiamo dei numeri j collegati a variabili dinamiche e n_g che è semplicemente una costante. Per questo posso andare a rimuovere i termini costanti. Operando in ugual modo anche per il secondo termine, arriviamo a:

$$\hat{H} = -\frac{E_C}{2}(1 - 2n_g)\hat{\sigma}_z - \frac{E_J}{2}\hat{\sigma}_x$$

Questa espressione è una forma particolare della più generale hamiltoniana per un qubit (indicata con pedice due perché relativa a un sistema a due livelli):

$$\hat{H}_2 = -\frac{1}{2}(\varepsilon\sigma_z + \Delta\sigma_x)$$

dove, in questo caso:

$$\varepsilon = E_C(1 - 2n_g)$$

ⁱⁱSi usano le relazioni $n = Q/2e$, $\Phi = \delta\hbar/2e$, $[\Phi, Q] = i\hbar$

ⁱⁱⁱStiamo approssimando, troncando lo sviluppo del coseno

$$\Delta = E_J$$

$$n_g = \frac{1}{2} \rightarrow \varepsilon = 0$$

Inoltre possiamo identificare il caso in cui $n_g = \frac{1}{2}$ che implica $\varepsilon = 0$. Ora non abbiamo più, però, un'hamiltoniana diagonale (perché abbiamo cambiato base). Dobbiamo quindi cercare nuovamente gli autovalori di \hat{H} e i rispettivi autostati. Abbiamo:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varepsilon & \Delta \\ \Delta & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

E, risolvendo, otteniamo gli autovalori per l'hamiltoniana approssimata:

$$E_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{E_c^2(1 - 2n_g)^2 + E_J^2}$$

E i rispettivi autovettori (espressi nella base computazionale):

$$|E_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$|E_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

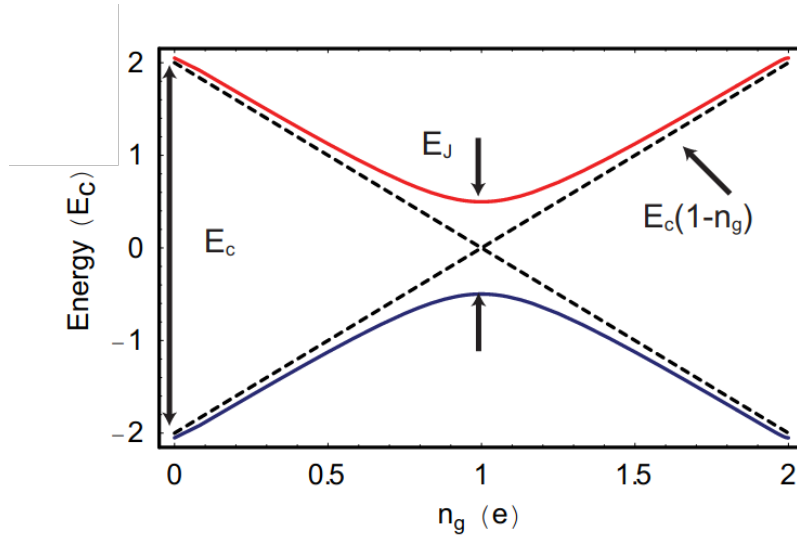


Figura 4.3: https://rsl.yale.edu/sites/default/files/files/RSL_Theses/SchusterThesis.pdf

In realtà, benché abbiamo visto solo un caso specifico, le hamiltoniane di tutti i qubit possono essere scritte in funzione di σ_x e σ_z . Talvolta può essere utile lavorare in un sistema ruotato di θ_m , dove θ_m è l'angolo fra i coefficienti di σ_z e σ_x .

$$\tan \theta_m = \frac{E_J}{E_c(1 - 2n_g)}$$

In questo modo abbiamo un'hamiltoniana più semplice:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar}{2} \omega_q \hat{\sigma}_z$$

$$\text{con } \omega_q = \sqrt{E_J^2 + E_c^2(1 - 2n_g)^2}$$

4.1.3 Limite TRANSMON

Studiamo ora il limite per cui $E_C \ll E_J$. Questa tipologia di **charge qubit** prende il nome, in questo limite, di TRANSMON. Questo limite è particolarmente interessante perché i livelli energetici perdono quasi del tutto la dipendenza dal numero di quasiparticle nell'isola (la differenza fra due picchi va come $e^{-\sqrt{8E_J/E_C}}$). Ciò consente di avere un'energia di transizione ben definita che è necessaria per controllare il qubit. Il problema che sorge, tuttavia, riguarda l'anarmonicità fra i livelli che decresce. Possiamo dunque dire che un alto rapporto E_J/E_C sia conveniente? Per studiarlo dobbiamo tornare a studiare l'hamiltoniana (ma scopriremo che l'anarmonicità è sufficiente). A meno di termini costanti potremo scrivere (espandendo il coseno $(-E_J \cos \delta = -E_J + \frac{E_J \delta^2}{2} - \frac{E_J \delta^4}{24} + \dots)$):

$$\hat{H} = \frac{Q^2}{2C} - E_J + \frac{E_J}{2} \delta^2 - \frac{E_J}{24} \delta^4 = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L_J} - \frac{\Phi^4}{24L_J\Phi_0^2} - E_J$$

Dove abbiamo utilizzato le relazioni $\delta = \Phi/\Phi_0$ e $E_J = \Phi_0^2/L_J$. Considerando anche che:

$$\begin{aligned}\hat{\Phi} &= \sqrt{\frac{\hbar \sqrt{\frac{L}{C}}}{2}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \\ \hat{Q} &= -i \sqrt{\frac{\hbar}{2\sqrt{\frac{L}{C}}}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)\end{aligned}$$

possiamo riscrivere \hat{H} come (di nuovo rimuovo i termini costanti):

$$\hat{H} = \hbar \omega_J \hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{E_C}{12} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^4$$

dove abbiamo:

$$\omega_J = \sqrt{\frac{1}{L_J C}} = \frac{\sqrt{8E_J E_C}}{\hbar}$$

Questa non è propriamente la frequenza di risonanza del qubit (che è definita come la differenza di energia fra i primi due livelli energetici) perché il secondo termine di \hat{H} contribuisce con alcuni addendi \hat{a} e \hat{a}^\dagger . Considerando solo questi (i termini che non hanno \hat{a} e \hat{a}^\dagger bilanciati vengono rimossi nella *rotating wave approximation* con ω_J) e il commutatore $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, posso scrivere l'hamiltoniana:

$$\hat{H} = \left(\sqrt{8E_J E_C} - E_C \right) \hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{E_C}{2} \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{a}^\dagger \hat{a} - 1)$$

Questa è l'hamiltoniana approssimata di un qubit TRANSMON che ha frequenza di risonanza:

$$\omega_q = \frac{\sqrt{8E_J E_C} - E_C}{\hbar} = \omega_J - \frac{E_C}{\hbar}$$

E anarmonicità:

$$\alpha = -\frac{E_C}{\hbar}$$

Realizzazione fisica di un TRANSMON

Diamo qualche numero reale relativo a questo tipo di qubit (che è quello maggiormente utilizzato oggi). Tenzialmente si utilizza un regime $E_J = 50E_C$. Una giunzione Josephson è molto piccola con dimensioni nell'ordine del micrometro e, ad essa, corrisponde una capacità dell'ordine del \sim fF. Il comune design attuale dei TRANSMON è il cosiddetto XMON. Due elettrodi incrociati occupano la maggior parte dello spazio e sono connessi ai sistemi di lettura e controllo, al lato estremo di uno di questi elettrodi sono poste due giunzioni Josephson col qubit vero e proprio. La capacità principale (data dai

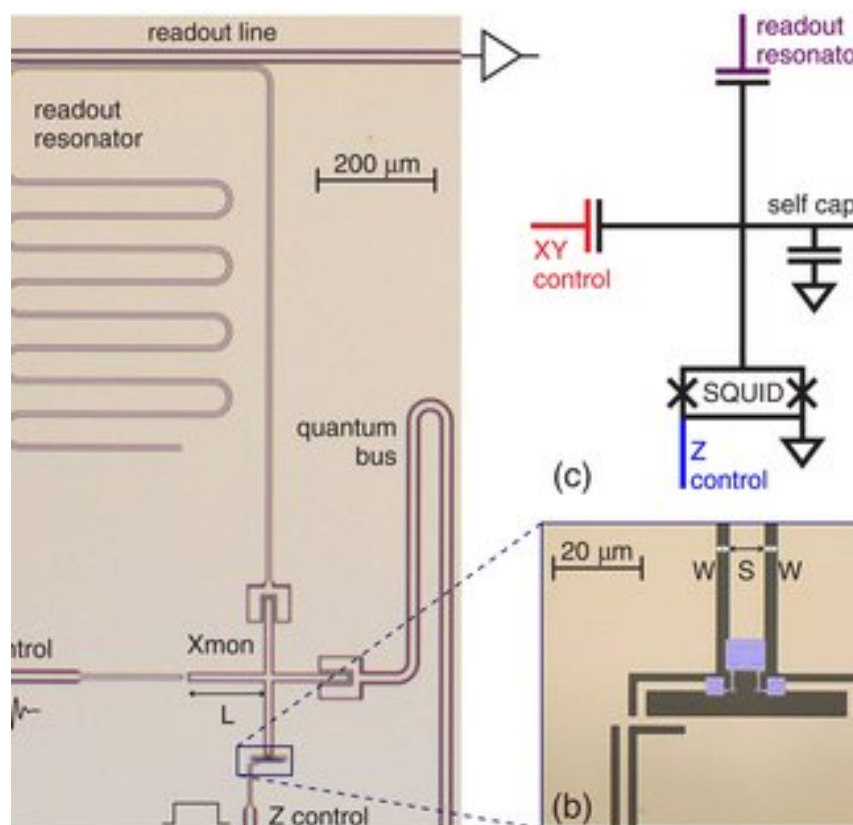


Figura 4.4: https://www.researchgate.net/publication/342301953_Superconducting_Quantum_Computing_A_Review

due grandi elettrodi) aggiunge $10 - 100$ pF. Mentre la giunzione porta ~ 10 nH (devo calibrare il circuito con cautela in modo da avere anche frequenze accessibili). Tutto ciò porta a una corrente critica di $I_0 = 0.03 \mu\text{A}$. Questo, in realtà, è il parametro principale che controlla la frequenza del qubit. La teoria (non studiata da noi) ci porta a scrivere una relazione esatta fra I_0 , T e ω_q ; perciò anche a temperatura ambiente potremmo studiare la frequenza di risonanza. Coi numeri appena scritti si arriva a: $\omega \sim 30$ GHz e anarmonicità di $f \sim$ MHz. Queste analisi possono essere svolte a livello di simulazioni altamente precise.

LEZIONE 15 - 30/11/2021

Nel caso in cui all'estremo dell'elettrodo ci siano due giunzioni, si parla di TRANSMON simmetrico. Questa configurazione permette di variare la corrente critica a piacimento,

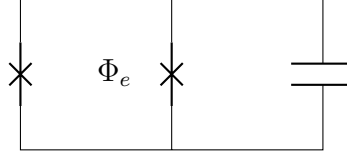


Figura 4.5

tramite l'applicazione del campo esterno Φ_e :

$$I'_0 = 2I_o \left| \cos \frac{\pi \phi_e}{\phi_o} \right|$$

L'hamiltoniana, a questo punto, diventa:

$$H = 4E_C n^2 - 2E_J \left| \cos \left(\pi \frac{\Phi_e}{\Phi_0} \right) \right| \cos \delta$$

Perciò possiamo ora variare sia E_C (progettando il circuito adeguatamente) e E_J (tramite il campo esterno). L'anarmonicità risulta inoltre data da $\pi \frac{\Phi_e}{\Phi_0} = k\pi/2$ (con k interi). Abbiamo, dunque, la capacità di scegliere in modo arbitrario la frequenza di risonanza del qubit (caratteristica chiaramente necessaria, in particolare nel caso di utilizzo di più qubit contemporaneamente). Si noti che differenti varianti del TRANSMON simmetrico sono state proposte (ad esempio usando due giunzioni differenti si può diminuire la dipendenza dal flusso esterno della frequenza del qubit). Questo tipo di circuiti, tuttavia, porta con sé alcuni problemi di fabbricazione: in particolare le giunzioni devono avere dimensioni che non possono essere ottenute con litografia ottica (è necessaria la più complessa litografia a raggi ionici). Inoltre la produzione di tutti i componenti deve essere svolta nel medesimo vuoto in modo da avere superfici il più possibile uniformi.

4.2 Controllo di un qubit

4.2.1 TRANSMON Qubit

Il motivo per cui si utilizza la configurazione "a più" dell'XMON è che in questo modo abbiamo 3 punti di accoppiamento fra la giunzione e l'esterno. Tramite questi punti potremo leggere lo stato del qubit e modificarlo. Il controllo del qubit (e dunque l'applicazione dei gate) viene detto *XY control*: è costituito da una piccola capacità C_d (d di *drive*, come viene chiamato il segnale) collegata a una sorgente *RF* (la presenza della capacità serve a tenere separati i due componenti del circuito, in modo da non diminuire i tempi di decoerenza). L'hamiltoniana del sistema, approssimando il qubit a un semplice oscillatore armonico, risulta (con $Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = \dot{\Phi}(C + C_d)$):

$$H_0 = \frac{Q^2}{2(C + C_d)^2} + \frac{\Phi^2}{2L}$$

Alla quale bisogna aggiungere un ulteriore termine di drive:

$$H_d = C_d \dot{\Phi} V_d(t) = \frac{C_d}{C + C_d} Q V_d(t)$$

A questo punto possiamo scrivere (in funzione della carica di fluttuazione di punto zero $Q_{ZPF} = \sqrt{\frac{\hbar}{2z}}$, con $z = \sqrt{\frac{L}{C}}$):

$$Q = -iQ_{ZPF}(a - a^\dagger)$$

E infine possiamo scrivere l'hamiltoniana totale ($\omega_q = \frac{\sqrt{8E_J E_C - E_C}}{\hbar}$):

$$H = \hbar\omega_q \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) - i \frac{C_d}{C_{TOT}} V_d(t) Q_{ZPF} (a - a^\dagger)$$

Modulando $V_d(t)$ dimostreremo che è possibile controllare lo stato del qubit ruotando lo spazio di Bloch. L'hamiltoniana, scritta con le matrici di Pauli, risulta (concentrandoci solo sui primi due livelli):

$$H = -\sigma_z \frac{\hbar\omega_q}{2} + \frac{C_d}{C_{TOT}} V_d(t) Q_{ZPF} \sigma_y$$

4.2.2 Phase Qubit

In modo simile possiamo ragionare per il qubit di fase. Ricordiamo che il qubit di fase è costituito da un a giunzione Josephson in parallelo a una capacità, il tutto accoppiato con una corrente di bias I_B (non c'è alcun elettrodo isolato per le coppie di Cooper, dunque).

$$\begin{aligned} \hat{H} &= E_C \hat{n}^2 - E_J \cos \hat{\delta} - E_J \frac{\hbar}{2e} I_B \hat{\delta} \\ &= E_C \hat{n}^2 - E_J \left(\cos \hat{\delta} + \frac{I_B}{I_0} \hat{\delta} \right) \\ &= E_C \hat{n}^2 - \frac{I_0}{2\pi} \Phi_0 \cos \hat{\delta} - \frac{I_0}{2\pi} \Phi_0 \hat{\delta} \end{aligned}$$

La forma della curva del potenziale è determinata dal valore scelto per I_B . Aggiungendo (in serie) una corrente variabile nel tempo, possiamo controllare il qubit a piacimento. Dunque abbiamo ora $I_B = I_{B_0} + \Delta I(t)$ (con I_{B_0} che definisce i livelli energetici E_0 e E_1 e i rispettivi autostati $|0\rangle$ e $|1\rangle$). L'hamiltoniana risulta data da:

$$\hat{H}' = \hat{H}_0 - \Delta I(t) \frac{\Phi_0}{2\pi} \hat{\delta}$$

Come abbiamo imparato, l'hamiltoniana considera infiniti livelli mentre noi approssimeremo il sistema solo ai primi due livelli.

$$\hat{H}' = \sum_{ij} |i\rangle \langle i| \hat{H}' |j\rangle \langle j|$$

Il primo termine di \hat{H}' è già diagonale nella base di $|0\rangle - |1\rangle$, il secondo termine è leggermente più complicato e necessita dell'approssimazione di *rotating wave* (che vedremo tra poco). Alla fine otteniamo:

$$\hat{H} = -\hat{\sigma}_z \frac{\hbar\omega_q}{2} + \frac{\Delta I(t) \Phi_0}{2\pi} \delta_{ZPF} \hat{\sigma}_x$$

Dunque otteniamo un'hamiltoniana dipendente da σ_x e un'altra matrice di Pauli (σ_y). Questi sono gli ingredienti fondamentali per il controllo XY.

4.2.3 Oscillazioni di Rabi

Facciamo un passo indietro. La matrice densità nello spazio di un qubit può essere scritta come:

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \sum \rho_i \sigma_i)$$

E si può rappresentare come un vettore unitario in 3 dimensioni: $\vec{\rho} = (\rho_x, \rho_y, \rho_z)$ o, in coordinate sferiche, $\vec{\rho} = (\cos\phi \sin\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\theta)$. In ugual modo l'hamiltoniana può essere scritta come vettore:

$$H = H_x \sigma_x + H_y \sigma_y + H_z \sigma_z \rightarrow \vec{H} = (H_x, H_y, H_z)$$

In generale si parla del termine con σ_z come di termine di stato di qubit, mentre σ_x e σ_y sono adibiti al controllo del qubit. Questo perché possiamo generalmente scrivere l'hamiltoniana come:

$$H = \epsilon \sigma_z + \Delta(t)(\sigma_x + \sigma_y)$$

Abbiamo anche visto che l'evoluzione della matrice densità è descritta dall'equazione di Neumann-Liouville $i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho]$. Nel caso che stiamo analizzando abbiamo dei vettori e, dunque:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{\hbar} \vec{H} \times \vec{\rho}$$

Chiaramente devo anche considerare i tempi di *dephasing* e *decoherence*, perciò otterrei, tramite i termini di Limblad:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_x &= [H \times \rho]_x - \frac{\rho_x}{T_2} \\ \dot{\rho}_y &= [H \times \rho]_y - \frac{\rho_y}{T_2} \\ \dot{\rho}_z &= [H \times \rho]_z - \frac{\rho_z - \bar{\rho}_z}{T_1} \end{aligned}$$

Questi termini descrivono un moto di precessione attorno al vettore \vec{H} . Dunque, variando il termine dipendente dal tempo di H e aspettando un certo tempo, possiamo far variare a piacimento il vettore $\vec{\rho}$. Inoltre, dopo un certo tempo e a temperatura bassa (in modo da non eccitare il qubit), il vettore $\vec{\rho}$ si troverà a coincidere con \vec{H} (dunque conosceremo lo stato iniziale del sistema).

4.2.4 Approssimazione di rotating wave (RWA)

L'approssimazione di *Rotating Wave* (indicata generalmente con RWA) consiste nel passare nel sistema di riferimento in rotazione e cancellare i termini dell'hamiltoniana in rotazione con frequenza elevata. Questa approssimazione è valida nel caso in cui stiamo operando intorno alla frequenza di risonanza e ci permette di semplificare i conti in diversi momenti. Abbiamo appena visto che, se $\vec{\rho}$ e \vec{H} non sono paralleli avremo una rotazione di $\vec{\rho}$. Possiamo cambiare il sistema di riferimento in modo che questa rotazione sia soppressa. Se la rotazione ha una frequenza caratteristica $\omega_q = \frac{E_1 - E_0}{\hbar}$ la trasformazione unitaria per il cambio di sistema di riferimento sarà:

$$U_{RF} = e^{i \frac{H_0 t}{\hbar}}$$

E, chiaramente, siamo in grado di ricavare la trasformazione contraria con facilità. Immaginiamo, ad esempio, di avere uno stato già in evoluzione:

$$|\psi(t)\rangle = U |\psi_0\rangle = e^{-iH_0 t/\hbar} |\psi_0\rangle$$

Passando al sistema di riferimento in rotazione avremo:

$$|\psi_{rf}\rangle = U_{rf} |\psi(t)\rangle = |\psi_0\rangle$$

Dunque abbiamo dimostrato che il vettore di stato cessa di ruotare. L'hamiltoniana (scritta inizialmente come $H = H_0 + H(t)$), è modificata:

$$i\hbar \frac{\partial |\psi_{rf}\rangle}{\partial t} = i\hbar \left(\frac{\partial U}{\partial t} |\psi_0\rangle + U \frac{\partial |\psi_0\rangle}{\partial t} \right) = i\hbar \dot{U} U^\dagger |\psi_{rf}\rangle + U H U^\dagger |\psi_{rf}\rangle = H_{rf} |\psi_{rf}\rangle$$

Dunque abbiamo:

$$H_{rf} = i\hbar \dot{U} U^\dagger + U H U^\dagger$$

LEZIONE 16 - 2/12/2021

Analizziamo ora come possiamo riscrivere l'hamiltoniana nel nuovo sistema di riferimento. Il primo termine di H_{rf} diventa:

$$i\hbar \dot{U} U^\dagger = i\hbar \frac{iH_0}{\hbar} e^{\frac{iH_0 t}{\hbar}} e^{-\frac{iH_0 t}{\hbar}} = -H_0$$

E il secondo:

$$U H U^\dagger = U (H_0 + H(t)) U^\dagger = U H_0 U^\dagger + U H(t) U^\dagger$$

E, dunque, unendo tutto:

$$H_{rf} = U H(t) U^\dagger$$

Studiamo ora lo specifico caso di un qubit che non interagisce con nulla, dove conosciamo la forma dei termini dell'hamiltoniana:

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar\omega_q}{2} \hat{\sigma}_z$$

Avremo ora $U(t) = e^{-\frac{i\omega_q}{\hbar} \sigma_z t}$. Ricordiamo alcune proprietà degli operatori:

$$A = \sum a_n |a_n\rangle \langle a_n|$$

$$e^A = \sum e^{a_n} |a_n\rangle \langle a_n|$$

E nostro caso:

$$\sigma_z = |0\rangle \langle 0| - |1\rangle \langle 1|$$

Perciò l'operatore U diventa:

$$U(t) = e^{-i\frac{\omega_q}{2} t} |0\rangle \langle 0| + e^{i\frac{\omega_q}{2} t} |1\rangle \langle 1|$$

A questo punto aggiungiamo un *drive* al qubit (ovvero un termine di accoppiamento volto al controllo di esso): $\hat{H}_d = -A(t)\hat{\sigma}_x$ (senza perdita di generalità non consideriamo qui

una dipendenza, pur possibile, da $\hat{\sigma}_y$). Supponiamo che la forzante esterna sia data da: $A(t) = A \cos(\omega_d t)$. L'hamiltoniana risulta:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z - A(t)\hat{\sigma}_x = H_0 + H_d$$

Vediamo ora come si comporta il nostro sistema nel caso in cui usiamo un sistema di riferimento in rotazione con ω_d (ma sempre intorno all'asse z). Usiamo l'operatore $\hat{U} = e^{-i\omega_d \hat{\sigma}_z t}$. Il primo termine sarà:

$$i\hbar\dot{U}U^\dagger = -i\hbar \cdot i\frac{\omega_d}{2}\sigma_z = \frac{\hbar}{2}\omega_d\sigma_z$$

Il secondo termine, invece, risulta:

$$UHU^\dagger = UH_0U^\dagger + UH_dU^\dagger = -\frac{\hbar}{2}\omega_q\hat{\sigma}_z - UA(t)\sigma_xU^\dagger$$

Dal primo termine arriviamo a scrivere nell'hamiltoniana finale un fattore (considerando anche quanto abbiamo calcolato alla precedente equazione): $-\frac{\hbar}{2}(\omega_q - \omega_d)\sigma_z$. Dobbiamo d'altra parte studiare più a fondo il secondo termine. Dobbiamo utilizzare alcune relazioni (che qui diamo per note in partenza):

$$e^{\pm i\frac{\omega}{2}t} = \cos\left(\frac{\omega}{2}t\right) \pm i\sigma_z \sin\left(\frac{\omega}{2}t\right)$$

$$\sigma_z\sigma_{x,y}\sigma_z = -\sigma_{x,y}$$

Scrivendo il coseno come C e il seno come S per semplicità, otteniamo da $UA(t)U^\dagger$ il termine:

$$(C - i\sigma_z S)(C + i\sigma_z S) = \sigma_x(C^2 - S^2) + i(\sigma_x\sigma_z - \sigma_z\sigma_x)SC = \sigma_x \cos(\omega_d t) + \sigma_y \sin(\omega_d t)$$

E, dunque, il termine nell'hamiltoniana risulta:

$$UA(t)\sigma_xU^\dagger = A[\sigma_x \cos^2(\omega_d t) + \sigma_y \sin(\omega_d t) \cos(\omega_d t)]$$

Tramite formule trigonometriche, possiamo riscrivere l'equazione:

$$UA(t)\sigma_xU^\dagger = A\left[\frac{\sigma_x}{2}(1 - \cos(2\omega_d t)) + \frac{\sigma_y}{2}\sin(2\omega_d t)\right]$$

L'approssimazione RWA ci dice che, nel caso in cui $2\omega_d \gg |\omega_q - \omega_d|$ (e per un qubit siamo proprio in tale situazione) i termini oscillanti con $2\omega_d$ sono trascurabili. Dunque:

$$UA(t)\sigma_xU^\dagger \approx A\frac{\sigma_x}{2}$$

E l'hamiltoniana complessiva risulta essere indipendente dal tempo e scrivibile come:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar}{2}(\omega_q - \omega_d)\hat{\sigma}_z - \frac{A}{2}\hat{\sigma}_x$$

Si nota, inoltre, che tutti i termini di questa hamiltoniana sono in generale noti poiché la forzante è interamente controllata da noi (dunque sappiamo A e ω_d) e il qubit ha una frequenza misurabile tramite uno scan di ω_d e graficando Δ in funzione di t (quindi

sappiamo anche ω_q). Definendo il *detuning* $\Delta = \omega_q - \omega_d$, la nuova hamiltoniana è scrivibile in forma matriciale come:

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -\Delta & -A \\ -A & +\Delta \end{pmatrix}$$

Se siamo in risonanza ($\Delta = 0$), l'hamiltoniana è allineata lungo l'asse x e abbiamo dunque una precessione di $\vec{\rho}$ intorno a tale asse. Siccome conosciamo la velocità angolare ($A/2$) data dalle caratteristiche dell'impulso RF, possiamo calcolare il tempo necessario per portare, ad esempio, uno stato $|0\rangle$ in $|1\rangle$ (in tale caso si parlerebbe di impulso π). In generale non abbiamo le frequenze perfettamente uguali, perciò il primo passo consiste nel diagonalizzare l'hamiltoniana per trovare gli autovalori:

$$E_{1,2} = \pm \frac{\hbar}{2} \sqrt{A^2 + \Delta^2}$$

Perciò la differenza di energia fra i due livelli sarà $\hbar\sqrt{A^2 + \Delta^2}$. I nuovi autostati, scritti in funzione degli autostati dell'hamiltoniana funzione della sola σ_z risultano:

$$\begin{aligned} |E_1\rangle &= \cos\theta |1\rangle - \sin\theta |0\rangle \\ |E_2\rangle &= \sin\theta |1\rangle + \cos\theta |0\rangle \end{aligned}$$

Dove abbiamo definito $\theta = \arctan\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + \Delta^2} - \Delta}\right)$. Avremo di nuovo un'oscillazione di Rabi attorno a un asse ottenuto ruotando l'asse z iniziale di un angolo 2θ . Nel caso in cui $\Delta = 0$ ritroviamo il risultato precedente (con $\theta = \pi/4$ e l'asse di rotazione coincidente con l'asse x). Se lo stato iniziale è scritto come $|\psi\rangle = C_1 |E_1\rangle + C_2 |E_2\rangle$ la sua evoluzione temporale è scrivibile come:

$$|\psi(t)\rangle = C_1 e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} |E_1\rangle + C_2 e^{-\frac{i}{\hbar} E_2 t} |E_2\rangle$$

Esprimendola nella base iniziale:

$$|\psi(t)\rangle = \left(C_1 e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} \sin\theta + C_2 e^{-\frac{i}{\hbar} E_2 t} \cos\theta\right) |1\rangle + \left(C_1 e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} \cos\theta - C_2 e^{-\frac{i}{\hbar} E_2 t} \sin\theta\right) |0\rangle$$

Supponiamo ora che lo stato iniziale è $|\psi_0\rangle = |0\rangle$ (abbiamo $C_1 = \cos\theta$ e $C_2 = -\sin\theta$), l'evoluzione sarà (usiamo l'uguaglianza $E_1 = -E_2$):

$$|\psi(t)\rangle = -i \sin(E_1 t) \sin(2\theta) |1\rangle + \cos(E_1 t) \sin(2\theta) |0\rangle$$

Possiamo scrivere, a questo punto, la probabilità di ottenere tramite una misura $|0\rangle$ o $|1\rangle$ in funzione del tempo. Nel caso della probabilità di $|1\rangle$ abbiamo:

$$P(|1\rangle) = \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{E_1 t}{\hbar}\right) = \frac{A^2}{A^2 + \Delta^2} \sin^2\left(\frac{\sqrt{A^2 + \Delta^2}}{2} t\right)$$

L'oscillazione massima, corrispondente con l'ottenimento di uno stato $|1\rangle$ con probabilità piena, è ottenibile solo senza *detuning* e si ha (prendendo il t minore) per $t = \frac{\pi}{A}$.

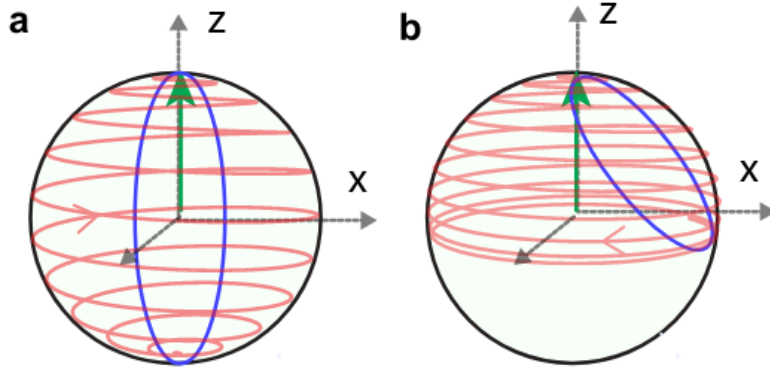


Figura 4.6: La linea rossa (blu) rappresenta l'evoluzione di un qubit guidato nel sistema del laboratorio (sistema rotante del drive). **a** con $\Delta = 0$ e **b** per $\Delta \neq 0$. <https://arxiv.org/pdf/1904.09291.pdf>

4.2.5 Controllo XY

Consideriamo ora l'hamiltoniana per un qubit TRANSMON accoppiato tramite una capacità a una sorgente che porta un termine dipendente da σ_y tale che:

$$\hat{H} = -\hbar \frac{\omega_q}{2} \hat{\sigma}_z + A(t) \hat{\sigma}_y$$

Passo al sistema di riferimento in rotazione con $\hat{U} = e^{-\frac{i}{\hbar} \omega_q t}$. In questo sistema potrò applicare rotazioni sia rispetto all'asse x che rispetto all'asse y. L'hamiltoniana si potrà scrivere come:

$$\hat{H} = U \hat{H}_d U^\dagger = A(t) [\cos(\omega_q t) \sigma_y - \sin(\omega_q t) \sigma_x]$$

In questo caso scegliamo $A(t) = Av(t)$ ponendo attenzione non solo sull'ampiezza, ma anche sulla fase:

$$v(t) = s(t) \sin(\omega_d t + \phi)$$

Dove $s(t)$ è una funzione adimensionale che funge da *envelope* e mi porta a poter scrivere l'ampiezza come $As(t)$, mentre la fase ϕ è scelta arbitrariamente. Possiamo riscrivere $v(t)$ come:

$$v(t) = s(t) (\cos(\phi) \sin(\omega_d t) + \sin(\phi) \cos(\omega_d t))$$

La notazione più in voga per questi termini (che riconosciamo essere le due quadrature del segnale RF) ci dice:

$$\begin{aligned} I &= \cos \phi && \text{chiamata per ragioni storiche: componente in fase} \\ Q &= \sin \phi && \text{chiamata per ragioni storiche: componente fuori fase} \end{aligned}$$

E abbiamo le proprietà:

$$Q^2 + I^2 = 1 \quad , \quad \phi = \arctan \frac{Q}{I}$$

E riscriviamo la nostra hamiltoniana come:

$$\hat{H} = As(t) [I \sin(\omega_d t) - Q \cos(\omega_d t)] \times [\cos(\omega_q t) \sigma_y - \sin(\omega_q t) \sigma_x]$$

Svolgendo il prodotto, usando un po' di trigonometria e applicando la RWA (rimuovo i termini dipendenti da $\omega_q + \omega_d$) arrivo a:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} A s(t) [(-I \cos(\Delta t) + Q \sin(\Delta t)) \sigma_x + (I \sin(\Delta t) - Q \cos(\Delta t)) \sigma_y]$$

Che, espressa in forma matriciale, diventa:

$$\hat{H} = -\frac{A}{2} s(t) \begin{pmatrix} 0 & e^{i(\Delta t + \phi)} \\ e^{-i(\Delta t + \phi)} & 0 \end{pmatrix}$$

LEZIONE 17 - 9/12/2021

Per semplicità ci poniamo adesso, per fare un esempio, in risonanza ($\Delta = 0$). L'hamiltoniana risulta:

$$\hat{H} = -\frac{A}{2} s(t) (I \sigma_x + Q \sigma_y)$$

Se utilizzo un segnale 'in fase' ($I = 1$, $Q = 0$) posso scrivere l'operatore di evoluzione temporale del nostro qubit come:

$$\hat{U}(t) = \exp \left[\left(\frac{iA}{2} \int_0^t dt' s(t') \right) \sigma_x \right]$$

Se, ad esempio, scegliamo:

$$s(t') = \begin{cases} 0 & \text{se } t' < 0 \text{ o } t' > t \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora abbiamo $\hat{U}(t) = e^{\frac{i}{2} A t \sigma_x}$, operatore che descrive una rotazione lungo l'asse x. Dunque se stimoliamo il qubit con un segnale di questo tipo possiamo ruotare lo stato di un angolo a piacere intorno a x . Se procediamo nello stesso modo, ma con un segnale completamente fuori fase, otterremo in modo analogo una rotazione attorno all'asse y .

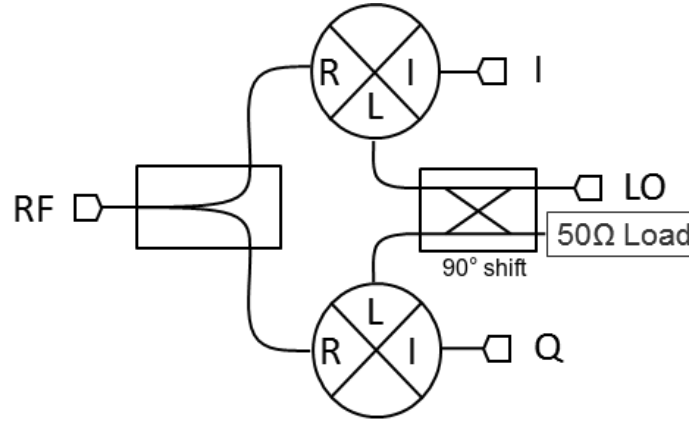
Mixer IQ e realizzazione hardware

Un mixer semplice (non IQ), è un componente elettronico fondamentale per la modulazione di frequenze nell'ordine del GHz. Ha 3 porte: RF, LO (*local*), IF (*intermediate frequency*). LO è sempre un input, mentre le altre due porte possono essere usate alternativamente come input o output. Supponiamo di usare RF come input e IF come output. Possiamo in questo modo fare una *down conversion*: ovvero ci portiamo da alte frequenze a basse frequenze. L'output da IF sarà proporzionale al prodotto del segnale RF e del segnale LO perciò, scegliendo in modo adeguato i segnali, potremo avere una situazione del tipo:

$$\begin{aligned} V_{LO} &= V_0^{LO} \cos(\omega_{LO} t) \\ V_{RF} &= V_0^{RF} \cos(\omega_{RF} t) \\ V_{IF} &\propto \cos((\omega_{LO} + \omega_{RF})t) - \cos((\omega_{LO} - \omega_{RF})t) \end{aligned}$$

Perciò il segnale in uscita sarà diviso in due frequenze: una alta (data dalla somma delle ω che saranno quasi uguali) e una bassa (data dalla differenza fra le frequenze). Con un

filtro adeguato potremo poi scegliere solo una di queste frequenze. Per una *up conversion* useremo, invece, la porta IF come input e la porta RF come output ottenendo, in modo analogo due frequenze: una data da $\omega_{LO} - \omega_{IF}$ e una data da $\omega_{LO} + \omega_{IF}$. Un mixer IQ è, invece, una combinazione di due diversi mixer con un totale di 4 'porte libere'.



IQ Mixer

Supponiamo ora che I, Q e LO siano input cosinusoidali. A RF, dalla parte di I, arriverà un segnale $\propto \cos(\omega_{LO} + \omega_I) + \cos(\omega_{LO} - \omega_I)$ e dalla parte di Q arriverà $\propto \sin(\omega_{LO} + \omega_Q) + \sin(\omega_{LO} - \omega_Q)$. Cambiando la fase relativa fra i segnali I e Q, possiamo modulare a piacimento il segnale in uscita.

Consideriamo ora un qubit TRANSMON collegato tramite una capacità alla porta RF di un mixer IQ. Un oscillatore locale è connesso alla porta LO. Un generatore di onde a due uscite, connesso alle porte I e Q. Con questa configurazione possiamo controllare il qubit con relativa facilità. Assumiamo, in un primo semplice caso, che l'oscillatore sia in perfetta risonanza col qubit ($\omega_q = \omega_{LO}$). Allora, se l'output del AWG (generatore di funzioni arbitrarie) è semplicemente un segnale on/off, quando I e Q sono nulli il segnale su RF sarà anch'esso nullo (questo in realtà è vero solo in linea teorica, in realtà servirebbero minimi correttivi). Se solo I è diverso da zero otterremo un segnale totalmente fuori fase rispetto a LO, mentre se solo Q è diverso da zero il segnale sarà totalmente in fase. Se, invece, il segnale di AWG ha frequenza ω_{AWG} e usiamo un oscillatore con frequenza $\omega_{LO} = \omega_q - \omega_{AWG}$, possiamo usare I e Q in modo da avere a piacimento un segnale in fase o fuori fase. Così facendo otterremo sempre due frequenze, di cui solo una utile al controllo. Ciò che viene fatto usualmente è di sfasare il segnale in ingresso di I e Q di 90° , in modo che il segnale in uscita RF abbia un'unica frequenza caratteristica (si parla di *Single Sideband modulation* - SSB).

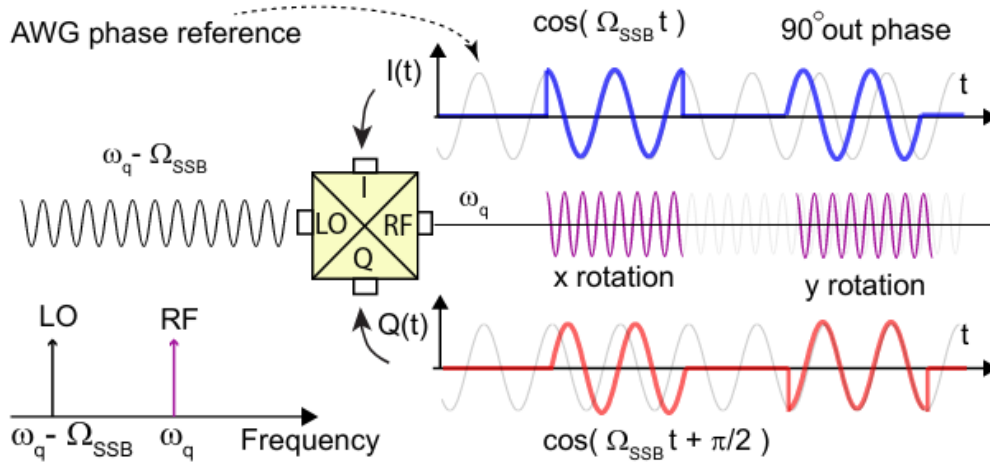


Figura 4.7: Single Sideband Modulation (SSB): By up-converting the LO signal by Ω_{SSB} the mixer outputs at qubit frequency. The relative phase of SSB pulses determines the phase of the output signal thus the direction of the rotation for the qubit. <https://arxiv.org/pdf/1904.09291.pdf>

In questo modo possiamo a piacimento ruotare lo stato del qubit intorno agli assi x-y coi meccanismi di controllo XY che abbiamo già illustrato. Nel caso avessimo più qubit tutti collegati alla medesima linea (connessa a RF) possiamo variare la frequenza ω_{AWG} in modo da stimolare in risonanza solo un qubit alla volta. Questo chiaramente a patto che i qubit abbiano frequenze caratteristiche diverse (proprietà facilmente ottenibile con un qubit TRANSMON simmetrico e una corretta modulazione del flusso interno al circuito).

4.3 Misurazioni e circuit QED

Per la misurazione di un qubit, considereremo un TRANSMON. Utilizzeremo la teoria QED per circuiti (*circuit QED*) che è un'estensione della *cavity QED*. Quest'ultima teoria considera una cavità RF dove, essendoci delle proprietà di risonanza, possono stabilirsi delle onde stazionarie (dei modi di oscillazione che corrispondono a fotoni a frequenze diverse). La cosa interessante è che posso partire da una cavità "vuota" (in un qualche *ground state* $|0\rangle$) ed eccitare il sistema a $|1\rangle$ o $|2\rangle$ stimolando la cavità con l'appropriata onda. Se posso limitarmi ai primi due stati ho, in principio, un qubit.

4.3.1 Cavity QED

Misurazione di una cavità con un atomo di Rydberg

Per misurare il suo stato posso far attraversare la cavità da un atomo con frequenza di transizione (una cavità è un oscillatore armonico quantistico) uguale a quella caratteristica della cavità/qubit (che posso modulare). L'atomo entra in interazione col qubit tramite oscillazioni del suo stato simili a quelle di Rabi perciò, scegliendo con cautela velocità dell'atomo e dimensioni della cavità, posso far sì che l'atomo subisca una rotazione di π mentre la cavità non ruoti (dunque abbiamo una QND). Negli esperimenti che

portarono all'assegnazione del premio Nobel per la fisica del 2012 ^{iv}, venivano usati atomi di rubidio (Rb) (utili perché dotati di grande dipolo elettrico) sfruttando la cosiddetta interferometria Ramsey. La configurazione hardware dell'esperimento comprendeva, in particolare, due segnali RF che l'atomo attraversava prima (R1) e dopo (R2) attraverso il qubit atti alla misurazione e al controllo dello stato atomico (tramite tecnologie più classiche). Dell'atomo vengono usati, in particolare, 3 stati: $|i\rangle$, $|g\rangle$ e $|e\rangle$ (dati da livelli di Rydberg in approssimazione di atomo sferico). Dove la differenza di energia fra $|g\rangle$ e $|e\rangle$ corrisponde alla frequenza di risonanza del qubit. Assumiamo che l'atomo sia inizialmente nello stato $|g\rangle$ e che vogliamo misurare se la cavità si trova nello stato $|0\rangle$ o $|1\rangle$. Lo inviamo attraverso la cavità R1 (che ha frequenza caratteristica data dalla differenza di energia fra $|g\rangle$ e $|i\rangle$) e gli diamo un impulso di $\pi/2$. L'atomo, dopo R1, si troverà quindi in uno stato: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + |i\rangle)$. A questo punto l'atomo attraversa la cavità principale interagendo col campo elettrostatico quantizzato tramite il proprio dipolo elettrico. A seconda dello stato della cavità, l'accoppiamento fra campo elettrico e dipolo opererà in modo differente. L'hamiltoniana di interazione fra atomo e cavità viene detta hamiltoniana di Jaynes-Cumming e avrà chiaramente degli autostati che dipendono dagli stati del campo e dell'atomo. Essendoci una sovrapposizione di stati, avremo anche una precessione data dalla differenza di energia degli autostati ovvero avremo oscillazioni di Rabi. Progettando in modo adeguato l'esperimento, posso far sì che la cavità mi dia un impulso π . L'evoluzione dello stato è data da:

$$\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right)|g, 1\rangle + \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)|e, 0\rangle$$

L'atomo, dunque, varierà stato solo se la cavità è in $|1\rangle$ e arriverà a $\frac{1}{\sqrt{2}}(-|g\rangle + |i\rangle)$ (ho $\Omega t/2 = 2\pi$). Attraversando poi R2 (anch'essa $\pi/2$ come R1) lo stato andrà in $|g\rangle$ o $|e\rangle$ (a seconda del segno relativo fra $|i\rangle$ e $|g\rangle$).

LEZIONE 18 - 14/12/2021

La teoria che descrive questo esperimento ha applicazioni molto interessanti per qubit superconduttivi che possono essere accoppiati a cavità per il *readout* e anche per il *controllo*. Nel caso di atomi veri e propri la frequenza di transizione era nell'ordine della decina di GHz, mentre per un qubit sarà nell'ordine del centinaio di MHz (cosa che porta a circuiti che occupano poco spazio). La configurazione più comune sarà quella di avere un insieme di qubit e cavità posti tutti su un piano. Il vantaggio principale è che gli atomi dovevano attraversare fisicamente la cavità (dunque l'interazione era limitata nel tempo) e il campo elettrico non era uniforme al suo interno. Questi problemi, chiaramente, un accoppiamento "a circuito" non li deve risolvere. Inoltre il fatto che il qubit sia artificiale ci permette di variare i suoi parametri molto più rapidamente. Gli svantaggi vengono invece da problemi di decoerenza e decadimento (che avviene molto più velocemente che per un atomo reale).

Tipologie di cavità

Nel caso dell'atomo la cavità era realizzata con due specchi elettromagnetici (generalmente costituiti dal superconduttore niobio). Considerando un campo elettromagnetico classico, l'energia dei modi di oscillazione è libera; d'altra parte se consideriamo il campo

^{iv}<https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/advanced-physicsprize2012.pdf>

come quantizzato, possiamo descrivere ogni modo come un oscillatore armonico indipendente. Per un qubit superconduttivo abbiamo almeno 3 differenti modalità principali di realizzazione. La più semplice, detta *3D cavity*, consiste nel prendere un blocco di materiale superconduttivo (alluminio, ad esempio) e tagliarne una parte centrale in modo da ottenere una cavità con una forma speciale (ad esempio cilindrica). Il qubit è dunque posto all'interno di tale buco che viene chiuso. Due connettori posti all'esterno (e connessi al qubit in modo particolare) vengono usati per controllare e misurare il qubit. Chiaramente dovremo progettare la cavità in modo da modulare adeguatamente la frequenza di risonanza: per una cavità monodimensionale, ad esempio, avremo onde stazionarie per (L è la lunghezza):

$$\omega_c = \frac{n\pi}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}L}$$

Cavità di questo tipo vengono usate per diverse applicazioni (anche per acceleratori). Queste cavità sono caratterizzate da un fattore di merito Q che varia con le dimensioni della cavità stessa: più piccola sarà, più sarà la vita media. Un altro approccio possibile è quello delle guide d'onda coplanari (CPW). Con le adeguate condizioni al contorno è possibile stabilire onde stazionarie su un piano: l'idea è di usare un blocco superconduttivo e porre al centro una linea che trasporti l'onda, mentre i lati operano da terra. Isolando la guida con dei condensatori, il sistema è equivalente a un circuito LC che può essere quantizzato. Essendo un oscillatore armonico avremo l'hamiltoniana $H = \hbar\omega_c (a^\dagger a + \frac{1}{2})$ che descrive infiniti modi d'oscillazione. Usualmente, tuttavia, solo uno di questi è dominante (e detterà la frequenza caratteristica della cavità ω_c). Più recentemente si è anche iniziato ad usare circuiti LC reali concentrati (*lumped*) accoppiati con una capacità al qubit (come abbiamo visto presentando la struttura di un XMON). Come per le semplici CPW, l'hamiltoniana risultante è quella di un oscillatore armonico con $a^\dagger a$ che indica il numero di fotoni presenti. Generalmente, l'interazione col qubit è compiuto unicamente della parte elettrica del campo, mentre la parte magnetica è trascurabile. Per ora le differenze fra atomo reale e artificiale sono minime. In ogni caso il qubit è un sistema a due livelli descritto dalla sua hamiltoniana:

$$\hat{H}_q = -\frac{1}{2}\hbar\omega_q\hat{\sigma}_z$$

Siccome generalmente vogliamo una frequenza caratteristica variabile, usiamo la configurazione del TRANSMON simmetrica (o delle semplici CPB). Si utilizza una doppia giunzione e si pone all'interno un flusso che fa variare l'energia Josephson secondo la formula (non derivata esplicitamente da noi):

$$E_J = E_{0J} \cos\left(\pi \frac{\Phi_e + \Phi(t)}{\Phi_0}\right)$$

In questo modo possiamo variare ω_q che è proporzionale a $\sqrt{E_c E_J}$. Dunque, possiamo fissare ω_c in fase di costruzione e progettazione e aggiustare ω_q con questo metodo. Il campo elettrico del primo modo di oscillazione stazionario lungo l'asse z (considerando una cavità 2D con assi x e z) è descritto da:

$$\hat{E}_x = E_0(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \sin(kz)$$

Ponendoci al centro del nostro risonatore (dunque a $z = L/2$), il campo è ($k = \omega_0\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$):

$$\hat{E}_x(z = L/2) = E_0 (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$$

Dunque, ora abbiamo un campo elettrico che interagisce col dipolo del qubit. L'hamiltoniana di interazione risulta:

$$\hat{H}_{int} = \hat{d} \cdot \hat{E}_x = d_x \hat{\sigma}_x \hat{E}_x = d_x E_0 (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) = g \hbar (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (a + a^\dagger)$$

Dove abbiamo definito l'accoppiamento (*coupling*): $g = \frac{d_x E_0}{\hbar}$. Questo descrive chiaramente l'atomo (dove sappiamo calcolare facilmente il dipolo), mentre per il qubit possiamo comunque ottenere il dipolo con alcune accortezze. Questa hamiltoniana (detta hamiltoniana di Rabi), dunque, descrive l'accoppiamento tra qubit e fotone:

$$H_{Rabi} = \hbar \omega_c \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) - \frac{\hbar \omega_q}{2} \sigma_z - g (\sigma_+ + \sigma_-) (a + a^\dagger)$$

Avremo degli autostati relativi al qubit (alla sua hamiltoniana libera) $|g\rangle$ e $|e\rangle$ (con autovalori $\pm \frac{\hbar \omega_q}{2}$, mentre per il campo avremo autostati (nello spazio di Fock) $|n\rangle$ (con autovalori $\omega_c(n + \frac{1}{2})$). Queste due basi, assieme, costituiscono quella che viene chiamata *bare basis* e descrive i due sistemi disaccoppiati. Per prima cosa cerchiamo di semplificare il problema tramite RWA. Se assumiamo $g \ll \omega_c, \omega_q$, possiamo considerare il termine di interazione dell'hamiltoniana come perturbazione. Tale termine è scrivibile, moltiplicando tutto, come:

$$g(a\sigma_+ + a\sigma_- + a^\dagger\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-)$$

Dove $a\sigma_-$ e $a^\dagger\sigma_+$ sono operatori di diseccitazione ed eccitazione totale (sia per il qubit che per il campo). Le frequenze caratteristiche di questi due termini ($\frac{E_c + E_q}{\hbar}$) sono molto maggiori delle frequenze relative agli altri termini: $\Delta E = \pm \hbar(\omega_c - \omega_q) \ll (E_c + E_q)$. Dunque l'approssimazione RWA (ottenuta passando a un sistema in rotazione con $U = e^{i(H_c + H_q)t/\hbar}$) ci permette di trascurarli del tutto. Arriviamo, dunque, a una cosiddetta hamiltoniana di Jaynes-Cumming (che descrive l'interazione tra un sistema a due livelli e una cavità contenente un campo quantizzato):

$$H_{JC} = \hbar \omega_c (a^\dagger a + 1/2) - \frac{1}{2} \omega_q \hbar \sigma_z + \hbar g (a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-)$$

Diagonalizzando questa hamiltoniana troviamo gli autostati $|n, +\rangle$ e $|n, -\rangle$ che formano una nuova base. Un generico stato sarà, dunque, esprimibile come:

$$|\psi\rangle = C_0 |n, +\rangle + C_1 |n, -\rangle$$

Stato che evolverà come usuale.

4.3.2 Limite dispersivo

Definiamo come al solito il *detuning*: $\Delta = \omega_q - \omega_c$. Se vale $\Delta \gg g$ possiamo modellare l'interazione come "dispersiva" (cioè senza che il qubit assorba alcun fotone) tramite la teoria delle perturbazioni. Spostandoci ora in un sistema di riferimento in rotazione con una frequenza dipendente dalla differenza di energia fra i due stati otteniamo oscillazioni fra i due stati del sistema. La frequenza di Rabi necessaria a passare questo sistema di riferimento è:

$$\omega_r = \frac{E_{n+} + E_{n-}}{\hbar} = \sqrt{\Delta^2 + 4g^2(n+1)}$$

Nel caso di un *detuning* nullo, abbiamo $\omega_r = 2g\sqrt{n+1}$ (chiaramente più fotoni abbiamo nella cavità, più veloce è la rotazione risultante). Comunque anche quando non abbiamo

fotoni la frequenza di Rabi è non nulla: $\omega_r^{ZPF} = \sqrt{\Delta^2 + 4g^2}$ (fluttuazione di punto zero). Un modo diverso di approcciarsi al limite dispersivo è quello di calcolare gli autovalori dell'hamiltoniana di Jaynes-Cumming:

$$E_{n\pm} = \hbar\omega(n+1) \pm \sqrt{\left(\frac{\hbar\Delta}{2}\right)^2 + \hbar^2 g^2(n+1)}$$

Espandendo al second'ordine in g/Δ otteniamo l'hamiltoniana:

$$H \approx \hbar \left(\omega_c + \frac{g^2}{\Delta} \sigma_x \right) (a^\dagger a + 1/2) + \hbar\omega_q \sigma_z / 2$$

Qubit e cavità interagiscono ancora (tramite il termine g^2/Δ), ma senza cambiare gli autostati (poiché il termine commuta col resto dell'hamiltoniana). Gli autovalori, tuttavia, vengono spostati:

$$E_{n\pm} = \hbar\omega_c(n+1) \pm \frac{\hbar\omega_q}{2} \pm \hbar \frac{g^2}{\Delta} (n+1)$$

Scriviamo l'hamiltoniana approssimata usando $\chi = \frac{g^2}{\Delta}$ (le differenze da quella scritta sopra sono tutte riconducibili a un cambio di notazione):

$$H = \hbar\omega_c a^\dagger a - \frac{\hbar}{2}(\omega_q - \chi)\sigma_z + \hbar\chi a^\dagger a \sigma_z$$

Si può riscrivere come:

$$H = \hbar\omega_c a^\dagger a - \frac{\hbar}{2}(\omega_q - \chi - 2\chi a^\dagger a)\sigma_z$$

E così si vede chiaramente che il qubit subisce un'interazione dipendente dal numero di fotoni della cavità. Il termine di interazione $\hbar\chi a^\dagger a \sigma_z$ commuta col resto dell'hamiltoniana, dunque è un'interazione senza demolizione (QND). L'hamiltoniana può essere ancora riscritta:

$$H = \hbar(\omega_c + \chi\sigma_z)a^\dagger a - \frac{\hbar\tilde{\omega}_q}{2}\sigma_z$$

Quello che possiamo vedere è che la frequenza di risonanza della cavità è variata a seconda dello stato del qubit e non varia rispetto al numero di fotoni presenti. Se mandiamo un segnale nelle microonde, nel limite $\frac{g\sqrt{n}}{\Delta} \ll 1$, possiamo misurare lo stato in cui si trova il qubit.

LEZIONE 19 - 16/12/2021

Torniamo ora un attimo a descrivere i livelli energetici ricavati come autovalori dall'hamiltoniana di Jaynes-Cumming. Supponiamo di disegnare in verticale, come linee orizzontali, i livelli energetici della cavità e, a fianco, i livelli energetici del qubit. Consideriamo anche un $\Delta < 0$. Per ora stiamo considerando come se non ci fosse alcuna interazione fra i due sistemi (ovvero $g = 0$ o $|\Delta| \gg 0$). Ora aumentiamo l'interazione (diminuendo il *detuning*): il livello eccitato del qubit si sposterà a energie inferiori, mentre quello della cavità si sposterà a energie superiori. Nel caso $\Delta = 0$ avremo i livelli eccitati che inizialmente sono uguali, ma verranno a crearsi due *polarons states* dovuti all'ibridazione fra i due sistemi (uno inferiore rispetto agli originali viene detto $|n-\rangle$ e uno superiore $|n+\rangle$). La

degenerazione iniziale, dunque, è rotta dall'interazione: tale fenomeno è spesso chiamato *dynamic Stark splitting* (è causato dal campo elettrico della cavità e descritto dal termine dell'hamiltoniana $\propto \frac{g^2 n}{\Delta}$). Assieme ad esso si parla anche di *Lamb shift*, per il termine non dipendente da n ($\propto \frac{g^2}{\Delta}$). Si parla anche di *Rabi splitting* poiché fondamentalmente provoca oscillazioni di Rabi (come abbiamo visto precedentemente).

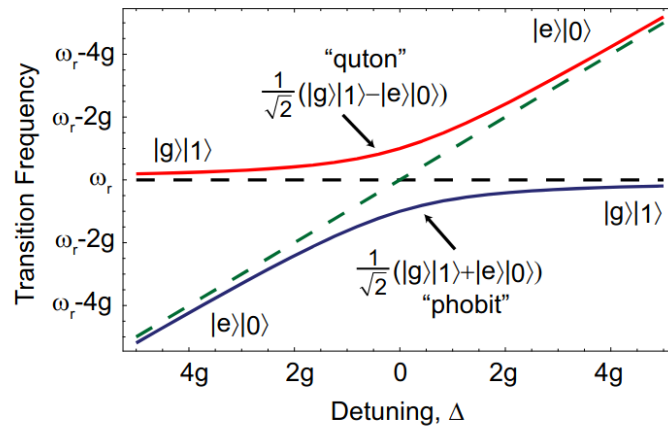


Figura 4.8: A plot of the avoided crossing in the transition frequency between the ground state in the one excitation manifold. The dashed lines show the uncoupled resonator frequency, ω_r (black) and qubit frequency, ω_a (green). The solid red and blue lines show the energy for the $|1+\rangle$ and $|1-\rangle$ states as a function of detuning. At large detunings these energies and the associated eigenstates approach that of the uncoupled system. When $\Delta \rightarrow 0$ the photon and qubit become entangled forming “phobit” and “quton” states. https://rsl.yale.edu/sites/default/files/files/RSL_Theses/SchusterThesis.pdf

Le due frequenze, dunque, sono sottoposte ad *avoided crossing* a causa dell'ibridizzazione degli stati. La minima differenza fra le due curve è proporzionale a $\propto g\sqrt{n+1}$ (perciò più l'accoppiamento è forte, più i livelli si allontanano). Le oscillazioni di Rabi che vengono a crearsi, si stabiliscono fra uno stato $|e, n\rangle$ e lo stato $|g, n+1\rangle$ con una frequenza data dallo splitting fra i due livelli ibridati. Consideriamo ora il limite dispersivo (il grafico a livelli che riportiamo è **diverso** da quello precedentemente descritto). Ogni stato si sposterà di $|n\chi|$

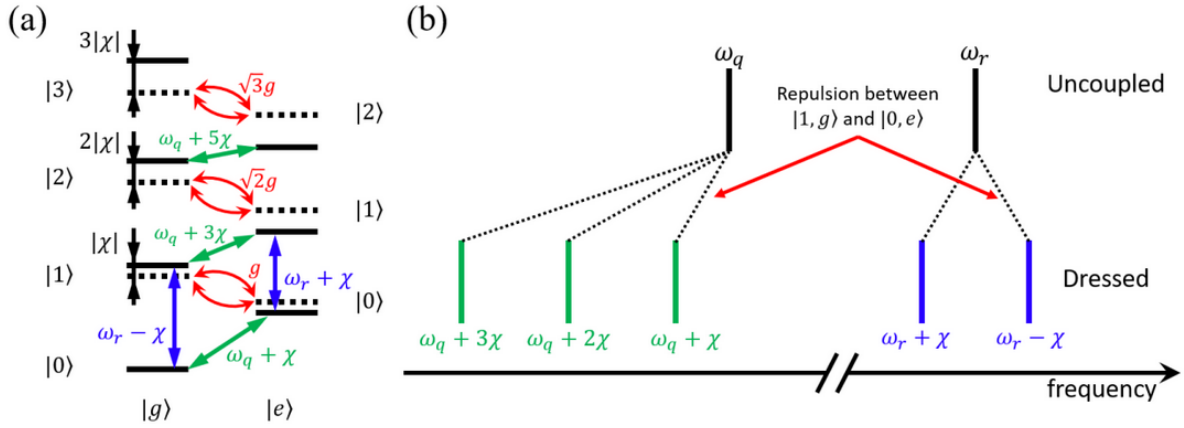


Figura 4.9: (a) Energy level diagram of a CQED system in the dispersive limit. Dotted black lines denote the uncoupled bare basis and solid black lines denote the dressed basis. (b) Spectrum of the uncoupled bare basis and the dressed basis. https://drive.google.com/file/d/11HFMI_mos-a6GmhRrptYak8xe5h7oNzw/view

Nella Figura (b) sono riportate in frequenza le possibili transizioni. Si vede che il qubit è sensibile al numero di fotoni presenti nella cavità: questo è problematico perché una certa fluttuazione in n è inevitabile e sarà, dunque, una fonte di *dephasing*.

4.3.3 Oltre all'hamiltoniana di Jaynes-Cumming

L'hamiltoniana complessiva dei due sistemi, in realtà, è data dalla somma dell'hamiltoniana di Jaynes-Cumming e due diversi termini:

$$H = H_{JC} + H_\gamma + H_k$$

I due termini aggiuntivi descrivono transizioni non considerate dall'hamiltoniana che abbiamo studiato fino ad ora. Ad esempio H_k descrive la possibilità di fuga dei fotoni: questo termine è dunque legato a k , il rate di decadimento della cavità (si parla di accoppiamento della cavità col continuo o con l'ambiente). Possiamo scrivere:

$$k = \frac{\omega_c}{Q}$$

Q è il fattore di qualità della cavità che descrive la larghezza della risonanza della cavità stessa e, dunque, la sua vita media. In particolare un alto Q ci permette di distinguere al meglio le frequenze di transizione della cavità ed è perciò, preferibile. Invece H_γ descrive l'accoppiamento fra qubit e modi di oscillazione diversi da quelli della cavità (ovvero descrive la probabilità che il qubit decada tramite fotoni alla frequenza "sbagliata"). Anche questo termine contribuisce, chiaramente, al valore del tempo di rilassamento. H_γ descrive, dunque, la larghezza delle frequenze della cavità (ed è un fattore largamente controllabile), mentre H_k descrive la larghezza delle frequenze del qubit (ed è un fattore largamente intrinseco). Chiaramente i polarons avranno larghezza $(\gamma + k)/2$.

4.3.4 Charge qubit e CPW

Nel caso di qubit superconduttivi, lo studio dell'accoppiamento cavità-qubit può essere affrontato diversamente. Abbiamo detto che è possibile realizzare una cavità in modi

diversi (ad esempio la cavità 3D). Siccome attualmente viene utilizzata maggiormente una cavità 2D (usando una CPW) ci concentreremo su questa realizzazione. Lo studio di tale cavità è piuttosto complicato, ma ci permette di definire in fase di progettazione tutte le sue caratteristiche: in particolare abbiamo che il fattore di merito Q dipenderà dai valori capacitivi agli estremi della CPW e a seconda dei collegamenti fra linea di trasmissione e bulk. In generale si scrive:

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_{int}} + \frac{1}{Q_{ext}}$$

Dove Q_{int} è il fattore di merito ottenuto considerando solo la CPW in sé e Q_{ext} considera l'accoppiamento con l'esterno della CPW (ovvero le due capacità agli estremi). Questa è una visione classica del sistema, chiaramente le formule subiranno alcuni cambiamenti con la quantizzazione del campo. In ogni caso rimangono i fattori di merito collegati al decadimento della cavità (ad esempio Q_{ext} contiene informazioni sulla probabilità di un fotone interno di accoppiarsi con l'esterno). Diamo qualche dimensione alla CPW: la linea di trasmissione interna sarà lunga all'incirca 1cm (e separata dal resto in modo da disaccoppiare la cavità), mentre lo spazio di dielettrico fra essa e i GND sarà generalmente nell'ordine di $10\mu\text{m}$. Un qubit (di circa $1\mu\text{m}$) può essere posizionato in posizione corrispondente al centro della cavità (dove la prima onda stazionaria raggiunge il suo massimo).

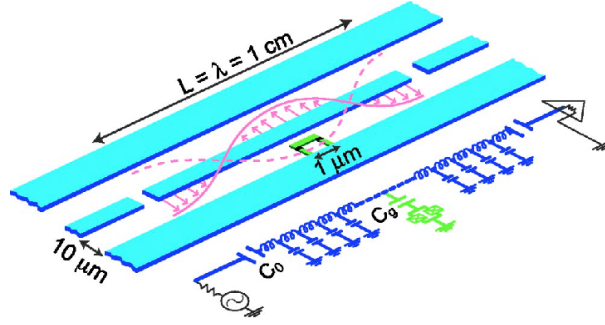


Figura 4.10: https://www.researchgate.net/publication/279263572_Coupling_quantum_dot_circuits_to_microwave_cavities

La cavità, raffreddata abbastanza, si comporta come un oscillatore armonico con hamiltoniana:

$$\hat{H} = \hbar\omega_c \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right)$$

Studiamo ora come avviene l'accoppiamento fra un qubit di carica (ne considero uno a doppia giunzione in modo da poter controllarne la frequenza caratteristica tramite una variazione dell'energia Josephson) e una cavità. L'hamiltoniana che abbiamo ricavato per questo qubit è:

$$\hat{H} = E_C(\hat{n} - n_g)^2 - E_J \cos \delta$$

E non dobbiamo dimenticarci che l'operatore numero $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ veniva dal formalismo della seconda quantizzazione dopo aver reso discreti gli operatori (canonici) \hat{Q} e $\hat{\Phi}$. Possiamo anche identificare due diversi tipi di tensione: una "classica" che è quella utilizzata per controllare il numero di coppie di Cooper presenti sull'isola del qubit e una "quantistica" e quantizzata data da: $\hat{V} = \hat{Q}/C$. Avevamo definito $n_g = \frac{C_g V_g}{2e}$ (capacità e tensione di

gate). Ora sostituiamo a V_g la tensione totale: $V_g \rightarrow \frac{\hat{Q}}{C} + V_g$. In questo modo arriviamo a ridefinire n_g :

$$\hat{n}_g = \frac{C_g(V_g + \hat{V})}{2e}$$

Dunque la parte elettrostatica dell'hamiltoniana è scrivibile come (rimuovo i termini costanti):

$$\hat{H} = E_C(\hat{n} - n_g)^2 - E_C C_g \frac{\hat{V} \hat{n}}{e}$$

Vale anche la relazione (con il parametro modulabile e compreso fra 0 e 1: $\beta = C_g/C_{TOT}$):

$$\frac{E_C C_g}{e} = \frac{2e}{C_{TOT}} C_g = 2e\beta$$

Dunque posso scrivere il secondo termine dell'hamiltoniana elettrostatica come:

$$2e\beta V_0(\hat{a}^\dagger + \hat{a})\hat{n}$$

Con $V_0 = V_{ZPF} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{CL}}$. Questo è il termine che causa l'accoppiamento fra campo della cavità e qubit anche in assenza di fotoni. Nel caso $Q = 10 GHz$ e le dimensioni sopraindicate della cavità avremo $V_0 \sim 2 \mu V$ (un valore non trascurabile) e un campo $E \sim 0.2 \frac{V}{m}$ (circa 100 volte superiore al campo ottenibile nel caso di atomi reali). Il termine g di accoppiamento è:

$$g = \frac{eV_0\beta}{\hbar}$$

Benché abbiamo intuito da dove viene il termine di accoppiamento g , non abbiamo ancora trovato la corretta hamiltoniana di Jaynes-Cumming.

Cooper Pair Box

Analizziamo inizialmente il caso di una *Cooper Pair Box*. Ricordiamo che, per una CPB, abbiamo $E_C \gg E_J$ e l'hamiltoniana (ridotta a due livelli) si può scrivere come:

$$H = -\frac{E_C}{2}(1 - 2n_g)\sigma_z + \frac{E_J}{2}\sigma_x - 2\hbar g(a^\dagger + a)\hat{n} + H_C$$

L'ultimo termine è quello su cui ancora dobbiamo lavorare (benché sappiamo che $\hat{n} \propto \sigma_z$). Quando abbiamo studiato le CPB abbiamo detto che, per raggiungere la forma corretta dell'hamiltoniana per il sistema a due livelli, era necessario ruotare gli assi x - z per un angolo $\theta = \arctan\left(\frac{E_J}{E_C(1-2n_g)}\right)$. Così facendo, i primi due termini dell'hamiltoniana appena scritta (relativi al qubit "libero") diventavano allineati al nuovo asse z ruotato e potevano essere scritti, assieme, come: $-\frac{\hbar}{2}\omega_q\sigma_z$. Il termine di interazione, dopo la rotazione, risulta:

$$2\hbar g(a^\dagger + a)(1 - 2n_g - \cos\theta\sigma_z + \sin\theta\sigma_x)$$

Nel classico regime di funzionamento $n_g = 1/2$ otteniamo l'hamiltoniana di Jaynes-Cumming:

$$H = -\frac{\hbar}{2}\omega_q\sigma_z + 2\hbar g(a^\dagger + a)\sin\theta\sigma_x + H_C$$

TRANSMON

Nel caso, invece, di un più comune TRANSMON abbiamo $E_J \gg E_C$ (cosa che ci porta a una maggiore indipendenza dalla carica presente sull'isola). L'hamiltoniana iniziale è:

$$H = E_C(\hat{n} - n_g)^2 - E_J \cos \delta + \hbar\omega_c(a^\dagger a + 1/2) + 2e\beta V_0 \hat{n}(a^\dagger + a)$$

I termini dell'hamiltoniana del qubit li avevamo analizzati tramite espansione, rimuovendo i termini che oscillavano con frequenza molto maggiore degli altri e avevamo ottenuto:

$$E_C(\hat{n} - n_g)^2 - E_J \cos \delta \approx \hbar\omega_q b^\dagger b - \frac{E_C}{2} b^\dagger b (b^\dagger b - 1)$$

E avevamo potuto scrivere:

$$\hat{n} \approx \frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{E_J}{\Delta E_C}} (b - b^\dagger)$$

Usando $\omega_q = \frac{1}{\hbar} \sqrt{8E_J E_C} - E_C/\hbar$ (dove $\alpha = E_C/\hbar$ è l'anarmonicità), possiamo esprimere il termine di interazione nella base $|j\rangle$ del TRANSMON libero:

$$H_{int} = \hbar \sum_{ij} g_{ij} |i\rangle \langle j| (a^\dagger + a)$$

I termini g_{ij} descrivono l'accoppiamento fra diversi stati del TRANSMON in interazione con il campo:

$$\hbar g_{ij} = 2e\beta V_0 \langle i | \hat{n} | j \rangle$$

Si può dimostrare che queste frequenze di transizione hanno la stessa forma fra stati adiacenti:

$$\langle j+1 | \hat{n} | j \rangle = \frac{\sqrt{j+1}}{2} \sqrt[4]{\frac{E_J}{8E_C}}$$

Gli altri elementi di matrice, invece, sono tutti trascurabili. L'hamiltoniana di interazione risulta essere:

$$H_{INT} = \hbar \sum g_{i,i+1} (|i\rangle \langle i+1| a^\dagger + |i-1\rangle \langle i| a)$$

L'hamiltoniana non è nella forma di Jaynes-Cumming a meno di andare nel limite dispersivo $g_{i,i+1}/\Delta_i \rightarrow 0$ con $\Delta_i = \omega_{i,i+1} - \omega_c$ (o avere $\alpha \rightarrow \infty$ che non è possibile). In questo limite abbiamo:

$$g \sim 2 \frac{\beta e V_0}{\hbar} \sqrt{\frac{1}{2}} \left(\frac{E_J}{4E_C} \right)^{\frac{1}{4}}$$

Dunque più il limite TRANSMON è corretto, più l'accoppiamento è forte. Lo spostamento energetico χ (del limite dispersivo) si trova dipendere da un termine relativo alla prima transizione (del qubit) e un termine relativo alla seconda transizione:

$$\chi = \chi_{01} + \frac{\chi_{12}}{2}$$

Si può inoltre dimostrare l'implicazione $\alpha \rightarrow 0 \implies \chi \rightarrow 0$:

$$\chi = \frac{g_{01}^2}{\Delta} \frac{1}{1 + \Delta/\alpha}$$

Ovvero stiamo vedendo che la bassa anarmonicità del TRANSMON causa un piccolo *shift* dispersivo. Questo potrebbe sembrare un problema (per il controllo e la misura del qubit), ma il fatto che il fattore di accoppiamento g cresca va a compensare il mancato spostamento dei livelli.

4.3.5 Risonatore *lumped* LC

Consideriamo ora un qubit accoppiato a un risonatore LC *lumped*.

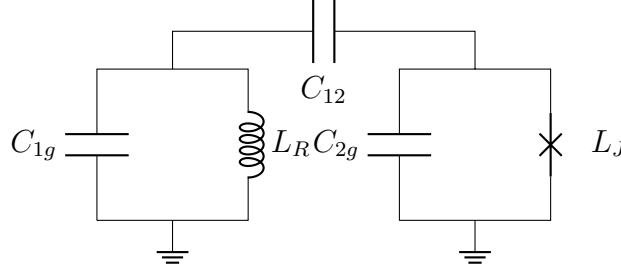


Figura 4.11

Entrambi i risonatori possono essere quantizzati con, rispettivamente, \hat{Q}_1 e $\hat{\Phi}_1$ per LC e \hat{Q}_2 e $\hat{\Phi}_2$ per XC. Il circuito può essere studiato in forma matriciale tramite la definizione di una matrice C (relativa alle capacità in gioco), un vettore V (relativo alle tensioni dei due risonatori) e un vettore Q relativo alle cariche. Rinominando gli elementi dell'inverso della matrice delle capacità ($\tilde{C}_{ij} = \frac{1}{[C^{-1}]_{ij}}$) arrivo a scrivere l'hamiltoniana complessiva come:

$$H = \frac{Q_1^2}{2\tilde{C}_{11}} - E_J \cos \frac{\phi_1}{\phi_2} + \frac{Q_2^2}{2\tilde{C}_{22}} + \frac{\phi_2^2}{2L_R} + \frac{Q_1 Q_2}{\tilde{C}_{12}}$$

Attenzione che \tilde{C}_{11} è una capacità calcolata combinando tutte le capacità del circuito. Operando su questa hamiltoniana in modo analogo a quanto abbiamo visto in altri casi (quantizzando gli operatori, usando la RWA...), arrivo alla forma finale del termine di accoppiamento:

$$g = \frac{1}{\tilde{C}_{12}} \sqrt{\frac{1}{Z_q Z_r}}$$

Dove le due impedenze (una relativa al qubit e una relativa al risonatore LC) possono essere calcolate a partire dalla matrice delle capacità. E possiamo anche calcolare tutti gli altri termini di nostro interesse, come:

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{L_R \tilde{C}_{22}}}$$

LEZIONE 20 - 21/12/2021

4.4 Caratterizzazione di un qubit superconduttivo

Consideriamo un charge qubit nel limite TRANSMON in cui abbiamo $E_J \ll E_C$. La piccola capacità si ottiene usando condensatori molto grandi, mentre posso controllare l'energia Josephson tramite: $E_J = \hbar \frac{I_c}{2e}$. Dove la corrente critica della giunzione è connessa all'energia di gap del superconduttore $\Delta(0)$ e alla resistenza a temperatura ambiente R_n :

$$I_0 = \frac{\pi \Delta(0)}{2e R_n}$$

Ad esempio, per l'alluminio, il gap è circa $\Delta(0) \approx 170 \mu\text{eV}$ e $R \sim 10k\Omega$ per $I_0 \sim 0.010\mu\text{A}$. Tutti questi parametri sono correlati e vanno scelti in modo da ottenere una frequenza caratteristica del qubit nell'ordine del GHz. Siccome abbiamo che $\omega_q = \sqrt{8E_J E_C} - E_C$, coi valori sopra menzionati arriviamo a $C \sim 0.1\text{pF}$. Supponiamo di avere un qubit simmetrico (in modo da poter controllare a piacimento la frequenza caratteristica) accoppiato capacitivamente a un risonatore LC (che può anche essere la rappresentazione di una CPW). Entrambe gli elementi sono portati a temperature prossime allo zero assoluto ($\sim 0.01\text{K}$) e il circuito complessivo è accoppiato all'esterno anch'esso tramite una capacità. All'esterno è posto un circolatore in modo che sia possibile inviare un segnale al circuito "freddo" e analizzare poi il segnale riflesso. In particolare, ci aspettiamo dei cambiamenti di fase (90°) in corrispondenza dei picchi di risonanza dell'ampiezza (che potrebbero anch'essi venir analizzati, ma sono per definizione stretti).

4.4.1 Identificazione delle frequenze caratteristiche

La procedura per caratterizzare il qubit parte dal trovare le frequenze "libere" di cavità e qubit (non interagenti). Per misurare ω_c è sufficiente inviare dall'esterno frequenze ad elevata intensità in modo che "rompano" le caratteristiche superconduttive delle giunzioni Josephson del qubit. Analizzando le frequenze in arrivo con un VNA (*Vector Network Analyzer*) siamo in grado di identificare il picco corrispondente alla frequenza della cavità. Nel caso in cui il qubit non sia "inattivo" (dunque il segnale che inviamo è ora a bassa intensità), quanto abbiamo studiato della *circuit QED* ci dice che il picco a ω_c viene "diviso" (nelle frequenze di transizione dei due diversi polarons) e spostato di $\pm\chi$ per l'effetto del *Rabi splitting*. Per identificare la frequenza del qubit ω_q stimolo il sistema con due diverse frequenze: una la scelgo fra quelle appena trovate della cavità in interazione e la seconda la vario alla ricerca di ω_q . Fintanto che la seconda sorgente non identifica la frequenza del qubit, la prima (di cui continuo a osservare il riflesso col VNA) mi identificherà una risonanza, ma quando la seconda frequenza ecciterà il qubit, anche la cavità cambierà frequenza di risonanza e col VNA vedrò che non siamo più su un picco. Così abbiamo identificato tutte le frequenze caratteristiche necessarie.

4.4.2 Controllo e misura (omodina e eterodina)

Per controllare e misurare il qubit utilizzeremo nuovamente dei mixer IQ (nello schema detto omodina o nell'eterodina). L'idea generale è di mandare un medesimo segnale attraverso il qubit (nella porta RF) e non-attraverso il qubit (nella porta LO) a un IQ mixer: i due segnali si mescoleranno in modo differente a seconda dello stato del qubit. Il qubit avrà due frequenze di risonanza (corrispondenti a $|g\rangle$ e $|e\rangle$), generalmente si utilizza una frequenza intermedia per la misurazione (la si sceglie sperimentalmente). Il qubit deve essere alla temperatura minore possibile in modo da minimizzare l'errore sul segnale in uscita (che viene peggiorato da fluttuazioni sul numero di fotoni). Viene anche posizionato, dopo il qubit, un amplificatore parametrico che "riesce" ad amplificare il segnale senza introdurre rumore (con una sorta di misurazione QND). Il segnale inviato al qubit viene, in realtà, modificato tramite un IQ mixer prima di raggiungere il qubit stesso in modo da essere formato e limitato nel tempo nel modo migliore, per massimizzare la *fidelity* della misurazione. Lo spostamento delle frequenze è dominato dal parametro $\chi = \frac{g^2}{\Delta}$. La migliore separazione fra esse è ottenuta con il fattore di merito $Q = \omega_c/k$ con k che è la vita media della risonanza nella cavità e vale anche $\chi = k/2$. Supponiamo di

poter scrivere il segnale in uscita come (RO indica *redout*):

$$s(t) = A_{RO} \cos(\omega_{RO}t + \theta_{RO})$$

Dove θ è lo sfasamento che il segnale subisce attraversando il qubit. Possiamo riscriverla anche come:

$$s(t) = \text{Re}\{A_{RO}e^{i\theta_{RO}}e^{i\omega_{RO}t}\}$$

Il secondo termine esponenziale corrisponde a una rotazione nel piano complesso, mentre il primo termine ($A_{RO}e^{i\theta_{RO}}$) in elettromagnetismo è detto fasore e possiamo riscriverlo come:

$$A_{RO}e^{i\theta_{RO}} = A_{RO} \cos(\theta_{RO}) + iA_{RO} \sin(\theta_{RO}) = I + iQ$$

Abbiamo trovato nuovamente le due quadrature dell'onda. Passiamo adesso a una configurazione del circuito leggermente diversa (e più generale). I due segnali che vanno all'IQ mixer non provengono più dal medesimo generatore, ma da due generatori diversi. Al gate LO verrà inviata una frequenza oscillante $y(t) = A_{LO} \cos(\omega_{LO}t)$, mentre non cambierà l'input della porta RF (col segnale che attraversa il qubit). Il mixer IQ produrrà un output in I proporzionale a:

$$I(t) \propto \cos((\theta_{RO} - \omega_{LO})t + \theta_{RO}) + \cos((\omega_{RO} + \omega_{LO})t + \theta_{RO})$$

Abbiamo, in generale, che le due frequenze ω_{RO} e ω_{LO} sono molto simili, perciò il primo termine sarà a bassa frequenza, mentre il secondo ad altra frequenza. Applicando un filtro passa-basso potremo selezionare il solo primo termine. Per l'output Q otteniamo in modo analogo:

$$Q(t) \propto \sin((\omega_{RO} - \omega_{LO})t + \theta_{RO})$$

Nel caso in cui i due segnali provengano dal medesimo generatore (come stavamo vedendo prima) siamo nel cosiddetto schema di omodina. Otteniamo, in questo modo: $Q = \cos(\theta_{RO})$, $I = \sin(\theta_{RO})$. Abbiamo, dunque, che il fasore nel piano complesso è descritto da $\theta = \arctan \frac{Q}{I}$ e $A = \sqrt{Q^2 + I^2}$. Tale fasore rimarrà pressoché invariato a meno di un cambio di stato del qubit che porterà a una leggera modifica dell'ampiezza e a una grande modifica dell'angolo. In partenza avremo un errore non trascurabile sia su I che su Q (errori uguali) e sarebbe difficile distinguere i due risultati. Amplificando un un operazionale classico, poi, peggioreremmo la situazione amplificando il rumore stesso e aggiungendone ancora dell'altro. La soluzione sta nell'usare un amplificatore parametrico che riesce a indirizzare tutto l'errore su una quadratura e non sull'altra, in questo modo i due diversi fasori rimangono altamente distinguibili. Se invece, i due generatori non sono uguali (eterodina: è un po' più complessa, ma quasi necessaria nel caso in cui si vogliano misurare e controllare diversi qubit) le due frequenze non si cancellano in I e Q in uscita. Otterremo una frequenza intermedia $\omega_{IF} = \omega_{RO} - \omega_{LO}$. Il fasore, dunque, rimarrà in rotazione (benché a bassa frequenza) nel piano complesso dato da I e Q (Z è il fasore):

$$Z_{IF}(t) = Ae^{i\omega_{IF}t}e^{i\theta_{IF}}$$

Dovremo moltiplicare il segnale per una rotazione uguale e contraria (tendenzialmente lo faremo via software) in modo da cancellare il termine spurio rotatorio. Abbiamo adesso tutti gli elementi necessari per eseguire una misura di Rabi. La configurazione del circuito è più complessa nel caso reale (dove abbiamo anche bisogno di un segnale di *drive*) con ω_q ed è illustrata in figura.

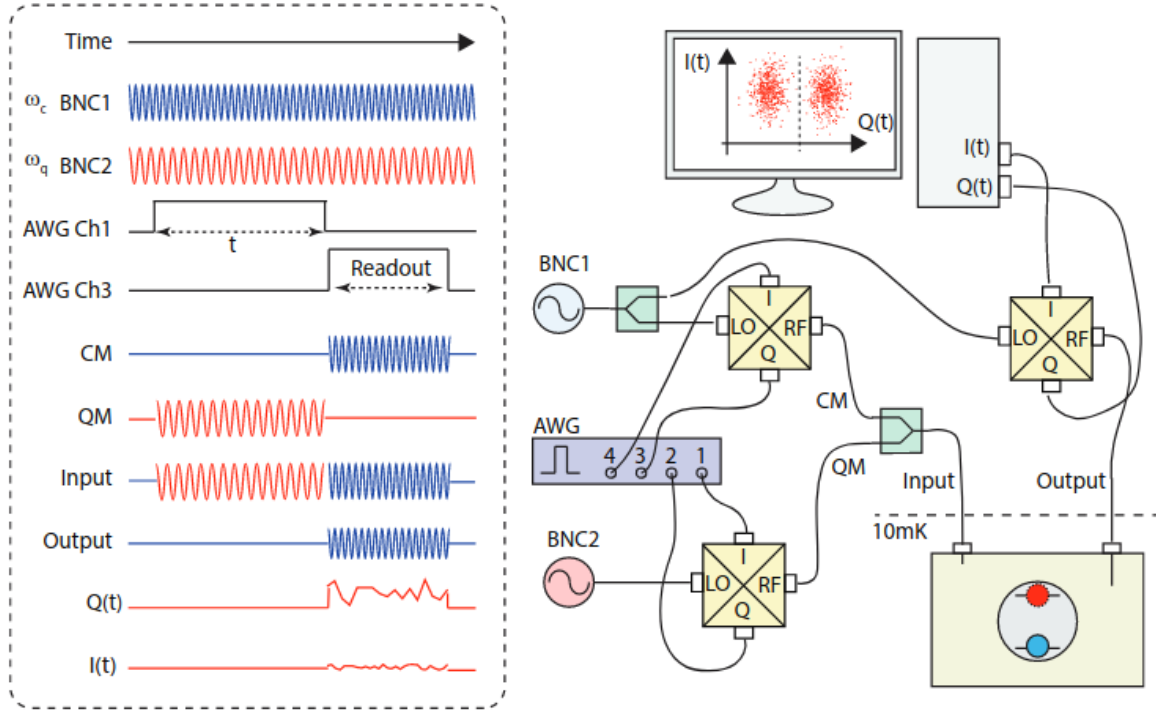


Figura 4.12: Rabi measurement: The sequence for the measurement of Rabi oscillations and the typical room temperature circuitry are shown. <https://arxiv.org/pdf/1904.09291.pdf>

La probabilità di misurare lo stato eccitato dipende dalla durata t del segnale in ingresso che va in oscillazione di Rabi con il qubit:

$$P_{|e\rangle} = \frac{A^2}{A^2 + \Delta^2} \sin^2 \left(\frac{\sqrt{A^2 + \Delta^2}}{2} t \right)$$

La scelta di t deve essere chiaramente fatta in modo da massimizzare la probabilità di misura corretta. Essendo una misura probabilistica, comunque, è necessario ripetere le operazioni di misura diverse volte, in modo da arrivare al risultato corretto a meno di soli errori statistici. Bisogna stare attenti, tuttavia, che dopo un certo tempo il qubit "perde" il suo stato per rilassamento e *dephasing*.

4.4.3 Misura di T_1 e T_2

Per misurare il tempo di rilassamento (ovvero il tempo per cui $|1\rangle$ decade in $|0\rangle$) è sufficiente portare il qubit nello stato eccitato ed eseguire misure dopo tempi diversi del qubit stesso. Vedremo che la probabilità di trovare il qubit nello stato eccitato diminuirà in modo esponenziale con una costante di tempo (identificabile tramite *fitting*) pari a T_1 . Per il tempo di *dephasing*, invece, utilizziamo una misura di Ramsey (simile a quella di cui abbiamo discusso nel caso di atomi usati come sonde per misurare lo stato di una cavità). L'idea è di inviare, separati da un certo tempo t , due impulsi $\pi/2$ (rotatori). Se fra le due rotazioni non avviene *dephasing*, alla fine misureremo lo stesso stato iniziale. Ripetendo l'esperimento per diversi t otterremo nuovamente un esponenziale decrescente con T_2 . In realtà, nella pratica, si usa una frequenza di drive sfasata in partenza rispetto alla frequenza di risonanza. La curva finale non sarà un esponenziale, ma una sinusoide

modulata da un'esponenziale. Ciò viene fatto per evitare che errori nella modulazione passino inosservati e portino a T_2 poco precisi.

Tomografia

Fino ad ora abbiamo considerato misure solo lungo l'asse z , ma idealmente ci piacerebbe studiare uno stato qualsiasi nello spazio tridimensionale di Bloch. Quello che si fa usualmente è di triplicare uno stato su tre diversi qubit: il primo viene misurato lungo l'asse z , gli altri ruotati adeguatamente e poi misurati. In questo modo è possibile misurare una generica sovrapposizione di stati.

Bibliografia

Corso

- [1] Nucciotti, A. (2021). [Tecnologie Quantistiche Applicate](#). Università degli Studi di Milano - Bicocca.

Libri

- [2] Nielsen, M. A., Chuang, I. L. (2000). Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press.
- [3] Braginsky, V., Khalili, F., & Thorne, K. (1992). Quantum Measurement. Cambridge: Cambridge University Press.
- [4] Schmidt, V. V. (1997). The Physics of Superconductors. Introduction to Fundamentals and Applications. Springer Berlin, Heidelberg.
- [5] Tinkham, M. (2004). Introduction to Superconductivity. Dover Publications.
- [6] Feynman, R. (2011). The Feynman Lectures on Physics Vol 3 Quantum Mechanics, Chapter 21. Basic Books.
- [7] Zagoskin, A. (2011). Quantum Engineering: Theory and Design of Quantum Coherent Structures. Cambridge: Cambridge University Press.
- [8] Chen, G., Church, D. A., Englert, B.-G., Henkel, C., Rohwedder, B., Scully, M.O., & Zubairy, M.S. (2006) Quantum Computing Devices: Principles, Designs, and Analysis (1st ed.). Chapman and Hall/CRC.
- [9] Devoret, M.H. (1997). Quantum Fluctuations in Electrical Circuits. In Quantum Fluctuations (Les Houches Session LXIII). Elsevier.

Tesi

- [10] Schuster, D. I. (2007). Circuit Quantum Electrodynamics. PhD Thesis, Yale University.
- [11] Slichter, D. H. (2011). Quantum Jumps and Measurement Backaction in a Superconducting Qubit. PhD Thesis, University of California, Berkeley.

- [12] Long, J. (2014). Superconducting Quantum Circuits for Quantum Information Processing. PhD Thesis, Colorado University.

Articoli

- [13] Clerk, A. A., Devoret, M. H., Girvin, S. M., Marquardt, F., & Schoelkopf, R. J. (2010). Introduction to quantum noise, measurement, and amplification. *Reviews of Modern Physics*, 82(2), 1155–1208.
- [14] Caves, C. M., Thorne, K. S., Drever, R. W. P., Sandberg, V. D., & Zimmermann, M. (1980). On the measurement of a weak classical force coupled to a quantum-mechanical oscillator. I. Issues of principle. *Rev. Mod. Phys.*, 52, 341–392.
- [15] Caves, C. M. (1982). Quantum limits on noise in linear amplifiers. *Phys. Rev. D*, 26, 1817–1839.
- [16] Krantz, P., Kjaergaard, M., Yan, F., Orlando, T., Gustavsson, S., & Oliver, W. (2019). A quantum engineer’s guide to superconducting qubits. *Applied Physics Reviews*, 6(2), 021318.
- [17] Girvin, S. M. (2012). *Circuit QED: Superconducting Qubits Coupled to Microwave Photons*. Oxford University Press.
- [18] Martinis, J. M., Devoret, M. H., & Clarke, J. (1987). Experimental tests for the quantum behavior of a macroscopic degree of freedom: The phase difference across a Josephson junction. *Phys. Rev. B*, 35, 4682–4698.
- [19] Wendin, G., & Shumeiko, V. S. (2005). *Superconducting Quantum Circuits, Qubits and Computing*.
- [20] Naghiloo, M. (2019). *Introduction to Experimental Quantum Measurement with Superconducting Qubits*.
- [21] Martinis, J. M., Nam, S., Aumentado, J., & Urbina, C. (2002). Rabi Oscillations in a Large Josephson-Junction Qubit. *Phys. Rev. Lett.*, 89, 117901.
- [22] Blais, A., Huang, R.-S., Wallraff, A., Girvin, S. M., & Schoelkopf, R. J. (2004). Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation. *Phys. Rev. A*, 69, 062320.
- [23] Koch, J., Yu, T. M., Gambetta, J., Houck, A. A., Schuster, D. I., Majer, J., & Schoelkopf, R. J. (2007). Charge-insensitive qubit design derived from the Cooper pair box. *Phys. Rev. A*, 76, 042319.
- [24] Walter, T., Kurpiers, P., Gasparinetti, S., Magnard, P., Potoč, A., Salathé, Y., & Wallraff, A. (2017). Rapid High-Fidelity Single-Shot Dispersive Readout of Superconducting Qubits. *Phys. Rev. Applied*, 7, 054020.
- [25] Dassonneville, R., Ramos, T., Milchakov, V., Planat, L., Dumur, É., Foroughi, F., & Buisson, O. (2020). Fast High-Fidelity Quantum Nondemolition Qubit Readout via a Nonperturbative Cross-Kerr Coupling. *Phys. Rev. X*, 10, 011045.