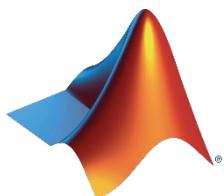


Fondamenti di Automatica A.A.19-20

Relazione Progetto

Marco Greco | MA200901 | CdL Ingegneria Informatica



Traccia 200

*restart :
with(inttrans) :*

PUNTO A.

$$y := t \rightarrow \left(-\frac{4}{5} \cdot e^{-t} - \frac{3}{40} \cdot \cos(2 \cdot t) + \frac{1}{10} \cdot \sin(2 \cdot t) + \frac{1}{8} \cdot e^{-2 \cdot t} \cdot (6 \cdot t + 7) \right) \cdot \text{Heaviside}(t) : \\ u := t \rightarrow \sin(2 \cdot t) \cdot \text{Heaviside}(t) :$$

Determinare :

- 1) la funzione di trasferimento del sistema ed i suoi poli e zeri;
- 2) i modi di evoluzione libera del sistema;
- 3) la risposta all'impulso del sistema;
- 4) la risposta al gradino ed il suo grafico;
- 5) la risposta alla rampa;
- 6) un possibile modello i-u la cui funzione di trasferimento è quella ottenuta nel primo punto dell'esercizio;
- 7) tenendo conto del modello determinato al punto precedente valutare la risposta all'ingresso $u(t) = 1(-t)$

Una volta caricato il toolbox (cassetta degli attrezzi) "with(inttrans)" che ampie le funzioni di maple, consentendomi di lavorare nel dominio della trasformata di Laplace e definito le funzioni $y(t)$ e $u(t)$, procedo a determinare i punti dell'esercizio.

1) Funzione di trasferimento del sistema ed i suoi poli e zeri

Ci sono due modi per determinare la funzione di trasferimento del sistema.

- Considerare la funzione di trasferimento $G(s)$ (nel dominio della L-trasformata) come rapporto tra la risposta forzata $Y(s)$ e la L-trasformata dell'ingresso $U(s)$.

$$G(s) = Y(s)/U(s)$$

- Vederla come quella particolare risposta forzata che si ottiene applicando come ingresso quel segnale che ha trasformata di Laplace unitaria.

$$Y(s) = G(s) * 1$$

Scelgo la prima strada in modo da calcolare la L-trasformata dell'ingresso.

Definisco la L-trasformata di $y(t)$ e $u(t)$:

$$Y := s \rightarrow \text{laplace}(y(t), t, s) : \\ Y(s)$$

$$\frac{2(s-1)}{(s+2)^2(1+s)(s^2+4)} \quad (1.1)$$

$$U := s \rightarrow \text{laplace}(u(t), t, s) :$$

$$U(s)$$

$$\frac{2}{s^2 + 4} \quad (1.2)$$

Quindi la funzione di trasferimento sarà:

$$G := s \rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} : G(s) = \frac{s - 1}{(s + 2)^2 (1 + s)} \quad (1.3)$$

Ora ci rimane di determinare i poli e gli zeri della funzione di trasferimento. Le radici del numeratore (numer) della funzione di trasferimento ci forniscono gli zeri, mentre quelle del denominatore (denom) i poli.

Utilizzo per determinarli la funzione solve.

$$Z := \text{solve}(\text{numer}(G(s)) = 0, s) \quad Z := 1 \quad (1.4)$$

$$P := \text{solve}(\text{denom}(G(s)) = 0, s) \quad P := -1, -2, -2 \quad (1.5)$$

Abbiamo 2 poli stabili: -1 con molteplicità 1 e -2 con molteplicità 2. Il sistema risulta essere quindi Bibo Stabile, in quanto i poli di $G(s)$ sono tutti a parte reale strettamente negativa (Lo noteremo anche dai modi di evoluzione libera che tendono a zero per t che tende ad infinito).

2) Modi di evoluzione libera del sistema

I modi di evoluzione libera di un sistema, possono trovarsi in tre tipi di risposte:

- Risposta Libera
- Risposta Impulsiva
- Risposta Transitoria della risposta forzata

Il numero di modi di evoluzione libera è dettato dall'ordine del sistema, o anche dal numero dei poli essendo che $\text{ordine}(\text{sistema}) = \text{grad}(\text{denom}(G(s)))$.

Abbiamo 4 casi possibili in base al tipo di polo:

1. Polo reale semplice in $s = p$:

- Il modo associato è dato da $e^{pt} \cdot 1(t)$

2. Polo reale con molteplicità v (maggiore dell'unità) in $s = p$:

- I modi risultano essere: $e^{pt} \cdot 1(t), t \cdot e^{pt} \cdot 1(t), \frac{t^2}{2} \cdot e^{pt} \cdot 1(t), \dots, \frac{t^{v-1}}{(v-1)!} \cdot e^{pt} \cdot 1(t)$:

3. Poli complessi e coniugati in $s = p$, coniug(P) :

- Si associano una coppia di modi pseudoscillatori: $e^{\sigma \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot 1(t)$, $e^{\sigma \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot 1(t)$

4. Poli complessi e coniugati con molteplicità v :

- Si associano v coppie di funzioni pseudoscillatorie moltiplicate per i termini polinomiali
 $e^{\sigma \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot 1(t)$, $t \cdot e^{\sigma \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot 1(t)$, $\frac{t^2}{2} \cdot e^{\sigma \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot 1(t)$, ..., $\frac{t^{v-1}}{(v-1)!} \cdot e^{\sigma \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot 1(t)$
 $e^{\sigma \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot 1(t)$, $t \cdot e^{\sigma \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot 1(t)$, $\frac{t^2}{2} \cdot e^{\sigma \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot 1(t)$, ..., $\frac{t^{v-1}}{(v-1)!} \cdot e^{\sigma \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot 1(t)$

Il nostro sistema ha 2 poli semplici, uno con molteplicità 1 che genera quindi un solo modo e uno con molteplicità 2 che genererà 2 modi di evoluzione libera. Quindi ci troviamo nel primo e secondo caso.

Il modo di evoluzione libera associato al polo semplice:

$$\begin{aligned} modo_1 &:= e^{P[1] \cdot t} : \\ modo_1 & \\ &\quad e^{-t} \end{aligned} \tag{2.1}$$

I modi di evoluzione libera associati al polo semplice di molteplicità 2 :

$$\begin{aligned} modo_2 &:= e^{P[2] \cdot t} : \\ modo_2 & \\ &\quad e^{-2t} \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} modo_3 &:= t \cdot e^{P[3] \cdot t} : \\ modo_3 & \\ &\quad t e^{-2t} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Possiamo verificarlo andando a determinare la risposta impulsiva. La ottengo effettuando l'antitrasformata di Laplace della funzione di trasferimento:

$$\begin{aligned} g &:= t \rightarrow \text{invlaplace}(G(s), s, t) : \\ g(t) & \\ &\quad (2 + 3t) e^{-2t} - 2e^{-t} \end{aligned} \tag{2.4}$$

3) Risposta all'impulso del sistema

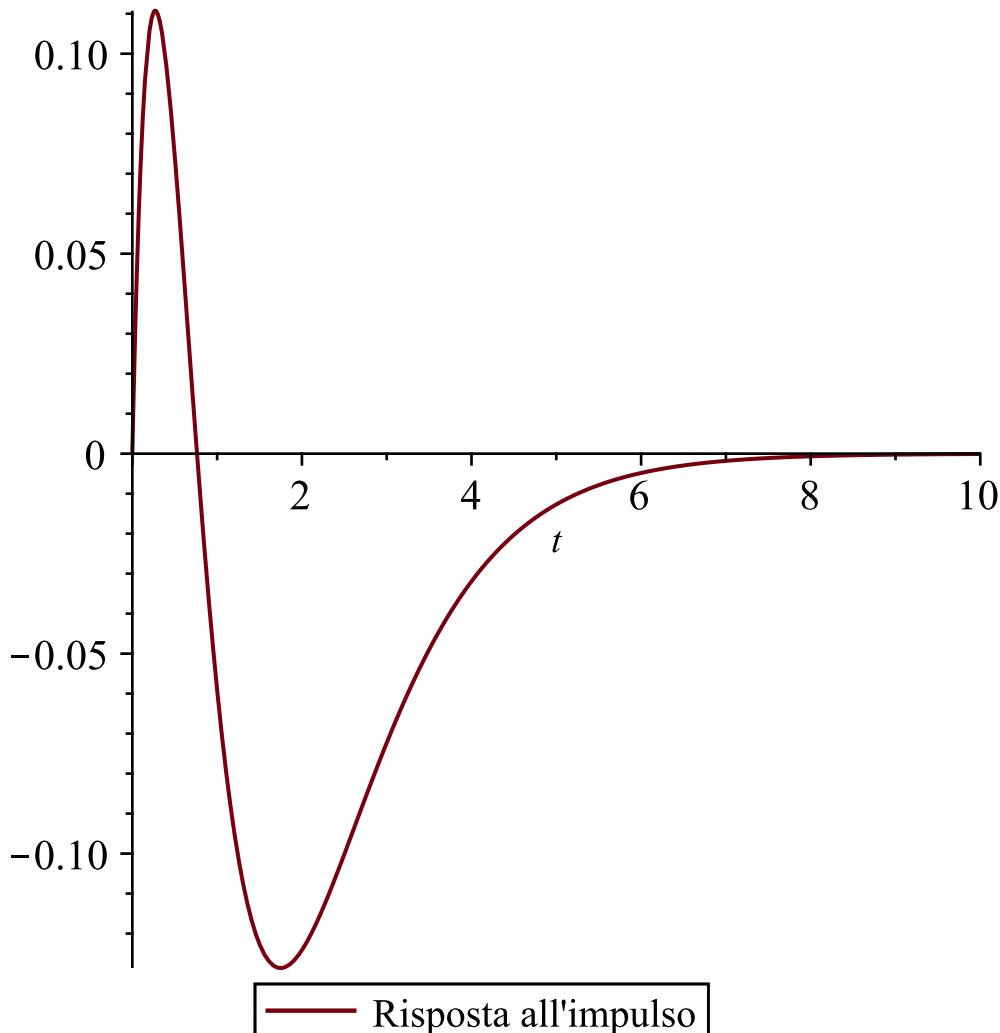
Per quanto detto a lezione, la funzione di trasferimento del sistema risulta essere la trasformata di Laplace della risposta all'impulso, in quanto la risposta all'impulso del sistema è l'antitrasformata del prodotto della funzione di trasferimento del sistema per l'impulso di Dirac che è un ingresso la cui sua trasformata di Laplace è unitaria.

Quindi procedo ad antitrasformare la funzione di trasferimento in modo da ottenere la risposta all'impulso del sistema (già fatto nel punto 2):

$$g(t) = (2 + 3t)e^{-2t} - 2e^{-t} \quad (3.1)$$

Raffiguro ora graficamente la risposta all'impulso del sistema con l'ausilio del comando plot:

```
plot(g(t), t = 0 .. 10, legend = ["Risposta all'impulso"], size = [400, 400])
```



4) Risposta al gradino e il suo grafico

Concettualmente parlando consiste nel considerare un ingresso unitario nel dominio del tempo. Quindi nel domino di Laplace avremo:

$$Y_{-1}(s) = G(s) * \frac{1}{s} = \frac{G(s)}{s} : \text{che ci ricorda il teorema integrale (della quadratura).}$$

Per questo motivo la risposta al gradino è possibile ottenerla a partire dalla risposta all'impulso considerando la quadratura di quest'ultima :

$$y_{-1} := t \rightarrow \int_0^t g(\tau) d\tau :$$

$$y_{-1}(t) = -\frac{1}{4} - \frac{3t e^{-2t}}{2} - \frac{7 e^{-2t}}{4} + 2 e^{-t} \quad (4.1)$$

O che è la stessa cosa, calcolare l'antitrasformata di $G(s)/s$:

$$Y_{-1}(s) := \frac{G(s)}{s} :$$

$$y_{-1} := t \rightarrow \text{invlaplace}(Y_{-1}(s), s, t) :$$

$$y_{-1}(t) = -\frac{1}{4} - \frac{3t e^{-2t}}{2} - \frac{7 e^{-2t}}{4} + 2 e^{-t} \quad (4.2)$$

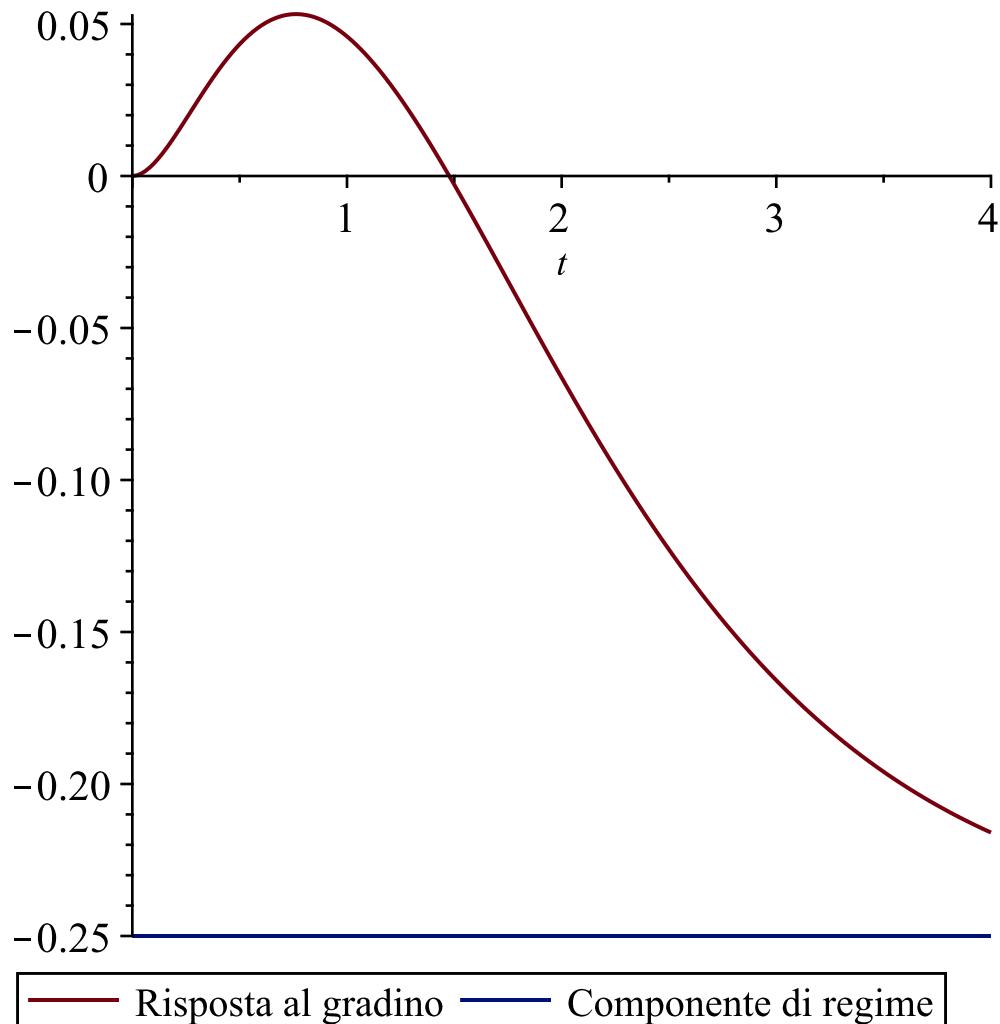
Determino ora la sua componente di regime:

$$y_{-1\text{regime}} := t \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} (y_{-1}(t)) :$$

$$y_{-1\text{regime}}(t) = -\frac{1}{4} \quad (4.3)$$

Raffiguro la risposta al gradino accostata alla componente di regime:

$$\text{plot}([y_{-1}(t), y_{-1\text{regime}}(t)], t=0..4, \text{legend}=[\text{"Risposta al gradino"}, \text{"Componente di regime"}], \text{size}=[400, 400])$$



5) Risposta alla rampa

A lezione abbiamo avuto modo di vedere il legame tra la risposta all'impulso, risposta al gradino e risposta alla rampa.

A partire da un tipo di risposta è possibile determinare le altre:

$\delta \Rightarrow 1(t) \Rightarrow t^* 1(t)$ (risposta all'impulso \Rightarrow r. al gradino \Rightarrow r. alla rampa) si applica il teorema integrale. Mentre da destra verso sinistra bisogna applicare la derivata.

Quindi possiamo facilmente ottenere la risposta alla rampa utilizzando il teorema integrale a partire dalla risposta al gradino:

$$y_{-2} := t \rightarrow \int_0^t y_{-1}(\tau) d\tau :$$

$$y_{-2}(t)$$

$$\frac{3}{4} - \frac{t}{4} + \frac{3t e^{-2t}}{4} + \frac{5e^{-2t}}{4} - 2e^{-t} \quad (5.1)$$

simplify((5.1))

$$\frac{(3t+5)e^{-2t}}{4} - \frac{t}{4} - 2e^{-t} + \frac{3}{4} \quad (5.2)$$

Concettualmente parlando la risposta alla rampa corrisponde ad applicare come ingresso al sistema una retta con coefficiente angolare pari a 1 nel dominio del tempo, la quale nel dominio di Laplace sarà $1/s^2$.

$$Y_{-2}(s) := \frac{G(s)}{s^2} :$$

$$Y_{-2}(s)$$

$$\frac{s-1}{(s+2)^2(1+s)s^2} \quad (5.3)$$

Anche qui otteniamo la risposta alla rampa nel dominio del tempo andando ad antritrasformare $G(s)/s^2$:

$$y_{-2} := t \rightarrow \text{invlaplace}(Y_{-2}(s), s, t) :$$

$$y_{-2}(t)$$

$$\frac{(3t+5)e^{-2t}}{4} - \frac{t}{4} - 2e^{-t} + \frac{3}{4} \quad (5.4)$$

Come possiamo vedere i due risultati corrispondono.

Vado ora a determinare la componente di regime non andando a considerare quella transitoria:

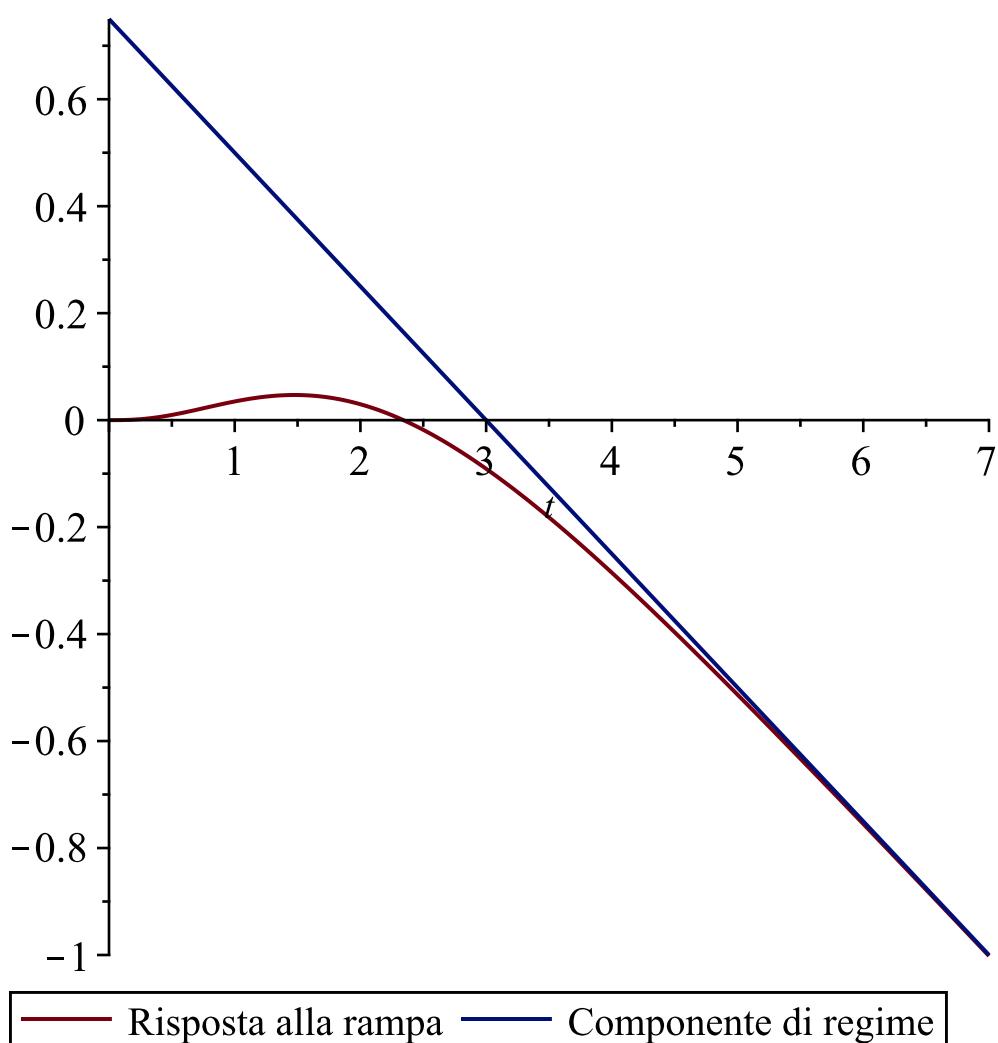
$$y_{-2\text{regime}} := t \rightarrow \left(\frac{3}{4} - \frac{t}{4} \right) :$$

$$y_{-2\text{regime}}(t)$$

$$\frac{3}{4} - \frac{t}{4} \quad (5.5)$$

Mostro ora graficamente ciò che abbiamo ottenuto:

$$\text{plot}([y_{-2}(t), y_{-2\text{regime}}(t)], t=0..7, \text{legend}=[\text{"Risposta alla rampa"}, \text{"Componente di regime"}], \text{size}=[400, 400])$$



6) Possibile modello i-u

In questo punto andrà a determinare un possibile modello i-u la cui funzione di trasferimento è quella ottenuta nel primo punto dell'esercizio.

Come abbiamo già visto l'equazione che lega l'ingresso all'uscita nel dominio di Laplace è $Y(s) = G(s) * U(s)$ ovvero la risposta forzata.

$G(s)$ come ben sappiamo è la funzione di trasferimento che altro non è che un rapporto fra polinomi a coefficienti reali (real razionale).

Possiamo esprimere la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{ng(s)}{dg(s)}$ definita impropria se il grado del numeratore è minore o uguale al grado del denominatore, e strettamente causale\propria se il grado del numeratore è strettamente minore del grado del denominatore (coefficiente di s^n del num nullo).

Pertanto considerata la funzione di trasferimento $G(s)$:

$$G(s)$$

$$\frac{s-1}{(s+2)^2(1+s)} \quad (6.1)$$

Definisco il numeratore e il denominatore nel seguente modo:

$$n_g := s \rightarrow \text{numer}(G(s)) :$$

$$d_g := s \rightarrow \text{denom}(G(s)) :$$

$$n_g(s) = s-1 \quad (6.2)$$

$$\text{expand}(d_g(s)) = s^3 + 5s^2 + 8s + 4 \quad (6.3)$$

Ora $Y(s) = \frac{n_g(s)}{d_g(s)} \cdot U(s)$: possiamo vederla come $d_g(s) \cdot Y(s) = n_g(s) \cdot U(s)$:

Facendo l'antitrasformata di entrambi i membri ottengo (Essendo già definite chiamo l'ingresso e l'uscita come y_2 e u_2) :

$$\begin{aligned} iu &:= y_2'''(t) + 5 \cdot y_2''(t) + 8 \cdot y_2'(t) + 4 \cdot y_2(t) = u_2'(t) - u_2(t) \\ iu &:= D^{(3)}(y_2)(t) + 5 D^{(2)}(y_2)(t) + 8 D(y_2)(t) + 4 y_2(t) = D(u_2)(t) - u_2(t) \end{aligned} \quad (6.4)$$

7) Valutare la risposta all'ingresso $1(-t)$

Valuto ora tenendo conto del modello determinato al punto precedente la risposta all'ingresso $u(t) = 1(-t)$.

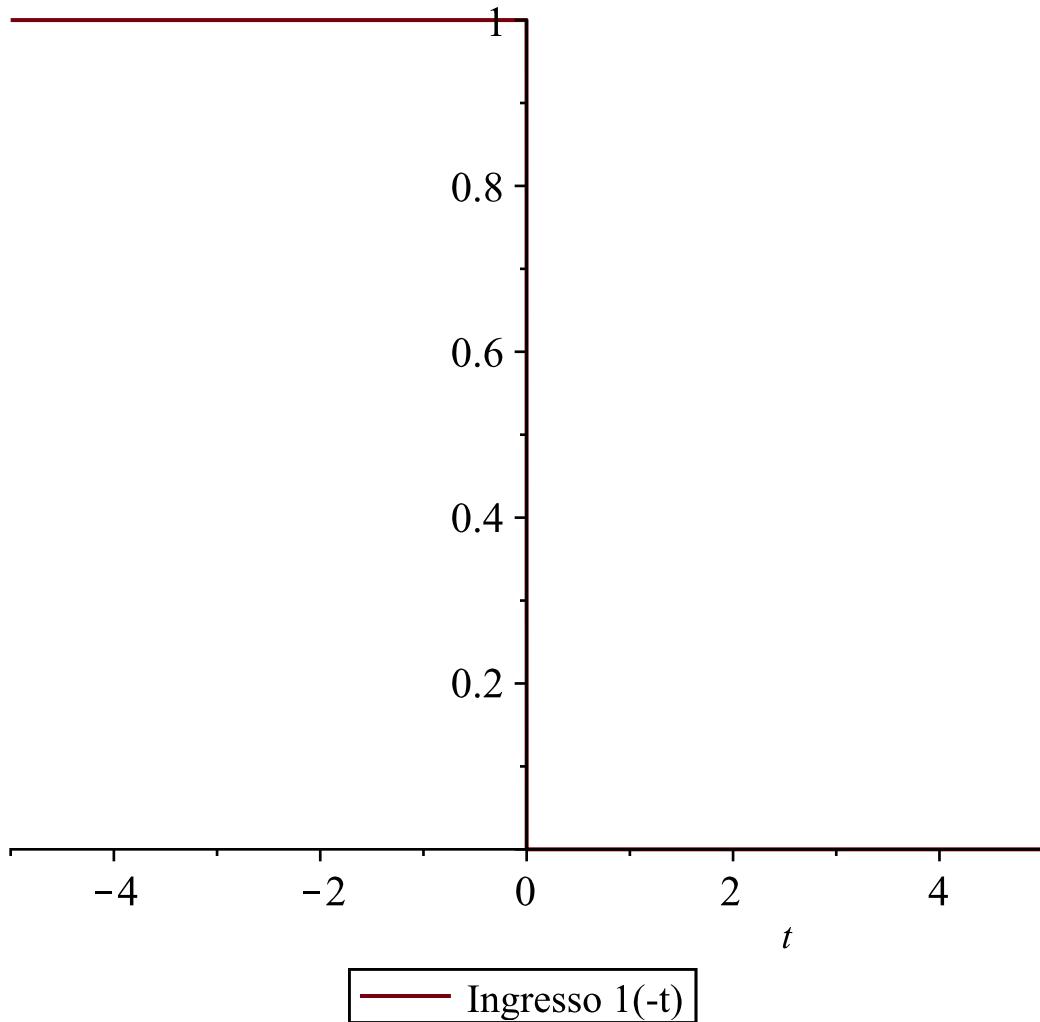
L'ingresso $1(-t)$ vale:

$$u := t \mapsto \begin{cases} 1 & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

$$u := t \mapsto \begin{cases} 1 & t < 0 \\ 0 & 0 \leq t \end{cases} \quad (7.1)$$

lo possiamo vedere graficamente utilizzando il comando plot:

```
plot(Heaviside(-t), t=-5..5, legend="Ingresso 1(-t)", size=[400, 400])
```



Riandiamo a calcolarci la funzione di trasferimento per capire se il sistema è bibo stabile.

$$\begin{aligned}
 eq_diff_s &:= \text{laplace}(iu, t, s) \\
 eq_diff_s &:= s^3 \text{laplace}(y_2(t), t, s) - D^{(2)}(y_2)(0) - sD(y_2)(0) - s^2 y_2(0) \\
 &\quad + 5s^2 \text{laplace}(y_2(t), t, s) - 5D(y_2)(0) - 5sy_2(0) + 8s \text{laplace}(y_2(t), t, s) - 8y_2(0) \\
 &\quad + 4 \text{laplace}(y_2(t), t, s) = s \text{laplace}(u_2(t), t, s) - u_2(0) - \text{laplace}(u_2(t), t, s)
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

$$\begin{aligned}
 eq_diff_s &:= \text{subs}(\{\text{laplace}(y_2(t), t, s) = Y_2(s), \text{laplace}(u_2(t), t, s) = U_2(s)\}, eq_diff_s) \\
 eq_diff_s &:= s^3 Y_2(s) - D^{(2)}(y_2)(0) - sD(y_2)(0) - s^2 y_2(0) + 5s^2 Y_2(s) - 5D(y_2)(0) \\
 &\quad - 5sy_2(0) + 8s Y_2(s) - 8y_2(0) + 4Y_2(s) = sU_2(s) - u_2(0) - U_2(s)
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

Setto le condizioni iniziali dell'ingresso a zero:

$$\begin{aligned}
 eq_diff_s &:= \text{eval}(eq_diff_s, \{u_2(0) = 0\}) \\
 eq_diff_s &:= s^3 Y_2(s) - D^{(2)}(y_2)(0) - sD(y_2)(0) - s^2 y_2(0) + 5s^2 Y_2(s) - 5D(y_2)(0) \\
 &\quad - 5sy_2(0) + 8s Y_2(s) - 8y_2(0) + 4Y_2(s) = sU_2(s) - U_2(s)
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

Trovo ora la relativa risposta forzata e risposta libera:

$$\begin{aligned}
risposta_forzata &:= solve(eval(eq_diff_s, \{y_2(0) = 0, y_2'(0) = 0, y_2''(0) = 0, \}), Y_2(s)) \\
risposta_forzata &:= \frac{U_2(s) (s - 1)}{s^3 + 5 s^2 + 8 s + 4}
\end{aligned} \tag{7.5}$$

La risposta libera la trovo ovviamente annullando la risposta forzata ponendo $U(s)=0$:

$$\begin{aligned}
risposta_libera &:= solve(eval(eq_diff_s, \{U_2(s) = 0\}), Y_2(s)) \\
risposta_libera &:= \\
&\frac{s^2 y_2(0) + s D(y_2)(0) + 5 s y_2(0) + D^{(2)}(y_2)(0) + 5 D(y_2)(0) + 8 y_2(0)}{s^3 + 5 s^2 + 8 s + 4}
\end{aligned} \tag{7.6}$$

E dalla risposta forzata è facile ricavare la fdt :

$$\begin{aligned}
G_2 &:= s \rightarrow \frac{risposta_forzata}{U_2(s)} : \\
G_2(s) &= \frac{s - 1}{s^3 + 5 s^2 + 8 s + 4}
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Come abbiamo già visto nel punto 1 i poli sono:

$$\begin{aligned}
solve(denom(G_2(s)) = 0, s) & \\
&-2, -2, -1
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Quindi due poli, -1 con molteplicità 1 e -2 con molteplicità 2. Ed essendo tutti a parte reale strettamente negativa il sistema risulta essere bibo stabile.

Una volta verificato che il sistema è Bibo Stabile possiamo andare a considerare due casi:

- Per $t < 0$ assumo che il segnale $u(t) = 1(-t)$ sia applicato nel passato remoto e quindi $y(t)$ corrisponde alla componente di regime. Quindi non è altro che la risposta a gradino assumendo t negativo e l'istante iniziale è posto nel passato remoto (applico la proprietà della tempo invarianza) :

$$\begin{aligned}
y_{gradino} &:= t \rightarrow invlaplace\left(\frac{G_2(s) \cdot 1}{s}, s, t\right) : \\
y_{t_neg} &:= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} (y_{gradino}(t - t_0)) \\
y_{t_neg} &:= -\frac{1}{4}
\end{aligned} \tag{7.9}$$

L'uscita per $t < 0$ vale $-1/4$.

- Per $t \geq 0$, con quanto affermato inizialmente, l'ingresso è nullo. Dire che l'ingresso è spento ci porta a capire immediatamente che la risposta forzata è nulla e avremo a che fare solo con la risposta libera del sistema.

Impongo la condizione iniziale per valori di $t > 0$ uguale al valore della risposta forzata valutata in 0 per valori di $t < 0$:

$$y_2(0) := y_{t_neg}(0)$$

$$y_2(0) := -\frac{1}{4} \quad (7.10)$$

L'ordine del sistema, come già detto nel punto 2, corrisponde al grado del denominatore della fdt o meglio al numero di poli (se un polo ha molteplicità m, bisogna contarlo m volte):

$$n := \text{degree}(\text{denom}(G_2(s)), s)$$

$$n := 3 \quad (7.11)$$

Siccome la soluzione è costante per valori di t negativi (derivata nulla) azzero le derivate delle condizioni iniziali fino all'ordine n-1.

$$\text{seq}(\text{assign}(\text{D}^{(i)}(y_2)(0), 0), i = 1 .. n - 1)$$

Ottengo quindi l'uscita per valori di t ≥ 0 :

$$y_{t_pos} := \text{invlaplace}(\text{risposta_libera}, s, t)$$

$$y_{t_pos} := -e^{-t} + \frac{e^{-2t}(3 + 2t)}{4} \quad (7.12)$$

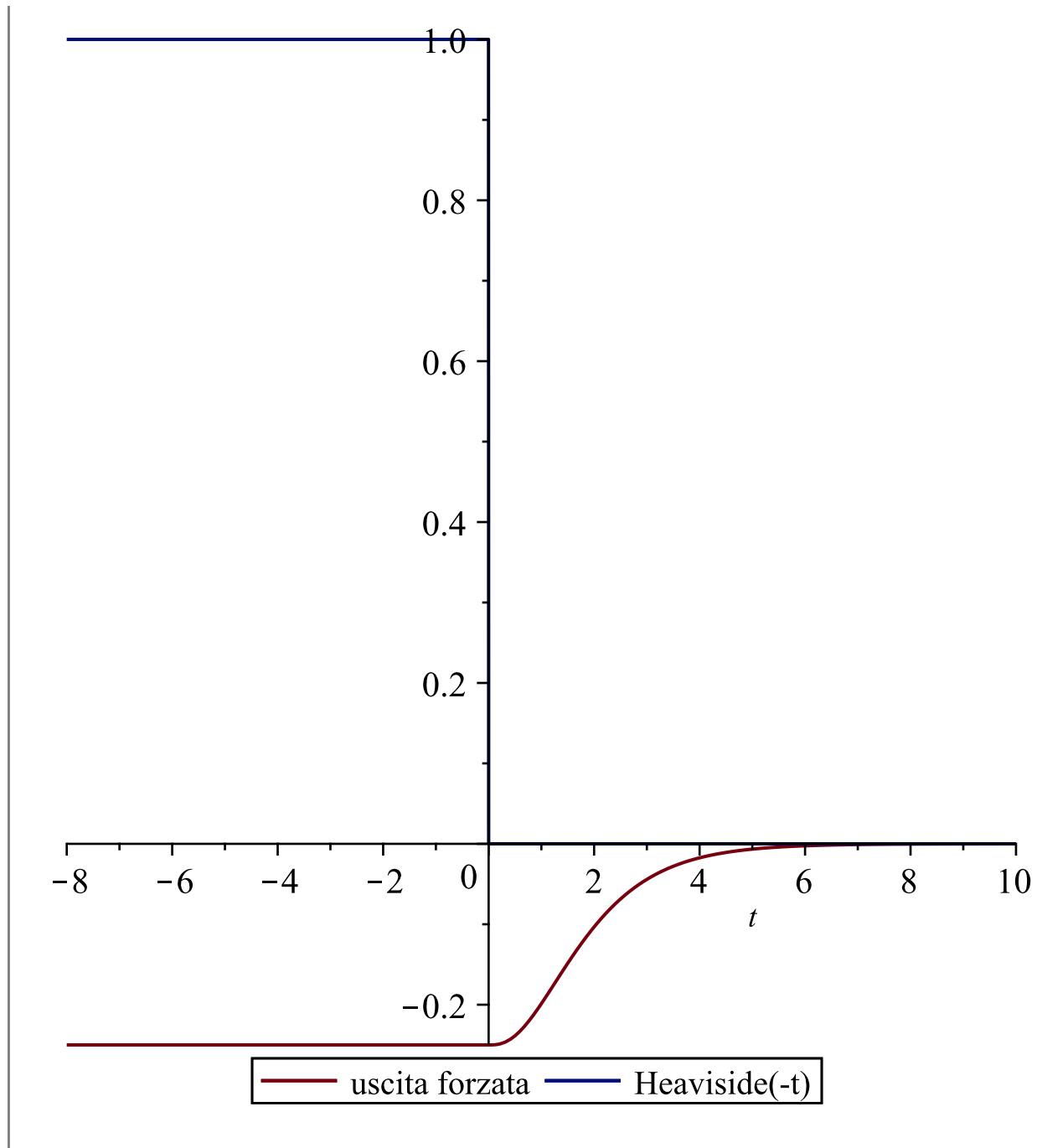
Piecewise :

$$y_{sis} := \begin{cases} y_{t_neg} & t < 0 \\ y_{t_pos} & t \geq 0 \end{cases}$$

$$y_{sis} := \begin{cases} -\frac{1}{4} & t < 0 \\ -e^{-t} + \frac{e^{-2t}(3 + 2t)}{4} & 0 \leq t \end{cases} \quad (7.13)$$

Illustro ora graficamente quello che abbiamo ottenuto accostato all'ingresso 1(-t) :

$$\text{plot}([y_{sis}(t), \text{Heaviside}(-t)], t = -8 .. 10, \text{legend} = ["\text{uscita forzata}", "\text{Heaviside}(-t)"], \text{size} = [500, 500])$$



restart :

Punto B.

Costruire, utilizzando Adobe Illustrator o programma equivalente ed argomentando tutti i passaggi, il Diagramma di Bode per la seguente funzione di trasferimento (Allegare file .ai o .eps) :

$$G := s \rightarrow \frac{10(s + 15)}{15 \cdot s \cdot (s^2 - 6 \cdot s + 9)} :$$

La risposta in frequenza $G(s) \Big|_{s=j\cdot\omega}$ caratterizza un sistema dinamico come un filtro che può amplificare e sfasare armoniche elementari. Esistono due modi per rappresentarla graficamente:

1. **Metodo dei diagrammi cartesiani**
2. **Metodo dei diagrammi polari**

I diagrammi di Bode sono diagrammi cartesiani, in cui la pulsazione ω è la variabile indipendente.

Sono composti da due diagrammi complementari tra loro:

- **Diagramma dei moduli** $(\omega, |G(j\omega)|)$
- **Diagramma delle fasi** $(\omega, \Phi(\omega))$

Da un punto di vista ingegneristico è comodo rappresentare le pulsazioni su **scala logaritmica**. Non rappresento la ω vera e propria, ma il suo ordine di grandezza in una data base (10) $\omega=10^x$.

L'unità di misura di una scala logaritmica in base 10 è la **DECADE**:

- Un intervallo (ω_1, ω_2) è una decade se $\omega_2/\omega_1=10$.
- In una scala a decadi lo 0 tende a $-\infty$.

Inoltre è opportuno rappresentare anche l'asse delle ordinate , utilizzando la notazione in **DECIBEL**.

Il decibel di una quantità x è $20\log_{10}(|x|)$.

Prima di andare a costruire i diagrammi dei moduli e delle fasi, determino i parametri della forma di Bode di $G(s)$.

$$G(s)$$

$$\frac{10s + 150}{15s(s^2 - 6s + 9)} \quad (1)$$

Guardando la funzione di trasferimento noto subito la presenza di un polo nell'origine di molteplicità 1:

$$v := 1 :$$

- **Zeri:**

$$Zeri := solve(numer(G(s)) = 0, s) \\ Zeri := -15 \quad (2)$$

Come si può notare abbiamo **un solo zero a fase minima**, quindi :

$$m_+ := 0 : m_- := 1 : \\ m := m_+ + m_- \\ m := 1 \quad (3)$$

e la relativa **pulsazione di rottura dello zero** è data da:

$$\Omega_1 := eval(|Zeri|) : \\ \Omega_1 \\ 15 \quad (4)$$

- **Poli:**

$$Poli := solve(denom(G(s)) = 0, s) \\ Poli := 0, 3, 3 \quad (5)$$

Senza contare il polo nell'origine abbiamo **due poli instabili coincidenti**, quindi:

$$n_+ := 2 : n_- := 0 : \\ n := n_+ + n_- \\ n := 2 \quad (6)$$

le cui **pulsazioni di rottura dei poli** $\omega = [\omega_1, \omega_2]$
dove ω_i si determina nello stesso modo della pulsazione di rottura dello zero $\omega := [3, 3]$:

Determino il **guadagno di Bode**:

$$k_b := \lim_{s \rightarrow 0} (s^v \cdot G(s)) \\ k_b := \frac{10}{9} \quad (7)$$

che in decibel risulta essere:

$$k_{b_db} := evalf(20 \cdot \log_{10}(|k_b|)) \\ k_{b_db} := 0.9151498108 \quad (8)$$

Ora ho tutti i parametri per definire la **forma di bode**.
Avendo un solo zero e più di un polo, la otteniamo in tal modo:

$$G := s \rightarrow \frac{k_b \cdot \left(\frac{\text{sign}(-\text{Zeri}) \cdot s}{\Omega_1} + 1 \right)}{s^v \cdot \text{product} \left(\frac{\text{sign}(-\text{Poli}[i+1]) \cdot s}{\omega[i]} + 1, i = 1 .. n \right)} :$$

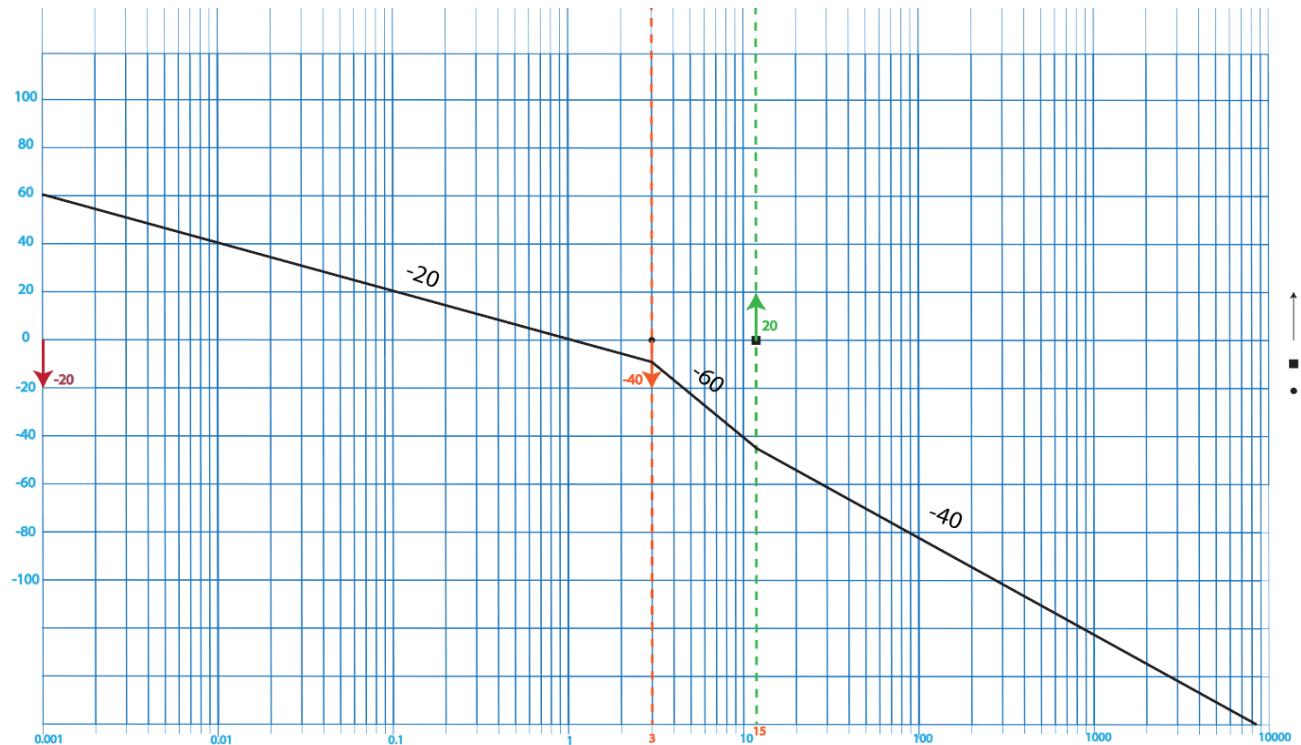
dove product è la produttoria che va da 1 a n (n. poli stabili + n. poli instabili).

i+1 perchè nei "Poli" si considera anche il polo nell'origine (il risultato sarebbe stato lo stesso (il segno di 0 lo da come positivo)) ma per correttezza considero i poli instabili poli[2],poli[3]) .

$G(s)$

$$\frac{10 \left(\frac{s}{15} + 1 \right)}{9 s \left(-\frac{s}{3} + 1 \right)^2} \quad (9)$$

Diagramma dei moduli



Per realizzare il diagramma dei moduli ho innanzitutto identificato con linee tratteggiate le zone di bassa (in arancione) e alta frequenza (in verde).

La zona di **bassa frequenza** è data da tutte quelle pulsazioni che si trovano a sinistra del minimo delle pulsazioni di rottura del sistema:

$$\omega < \min(15,3) = 3$$

La zona di **alta frequenza** è data invece da tutte quelle pulsazioni che si trovano a destra del massimo delle pulsazioni di rottura del sistema:

$$\omega > \max(15,3) = 15$$

Per la zona di alta frequenza ho dovuto stimare l'offset tra la decade di sinistra 10 rad/sec e la pulsazione 15 rad/sec:

come abbiamo visto a lezione, la si ottiene considerando il log:

$$\begin{aligned} distanza_{\log} &:= evalf\left(\log_{10}\left(\frac{15}{10}\right)\right) \\ &\quad distanza_{\log} := 0.1760912591 \end{aligned} \tag{1.1}$$

La distanza in termini di mm tra gli estremi della decade in cui ricade 15 rad/sec è pari a 26.4, la distanza sulla carta logaritmica sarà:

$$\begin{aligned} distanza_{carta_logaritmica} &:= evalf(distanza_{\log} \cdot 26.4) \\ &\quad distanza_{carta_logaritmica} := 4.648809240 \end{aligned} \tag{1.2}$$

La media frequenza vien da sè.

La **pendenza iniziale** si ricava conoscendo il numero di poli nell'origine :

$$pendenza_iniziale := -20 \text{ v} \quad pendenza_iniziale := -20 \tag{1.3}$$

Mentre la **pendenza finale** la si può ottenere in due modi possibili :

Ricordo che:

$$\begin{aligned} n_poli_escluso_origine &:= 2 : \\ n_zeri &:= 1 : \\ &\quad 2 \end{aligned}$$

$$1. \ pendenza_finale := 20 \cdot (n_zeri - n_poli_escluso_origine) + pendenza_iniziale \quad pendenza_finale := -40 \tag{1.4}$$

$$2. \ pendenza_finale := pendenza_iniziale + 20 \cdot (n_zeri) - 20 \cdot (n_poli_escluso_origine) \quad pendenza_finale := -40 \tag{1.5}$$

Tracciamento diagramma dei moduli:

Per prima cosa ho identificato tramite frecce le amplificazioni date dagli zeri (in verde) e le attenuazioni date dal polo nell'origine (in rosso) e dai restanti poli coincidenti (in arancione). Il polo nell'origine determina la pendenza iniziale che è pari a -20 db/dec, i poli instabili essendo

coincidenti un attenuazione di 40 db/dec e lo zero un amplificazione di 20 db/dec.

Ho disegnato quindi la semiretta con pendenza iniziale di -20 db/dec, tracciandola dall'origine (60 sull'asse delle ordinate) a 1 (rispettando la pendenza) e prolungandola fino alla fine della bassa frequenza. Così facendo però ho determinato solo una semiretta di pendenza -20 db/dec ma con k_b in decibel pari a 0. Allora l'ho sollevato di 0.92 db effettuando una proporzione, considerando che da 0 a 20 si hanno 25 mm:

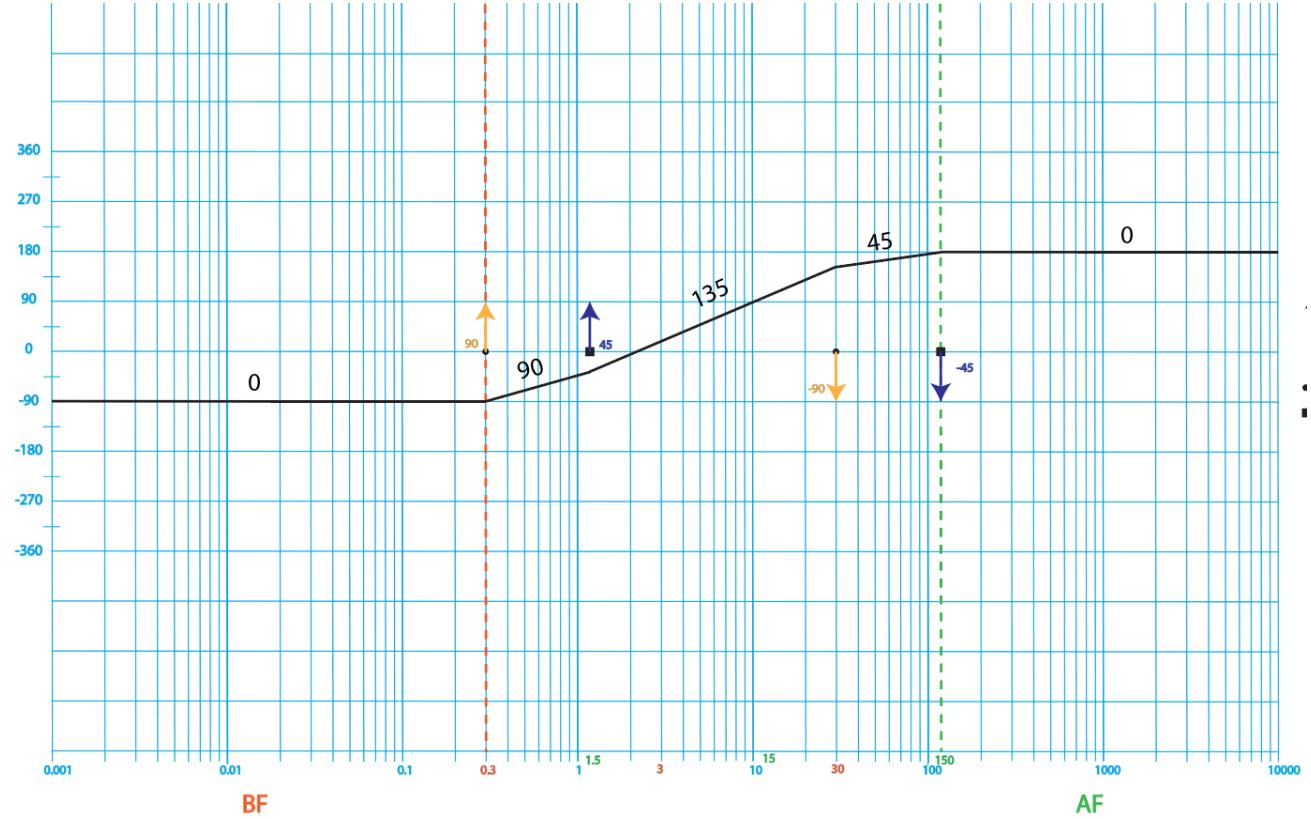
$$k_{b_mm} := \frac{k_{b_db} \cdot 25}{20}$$
$$k_{b_mm} := 1.143937264 \quad (1.6)$$

Quindi alla y della semiretta (146.67) vado a sottrargli 1.144:

$$y := 146.67 - k_{b_mm}$$
$$y := 145.5260627 \quad (1.7)$$

Una volta completata l'approssimazione in bassa frequenza, incontro un'attenuazione di 40 db/dec, andando così a tracciare una semiretta con pendenza pari a -60 db/dec fino all'inizio dell'alta frequenza, dove vi è un'amplificazione di 20 db/dec andando quindi a condurre l'ultima semiretta con pendenza finale (roll off) pari a -40 db/dec.

Diagramma delle fasi



Oltre che alle pulsazioni intermedie, qui dobbiamo determinare quelle di una decade prima e una decade dopo:

La zona di **bassa frequenza** è data da tutte quelle pulsazioni che si trovano a sinistra del minimo delle pulsazioni di rottura del sistema moltiplicato per 1/10 (decade prima):

$$\omega < \min(15, 3)/10 = 0.3$$

La zona di **alta frequenza** è data invece da tutte quelle pulsazioni che si trovano a destra del massimo delle pulsazioni di rottura del sistema moltiplicato per 10 (decade dopo):

$$\omega > \max(15, 3)*10 = 150$$

L'offset (per 150 e 1.5 rad/sec) è lo stesso di quello calcolato nel diagramma dei moduli per la pulsazione di 15 rad/sec.

Determino ora la **fase iniziale**:

$$fase_iniziale := \arg(k_b) - v \cdot 90$$

$$fase_iniziale := -90 \quad (2.1)$$

e la **fase finale**:

$$fase_finale := \arg(k_b) - v \cdot 90 + m_- \cdot 90 - m_+ \cdot 90 - n_- \cdot 90 + n_+ \cdot 90$$

$$fase_finale := 180 \quad (2.2)$$

Tracciamento diagramma delle fasi:

So che in bassa frequenza la fase è piatta e dai calcoli fatti in precedenza ha uno slittamento di 90 gradi in ritardo. In alta frequenza invece la fase è di 180 gradi in anticipo.

Ora traccio il diagramma intermedio, costruendo i segmenti di pendenza variabile. Identifico con il pallino le variazioni di pendenza sui poli coincidenti (0.3 e 30) e con il quadratino le variazioni di pendenza sullo zero (1.5 e 150).

Lo zero come abbiamo visto in precedenza è a fase minima e quindi cambia pendenza in anticipo; I due poli coincidenti sono poli instabili e anch'essi quindi daranno un contributo sulla fase in anticipo.

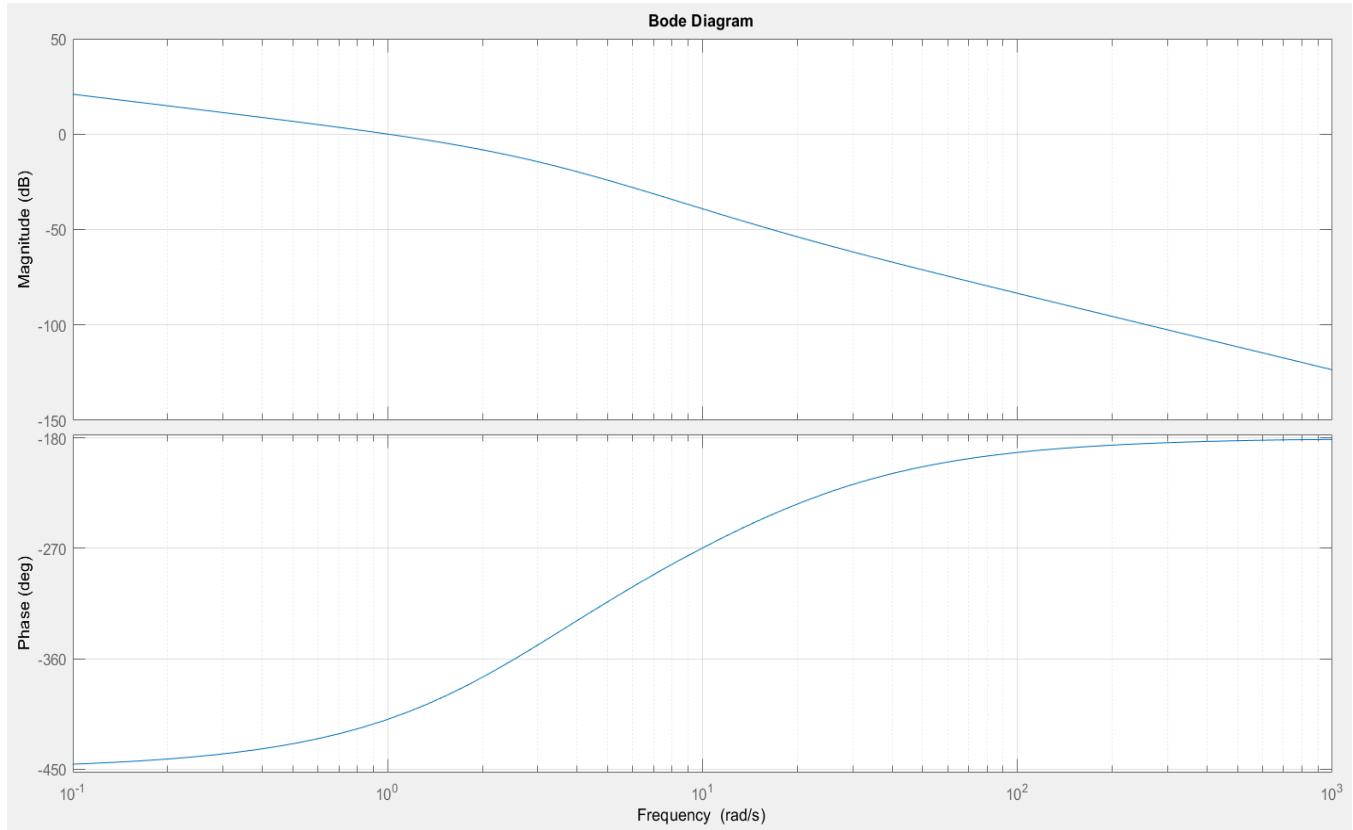
Inoltre siccome il polo è doppio, il contributo alle fasi di sfasamento in anticipo andrà raddoppiato (anzichè avere 45 avremo 90).

Posiziono quindi le frecce che individuano le variazioni di pendenza pari a 90° dei poli (in giallo) e quelle che individuano le variazioni di pendenza pari a 45° dello zero (in blu).

- La pendenza del segmento tra 0.3 e 1.5 è data dalla freccia a sinistra di 0.3 che indica uno sfasamento in anticipo di 90 gradi.
- La pendenza del segmento tra 1.5 e 30 è data dalla somma delle pendenze delle prime due frecce. Quindi avremo uno sfasamento in anticipo di 135 gradi.
- La pendenza del segmento tra 30 e 150 considerando la freccia che indica uno sfasamento di 90 gradi in ritardo, sarà di 45 gradi (in anticipo).

La semiretta di pendenza 135 la ottengo considerando che in due decadì andrà a guadagnare 270 gradi. Quindi mi posiziono in (0 , 0.001) e traccio una linea che prende due decadì, terminando in (270 , 0.1), posizionandola e ridimensionandola nel tratto 1.5 - 30.

Verifco infine il diagramma di Bode ottenuto con l'utilizzo di Matlab:



PUNTO C.

c. Si consideri il seguente schema a blocchi in retroazione algebrica ed unitaria

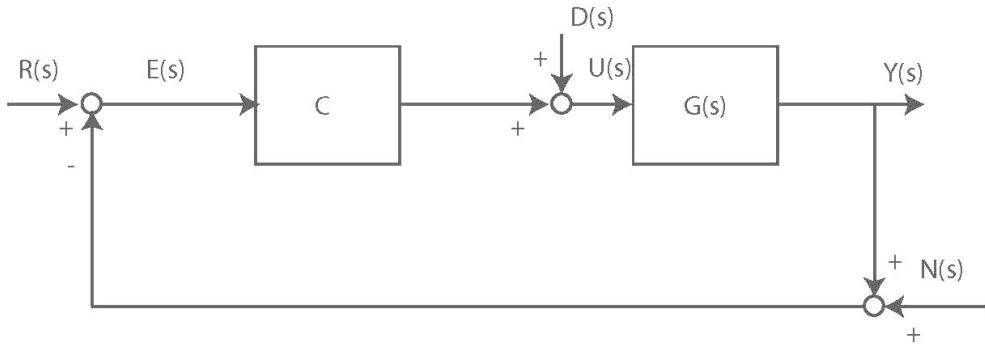


Figure 1: Schema a Blocchi in Retroazione Algebrica ed Unitaria

La funzione di trasferimento dell'impianto è

$$G(s) = \frac{1}{3(s + \frac{1}{2})}$$

Determinare:

1. uno schema di controllo on-off scegliendo il livello del riferimento da asservire e discutendo l'andamento del segnale di controllo al variare della fascia di incertezza intorno alla quale far variare l'uscita asservita (utilizzare Simulink);
2. Si supponga che il regolatore abbia la seguente struttura lineare;

$$C(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

Determinare, servendosi degli strumenti di CAD spiegati durante il corso (Maple, Matlab e Simulink),

- (a) il valore limite di K in corrispondenza del quale la stabilità in retroazione non è più garantita;
- (b) scelto a piacere un valore di K appartenente alla regione di stabilità rappresentare il diagramma dei moduli e delle fasi della funzione di sensitività e sensitività complementare;
- (c) sempre considerando il valore di K scelto in precedenza valutare, servendosi delle opportune risposte in frequenza, l'andamento dell'errore di inseguimento al riferimento $r(t) = \sin(\frac{t}{12}) 1(t)$. Quanto vale il più piccolo errore di inseguimento ottenibile dalla struttura di controllo così assegnata oltre il quale il sistema non è più stabile a ciclo chiuso?;
- (d) si consideri sempre il valore di K scelto nel secondo punto. Nell'ipotesi che il disturbo sia il seguente segnale

$$d(t) = \sin\left(\frac{t}{5}\right) 1(t)$$

e che il rumore di misura abbia la seguente espressione

$$n(t) = \sin(60t) 1(t)$$

quanto vale in configurazione *caso peggiore* l'ampiezza dell'errore sull'uscita regolata a regime?
Argomentare sfruttando le risposte in frequenza dello schema retrozionato e le eventuali (se applicabili) approssimazioni in bassa e alta frequenza della funzione di anello.

Scrivo la **funzione di trasferimento** dell'impianto :

$$G := s \rightarrow \frac{1}{3\left(s + \frac{1}{2}\right)} : \\ G(s)$$

$$\frac{1}{3s + \frac{3}{2}} \quad (1)$$

C.1

Determino in questo punto uno schema di controllo on-off scegliendo il livello di riferimento da asservire e discuterò l'andamento del segnale di controllo al variare della fascia di incertezza intorno alla quale far variare l'uscita asservita, facendo uso di Simulink.

Innanzitutto scrivo su Matlab la funzione di trasferimento:

```
close; close all;

s = zpk('s');
G = 1/(3*(s+1/2));
```

Ora devo andare a determinare prima di costruire lo schema di controllo on-off, il valore di riferimento, l'ampiezza dell'ingresso a gradino e la soglia di incertezza ε .

Il segnale di riferimento deve essere inferiore alla risposta forzata a regime dell'ingresso che ipotizzo avere un valore pari a 10 (**ingresso** = 10).

ingresso := 10 :

Quindi vado a calcolarmi la risposta forzata a regime:

$$y_{grad} := t \rightarrow \text{invlaplace}\left(\frac{G(s) \cdot \text{ingresso}}{s}, s, t\right) : \\ y_{grad}(t) = \frac{20}{3} - \frac{20e^{-\frac{t}{2}}}{3} \quad (1.1)$$

$$y_{regime} := \lim_{t \rightarrow \infty} y_{grad}(t)$$

$$y_{regime} := \frac{20}{3} \quad (1.2)$$

E' immediato vedere che il sistema è BIBO stabile (possedendo un solo polo e a parte reale negativa) e potevo calcolare la risposta forzata utilizzando anche il teorema del valore finale:

$$y_{regime} := \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot G(s) \cdot ingresso}{s}$$

$$y_{regime} := \frac{20}{3} \quad (1.3)$$

$$\text{evalf}(y_{regime}) \quad 6.666666667 \quad (1.4)$$

Quindi il valore di riferimento (sommato al margine di tolleranza ε deve essere inferiore di 6.67 rischiando altrimenti che il controllore rimarrebbe sempre su ON.

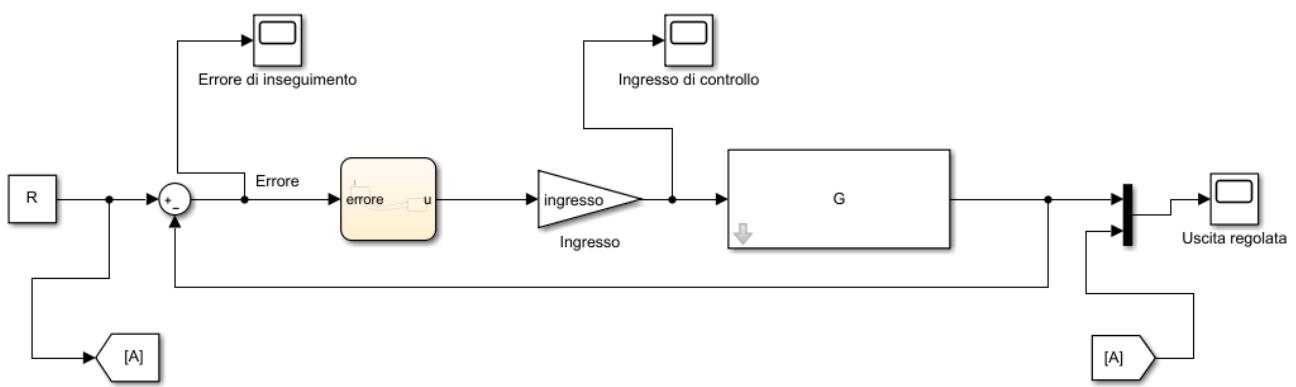
Quindi l'obiettivo del controllore è quello di mantenere il valore dell'uscita all'interno della fascia di tolleranza:

$$Y_{rif} - \varepsilon \leq Y(t) \leq Y_{rif} + \varepsilon$$

A questo punto arrivati scelgo un valore di **riferimento** pari a 5 e inizialmente un **margine di tolleranza ε** pari a 0.5 e trascrivo tutto su MATLAB :

```
R = 5;
ingresso = 10;
epsilon = 0.5;
```

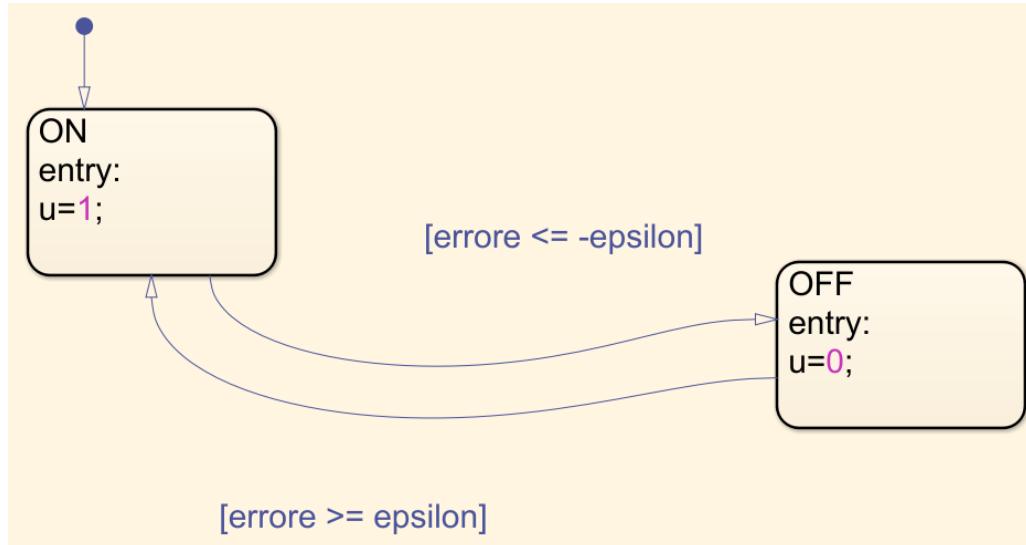
Costruisco attraverso l'utilizzo di Simulink lo schema di controllo ON-OFF :



Ho caricato inizialmente dentro l'area di lavoro di Simulink il blocco LTI System al quale gli assegno la variabile G che denota la f.d.t. , il riferimento , il valore di riferimento tramite un blocco constant, aggiunto il nodo sommatore, l'ingresso e i vari scope (errore di inseguimento, ingresso di controllo e uscita regolata).

Inoltre ho inserito due label (etichette) in modo da mostrare graficamente il riferimento nell'uscita regolata collegato quindi ad un mux.

Per implementare un regolatore ON-OFF ho utilizzato un automa a stati finiti (in alternativa si poteva usare una funzione) inserendo il blocco chart:



Si tratta di un semplice automa a due stati ON e OFF in cui rispettivamente si imposta lo stato a 1 e 0, con un cambiamento di stato che dipende dal valore dell'errore di inseguimento.

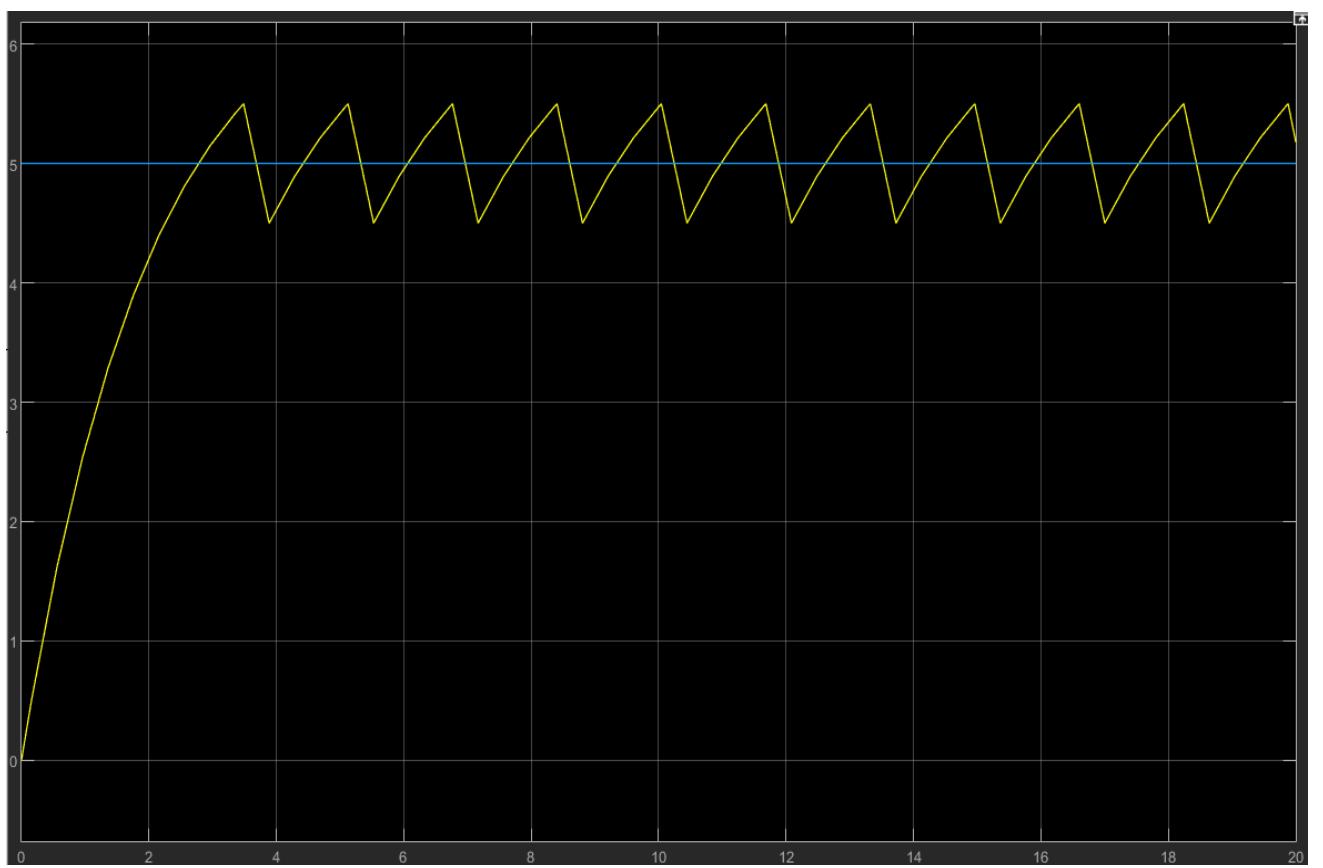
A partire dalla fascia di tolleranza e sapendo che $e(t) = Y_{rif} - Y(t)$, la condizione di passaggio dallo stato ON allo stato OFF è banale ricavarla:

$$Y_{rif} - Y(t) \leq -\epsilon \Rightarrow e(t) \leq -\epsilon$$

ed è banale ottenere la condizione di passaggio dallo stato OFF a ON.

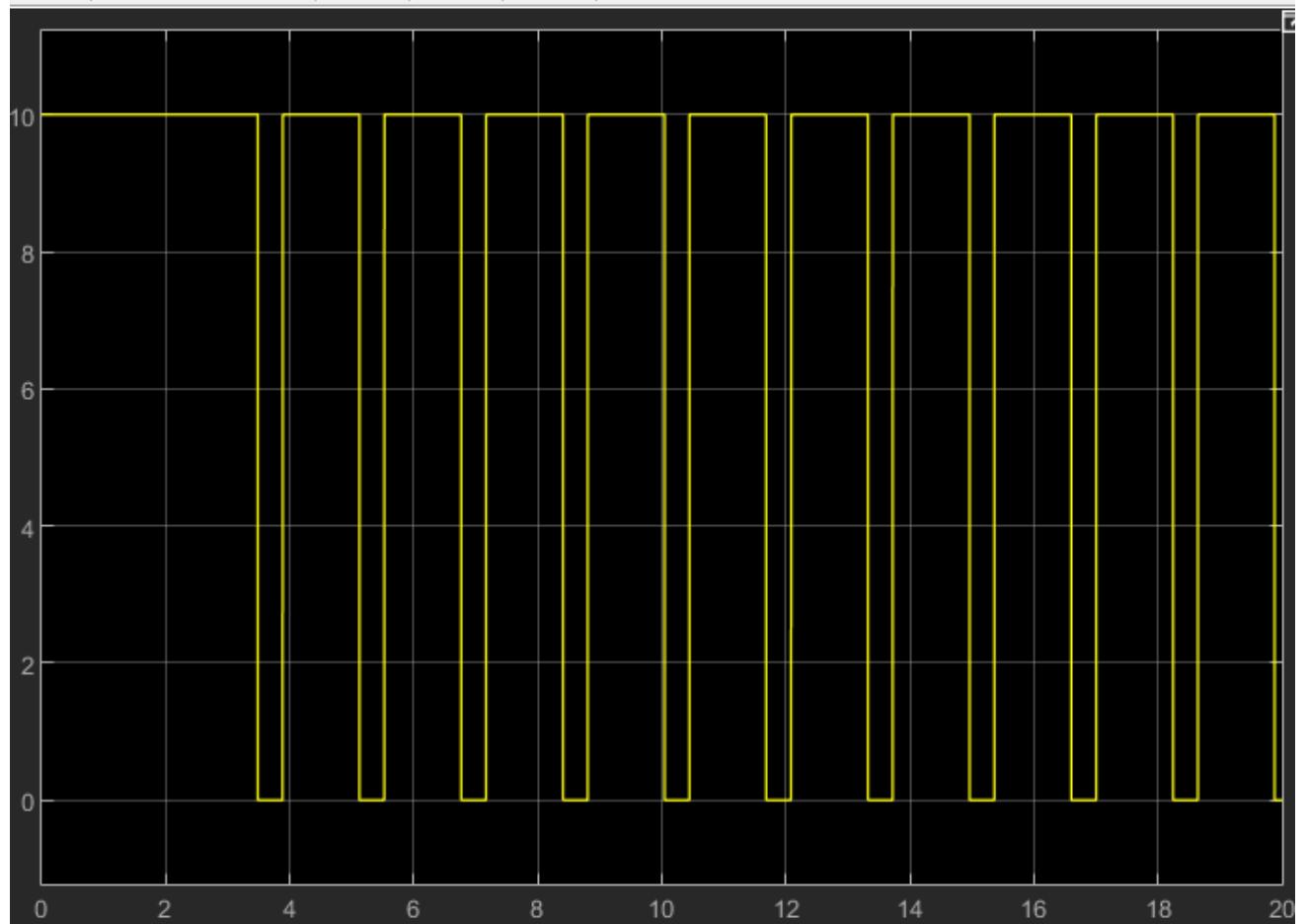
Ora lancio la simulazione con un *simulation stop time* pari a 20 e analizzo l'output fornito dallo scope uscita regolata :

- $\epsilon = 0.5$



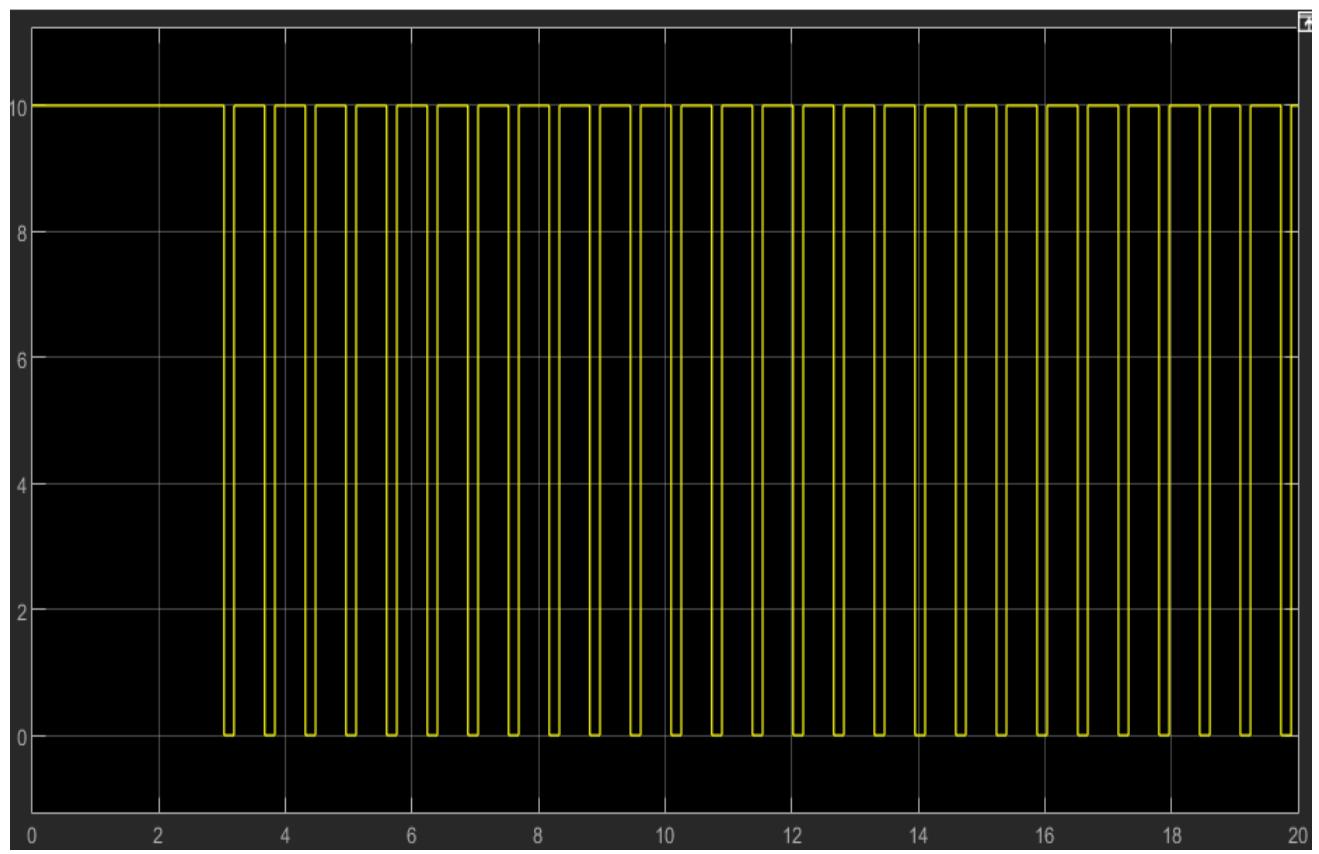
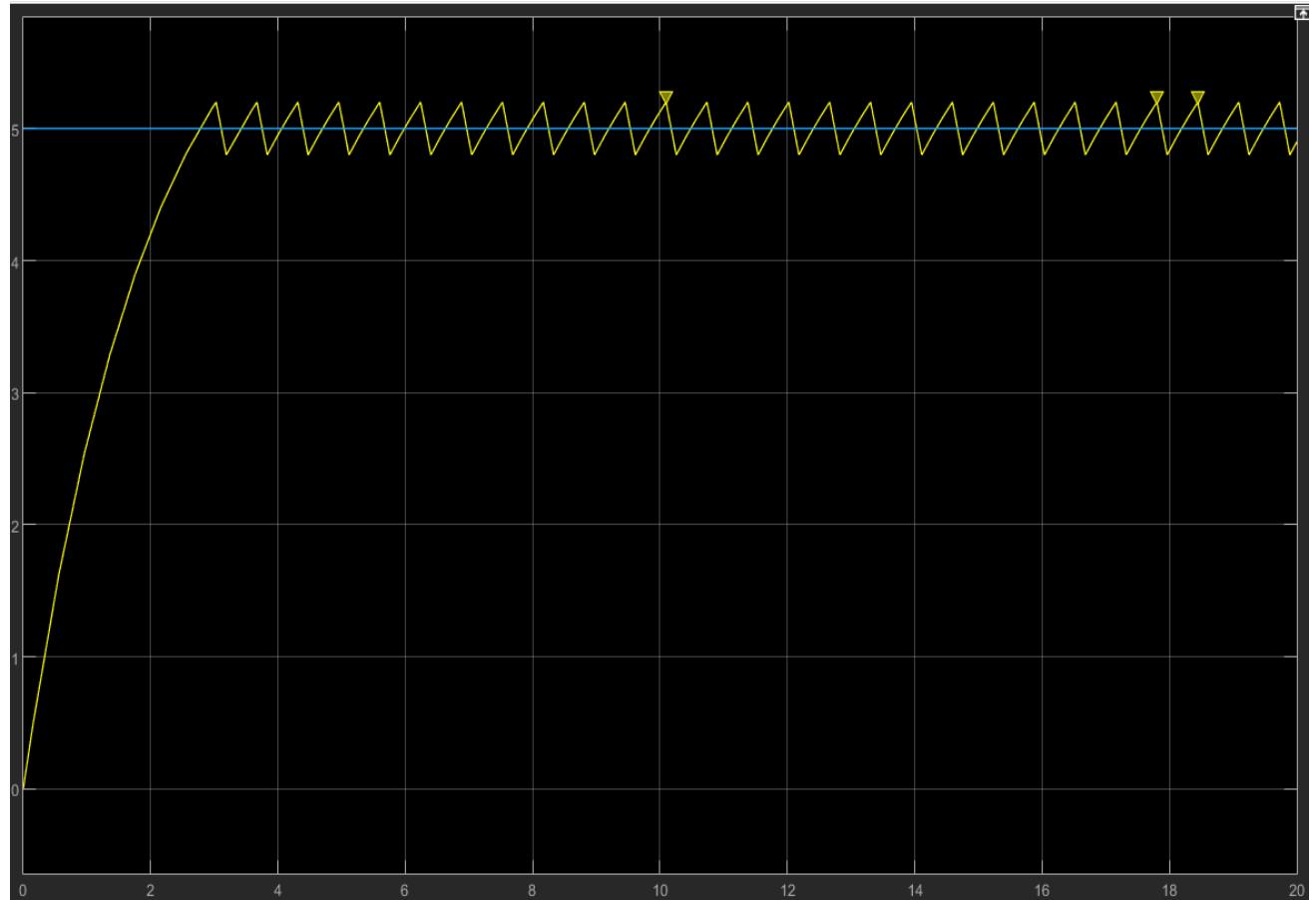
Bilevel Measurements		
▶ Settings		
▶ Transitions		
▼ Overshoots / Undershoots		
+ Preshoot	0.505 %	
+ Overshoot	0.505 %	
+ Undershoot	17.860 %	
+ Settling Time	--	
- Preshoot	--	
- Overshoot	--	
- Undershoot	--	
- Settling Time	--	
▶ Cycles		
Peak Finder		
▶ Settings		
▼ Peaks		
■	Value ▾	Time ▾
■	5.500e+00	19.880
■	5.500e+00	18.241
■	5.500e+00	16.601

Come possiamo vedere l'uscita regolare oscilla intorno al valore di riferimento con un margine di tolleranza $\varepsilon = 0.505$ rispettato. Possiamo verificare dai "measurements" che abbiamo scelto parametri corretti, in quanto la sovraelongazione (overshoot) e la sottoelongazione (preshoot) si mantengono costanti e coerenti con il margine di tolleranza, ed è possibile vederlo anche dai valori di picco.



Per quanto riguarda il segnale di controllo, possiamo vedere il suo **duty cycle**, ovvero il rapporto tra il tempo in cui il suo valore è uguale all'ingresso (su ON) e il suo periodo. E' un'onda quadra che misura appunto lo sforzo del controllore a mantenere l'uscita all'interno della fascia di tolleranza. Se modifichiamo il margine ϵ vedremo che sia l'uscita controllata che il segnale di controllo fisico assumeranno comportamenti diversi. Mi aspetto se aumentassi il suo valore, una diminuzione della frequenza di oscillazione del segnale di controllo e quindi un beneficio sul controllore. Viceversa se assumessi un valore del margine di tolleranza inferiore.

- $\epsilon = 0.2$

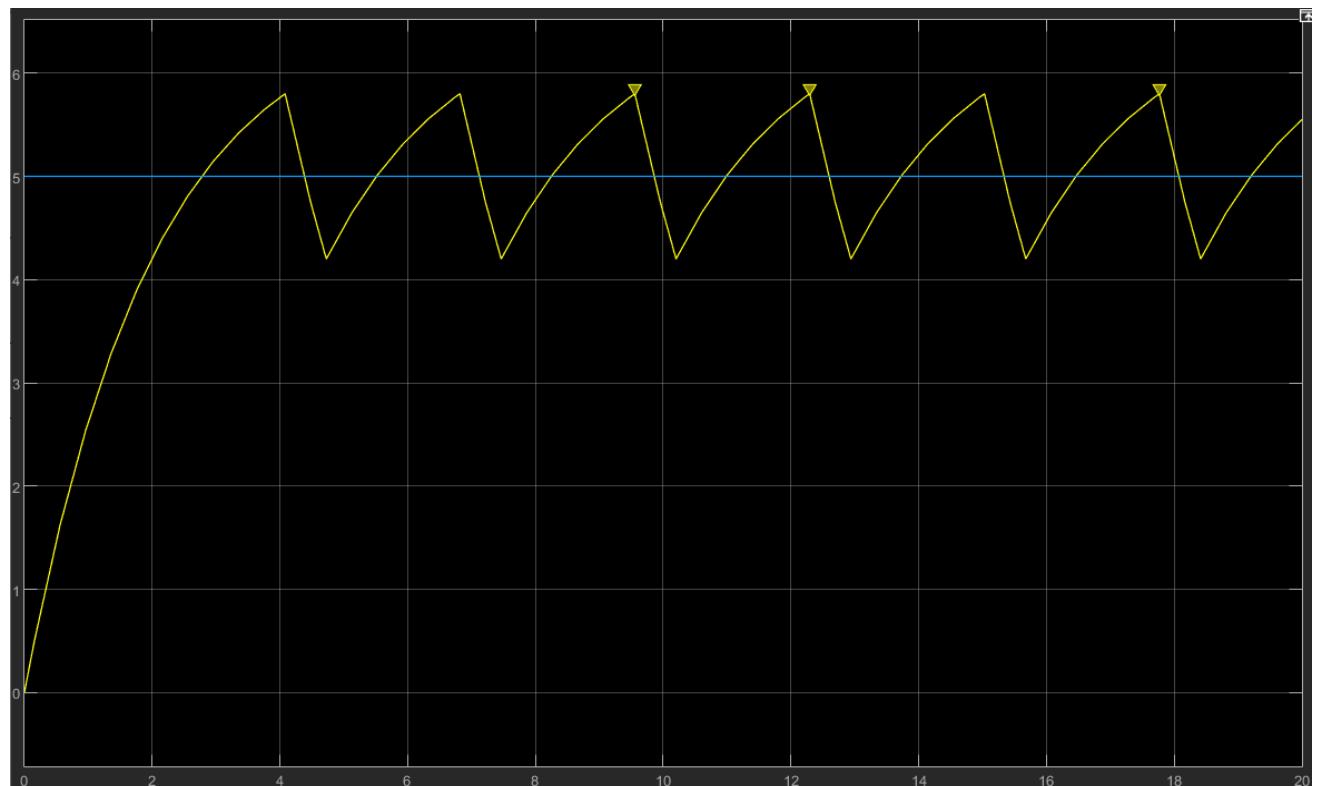


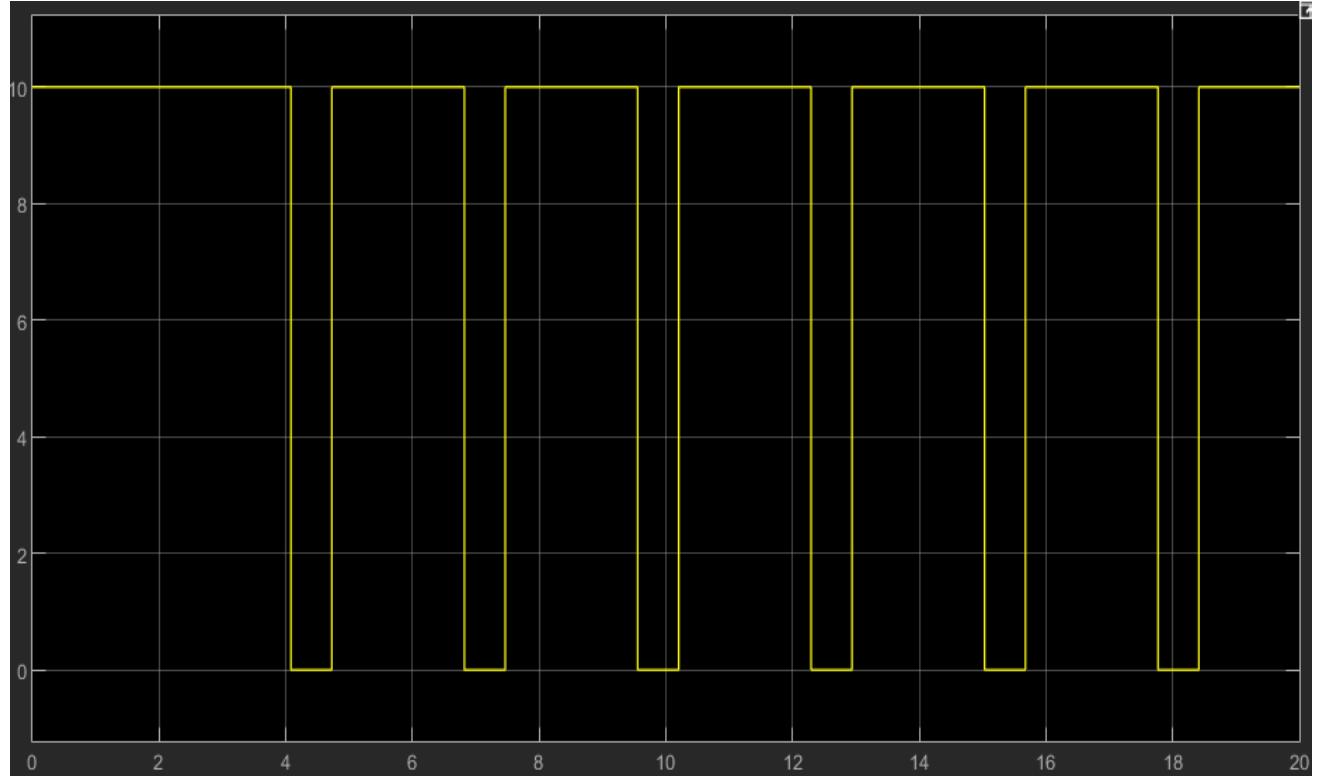
Come si può notare vi è un aumento di oscillazioni intorno al valore di riferimento, e quindi una maggiore frequenza nel segnale di controllo che applicherà quindi più sforzo rispetto al valore di margine precedente. Inoltre ricordo che la potenza dissipata da un dispositivo è direttamente proporzionale alla frequenza del segnale \Rightarrow Aumento di potenza dissipata.

Mentre se aumentassimo il margine di tolleranza ci aspetteremo intuitivamente che il segnale di controllo compierà meno lavoro e quindi in uscita una diminuzione di oscillazioni ovvero un minor numero di switch da uno stato all'altro (On-Off).

Infatti:

- $\epsilon = 0.8$





Come mi aspettavo si nota chiaramente una diminuzione di oscillazioni e quindi di cambiamenti di stato da ON a OFF e viceversa. Il controllore compie meno sforzo, per l'appunto una diminuzione della frequenza.

C.2

Si supponga che il regolatore abbia la seguente struttura lineare:

$$C := s \rightarrow \frac{K}{s(s + 1)} :$$

Determinare servendosi degli strumenti CAD spiegati durante il corso (Maple, Matlab e Simulink) :

a) il valore limite di K in corrispondenza del quale la stabilità in retroazione non è più garantita

In generale sappiamo che un sistema di controllo è stabile internamente quando per ogni terna di ingressi limitati (R "riferimento", D "disturbo", N "rumore"), le uscite del sistema di controllo (Y "uscita regolata", E "errore di inseguimento", U "segnale di controllo") sono limitate. Ovvero se :

$$\begin{pmatrix} Y \\ \Sigma \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{W}(s) \\ \text{3} \times 3 \\ f.d.t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ D \\ N \end{pmatrix}$$

$$Y(s) = T(s) R(s) + S_d(s) D(s) - T(s) \cdot N(s)$$

$$\Rightarrow E(s) = S(s) R(s) - S_d(s) D(s) - S(s) \cdot N(s)$$

$$U(s) = S_u(s) R(s) + S(s) D(s) - S_u(s) \cdot N(s)$$

i poli di $W_{ij}(s)$: sono tutti a parte reale negativa.

dove le funzioni di trasferimento sono :

$T(s) = L(s)/1+L(s) \Rightarrow \text{Sensitività complementare}$

$S(s) = 1-T(s) = 1/1+L(s) \Rightarrow \text{Sensitività}$

$S_d(s) = G(s)/1+L(s) \Rightarrow \text{Sensitività del disturbo}$

$S_u(s) = C(s)/1+L(s) \Rightarrow \text{Sensitività del segnale di controllo}$

In particolare l'esercizio richiede, avendo la struttura del controllore, di determinare il valore K incognito in corrispondenza del quale la stabilità in retroazione non è più garantita.

Questo si può risolvere adottando invece due possibili politiche : 1) EX ANTE 2) EX POST.

1. Si valuta la stabilità in retroazione evitando di chiudere l'anello di retroazione, applicando infine il criterio di Bode.
2. Si valuta la stabilità in retroazione dopo aver chiuso l'anello di retroazione, calcolando la funzione di trasferimento T(s) ad anello chiuso e applicare il criterio di Routh.

Seguo la prima politica, che è la più efficiente qualora la stabilità non fosse garantita, in quanto ci

evita di chiudere l'anello.

Come abbiamo visto a lezione, nel caso in cui la funzione di anello non presenta poli nel semipiano destro $\text{np} = 0$ e il guadagno di Bode, K_b è positivo è possibile evitare di tracciare il diagramma polare completo se siamo interessati solo a valutare la Bibo stabilità della retroazione. In questo caso l'unico modo di avere instabilità è che il diagramma polare circondi o tocchi il punto critico $-1+j0$.

Però possiamo ancor di più semplificare il criterio di Nyquist in quanto la funzione di anello ha un diagramma polare regolare, adottando così il criterio di Bode:

Una funzione di anello a diagramma regolare soddisfa le seguenti condizioni :

- i poli sono a parte reale non positiva
- il diagramma dei moduli di $L(s)$ è monotono decrescente
- $K_b > 0$
- la pulsazione di attraversamento ω_c è unica

⇒ **condizione necessaria e sufficiente per la Bibo stabilità del sistema retroazionato è che il margine di fase Φ_m sia > 0 .**

Determino innanzitutto la funzione d'anello creando uno script su Matlab, scegliendo inizialmente $K = 1$:

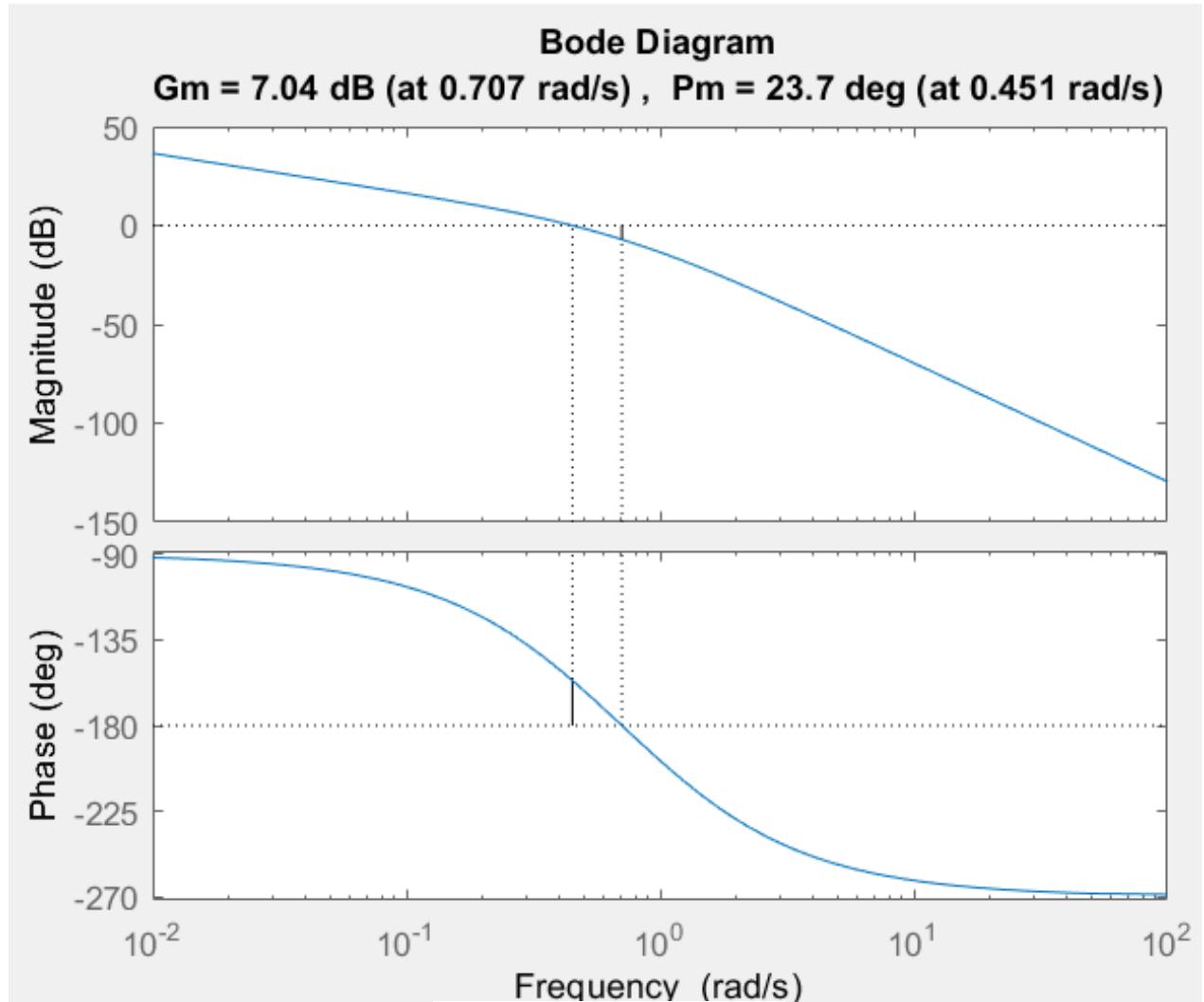
```
s = zpk('s'); L =
G = 1/(3*(s+1/2)); 0.33333
C = 2.25/(s*(s+1)); -----
L = series(C,G); s (s+0.5) (s+1)
```

Ora per determinare i valori di K tale che il sistema retroazionato sia Bibo stabile, devo calcolarmi il **margine di ampiezza K_m** ovvero quel valore di K tale per cui il diagramma polare attraversa il punto critico e quindi garantendo instabilità.

Quindi in poche parole il range di stabilità del sistema retroazionato è così strutturato :

$$0 < K < K_m$$

E' facile determinare il margine di ampiezza K_m che coincide con il valore G_m ricavabile usando la funzione $[G_m] = \text{margin}(L)$:



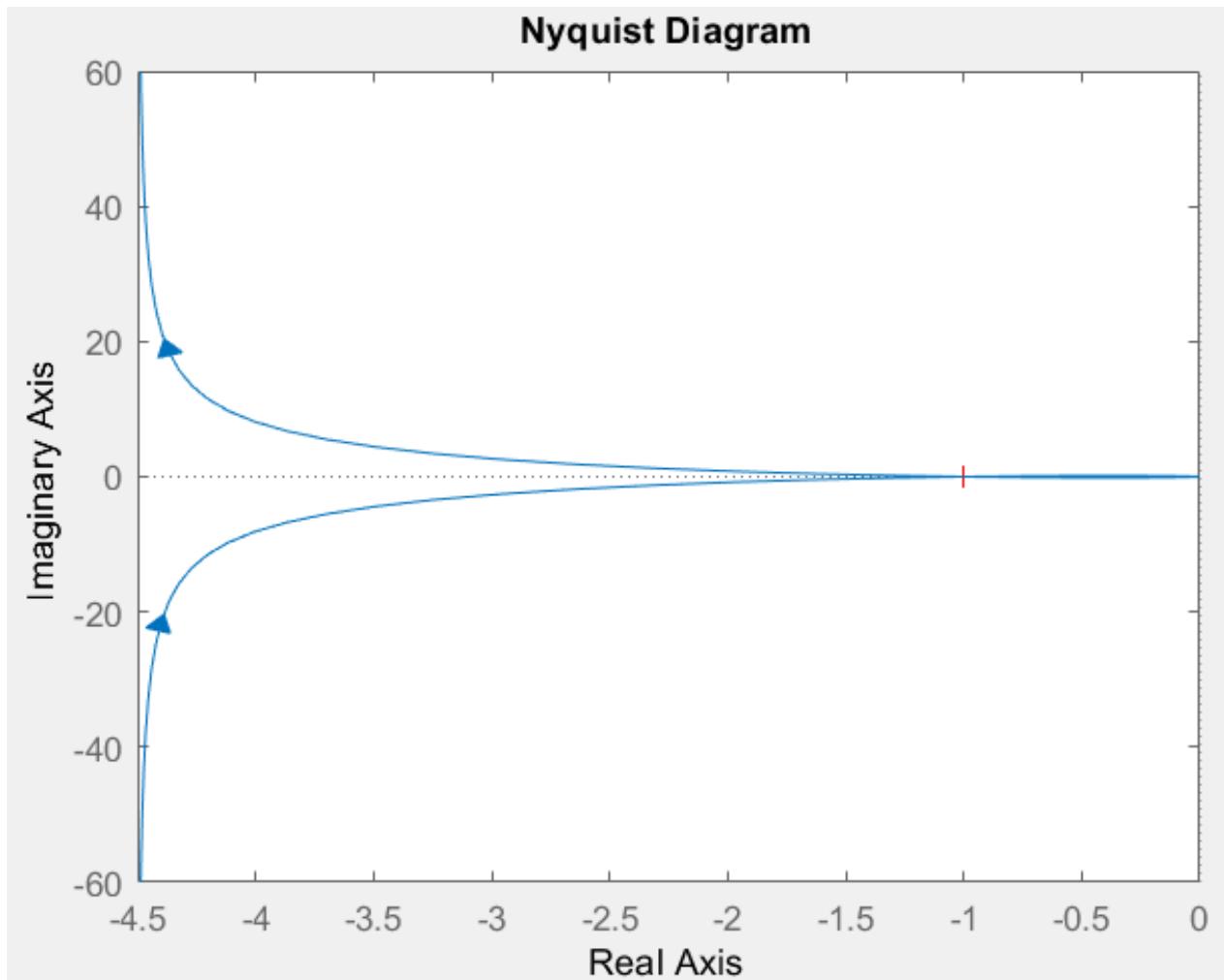
$$G_m =$$

$$2.2500$$

Quindi il valore di K in corrispondenza del quale la stabilità in retroazione non è più

garantita è pari a $9/4$. Il sistema retroazionato è Bibo stabile per $0 < K < 9/4$.

Infine verifico che appunto per $K = 2.25$ ($9/4$) il punto critico viene intersecato :



b) scelto a piacere un valore di k appartenente alla regione di stabilità rappresentare il diagramma dei moduli e delle fasi della funzione di sensitività e sensitività complementare

Ricordiamo le funzioni di trasferimento della sensitività e sensitività complementare :

Sensitività complementare:

$$\frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)} = T(s)$$

Sensitività
Complementare

Sensitività:

$$1-T(s) = 1 - \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{1}{1+L(s)} = S(s)$$

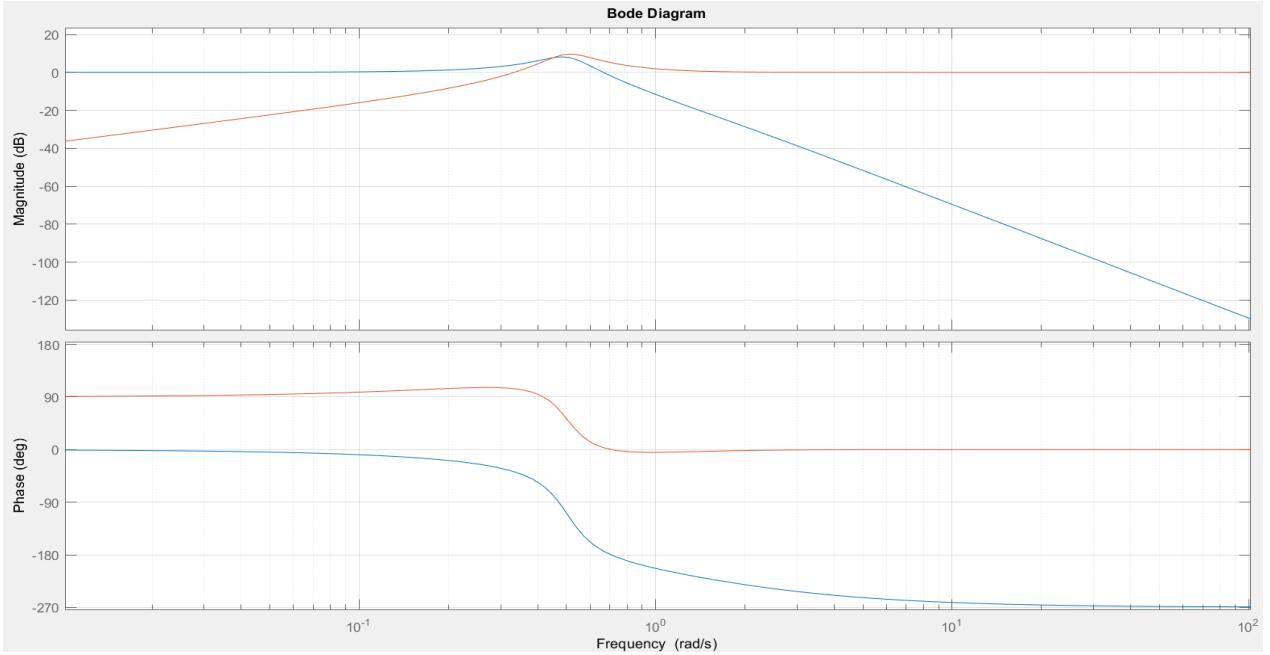
Sensitività

Scelgo k = 1 e rappresento con l'ausilio di Matlab il diagramma dei moduli e delle fasi della funzione di sensitività e sensitività complementare :

```

s = zpk('s');
G = 1/(3*(s+1/2));
C = 1/(s*(s+1));
L = series(C,G);
T = feedback(L,1);
S = 1-T;
bode(T);
hold on
bode(S);

```



La curva blu è la sensività complementare, mentre quella arancione la sensività. Si comportano rispettivamente come filtro passa-basso e filtro passa-alto, in cui la SC attenua il segnale di errore, mentre la S l'errore di inseguimento.

Possiamo vedere le rispettive f.d.t. :

$$T =$$

$$0.33333$$

$$(s+1.313) (s^2 + 0.1875s + 0.254)$$

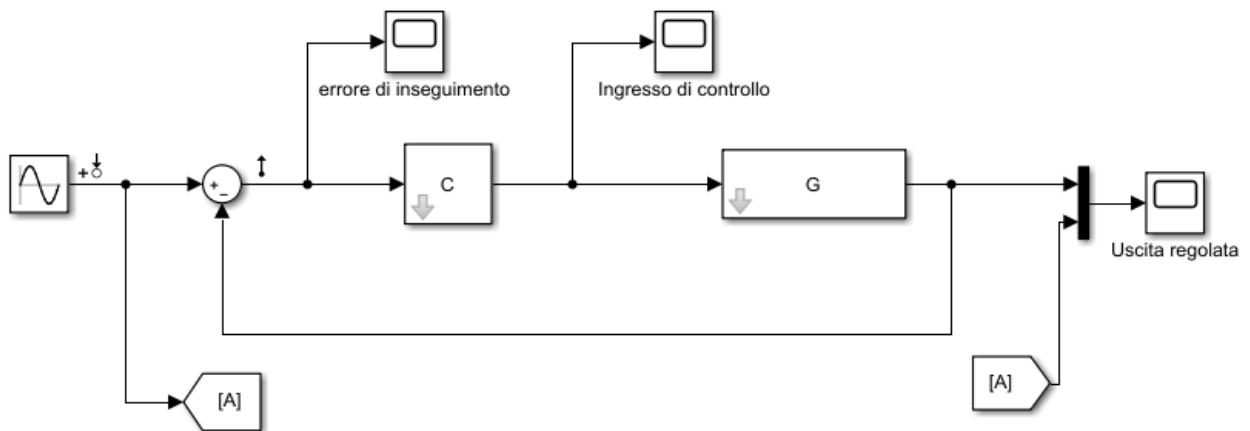
$$S =$$

$$s (s+1) (s+0.5)$$

$$(s+1.313) (s^2 + 0.1875s + 0.254)$$

c) sempre considerando il valore di K scelto in precedenza valutare, servendosi delle opportune risposte in frequenza , l'andamento dell'errore di inseguimento al riferimento $r(t) = \sin(t/12)*1(t)$. Quanto vale il più piccolo errore di inseguimento ottenibile dalla struttura di controllo così assegnata oltre il quale il sistema non è più stabile a ciclo chiuso ?

Costruisco inizialmente lo schema di controllo, considerando il controllore $C(s) = 1/(s*(s+1))$ e come riferimento un segnale periodico elementare $r(t) = \sin(t/12)*1(t)$. Setto il *Simulation stop time* a $96*(2*\pi)$ in quanto in uscita voglio vedere 8 periodi $\Rightarrow n.\text{periodi} * (2\pi/\omega)$ dove $\omega = 1/12$.



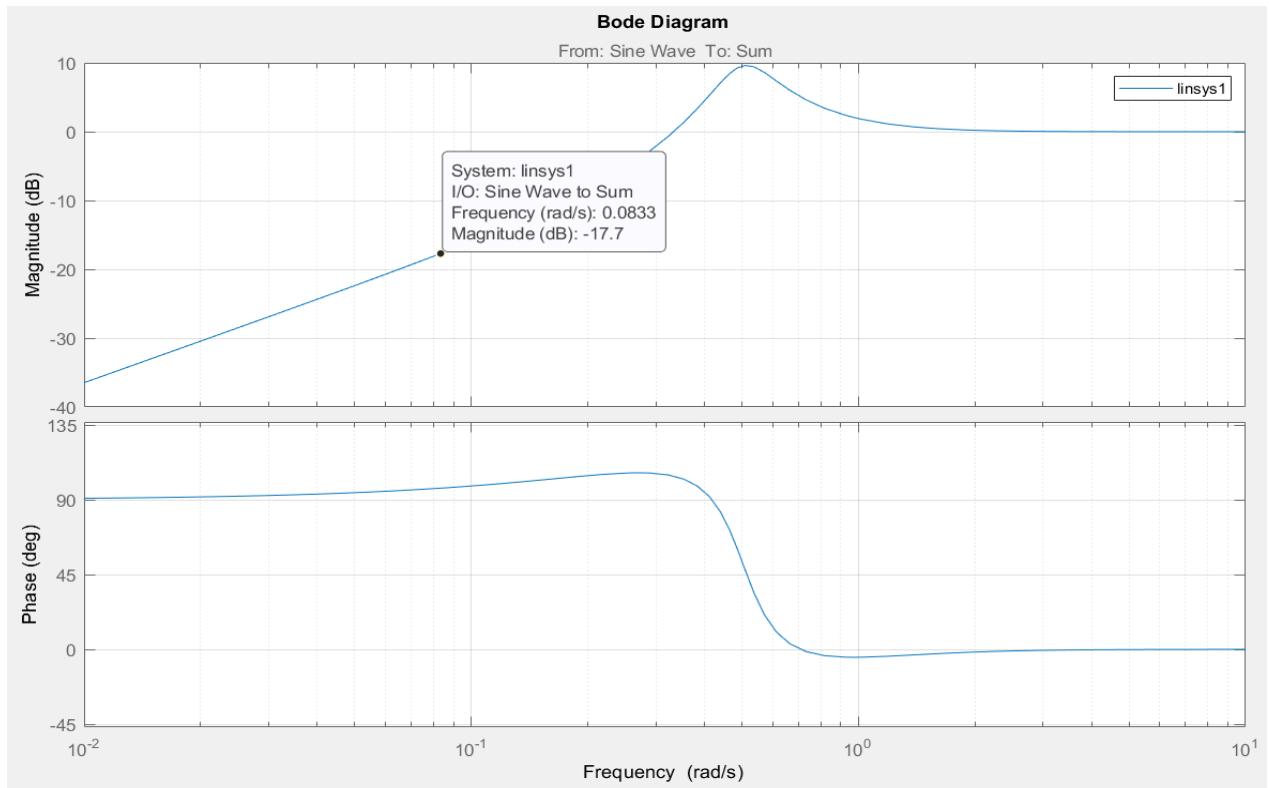
Dalla teoria sappiamo che a transitorio esaurito, l'**errore di inseguimento** è un segnale periodico elementare $e(t) = E*\sin(\omega*t + \xi)$ e l'uscita a transitorio esaurito $y(t) = Y*\sin(\omega*t + \phi)$. Sottolineando che l'**ampiezza dell'errore di inseguimento** $E = |S(j\omega)|*R$ e l'**ampiezza dell'uscita regolata** $Y = |T(j\omega)|*R$, sapendo già che $S(j\omega)$ e $T(j\omega)$ sono rispettivamente sensitività e sensitività complementare.

So che la sensitività è quella f.d.t. che lega l'errore di inseguimento al riferimento (definita impropria poichè, come vedremo nel diagramma di bode, in AF non tende a -infinito ma ad una costante) :

$$E(s) = S(s)*R(s)$$

Dopo aver settato input perturbation (f.d.t. ad anello chiuso) e output measurement (uscita della sensitività) leggo la risposta in frequenza di quella f.d.t. che ha per ingresso il riferimento e come uscita l'errore di inseguimento, analizzando il diagramma di bode (analysis > control design > linear analysis).

Vedo quanto vale il modulo della sensitività in corrispondenza della pulsazione 1/12 rad/s:

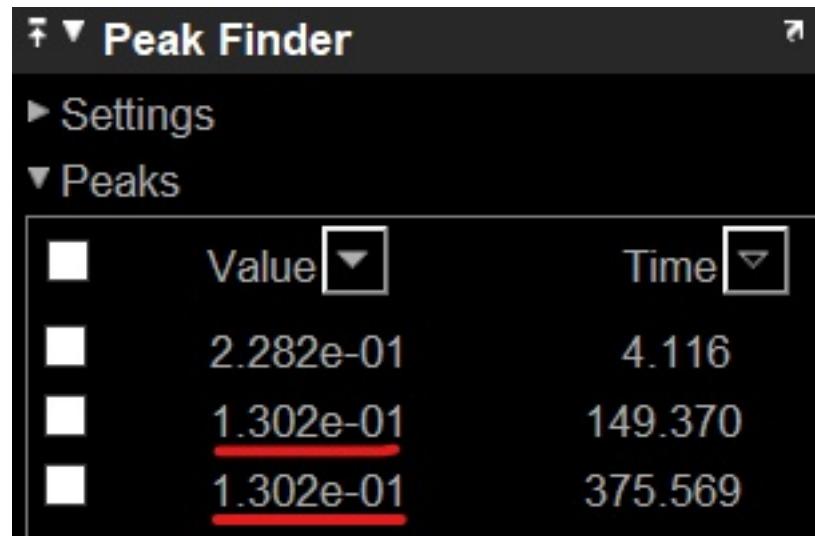


```
>> db2mag (-17.7)
```

```
ans =
```

```
0.1303
```

Deduco che l'**ampiezza dell'errore di inseguimento** a transitorio esaurito è 0.1303, infatti analizzando lo scope dell'errore di inseguimento :

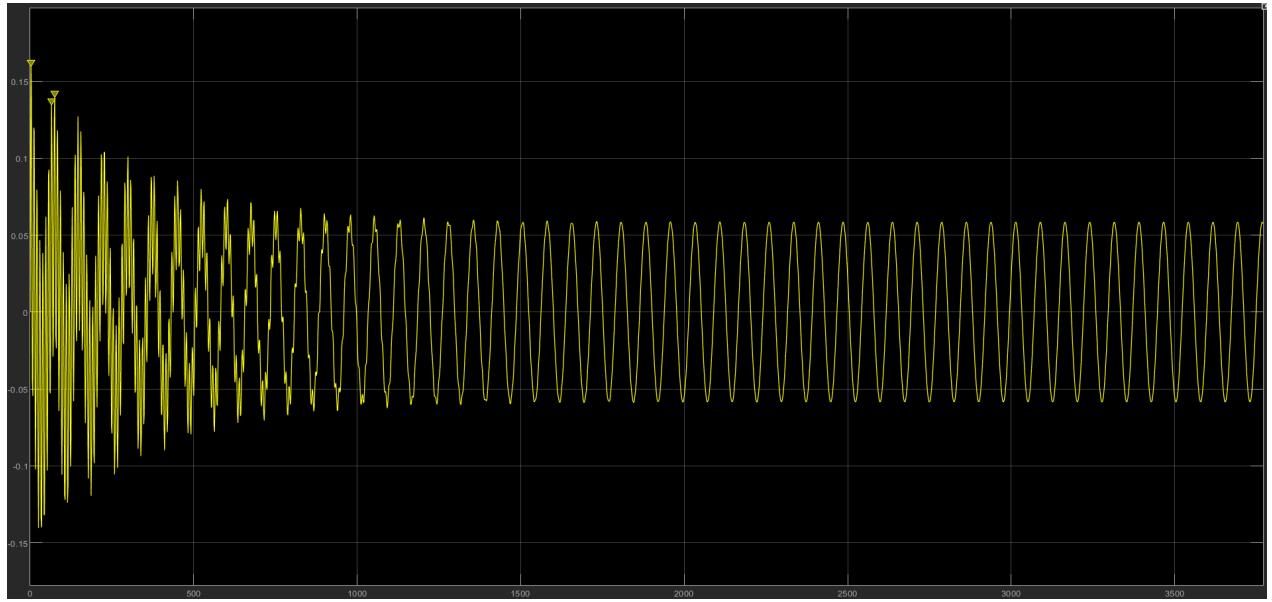


A questo punto arrivati si può migliorare l'ampiezza dell'errore di inseguimento (diminuzione della sensitività), possibile per come abbiamo visto a lezione, andando ad alterare (aumentandolo) il valore del controllore ($S(s) = 1/C(s)*G(s)$). Però mi devo ricordare la fascia in cui il sistema retroazionato è stabile : $0 < K < 9/4$.

Quindi per determinare il più piccolo errore di inseguimento ottenibile dalla struttura di controllo così assegnata oltre il quale il sistema non è più stabile a ciclo chiuso devo aumentare il valore di K prossimo al limite di stabilità che è pari, come visto, a $9/4$.

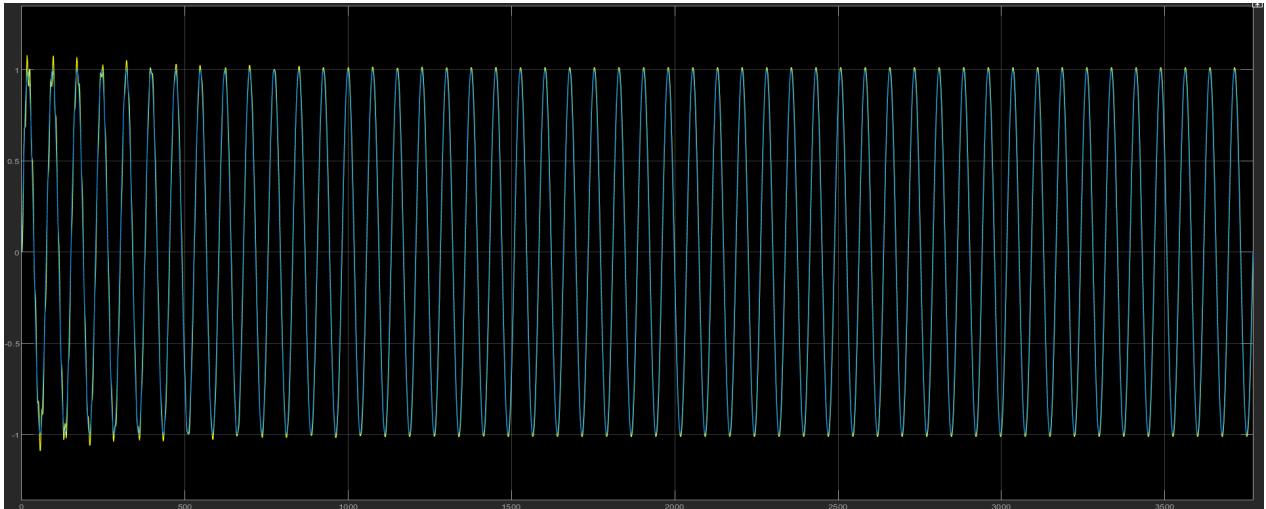
- **$K=2.2$ con un numero di periodi pari a 50 :**

Notiamo un netto miglioramento dell'ampiezza dell'errore di inseguimento ! :



Infine possiamo confrontare le uscite regolate, prima con $K = 1$ e poi con $K = 2.2$, notando come quest'ultima sia estremamente più precisa (ricordando che la linea blu è il riferimento) :





d) si consideri sempre il valore di K scelto nel secondo punto.
 Nell'ipotesi che il disturbo sia il seguente segnale: $d(t) = \sin(t/5)*1(t)$ e
 che il rumore di misura abbia la seguente espressione: $n(t) = \sin(60*t)*1(t)$, quanto vale in configurazione *caso peggiore* l'ampiezza
 dell'errore sull'uscita regolata a regime ? Argomentare sfruttando le
 risposte in frequenza dello schema retroazionato e le eventuali (se
 applicabili) approssimazioni in bassa e alta frequenza della funzione
 d'anello.

Qui nello schema retroazionato abbiamo la presenza di disturbo e rumore di misura.
 Sia il disturbo che il rumore sono segnali limitati e quindi applicando il principio di
 sovrapposizione degli effetti l'uscita dell'impianto regolato $y(t)$ risulta nel dominio del tempo :

$$y(t) = y_r(t) + y_d(t) + y_n(t)$$

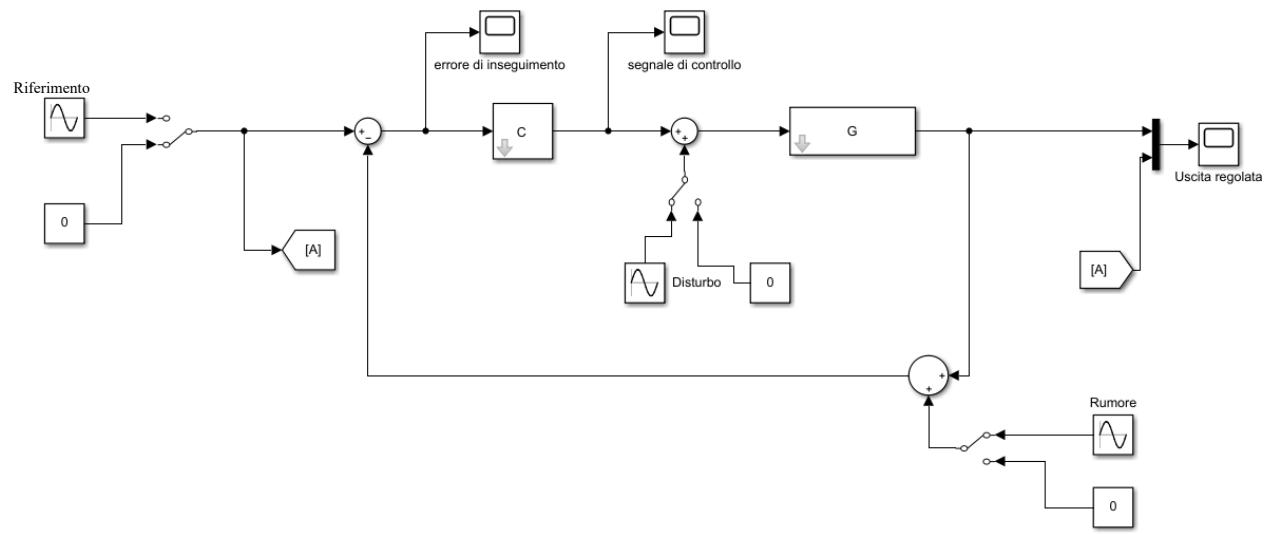
$y_r(t)$ è l'uscita ideale dello schema di controllo nell'ipotesi che disturbo e rumore di misura siano
 spenti.

$y_d(t)$ è l'effetto che il disturbo ha sull'uscita regolata. (Il riferimento ed il rumore di misura sono
 spenti).

$y_n(t)$ è l'effetto cheil rumore di misura ha sull'uscita regolata. (Il riferimento e il disturbo sono
 spenti).

Il disturbo e il rumore di misura generano un errore sull'uscita e il controllore deve fare in modo
 (in regime) che $y_d(t)$ e $y_n(t)$ siano quasi trascurabili. (**Reiezione del disturbo**)

Descrivo la situazione attraverso uno schema di controllo con l'ausilio di Simulink:



Ricordando quanto detto nel punto a :

$$\begin{pmatrix} Y \\ \Sigma \\ C \end{pmatrix} = \left(\begin{matrix} \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } & \text{ } \end{matrix} \right) \text{ } \overset{\text{W}(s)}{\text{ }} \left(\begin{matrix} R \\ D \\ N \end{matrix} \right)$$

f. D. t

$$Y(s) = T(s) R(s) + S_d(s) D(s) - T(s) \cdot N(s)$$

$$\Rightarrow E(s) = S(s) R(s) - S_d(s) D(s) - S(s) \cdot N(s)$$

$$U(s) = S_u(s) R(s) + S(s) D(s) - S_u(s) \cdot N(s)$$

dove le funzioni di trasferimento sono :

$$T(s) = L(s)/1+L(s) \Rightarrow \text{Sensitività complementare}$$

$$S(s) = 1-T(s) = 1/1+L(s) \Rightarrow \text{Sensitività}$$

$$S_d(s) = G(s)/1+L(s) \Rightarrow \text{Sensitività del disturbo}$$

$$S_u(s) = C(s)/1+L(s) \Rightarrow \text{Sensitività del segnale di controllo}$$

\Rightarrow nel dominio di Laplace l'equazione che lega l'uscita, al disturbo, al riferimento e al rumore è :

$$Y(s) = T(s)*R(s) + S_d(s)*D(s) - T(s)*N(s)$$

Creo uno script su Matlab e determino le funzioni di trasferimento (T e S le avevo già determinate nel punto b):

$$\begin{aligned}
 T &= \text{feedback}(L, 1); & S_u &= \\
 S &= 1-T; & \Rightarrow & \\
 S_d &= G/1+L; & & \frac{s (s+0.8333) (s+1)}{s^2 (s+1)^2 (s+0.5)} \\
 S_u &= C/1+L;
 \end{aligned}$$

$$S_d =$$

$$\frac{0.33333 (s+0.5) (s^2 + s + 1)}{s (s+0.5)^2 (s+1)}$$

$$T =$$

$$\frac{0.33333}{(s+1.313) (s^2 + 0.1875s + 0.254)}$$

$$S =$$

$$\frac{s (s+1) (s+0.5)}{(s+1.313) (s^2 + 0.1875s + 0.254)}$$

Inizializzo un po di variabili qui su maple:

$$G := \omega \rightarrow \frac{1}{3 \cdot \left(I \cdot \omega + \frac{1}{2}\right)} :$$

$$C := \omega \rightarrow \frac{1}{I \cdot \omega \cdot (I \cdot \omega + 1)} :$$

$$L := \omega \rightarrow C(\omega) \cdot G(\omega) :$$

$$T := \omega \rightarrow \frac{L(\omega)}{1 + L(\omega)} :$$

$$S := \omega \rightarrow 1 - T(\omega) :$$

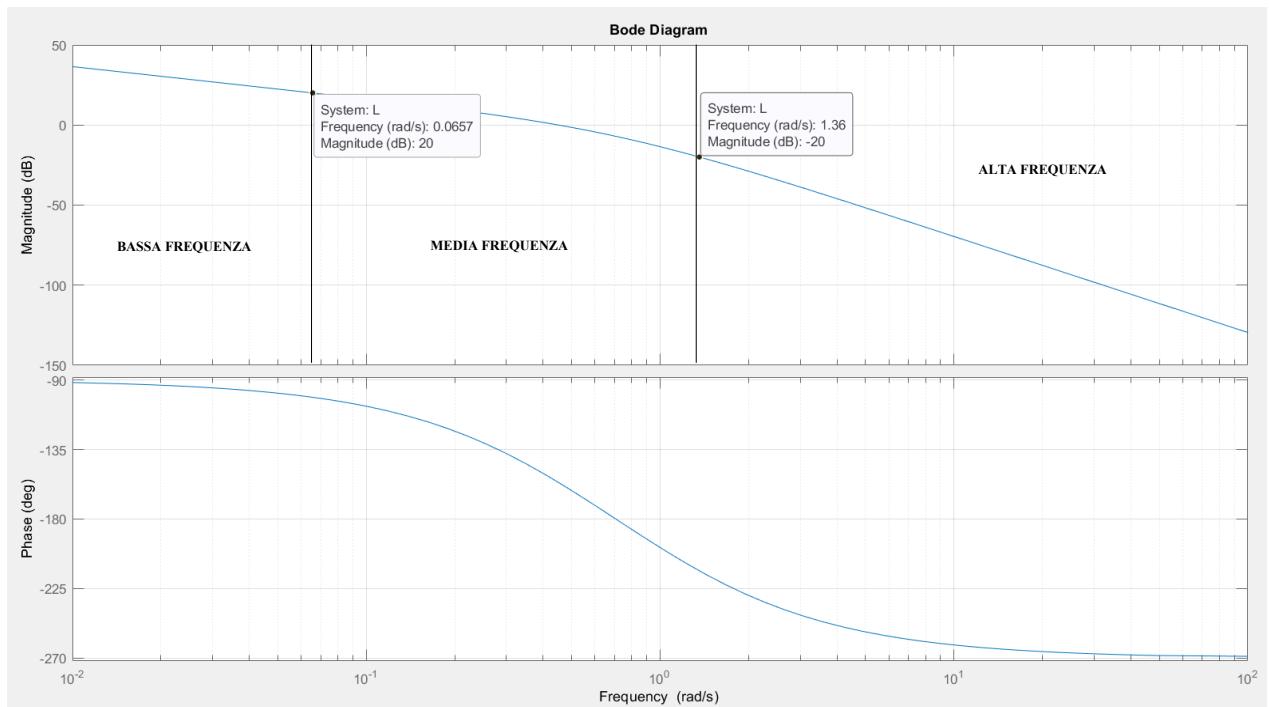
$$S_d := \omega \rightarrow \frac{G(\omega)}{1 + L(\omega)} :$$

$$S_u := \omega \rightarrow \frac{C(\omega)}{1 + L(\omega)} :$$

Una volta fatto ciò verifico se posso effettuare delle approssimazioni in bassa e alta frequenza:

- **Bassa frequenza** è quell'insieme di pulsazioni ω per le quali il modulo della funzione di anello in dB è > 20 ;
- **Media frequenza** è quell'insieme di pulsazioni ω per le quali il modulo della funzione d'anello in dB è compreso tra -20 e 20;
- **Alta frequenza** è quell'insieme di pulsazioni ω per le quali il modulo della funzione di anello in dB è < -20 ;

quindi traccio con l'aiuto di Matlab il diagramma di Bode della funzione di anello, per verificare che le pulsazioni relative al disturbo e al rumore ricadono in AF o BF in modo da rendere possibile eseguire approssimazioni :



Noi abbiamo che le pulsazioni del disturbo e del rumore sono rispettivamente $\omega_d = 1/5$ e $\omega_n = 60$. Quindi per quanto riguarda il disturbo non posso applicare delle approssimazioni in quanto la relativa pulsazione ricade in MF. Mentre la pulsazione del rumore ha un valore maggiore di 1.36 rad/s e quindi è situato in AF, garantendo così la possibilità di effettuare un'approssimazione.

Per ottenere l'errore di ampiezza massimo sull'uscita regolata, posso applicare il principio di sovrapposizione degli effetti, una volta determinato le ampiezze della risposta del disturbo e del rumore :

$$Y_{\text{errore_max}} = Y_d(\omega_d) + Y_n(\omega_n)$$

dove le rispettive ampiezze dell'errore del disturbo e rumore sono rispettivamente $\mathbf{Yd} = |\mathbf{Sd}(j^*\omega)|^*$ \mathbf{D} e $\mathbf{Yn} = |\mathbf{T}(j^*\omega)|^* \mathbf{N}$.

In questo caso le ampiezze (D e N), sia del rumore che del disturbo, sono pari all'unità $\Rightarrow Yd = |\mathbf{Sd}(j^*\omega)|$ e $Yn = |\mathbf{T}(j^*\omega)|$.

• \mathbf{Yd}

Per quanto riguarda il **disturbo**, non potendo effettuare alcun approssimazione devo considerare la f.d.t. della sensitività del disturbo precedentemente elencata, ovvero $Sd(j^*\omega) = G(j^*\omega)/1+L(j^*\omega)$.

Ne determino il modulo e lo valuto in corrispondenza della pulsazione del disturbo :

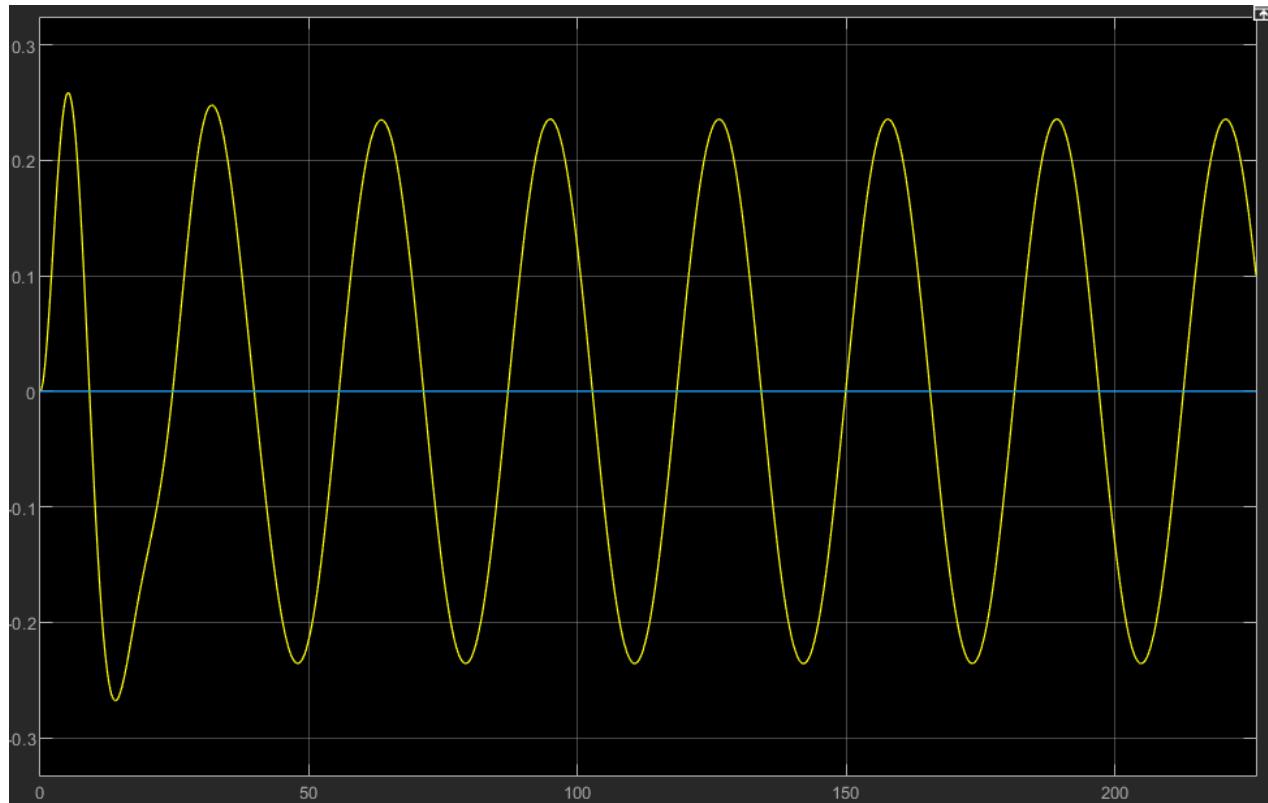
$$Y_d := \omega \rightarrow |S_d(\omega)| :$$

$$\text{evalf}\left(Y_d\left(\frac{1}{5}\right)\right)$$

$$0.2357375229$$

(2.4.1)

Posso verificare questo valore analizzando l'uscita dello schema, lasciando acceso solo il disturbo:



- **Y_n**

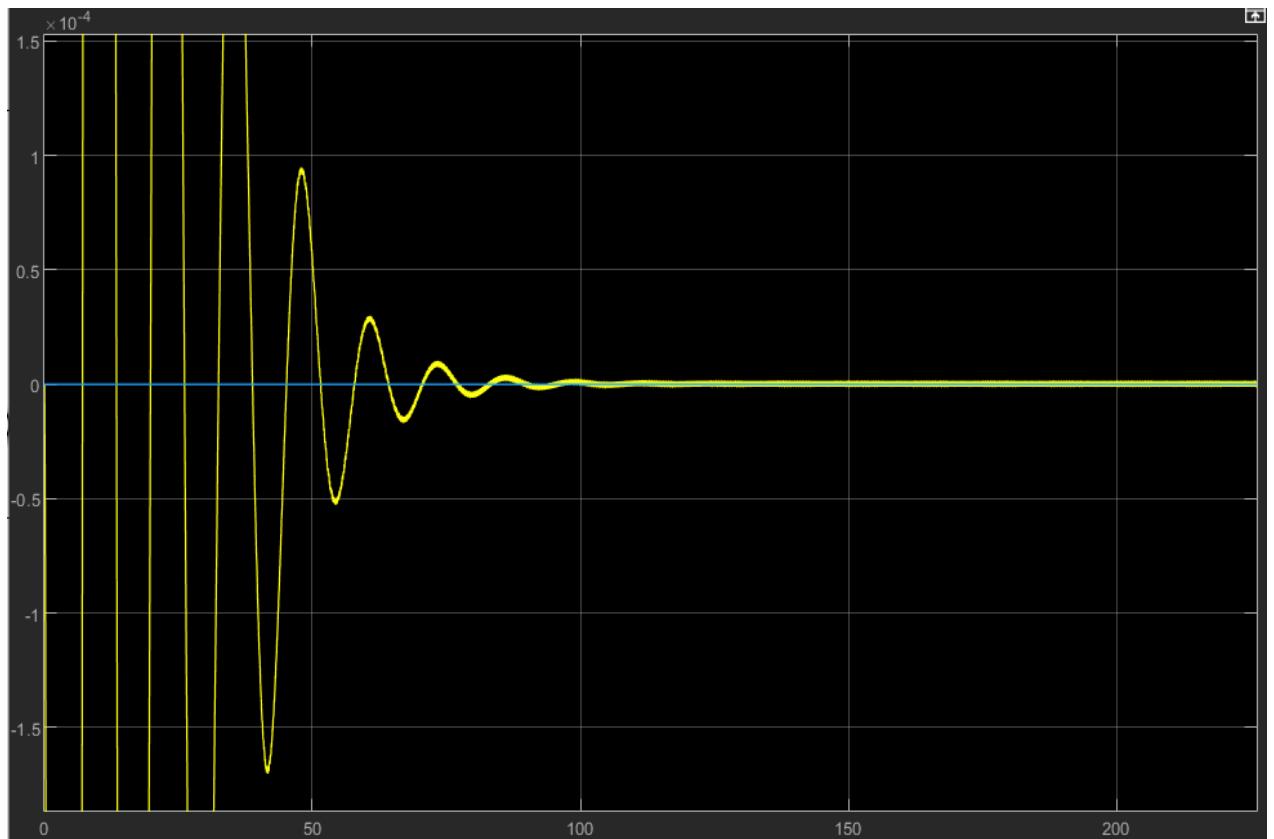
Come ho già anticipato la pulsazione del **rumore**, siccome appartiene alla zona di AF i, è possibile approssimare il valore dell'ampiezza $Y_n = |T(j*\omega)| \approx |L(j*\omega)|$:

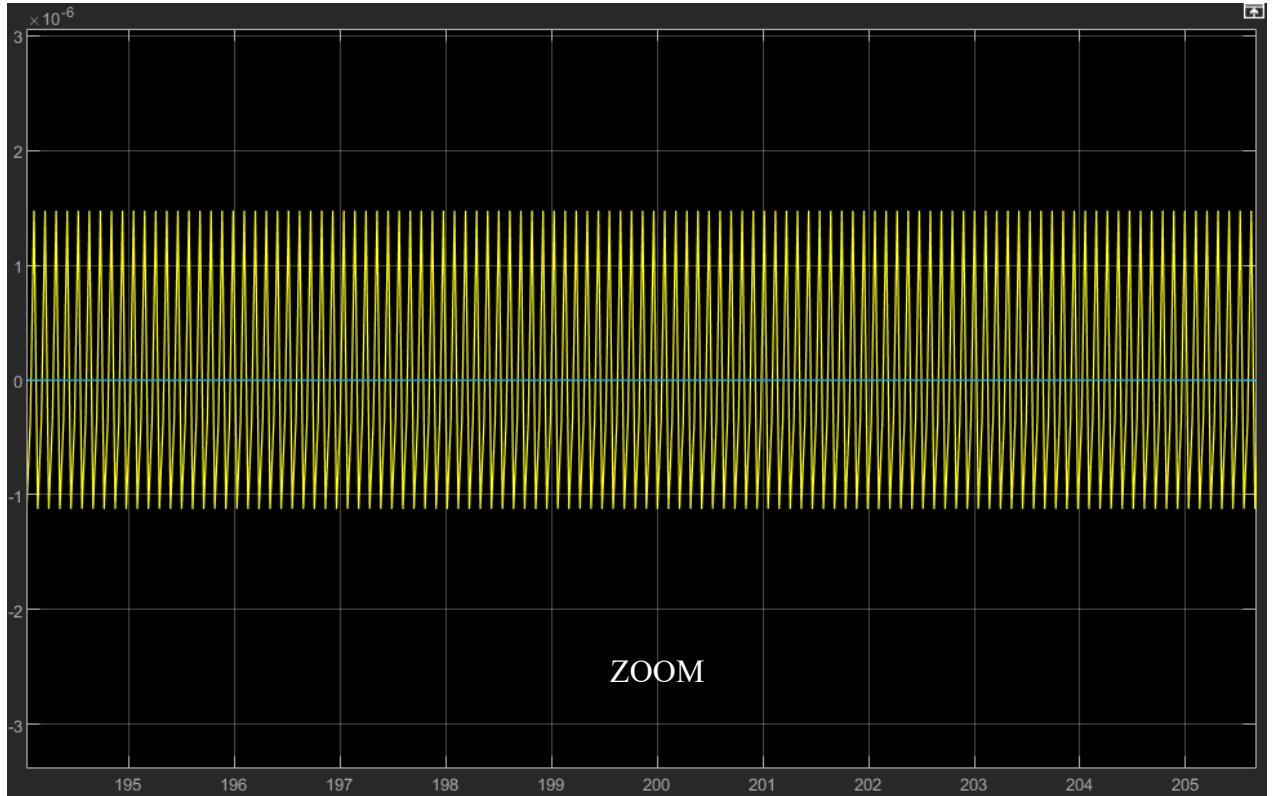
$$Y_n := \omega \rightarrow |L(\omega)| :$$

$$\text{evalf}(Y_n(60))$$

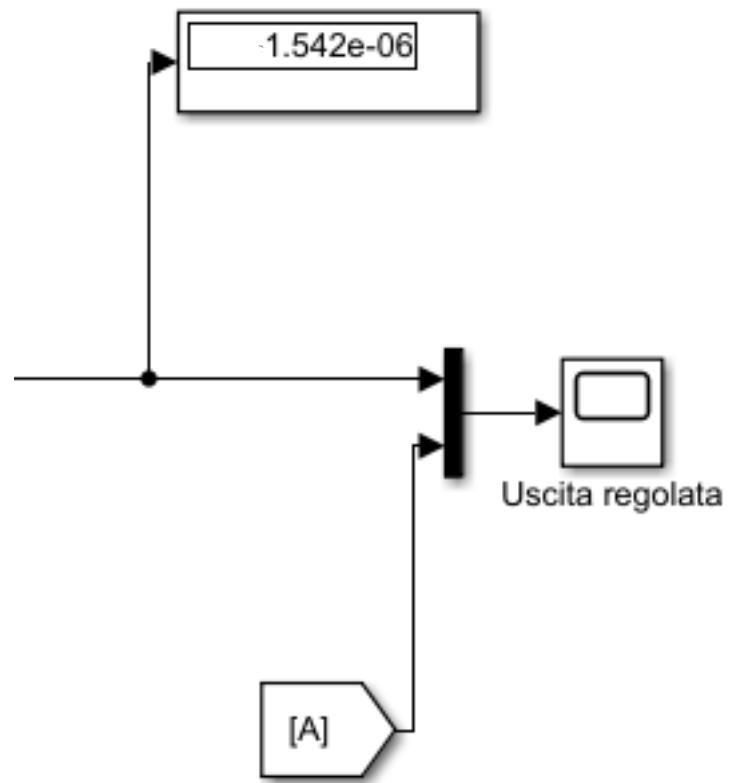
$$1.542942013 \times 10^{-6} \quad (2.4.2)$$

Verificandolo con l'ausilio di Simulink, andando a spegnere riferimento e disturbo, ad eccezione quindi del rumore:





Un ulteriore conferma lo otteniamo se posizioniamo un display sull'uscita :



Ora non ci resta che determinare in configurazione caso peggiore l'ampiezza dell'errore sull'uscita regolata, lasciando acceso disturbo e rumore:

$$Y_e_{\max} = Y_d(\omega_d) + Y_n(\omega_n)$$

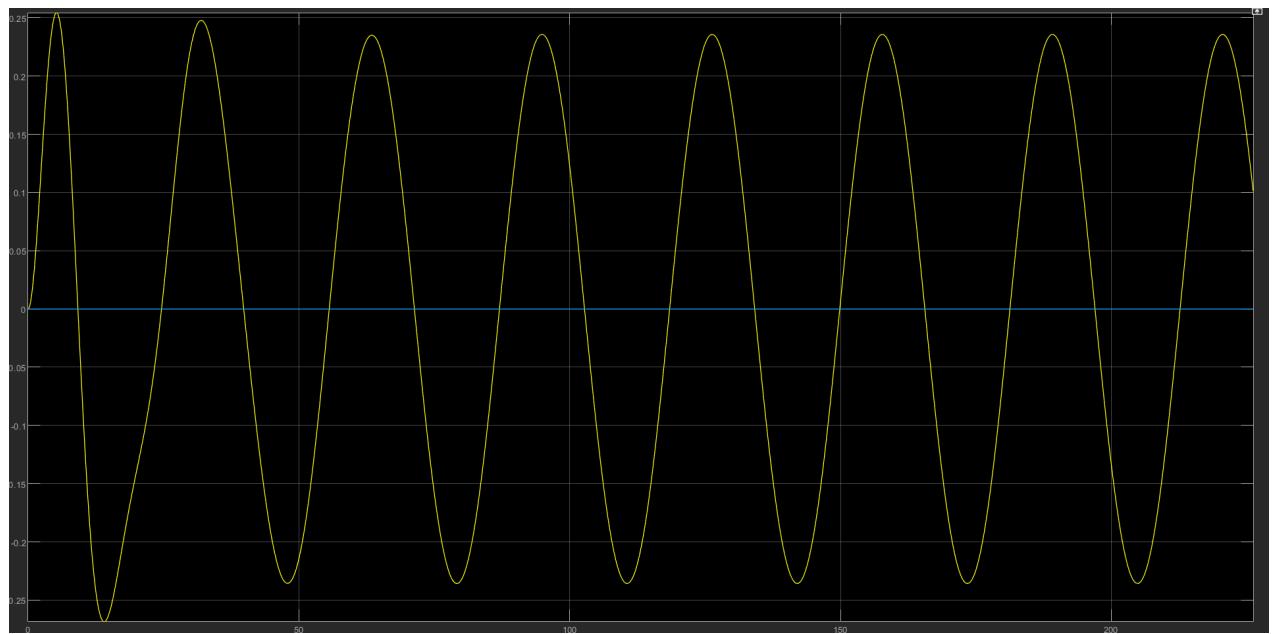
$$Y_{err_max} := \omega \rightarrow Y_d\left(\frac{1}{5}\right) + Y_n(60) :$$

$$evalf(Y_{err_max}(\omega))$$

$$0.2357390658$$

(2.4.3)

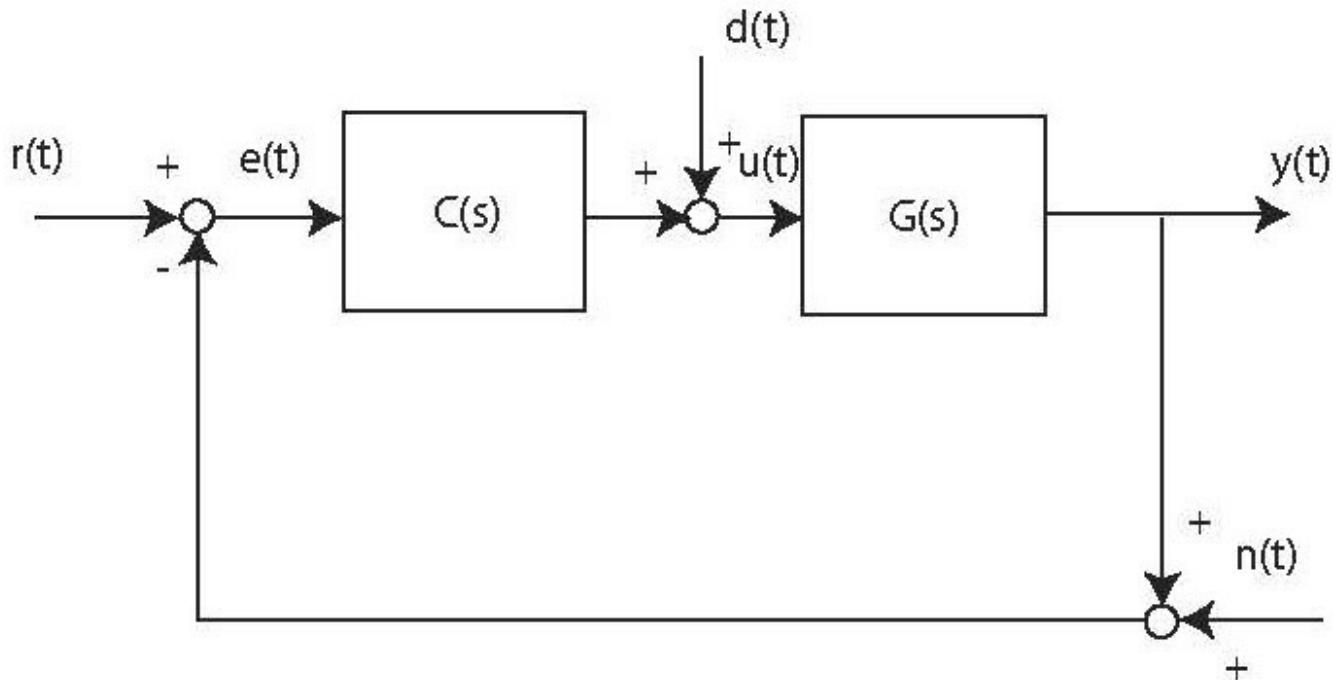
Output dell'uscita regolata :



restart :

PUNTO D.

Considerato il seguente schema di controllo in retroazione algebrica ed unitaria :



dove $G(s)$ rappresenta la f.d.t. del processo:

$$G := s \rightarrow \frac{(s + 2)}{s \cdot \left(s + \frac{1}{2}\right)^2} :$$

si richiede di determinare un regolatore $C(s)$ di struttura semplice che garantisca il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

1. errore di inseguimento alla rampa inferiore al 25%;
2. massima sovraelongazione $S \leq 25\%$, tempo di assestamento $t_s \leq 70$

1.

Il punto 1 corrisponde ad un problema di **precisione statica**.

Il controllore che soddisfa il primo punto deve essere un controllore tale da fare in modo che la funzione d'anello sia di tipo 1.

Siccome l'impianto è dotato di un polo nell'origine allora la parte del controllore che è demandata al soddisfacimento delle specifiche statiche è chiaramente una costante:

$$C := s \rightarrow K :$$

Da qui la funzione d'anello:

$$L := s \rightarrow C(s) \cdot G(s)$$

$$L := s \mapsto C(s) \cdot G(s) \quad (1.1)$$

Quindi dobbiamo determinare la costante K in modo tale che l'errore di velocità k_v (il reciproco dell'errore di inseguimento) sia superiore (in questo caso) a 4.

$$\ell_{\infty, v} = \frac{1}{K_v} \leq 0.25 \Rightarrow K_v > \frac{1}{0.25} = 4$$

L'errore di velocità lo determino in questo modo:

$$k_v := \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot L(s)$$

$$k_v := 8K \quad (1.2)$$

Quindi avremo che $8K$ deve essere $>$ di 4 e pertanto si arriva al punto di scegliere un valore della costante K superiore a 0.5.

Scelgo $K = 1$.

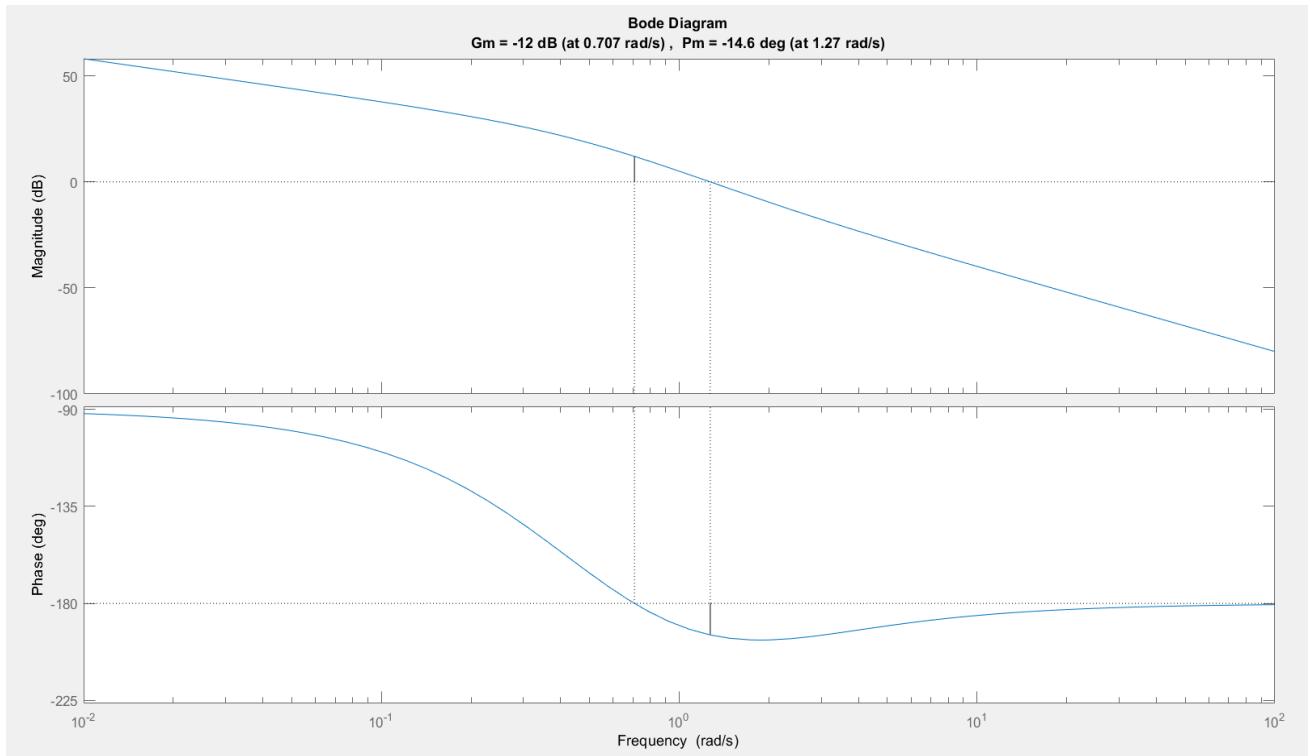
$$K := 1 :$$

Creo uno script su MATLAB e trascrivo quanto detto fin ora:

```
clear; close all;
s = zpk('s');
G = (s+2) / (s^*(s+1/2)^2);
C = 1;
```

Ora calcolo la funzione di anello originale e a determinare i margini :

`L = series (C, G);
margin(L);`



Come possiamo vedere abbiamo che la funzione di anello presenta un margine di fase negativo pari a -14.6 in corrispondenza della pulsazione di attraversamento di 1.27 rad/s, sottolineando che il sistema in retroazione **non è stabile** a ciclo chiuso.

2.

Specifiche dinamiche :

1. Massima sovraelongazione $S \leq 25\% \Rightarrow 0.25$
2. Tempo di assestamento $t_s \leq 70$ sec.

Ipotizzo che la funzione di trasferimento del sistema retroazionato in media frequenza sia quella di un sistema del 2° ordine con una coppia di poli complessi e coniugati e ricavo innanzitutto lo

smorzamento critico che corrisponde alla massima sovraelongazione di 0.25:

$$\exp\left(-\frac{\pi \bar{\delta}}{\sqrt{1-\bar{\delta}^2}}\right) = 0.25$$

Quindi vogliamo tutti quei valori di smorzamento $\delta > \delta_{\text{critico}}$.

Lo **smorzamento critico** posso determinarlo con la funzione vista a lezione smorz_S(..) passandogli come parametro il valore di massima sovraelongazione.

Inoltre è facile determinare la **pulsazione naturale critica** effettuando il rapporto tra la costante 3 e il prodotto dello smorzamento critico per il tempo di assestamento.

```
smorz_critico = smorz_S(0.25);  
  
% ricavo la pulsazione naturale critica  
  
ts = 70;  
pulsazione_n_critica = 3/(smorz_critico*ts);
```

```

smorz_critico =
0.4037

>> pulsazione_n_critica

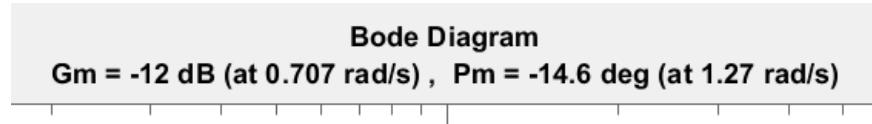
pulsazione_n_critica =
0.1062

```

Ora, avendo la pulsazione naturale critica posso determinare la **banda passante critica** conoscendo la funzione wBwn(..) che mostra in output il rapporto tra la banda passante critica e la pulsazione naturale critica passando in input lo smorzamento critico.

Quindi $w_B_{critica} = pulsazione_n_critica * wBwn(smorz_critico) = 0.1456$

Vorrei quindi disegnare una funzione di anello modificata con un margine di fase di progetto superiore di 40 gradi e una pulsazione di attraversamento di progetto superiore a 0.1456 rad/s. Dal diagramma della funzione d'anello ottenuto in precedenza possiamo segnarci i valori effettivi di questi due parametri: $\Phi_m = -14.6^\circ$, $\omega_c = 1.27 \text{ rad/s}$.



Ora però scelgo a piacere valori di margine di fase di progetto e di pulsazione di attraversamento di progetto rispettando quanto detto poc'anzi.

Scelgo quindi:

- $\Phi_m = 43^\circ$
- $\omega_c = 3 \text{ rad/s}$

A questo punto arrivati determino **modulo** e **fase** della funzione d'anello in corrispondenza della nuova pulsazione di attraversamento:

```

22 -      wc_scelto = 3;
23 -      [modulo, fase] = bode(L,wc_scelto);
24
Command Window
modulo =
0.1299

>> fase

fase =
-194.7654

>> 180-abs(fase)

ans =
-14.7654

```

Quindi ho che il modulo della funzione di anello in corrispondenza della nuova fuzione di anello è minore dell'unità $|L(j\omega_c)| < 1$ e che la distanza goniometrica è al di sotto del margine di fase richiesto. Questa situazione richiede un controllo che, nell'intorno della pulsazione di attraversamento di progetto, generi due effetti combinati:

- **amplificazione** per recuperare il guadagno
- **anticipo** sulla fase per recuperare i gradi necessari sul margine di fase

$$\begin{cases} |L(j \tilde{\omega}_c)| & < \frac{1}{\tilde{\phi}_M} \\ \pi - |\angle L(j \tilde{\omega}_c)| & < \tilde{\phi}_M \end{cases}$$

Definisco il reciproco del modulo e l'incremento della fase richiesta:

```
m=1/modulo;
theta = 43-(180-abs(fase));
```

Ora definisco la funzione di trasferimento della rete anticipatrice e calcolo il margine della nuova funzione d'anello:

```

% disegno la rete anticipatrice :

[tauz, taup] = generica(wc_scelto,m,theta);

% definisco la f.d.t della rete anticipatrice
Cd = (1+s*tauz)/(1+s*taup);
%stadio ad anticipo

% mi definisco la nuova funzione d'anello
Lhat = series(series(C,G),Cd);

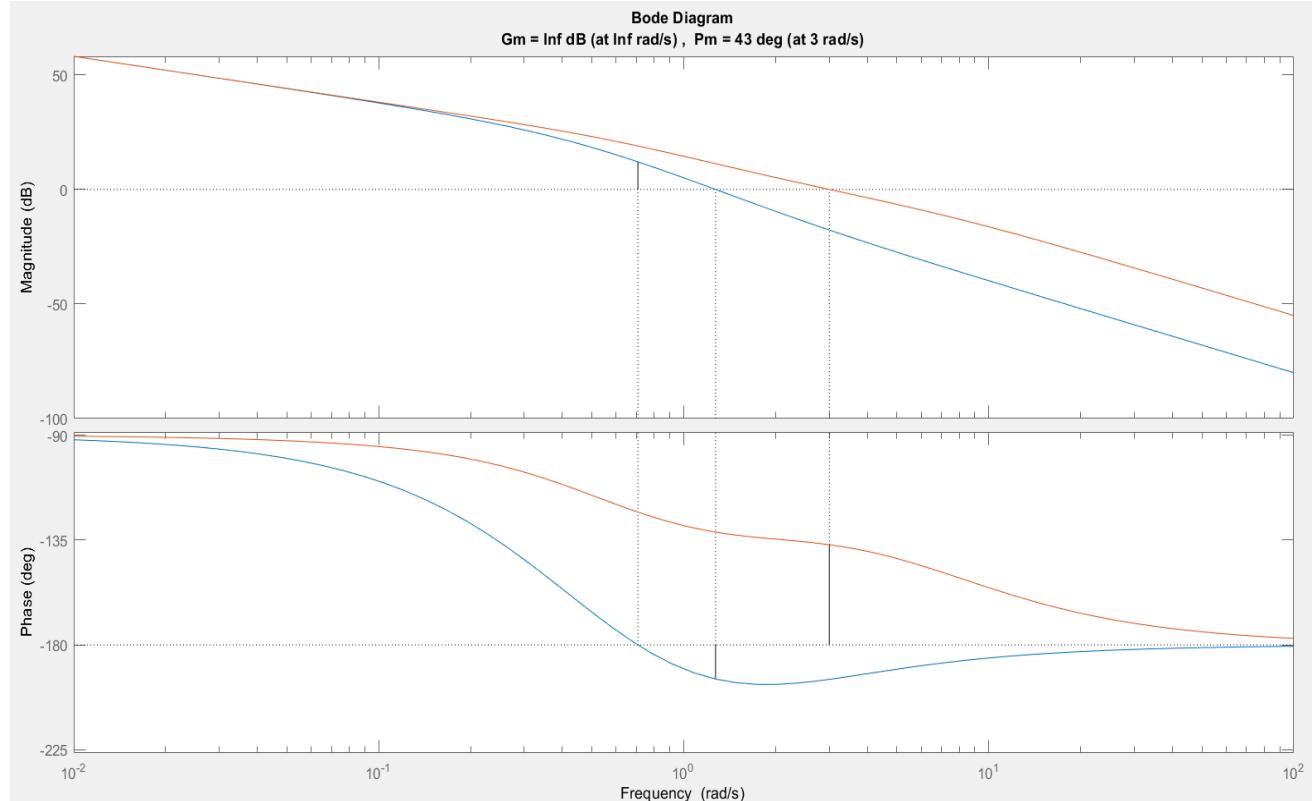
% mi calcolo il margine della nuova funzione d'anello
hold on
margin(Lhat)

```

ho verificato inizialmente se sarei riuscito a disegnare la rete anticipatrice verificando che tauz e taup siano positivi, perchè ad esempio se taup fosse stato negativo il polo della rete anticipatrice sarebbe stato instabile e avrei dovuto frazionare la rete anticipatrice :

```
>> tauz  
  
tauz =  
  
2.6790  
  
>> taup  
  
taup =  
  
0.1092
```

Calcolato il margine della nuova funzione d'anello:



Si può notare che in bassa frequenza quasi coincidono e al crescere della frequenza la funzione di anello compensata (arancione) aumenta la pulsazione di attraversamento.

Quindi nell'ipotesi che lo smorzamento sia superiore di 0.4037 si va ad incrementare anche la banda passante ricordando che la pulsazione naturale è un minorante della BP.

Sulle fasi abbiamo un evidente incremento del margine di fase con un conseguente incremento dello smorzamento e diminuzione della massima sovraelongazione poiché inversamente proporzionali tra loro.

L'incremento dello smorzamento sul tempo di assestamento e della banda passante (sapendo che $t_s = 3/\delta * \omega_n$) porta anche (probabilmente) ad un aumento del valore della pulsazione naturale e di conseguenza la diminuzione del tempo di assestamento.

In questo grafico c'è anche qualcosa di negativo legato alla precisione statica e pertanto analizzo il diagramma dei moduli:

In alta frequenza sale il modulo fino a quando le due curve (f. d'anello compensata e non) diventano parallele, dovuto ad un'amplificazione costante e uniforme sull'asse delle pulsazioni.

Ricordando che in uno schema di controllo è sempre presente uno strumento di misura che ha come effetto quello di introdurre l'errore, modellato qui come un segnale in alta frequenza, e che la componente dell'uscita rispetto al rumore di misura è legata all'armonica del rumore da:

$$Y_k(s) = -T(s)N(s)$$

(è modellata dalla funzione di trasferimento di sensitività complementare cambiata di segno)

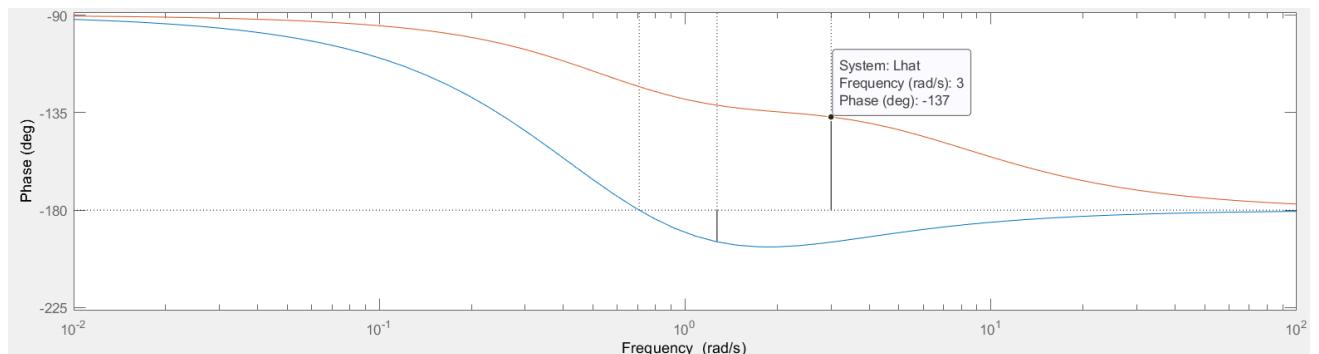
ed inoltre che il guadagno in frequenza in AF della funzione di sensitività complementare si approssima con $L(j\omega)$:

$$|T(j\omega)| = \left| \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right| \approx |L(j\omega)|$$

e quindi un incremento del modulo in AF della funzione d'anello (effetto dovuto all'inserimento di una funzione d'anticipo), porta ad una maggiore sensibilità dello schema di controllo sugli errori di misura.

Quindi in breve, l'uscita risente di più dell'effetto di armoniche in AF che modellano l'errore di misura più di quanto non ne risentiva in assenza di questa rete d'anticipo.

Inoltre vediamo che si ha un anticipo di fase che sale a 43 gradi in corrispondenza della pulsazione di attraversamento di 3 rad/s :



$$-137 - (-180) = 43^\circ$$

Adesso per verificare se ho scelto parametri che realmente soddisfano le specifiche richieste mi determino la funzione di trasferimento del sistema retroazionato :

```

T = feedback(Lhat,1);
close all
step(T)

```

possiamo notare dalla f.d.t. del sistema che esso è **stabile**, per la presenza di soli poli a parte reale negativa :

```

T =

```

$$\frac{24.529 (s+2) (s+0.3733)}{(s+6.165) (s+0.3719) (s^2 + 3.619s + 7.986)}$$

```

Continuous-time zero/pole/gain model.

>> pole(T)

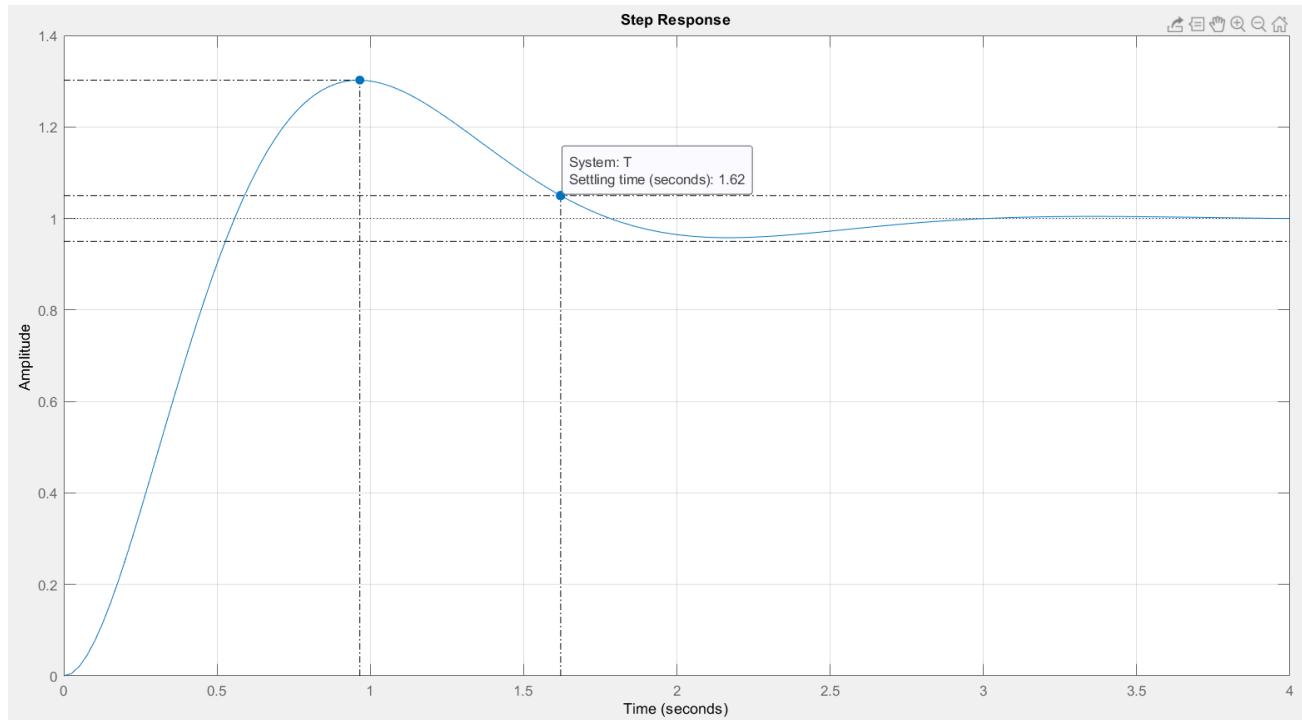
ans =

```

$$\begin{aligned} &-6.1651 + 0.0000i \\ &-1.8093 + 2.1708i \\ &-1.8093 - 2.1708i \\ &-0.3719 + 0.0000i \end{aligned}$$

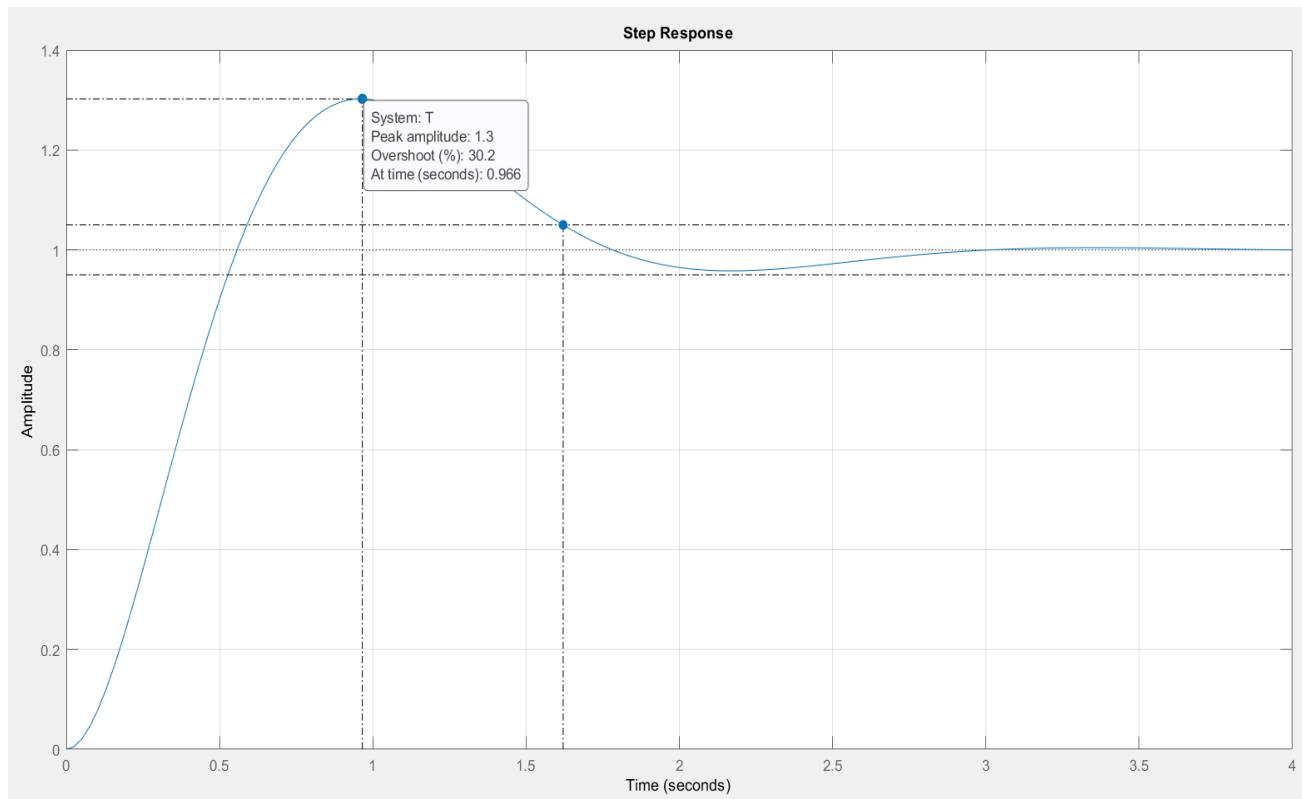
analizzo ora dal grafico della risposta a gradino i valori di massima sovraelongazione e del tempo di assestamento :

tempo di assestamento (settato al 5%):



come possiamo notare il tempo di assestamento rispetta la specifica richiesta dal esercizio.

massima sovraelongazione :

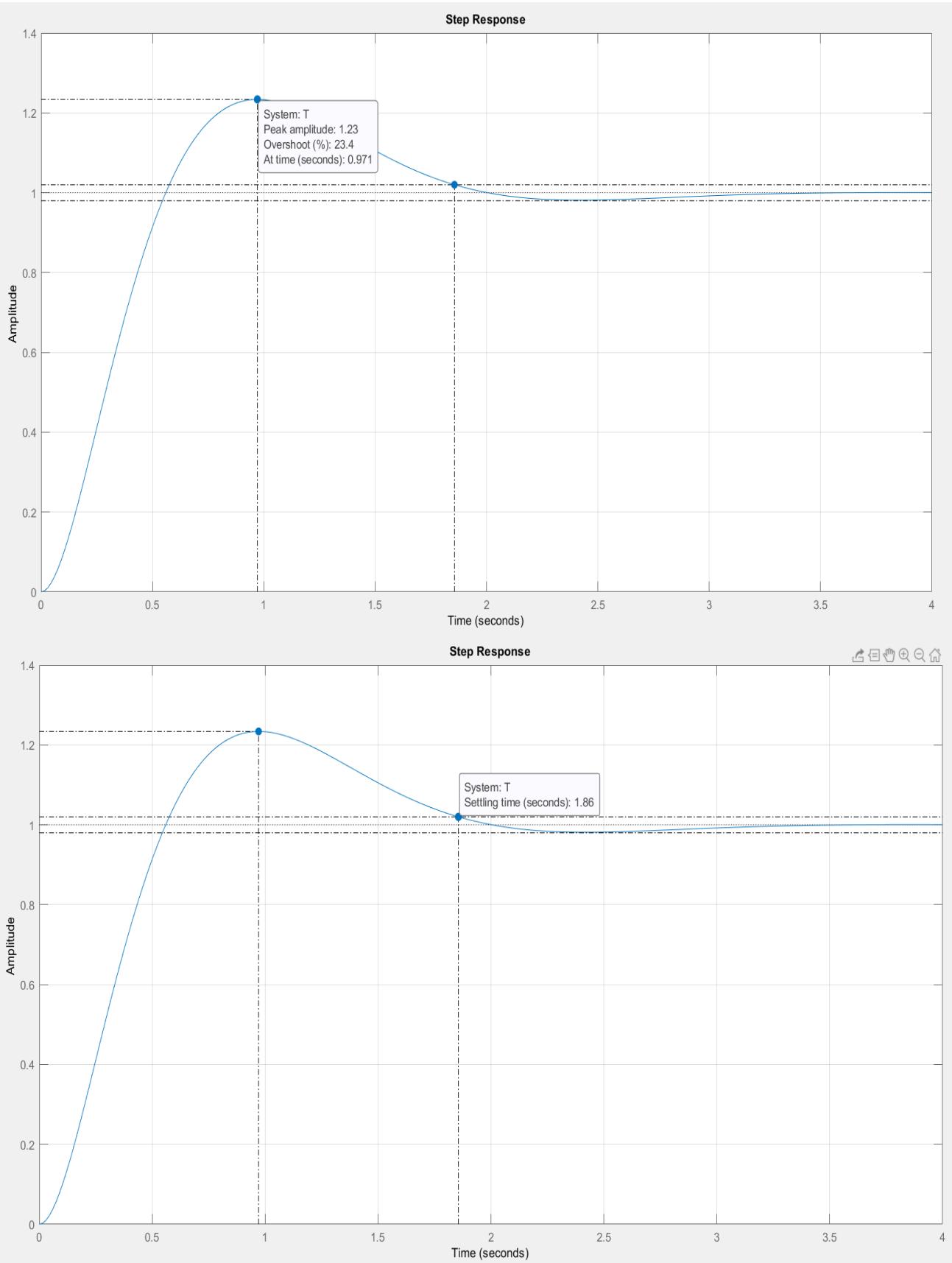


mmm.. qui però notiamo che la massima sovraelongazione è pari a 30.2%, che è superiore ai 25% richiesti dalla traccia.

Quindi per risolvere ciò basta considerare un margine di fase superiore a quello scelto in precedenza, verificando sempre che taup e tauz siano positivi:

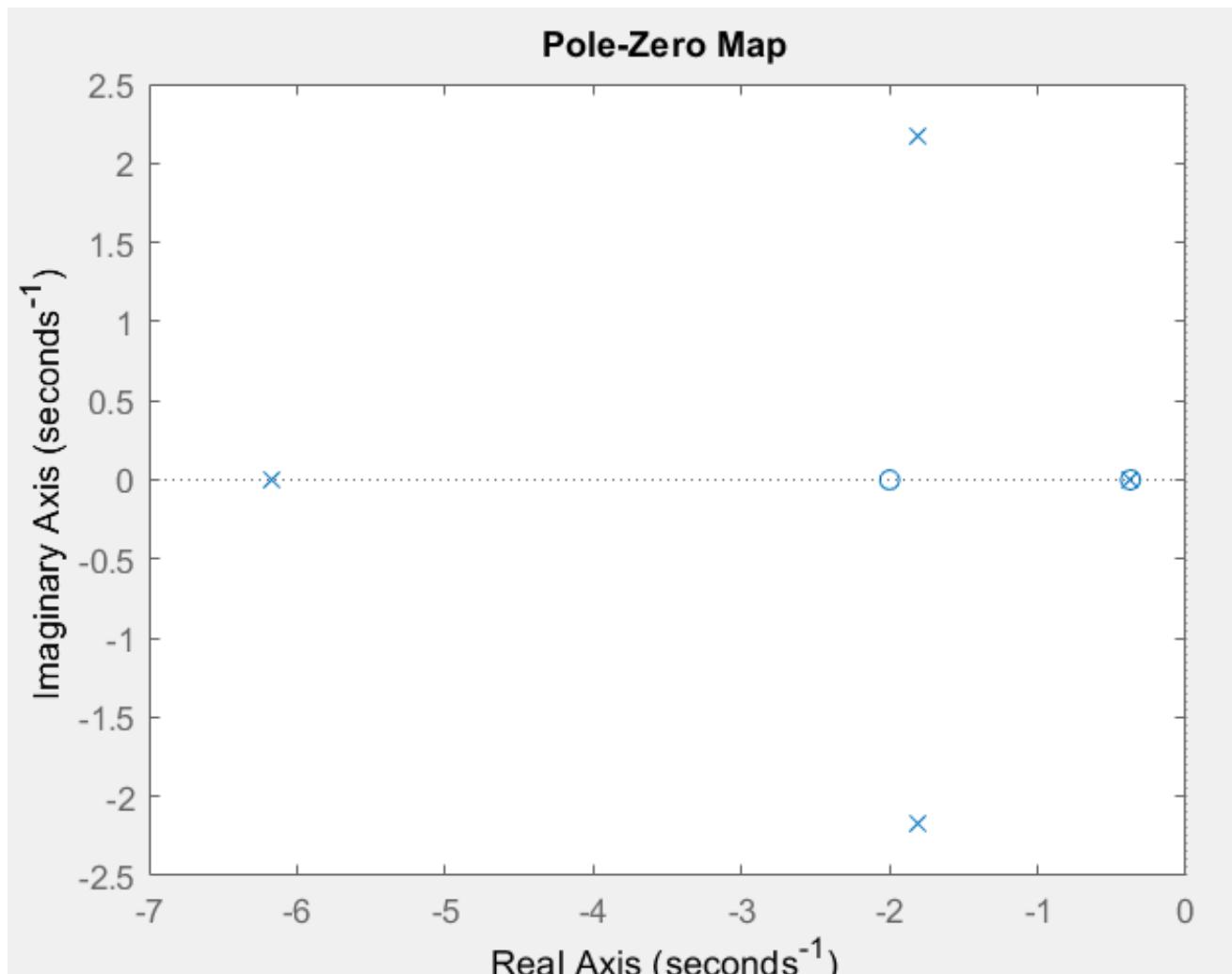
```
theta =  
       64.7654  
  
>> tauz  
  
tauz =  
      2.6790  
  
>> taup  
  
taup =  
     0.1092
```

Verifico ora se abbiamo soddisfatto le richieste:



Adesso sia la massima sovraelongazione che il tempo di assestamento sono coerenti con quanto richiesto dall'esercizio.

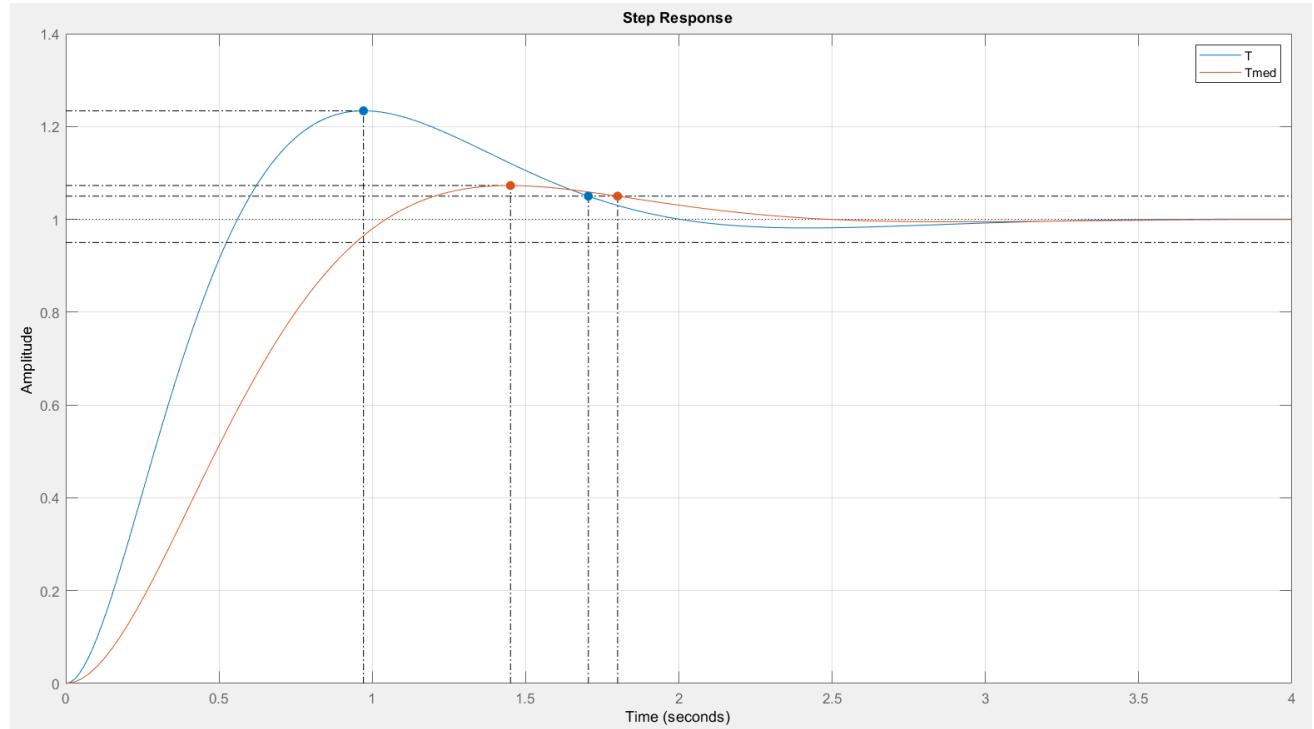
Con `pzmap(T)` visualizziamo i poli e gli zeri di T :



vediamo quelli più esterni i poli complessi e coniugati con smorzamento pari a 0.64, i poli reali -6.16 e -0.37 in corrispondenza dello zero e gli zeri identificati con un pallino -2 e -0.37.

Analizzo l'approssimazione in media frequenza della funzione d'anello, normalizzando rispetto il guadagno statico :

```
Tmed = 7.986/(s^2 + 3.619*s + 7.986);  
step(T, Tmed);  
legend
```



Notiamo che la risposta a gradino del sistema retroazionato effettivo presenta una sovraelongazione maggiore di quella del sistema in media frequenza.