UNIVERSIDADE DE RIBEIRÃO PRETO

Cursos de Engenharias

CÁLCULO INTEGRAL E DIFERENCIAL

Profª. Drª. Isadora Alves Lovo Ismail

Prof. Me. Rodrigo Aécio Felix

RIBEIRÃO PRETO – SP

2022

SUMÁRIO

UNIDADE 1: INTRODUÇÃO AO CÁLCULO INTEGRAL E DIFERENCIAL

Nesta apostila, vamos:

- Dada uma função $f(x)$, $f: I \to \mathbb{R}$, com I um intervalo aberto da reta, determinar a função $F(x)$, $F: I \to \mathbb{R}$, cuja derivada é a função $f(x)$, ou seja, encontrar a função $F(x)$, primitiva da função $f(x)$.
- Discutir técnicas para o cálculo de integrais (primitivas).
- Discutir algumas aplicações do conceito de integrais.

O CONCEITO DE DIFERENCIAL E INTEGRAL

Observe no quadro abaixo, três exemplos de funções (que se diferem pelos termos constantes), com suas respectivas diferenciais e primitiva.

Tabela 1: Função, Diferencial e Primitiva

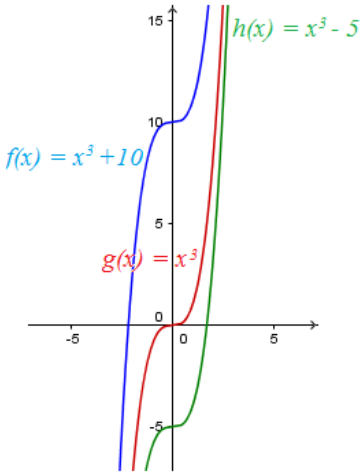
	Função	**Diferencial**	**Primitiva**
I	$y = x^3 - 5$	$dy = 3x^2dx$	$\int dy = \int 3x^2dx$ $y = x^3 + C$
II	$y = x^3$	$dy = 3x^2dx$	
III	$y = x^3 + 10$	$dy = 3x^2dx$	

onde C é a constante de integração, sendo C = -5 em (I), C = 0 em (II) e C = 10 em (III).

Analisando-se o quadro, vemos que as diferenciais das três funções são idênticas, pois as mesmas diferenciam-se apenas pela constante, que não influência em suas diferenciais. Como a constante é "perdida" no processo de diferenciação, ela não consegue ser "recuperada" no processo de volta, isto é, na obtenção da função inicial, conhecida sua diferencial.

Assim, antidiferencial ou integral é a operação que busca encontrar a função, conhecida sua diferencial, sendo simbolizada por $\int$.

Observe o gráfico de cada uma das curvas das funções em (I), (II) e (III).



Note que as curvas das funções (I), (II) e (III) são semelhantes. Se transladarmos essas curvas sobre o eixo ordenado elas se coincidirão. Então, para cada valor diferente de C, teremos uma curva semelhante, mas interceptando o eixo das ordenadas em pontos distintos.

INTEGRAL INDEFINIDA

Conhecida a diferencial *f(x)dx* de uma dada função, podemos estabelecer uma relação oposta, que leva à essa função sem a sua constante, denominada integral indefinida ou antidiferencial ou primitiva de *f(x)dx*.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

onde *F(x)* é a função sem o termo constante, cuja diferencial é *f(x)dx*.

Pela tabela 1, a integral indefinida da diferencial $dy = 3x^2dx$ é representada por

$$y = \int 3x^2dx = x^3 + C$$

Sem o conhecimento de uma condição de contorno, não é possível determinar essa constante C.

Mas, se conhecermos a condição de que a primitiva da diferencial $dy = 3x^2dx$ passa pelo ponto A(3, -1), podemos determinar o valor da constante C da seguinte forma:

$$y = \int 3x^2dx$$

$$y = x^3 + C$$

$$\text{aplicando } A(3,-1), \text{ temos}: -1 = 3^3 + C \Rightarrow C = -28$$

$$\text{logo, } y = x^3 - 28$$

PROPRIEDADES DAS INTEGRAIS

Propriedades Operatórias

1. $\int k\, du = k \int du, \forall k \in R$
2. $\int (du \pm dv) = \int du \pm \int dv$

INTEGRAIS IMEDIATAS

Seja *u* uma função da variável *x*, isto é, *u* = *f(x)*, temos.

1. $\int 0\, du = C$
2. $\int du = u + C$
3. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$
4. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
6. $\int e^u du = e^u + C$

Em particular, se *u* = *x*

$$\int 0\, dx = C$$

$$\int dx = x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Exemplo 1: $\int (10x^3 - 3x^2 + 4x - 5)\, dx =$

$$= \int 10x^3dx - \int 3x^2dx + \int 4xdx - \int 5dx =$$

$$= 10\int x^3dx - 3\int x^2dx + 4\int xdx - 5\int dx =$$

$$= 10 \cdot \frac{x^{3+1}}{3+1} - 3 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + 4 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} - 5x + C =$$

$$= 10 \cdot \frac{x^4}{4} - 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} - 5x + C = \frac{5}{2}x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x + C$$

EXERCÍCIOS

1. Determine a função cuja diferencial é $dy = 5x^4 dx$ e passa pelo ponto (1, 0)

   solução: $\int dy = \int 3x^4 \, dx$

   $$y = 3\int x^4 dx$$

   $$y = 3 \cdot \frac{x^5}{5} + C = \frac{3}{5}x^5 + \text{C} \quad \text{(integral indefinida)}$$

   aplicando o ponto (0, 2), temos: $2 = \frac{3}{5}(0)^5 + C \Rightarrow C = 2$

   Assim, $y = \frac{3}{5}x^5 + 2$ (integral definida)

2. Determine a função cuja diferencial é $dy = (3x^2 - 4x + 5)dx$ e passa pelo ponto (2,-1)

UNIDADE 2: MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO (PARTE 1)

No cálculo integral, nem todas as integrais são imediatas, devido a isso, são necessários a utilização de alguns métodos para obtenção das primitivas das funções que não tem integração imediata.

INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

O processo consiste em substituir a variável da função integranda por outra tal que se recaia com algum artifício e facilidade numa das integrais imediatas. Não há uma regra fixa para isso, portanto, é importante e necessário que sejam realizados exercícios até saber optar pela melhor substituição.

Exemplo 1: $\int e^{3x}dx$

A integral não é imediata da forma $\int e^{u}du$ pois se $u = 3x$, $du = d(3x) = 3dx$, o que não é apresentado no integrando. Para aplicar o caso imediato, deveríamos ter $\int e^{3x}3dx = \int e^{\overbrace{3x}^{u}}d(\underbrace{3x}_{u})$ isto é, transformar *dx* em *d(3x)*.

$$\int e^{3x}dx = \int \frac{3}{3}e^{3x}dx = \int \frac{1}{3}e^{3x}(3dx) = \frac{1}{3}\int e^{3x}d(3x) = \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

Exemplo 2: $\int e^{x^2}x\,dx$

A integral não é imediata da forma $\int e^{u}du$ pois se $u = x^2$, $du = d(x^2) = 2xdx$, o que não é apresentado no integrando. Para aplicar o caso imediato, deveríamos ter $\int e^{x^2}2x\,dx = \int e^{\overbrace{x^2}^{u}}d(\underbrace{x^2}_{u})$, isto é, transformar *dx* em *d(x²)*.

$$\int e^{x^2}x\,dx = \int \frac{2}{2}e^{x^2}x\,dx = \int \frac{1}{2}e^{x^2}(2x\,dx) = \frac{1}{2}\int e^{x^2}d(x^2) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

Exemplo 3: $\int x^2\sqrt{1+x}\,dx$

Se escrevermos a raiz em potência $\left(\int x^2\sqrt{1+x}\,dx = \int x^2(1+x)^{\frac{1}{2}}dx\right)$, a integral não se adéqua aos tipos de integrais imediatas já vistos.

Vamos então, utilizar o recurso da mudança de variável.

Fazendo $u = \sqrt{1+x}$, temos que: $u^2 = 1 + x \Rightarrow \begin{cases} x = u^2 - 1 \\ dx = 2u\,du \end{cases}$

$$\int x^2\sqrt{1+x}\,dx = \int \left(u^2-1\right)^2 u\ 2u\ du =$$
$$= 2\int \left(u^4-2u^2+1\right)u^2\ du =$$
$$= 2\int u^6 du + 2\cdot(-2)\int u^4 du + 2\int u^2 du =$$
$$= 2\cdot\frac{u^7}{7} - 4\cdot\frac{u^5}{5} + 2\cdot\frac{u^3}{3} + C$$

Escrevendo esse resultado na variável *x*, temos.

$$\int x^2\sqrt{1+x}\,dx = 2\cdot\frac{\left[(1+x)^{\frac{1}{2}}\right]^7}{7} - 4\cdot\frac{\left[(1+x)^{\frac{1}{2}}\right]^5}{5} + 2\cdot\frac{\left[(1+x)^{\frac{1}{2}}\right]^3}{3} + C =$$
$$= \frac{2}{7}(1+x)^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + C =$$
$$= \frac{2}{7}\sqrt{(1+x)^7} - \frac{4}{5}\sqrt{(1+x)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3} + C$$

EXERCÍCIOS

1. $\int x^4 dx$ — *Resp*: $\frac{x^5}{5}+C$

2. $\int 15x^4 dx$ — *Resp*: $3x^5+C$

3. $\int 7dx$ — *Resp*: $7x+C$

4. $\int (15x^4-8x^3+10x-7)dx$ — *Resp*: $3x^5-2x^4+5x^2-7x+C$

5. $\int (12x^2-4x+3)dx$ — *Resp*: $4x^3-2x^2+3x+C$

6. $\int (20x^4-8x^3-12x^2-5x+3)dx$ — *Resp*: $4x^5-2x^4-4x^3-\frac{5}{2}x^2+3x+C$

7. $\int (2x^2-3x+5)dx$ — *Resp*: $\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+5x+C$

8. $\int (2x^3-6x^2-3x+1)dx$ — *Resp*: $\frac{x^4}{2}-2x^3-\frac{3}{2}x^2+x+C$

9. $\int \left(3x^2\sqrt{x}-4x\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$

   Sugestão: $\begin{cases} \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}, \forall\, a\in\Re, n,m\in N \\ a^k\cdot a^w=a^{k+w} \\ \frac{a^k}{a^w}=a^{k-w} \end{cases}$ — *Resp*: $\frac{6}{7}x^3\sqrt{x}-\frac{3}{2}x^2\sqrt[3]{x^2}-4\sqrt{x}+C$

10. $\int (2x-3)^2 dx$ Sugestão: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ — *Resp*: $\frac{1}{6}(2x-3)^3+C$

11. $\int (\sqrt{x}-2x)^2 dx$ — *Resp*: $\frac{1}{2}x^2-\frac{8}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{4}{3}x^3+C$

12. $\int \left(3x^2\sqrt[3]{x^2}-\frac{5x}{\sqrt{x}}+\frac{7}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ — *Resp*: $\frac{9}{11}x^3\sqrt[3]{x^2}-\frac{10}{3}x\sqrt{x}+21\sqrt[3]{x}+C$

13. $\int (18x^2+20x+4)dx$ — *Resp*: $6x^3+10x^2+4x+C$

14. $\int \left(x^2\sqrt{x}-3x\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)dx$ — *Resp*: $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}-\frac{9}{7}x^2\sqrt[3]{x}+\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}+C$

15. $\int \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ — *Resp*: $\frac{1}{2}x^2-2x+\ln x+C$

16. $\int \frac{x^2-5x+3}{\sqrt{x}}dx$ Sugestão: $\frac{a\pm b}{n}=\frac{a}{n}\pm\frac{b}{n}$ — *Resp*: $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{10}{3}x\sqrt{x}+6\sqrt{x}+C$

1ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1. $\int\left(x\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$ *Resp:* $\frac{2x^2\sqrt{x}}{5}-\sqrt{x}+c$

2. $\int\left(\frac{1}{x^3}-x^2\sqrt[3]{x}-\frac{x}{\sqrt{x}}\right)dx$ *Resp:* $-\frac{1}{2x^2}-\frac{3}{10}x^3\sqrt[3]{x}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$

3. $\int(3x+1)^2dx$ *Resp:* $\frac{1}{9}(3x+1)^3+C$

4. $\int(2x^2+5)^5x\,dx$ *Resp:* $\frac{1}{24}(2x^2+5)^6+C$

5. $\int(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2dx$ *Resp:* $ax-\frac{4x\sqrt{ax}}{3}+\frac{x^2}{2}+C$

6. $\int\left(x^2+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2dx$ *Resp:* $\frac{x^5}{5}+\frac{3}{4}x^2\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+C$

7. $\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x\sqrt{x}}+2\right)dx$ *Resp:* $-\frac{1}{x}-\frac{8}{\sqrt{x}}+2x+C$

8. $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}}{4}\right)dx$ *Resp:* $6\sqrt{x}-\frac{x^2\sqrt{x}}{10}+C$

9. $\int\sqrt{x}(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2dx$ *Resp:* $\frac{2ax\sqrt{x}}{3}-x^2\sqrt{a}+\frac{2x^2\sqrt{x}}{5}+C$

10. $\int x(a+bx^3)^2dx$ *Resp:* $\frac{a^2x^2}{2}+\frac{2abx^5}{5}+\frac{b^2x^8}{8}+C$

11. $\int x(5+3x^2)^8dx$ *Resp:* $\frac{(5+3x^2)^9}{54}+C$

12. $\int x^2\sqrt[5]{7-4x^3}\,dx$ *Resp:* $-\frac{5}{72}(7-4x^3)^{\frac{6}{5}}+C$

13. $\int x^{n-1}\sqrt{a+bx^n}\,dx$ *Resp:* $\frac{2}{3nb}(a+bx^n)^{\frac{3}{2}}+C$

14. $\int x\sqrt[3]{1+x}\,dx$ *Resp:* $\frac{3}{7}(1+x)^2\sqrt[3]{1+x}-\frac{3}{4}(1+x)\sqrt[3]{1+x}+C$

15. $\int\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)^2dx$ *Resp:* $\frac{a}{2}\left(e^{\frac{2x}{a}}-e^{-\frac{2x}{a}}\right)-2x+C$

16. $\int x\,e^{-x^2}dx$ *Resp:* $-\frac{1}{2e^{x^2}}+C$

17. $\int 10^{-2x}dx$ *Resp:* $-\frac{10^{-2x}}{\ln 100}+C$

18. $\int x^2\cdot e^{2x^3}\,dx$ *Resp:* $\frac{1}{6}e^{2x^3}+C$

19. $\int x^3(4+3x^2)^5dt$ *Resp:* $x^3(4+3x^2)^5t+C$

20. $\int(x^2s-3xs^2+4)ds$ *Resp:* $\frac{1}{2}x^2s^2-xs^3+4s+C$

INTEGRAIS QUOCIENTE

Faremos o estudo das integrais quociente através de três casos, onde consideraremos:

- $N(x)$ uma expressão algébrica de variável *x*, para o numerador do quociente.
- $D(x)$ uma expressão algébrica de variável *x*, para o denominador do quociente, com $D(x) \neq 0$.

1º Caso: Integrais do tipo $\int \frac{N(x)}{D(x)} dx$, com $D(x) \neq 0$, $gr[D(x)] > gr[N(x)]$ e que recaem na integral imediata: $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$, onde $\begin{cases} u = D(x) \\ du = N(x)dx \end{cases}$.

Exemplo 1:

Calcule $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$

Se considerarmos $u = x^2 + 1$, temos que $du = d(x^2+1) = 2xdx$

Então $\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \int \frac{\overbrace{2xdx}^{du}}{\underbrace{x^2+1}_{u}} = \ln(x^2+1) + C$

Dica: *Quando o numerador de um quociente apresentar, para cada termo do denominador com variável de expoente diferente de zero, um termo com a mesma variável e expoente um grau inferior* $\left(\text{ex}: \frac{3x^2 - 8x}{x^3 - 4x^2 + 1}, \frac{5x^4 + 3}{x^5 + 3x}, \frac{15x^2 + 2x - 6}{5x^3 + x^2 - 6x + 9} \right)$, *dependendo dos coeficientes de cada termo do numerador, a integral recai neste 1º caso.*

2º Caso: Integrais do tipo $\int \frac{N(x)}{[D(x)]^n} dx = \int [D(x)]^{-n} N(x)\, dx$, com $D(x) \neq 0, n \neq 1$ e $gr[D(x)] > gr[N(x)]$ que recaem na integral imediata: $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, onde

$$\begin{cases} u = D(x) \\ du = N(x)\, dx, \text{com } k \in R \end{cases}$$

Exemplo 2:

Calcule: $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} dx$.

Podemos reescrever: $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} dx = \int \frac{x}{(x^2-4)^{\frac{1}{2}}} dx = \int (x^2-4)^{-\frac{1}{2}}\, x\, dx$

Fazendo $u = x^2 - 4$, temos $du = 2x\, dx$

Note que se multiplicarmos $x\, dx$ por dois, obtemos $2x\, dx = du$.

Então:

$$\int \frac{1}{2}\left(x^2-4\right)^{-\frac{1}{2}} 2\,x\,dx = \frac{1}{2}\int \left(\underbrace{x^2-4}_{u}\right)^{-\frac{1}{2}} \underbrace{d\left(x^2-4\right)}_{du} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2-4\right)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2-4\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C = \sqrt{\left(x^2-4\right)}+C$$

3º Caso: Integrais do tipo $\int \frac{N(x)}{D(x)}dx$, com $D(x) \neq 0$ e $gr[D(x)] \leq gr[N(x)]$.

Neste caso, realizamos a divisão de *N(x)* por *D(x)*, obtendo o quociente *Q(x)* e resto *R(x)*

$$\begin{array}{r|l} N(x) & D(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array}$$

Observando a divisão acima, obtemos que $N(x) = D(x)\cdot Q(x) + R(x)$

Podemos escrever a identidade.

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{D(x)\cdot Q(x)+R(x)}{D(x)} = \frac{D(x)\cdot Q(x)}{D(x)} + \frac{R(x)}{D(x)} = Q(x)+\frac{R(x)}{D(x)}$$

Assim, $\int \frac{N(x)}{D(x)}dx = \int\left(Q(x)+\frac{R(x)}{D(x)}\right)dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{D(x)}dx$

Fluxograma para Divisão de polinômio por polinômio (na mesma variável x)

1º passo: ordenamos os dois polinômios (reescrevemos os dois polinômios em ordem decrescente em relação aos expoentes da variável x)

2º passo: determinamos o termo que multiplicado pelo termo de maior grau do polinômio do divisor, resulte no termo (com mesmo sinal) de maior grau do dividendo (ou do resto, caso tenha sido satisfeito o item (i) do 6º passo).

3º passo: escrevemos o termo determinado no 2º passo no quociente.

4º passo: multiplicamos o termo do passo anterior pelo polinômio do divisor.

5º passo: subtraímos do dividendo (ou do resto, caso tenha sido satisfeito o item (i) do 6º passo) o polinômio resultante do 4º passo.

6º passo: (i) Se o resto obtido for de grau maior ou igual ao grau do polinômio do divisor, repita os passos de 2 a 5.

(ii) Se o resto obtido for de grau menor do que o grau do polinômio do divisor, a operação está concluída.

Exemplo: Divida $N(x) = 4x^3 - 5x + 9$ por $D(x) = 3x + x^2$.

Vamos utilizar o fluxograma:

1º passo: $\begin{cases} N(x) = 4x^3 + 0x^2 - 5x + 9 \\ D(x) = x^2 + 3x \end{cases}$

2º passo: $(4x)\cdot(x^2) = 4x^3$

3º, 4º e 5º passos:

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + 0x^2 - 5x + 9 & x^2 + 3x \\ \underline{-4x^3 - 12x^2 \qquad\qquad} & \overline{4x\qquad} \\ 0x^3 - 12x^2 - 5x + 9 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} (4x)\cdot(x^2) = 4x^3 \\ (4x)\cdot(3x) = 12x^2 \end{array}$$

6º passo: como o resto obtido tem grau maior ou igual (neste caso igual) ao grau do polinômio do divisor, vamos repetir os passos de 2 a 5.

2º passo: $(-12)\cdot(x^2) = -12x^2$

3º, 4º e 5º passos:

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + 0x^2 - 5x + 9 & x^2 + 3x \\ \underline{-4x^3 - 12x^2 \qquad\qquad} & \overline{4x - 12} \\ 0x^3 - 12x^2 - 5x + 9 & \\ \underline{+12x^2 + 36x \qquad} & \\ 0x^2 + 31x + 9 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} (-12)\cdot(x^2) = -12x^2 \\ (-12)\cdot(3x) = -36x \end{array}$$

6º passo: como o resto obtido é de grau menor do que o grau do polinômio do divisor, a operação está concluída.

Assim, $\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{4x^3-5x+9}{x^2+3x} = 4x - 12 + \frac{+31x+9}{x^2+3x}$

Exemplo 3:

Calcule $\int \frac{x^3 - 5x^2 - 2x + 15}{x^2 - 3} dx$

Note que a integral é do caso $\int \frac{N(x)}{D(x)} dx$, tendo $N(x)$ grau maior que $D(x)$.

Vamos utilizar o fluxograma descrito acima para realizar a divisão de $x^3 - 5x^2 - 2x + 15$ por $x^2 - 3$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 5x^2 - 2x + 15 & x^2 - 3 \\ \underline{-x^3 \qquad\quad + 3x \qquad} & \overline{x \qquad} \\ 0 \;\; - 5x^2 + x + 15 & \end{array} \qquad x\cdot(x^2 - 3) = x^3 - 3x$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 5x^2 - 2x + 15 & x^2 - 3 \\ \underline{-x^3 \qquad\quad + 3x \qquad} & \overline{x - 5} \\ 0 \;\; - 5x^2 + x + 15 & \\ \underline{+5x^2 \qquad - 15} & \\ 0 \quad x \quad 0 & \end{array} \qquad -5\cdot(x^2 - 3) = -5x^2 + 15$$

Então, $\int \frac{x^3 - 5x^2 - 2x + 15}{x^2 - 3} dx = \int \left(x - 5 + \frac{x}{x^2 - 3} \right) dx = \int x\, dx - 5\int dx + \int \frac{x}{x^2 - 3} dx$

Note que: $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C_1$

$-5\int dx = -5x + C_2$

$\int \frac{x}{x^2 - 3} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 3) + C_3$

Assim, $\int \frac{x^3 - 5x^2 - 2x + 15}{x^2 - 3} dx = \frac{x^2}{2} - 5x + \frac{1}{2} \ln(x^2 - 3) + C$

2ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1. $\int \frac{5x}{4x^2+9}dx$ — *Resp:* $\frac{5}{8}\ln(4x^2+9)+C$
2. $\int \frac{5x}{\sqrt{9-4x^2}}dx$ — *Resp:* $-\frac{5}{4}\sqrt{9-4x^2}+C$
3. $\int \frac{2x+1}{3x^2+3x+9}dx$ — *Resp:* $\frac{1}{3}\ln(3x^2+3x+9)+C$
4. $\int \frac{7xe^{x^2}}{5+3e^{x^2}}dx$ — *Resp:* $\frac{7}{6}\ln\left|5+3e^{x^2}\right|+C$
5. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{16-4x^3}}$ — *Resp:* $-\frac{1}{6}\sqrt{16-4x^3}+C$
6. $\int \frac{xdx}{x^2-1}$ — *Resp:* $\ln\sqrt{x^2-1}+C$
7. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{a^4+x^4}}$ — *Resp:* $\frac{1}{2}\sqrt{a^4+x^4}+C$
8. $\int \frac{dx}{(a+bx)^3}$ — *Resp:* $-\frac{1}{2b(a+bx)^2}+C$
9. $\int \frac{xdx}{(a+bx^2)^3}$ — *Resp:* $-\frac{1}{4b(a+bx^2)^2}+C$
10. $\int \frac{-x^2dx}{(a+bx^3)^2}$ — *Resp:* $\frac{1}{3b(a+bx^3)}+C$
11. $\int \frac{(2x+3)}{\sqrt{x^2+3x}}dx$ — *Resp:* $2\sqrt{x^2+3x}+C$
12. $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x}}dx$ — *Resp:* $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+3x}+C$
13. $\int \frac{e^x}{a+be^x}dx$ — *Resp:* $\frac{1}{b}\ln(a+be^x)+C$
14. $\int \frac{2x+3}{x+2}dx$ — *Resp:* $2x-\ln(x+2)+C$
15. $\int \frac{x^2+2}{x+1}dx$ — *Resp:* $\frac{x^2}{2}-x+3\ln(x+1)+C$
16. $\int \frac{x+4}{2x+3}dx$ — *Resp:* $\frac{x}{2}+\frac{5}{4}\ln(2x+3)+C$
17. $\int \frac{2x}{\sqrt[3]{6-5x^2}}dx$ — *Resp:* $-\frac{3}{10}\sqrt[3]{(6-5x^2)^2}+C$
18. $\int \frac{\ln x}{x}dx$ — *Resp:* $\frac{1}{2}\ln^2 x+C$
19. $\int \frac{\ln x^3}{x}dx$ — *Resp:* $\frac{3}{2}\ln^2 x+C$
20. $\int \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+1}$ — *Resp:* $\ln\sqrt{e^{2x}+1}+C$

21. $\int \frac{1-a^x}{1+a^x}dx$ *Resp:* $x-\frac{2}{\ln a}\ln(1+a^x)+C$

22. $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$ *Resp:* $\frac{\ln^3 x}{3}+C$

23. $\int \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx$ *Resp:* $\frac{\ln^2(x+1)}{2}+C$

24. $\int \frac{xdx}{x^2+1}$ *Resp:* $\ln\sqrt{x^2+1}+C$

25. $\int \frac{3dx}{1+2x}$ *Resp:* $\frac{3}{2}\ln(1+2x)+C$

26. $\int \frac{x-2}{x^2-4x+2}dx$ *Resp:* $\ln\sqrt{x^2-4x+2}+C$

27. $\int \frac{(1-x)^2}{x}dx$ *Resp:* $\ln x-2x+\frac{x^2}{2}+C$

28. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{9-x^4}}$ *Resp:* $-\frac{1}{2}\sqrt{9-x^4}+C$

29. $\int \frac{x^3-3x}{(x+1)^2}dx$ *Resp:* $\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x+1}+C$

INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Estudos Preliminares

- $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$
- $\text{cossec }\theta = \dfrac{1}{\text{sen}\,\theta}$
- $\text{tg }\theta = \dfrac{\text{sen }\theta}{\cos\theta}$
- $\text{cotg}\,\theta = \dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$
- $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen }\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} \\ \cos\theta = \sqrt{1-\text{sen}^2\theta} \end{cases}$
- $\text{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta \Rightarrow \begin{cases} \text{tg }\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1} \\ \sec\theta = \sqrt{\text{tg}^2\theta + 1} \end{cases}$
- $\text{cotg}^2\theta + 1 = \text{cossec}^2\theta \Rightarrow \begin{cases} \text{cotg }\theta = \sqrt{\text{cossec}^2\theta - 1} \\ \text{cossec}\,\theta = \sqrt{\text{cotg}^2\theta + 1} \end{cases}$

Integrais Trigonométricas Imediatas

- $\int \text{sen }u\,du = -\cos u + C$
- $\int \cos u\,du = \text{sen }u + C$
- $\int \text{tg }u\,du = -\ln\cos u + C$
- $\int \text{tg }u\,du = \ln\sec u + C$
- $\int \text{cotg }u\,du = \ln\text{sen }u + C$
- $\int \sec^2 u\,du = \text{tg }u + C$
- $\int \text{cosec}^2 u\,du = -\text{cotg }u + C$
- $\int \sec u \cdot \text{tg }u\,du = \sec u + C$
- $\int \text{cosec }u \cdot \text{cotg }u \cdot du = -\text{cosec }u + C$
- $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arcsen\dfrac{u}{a} + C$
- $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{u}{a} + C$

Exemplo 1:

Calcule: $\int \text{sen}(3x)\,dx$

Note neste caso que a integral não é imediata, pois o arco do seno é $3x$ e a diferencial é em relação à x. Devemos manipular algebricamente a expressão para que a diferencial passe a ser $d(3x)$.

Fazendo $u = 3x$, temos $du = d(3x) = 3dx$

$$\int \text{sen}\,(3x)\,dx = \int \frac{1}{3}\text{sen}\,(3x)\cdot(3dx) = \frac{1}{3}\int \text{sen}\,\underbrace{(3x)}_{\text{u}}\,\underbrace{d(3x)}_{du} = -\frac{1}{3}\cos\,(3x) + C$$

Exemplo 2:

Calcule: $\int \cos^2 x\,dx$

Neste caso a integral não é imediata pois o cosseno está ao quadrado. Podemos então substituir $\cos^2 x$ por $\frac{1}{2}[1+\cos(2x)]$.

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1}{2}[1+\cos(2x)]\,dx = \int \frac{1}{2}dx + \int \frac{1}{2}\cos(2x)dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos\,(2x)\,dx$$

Então

- $\frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{2}x + C_1$
- $\frac{1}{2}\int \cos\,(2x)\,dx$ não é imediata, pois o arco é $2x$ e a diferencial é dx.

Vamos transformar dx em $d(2x)$. se $u = 2x$, então $du = d(2x) = 2dx$.

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{2}\cos(2x)(2dx) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \cos\underbrace{(2x)}_{u}\underbrace{d(2x)}_{du} = \frac{1}{4}\text{sen}\,(2x) + C$$

Assim, $\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\text{sen}\,(2x) + C$

Exemplo 3:

Calcule: $\int x\,sen\,(3x^2)\,dx$

A integral não é imediata pois o arco do seno é $3x^2$, a diferencial é dx e o integrando apresenta um termo x. Note que se $u = 3x^2$, $du = 6x\,dx$ e podemos utilizar o termo x para transformar dx em $d(3x^2)$. Então.

$$\int x\,\text{sen}\,(3x^2)\,dx = \int \frac{1}{6}\text{sen}(3x^2)(6x\,dx) = \frac{1}{6}\int \text{sen}\,\underbrace{(3x^2)}_{\text{u}}\,d(3x^2) = -\frac{1}{6}\cos\,(3x^2) + C$$

Exemplo 4:

Calcule: $\int \text{tg}^2 x\,dx$

A integral não é imediata pois a tangente está ao quadrado, logo não se enquadra no tipo $\int \text{tg}\,u\,du$. Sabemos que $\text{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$ e que $\int \sec^2 u\,du = \text{tg}\,u + C$. Assim.

$$\int \text{tg}^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\,dx = \int \sec^2 x\,dx - \int dx = \text{tg}\,x - x + C$$

Exemplo 5:

Calcule: $\int e^{\operatorname{tg} x}\sec^2 x\,dx$

Note que, se $u=\operatorname{tg} x$, $du=\sec^2 x\,dx$. Logo, podemos escrever a integral no caso imediato $\int e^u du$.

$$\int e^{\operatorname{tg} x}\sec^2 x\cdot dx=\int e^{\overbrace{\operatorname{tg} x}^{u}}\underbrace{d(\operatorname{tg} x)}_{\text{du}}=e^{\operatorname{tg} x}+C$$

Exemplo 6:

Calcule: $\int \sec x\,dx$

Esta integral não se enquadra em nenhuma integral imediata estudada até aqui.
Observe que:

$$\int \sec x\,dx=\int \sec x\frac{\sec x+\operatorname{tg} x}{\sec x+\operatorname{tg} x}dx=\int\frac{\sec^2 x+\sec x\operatorname{tg} x}{\sec x+\operatorname{tg} x}dx$$

Fazendo $u=\sec x+\operatorname{tg} x$, temos $du=d(\sec x+\operatorname{tg} x)=(\sec x\operatorname{tg} x+\sec^2 x)\,dx$

$$\int \sec x\,dx=\int\frac{\overbrace{\sec^2 x+\sec x\operatorname{tg} x}^{du}}{\underbrace{\sec x+\operatorname{tg} x}_{u}}dx=\ln(\sec x+\operatorname{tg} x)+C$$

Exemplo 7:

Calcule: $\int \operatorname{cosec} x\,dx$

Esta integral não se enquadra em nenhuma integral imediata estudada até aqui.
Observe que:

$$\int \operatorname{cosec} x\,dx=\int \operatorname{cosec} x\frac{\operatorname{cosec} x+\operatorname{cotg} x}{\operatorname{cosec} x+\operatorname{cotg} x}dx=\int\frac{\operatorname{cosec}^2 x+\operatorname{cosec} x\operatorname{cotg} x}{\operatorname{cosec} x+\operatorname{cotg} x}dx$$

Fazendo $u=\operatorname{cosec} x+\operatorname{cotg} x$, temos

$$du=d(\operatorname{cosec} x+\operatorname{cotg} x)=(-\operatorname{cosec} x\operatorname{cotg} x-\operatorname{cosec}^2 x)\,dx$$

$$\int \operatorname{cosec} x\,dx=-\int\frac{-(-\operatorname{cosec}^2 x-\operatorname{cosec} x\operatorname{cotg} x)}{\operatorname{cosec} x+\operatorname{cotg} x}dx=-\int\frac{\overbrace{\operatorname{cosec}^2 x+\operatorname{cosec} x\operatorname{cotg} x}^{du}}{\underbrace{\operatorname{cosec} x+\operatorname{cotg} x}_{u}}dx=$$

$$=-\ln(\operatorname{cosec} x+\operatorname{cotg} x)+C$$

Exemplo 8:

Calcule: $\int\frac{dx}{\sqrt{16-4x^2}}$

Esta é uma integral quociente.

Primeiramente, devemos analisar se ela se enquadra no tipo $\int\frac{du}{u}$, o que não é o caso pois

$$d\left(\sqrt{16-4x^2}\right)=\frac{-4x}{\sqrt{16-4x^2}}dx\neq dx$$

Em seguida analisamos se é do tipo $\int u^n du$, mas também não é o caso, já que

$\int \frac{dx}{\sqrt{16-4x^2}} = \int (16-4x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$, e a derivada de $u = 16-4x^2$ é $du = -8x\,dx$, e o integrando não tendo o termo *x*, não conseguimos transformar dx em $d(16-4x^2) = du$.

Vejamos então se pode ser do tipo $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$:

$\int \frac{dx}{\sqrt{16-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(4)^2-(2x)^2}}$, que não é imediata do tipo $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$ pois a diferencial deveria ser $d(2x)$. Mas podemos transformar $d(x)$ em $d(2x) = 2dx$, veja:

Fazendo $u = 2x$, temos $du = d(2x) = 2dx$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(4)^2-(2x)^2}} = \int \frac{1}{2}\frac{2\,dx}{\sqrt{(4)^2-(2x)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{d(2x)}^{du}}{\sqrt{(4)^2-\underbrace{(2x)}_{u}{}^2}} =$$

$$= \frac{1}{2} arcsen \frac{2x}{4} + C = \frac{1}{2} arcsen \frac{x}{2} + C$$

Exemplo 9:

Calcule: $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Esta é uma integral quociente.

Primeiramente devemos analisar se ela se enquadra no tipo $\int \frac{du}{u}$, o que não é o caso pois $d\left(\sqrt{4-x^2}\right) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} dx \neq x\,dx$.

Em seguida analisamos se é do tipo $\int u^n du$, que é o caso, já que

$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int (4-x^2)^{-\frac{1}{2}}\, x\,dx$, e a derivada de $u = 4-x^2$ é $du = -2x\,dx$.

Então.

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int (4-x^2)^{-\frac{1}{2}}\, x\,dx = \int \frac{1}{-2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x\,dx) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \underbrace{(4-x^2)}_{u}{}^{-\frac{1}{2}}\, \underbrace{d(4-x^2)}_{du} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(4-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -(4-x^2)^{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{4-x^2} + C$$

Exemplo 10:

Calcule: $\int \frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}$

Esta é uma integral quociente.

Primeiramente devemos analisar se ela se enquadra no tipo $\int \frac{du}{u}$, o que não é o caso, pois

$d\left(\sqrt{5-3x^2}\right)=\frac{-3x}{\sqrt{5-3x^2}}dx \neq dx$

Em seguida analisamos se é do tipo $\int u^n du$, mas também não é o caso, já que

$\int \frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}=\int \left(5-3x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx$, a derivada de $u=5-3x^2$ é $du=-6x\,dx$ e o integrando não tendo termo *x*, não conseguimos transformar dx em $d\left(5-3x^2\right)=du$.

Vejamos então se pode ser do tipo $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$:

$\int \frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(x\sqrt{3}\right)^2}}$, que não é imediata do tipo $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$ pois a diferencial deveria ser $d\left(x\sqrt{3}\right)$. Mas podemos transformar $d(x)$ em $d\left(x\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}dx$, veja:

Fazendo $u=x\sqrt{3}$, temos $du=d\left(x\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}dx$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(x\sqrt{3}\right)^2}}=\int \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\left(\sqrt{3}\right)dx}{\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(x\sqrt{3}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\overbrace{d\left(x\sqrt{3}\right)}^{du}}{\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-\underbrace{\left(x\sqrt{3}\right)}_{u}^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,sen}\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{5}}+C$$

Exemplo 11:

Calcule: $\int \frac{2x\,dx}{16+x^4}$

Esta é uma integral quociente.
Veja que *N(x)* tem grau menor que *D(x)*, logo não podemos realizar a divisão m por n.

A integral não se enquadra no tipo $\int \frac{du}{u}$, pois $d\left(16+x^4\right)=4x^3dx \neq 2x\,dx$

Não é do tipo $\int u^n du$, já que $u=16+x^4$ implica em *n = 1*, o que não pode ocorrer neste caso.

Vejamos então se pode ser do tipo $\int \frac{du}{a^2+u^2}$:

$\int \frac{2x\,dx}{16+x^4}=\int \frac{2x\,dx}{(4)^2+\left(x^2\right)^2}$, que é imediata do tipo $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$ pois $2x\,dx$ é a diferencial de $u=x^2$.

Fazendo $u=x^2$, temos $du=d\left(x^2\right)=2x\,dx$

$$\int \frac{2x\,dx}{16+x^4} = \int \frac{2x\,dx}{(4)^2+(x^2)^2} = \int \frac{\overbrace{d(x^2)}^{du}}{(4)^2+\underbrace{(x^2)^2}_{u}} = \frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2}{4}+C$$

Exemplo 12:

Calcule: $\int \frac{dx}{x^2+4x+9}$

Esta é uma integral quociente.

Veja que *N(x)* tem grau menor que *D(x)*, logo não podemos realizar a divisão *N(x)* por *D(x)*.

A integral não se enquadra no tipo $\int \frac{du}{u}$, pois $d(x^2+4x+9) = (2x+4)dx \neq dx$

Não é do tipo $\int u^n du$, já que $u = x^2+4x+9$ implica em $n = 1$, o que não pode ocorrer neste caso.

Vejamos então se pode ser do tipo $\int \frac{du}{a^2+u^2}$:

Note que x^2+4x+9 não é fatorável pois $\Delta < 0$, mas podemos proceder da seguinte maneira: $x^2+4x+9 = (x^2+4x+4)+5 = (x+2)^2+5$. Então.

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+9} = \int \frac{dx}{x^2+4x\underbrace{+4+5}_{9}} = \int \frac{dx}{(x^2+4x+4)+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+(\sqrt{5})^2},$$ que é imediata do tipo $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$ pois dx é a diferencial de $u = x+2$.

Fazendo $u = x+2$, temos $du = d(x+2) = dx$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+9} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+(\sqrt{5})^2} = \int \frac{\overbrace{d(x+2)}^{du}}{(\sqrt{5})^2+\underbrace{(x+2)^2}_{u}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+2}{\sqrt{5}}+C$$

3ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1. $\int \frac{\sec^2 x\, dx}{\operatorname{tg} x}$ *Resp:* $\ln[\operatorname{tg} x] + C$
2. $\int \cos^4 x \operatorname{sen} x\, dx$ *Resp:* $-\frac{\cos^5 x}{5} + C$
3. $\int \operatorname{tg}^4 3x \sec^2 3x\, dx$ *Resp:* $\frac{\operatorname{tg}^5 3x}{15} + C$
4. $\int \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}\, dx$ *Resp:* $2.\ln\left[sen\left(\frac{x}{2}\right)\right] + C$
5. $\int \operatorname{sen}(5x)\operatorname{sen}(x)\, dx$ *Resp:* $-\frac{\operatorname{sen}(6x)}{12} + \frac{\operatorname{sen}(4x)}{8} + C$
6. $\int \operatorname{sen}(10x)\operatorname{sen}(2x)\, dx$ *Resp:* $-\frac{\operatorname{sen}(12x)}{24} + \frac{\operatorname{sen}(8x)}{16} + C$
7. $\int \sqrt{1+2\operatorname{sen} x}\cos x\, dx$ *Resp:* $\frac{1}{3}(1+2\operatorname{sen} x)^{\frac{3}{2}} + C$
8. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}\, dx$ *Resp:* $\ln(1-\cos x) + C$
9. $\int \frac{\sec^2 x}{a + b\cdot \operatorname{tg} x}\, dx$ *Resp:* $\frac{1}{b}\ln(a + b\cdot\operatorname{tg} x) + C$
10. $\int e^{\operatorname{sen} x}\cos x\, dx$ *Resp:* $e^{\operatorname{sen} x} + C$
11. $\int \sqrt{\frac{\cos^2 x - 1}{\operatorname{sen}^2 x - 1}}\, dx$ *Resp:* $\ln(\sec x) + C$
12. $\int \operatorname{tg} x \cos x\, dx$ *Resp:* $-\cos x + C$
13. $\int \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(2x)}{\sqrt{\operatorname{sen}^4 x - 4\operatorname{sen}^2 x}}\, dx$ *Resp:* $2\sqrt{\operatorname{sen}^2 x - 4} + C$
14. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{16-4x^4}}$ *Resp:* $\frac{1}{4} arcsen\frac{x^2}{2} + C$
15. $\int \sqrt{\frac{5+x}{5-x}}\, dx$ *Resp:* $5 arcsen\frac{x}{5} - \sqrt{25-x^2} + C$
16. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^6}}$ *Resp:* $\frac{1}{3} arcsen\frac{x^3}{2} + C$
17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ *Resp:* $arcsen(\ln x) + C$
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-9x^2}}$ *Resp:* $\frac{1}{3} arcsen\frac{3x}{\sqrt{7}} + C$
19. $\int \frac{x\, dx}{4+x^4}$ *Resp:* $\frac{1}{4} arctg\frac{x^2}{2} + C$
20. $\int \frac{xe^{x^2}}{1+e^{2x^2}}\, dx$ *Resp:* $\frac{1}{2} arctg e^{x^2} + C$

21. $\int \frac{dx}{5-3x+x^2}$ *Resp:* $\frac{2\sqrt{11}}{11} arctg \frac{(2x-3)\sqrt{11}}{11} + C$

22. $\int \frac{4dx}{17+3x^2}$ *Resp:* $\frac{4\sqrt{51}}{51} arctg \frac{x\sqrt{51}}{17} + C$

23. $\int \frac{5}{4x^2+9} dx$ *Resp:* $\frac{5}{6} \text{arc } tg \frac{2x}{3} + C$

24. $\int \frac{5}{\sqrt{9-4x^2}} dx$ *Resp:* $\frac{5}{2} \text{arc } sen \frac{2x}{3} + C$

25. $\int \frac{7e^x}{5+3e^{2x}} dx$ *Resp:* $\frac{7}{\sqrt{15}} \text{arc } tg \frac{\sqrt{15}e^x}{5} + C$

26. $\int \frac{9x^2}{4x^2+25} dx$ *Resp:* $\frac{9}{4} x - \frac{45}{8} \text{arc } tg \frac{2x}{5} + C$

27. $\int \frac{\cos(2x-3)}{4+\text{sen}(2x-3)} dx$ *Resp:* $\ln\left[\sqrt{4+\text{sen}(2x-3)}\right] + C$

28. $\int \frac{\cos(2x-3)}{\sqrt{4+\text{sen}(2x-3)}} dx$ *Resp:* $\sqrt{4+\text{sen}(2x-3)} + C$

29. $\int \frac{\cos(2x-3)}{4+\text{sen}^2(2x-3)} dx$ *Resp:* $\frac{1}{4} \text{arc } tg \frac{\text{sen}\,(2x-3)}{2} + C$

30. $\int \frac{\cos(2x-3)}{\sqrt{4-\text{sen}^2(2x-3)}} dx$ *Resp:* $\frac{1}{2} \text{arc sen} \frac{\text{sen}\,(2x-3)}{2} + C$

INTEGRAÇÃO POR PARTES

As técnicas de integração estudadas anteriormente permitem o cálculo de alguns tipos de integrais, mas não de todos. Veja dois exemplos bem parecidos.

Exemplo 1: integre $\int x \operatorname{sen} x^2\, dx$

Temos conhecimento da integral imediata: $\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + C$

Fazendo a mudança de variável $u = x^2$, teremos $du = d(x^2) = 2x\, dx$. Assim, pelas técnicas estudadas anteriormente,

$$\int x \operatorname{sen} x^2\, dx = \int \operatorname{sen} x^2\,(x\, dx) = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} x^2 (2x\, dx) = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} \underbrace{x^2}_{\text{u}}\, \underbrace{d(x^2)}_{\text{du}} =$$

$$= \frac{1}{2}(-\cos x^2) + C = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C\,.$$

Exemplo 2: integre $\int x \operatorname{sen} x\, dx$

Neste caso, a estratégia utilizada anteriormente não surtirá efeito, e nenhuma da outras estratégias já discutidas é capaz de resolvê-la.

Precisamos então de novas técnicas de integração, como integração por partes, integração trigonométrica não imediata, integração de funções racionais fracionárias e integração através de substituição de variáveis por variáveis trigonométricas.

Iniciaremos discutindo a técnica de ***Integração por Partes***.

A técnica de integração por partes está fundamentada na regra da derivada do produto:

$$d\,(u\,v) = v\,du + u\,dv\text{, onde podemos prepará-la}$$

$$u\,dv = d\,(u\,v) - v\,du$$

Conhecendo a integral de $v\,du$ e não conhecemos a integral de $u\,dv$, podemos integrá-la membro a membro a fim de determinarmos $\int u\,dv$, como segue.

$$\int u\,dv = \int d\,(u\,v) - \int v\,du$$

E como $\int d(u\,v) = u\,v$ (a integral é a operação oposta da diferencial), a fórmula da Integração por Partes fica assim definida.

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

Vamos agora calcular a integral $\int x \operatorname{sen} x\, dx$ por essa nova técnica:

Fazendo $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = d\left(x\right) = dx \\ dv = \text{sen } x\, dx \Rightarrow \int dv = \int \text{sen } x\, dx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$

Utilizando a técnica de integração por partes, temos:

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

$$\int \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{\text{sen } x\, dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u}\left(-\underbrace{\cos x}_{v}\right) - \int \left(\underbrace{-\cos x}_{v}\right)\underbrace{dx}_{du}$$

$$\int x \text{ sen } x\, dx = -x\cos x + \int \cos x\, dx$$

$$\int x \text{ sen } x\, dx = -x\cos x + \text{sen } x + C$$

É importante observar que as integrais resolvíveis pela técnica de integração por partes admitem pelo menos duas escolhas diferentes para *u* e *dv*. Em alguns casos, ambas as escolhas permitem o cálculo da integral desejada (sendo uma delas de forma menos trabalhosa), já em outros, apenas uma das escolhas permite a resolução.

Neste exemplo, fazendo uma má escolha para *u* e *dv*, chegamos em uma identidade do tipo $\int u\, dv = \int u\, dv$, que não determina o resultado da integral desejada. Veja.

Fazendo, $\begin{cases} u = \text{sen } x \Rightarrow du = d\left(\text{sen } x\right) = \cos x\, dx \\ dv = x\, dx \Rightarrow \int dv = \int x\, dx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$ temos

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

$$\int \underbrace{\text{sen } x}_{u}\left(\underbrace{x\, dx}_{dv}\right) = \underbrace{\text{sen } x}_{u}\left(\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v}\right) - \int\left(\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v}\right)\underbrace{\cos x\, dx}_{du}$$

$$\int x \text{ sen } x\, dx = \frac{x^2}{2}\text{sen } x - \frac{1}{2}\int x^2 \cos x\, dx \qquad \text{(I)}$$

Mas a integral $\int x^2 \cos x\, dx$ deve ser resolvida também aplicando a técnica de integração por partes.

Fazendo $\begin{cases} u = x^2 \Rightarrow du = d\left(x^2\right) = 2x\, dx \\ dv = \cos x\, dx \Rightarrow \int dv = \int \cos x\, dx \Rightarrow v = \text{sen } x + C_1 \end{cases}$

$$\int \underbrace{x^2}_{u}\, \underbrace{\cos x\, dx}_{dv} = \underbrace{x^2}_{u}\, \underbrace{\text{sen } x}_{v} - \int \underbrace{\text{sen } x}_{v}\left(\underbrace{2x\, dx}_{du}\right)$$

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \text{ sen } x - 2\int x \text{ sen } x\, dx \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), temos,

$$\int x \,\text{sen}\, x\, dx = \frac{x^2}{2}\text{sen}\, x - \frac{1}{2}\left[\underbrace{x^2\,\text{sen}\, x - 2\int x\,\text{sen}\, x\, dx}_{\int x^2 \cos x\, dx}\right]$$

$$\int x\,\text{sen}\, x\, dx = \frac{x^2}{2}\text{sen}\, x - \frac{x^2}{2}\text{sen}\, x + \int x\,\text{sen}\, x\, dx$$

$$\int x\,\text{sen}\, x\, dx = \int x\,\text{sen}\, x\, dx$$

Vamos discutir mais alguns exemplos.

Exemplo 3: integre $\int x\, e^x\, dx$

Vamos utilizar a técnica de integração por partes

Fazendo $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = d\,(x) = dx \\ dv = \mathrm{e}^x\, dx \Rightarrow \int dv = \int \mathrm{e}^x\, dx \Rightarrow v = e^x \end{cases}$ temos,

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

$$\int \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{e^x\, dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{v}\, \underbrace{dx}_{du}$$

$$\int x\, e^x\, dx = x\, e^x - e^x + C$$

$$\int x\, e^x\, dx = e^x(x-1) + C$$

Exemplo 4: integre $\int \ln(x^2+1)\, dx$

Vamos utilizar a técnica de integração por partes.

Fazendo $\begin{cases} u = \ln(x^2+1) \Rightarrow du = d\,[\ln(x^2+1)] = \dfrac{2x}{x^2+1}dx \\ dv = dx \Rightarrow \int dv = \int dx \Rightarrow v = x \end{cases}$ temos,

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

$$\int \underbrace{\ln(x^2+1)}_{u}\, \underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{\ln(x^2+1)}_{u}\, \underbrace{x}_{v} - \int \underbrace{x}_{v}\, \underbrace{\frac{2x}{x^2+1}dx}_{du}$$

$$\int \ln(x^2+1)\, dx = x\ln(x^2+1) - 2\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -x^2-1 & 1 \\ \cline{1-1} -1 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{1(x^2+1)-1}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$$

E $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - \text{arc tg } x + C$

Assim, $\int \ln\left(x^2+1\right)dx = x\ln\left(x^2+1\right) - 2x + 2\text{arc tg } x + C$

Exemplo 5: integre $\int\left(x^2 \cos x^3 + x^3 \text{ sen } x^2\right)dx$

$$\int\left(x^2 \cos x^3 + x^3 \text{ sen } x^2\right)dx = \underbrace{\int x^2 \cos x^3\, dx}_{(I)} + \underbrace{\int x^3 \text{ sen } x^2\, dx}_{(II)}$$

$(I)\int x^2 \cos x^3\, dx$

Fazendo $t = x^3$, temos $dt = d\left(x^3\right) = 3x^2\, dx$. Assim

$$\int x^2 \cos x^3\, dx = \frac{1}{3}\int \cos x^3\left(3x^2\, dx\right) = \frac{1}{3}\int \cos \underbrace{x^3}_{t}\, \underbrace{d\left(x^3\right)}_{dt} = \frac{1}{3}\text{sen } x^3 + C_1$$

$(II)\int x^3 \text{ sen } x^2\, dx$ (integração por partes)

Fazendo
$$\begin{cases} u = x^2 \Rightarrow du = d\left(x^2\right) = 2x\, dx \\ dv = x \text{ sen } x^2\, dx \Rightarrow \int dv = \int x \text{ sen } x^2\, dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}\int \text{sen } x^2\left(2x\, dx\right) \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow v = \frac{1}{2}\int \text{sen } \underbrace{x^2}_{u} \cdot \underbrace{d\left(x^2\right)}_{du} \Rightarrow v = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C_2 \end{cases}$$

$$\int \underbrace{x^3}_{u}\, \underbrace{\text{sen } x^2\, dx}_{dv} = \underbrace{x^2}_{u}\left(\underbrace{-\frac{1}{2}\cos x^2}_{v}\right) - \int \underbrace{-\frac{1}{2}\cos x^2}_{v}\, \underbrace{2x\, dx}_{du} = -\frac{1}{2}x^2 \cos x^2 + \frac{1}{2}\int \cos \underbrace{x^2}_{w}\, \underbrace{d\left(x^2\right)}_{dw} =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 \cos x^2 + \frac{1}{2}\text{sen } x^2 + C_3$$

Logo,

$$\int\left(x^2 \cos x^3 + x^3 \text{ sen } x^2\right)dx = (I) + (II) = \frac{1}{3}\text{sen } x^3 - \frac{1}{2}x^2 \cos x^2 + \frac{1}{2}\text{sen } x^2 + C$$

4ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1. $\int x\, e^{-x}\, dx$ — *Resp:* $-e^{x}(x+1)+C$

2. $\int x \cos x\, dx$ — *Resp:* $x \operatorname{sen} x + \cos x + C$

3. $\int x^3 \operatorname{sen} x^2\, dx$ — *Resp:* $-\frac{x^2 \cos x^2}{2} + \frac{\operatorname{sen} x^2}{2} + C$

4. $\int \ln x\, dx$ — *Resp:* $x \ln x - x + C$

5. $\int \operatorname{arc\,sen} 2x\, dx$ — *Resp:* $x \operatorname{arc\,sen} 2x + \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C$

6. $\int \operatorname{arc\,tan} x\, dx$ — *Resp:* $x \operatorname{arc\,tan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

7. $\int x\left(\cos x - \operatorname{sen} x^2\right) dx$ — *Resp:* $x \operatorname{sen} x + \cos x + \frac{1}{2}\cos x^2 + C$

8. $\int x \ln x\, dx$ — *Resp:* $\frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C$

9. $\int x^3 \ln x\, dx$ — *Resp:* $\frac{x^4}{4}\left(\ln x - \frac{1}{4}\right) + C$

10. $\int (\ln x - \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 2x)\, dx$ — *Resp:* $x(\ln x - 1) - \frac{\operatorname{sen} x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{10} + C$

11. $\int \left(x^2 e^{x^3} - x^3 \ln x\right) dx$ — *Resp:* $\frac{e^{x^3}}{3} - \frac{x^4}{4}\left(\ln x + \frac{1}{4}\right) + C$

12. $\int \operatorname{cos\,sec}^3 x\, dx$ — *Resp:* $-\frac{1}{2}\operatorname{cos\,sec} x \cot x - \frac{1}{2}\ln(\operatorname{cos\,sec} x + \cot x) + C$

13. $\int x^n \ln x\, dx$ — *Resp:* $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left[\ln x - \frac{1}{n+1}\right] + C$

14. $\int \operatorname{arc\,sen} x\, dx$ — *Resp:* $x \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2} + C$

15. $\int x^3 \operatorname{arc\,tan} x\, dx$ — *Resp:* $\frac{x^4-1}{4} arc\, tan\, x + \frac{x}{4}\left(1 - \frac{x^2}{3}\right) + C$ *ou*
$\frac{x^4}{4} arc \tan x - \frac{x^3}{12} + \frac{x}{4} - \frac{1}{4} arc \tan x + C$ *ou*
$\frac{1}{4}\left(x^4 arc \tan x - \frac{x^3}{3} + x - arc \tan x\right) + C$

16. $\int x^2 \cos x\, dx$ — *Resp:* $x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C$

17. $\int x\, e^{x}\, dx$ — *Resp:* $e^x(x-1) + C$

18. $\int x^2\left(e^x + \operatorname{sen} x\right) dx$ — $e^x(x^2 - 2x + 2) + (-x^2 + 2)\cos x + 2x \operatorname{sen} x + C$

19. $\int x\left(\ln x + e^x\right) dx$ — *Resp:* $\frac{x^2}{2}\left[\ln x - \frac{1}{2}\right] + e^x(x-1) + C$

20. $\int x^2 \operatorname{arc\,cot} x\, dx$ — *Resp:* $\frac{x^3}{3} \operatorname{arc\,cot} x + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + C$

21. $\int \sec^3 x\, dx$ — *Resp:* $\frac{1}{2}\tan x \sec x + \frac{1}{2}\ln(\sec x + \tan x) + C$

22. $\int \sec^3(5x)\, dx$ — *Resp:* $\frac{1}{10}\tan(5x)\sec(5x) + \frac{1}{10}\ln(\sec(5x) + \tan(5x)) + C$

23. $\int x^3 e^{2x+1}\, dx$ *Resp:* $\frac{x^3 e^{2x+1}}{2} - \frac{3x^2 e^{2x+1}}{4} + \frac{3x e^{2x+1}}{4} - \frac{3e^{2x+1}}{8} + C$

24. $\int x \ln(x+1)\, dx$ *Resp:* $\frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right] + C$

25. $\int x^3 \cos x\, dx$ *Resp:* $x^3 sen\, x + 3x^2 \cos x - 6x\, sen\, x - 6\cos x + C$

26. $\int x^3 \cos(x^4+1)\, dx$ *Resp:* $\frac{1}{4} sen\,(x^4+1) + C$

UNIDADE 3: MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO (PARTE 2)

INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES RACIONAIS POR FRAÇÕES PARCIAIS

Antes de iniciarmos a discussão sobre integrais racionais fracionárias, vamos relembrar alguns conceitos importantes para o tema.

Estudos Preliminares

- ***Alguns Produtos Notáveis***

1º) Produto de uma Soma por uma Diferença: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Exemplo: $(2x+5)(2x-5)=(2x)^2-(5)^2=4x^2-25$

2º) Quadrado da Soma de Dois Termos: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

Exemplo: $(3x^3+2x)^2=(3x^3)^2+2(3x^3)(2x)+(2x)^2=9x^6+12x^4+4x^2$

3º) Quadrado da Diferença de Dois Temos: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

Exemplo: $(7y+1)^2=(7y)^2-2(7y)(1)+(1)^2=49y^2-14y+1$

4º) Cubo da Soma de Dois Termos: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Exemplo:

$$(2x^2+3y)^3=(2x^2)^3+3\underbrace{(2x^2)^2}_{4x^4}(3y)+3(2x^2)\underbrace{(3y)^2}_{9y^2}+(3y)^3=8x^6+36x^4y+54x^2y^2+27y^3$$

5º) Cubo da Diferença de Dois Termos: $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Exemplo:

$$(x^4-2x^3)^3=(x^4)^3-3\underbrace{(x^4)^2}_{x^8}(2x^3)+3(x^3)\underbrace{(2x^3)^2}_{4x^6}-(2x^3)^3=x^{12}-6x^{11}+12x^9-8x^9=x^{12}-6x^{11}+4x^9$$

- **Fatoração de Polinômios**

Um polinômio está fatorado quando está escrito como produto de dois ou mais polinômios.

Definição 1: Polinômio Irredutível é um polinômio que não pode ser fatorado com coeficientes inteiros.

Exemplo: x^2+1

Definição 2: Um polinômio está fatorado completamente quando está escrito como produtos de seus polinômios irredutíveis.

Exemplos: Se fatorarmos o polinômio (x^5-4x^3) da seguinte forma:

$$x^5-4x^3=x^3(x^2-4)$$

Não estaremos o fatorando de forma completa, pois (x^2-4) pode ser fatorado, já que $x^2-4=(x-2)(x+2)$. Então, para fatorarmos completamente o polinômio (x^5-4x^3) temos que escrevê-lo como o produto dos seguintes polinômios:

$$x^5-4x^3=x^3(x-2)(x+2)$$

pois $x^3,(x-2)$ e $(x+2)$são polinômios irredutíveis.

Vamos agora discutir os principais casos de fatoração de polinômios.

1º) Fatoração por Fator Comum em Evidência

Exemplo: $\underbrace{4x^5}_{4x^2\cdot x^3} - \underbrace{24x^3}_{4x^2\cdot 6x} + \underbrace{12x^2}_{4x^2\cdot 3} = 4x^2\left(x^3 - 6x + 3\right)$

2º) Fatoração por Agrupamento

Este tipo de fatoração só pode ser aplicado a polinômios com número par de termos (o caso de dois termos é o primeiro caso estudado). Veja algumas estruturas possíveis para quatro e seis termos.

- $ac + ad + bc + bd = \underbrace{(ac + ad)}_{\text{fator comum: a}} + \underbrace{(bc + bd)}_{\text{fator comum: b}} = \underbrace{a(c+d) + b(c+d)}_{\text{fator comum: (c+d)}} = (c+d)(a+b)$

- $$ad + ae + bd + be + cd + ce = \underbrace{(ad + ae)}_{\text{fator comum: a}} + \underbrace{(bd + be)}_{\text{fator comum: b}} + \underbrace{(cd + ce)}_{\text{fator comum:c}} =$$
$$= \underbrace{a(d+e) + b(d+e) + c(d+e)}_{\text{fator comum: (d+e)}} = (d+e)(a+b+c)$$

- $$ad + ae + bd + be + cd + ce = \underbrace{(ad + bd + cd)}_{\text{fator comum: d}} + \underbrace{(ae + be + ce)}_{\text{fator comum: e}} =$$
$$= \underbrace{d(a+b+c) + e(a+b+c)}_{\text{fator comum: (a+b+c)}} = (a+b+c)(d+e)$$

Exemplo:

$$4x^4 + x^3 - 12x - 3 = \underbrace{(4x^4 + x^3)}_{\text{fator comum: } x^3} - \underbrace{\left(\overbrace{12x}^{3\cdot 4x} + 3\right)}_{\text{fator comum: 3}} = \underbrace{x^3(4x+1) - 3(4x+1)}_{\text{fator comum: (4x+1)}} = (4x+1)(x^3 - 3)$$

3º) Fatoração da Diferença de Dois Quadrados

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Exemplos:

(i) $\underbrace{9x^6}_{(3x^3)^2} - \underbrace{4}_{(2)^2} = (3x^3 + 2)(3x^3 - 2)$

(ii) $\underbrace{25x^2}_{(5x)^2} - (y+1)^2 = [5x + (y+1)][5x - (y+1)] = (5x + y + 1)(5x - y - 1)$

4º) Fatoração da Soma ou Diferença de Dois Cubos

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Exemplo:

$$\underbrace{8x^6}_{(2x^2)^3} - \underbrace{27x^3y^3}_{(3xy)^3} = (2x^2 + 3xy)\left[(2x^2)^2 - (2x^2)(3xy) + (3xy)^2\right] = (2x^2 + 3xy)(4x^4 - 6x^3y + 9x^2y^2)$$

5º) Fatoração de Trinômios

- Se o trinômio for um quadrado perfeito, temos:

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Exemplo: $\underbrace{9x^4}_{(3x^2)^2} - \underbrace{30x^2}_{2\cdot(3x^2)\cdot(5)} + \underbrace{25}_{(5)^2} = (3x^2 - 5)^2$

- Fatoração de trinômios do segundo grau pela equação característica.

Se igualarmos o trinômio à zero, teremos uma equação do segundo grau, com três casos a considerar:

(i) A equação não admite raízes reais $(\Delta < 0)$: neste caso, o polinômio não pode ser fatorado.

Exemplo: Fatore $x^2 - 2x + 3$

$$x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4(1)(3) = -8 < 0$$

Como a equação característica do trinômio não admite raízes reais, ele não pode ser fatorado nos reais.

(ii) A equação admite duas raízes reais iguais $(\Delta = 0)$: neste caso, teremos a equação característica: $a(x-r)^2$, sendo a o coeficiente de x^2 e r a raíz dupla da equação.

Exemplo: Fatore $3x^2 - 6x + 3$

$$3x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = (-6)^2 - 4(3)(3) = 0 \\ x = \dfrac{6 \pm 0}{6} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Assim, $3x^2 - 6x + 3 = \underbrace{3}_{a}\left(x - \underbrace{1}_{x_1}\right)\left(x - \underbrace{1}_{x_2}\right) = 3(x-1)^2$

(iii) A equação admite duas raízes reais diferentes $(\Delta > 0)$: neste caso, teremos a equação característica: $a(x - r_1)(x - r_2)$, sendo a o coeficiente de x^2 e r_1, r_2 as raízes da equação.

Exemplo: Fatore $2x^2 - 4x - 6$

$$2x^2 - 4x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = (-4)^2 - 4(2)(-6) = 64 > 0 \\ x = \dfrac{4 \pm 8}{4} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Assim, $2x^2 - 4x - 6 = 2[x - (-1)](x - 3) = 2(x+1)(x-3)$

6º) Fatoração utilizando o método de Briot Ruffini para reduzir o grau de um polinômio

Todo polinômio de grau maior a um pode ter ser grau reduzido em uma unidade se conseguirmos descobrir uma de suas raízes reais (geralmente por tentativa) e aplicarmos o método de Briot Ruffini, que nada mais é do que um modo prático de realizar a divisão do polinômio inicial por $(x-r)$, onde r é uma raiz deste polinômio. O Teorema D'Alembert garante que essa divisão será exata, resultando um polinômio de grau uma unidade menor que o grau do polinômio dividido (inicial).

> ***Método de Briot Ruffini***
>
> Seja o polinômio $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, de grau *n* e *r* uma de suas raízes, montamos:
>
> $$\begin{array}{c|ccccc} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \hline r & & & & & \end{array}$$
>
> Repetimos o coeficiente do termo de maior grau embaixo dele mesmo. Multiplicamos esse número por *r* e somamos com o próximo coeficiente da primeira linha; o resultado fica embaixo desse próximo coeficiente. Repetimos o processo até o final.

Exemplo: Fatore o polinômio: x^3+3x^2-x-3 *reduzindo seu grau pelo método de Briot Ruffini.*

Por tentativa, verificamos que -1 é uma raiz do polinômio:

$$\text{para } x=-1, \text{ temos}: (-1)^3+3(-1)^2-(-1)-3=-1+3+1-3=0$$

Apliquemos o método de Briot Ruffini:

$\begin{array}{c\|cccc} & 1 & 3 & -1 & -3 \\ \hline -1 & & & & \end{array}$	Monte à direita na primeira linha os coeficientes do polinômio (em ordem) e a raiz à esquerda na segunda linha
$\begin{array}{c\|cccc} & \boxed{1} & 3 & -1 & -3 \\ \hline -1 & \boxed{1} & & & \end{array}$	Repetida na segunda linha o coeficiente do termo de maior grau do polinômio (logo abaixo).
(-1)+(3)= $\boxed{2}$ $\begin{array}{c\|cccc} & 1 & \boxed{3} & -1 & -3 \\ \hline \boxed{-1} & \boxed{1} & \boxed{2} & & \end{array}$ (-1)x(1)= $\boxed{-1}$	Multiplique a raiz pelo termo inicialmente repetido e adicione o resultado ao segundo coeficiente (da esquerda para a direita) da primeira linha. Escreva o novo resultado logo abaixo desse coeficiente.
(-2)+(-1) = $\boxed{-3}$ $\begin{array}{c\|cccc} & 1 & 3 & \boxed{-1} & -3 \\ \hline \boxed{-1} & 1 & \boxed{2} & \boxed{-3} & \end{array}$ (-1)x(2)= $\boxed{-2}$	Multiplique a raiz pelo resultado obtido no passo anterior e adicione o valor resultante ao terceiro coeficiente da primeira linha (da esquerda para a direita). Escreva o resultado obtido logo abaixo desse coeficiente.
(+3)+(-3) = $\boxed{0}$ $\begin{array}{c\|cccc} & 1 & 3 & -1 & \boxed{-3} \\ \hline \boxed{-1} & 1 & 2 & \boxed{-3} & \boxed{0} \end{array}$ (-1)x(-3) = $\boxed{+3}$	Multiplique a raiz pelo resultado obtido no passo anterior e adicione o valor resultante ao último coeficiente da primeira linha (da esquerda para a direita). Escreva o resultado obtido logo abaixo desse coeficiente.

Assim, determinamos o polinômio reduzido de grau 2: x^2+2x-3

Sabemos que x^3+3x^2-x-3 pode ser escrita com a equação característica $a\left(x-r_1\right)\left(x-r_2\right)\left(x-r_3\right)$, onde a é o coeficiente do termo de maior grau e $r_1,\ r_2\ e\ r_3$ são as raízes do polinômio.

Se $r_1=-1$, as outras duas raízes podem ser obtidas pelo polinômio de grau reduzido pelo processo de Briot Ruffini.

Assim,

$$x^3+3x^2-x-3=\underbrace{1}_{a}\left[x-\underbrace{(-1)}_{r}\right]\underbrace{\left(x^2+2x-3\right)}_{polinômio\ reduzido}=(x+1)\left(x^2+2x-3\right)$$

Determinando as raízes do polinômio x^2+2x-3, obtemos $r_2=-3$ e $r_3=1$. Dessa maneira,

$$x^2+2x-3=a'\left(x-r_2\right)\left(x-r_3\right)=\underbrace{1}_{a'}\left[x-\underbrace{(-3)}_{r_2}\right]\left(x-\underbrace{1}_{r_3}\right)=(x+3)(x-1),$$

onde a' é o coeficiente do termo de maior grau da equação x^2+2x-3.

Por fim, $x^3+3x^2-x-3=(x+1)\left(x^2+2x-3\right)=(x+1)(x+3)(x-1)$ fica fatorado completamente.

Fim dos Estudos Preliminares

Anteriormente discutimos algumas técnicas para determinar integrais quocientes, que recaiam nos casos:

(i) $\int u^n du=\dfrac{u^{n+1}}{n+1}+C$

(ii) $\int\dfrac{du}{u}=\ln u+C$

(iii) $\int\dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\text{arc sen}\dfrac{u}{a}+C$

(iv) $\int\dfrac{du}{a^2+u^2}=\dfrac{1}{a}\text{arc tg}\dfrac{u}{a}+C$

Neste tópico, discutiremos técnicas para determinar integrais racionais fracionárias que não recaem diretamente nos casos (i), (ii), (iii) e (iv), com esse quociente podendo ser decomposto na soma de duas ou mais frações.

NOTAS

(i) $\dfrac{N(x)}{D(x)}$, onde *N(x)* é o numerador e *D(x)* é do denominador da fração.

(ii) Uma função racional fracionária só pode ser decomposta na soma de duas ou mais frações se *D(x)* for fatorável.

(iii) Se $gr[N(x)] \geq gr[D(x)]$, admite divisão de $N(x)$ por $D(x)$ e trabalhamos a decomposição com a fração resto.

$$\begin{array}{c|c} N(x) & D(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array}$$

$R(x)$ é o resto da divisão, cujo $gr[R(x)] < gr[D(x)]$.

Assim, $\displaystyle\int \frac{N(x)}{D(x)}dx = \int\left(Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}\right)dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{D(x)}dx$

Caso contrário, se $gr[N(x)] < gr[D(x)]$ trabalhamos a decomposição com a fração original.

1º Caso: O denominador é totalmente decomponível em fatores do 1º grau, sem repetição de fatores

Se $gr[D(x)] = n$ e $D(x)$ for totalmente fatorável, fazemos $D(x) = 0$, teremos *n* raízes reais $r_1, r_2, ..., r_n$, e podemos escrever.

$$D(x) = k\,(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$$

Onde ***k pertencente aos reais é o coeficiente de x^n***, e por hipótese, $r_1, \neq r_2 \neq ... \neq r_n$.

Ao decompor uma fração do 1º caso, teremos tantas frações parcelas quantos forem os fatores do primeiro grau. Essas frações terão como denominador cada um desses fatores e como numeradores parâmetros algébricos A, B, C e etc, que reduzidas ao mesmo denominador e por igualdade formaremos um sistema, que resolvido nos dará os valores desses parâmetros e portanto, as frações parcelas.

Exemplo 1:

Calcule $\displaystyle\int \frac{x^2 - 4x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x}dx$

Como $gr[N(x)] = 2 < gr[D(x)] = 3$, a fração não admite divisão.

Fatorando o denominador e escrevendo as frações parcelas, teremos:

$$x^3 - 5x^2 + 6x = 0 \; com \text{ as raízes } \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 2 \\ r_3 = 3 \end{cases}$$

$$\boxed{x^3-5x^2+6x = x\,(\underbrace{x^2-5x+6}_{x=\frac{5\pm1}{2}\begin{cases}x_1=r_2=2\\ x_2=r_3=3\end{cases}}) = x(x-2)(x-3)}$$

$$\frac{x^2-4x+6}{x^3-5x^2+6x} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3} \quad (I)$$

Somando as frações do segundo membro da igualdade.

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3} = \frac{A\overbrace{\left[(x-2)(x-3)\right]}^{(i)}+B\overbrace{\left[x(x-3)\right]}^{(ii)}+C\overbrace{\left[x(x-2)\right]}^{(iii)}}{x(x-2)(x-3)}$$

$$\boxed{\begin{cases}(i)\ \dfrac{x(x-2)(x-3)}{x}=(x-2)(x-3)\\ (ii)\ \dfrac{x(x-2)(x-3)}{x-2}=x(x-3)\\ (iii)\ \dfrac{x(x-2)(x-3)}{x-3}=x(x-2)\end{cases}}$$

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3} = \frac{A(x^2-5x+6)+B(x^2-3x)+C(x^2-2x)}{x(x-2)(x-3)} =$$

$$= \frac{Ax^2-5Ax+6A+Bx^2-3Bx+Cx^2-2Cx}{x(x-2)(x-3)} =$$

$$= \frac{(A+B+C)x^2+(-5A-3B-2C)x+(6A)}{x(x-2)(x-3)}$$

Logo, $\dfrac{x^2-4x+6}{x^3-5x^2+6x} = \dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x-3} = \dfrac{(A+B+C)x^2+(-5A-3B-2C)x+(6A)}{x^3-5x^2+6x}$

Como os denominadores são iguais, os numeradores também deverão ser iguais e para isso, os coeficientes dos termos semelhantes deverão ser iguais, montando o sistema:

$\begin{cases}A+B+C=1\\ -5A-3B-2C=-4\\ 6A=6\end{cases}$, que resolvido obtém-se $A=1,\ B=-1$ e $C=1$

$$\boxed{\left.\begin{cases}A+B+C=1 \Rightarrow (1)+B+C=1 \Rightarrow B+C=0\\ -5A-3B-2C=-4 \Rightarrow -5(1)-3B-2C=-4 \Rightarrow 3B+2C=-1\\ 6A=6 \Rightarrow A=\dfrac{6}{6}=1\end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases}B+C=0\\ 3B+2C=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}B=-1\\ C=1\end{cases}}$$

Substituindo $A=1,\ B=-1$ e $C=1$ em *(I)*, temos

$$\frac{x^2-4x+6}{x^3-5x^2+6x} = \frac{1}{x}+\frac{-1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$$

Assim, $\displaystyle\int\frac{x^2-4x+6}{x^3-5x^2+6x}\,dx = \int\left[\frac{1}{x}+\frac{-1}{x-2}+\frac{1}{x-3}\right]dx = \underbrace{\int\frac{dx}{x}}_{(II)}-\underbrace{\int\frac{dx}{x-2}}_{(III)}+\underbrace{\int\frac{dx}{x-3}}_{(IV)}$

$$
\begin{array}{l}
(II) \quad \int \frac{dx}{x} = \ln x + C_1 \\
(III) \quad -\int \frac{dx}{x-2} = -\int \frac{\overbrace{d(x-2)}^{d(x-2)=dx}}{x-2} = -\ln(x-2) + C_2 \\
(IV) \quad \int \frac{dx}{x-3} = \int \frac{\overbrace{d(x-3)}^{d(x-3)=dx}}{x-3} = \ln(x-3) + C_3
\end{array}
$$

Então, $\int \frac{x^2 - 4x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx = \ln x - \ln(x-2) + \ln(x-3) + C$

2º Caso: O denominador é totalmente decomponível em fatores do primeiro grau porém com repetição de alguns

Neste caso, procedemos de forma análoga ao primeiro caso, mas para os fatores repetidos montaremos frações cujos denominadores serão esse fator que se inicia com expoente 1 (um) até atingir o grau de repetição.

Por exemplo, se o fator $(x-5)$ aparecer três vezes na fatoração do denominador: $(x-5)^3$, teremos: $\frac{A}{x-5} + \frac{B}{(x-5)^2} + \frac{C}{(x-5)^3}$.

Exemplo 2:

Calcule $\int \frac{x^2 - 4x + 6}{x^4 - x^3 - 12x^2} dx$

Como $gr[N(x)] = 2 < gr[D(x)] = 4$, a fração não admite divisão.

Fatorando o denominador e escrevendo as frações parcelas, teremos:

$$x^4 - x^3 - 12x^2 = x^2(x^2 - x - 12) = x^2 [x - (-3)](x-4) = x^2 (x+3)(x-4)$$

$$\frac{x^2 - 4x + 6}{x^4 - x^3 - 12x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+3} + \frac{D}{x-4} \quad (I)$$

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+3} + \frac{D}{x-4} = \frac{A\overbrace{[x(x+3)(x-4)]}^{(i)} + B\overbrace{[(x+3)(x-4)]}^{(ii)} + C\overbrace{[x^2(x-4)]}^{(iii)} + D\overbrace{[x^2(x+3)]}^{(iv)}}{x^2 (x+3)(x-4)}$$

$$
\begin{cases}
(i) & \frac{x^2 (x+3)(x-4)}{x} = x(x+3)(x-4) \\
(ii) & \frac{x^2 (x+3)(x-4)}{x^2} = (x+3)(x-4) \\
(iii) & \frac{x^2 (x+3)(x-4)}{x+3} = x^2 (x-4) \\
(iv) & \frac{x^2 (x+3)(x-4)}{x-4} = x^2 (x+3)
\end{cases}
$$

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+3} + \frac{D}{x-4} = \frac{A[x(x^2 - x - 12)] + B(x^2 - x - 12) + C(x^3 - 4x^2) + D(x^3 + 3x^2)}{x^2 (x+3)(x-4)}$$

$$= \frac{A(x^3 - x^2 - 12x) + B(x^2 - x - 12) + C(x^3 - 4x^2) + D(x^3 + 3x^2)}{x^2 (x+3)(x-4)}$$

$$= \frac{Ax^3 - Ax^2 - 12Ax + Bx^2 - Bx - 12B + Cx^3 - 4Cx^2 + Dx^3 + 3Dx^2}{x^2(x+3)(x-4)} \Rightarrow$$

$$\frac{x^2-4x+6}{x^4-x^3-12x^2} = \frac{(A+C+D)x^3 + (-A+B-4C+3D)x^2 + (-12A-B)x + (-12B)}{x^4-x^3-12x^2}$$

Montando o sistema $\begin{cases} A+C+D=0 \\ -A+B-4C+3D=1 \\ -12A-B=-4 \\ -12B=6 \end{cases}$, obtemos $A=\frac{3}{8}$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=-\frac{3}{7}$ e $D=\frac{3}{56}$

$$\begin{cases} A+C+D=0 \Rightarrow \left(\frac{3}{8}\right)+C+D=0 \Rightarrow 3+8C+8D=0 \Rightarrow 8C+8D=-3 \\ -A+B-4C+3D=1 \Rightarrow -\left(\frac{3}{8}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)-4C+3D=1 \Rightarrow -3-4-32C+24D=8 \Rightarrow 32C-24D=-15 \\ -12A-B=-4 \Rightarrow -12A-\left(-\frac{1}{2}\right)=-4 \Rightarrow 24A-1=8 \Rightarrow A=\frac{9}{24}=\frac{3}{8} \\ -12B=6 \Rightarrow B=\frac{-6}{12}=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8C+8D=-3 \\ 32C-24D=-15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24C+24D=-9 \\ 32C-24D=-15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 56C=-24 \Rightarrow C=\frac{-24}{56}=-\frac{3}{7} \\ 32\left(-\frac{3}{7}\right)-24D=-15 \Rightarrow -96-168D=-9 \Rightarrow D=\frac{9}{168}=\frac{3}{56} \end{cases}$$

Substituindo $A=\frac{3}{8}$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=-\frac{3}{7}$ e $D=\frac{3}{56}$ em *(I)*, temos

$$\frac{x^2-4x+6}{x^4-x^3-12x^2} = \frac{\frac{3}{8}}{x} + \frac{-\frac{1}{2}}{x^2} + \frac{-\frac{3}{7}}{x+3} + \frac{\frac{3}{56}}{x-4}$$

Assim, $\int \frac{x^2-4x+6}{x^4-x^3-12x^2}dx = \int \left[\frac{3}{8x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{7(x+3)} + \frac{3}{56(x-4)}\right]dx =$

$$= \underbrace{\frac{3}{8}\int\frac{dx}{x}}_{(II)} \underbrace{-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2}}_{(III)} \underbrace{-\frac{3}{7}\int\frac{dx}{x+3}}_{(IV)} \underbrace{+\frac{3}{56}\int\frac{dx}{x-4}}_{(V)}$$

$$(II)\ \frac{3}{8}\int\frac{dx}{x} = \frac{3}{8}\ln x + C_1$$

$$(III)\ -\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{2}\int x^{-2}dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + C_2 = +\frac{1}{2x} + C_2$$

$$(IV)\ -\frac{3}{7}\int\frac{dx}{x+3} = -\frac{3}{7}\int\frac{\overbrace{d(x+3)}^{d(x+3)=dx}}{x+3} = -\frac{3}{7}\ln(x+3) + C_3$$

$$(IV)\ \frac{3}{56}\int\frac{dx}{x-4} = \frac{3}{56}\int\frac{\overbrace{d(x-4)}^{d(x-4)=dx}}{x-4} = \frac{3}{56}\ln(x-4) + C_4$$

Então, $\int \frac{x^2-4x+6}{x^4-x^3-12x^2}dx = \frac{3}{8}\ln x + \frac{1}{2x} - \frac{3}{7}\ln(x+3) + \frac{3}{56}\ln(x-4) + C$

3º Caso: O denominador não é totalmente decomponível em fatores do primeiro grau, sem repetição de fatores

Neste caso, teremos tantas frações parcelas quantos forem os fatores decompostos, montados da seguinte forma:

- cada fator do primeiro grau terá como numerador um parâmetro algébrico A, B e etc.
- cada fator de grau igual ou superior a dois terá como numerador um polinômio algébrico completo de grau imediatamente inferior ao seu grau.

  Exemplo: Se o denominador tem grau dois, terá numerador da forma: $A_1x + A_2$.

  Se o denominador tem grau p, terá numerador da forma:

$$A_1x^{p-1} + A_2x^{p-2} + \ldots + A_{p-1}x + A_p$$

Exemplo 3:

Determine $\int \dfrac{2x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 6x + 12}{x^3 - x^2 + x - 1}dx$

Como $gr[N(x)] = 4 > gr[D(x)] = 3$, a fração admite divisão.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 6x + 12 & x^3 - x^2 + x - 1 \\ \cline{2-2} -2x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x & 2x \\ \hline 0 \quad 0 \quad x^2 - 4x + 12 & \end{array} \Rightarrow \frac{2x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 6x + 12}{x^3 - x^2 + x - 1} = 2x + \frac{x^2 - 4x + 12}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

Assim,

$$\int \frac{2x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 6x + 12}{x^3 - x^2 + x - 1}dx = \int \left[2x + \frac{x^2 - 4x + 12}{x^3 - x^2 + x - 1}\right]dx = \underbrace{2\int xdx}_{(i)} + \underbrace{\int \frac{x^2 - 4x + 12}{x^3 - x^2 + x - 1}dx}_{(ii)}$$

Note que (i) é resolvível pelas técnicas de integração imediata e (ii) cai no terceiro caso de resolução de integrais racionais fracionárias.

$(i)\ \ 2\int xdx = 2\dfrac{x^2}{2} + C_1 = x^2 + C_1$

(ii) Fatorando o denominador e escrevendo as frações parcelas, teremos:

$$\underbrace{x^3 - x^2}_{\text{fator comum: } x^2} + \underbrace{x - 1}_{\text{fator comum: } 1} = \underbrace{x^2(x-1) + 1(x-1)}_{\text{fator comum: (x-1)}} = (x-1)\underbrace{(x^2+1)}_{\text{não fatorável}}$$

Vamos decompor a fração em frações parcelas. Note que o fator $(x-1)$ é do primeiro grau, sendo montada uma fração para ele com numerador igual ao parâmetro A. Já o fator (x^2+1) é do segundo grau, e por isso, é montada uma fração para ele com numerador igual ao polinômio completo de grau um: $(Bx + C)$.

$$\frac{x^2 - 4x + 12}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} \quad (I)$$

$$\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A\overbrace{\left(x^2+1\right)}^{(*)}+Bx\overbrace{\left(x-1\right)}^{(**)}+C\overbrace{\left(x-1\right)}^{(**)}}{\left(x-1\right)\left(x^2+1\right)}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} (*) & \dfrac{(x-1)(x^2+1)}{x^2+1}=x^2+1 \\ (**) & \dfrac{(x-1)(x^2+1)}{x^2+1}=x-1 \end{array}}$$

$$\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{Ax^2+A+Bx^2-Bx+Cx-C}{\left(x-1\right)\left(x^2+1\right)}$$
$$=\frac{\left(A+B\right)x^2+\left(-B+C\right)x+\left(A-C\right)}{\left(x-1\right)\left(x^2+1\right)}$$

Logo, $\dfrac{x^2-4x+12}{x^3-x^2+x-1}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}=\dfrac{\left(A+B\right)x^2+\left(-B+C\right)x+\left(A-C\right)}{x^3-x^2+x-1}$

Montamos o sistema $\begin{cases} A+B=1 \\ -B+C=-4 \\ A-C=12 \end{cases}$, obtendo $A=\dfrac{9}{2}$, $B=-\dfrac{7}{2}$ e $C=-\dfrac{15}{2}$

$$\boxed{\begin{cases} A+B=1 \Rightarrow A=1-B \\ -B+C=-4 \\ A-C=12 \Rightarrow \underbrace{(1-B)}_{A}-C=12 \Rightarrow B+C=-11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -B+C=-4 \\ B+C=-11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2C=-15 \Rightarrow C=-\dfrac{15}{2} \\ B+\left(-\dfrac{15}{2}\right)=-11 \Rightarrow B=-\dfrac{7}{2} \\ A=1-\left(-\dfrac{7}{2}\right) \Rightarrow A=\dfrac{9}{2} \end{cases}}$$

Substituindo $A=\dfrac{9}{2}$, $B=-\dfrac{7}{2}$ e $C=-\dfrac{15}{2}$ em *(I)*, temos

$$\frac{x^2-4x+12}{x^3-x^2+x-1}=\frac{\frac{9}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{7}{2}x-\frac{15}{2}}{x^2+1}=\frac{\frac{9}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{7}{2}x}{x^2+1}+\frac{-\frac{15}{2}}{x^2+1}$$

Assim,

$$\int\frac{x^2-4x+12}{x^3-x^2+x-1}dx=\int\left[\frac{9}{2(x-1)}-\frac{7x}{2(x^2+1)}-\frac{15}{2(x^2+1)}\right]dx=\underbrace{\frac{9}{2}\int\frac{dx}{x-1}}_{(II)}\underbrace{-\frac{7}{2}\int\frac{xdx}{x^2+1}}_{(III)}\underbrace{-\frac{15}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}}_{(IV)}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} (II) & \dfrac{9}{2}\displaystyle\int\frac{dx}{x-1}=\frac{9}{2}\int\frac{\overbrace{d(x-1)}^{d(x-1)=dx}}{x-1}=\frac{9}{2}\ln(x-1)+C_2 \\ (III) & -\dfrac{7}{2}\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x^2+1}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2}\int\frac{\overbrace{2x\,dx}^{d(x^2+1)=2xdx}}{x^2+1}dx=-\frac{7}{4}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=-\frac{7}{4}\ln(x^2+1)+C_3 \\ (IV) & -\dfrac{15}{2}\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{1}\arctan\frac{x}{1}+C_4=-\frac{15}{2}\text{arc tg}\,x+C_4 \end{array}}$$

Então,

$$\int\frac{x^2-4x+12}{x^3-x^2+x-1}dx=\frac{9}{2}\ln(x-1)-\frac{7}{4}\ln(x^2+1)-\frac{15}{2}\arctan x+C_5$$

Por fim,

$$\int\frac{2x^4-2x^3+3x^2-6x+12}{x^3-x^2+x-1}dx=(i)+(ii)=x^2+\frac{9}{2}\ln(x-1)-\frac{7}{4}\ln(x^2+1)-\frac{15}{2}\arctan x+C$$

4º Caso: O denominador não é totalmente decomponível em fatores do primeiro grau, com a repetição de alguns fatores

Note que este caso é a união do segundo e terceiro casos. Assim:

- Para cada fator do primeiro grau que não apresenta repetição será montada uma fração com denominador igual ao fator e numerador igual a um parâmetro algébrico A, B e etc.
- Para cada fator do primeiro grau que apresenta repetição serão montadas frações cujos denominadores serão esse fator que se inicia com expoente 1 (um) até atingir o grau de repetição; e numeradores iguais à parâmetros algébricos A, B e etc.
- Para cada fator de grau igual ou superior a dois que não apresenta repetição será montada uma fração com denominador igual ao fator e numerador igual a um polinômio completo de grau imediatamente inferior ao seu grau.
- Para cada fator de grau igual ou superior a dois que apresenta repetição serão montadas frações cujos denominadores serão esse fator que se inicia com expoente 1(um) até atingir o grau de repetição; e numeradores iguais à polinômios completos de grau imediatamente inferior ao seu grau.

Exemplo: Se o denominador apresenta em sua decomposição: $(x^2+3)^2$, teremos $\dfrac{Ax+B}{x^2+3}+\dfrac{Cx+D}{(x^2+3)^2}$

Exemplo 4:

Determine $\displaystyle\int \frac{7x^2+3x-6}{(x-2)^2(x^2+5)}\,dx$

Como $gr[N(x)]=2<gr[D(x)]=4$, a fração não admite divisão.

Já estando o denominador fatorado completamente, pois (x^2+5) não é fatorável, vamos decompor a fração em frações parcelas. Note que o fator $(x-2)$ é do primeiro grau com duas repetições, sendo montadas para ele duas frações, uma com denominador $(x-2)$ e numerador *A* e a outra com denominador $(x-2)^2$ e numerador *B*. Já o fator (x^2+5) é do segundo grau e não apresenta repetição, por isso montamos uma única fração para ele, com numerador $(Cx+D)$ e denominador (x^2+5).

$$\frac{7x^2+3x-6}{(x-2)^2(x^2+5)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+5}\;(I)$$

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+5}=\frac{A\overbrace{(x-2)(x^2+5)}^{(i)}+B\overbrace{(x^2+5)}^{(ii)}+Cx\overbrace{(x-2)^2}^{(iii)}+D\overbrace{(x-2)^2}^{(iii)}}{(x-2)^2(x^2+5)}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll}(i) & \dfrac{(x-2)^2(x^2+5)}{x-2}=(x-2)(x^2+5)\\ (ii) & \dfrac{(x-2)^2(x^2+5)}{(x-2)^2}=x^2+5\\ (iii) & \dfrac{(x-2)^2(x^2+5)}{x^2+5}=(x-2)^2\end{array}}$$

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+5}=\frac{A\left(x^3-2x^2+5x-10\right)+Bx^2+5B+Cx\left(x^2-4x+4\right)+D\left(x^2-4x+4\right)}{(x-2)^2\left(x^2+5\right)}$$

$$=\frac{Ax^3-2Ax^2+5Ax-10A+Bx^2+5B+Cx^3-4Cx^2+4Cx+Dx^2-4Dx+4D}{(x-2)^2\left(x^2+5\right)}\Rightarrow$$

$$\frac{7x^2+3x-6}{(x-2)^2\left(x^2+5\right)}=\frac{(A+C)x^3+(-2A+B-4C+D)x^2+(5A+4C-4D)x+(-10A+5B+4D)}{(x-2)^2\left(x^2+5\right)}$$

Montamos o sistema $\begin{cases} A+C=0 \\ -2A+B-4C+D=7 \\ 5A+4C-4D=3 \\ -10A+5B+4D=-6 \end{cases}$, que resolvido obtém-se

$$A=\frac{167}{81},\ B=\frac{28}{9},\ C=-\frac{167}{81}\ \text{ e }\ D=-\frac{19}{81}$$

Substituindo $A=\frac{167}{81},\ B=\frac{28}{9},\ C=-\frac{167}{81}$ e $D=-\frac{19}{81}$ em *(I)*, temos

$$\frac{7x^2+3x-6}{(x-2)^2(x^2+5)}=\frac{\frac{167}{81}}{x-2}+\frac{\frac{28}{9}}{(x-2)^2}+\frac{-\frac{167}{81}x+\left(-\frac{19}{81}\right)}{x^2+5}$$

$$\frac{7x^2+3x-6}{(x-2)^2(x^2+5)}=+\frac{167}{81(x-2)}+\frac{28}{9(x-2)^2}-\frac{167x}{81(x^2+5)}-\frac{19}{81(x^2+5)}$$

Assim,

$$\int\frac{7x^2+3x-6}{(x-2)^2(x^2+5)}dx=\int\left[\frac{167}{81(x-2)}+\frac{28}{9(x-2)^2}-\frac{167x}{81(x^2+5)}-\frac{19}{81(x^2+5)}\right]dx$$

$$\int\frac{7x^2+3x-6}{(x-2)^2(x^2+5)}dx=\underbrace{\frac{167}{81}\int\frac{dx}{(x-2)}}_{(II)}\ \underbrace{+\frac{28}{9}\int\frac{dx}{(x-2)^2}}_{(III)}\ \underbrace{-\frac{167}{81}\int\frac{xdx}{(x^2+5)}}_{(IV)}\ \underbrace{-\frac{19}{81}\int\frac{dx}{(x^2+5)}}_{(V)}$$

$$(II)\ +\frac{167}{81}\int\frac{\overbrace{dx}^{d(x-2)=dx}}{x-2}=+\frac{167}{81}\int\frac{d(x-2)}{x-2}=+\frac{167}{81}ln(x-2)+C_1$$

$$(III)\ +\frac{28}{9}\int\frac{dx}{(x-2)^2}=+\frac{28}{9}\int(x-2)^{-2}\underbrace{dx}_{d(x-2)=dx}=+\frac{28}{9}\int(x-2)^{-2}d(x-2)=+\frac{28}{9}\cdot\frac{(x-2)^{-1}}{-1}+C_2=-\frac{28}{9(x-2)}+C_2$$

$$(IV)\ -\frac{167}{81}\int\frac{\overbrace{xdx}^{d(x^2+5)=2xdx}}{x^2+5}=-\frac{167}{81}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{x^2+5}=-\frac{167}{162}\int\frac{d(x^2+5)}{x^2+5}=-\frac{167}{162}ln(x^2+5)+C_3$$

$$(V)\ -\frac{19}{81}\int\frac{dx}{x^2+5}=-\frac{19}{81}\int\frac{dx}{\left(\sqrt{5}\right)^2+x^2}=-\frac{19}{81}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\text{arc tg}\frac{x}{\sqrt{5}}+C_4=-\frac{19\sqrt{5}}{405}\text{arc tg}\frac{x}{\sqrt{5}}+C_4$$

Então,

$$\int\frac{7x^2+3x-6}{(x-2)^2(x^2+5)}dx=\frac{167}{81}ln(x-2)-\frac{28}{9(x-2)}-\frac{167}{162}ln(x^2+5)-\frac{19\sqrt{5}}{405}\text{arc tg}\frac{x}{\sqrt{5}}+C$$

Exemplo 5:

Determine $\displaystyle\int \frac{3x^5+9x^4+22x^3+52x^2+47x+27}{x^5+2x^4+6x^3+12x^2+9x+18}\,dx$

Como $gr[N(x)] = 5 \geq gr[D(x)] = 5$, a fração admite divisão.

$$
\begin{array}{r|l}
3x^5+9x^4+22x^3+52x^2+47x+63 & x^5+2x^4+6x^3+12x^2+9x+18 \\ \cline{2-2}
-3x^5-6x^4-18x^3-36x^2-27x-54 & 3 \\ \cline{1-1}
3x^4+4x^3+16x^2+20x+9 &
\end{array}
$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{3x^5+9x^4+22x^3+52x^2+47x+63}{x^5+2x^4+6x^3+12x^2+9x+18} = 3 + \frac{3x^4+4x^3+16x^2+20x+9}{x^5+2x^4+6x^3+12x^2+9x+18}$$

Assim,

$$\int \frac{3x^5+9x^4+22x^3+52x^2+47x+27}{x^5+2x^4+6x^3+12x^2+9x+18}\,dx = \int\left[3+\frac{3x^4+4x^3+16x^2+20x+9}{x^5+2x^4+6x^3+12x^2+9x+18}\right]dx =$$

$$= \underbrace{3\int dx}_{(i)} + \underbrace{\int \frac{3x^4+4x^3+16x^2+20x+9}{x^5+2x^4+6x^3+12x^2+9x+18}\,dx}_{(ii)}$$

(i) $3\int dx = 3x + C_1$

(ii) caímos no caso de integrais de funções racionais fracionárias, caso 4.

Fatorando o denominador:

$$\underbrace{x^5+2x^4}_{\text{fator comum: } x^4} + \underbrace{6x^3+12x^2}_{\text{fator comum: } 6x^2} + \underbrace{9x+18}_{\text{fator comum: } 9} = \underbrace{x^4(x+2)+6x^2(x+2)+9(x+2)}_{\text{fator comum: } (x+2)} =$$

$$= (x+2)\underbrace{(x^4+6x^2+9)}_{a^2+2ab+b^2=(a+b)^2} = (x+2)\underbrace{(x^2+3)^2}_{\text{infatorável}}$$

Note que o fator $(x+2)$ é do primeiro grau e sem repetição, sendo montada uma fração para ele com denominador ele mesmo e numerador igual ao parâmetro A. Já o fator (x^2+3) é do segundo grau e apresenta duas repetições, por isso montamos duas frações para ele, a primeira com numerador $(Bx+C)$ e denominador (x^2+1) e a segunda com numerador $(Dx+E)$ e denominador igual a $(x^2+1)^2$.

$$\frac{3x^4+4x^3+16x^2+20x+9}{x^5+2x^4+6x^3+12x^2+9x+18} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+3} + \frac{Dx+E}{(x^2+3)^2} \quad (I)$$

Some as frações do segundo membro da igualdade.

$$\frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+3} + \frac{Dx+E}{(x^2+3)^2} = \frac{A(x^2+3)^2 + Bx(x+2)(x^2+3) + C(x+2)(x^2+3) + Dx(x+2) + E(x+2)}{(x+2)(x^2+3)^2} =$$

$$=\frac{A\left(x^4+6x^2+9\right)+Bx\left(x^3+3x+2x^2+6\right)+C\left(x^3+3x+2x^2+6\right)+Dx^2+2Dx+Ex+2E}{(x+2)\left(x^2+3\right)^2}$$

$$=\frac{Ax^4+6Ax^2+9A+Bx^4+3Bx^2+2Bx^3+6Bx+Cx^3+3Cx+2Cx^2+6C+Dx^2+2Dx+Ex+2E}{(x+2)\left(x^2+3\right)^2}\Rightarrow$$

$$\frac{3x^4+4x^3+16x^2+20x+9}{x^5+2x^4+6x^3+12x^2+9x+18}=\frac{(A+B)x^4+(2B+C)x^3+(6A+3B+2C+D)x^2+(6B+3C+2D+E)x+(9A+6C+2E)}{x^5+2x^4+6x^3+12x^2+9x+18}$$

Montamos o sistema $\begin{cases}A+B=3\\2B+C=4\\6A+3B+2C+D=16\\6B+3C+2D+E=20\\9A+6C+2E=9\end{cases}$, que resolvido obtém-se

$A=1,\ B=2,\ C=0,\ \mathrm{D}=4,\ \mathrm{E}=0$

Resolução por escalonamento

$$\left|\begin{matrix}1&1&0&0&0&3\\0&2&1&0&0&4\\6&3&2&1&0&16\\0&6&3&2&1&20\\9&0&6&0&2&9\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}1&1&0&0&0&3\\0&2&1&0&0&4\\0&0&7&2&0&8\\0&0&0&2&1&8\\0&0&0&0&1&0\end{matrix}\right|\Rightarrow\begin{cases}A+B&=3\\2B+C&=4\\7C+2D&=8\\2D+E=&8\\E=&0\end{cases}$$

$E=0$

$2D+E=8\Rightarrow 2D+(0)=8\Rightarrow D=\frac{8}{2}=4$

$7C+2D=8\Rightarrow 7C+2(4)=8\Rightarrow 7C=0\Rightarrow C=0$

$2B+C=4\Rightarrow 2B+(0)=4\Rightarrow B=\frac{4}{2}=2$

$A+B=3\Rightarrow A+(2)=3\Rightarrow A=1$

Substituindo $A=1,\ B=2,\ C=0,\ \mathrm{D}=4,\ \mathrm{E}=0$ em *(I)*, temos

$$\frac{3x^4+4x^3+16x^2+20x+9}{x^5+2x^4+6x^3+12x^2+9x+18}=\frac{1}{x+2}+\frac{2x+0}{x^2+3}+\frac{4x+0}{\left(x^2+3\right)^2}$$

Assim,

$$\int\frac{3x^4+4x^3+16x^2+20x+9}{x^5+2x^4+6x^3+12x^2+9x+18}dx=\int\left[\frac{1}{x+2}+\frac{2x}{x^2+3}+\frac{4x}{\left(x^2+3\right)^2}\right]dx$$

$$=\underbrace{\int\frac{dx}{x+2}}_{(II)}+\underbrace{2\int\frac{xdx}{x^2+3}}_{(III)}+\underbrace{4\int\frac{xdx}{\left(x^2+3\right)^2}}_{(IV)}$$

$(II)\ \int\frac{\overbrace{dx}^{d(x+2)=dx}}{x+2}=\int\frac{d(x+2)}{x+2}=\ln(x+2)+C_2$

$(III)\ 2\int\frac{xdx}{x^2+3}=\int\frac{\overbrace{2xdx}^{d(x^2+3)}}{x^2+3}=\int\frac{d\left(x^2+3\right)}{x^2+3}=\ln\left(x^2+3\right)+C_3$

$(IV)\ 4\int\frac{xdx}{\left(x^2+3\right)^2}=4\int\left(x^2+3\right)^{-2}xdx=4\frac{1}{2}\int\left(x^2+3\right)^{-2}\underbrace{(2xdx)}_{d(x^2+3)=2xdx}=\int\left(x^2+3\right)^{-2}d\left(x^2+3\right)=\frac{\left(x^2+3\right)^{-1}}{-1}+C_4=-\frac{1}{x^2+3}+C_4$

Então,

$$\int\frac{3x^4+4x^3+16x^2+20x+9}{x^5+2x^4+6x^3+12x^2+9x+18}dx=\ln(x+2)+\ln\left(x^2+3\right)-\frac{1}{x^2+3}+C_5$$

Por fim,

$$\int\frac{3x^5+9x^4+22x^3+52x^2+47x+27}{x^5+2x^4+6x^3+12x^2+9x+18}dx=(i)+(ii)=3x+\ln(x+2)+\ln\left(x^2+3\right)-\frac{1}{x^2+3}+C$$

5ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1. $\int \frac{2}{x^2-5x+7}\,dx$ — *Resp:* $\frac{4\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2\sqrt{3}x-5\sqrt{3}}{3}+C$

2. $\int \frac{2x-4}{x^2-6x+10}\,dx$ — *Resp:* $\ln(x^2-6x+10)+2\arctan(x-3)+C$

3. $\int \frac{2}{x^3-2x^2+x-2}\,dx$ — *Resp:* $\frac{2}{5}\ln(x-2)-\frac{1}{5}\ln(x^2+1)-\frac{4}{5}\arctan x+C$

4. $\int \frac{16x-20}{x^4-6x^3+8x^2}\,dx$ — *Resp:* $\frac{5}{2x}+\frac{1}{8}\ln x+\frac{11}{8}\ln(x-4)-\frac{3}{2}\ln(x-2)+C$

5. $\int \frac{2x^2+4x+8}{x^2-4x+3}\,dx$ — *Resp:* $2x+19\ln(x-3)-7\ln(x-1)+C$

6. $\int \frac{4x-8}{x^3-2x^2-4x+8}\,dx$ — *Resp:* $\ln\frac{x-2}{x+2}+C$

7. $\int \frac{2x+7}{x^3-x^2+x-1}\,dx$ — *Resp:* $\frac{9}{2}\ln(x-1)-\frac{9}{4}\ln(x^2+1)-\frac{5}{2}\arctan x+C$

8. $\int \frac{4x^2-6x+1}{x^2-6x+4}\,dx$ — *Resp:* $4x+9\ln(x^2-6x+4)+\frac{39}{2\sqrt{5}}\ln\frac{(x-3)-\sqrt{5}}{(x-3)+\sqrt{5}}+C$

9. $\int \frac{18}{x^4-2x^3+x^2}\,dx$ — *Resp:* $-\frac{18}{x}-\frac{18}{x-1}+36\ln\frac{x}{x-1}+C$

10. $\int \frac{2x-6}{x^3-4x^2+3x}\,dx$ — *Resp:* $2\ln\frac{x-1}{x}+C$

11. $\int \frac{13x-4}{x^2-5x+4}\,dx$ — *Resp:* $-3\ln|x-1|+16\ln|x-4|+C$

12. $\int \frac{x^4-3x^2+4x+12}{x^3-4x^2+4x}\,dx$ — *Resp:* $\frac{x^2}{2}+4x+3\ln|x|+6\ln|x-2|-\frac{12}{x-2}+C$

13. $\int \frac{5x^2+x+12}{x^3+4x}\,dx$ — *Resp:* $3\,ln|x|+ln|x^2+4|+\frac{1}{2}\text{arc}\,tg\left(\frac{x}{2}\right)+C$

14. $\int \frac{2x^3+3x^2+8}{x^4+4x^2}\,dx$ — *Resp:* $-\frac{2}{x}+\ln|x^2+4|+\frac{1}{2}\text{arc}\,tg\left(\frac{x}{2}\right)+C$

15. $\int \frac{5x^3+2x^2+3x-2}{x^4+x^2}\,dx$ — *Resp:* $3\ln|x|+\frac{2}{x}+\ln|x^2+1|+4\,\text{arc}\,tg\;x+C$

16. $\int \frac{2x-6}{x^3+3x^2-4x}\,dx$ — *Resp:* $\frac{3}{2}\ln|x|-\frac{7}{10}\ln|x+4|-\frac{4}{5}\ln|x-1|+C$

17. $\int \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x}\,dx$ *Resp:* $x - 2\,ln|x| + 2\,ln|x+1| + C$

18. $\int \frac{x^2}{x^3 + x}\,dx$ *Resp:* $\frac{1}{2}\ln|x^2 + 1| + C$

19. $\int \frac{2x^3 + 3x^2 + 8}{x^4 + 4x^2}\,dx$ *Resp:* $-\frac{2}{x} + ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\text{arc}\,tg\,\frac{x}{2} + C$

20. $\int \frac{x^2 - 5x\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x^3}}\,dx$ *Resp:* $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 5x - \frac{6}{\sqrt{x}} + C$

DESAFIO

$$\int \frac{x^3 + 9x + 8}{(x^2+3)(x^2+6x+11)}\,dx$$

Como o denominador já está fatorado de forma irredutível e são dois fatores polinomiais do segundo grau, temos.

$$\frac{x^3 + 9x + 8}{(x^2+3)(x^2+6x+11)} = \frac{Ax+B}{x^2+3} + \frac{Cx+D}{x^2+6x+11} =$$

$$= \frac{(Ax+B)(x^2+6x+11) + (Cx+D)(x^2+3)}{(x^2+3)(x^2+6x+11)} =$$

$$= \frac{Ax^3 + 6Ax^2 + 11Ax + Bx^2 + 6Bx + 11B + Cx^3 + 3Cx + Dx^2 + 3D}{(x^2+3)(x^2+6x+11)} =$$

$$= \frac{(A+C)x^3 + (6A+B+D)x^2 + (11A+6B+3C)x + (11B+3D)}{(x^2+3)(x^2+6x+11)}$$

$$\begin{cases} A + C = 1 \\ 6A + B + D = 0 \\ 11A + 6B + 3C = 9 \\ 11B + 3D = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1A + 0B + 1C + 0D = 1 \\ 6A + 1B + 0C + 1D = 0 \\ 11A + 6B + 3C + 0D = 9 \\ 0A + 11B + 0C + 3D = 8 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 11 & 6 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 11 & 0 & 3 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 11 & 0 & 3 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 14 & -3 & 17 \\ 0 & 0 & 33 & -4 & 37 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 14 & -3 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A + C = 1 \\ B - 6C + D = -6 \\ 14C - 3D = 17 \\ D = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \\ C = 1 \\ D = -1 \end{cases}$$

Assim,

$$\int \frac{x^3+9x+8}{(x^2+3)(x^2+6x+11)}dx =$$
$$= \int \left[\frac{0x+1}{x^2+3} + \frac{1x-1}{x^2+6x+11}\right]dx = \underbrace{\int \frac{dx}{x^2+3}}_{(i)} + \underbrace{\int \frac{x-1}{x^2+6x+11}dx}_{(ii)}$$

$$(i) \int \frac{dx}{x^2+3} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{3}\right)^2 + x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C_1$$

$$(ii) \int \frac{x-1}{x^2+6x+11}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x-1)}{x^2+6x+11}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x\overbrace{-2+8}^{+6}-8}{x^2+6x+11}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \left[\frac{2x+6}{x^2+6x+11} + \frac{-8}{x^2+6x+11}\right]dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+6x+11}dx + \frac{-8}{2}\int \frac{dx}{x^2+6x+11} =$$
$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+6x+11}dx}_{(iii)} \underbrace{-4\int \frac{dx}{x^2+6x+11}}_{iv}$$

$$(iii) \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+6x+11}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+6x+11)}{x^2+6x+11} = \frac{1}{2}\ln|x^2+6x+11| + C_2$$
$$\text{Se } u = x^2+6x+11, du = d(x^2+6x+11) = (2x+6)dx$$

$$(iv) - 4\int \frac{dx}{x^2+6x+\underbrace{11}_{9+2}} = -4\int \frac{dx}{\underbrace{x^2+6x+9}_{(x+3)^2}+2} = -4\int \frac{dx}{\left(\sqrt{2}\right)^2 + (x+3)^2} =$$
$$\text{Se } v = x+3, dv = d(x+3) = dx$$
$$= -4\int \frac{d(x+3)}{\left(\sqrt{2}\right)^2 + (x+3)^2} = -4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+3}{\sqrt{2}} + C_3 = -2\sqrt{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+3}{\sqrt{2}} + C_3$$

Concluindo:

$$\int \frac{x^3+9x+8}{(x^2+3)(x^2+6x+11)}dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\ln|x^2+6x+11| - 2\sqrt{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+3}{\sqrt{2}} + C$$

INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA

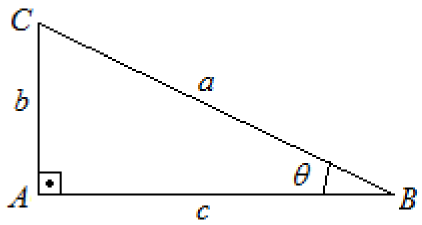
A técnica de integração que realiza a substituição de variáveis por variáreis trigonométricas, é geralmente utilizada em integrais do tipo $\int v\sqrt{a^2 \pm u^2}\,dx$, $\int v\sqrt{u^2 \pm a^2}\,dx$, $\int \frac{v\,dx}{\sqrt{a^2 \pm u^2}}$ e $\int \frac{v\,dx}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}$, com $v = f_1(x)$, $u = f_2(x)$, que não recaem nas imediatas $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$ ou $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \text{arc}\,sen\frac{u}{a} + C$.

Estudos Preliminares

Propriedades Logarítmicas Importantes para este tópico

1. O logaritmo de um número real positivo é um número real, logo, $\ln A = C$, com $A, C \in \mathbb{R}$.
2. $ln(AB) = ln\,A + ln\,B$
3. $ln\left(\frac{A}{B}\right) = ln\,A - ln\,B$

Trigonometria no Triângulo Retângulo



Dado o triângulo ABC, retângulo em A, com catetos $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, hipotenusa $\overline{BC} = a$ e ângulo $A\hat{B}C = \theta$, temos:

- $\text{sen}\,\theta = \frac{b}{a} = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$
- $\text{cosec}\,\theta = \frac{a}{b} = \frac{hipotenusa}{cateto\ oposto}$
- $\cos\theta = \frac{c}{a} = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$
- $\sec\theta = \frac{a}{c} = \frac{hipotenusa}{cateto\ adjacente}$
- $\text{tg}\,\theta = \frac{b}{c} = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$
- $\text{cotg}\,\theta = \frac{c}{b} = \frac{cateto\ adjacente}{cateto\ oposto}$

- $a^2 = b^2 + c^2$ (***Teorema de Pitágoras***: o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos)

Pelo teorema de Pitágoras, concluímos:

$$\begin{cases} a = \sqrt{b^2 + c^2} \Rightarrow & \text{é a medida da hipotenusa, que é igual à raiz quadrada da soma dos quadrados dos catetos} \\ b = \sqrt{a^2 - c^2} \Rightarrow & \text{é a medida do cateto } b\text{, que é igual à raiz quadrada da diferença entre o quadrado da hipotenusa e o quadrado do cateto } c \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow & \text{é a medida do cateto } c\text{, que é igual à raiz quadrada da diferença entre o quadrado da hipotenusa e o quadrado do cateto } b \end{cases}$$

Relações Trigonométricas

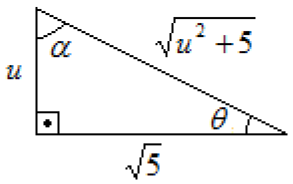
- $\text{sen}^2\theta + cos^2\,\theta = 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 - \text{sen}^2\theta = cos^2\,\theta \\ \text{sen}\;\theta = \sqrt{1 - cos^2\,\theta} \\ 1 - cos^2\,\theta = \text{sen}^2\theta \\ cos\;\theta = \sqrt{1 - \text{sen}^2\theta} \end{cases}$

- $\text{tg}^2\theta + 1 = sec^2\,\theta \Rightarrow \begin{cases} \text{sec}^2\theta - 1 = \text{tg}^2\theta \\ \text{tg}\;\theta = \sqrt{sec^2\,\theta - 1} \\ sec\;\theta = \sqrt{\text{tg}^2\theta + 1} \end{cases}$

- $\text{cotg}^2\theta + 1 = cossec^2\,\theta \Rightarrow \begin{cases} \text{cossec}^2\theta - 1 = \text{cotg}^2\theta \\ \text{cotg}\;\theta = \sqrt{cossec^2\,\theta - 1} \\ cossec\;\theta = \sqrt{\text{cotg}^2\theta + 1} \end{cases}$

- $\text{sec}\;\theta = \frac{1}{\text{cos}\theta}$
- $\text{tg}\;\theta = \frac{\text{sen}\;\theta}{\text{cos}\theta}$
- $\text{cossec}\;\theta = \frac{1}{\text{sen}\theta}$
- $\text{cotg}\;\theta = \frac{\text{cos}\theta}{\text{sen}\theta}$

Exemplo 1: $\sqrt{u^2+5}$ é a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos medindo u e $\sqrt{5}$

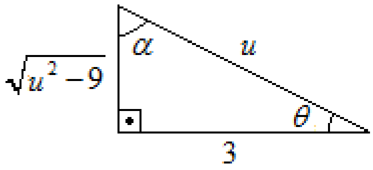


Logo $\begin{cases} \text{sen}\;\theta = \dfrac{u}{\sqrt{u^2+5}} \\ \cos\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{u^2+5}} \\ \text{tg}\;\theta = \dfrac{u}{\sqrt{5}} \end{cases}$ e $\begin{cases} \text{sen}\;\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{u^2+5}} \\ \cos\alpha = \dfrac{u}{\sqrt{u^2+5}} \\ \text{tg}\;\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{u} \end{cases}$

A técnica de substituição de variáveis por variáveis trigonométricas utilizada para calcular integrais que recaem no caso em que um dos catetos é uma constante arbitrária, o outro cateto está em função de uma variável independente $[u = f(x)]$ e por consequência, a hipotenusa é a raiz quadrada da soma dos quadrados dos catetos, trabalha preferencialmente com o ângulo θ, formado pela hipotenusa e o cateto cuja medida é uma constante arbitrária. Faz-se também as seguintes substituições trigonométricas, tomando $u = f(x)$.

$$\begin{cases} \text{tg}\,\theta = \dfrac{u}{a} \Rightarrow \begin{cases} u = a\,\text{tg}\,\theta \\ du = a\sec^2\theta\,d\theta \end{cases} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+u^2}} \Rightarrow \sqrt{a^2 + \underbrace{u^2}_{(a\,\text{tg}\,\theta)^2}} = a\cdot\dfrac{1}{\underbrace{\cos\theta}_{\sec\theta}} \Rightarrow \sqrt{a^2+a^2\,\text{tg}^2\theta} = a\sec\theta \Rightarrow \sqrt{a^2\left(1+\text{tg}^2\theta\right)} = a\sec\theta \end{cases}$$

Exemplo 2: $\sqrt{u^2-9}$ é a medida de um cateto de um triângulo retângulo de hipotenusa medindo u e o segundo cateto medindo 3.

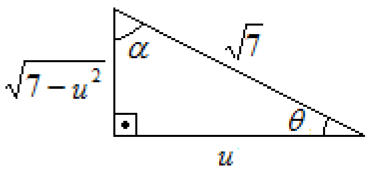


Logo, $\begin{cases} \text{sen}\,\theta = \dfrac{\sqrt{u^2-9}}{u} \\ \cos\theta = \dfrac{3}{u} \\ \text{tg}\,\theta = \dfrac{\sqrt{u^2-9}}{3} \end{cases}$ e $\begin{cases} \text{sen}\,\alpha = \dfrac{3}{u} \\ \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{u^2-9}}{u} \\ \text{tg}\,\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{u^2-9}} \end{cases}$

A técnica de substituição de variáveis por variáveis trigonométricas utilizada para calcular integrais que recaem no caso em que a hipotenusa está em função de uma variável independente $[u = f(x)]$, um dos catetos é uma constante arbitrária e por consequência do teorema de Pitágoras o outro cateto é a raiz quadrada da diferença entre o quadrado da hipotenusa e o quadrado do primeiro cateto; trabalha preferencialmente com o ângulo θ, formado pela hipotenusa e o cateto cuja medida é uma constante arbitrária. Faz-se também as seguintes substituições trigonométricas, com $u = f(x)$.

$$\begin{cases} \sec\theta = \dfrac{u}{a} \Rightarrow \begin{cases} u = a\sec\theta \\ du = a\sec\theta\,\text{tg}\theta\, d\theta \end{cases} \\ \text{tg}\theta = \dfrac{\sqrt{u^2-a^2}}{a} \Rightarrow \sqrt{\underbrace{u^2}_{(a\sec\theta)^2} - a^2} = a\,\text{tg}\,\theta \Rightarrow \sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2} = a\,\text{tg}\,\theta \Rightarrow \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)} = a\,\text{tg}\,\theta \end{cases}$$

Exemplo 3: $\sqrt{7-u^2}$ é a medida de um cateto de um triângulo retângulo de hipotenusa medindo $\sqrt{7}$ e o segundo cateto medindo u.

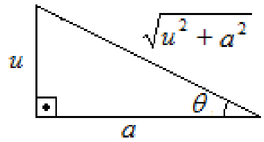


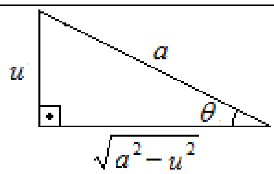
Logo, $\begin{cases} \text{sen}\,\theta = \dfrac{\sqrt{7-u^2}}{\sqrt{7}} \\ \cos\theta = \dfrac{u}{\sqrt{7}} \\ \text{tg}\,\theta = \dfrac{\sqrt{7-u^2}}{u} \end{cases}$ e $\begin{cases} \text{sen}\,\alpha = \dfrac{u}{\sqrt{7}} \\ \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{7-u^2}}{\sqrt{7}} \\ \text{tg}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{7-u^2}}{u} \end{cases}$

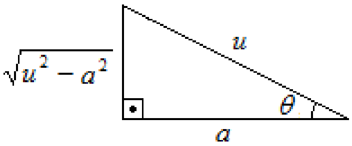
A técnica de substituição de variáveis por variáveis trigonométricas utilizada para calcular integrais que recaem no caso em que a hipotenusa é uma constante arbitrária, um dos catetosestá em função de uma variável independente $[u = f(x)]$ e por consequência do teorema de Pitágoras o outro cateto é a raiz quadrada da diferença entre o quadrado da hipotenusa e o quadrado do primeiro cateto; trabalha preferencialmente com o ângulo θ, formado pela hipotenusa e o primeiro cateto. Faz-se também as seguintes substituições trigonométricas, com $u = f(x)$.

$$\begin{cases} \text{sen}\,\theta = \dfrac{u}{a} \Rightarrow \begin{cases} u = a\,\text{sen}\,\theta \\ du = a\cos\theta\, d\theta \end{cases} \\ \cos\theta = \dfrac{\sqrt{a^2-u^2}}{a} \Rightarrow \sqrt{a^2 - \underbrace{u^2}_{(a\,\text{sen}\,\theta)^2}} = a\cos\theta \Rightarrow \sqrt{a^2 - a^2\text{sen}^2\theta} = a\cos\theta \Rightarrow \sqrt{a^2(1-\text{sen}^2\theta)} = a\cos\theta \end{cases}$$

Podemos agora, sintetizar as relações e procedimentos que serão utilizados pela técnica de Integração por Substituição Trigonométrica, nos três quadros a seguir.

MODO DE SUBSTITUIÇÃO I	
Fator Integrante	$\sqrt{u^2+a^2}$
Triângulo	
Substituição	$\begin{cases} \operatorname{tg}\theta = \dfrac{u}{a} \Rightarrow \begin{cases} u = a\operatorname{tg}\theta \\ du = a\sec^2\theta\, d\theta \end{cases} \\ \sqrt{u^2+a^2} = \sqrt{a^2+a^2\operatorname{tg}^2\theta} = a\sec\theta \Rightarrow \sqrt{a^2(1+\operatorname{tg}^2\theta)} = a\sec\theta \end{cases}$

MODO DE SUBSTITUIÇÃO II	
Fator Integrante	$\sqrt{a^2-u^2}$
Triângulo	
Substituição	$\begin{cases} \operatorname{sen}\theta = \dfrac{u}{a} \Rightarrow \begin{cases} u = a\operatorname{sen}\theta \\ du = a\cos\theta\, d\theta \end{cases} \\ \sqrt{a^2-u^2} = \sqrt{a^2-a^2\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2(1-\operatorname{sen}^2\theta)} = a\cos\theta \end{cases}$

MODO DE SUBSTITUIÇÃO III	
Fator Integrante	$\sqrt{u^2-a^2}$
Triângulo	
Substituição	$\begin{cases} \sec\theta = \dfrac{u}{a} \Rightarrow \begin{cases} u = a\sec\theta \\ du = a\sec\theta\operatorname{tg}\theta\, d\theta \end{cases} \\ \sqrt{u^2-a^2} = \sqrt{a^2\sec^2\theta-a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta-1)} = a\operatorname{tg}\theta \end{cases}$

Fim dos Estudos Preliminares

Vamos agora, calcular as integrais do tipo $\int v\sqrt{a^2 \pm u^2}\,dx$, $\int v\sqrt{u^2 \pm a^2}\,dx$, $\int \frac{v\,dx}{\sqrt{a^2 \pm u^2}}$ e $\int \frac{v\,dx}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}$, com $v = f_1(x)$, $u = f_2(x)$, que não recaem nas imediatas $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$ ou $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arc\,sen}\frac{u}{a} + C$, pela técnica de substituição de variáveis por variáveis trigonométricas.

Exemplo 4:

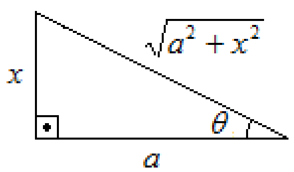
$\int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx$

Esta integral é do tipo $\int v\sqrt{a^2 \pm u^2}\,dx$, com $v = f_1(x) = 1$ e $u = f_2(x) = x$.

> Note que ela não recai em nenhuma das imediatas $\int u^n du$, $\int \frac{du}{u}$ ou $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$
>
> Como $\int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx = \int (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$, podemos notar que:
>
> - Fazendo $u = a^2 + x^2$, temos $du = d(a^2 + x^2) = 2x\,dx$
>
>   Assim, $\int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx$ não cai no caso imediato $\int u^n du$ por não possuir o termo *x*, já que $du = 2x\,dx$
> - Não cai nos casos $\int \frac{du}{u}$ e $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$ pois não é uma integral quociente.

Vamos então, utilizar a técnica de substituição de variáveis por variáveis trigonométricas.

> Já que $\sqrt{a^2 + x^2}$ é a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos medindo *a* e *x*, obtemos as seguintes relações trigonométricas, à partir do ângulo θ, oposto ao cateto em função de *x* (veja o quadro *MODO DE SUBSTITUIÇÃO I*, nos estudos preliminares, pág. 4).



$$\begin{cases} \operatorname{tg}\theta = \frac{x}{a} \Rightarrow \begin{cases} x = a\operatorname{tg}\theta \\ dx = a\sec^2\theta\,d\theta \end{cases} \\ \sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2\operatorname{tg}^2\theta} = \sqrt{a^2(1 + \operatorname{tg}^2\theta)} = a\sec\theta \end{cases}$$

Assim, $\int \underbrace{\sqrt{a^2 + x^2}}_{a\sec\theta}\,\underbrace{dx}_{a\sec^2\theta\,d\theta} = \int a\sec\theta\,a\sec^2\theta\,d\theta = a^2\int \sec^3\theta\,d\theta$

No tópico de Integração por Partes, já calculamos o valor de $\int \sec^3 x\,dx$, cujo resultado aplicado à variável independente θ é $\frac{1}{2}\sec\theta\operatorname{tg}\theta + \frac{1}{2}\ln(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta) + C_1$

$$\int \sec^3\theta\, d\theta$$

Fazendo $\begin{cases} u = \sec\theta \Rightarrow du = d(\sec\theta) = \sec\theta\,\mathrm{tg}\theta\, d\theta \\ dv = \sec^2\theta\, d\theta \Rightarrow v = \int \sec^2\theta\, d\theta = \mathrm{tg}\,\theta \end{cases}$ temos

$$\int v du = uv - \int u dv \Rightarrow \int \sec^3\theta = \sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta - \int \mathrm{tg}\theta\cdot\sec\theta\,\mathrm{tg}\theta\, d\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \sec^3\theta = \sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta - \int \sec\theta\,\underbrace{\mathrm{tg}^2\theta}_{\sec^2-1}\, d\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \sec^3\theta = \sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta - \int \sec\theta(\sec^2\theta - 1)d\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \sec^3\theta = \sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta - \int [\sec^3\theta - \sec\theta]d\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \sec^3\theta = \sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta - \int \sec^3\theta\, d\theta + \int \underbrace{\sec\theta}_{\ln(\sec\theta+tg\theta+C_1)}\, d\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \sec^3\theta + \int \sec^3\theta = \sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta + \ln(\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta) + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\int \sec^3\theta = \sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta + \ln(\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta) + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \sec^3\theta = \frac{\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta + \ln(\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta) + C_1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \sec^3\theta = \frac{1}{2}\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta + \frac{1}{2}\ln(\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta) + C$$

Com esse resultado, podemos escrever

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\, dx = a^2\int \sec^3\theta\, d\theta = a^2\left[\frac{1}{2}\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta + \frac{1}{2}\ln(\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta) + C\right]$$

Para finalizar, devemos escrever o resultado acima em função de a e x.

Das relações obtidas no triângulo retângulo esboçado no início do exercício, temos:

$$\begin{cases} \sqrt{a^2+x^2} = a\sec\theta \Rightarrow \sec\theta = \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} \\ tg\theta = \dfrac{x}{a} \end{cases}$$

Logo, $\displaystyle\int \sqrt{a^2+x^2}\, dx = \frac{a^2}{2}\underbrace{\sec\theta}_{\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}}\,\underbrace{\mathrm{tg}\,\theta}_{\frac{x}{a}} + \frac{a^2}{2}\ln\left(\underbrace{\sec\theta}_{\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}} + \underbrace{\mathrm{tg}\,\theta}_{\frac{x}{a}}\right) + C_1 =$

$$= \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}\cdot\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right) + C_1 =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right) + C_1$$

aplicando a propriedade logarítmica: $\ln\left(\dfrac{A}{C}\right) = \ln A - \ln B$, vem.

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\, dx = \frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right) + C_1 = \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) \underbrace{- \overbrace{\frac{a^2}{2}\ln a}^{C_2} + C_1}_{C} =$$

$$= \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C$$

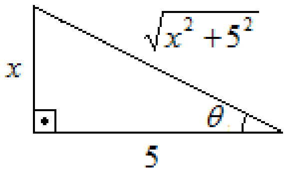
Exemplo 5:

$$\int \sqrt{x^4+25x^2}\ dx$$

Vamos inicialmente preparar a integral.

$$\int \sqrt{x^4+25x^2}\ dx = \int \sqrt{x^2\left(x^2+25\right)}\ dx = \int x\sqrt{x^2+25}\ dx$$

> Note que ela não recai em nenhuma das imediatas $\int u^n du$, $\int \frac{du}{u}$ ou $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$, logo utilizaremos a técnica de substituição de variáveis por variáveis trigonométricas.
>
> Já que $\sqrt{x^2+5^2}$ é a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos medindo *5* e *x*, obtemos as seguintes relações trigonométricas, à partir do ângulo θ, oposto ao cateto em função de *x* (veja o quadro *MODO DE SUBSTITUIÇÃO I*, nos estudos preliminares, pág. 4).



$$\begin{cases} \text{tg}\,\theta = \dfrac{x}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = 5\,\text{tg}\,\theta \\ dx = 5\sec^2\theta\, d\theta \end{cases} \\ \sqrt{5^2+x^2} = \sqrt{5^2+5^2\ \text{tg}^2\theta} = \sqrt{5^2\left(1+\text{tg}^2\theta\right)} = 5\sec\theta \end{cases}$$

Assim,

$$\int \underbrace{x}_{(5tg\theta)} \underbrace{\sqrt{x^2+5^2}}_{5\sec\theta} \underbrace{dx}_{5\sec^2\theta\, d\theta} = \int 5\text{tg}\,\theta\ 5\sec\theta\ 5\sec^2\theta\ d\theta = 125\int \sec^3\theta\ \text{tg}\theta\ d\theta =$$

$$= 125\int \sec^2\theta\ \underbrace{\sec\theta\ \text{tg}\,\theta\ d\theta}_{d(\sec\theta)} = 125\int \sec^2\theta\ d\left(\sec\theta\right) = 125\frac{\sec^3\theta}{3} + C$$

Escrevendo o resultado acima em função de *a=5* e *x*, pelas relações obtidas no triângulo retângulo esboçado no início do exercício, temos:

$$\left\{ \sqrt{x^2+25} = 5\sec\theta \Rightarrow \sec\theta = \frac{\sqrt{x^2+25}}{5} \Rightarrow \sec^3\theta = \left(\frac{\sqrt{x^2+25}}{5}\right)^3 = \frac{\left(x^2+25\right)^{\frac{3}{2}}}{125}\right. .$$

Logo, $\displaystyle\int \sqrt{x^4+25x^2}dx = \frac{125}{3}\underbrace{\sec^3\theta}_{\frac{\left(x^2+25\right)^{\frac{3}{2}}}{125}} + C = \frac{125}{3}\cdot\frac{\left(x^2+25\right)^{\frac{3}{2}}}{125} + C = \frac{\left(x^2+25\right)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$

Exemplo 6:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

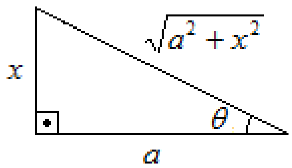
Esta integral é do tipo $\displaystyle\int \frac{v\,dx}{\sqrt{a^2 \pm u^2}}$, com $v = f_1(x) = 1$ e $u = f_2(x) = x$.

> Note que ela não recai em nenhuma das imediatas $\int u^n du$, $\int \frac{du}{u}$ ou $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$.
>
> Como $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int \left(a^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} dx$, podemos notar que:
>
> - Fazendo $u = a^2+x^2$, temos $du = d\left(a^2+x^2\right) = 2x\,dx$
>
>   Assim, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ não cai no caso imediato $\int u^n du$ por não possuir o termo *x*, já que $du = 2x\,dx$.

- Não cai no caso $\int \frac{du}{u}$ pois se $u = \sqrt{a^2 + x^2}$, $du = d\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right) = \frac{2x\,dx}{2\sqrt{a^2 + x^2}} =$ $= \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$, e não conseguimos ajustar o numerador dx para $\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.
- Não cai no caso $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$.

Vamos então, utilizar a técnica de substituição de variáveis por variáveis trigonométricas.

Já que $\sqrt{a^2 + x^2}$ é a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos medindo a e x, obtemos as seguintes relações trigonométricas, à partir do ângulo θ, oposto ao cateto em função de x (veja o quadro *MODO DE SUBSTITUIÇÃO I*, nos estudos preliminares, pág. 4).



$$\begin{cases} \operatorname{tg}\theta = \dfrac{x}{a} \Rightarrow \begin{cases} x = a\operatorname{tg}\theta \\ dx = a\sec^2\theta\,d\theta \end{cases} \\ \sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2\operatorname{tg}^2\theta} = \sqrt{a^2\left(1 + \operatorname{tg}^2\theta\right)} = a\sec\theta \end{cases}$$

Assim, $\displaystyle\int \frac{\overbrace{dx}^{a\sec^2\theta\,d\theta}}{\underbrace{\sqrt{a^2 + x^2}}_{a\sec\theta}} = \int \frac{a\sec^2\theta\,d\theta}{a\sec\theta} = \int \sec\theta\,d\theta = \ln\left(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta\right) + C$

Escrevendo o resultado acima em função de a e x a partir das relações obtidas no triângulo retângulo esboçado no início do exercício, temos:

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + x^2} = a\sec\theta \Rightarrow \sec\theta = \dfrac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a} \\ tg\theta = \dfrac{x}{a} \end{cases}$$

Logo, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln\left(\underbrace{\sec\theta}_{\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}} + \underbrace{\operatorname{tg}\theta}_{\frac{x}{a}}\right) + C_1 = \ln\left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right) + C_1 = \ln\left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2} + x}{a}\right) + C_1$

Aplicando a propriedade logarítmica: $\ln\left(\frac{A}{C}\right) = \ln A - \ln B$, vem.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln\left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2} + x}{a}\right) + C_1 = \ln\left(\sqrt{a^2 + x^2} + x\right) \underbrace{- \overbrace{\ln a}^{C_2} + C_1}_{C} =$$

$$= \ln\left(\sqrt{a^2 + x^2} + x\right) + C$$

Exemplo 7:

$$\int \frac{x - 4}{\left(7 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

Vamos inicialmente preparar a integral.

$$\int \frac{x-4}{\left(7+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \underbrace{\int \frac{x\,dx}{\left(7+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}}_{(i)} \; \underbrace{-4\int \frac{dx}{\left(7+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}}_{(ii)}$$

e resolver as integrais (i) e (ii)

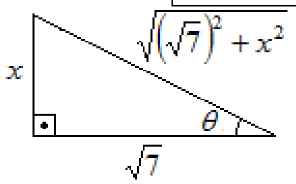
$$(i)\ \int \frac{x\,dx}{\left(7+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \int \left(7+x^2\right)^{-\frac{3}{2}} x\,dx = \frac{1}{2}\int \left(7+x^2\right)^{-\frac{3}{2}} \underbrace{2x\,dx}_{d\left(7+x^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(7+x^2\right)^{-\frac{3}{2}} d\left(7+x^2\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\left(7+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C_1 = -\frac{1}{\sqrt{7+x^2}} + C_1$$

$$(ii)\ -4\int \frac{dx}{\left(7+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -4\int \frac{dx}{\left(\sqrt{7+x^2}\right)^3}$$

Esta integral não recai em nenhuma das imediatas $\int u^n du$, $\int \frac{du}{u}$ ou $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$ e portanto, vamos utilizar a técnica de substituição de variáveis por variáveis trigonométricas.

Já que $\sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2 + x^2}$ é a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos medindo $\sqrt{7}$ e x, obtemos as seguintes relações trigonométricas, à partir do ângulo θ, oposto ao cateto em função de x (veja o quadro *MODO DE SUBSTITUIÇÃO I*, nos estudos preliminares, pág. 4).



$$\begin{cases} \operatorname{tg}\theta = \dfrac{x}{\sqrt{7}} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{7}\,\operatorname{tg}\theta \\ dx = \sqrt{7}\sec^2\theta\,d\theta \end{cases} \\ \sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2 + x^2} = \sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2 \operatorname{tg}^2\theta} = \sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2\left(1+\operatorname{tg}^2\theta\right)} = \sqrt{7}\sec\theta \end{cases}$$

Assim, $$-4\int \frac{\overbrace{dx}^{\sqrt{7}\sec^2\theta\,d\theta}}{\underbrace{\sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2 + x^2}}_{\sqrt{7}\sec\theta}} = -4\int \frac{\sqrt{7}\sec^2\theta\,d\theta}{\sqrt{7}\sec\theta} = -4\int \sec\theta\,d\theta = -4\ln\left(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta\right) + C_2$$

Escrevendo o resultado acima em função de $\sqrt{7}$ e x a partir das relações obtidas no triângulo retângulo esboçado no início do exercício, temos:

$$\begin{cases} \sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2 + x^2} = \sqrt{7}\sec\theta \Rightarrow \sec\theta = \dfrac{\sqrt{7+x^2}}{\sqrt{7}} \\ tg\theta = \dfrac{x}{\sqrt{7}} \end{cases}.$$

Logo, $$-4\int \frac{dx}{\sqrt{7+x^2}} = -4\ln\left(\underbrace{\sec\theta}_{\frac{\sqrt{7+x^2}}{\sqrt{7}}} + \underbrace{\operatorname{tg}\theta}_{\frac{x}{\sqrt{7}}}\right) + C_2 = -4\ln\left(\frac{\sqrt{7+x^2}+x}{\sqrt{7}}\right) + C_2$$

Aplicando a propriedade logarítmica: $\ln\left(\frac{A}{C}\right) = \ln A - \ln B$, vem.

$$-4\int\frac{dx}{\sqrt{7+x^2}}=-4\ln\left(\sqrt{7+x^2}+x\right)-\underbrace{\overbrace{4\ln\sqrt{7}}^{C_3}+C_2}_{C_4}=-4\ln\left(\sqrt{7+x^2}+x\right)+C_2$$

Logo, $\displaystyle\int\frac{x-4}{\left(7+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx=(i)+(ii)=-\frac{1}{\sqrt{7+x^2}}-4\ln\left(\sqrt{7+x^2}+x\right)+C$

Exemplo 8:

$\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

Esta integral é do tipo $\displaystyle\int\frac{v\,dx}{\sqrt{a^2\pm u^2}}$, com $v=f_1(x)=1$ e $u=f_2(x)=x$.

Note que ela não recai em nenhuma das imediatas $\int u^n du$, $\displaystyle\int\frac{du}{u}$ ou $\displaystyle\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$.

Como $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\int\left(a^2-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx$, podemos notar que

- Fazendo $u=a^2+x^2$, temos $du=d\left(a^2-x^2\right)=-2x\,dx$

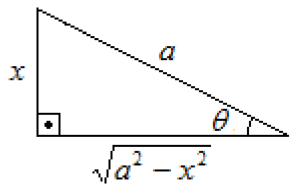
  Assim, $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ não cai no caso imediato $\int u^n du$ por não possuir o termo *x*, já que $du=-2x\,dx$

- Não cai no caso $\displaystyle\int\frac{du}{u}$ pois se $u=\sqrt{a^2-x^2}$, $du=d\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)=$ $\displaystyle=\frac{-2x\,dx}{2\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, e não conseguimos ajustar o numerador dx para $\displaystyle-\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

- Não cai no caso $\displaystyle\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$.

Vamos então, utilizar a técnica de substituição de variáveis por variáveis trigonométricas.

Já que $\sqrt{a^2-x^2}$ é a medida de um dos catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa medindo *a* e o segundo cateto medindo *x*, obtemos as seguintes relações trigonométricas, à partir do ângulo θ, oposto ao cateto em função de *x* (veja o quadro *MODO DE SUBSTITUIÇÃO II*, nos estudos preliminares, pág. 4).



$$\begin{cases}\text{sen}\,\theta=\dfrac{x}{a}\Rightarrow\begin{cases}x=a\,\text{sen}\,\theta\\ dx=a\cos\theta\,d\theta\end{cases}\\ \sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\text{sen}^2\theta}=\sqrt{a^2\left(1-\text{sen}^2\theta\right)}=a\cos\theta\end{cases}$$

Assim, $\displaystyle\int\underbrace{\sqrt{a^2-x^2}}_{a\cos\theta}\,\underbrace{dx}_{a\cos\theta\,d\theta}=\int a\cos\theta\,a\cos\theta\,d\theta=a^2\int\underbrace{\cos^2\theta}_{\frac{1}{2}+\frac{\cos(2\theta)}{2}}\,d\theta=$

$$=a^2\int\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos(2\theta)}{2}\right)d\theta=\underbrace{a^2\frac{1}{2}\int d\theta}_{(i)}+\underbrace{a^2\frac{1}{2}\int\cos(2\theta)\,d\theta}_{(ii)}\quad\text{(I)}$$

Resolvendo (i) e (ii), encontramos

$$(i)\ \frac{a^2}{2}\int d\theta=\frac{a^2}{2}\theta+C_1$$

$$(ii)\ \frac{a^2}{2}\int\cos(2\theta)d\theta=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\cos(2\theta)\,2\,d\theta=\frac{a^2}{4}\int\cos(2\theta)\,d(2\theta)=\frac{a^2}{4}\operatorname{sen}(2\theta)+C_2$$

Substituindo (i) e (ii) em (I), temos

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\theta+\frac{a^2}{4}\operatorname{sen}(2\theta)+C$$

Escrevendo o resultado acima em função de *a* e *x*, através das relações obtidas no triângulo retângulo esboçado no início do exercício, temos:

$$\begin{cases}\operatorname{sen}\theta=\dfrac{x}{a}\Rightarrow\theta=\operatorname{arc\,sen}\dfrac{x}{a}\\[2ex]\cos\theta=\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\end{cases}\Rightarrow\ \operatorname{sen}(2\theta)=2\operatorname{sen}\theta\cos\theta=2\frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}=\frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}$$

Logo,

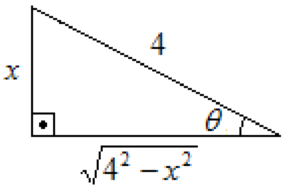
$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\underbrace{\theta}_{\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}}+\frac{a^2}{4}\underbrace{\operatorname{sen}(2\theta)}_{\frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}}+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}+\frac{a^2}{4}\frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}+C=\frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$$

Exemplo 9:

$$\int x^2\sqrt{16-x^2}\,dx$$

> Note que esta integral não recai em nenhuma das imediatas $\int u^n du$, $\int\frac{du}{u}$ ou $\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$, portanto, vamos utilizar a técnica de substituição de variáveis por variáveis trigonométricas. Já que $\sqrt{4^2-x^2}$ é a medida de um dos catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa medindo *a* e o segundo cateto medindo *x*, obtemos as seguintes relações trigonométricas, à partir do ângulo θ, oposto ao cateto em função de *x* (veja o quadro *MODO DE SUBSTITUIÇÃO II*, nos estudos preliminares, pág. 4).



$$\begin{cases}\operatorname{sen}\theta=\dfrac{x}{4}\Rightarrow\begin{cases}x=4\operatorname{sen}\theta\\dx=4\cos\theta\,d\theta\end{cases}\\[2ex]\sqrt{4^2-x^2}=\sqrt{4^2-4^2\operatorname{sen}^2\theta}=\sqrt{4^2(1-\operatorname{sen}^2\theta)}=4\cos\theta\end{cases}$$

Assim, $\displaystyle\int\underbrace{x^2}_{(4sen\theta)^2}\underbrace{\sqrt{4^2-x^2}}_{4\cos\theta}\underbrace{dx}_{4\cos\theta\,d\theta}=\int16\operatorname{sen}^2\theta\ 4\cos\theta\ 4\cos\theta\,d\theta=256\int\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\,d\theta$

Na página 26, vimos que $\displaystyle\int\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{8}\theta-\frac{1}{32}\operatorname{sen}(4\theta)+C$.

Então, $\displaystyle 256\int\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\,d\theta=256\left[\frac{1}{8}\theta-\frac{1}{32}\operatorname{sen}(4\theta)+C\right]=32\,\theta-8\operatorname{sen}(4\theta)+C_1$

Escrevendo o resultado acima em função de *x*, através das relações obtidas no triângulo retângulo esboçado no início do exercício, temos:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\theta = \dfrac{x}{4} \\ \cos\theta = \dfrac{\sqrt{16-x^2}}{4} \\ \operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 2\left(\dfrac{x}{4}\right)\left(\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{4}\right) = \dfrac{x\sqrt{16-x^2}}{8} \\ sen(4\theta) = \operatorname{sen}[2(2\theta)] = 2\operatorname{sen}(2\theta)\cos(2\theta) = 2\left(\dfrac{x\sqrt{16-x^2}}{8}\right)\left(\dfrac{8-x^2}{8}\right) = \dfrac{(8x-x^3)\sqrt{16-x^2}}{32} \\ \cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \left(\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{4}\right)^2 - \left(\dfrac{x}{4}\right)^2 = \dfrac{16-x^2}{16} - \dfrac{x^2}{16} = \dfrac{16-2x^2}{16} = 2\dfrac{8-x^2}{16} = \dfrac{8-x^2}{8} \end{cases}$$

$$\int x^2\sqrt{4^2-x^2}\,dx = 32\operatorname{arcsen}\frac{x}{4} - 8\left[\frac{(8x-x^3)\sqrt{16-x^2}}{32}\right] + C_1 =$$

$$= 32\operatorname{arcsen}\frac{x}{4} - \frac{(8x-x^3)\sqrt{16-x^2}}{4} + C_1$$

Exemplo 10:

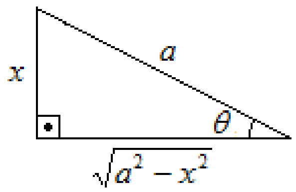
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

Esta integral é do tipo $\int \frac{v\,dx}{\sqrt{a^2 \pm u^2}}$, com $v = f_1(x) = 1$ e $u = f_2(x) = x$.

Essa integral cai no caso imediato $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{arc\,sen}\frac{u}{a} + C$, mas se $f(x)$ não for constante, a integral não recai neste caso, podendo também não recair nos casos imediatos $\int u^n du$ e $\int \frac{du}{u}$.

Mesmo recaindo em um dos casos imediatos, vamos resolvê-la pela técnica de substituição de variáveis por variáveis trigonométricas.

> Já que $\sqrt{a^2-x^2}$ é a medida de um dos catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa medindo *a* e o segundo cateto medindo *x*, obtemos as seguintes relações trigonométricas, à partir do ângulo θ, oposto ao cateto em função de *x* (veja o quadro *MODO DE SUBSTITUIÇÃO II*, nos estudos preliminares, pág. 4).



$$\begin{cases} \operatorname{sen}\theta = \dfrac{x}{a} \Rightarrow \begin{cases} x = a\operatorname{sen}\theta \\ dx = a\cos\theta\,d\theta \end{cases} \\ \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2(1-\operatorname{sen}^2\theta)} = a\cos\theta \end{cases}$$

Assim, $\displaystyle\int \frac{\overbrace{dx}^{a\cos\theta\,d\theta}}{\underbrace{\sqrt{a^2-x^2}}_{a\cos\theta}} = \int \frac{a\cos\theta\,d\theta}{a\cos\theta} = \int d\theta = \theta + C$

Escrevendo o resultado acima em função de *a* e *x*, através das relações obtidas no triângulo retângulo esboçado no início do exercício, temos:

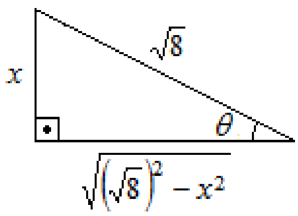
$$\left\{ \text{sen}\,\theta = \frac{x}{a} \Rightarrow \theta = \text{arc sen}\,\frac{x}{a} \right..$$

Logo, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \theta + C = \text{arc sen}\,\frac{x}{a} + C$

Exemplo 11:

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{8 - x^2}}$$

> Note que esta integral não recai em nenhuma das imediatas $\int u^n du$, $\int \frac{du}{u}$ ou $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$, portanto, vamos utilizar a técnica de substituição de variáveis por variáveis trigonométricas. Já que $\sqrt{\left(\sqrt{8}\right)^2 - x^2}$ é a medida de um dos catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa medindo $\sqrt{8}$ e o segundo cateto medindo *x*, obtemos as seguintes relações trigonométricas, à partir do ângulo θ, oposto ao cateto em função de *x* (veja o quadro *MODO DE SUBSTITUIÇÃO II*, nos estudos preliminares, pág. 4).



$$\begin{cases} \text{sen}\,\theta = \dfrac{x}{\sqrt{8}} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{8}\,\text{sen}\,\theta \\ dx = \sqrt{8}\cos\theta\,d\theta \end{cases} \\ \sqrt{\left(\sqrt{8}\right)^2 - x^2} = \sqrt{\left(\sqrt{8}\right)^2 - \left(\sqrt{8}\right)^2\text{sen}^2\theta} = \sqrt{\left(\sqrt{8}\right)^2\left(1 - \text{sen}^2\theta\right)} = \sqrt{8}\cos\theta \end{cases}$$

Assim, $\displaystyle\int \frac{\overbrace{x^3}^{\left(\sqrt{8}sen\theta\right)^3}\ \overbrace{dx}^{\sqrt{8}\cos\theta\,d\theta}}{\underbrace{\sqrt{8 - x^2}}_{\sqrt{8}\cos\theta}} = \int \frac{\sqrt{8^3}\text{sen}^3\theta\ \sqrt{8}\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{8}\cos\theta} = 8\sqrt{8}\int \text{sen}^3\theta\,d\theta =$

$$= 8\sqrt{8}\int \underbrace{\text{sen}^2\theta}_{\cos^2\theta - 1}\ \text{sen}\theta\,d\theta = = 8\sqrt{8}\int\left(\cos^2\theta - 1\right)\text{sen}\theta\,d\theta =$$

$$= \underbrace{8\sqrt{8}\int \cos^2\theta\,\text{sen}\theta\,d\theta}_{(i)}\ \underbrace{-8\sqrt{8}\int \text{sen}\theta\,d\theta}_{(ii)} \quad (I)$$

Resolvendo (i) e (ii), encontramos

$$(i)\ \ 8\sqrt{8}\int \cos^2\theta\,\text{sen}\theta\,d\theta = -8\sqrt{8}\int \cos^2\theta\left(\underbrace{-\text{sen}\theta\,d\theta}_{d(\cos\theta)}\right) = -8\sqrt{8}\int \cos^2\theta\,d\left(\cos\theta\right) =$$

$$= -8\sqrt{8}\,\frac{\cos^3\theta}{3} + C_1$$

$$(ii)\ \ -8\sqrt{8}\int \text{sen}\theta\,d\theta = -8\sqrt{8}\left(-\cos\theta\right) + C = 8\sqrt{8}\cos\theta + C_2$$

Substituindo (i) e (ii) em (I), temos

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{8 - x^2}} = -\frac{8\sqrt{8}}{3}\cos^3\theta + 8\sqrt{8}\cos\theta + C$$

Escrevendo o resultado acima em função de $\sqrt{8}$ e x, através das relações obtidas no triângulo retângulo esboçado no início do exercício, temos: $\left\{\cos\theta = \dfrac{\sqrt{8-x^2}}{\sqrt{8}}\right.$.

Logo,

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{8-x^2}} = -\frac{8\sqrt{8}}{3}\underbrace{\cos^3\theta}_{\left(\frac{\sqrt{8-x^2}}{\sqrt{8}}\right)^3} + 8\sqrt{8}\underbrace{\cos\theta}_{\frac{\sqrt{8-x^2}}{\sqrt{8}}} + C = -\frac{8\sqrt{8}}{3}\frac{\left(\sqrt{8-x^2}\right)^3}{8\sqrt{8}} + 8\sqrt{8}\frac{\sqrt{8-x^2}}{\sqrt{8}} + C =$$

$$= -\frac{\left(8-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3} + 8\sqrt{8-x^2} + C$$

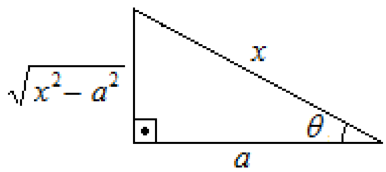
Exemplo 12:

$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$

Esta integral é do tipo $\int v\,\sqrt{u^2 \pm a^2}\;dx$, com $v = f_1(x) = 1$ e $u = f_2(x) = x$.

Note que ela não recai em nenhuma das imediatas $\int u^n du$, $\int \frac{du}{u}$ ou $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$ Como $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \int \left(x^2-a^2\right)^{\frac{1}{2}} dx$, podemos notar que   ▪ Fazendo $u = x^2 - a^2$, temos $du = d\left(x^2-a^2\right) = 2x\,dx$.   Assim, $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$ não cai no caso imediato $\int u^n du$ por não possuir o termo x, já que $du = 2x\,dx$ ▪ Não cai nos casos $\int \frac{du}{u}$ e $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$ pois não é uma integral quociente.

Já que $\sqrt{x^2-a^2}$ é a medida de um dos catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa medindo x e o segundo cateto medindo a, obtemos as seguintes relações trigonométricas, à partir do ângulo θ, formado pela hipotenusa e o cateto que mede a (veja o quadro *MODO DE SUBSTITUIÇÃO III*, nos estudos preliminares, pág. 4).



$$\begin{cases} \sec\theta = \dfrac{u}{a} \Rightarrow \begin{cases} u = a\sec\theta \\ du = a\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta \end{cases} \\ \sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2} = \sqrt{a^2\left(\sec^2\theta - 1\right)} = a\,\mathrm{tg}\,\theta \end{cases}$$

Assim, $\displaystyle\int \underbrace{\sqrt{x^2-a^2}}_{a\,\mathrm{tg}\theta}\;\underbrace{dx}_{a\sec\theta\,\mathrm{tg}\theta\,d\theta} = \int a\,\mathrm{tg}\theta\; a\sec\theta\;\mathrm{tg}\theta\;d\theta = a^2\int \underbrace{\mathrm{tg}^2\theta}_{\sec^2\theta - 1}\;\sec\theta\;d\theta =$

$$= a^2\int\left(\sec^2\theta - 1\right)\sec\theta\;d\theta = \underbrace{a^2\int \sec^3\theta\;d\theta}_{(i)}\;\underbrace{-\,a^2\int \sec\theta\;d\theta}_{(ii)} \qquad (I)$$

Resolvendo (i) e (ii) e lembrando que

$\displaystyle\int \sec^3\theta\;d\theta = \frac{1}{2}\sec\theta\,\mathrm{tg}\theta + \frac{1}{2}\ln\left(\sec\theta + \mathrm{tg}\theta\right) + C$, encontramos

(i) $\displaystyle a^2\int \sec^3\theta\;d\theta = \frac{a^2}{2}\sec\theta\;\mathrm{tg}\theta + \frac{a^2}{2}\ln\left(\sec\theta + \mathrm{tg}\theta\right) + C_1$

(ii) $\displaystyle a^2\int \sec\theta\;d\theta = a^2\ln\left(\sec\theta + tg\theta\right) + C_2$

Substituindo (i) e (ii) em (I), temos

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\sec\theta\ \text{tg}\theta + \frac{a^2}{2}\ln\left(\sec\theta+\text{tg}\theta\right) + a^2\ln\left(\sec\theta+tg\theta\right)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\sec\theta\ \text{tg}\theta+\frac{3a^2}{2}\ln\left(\sec\theta+\text{tg}\theta\right)+C$$

Escrevendo o resultado acima em função de *a* e *x*, através das relações obtidas no triângulo retângulo esboçado no início do exercício, temos:.

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{a}{x}\Rightarrow x=a\sec\theta\Rightarrow\sec\theta=\dfrac{x}{a}\\[2mm] \text{tg}\theta=\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\end{cases}$$

Logo, $\displaystyle\int\sqrt{x^2-a^2}\ dx=\frac{a^2}{2}\underbrace{\sec\theta}_{\frac{x}{a}}\ \underbrace{\text{tg}\theta}_{\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}}+\frac{3a^2}{2}\ln\left(\underbrace{\sec\theta}_{\frac{x}{a}}+\underbrace{\text{tg}\theta}_{\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}}\right)+C=$

$$=\frac{a^2}{2}\,\frac{x}{a}\,\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\frac{3a^2}{2}\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right)+C=$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{3a^2}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right)+C$$

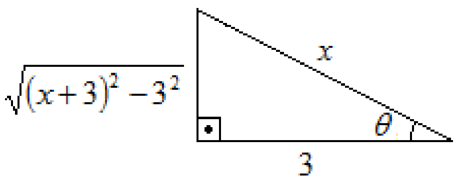
Exemplo 13:

$\displaystyle\int\sqrt{x^2+6x}\ dx$

Vamos inicialmente preparar a integral

$$\int\sqrt{x^2+6x}\ dx=\int\sqrt{(x^2+6x+9)-9}\ dx=\int\sqrt{(x+3)^2-3^2}\ dx$$

> Note que ela não recai em nenhuma das imediatas $\int u^n du$, $\int\frac{du}{u}$ ou $\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$. Vamos utilizar a técnica de substituição de variáveis por variáveis trigonométricas.
>
> Já que $\sqrt{(x+3)^2-3^2}$ é a medida de um dos catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa medindo *x+3* e o segundo cateto medindo 3, obtemos as seguintes relações trigonométricas, à partir do ângulo θ, formado pela hipotenusa e o cateto que mede 3 (veja o quadro *MODO DE SUBSTITUIÇÃO III*, nos estudos preliminares, pág. 4).



$$\begin{cases}\sec\theta=\dfrac{u}{3}\Rightarrow\begin{cases}u=3\sec\theta\\ du=3\sec\theta\ \text{tg}\theta\ d\theta\end{cases}\\ \sqrt{x^2-3^2}=\sqrt{3^2\sec^2\theta-3^2}=\sqrt{3^2\left(\sec^2\theta-1\right)}=3\,\text{tg}\,\theta\end{cases}$$

Assim, $\displaystyle\int\underbrace{\sqrt{(x+3)^2-3^2}}_{3\,tg\theta}\ \underbrace{dx}_{3\sec\theta\,tg\theta\,d\theta}=\int 3\,\text{tg}\theta\ \ 3\sec\theta\ \text{tg}\theta\ d\theta=3^2\int\underbrace{\text{tg}^2\theta}_{\sec^2\theta-1}\ \sec\theta\ d\theta=$

$$=9\int\left(\sec^2\theta-1\right)\sec\theta\ d\theta=\underbrace{9\int\sec^3\theta\ d\theta}_{(i)}\ \underbrace{-9\int\sec\theta\ d\theta}_{(ii)}\ (I)$$

Resolvendo (i), (ii) e lembrando que

$\int \sec^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\sec\theta\,\text{tg}\theta + \frac{1}{2}\ln(\sec\theta + \text{tg}\theta) + C$, encontramos

$(i)\ 9\int \sec^3\theta\, d\theta = \frac{9}{2}\sec\theta\,\text{tg}\theta + \frac{9}{2}\ln(\sec\theta + \text{tg}\theta) + C_1$ $(ii)\ 9\int \sec\theta\, d\theta = 9\ln(\sec\theta + tg\theta) + C_2$

Substituindo (i) e (ii) em (I), temos

$$\int \sqrt{(x+3)^2 - 3^2}\,dx = \frac{9}{2}\sec\theta\,\text{tg}\theta + \frac{9}{2}\ln(\sec\theta + \text{tg}\theta) + 9\ln(\sec\theta + tg\theta) + C =$$

$$= \frac{9}{2}\sec\theta\,\text{tg}\theta + \frac{27}{2}\ln(\sec\theta + \text{tg}\theta) + C$$

Escrevendo o resultado acima em função de 3 e *x*, através das relações obtidas no triângulo retângulo esboçado no início do exercício, temos:.

$$\begin{cases} \sec\theta = \dfrac{x}{a} \\ tg\theta = \dfrac{\sqrt{(x+3)^2 - 3^2}}{3} \end{cases}$$

Logo $\int \sqrt{x^2+6x} = \int \sqrt{(x+3)^2 - 3^2}\,dx = \frac{9}{2}\underbrace{\sec\theta}_{\frac{x}{3}}\ \underbrace{\text{tg}\theta}_{\frac{\sqrt{(x+3)^2+3^2}}{3}} + \frac{27}{2}\ln\left(\underbrace{\sec\theta}_{\frac{x}{3}} + \underbrace{\text{tg}\theta}_{\frac{\sqrt{(x+3)^2+3^2}}{3}}\right) + C =$

$$= \frac{9}{2}\frac{x}{3}\frac{\sqrt{(x+3)^2+3^2}}{3} + \frac{27}{2}\ln\left(\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{(x+3)^2+3^2}}{3}\right) + C =$$

$$= \int \sqrt{x^2 - 6x}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{(x+3)^2+9} + \frac{27}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{(x+3)^2+9}}{3}\right) + C$$

Aplicando a propriedade logarítmica: $\ln\left(\frac{A}{C}\right) = \ln A - \ln B$, vem.

$$\int \sqrt{x^2 - 6x}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{(x+3)^2+9} + \frac{27}{2}\ln\left(x + \sqrt{(x+3)^2+9}\right) \underbrace{-\frac{27}{2}\ln 3 + C_1}_{C} =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{(x+3)^2+9} + \frac{27}{2}\ln\left(x + \sqrt{(x+3)^2+9}\right) + C$$

Exemplo 14:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

Esta integral é do tipo $\int \frac{v\,dx}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}$, com $v = f_1(x) = 1$ e $u = f_2(x) = x$.

Note que ela não recai em nenhuma das imediatas $\int u^n du$, $\int \frac{du}{u}$ ou $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$.

Como $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} dx,$ podemos notar que

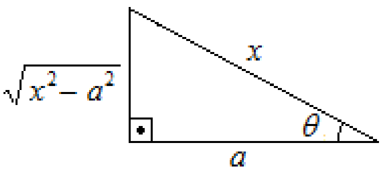
- Fazendo $u = x^2 - a^2$, temos $du = d(x^2 - a^2) = 2x\,dx.$

Assim, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ não cai no caso imediato $\int u^n du$ por não possuir o termo x, já que $du = 2x\,dx$.

- Não cai no caso $\int \frac{du}{u}$ pois se $u = \sqrt{x^2-a^2}$, $du = d\left(\sqrt{x^2-a^2}\right) = \frac{2x\,dx}{2\sqrt{x^2-a^2}} =$ $= \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$, e não conseguimos ajustar o numerador dx para $\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$.
- Não cai no caso $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$.

Vamos então, utilizar a técnica de substituição de variáveis por variáveis trigonométricas.

Já que $\sqrt{x^2-a^2}$ é a medida de um dos catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa medindo x e o segundo cateto medindo a, obtemos as seguintes relações trigonométricas, à partir do ângulo θ, formado pela hipotenusa e o cateto que mede a (veja o quadro *MODO DE SUBSTITUIÇÃO III*, nos estudos preliminares, pág. 4).



$$\begin{cases} \sec\theta = \frac{u}{a} \Rightarrow \begin{cases} u = a\sec\theta \\ du = a\sec\theta\,\mathrm{tg}\theta\,d\theta \end{cases} \\ \sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)} = a\,\mathrm{tg}\,\theta \end{cases}$$

Assim, $$\int \frac{\overbrace{dx}^{a\sec\theta\,tg\theta\,d\theta}}{\underbrace{\sqrt{x^2-a^2}}_{a\,tg\theta}} = \int \frac{a\sec\theta\,\mathrm{tg}\theta\,d\theta}{a\,\mathrm{tg}\theta} = \int \sec\theta\,d\theta = \ln(\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta) + C_1$$

Escrevendo o resultado acima em função de a e x, através das relações obtidas no triângulo retângulo esboçado no início do exercício, temos:

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{x} \Rightarrow x = a\sec\theta \Rightarrow \sec\theta = \frac{x}{a} \\ \mathrm{tg}\theta = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} \end{cases}$$

Logo, $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \sec\theta\,d\theta = \ln(\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta) + C_1 = \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right) + C_1 =$$

$$= \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right) + C_1 = \ln\left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right) \underbrace{\overbrace{-\ln a}^{C_2} + C_1}_{C} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C$$

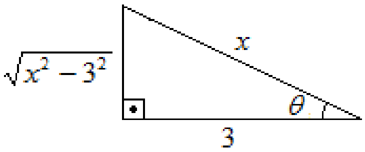
Exemplo 15:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$$

Note que ela não recai em nenhuma das imediatas $\int u^n du$, $\int \frac{du}{u}$ ou $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$.

Vamos utilizar a técnica de substituição de variáveis por variáveis trigonométricas.

Já que $\sqrt{x^2-3^2}$ é a medida de um dos catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa medindo x e o segundo cateto medindo 3, obtemos as seguintes relações trigonométricas, à partir do ângulo θ, formado pela hipotenusa e o cateto que mede 3 (veja o quadro *MODO DE SUBSTITUIÇÃO III*, nos estudos preliminares, pág. 4).



$$\begin{cases} \sec\theta = \dfrac{u}{3} \Rightarrow \begin{cases} u = 3\sec\theta \\ du = 3\sec\theta\,\mathrm{tg}\theta\, d\theta \end{cases} \\ \sqrt{x^2-3^2} = \sqrt{3^2\sec^2\theta - 3^2} = \sqrt{3^2\left(\sec^2\theta - 1\right)} = 3\,\mathrm{tg}\,\theta \end{cases}$$

Assim, $\displaystyle\int \frac{\overbrace{dx}^{3\sec\theta\, tg\theta\, d\theta}}{\underbrace{x}_{3\sec\theta}\ \underbrace{\sqrt{x^2-3^2}}_{3\,tg\theta}} = \int \frac{3\sec\theta\,\mathrm{tg}\theta\, d\theta}{3\sec\theta\ 3\,\mathrm{tg}\theta} = \int \frac{d\theta}{3} = \frac{1}{3}\int d\theta = \frac{1}{3}\theta + C_1$

Escrevendo o resultado acima em função de 3 e *x*, através das relações obtidas no triângulo retângulo esboçado no início do exercício, temos:.

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{3}{x} \Rightarrow \theta = \arccos\dfrac{3}{x} \end{cases}$$

Logo, $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-3^2}} = \frac{1}{3}\theta + C = \frac{1}{3}\,\mathrm{arc\,cos}\,\frac{3}{x} + C$

6ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{25+x^2}}$ — *Resp:* $-\frac{1}{5}\ln\frac{5+\sqrt{25+x^2}}{x}+C$

2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$ — *Resp:* $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sec}\frac{x}{2}+C$

3. $\int \frac{4-x}{x^2\sqrt{x^2-16}}dx$ — *Resp:* $\frac{\sqrt{x^2-16}}{4x}+\frac{1}{4}\operatorname{arc\,sec}\frac{x}{4}+C$

4. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{9-4x^2}}dx$ — *Resp:* $-\frac{\sqrt{9-4x^2}}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{2x}{3}+C$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{-8+6x-x^2}}$ — *Resp:* $\operatorname{arc\,sen}(x-3)+C$

6. $\int \frac{dx}{(16-4x^2)^{\frac{3}{2}}}$ — *Resp:* $\frac{x}{16\sqrt{16-4x^2}}+C$

7. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2-9}}$ — *Resp:* $\frac{\sqrt{4x^2-9}}{9x}+C$

8. $\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$ — *Resp:* $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^4-9x^2}}$ — *Resp:* $\frac{1}{3}\operatorname{arc\,sec}\frac{x}{3}+C$

10. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x^3-x}}$ — *Resp:* $\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C$

11. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$ — *Resp:* $\sqrt{x^2-a^2}-a\cdot arc\sec\frac{x}{a}+C$

12. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+1}}$ — *Resp:* $\frac{(2x^2-1)\sqrt{x^2+1}}{3x^3}+C$ *ou* $\frac{-\sqrt{(x^2+1)^3}}{3x^3}+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+C$

13. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ — *Resp:* $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}x-\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+C$

14. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ — *Resp:* $\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}+C$

15. $\int \frac{dx}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ — *Resp:* $\frac{x}{4\sqrt{4-x^2}}+C$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{-9x^2+30x-21}}$ — *Resp:* $\frac{1}{3}arc\,sen\left(\frac{3x-5}{2}\right)+C$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-5}}$ *Resp:* $\displaystyle\frac{\sqrt{7}}{7}\ln\left|\frac{\sqrt{35}x+\sqrt{35x^2-25}}{5}\right|+C$

18. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4x^2+9}}$ *Resp:* $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+9}+C$

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$ *Resp:* $\frac{\sqrt{3}}{3}arc\ sen\ \left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)+C$

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{9+16x^2}}$ *Resp:* $-\frac{1}{3}\ln\left(\frac{\sqrt{9+16x^2}+3}{4x}\right)+C$

UNIDADE 4: APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA

INTEGRAL DEFINIDA

Consideremos a integral indefinida $\int f(x)dx = F(x) + C$.

A integral definida com índice inferior *a* e superior *b* é indicada por $\int_a^b f(x)dx$ e se lê: integral de a até b de $f(x)dx$.

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemplo 1:

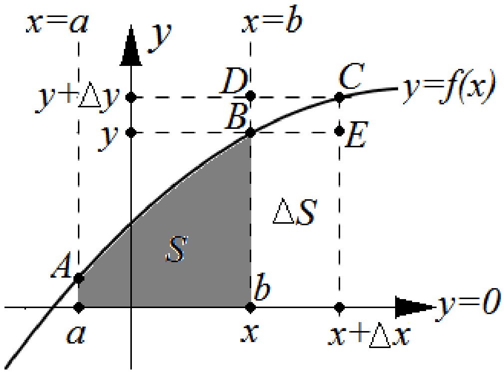
$$\int_{-1}^{2} (9x^2 - 6x + 5)dx = \left[9 \cdot \frac{x^3}{3} - 6 \cdot \frac{x^2}{2} + 5x\right]_{-1}^{2} = [3x^3 - 3x^2 + 5x]_{-1}^{2} =$$
$$= (3 \cdot (2)^3 - 3 \cdot (2)^2 + 5 \cdot (2)) - (3 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1)) =$$
$$= (24 - 12 + 10) - (-3 - 3 - 5) = (22) - (-11) = 22 + 11 = 33$$

EXERCÍCIOS

1. $\int_1^3 (6x^2 - 10x + 4)dx$
2. $\int_{-2}^{2} (3x^2 - 4x + 1)dx$
3. $\int_{-1}^{3} (3x^2 + 10x - 7)dx$
4. $\int_{-2}^{1} (4x^3 - 9x^2 - 4x + 3)dx$

CÁLCULO DE ÁREAS PLANAS

Problema Resolvido 1: Mostre que a área limitada pela curva $y = f(x)$ e as retas $y = 0$ (eixo x), $x = a$ e $x = b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, como na figura abaixo é $S = \int_a^b f(x)dx = [F(b) - F(a)]u.a.$, onde $\int_a^b f(x)dx = F(x)$ e $u.a.$ indica unidade de área.



Resolução:

Note que, da figura acima:

$$S_{Bx(x+\Delta x)E} < S_{Bx(x+\Delta x)C} < S_{Dx(x+\Delta x)C}, \text{ com}$$

$$S_{Bx(x+\Delta x)E} = y\Delta x,\ S_{Bx(x+\Delta x)C} = \Delta S \text{ e } S_{Dx(x+\Delta x)C} = (y + \Delta y)\Delta x$$

Então, $y\Delta x < \Delta S < (y + \Delta y)\Delta x$

Dividindo a desigualdade por Δx $(\Delta x > 0)$ e calculando o $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$ dos membros da desigualdade, pelo teorema do confronto, teremos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{y\Delta x}{\Delta x} < \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} < \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(y + \Delta y)\Delta x}{\Delta x}$$

Se $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$, logo

$$\lim_{\Delta x \to 0} y < \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} < \lim_{\Delta x \to 0} (y + \Delta y)$$

$$y < \frac{dS}{dx} < y \Leftrightarrow \frac{dS}{dx} = y \Leftrightarrow \frac{dS}{dx} = f(x)$$

Integrando membro a membro em relação a x, vem

$$\int \frac{dS}{dx} dx = \int f(x)dx + C$$

Como a área será nula $(S = 0)$ para $x = a$ e será total para $x = b$, definimos:

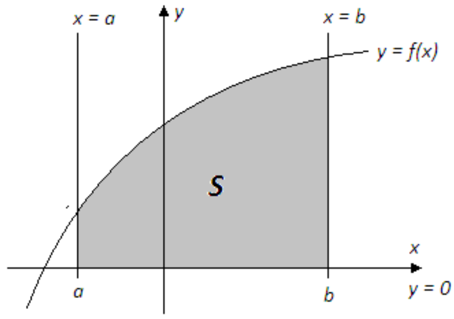
$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Considerando $\int_a^b f(x)dx = F(x)$, concluímos que

$$S = \int_a^b f(x)dx = [F(b) - F(a)]u.a.$$

Sintetizando

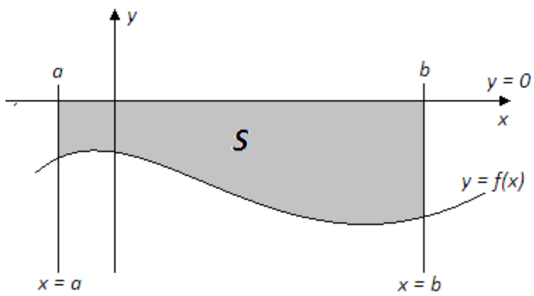
1. Determine a área limitada pela curva $y = f(x) > 0$ e as retas $y = 0$ (eixo das abscissas), $x = a$, e $x = b$ $(\text{a} < \text{b})$, representadas no gráfico abaixo.



Então,

$$S = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

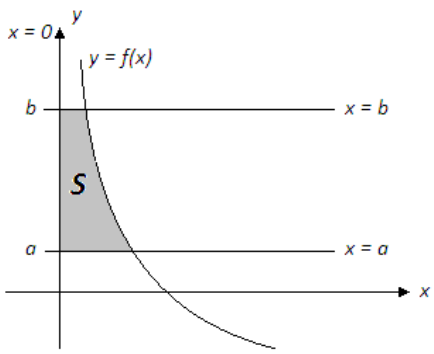
2. Determine a área limitada pela curva $y = f(x) < 0$ e as retas $y = 0$ (eixo das abscissas), $x = a,$ e $x = b$ $(\text{a} < \text{b})$, representadas no gráfico abaixo.



Então,

$$S = \left| \int_a^b f(x) \cdot dx \right|$$

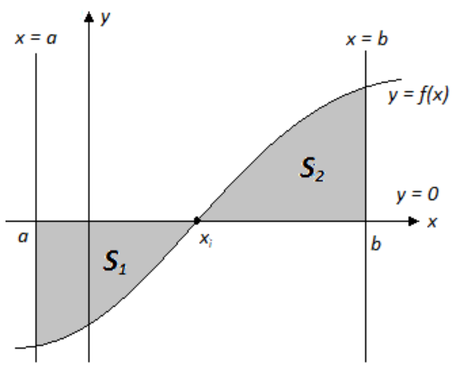
3. Determine a área limitada pela curva $y = f(x)$ e as retas $x = 0$ (eixo das ordenadas), $y = a,$ e $y = b$ $(\text{a} < \text{b})$, representadas no gráfico abaixo.



Então,

$$S = \left| \int_a^b x \cdot dy \right|$$

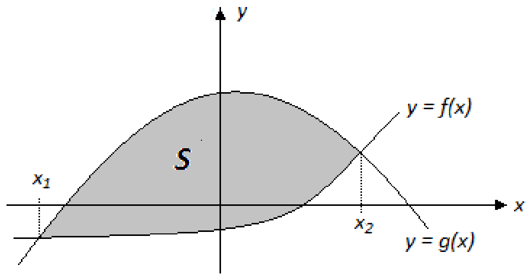
4. Determine a área limitada pela curva $y = f(x)$ e as retas $y = 0$ (eixo das abscissas), $x = a,$ e $x = b$ $(\text{a} < \text{b})$, representadas no gráfico abaixo.



Então,

$$S = \left| \int_a^{x_i} f(x) \cdot dx \right| + \int_{x_i}^b f(x) \cdot dx$$

5. Determine a área limitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, representadas abaixo.



Determinamos as intersecções x_1 e x_2 das duas retas $\big(y = f(x)\big) \cap \big(y = g(x)\big)$, fazendo $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$. Então, a área pedida fica definida como

$$S = \left| \int_{x_1}^{x_2} \left[f(x) - g(x) \right] \cdot dx \right|.$$

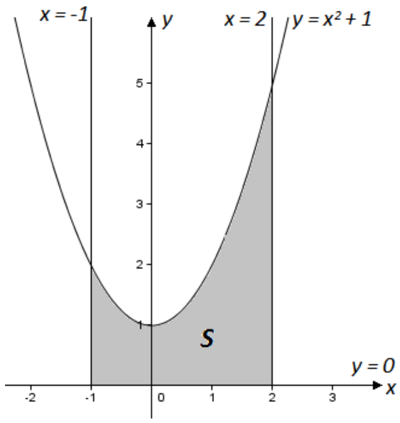
Exemplo 1: Determine a área limitada pela função $y = x^2 + 1$ e as retas $y = 0$, $x = -1$ e $x = 2$

Solução: inicialmente realizamos a representação gráfica dessa função quadrática, que apresenta $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$,

$f(0) = (0)^2 + 1 = 1$ (vértice),

$f(1) = (1)^2 + 1 = 2$ e

$f(2) = (2)^2 + 1 = 5$



$$S = \int_{-1}^{2} x^2 + 1 \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^{2} = \left(\frac{(2)^3}{3} + (2) \right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + (-1) \right) =$$

$$= \left(\frac{8}{3} + 2 \right) - \left(\frac{-1}{3} - 1 \right) = \left(\frac{8+6}{3} \right) - \left(\frac{-1-3}{3} \right) = \frac{14}{3} - \frac{-4}{3} = \frac{14}{3} + \frac{4}{3} = \frac{18}{3} = 6\,u.a.$$

Exemplo 2: Determine a área limitada pela função $y = x^3 - 3$ e as retas:

a) $y = 0$, $x = 0$ e $x = 1$

b) $x = 0$, $y = 2$ e $y = 5$

Solução: inicialmente realizamos a representação gráfica dessa função, que apresenta $f(-2) = (-2)^3 - 3 = -11$,

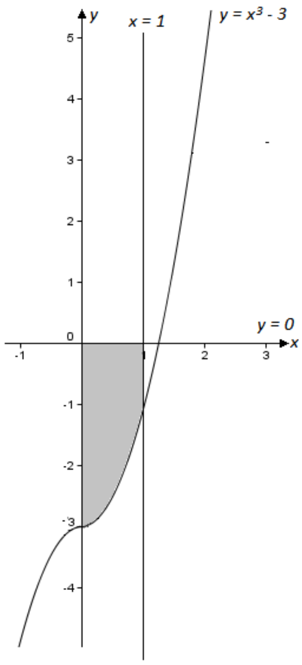
$f(-1) = (-1)^3 - 3 = -4$,

$f(0) = (0)^3 - 3 = -3$,

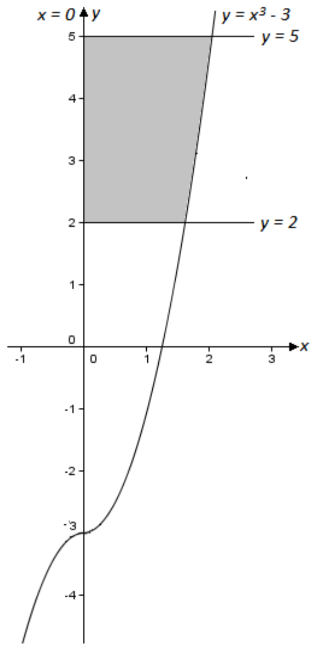
$f(1) = (1)^3 - 3 = -2$

$f(2) = (2)^3 - 3 = 5$

a)



b)



a) $$S = \left|\int_0^1 x^3 - 3 \cdot dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - 3x\right]_0^1\right| = \left|\left(\frac{(1)^4}{4} - 3\cdot(1)\right) - \left(\frac{(0)^4}{4} - 3\cdot(0)\right)\right| =$$

$$= \left|\left(\frac{1}{4} - 3\right) - (0)\right| = \left|\left(\frac{1-12}{4}\right)\right| = \left|-\frac{11}{4}\right| = \frac{11}{4}\,u.a.$$

b) como neste caso queremos a área entre a função $y = x^3 - 3$ e o eixo y, no intervalo [2,5], calculamos a integral definida $S = \int_2^5 x\, dy$. Temos então que explicitar x na função $y = x^3 - 3$, como segue abaixo.

$$y = x^3 - 3 \Rightarrow x^3 = y + 3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y+3}$$

$$S = \int_2^5 \sqrt[3]{y+3} \cdot dy = \int_2^5 (y+3)^{\frac{1}{3}} \cdot dy = \int_2^5 (y+3)^{\frac{1}{3}} \cdot d(y+3) =$$

Então, $$= \left[\frac{(y+3)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\right]_2^5 = \left[\frac{(y+3)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_2^5 = \left[\frac{3}{4}\sqrt[3]{(y+3)^4}\right]_2^5 = \left(\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{(5+3)^4}\right) - \left(\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{(2+3)^4}\right) =$$

$$= \left(\frac{3}{4}\cdot 16\right) - \left(\frac{3}{4}\cdot 5\sqrt[3]{5}\right) = \left(12 - \frac{15}{4}\sqrt[3]{5}\right) u.a.$$

Exemplo 3: Determine a área limitada pela função $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ e as retas $y = 0$, $x = 0$ e $x = 3$

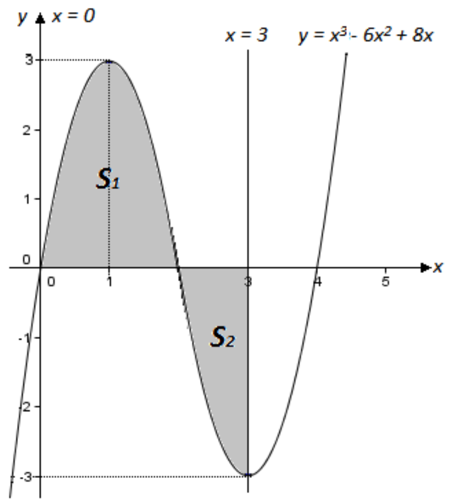
Solução: inicialmente realizamos a representação gráfica dessa função quadrática, que apresenta $f(0) = (0)^3 - 6 \cdot (0)^2 + 8 \cdot (0) = 0,$

$$f(1) = (1)^3 - 6 \cdot (1)^2 + 8 \cdot (1) = 3,$$

$$f(2) = (2)^3 - 6 \cdot (2)^2 + 8 \cdot (2) = 0,$$

$$f(3) = (3)^3 - 6 \cdot (3)^2 + 8 \cdot (3) = -3,$$

$$f(4) = (4)^3 - 6 \cdot (4)^2 + 8 \cdot (4) = 0,$$



como neste caso queremos a área entre a função $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ e o eixo x, no intervalo [0,3], e observando que $f(x) > 0$ em [0,2] e $f(x) < 0$ em [2,3], devemos calcular S da seguinte forma: $S = \int_0^2 f(x) \cdot dx + \left| \int_2^3 f(x) \cdot dx \right|$

$$S = \int_0^2 \left(x^3 - 6x^2 + 8x\right)dx + \left| \int_2^3 \left(x^3 - 6x^2 + 8x\right)dx \right| =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 6 \cdot \frac{x^3}{3} + 8 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^2 + \left| \left[\frac{x^4}{4} - 6 \cdot \frac{x^3}{3} + 8 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_2^3 \right| =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_0^2 + \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_2^3 \right| =$$

$$= \left(\left(\frac{(2)^4}{4} - 2 \cdot (2)^3 + 4 \cdot (2)^2 \right) - \left(\frac{(0)^4}{4} - 2 \cdot (0)^3 + 4 \cdot (0)^2 \right) \right) +$$

$$+ \left| \left(\frac{(3)^4}{4} - 2 \cdot (3)^3 + 4 \cdot (3)^2 \right) - \left(\frac{(2)^4}{4} - 2 \cdot (2)^3 + 4 \cdot (2)^2 \right) \right| =$$

$$= \left(\left(\frac{16}{4} - 16 + 16 \right) - (0) \right) + \left| \left(\frac{81}{4} - 54 + 36 \right) - \left(\frac{16}{4} - 16 + 16 \right) \right| =$$

$$= ((4)) + \left| \left(\frac{81 - 216 + 144}{4} \right) - (4) \right| = 4 + \left| \frac{9}{4} - 4 \right| = 4 + \left| \frac{9 - 16}{4} \right| =$$

$$= 4 + \left| \frac{-7}{4} \right| = 4 + \frac{7}{4} = \frac{16 + 7}{4} = \frac{23}{4} u.a..$$

Exemplo 4: Determine a área limitada pelas curvas $y = x^2 - 2x - 3$ e $y = 3x - 7$.

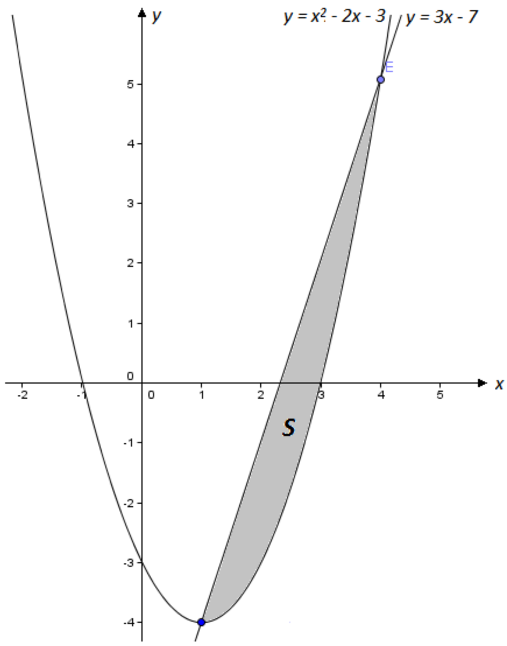
Solução: neste caso, devemos encontra as abscissas dos pontos de intersecção das curvas dadas, ou seja,

$$(y = x^2 - 2x - 3) \cap (y = 3x - 7) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 3x - 7$$

$$x^2 - 2x - 3 - 3x + 7 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \end{cases} \text{pontos de intersecção}$$



Agora, calculamos $S = \left| \int_{x_1}^{x_2} \left[f(x) - g(x) \right] \cdot dx \right|$.

$$S = \left| \int_1^4 \left[(x^2 - 2x - 3) - (3x - 7) \right] \cdot dx \right| = \left| \int_1^4 \left(x^2 - 5x + 4 \right) \cdot dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 4x \right]_1^4 \right| = \left| \left(\frac{(4)^3}{3} - 5 \cdot \frac{(4)^2}{2} + 4 \cdot (4) \right) - \left(\frac{(1)^3}{3} - 5 \cdot \frac{(1)^2}{2} + 4 \cdot (1) \right) \right| =$$

$$= \left| \left(\frac{64}{3} - 40 + 16 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 \right) \right| = \left| \frac{128 - 240 + 96 - 2 + 15 - 24}{6} \right| = \left| -\frac{27}{6} \right| = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} u.a.$$

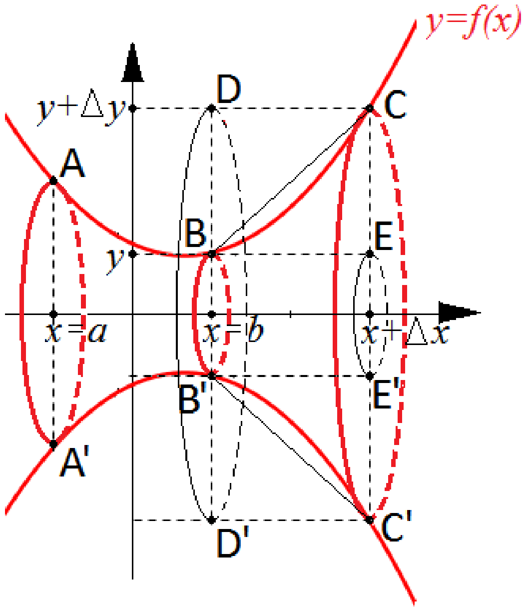
7ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Determine algebricamente por integral e geometricamente a área limitada pela função $y = 2x + 3$ e as retas $y = 0, x = 1$ e $x = 2$.
2. Determine a área limitada pela parábola $y = x^2 - 4$ e as retas $y = 0, x = -1$ e $x = 3$.
3. Determine a área limitada pelas curvas:
   a) $y = x^2 - 3x$ e $y = 5x - 7$.
   b) $y = x^2 - 4$ e $y = -x^2 + 4$.
4. Determine a área limitada pelas retas:
   a) $y = 2x - 4,\ y = 0,\ x = -1$ e $x = 3$.
   b) $y = x + 1,\ y = 0,\ x = -1$ e $x = 3$.
   c) $y = x + 1,\ y = 0,\ y = 3$ e $x = 0$.
   d) $y = -2x + 4,\ y = 0,\ x = -1$ e $x = 3$.
5. Determine a área limitada pela parábola $y = x^2 - 3x + 2$ e a reta $y = 2x - 4$.
6. Determine a área limitada pela parábola $y = x^2 - x - 6$ e a reta $y = -5x - 9$.
7. Determine a área limitada pelas curvas $y = x^3 - 1$ e $y = 2x^2 + 3x - 1$
8. Determine a área limitada pela curva $y = \sqrt[3]{x}$ e as retas $y = 1,\ y = 2$ e $x = 0$.
9. Mostre por integração que a área de uma circunferência de raio R é igual a πR^2.

VOLUME DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Volume de Sólidos de Revolução ao redor do eixo $\overline{xx'}$

Problema Resolvido 1: Mostre que o volume do sólido obtido pela revolução ao redor do eixo $\overline{xx'}$ da superfície limitada pela curva $y = f(x)$, eixo $\overline{xx'}$ (reta $y = 0$) e as retas verticais $x = a$ e $x = b$, com $a < b$ como na figura abaixo é $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi[F(b) - F(a)] u.v.$, onde $\int_a^b [f(x)]^2 dx = F(x)$ e $u.v.$ indica unidade de volume.



Resolução:

Note que, do exemplo:

$$V_{BB´EE´} < V_{BB´C´C} < V_{DD´C´C}, \text{ com}$$

$$V_{BB´E´E} = \pi y^2 \Delta x, V_{BB´C´C} = \Delta V \text{ e } V_{DD´C´C} = \pi(y + \Delta y)^2 \Delta x$$

Então, $\pi y^2 \Delta x < \Delta V < \pi(y + \Delta y)^2 \Delta x$

Dividindo a desigualdade por Δx e calculando o $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$ dos membros da desigualdade, pelo teorema do confronto, teremos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\pi y^2 \Delta x}{\Delta x} < \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} < \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\pi(y + \Delta y)^2 \Delta x}{\Delta x}$$

Se $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$, logo

$$\lim_{\Delta x \to 0} \pi y^2 < \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} < \lim_{\Delta x \to 0} \pi(y + \Delta y)^2$$

$$\pi y^2 < \frac{dV}{dx} < \pi y^2 \Leftrightarrow \frac{dV}{dx} = \pi y^2$$

$$\frac{dV}{dx} = \pi[f(x)]^2$$

Integrando membro a membro em relação a x, vem

$$\int \frac{dV}{dx}dx = \int \pi[f(x)]^2 dx \Rightarrow \int dV = \pi \int [f(x)]^2 dx$$

$$V = \pi \int [f(x)]^2 dx$$

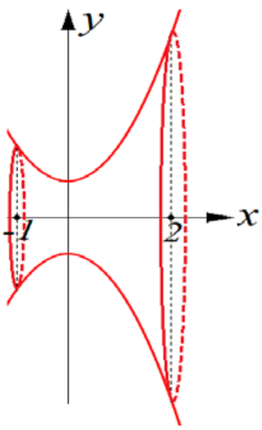
Como o volume será nulo ($V = 0$) para $x = a$ e será total para $x = b$, definimos:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Considerando $\int_a^b [f(x)]^2 dx = F(x)$, concluímos que

$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi[F(b) - F(a)]u.v.$

Problema Resolvido 2: Determine o volume do sólido obtido pela revolução ao redor do eixo $\overline{xx'}$ da superfície limitada pela curva $y = x^2 + 1$ e as retas $y = 0$, $x = -1$ e $x = 2$.



$$V = \pi \int_{-1}^{2} (x^2 + 1)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} (x^4 + 2x^2 + 1)dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x\right]_{-1}^{2} =$$

$$= \pi \left[\frac{3x^5 + 10x^3 + 15x}{15}\right]_{-1}^{2} = \frac{\pi}{15}[3x^5 + 10x^3 + 15x]_{-1}^{2} =$$

$$= \frac{\pi}{15}\{[3 \cdot 2^5 + 10 \cdot 2^3 + 15 \cdot 2] - [3(-1)^5 + 10(-1)^3 + 15(-1)]\} =$$

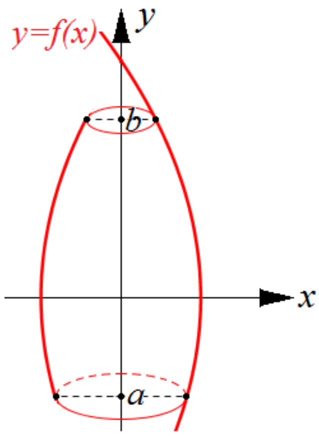
$$= \frac{\pi}{15}[96 + 80 + 30 + 3 + 10 + 15] = \frac{234\pi}{15}u.v.$$

Volume de Sólidos de Revolução ao redor do eixo $\overline{yy'}$

Problema Desafio: Mostre que o volume do sólido obtido pela revolução ao redor do eixo $\overline{yy'}$ da superfície limitada pela curva $y = f(x)$, eixo $\overline{yy'}$ (reta $x = 0$) e as retas horizontais $y = a$ e $y = b$, com $a < b$ é

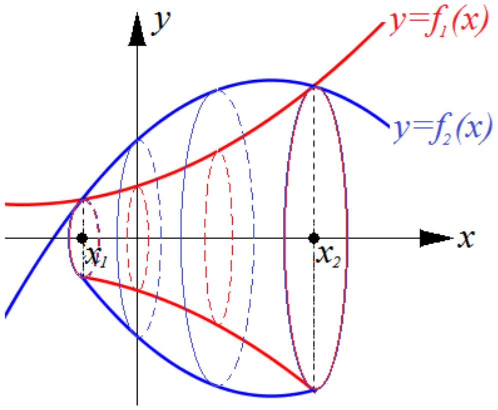
$$V = \pi \int_a^b x^2 dy = \pi[H(b) - H(a)]u.v., \text{ onde}$$

$$\int_a^b x^2 dy = H(y).$$



VOLUME DE SÓLIDOS OCOS

Volume de sólidos de revolução ocos limitados pelas curvas $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ e as retas verticais $x = x_1$ e $x = x_2$, com $[f_1(x)] \cap [f_2(x)] = \{x_1, x_2\}$.



Problema Resolvido 1: Determine o volume do sólido obtido pela revolução ao redor do eixo $\overline{xx'}$ (reta $y = 0$) da superfície limitada pelas curvas $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$, com $f_1(x) > f_2(x)$, representadas acima.

Resolução:

Determinando as intersecções:

$$[y = f_1(x)] \cap [y = f_2(x)] \Rightarrow f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow f_1(x) - f_2(x) = 0$$

$$\exists\ x_1, x_2 \ /\ f_1(x_1) - f_2(x_2) = f_1(x_2) - f_2(x_1) = 0$$

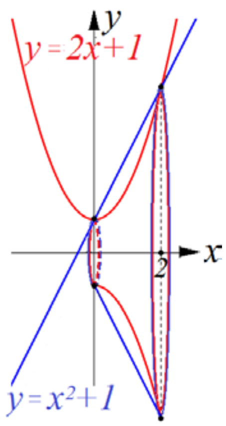
O volume deste sólido pode ser calculado com a diferença entre o volume do sólido maciço de revolução V_1 e V_2, com $V_1 = \pi \int_{x_1}^{x_2} [f_1(x)]^2 dx$ e $V_2 = \pi \int_{x_1}^{x_2} [f_2(x)]^2 dx$.

Logo, $V = \pi \left| \int_{x_1}^{x_2} \{[f_1(x)]^2 - [f_2(x)]^2\} dx \right|$

Problema Resolvido 2: Determine o volume do sólido gerado pela superfície limitada pela curva $y = x^2 + 1$ e a reta $y = 2x + 1$.

Determinação dos pontos de intersecção entre as duas curvas:

$$(y = x^2 + 1) \cap (y = 2x + 1) \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$



$$V = \pi \left| \int_0^2 (x^2+1)^2 - (2x+1)^2\, dx \right| =$$

$$= \pi \left| \int_0^2 (x^4 + 2x^2 + 1 - 4x^2 - 4x - 1) dx \right| =$$

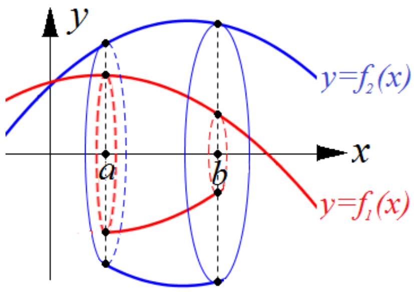
$$= \pi \left| \int_0^2 (x^4 - 2x^2 - 4x) dx \right| = \pi \left| \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} - 2x^2 \right]_0^2 \right| =$$

$$= \pi \left| \left[\frac{3x^5 - 10x^3 - 30x^2}{15} \right]_0^2 \right| = \frac{\pi}{15} \left| [3x^5 - 10x^3 - 30x^2]_0^2 \right| =$$

$$= \frac{\pi}{15} \left| [3 \cdot 2^5 - 10 \cdot 2^3 - 30 \cdot 2^2] - [3 \cdot 0^5 - 10 \cdot 0^3 - 30 \cdot 0^2] \right| =$$

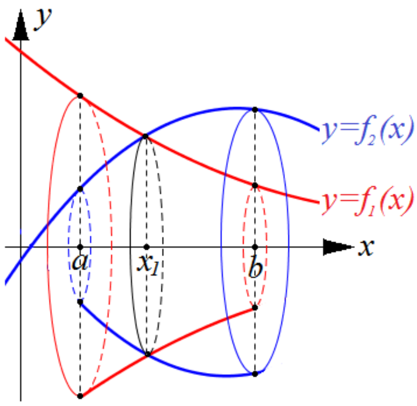
$$= \frac{\pi}{15} |96 - 80 - 120 - 0| = \left| -\frac{104\pi}{15} \right| = \frac{104\pi}{15} u.v.$$

Volume de sólidos de revolução ocos ao redor do eixo $\overline{xx'}$ (reta $y = 0$) limitados pelas curvas $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ e as retas verticais $x = a$ e $x = b$, com $[f_1(x)] \cap [f_2(x)] = \emptyset$ no intervalo $[a, b]$.



Problema Desafio: Mostre que o volume do sólido representado na figura acima pode ser obtido por: $V = \pi \left| \int_a^b \{[f_1(x)]^2 - [f_2(x)]^2\} dx \right|$

Volume de sólidos de revolução ocos ao redor do eixo $\overline{xx'}$ (reta $y = 0$) limitados pelas curvas $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ e as retas verticais $x = a$ e $x = b$, com $[f_1(x)] \cap [f_2(x)] = x_1$ no intervalo $[a, b]$ e $a < x_1 < b$.



Problema Desafio: Mostre que o volume do sólido representado na figura acima pode ser obtido por: $V = \pi \left\{ \left| \int_a^{x_1} \{[f_1(x)]^2 - [f_2(x)]^2\} dx \right| + \left| \int_{x_1}^b \{[f_1(x)]^2 - [f_2(x)]^2\} dx \right| \right\}$

8ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Calcule o volume gerado pela revolução ao redor de $\overline{xx'}$ da superfície limitada pelas retas $y = 2x + 3$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 2$.
2. Calcule o volume gerado pela revolução ao redor de $\overline{yy'}$ da superfície limitada pela curva $y = \sqrt[3]{x}$ e as retas $x = 0$, $y = 1$ e $y = 2$.
3. Calcule o volume do sólido obtido pela revolução ao redor do eixo das abscissas da superfície limitada pela parábola $y = x^2 + 2x + 1$ e a reta $y = -3x + 7$.
4. Mostre que o volume de um cone reto de raio da base R e altura h é dado por $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

DESAFIO: Determine o volume do sólido obtido pela revolução ao redor de $\overline{xx'}$ da superfície limitada pelas curvas $y = x^3 + x - 1$ e a reta $y = 2x - 1$.

FÓRMULAS DE CÁLCULO

(A) VOLUME

1) $V_{\text{paralelepípedo}} = a \cdot b \cdot c$

2) $V_{\text{prisma}} = B \cdot h$ (onde B: área da base e h: altura)

3) $V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$ (onde B: área da base e h: altura)

4) $V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot R^2 \cdot h$ (onde R: raio da base e h: altura)

5) $V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$ (onde R: raio da base e h: altura)

6) $V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$ (onde R: raio da esfera)

(B) ÁREAS

1) $A_{\text{retângulo}} = b \cdot h$ onde, b:base e h: alura

2) $A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2}$ onde, b: base e h: altura

3) $A_{\text{trapézio}} = \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2}$ onde, b_1: base maior
b_2: base menor e h: altura

4) $A_{\text{losango}} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ onde, d_1: diagonal maior e
d_2: diagonal menor

5) $A_{\text{círculo}} = \pi \cdot R^2$ onde, R: raio

6) $A_{\text{setor circular}} = \frac{\alpha \cdot R^2}{2}$ onde, R: raio

7) $A_{\text{setor circular}} = \frac{I \cdot R}{2}$ onde, I: comprimento do setor
R: raio

8) $A_{\text{setor circular}} = \frac{I \cdot R}{2}$ onde, I: comprimento do setor
R: raio

9) $A_{\text{segmento circular}} = \frac{R^2}{2}(\alpha - \text{sen}\,\alpha)$ onde, R: raio e
α :ângulo em radianos

10) $A_{\text{coroa circular}} = \pi \cdot (R^2 \cdot r^2)$ onde, R: raio do círculo maior
r: raio do círculo menor

(C) FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

1) $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

2) $\tan x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}$

3) $\cot x = \frac{\cos x}{\text{sen}\,x}$

4) $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

5) $\cos\sec x = \frac{1}{\text{sen}\,x}$

6) $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$

7) $1 + \cot^2 x = \cos\sec^2 x$

8) $\text{sen}\,2x = 2\text{sen}\,x \cdot \cos x$

9) $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

10) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

11) $\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

12) $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

13) $\text{sen}\,3a = 3\text{sen}\,a - 4\text{sen}^3 a$

14) $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

15) $\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$

16) $\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b + \text{sen}\,b \cdot \cos a$

17) $\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$

18) $\text{sen}\,(a-b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b - \text{sen}\,b \cdot \cos a$

19) $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$

20) $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$

21) $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2} \cdot \cos\frac{a-b}{2}$

22) $\cos a - \cos b = -2\,\text{sen}\,\frac{a+b}{2} \cdot \text{sen}\,\frac{a-b}{2}$

23) $\text{sen}\,a + \text{sen}\,b = 2\text{sen}\,\frac{a+b}{2} \cdot \cos\frac{a-b}{2}$

24) $\text{sen}\,a - \text{sen}\,b = 2\,\text{sen}\,\frac{a-b}{2} \cdot \cos\frac{a+b}{2}$

FÓRMULAS DE CÁLCULO

(D) DERIVADAS

1) $d\left(c\right)=0$

2) $d\left(u\pm v\right)=d(u)\pm d(v)$

3) $d\left(cu\right)=c\cdot d(u)$

4) $d\left(x^{n}\right)=n\cdot x^{n-1}$

5) $d\left(u^{n}\right)=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$

6) $d\left(u\cdot v\right)=vu'+uv'$

7) $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vu'-uv'}{v^{2}}$

8) $d\left(\sqrt{u}\right)=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

9) $d\left(\sqrt[n]{u^{k}}\right)=\dfrac{ku'}{n\cdot\sqrt[n]{u^{n-k}}}$

10) $d\ (ln\ u)=\frac{u'}{u}$

11) $d\ (a^{u})=u'\cdot a^{u}\cdot ln(a)$

12) $d\left(e^{u}\right)=u'\cdot e^{u}$

13) $d\ (log_{a}u)=\frac{u'}{u\cdot ln(a)}$

14) $d\left(\operatorname{sen}u\right)=u'\cdot\cos u$

15) $d\left(\cos u\right)=-u'\cdot\operatorname{sen}u$

16) $d\left(\tan u\right)=u'\cdot\sec^{2}u$

17) $d\left(\cot u\right)=-u'\cdot\cos\sec^{2}u$

18) $d\left(\sec u\right)=u'\cdot\sec u\cdot\tan u$

19) $d\left(\cos\sec u\right)=-u'\cdot\cos\sec u\cdot\cot u$

20) $d\left(arc\operatorname{sen}u\right)=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^{2}}}$

21) $d\left(arc\cos u\right)=\dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^{2}}}$

22) $d\left(arc\tan u\right)=\dfrac{u'}{1+u^{2}}$

23) $d\left(arc\cot u\right)=\dfrac{-u'}{1+u^{2}}$

(E) INTEGRAL

1) $\int dx=x+C$

2) $\int x^{n}\cdot dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$ com $n\neq-1$

3) $\int u^{n}\cdot du=\dfrac{u^{n+1}}{n+1}+C$ com $n\neq-1$

4) $\int\frac{du}{u}=ln\ u+C$

5) $\int e^{u}\cdot du=e^{u}+C$

6) $\int a^{u}\cdot du=\frac{a^{u}}{ln\ a}+C$

7) $\int\operatorname{sen}u\cdot du=-\cos u+C$

8) $\int\cos u\cdot du=\operatorname{sen}u+C$

9) $\int tan\,u\cdot du=-\ln(cos\,u)+C=ln(sec\,u)+C$

10) $\int cot\,u\cdot du=ln\ (\operatorname{sen}u)+C$

11) $\int\sec^{2}u\cdot du=\tan u+C$

12) $\int\cos\sec^{2}u\cdot du=-\cot u+C$

13) $\int\sec u\cdot\tan u\cdot du=\sec u+C$

14) $\int\cos\sec u\cdot\cot u\cdot du=-\cos\sec u+C$

15) $\int sec\,u\cdot du=ln(sec\,u+tan\,u)+C$

16) $\int cossec\,u\cdot du=-\ln(cossec\,u+cot\,u)+C$

17) $\int\dfrac{du}{\sqrt{a^{2}-u^{2}}}=arc\operatorname{sen}\dfrac{u}{a}+C$

18) $\int\dfrac{du}{a^{2}+u^{2}}=\dfrac{1}{a}arc\tan\dfrac{u}{a}+C$

19) $\int\operatorname{sen}(mu)\cdot\cos(nu)\cdot du=\dfrac{-\cos[(m+n)u]}{2(m+n)}-\dfrac{\cos[(m-n)u]}{2(m-n)}+C$

20) $\int\operatorname{sen}(mu)\cdot\operatorname{sen}(nu)\cdot du=\dfrac{-\operatorname{sen}[(m+n)u]}{2(m+n)}+\dfrac{\operatorname{sen}[(m-n)u]}{2(m-n)}+C$

21) $\int\cos(mu)\cdot\cos(nu)\cdot du=\dfrac{\operatorname{sen}[(m+n)u]}{2(m+n)}+\dfrac{\operatorname{sen}[(m-n)u]}{2(m-n)}+C$