

Pericolosa e incompleta guida agli investimenti in ETF con *Banca Intesa Sanpaolo*

Marco Maggi

21 febbraio 2018

Sommario

Questa guida è un aiuto per chi volesse ricostruire i calcoli di tenuta del Conto Titoli di *Banca Intesa Sanpaolo* per gli investimenti in *Exchange Traded Funds* (ETF). Questa guida è incompleta: non copre tutto ciò che c'è da sapere sugli ETF, né l'operatività del sito di *home banking* di *Banca Intesa Sanpaolo*. Questa guida è pericolosa: ognuno la usa a suo rischio e pericolo.

In questa guida si tenta di mantenere il testo matematicamente “facile”; si evita l'utilizzo di simboli matematici nelle formule; chi ha frequentato le Scuole Medie Inferiori, e ne ricorda le basi del programma di matematica, dovrebbe farcela.

Indice

1	Introduzione	4
2	Media aritmetica e media ponderata	4
2.1	Calcolo incrementale della media ponderata	5
3	Direzione dei trasferimenti di denaro	7
4	Descrizione di un'operazione di acquisto	7
5	Aggiornamento del saldo dopo un'operazione di acquisto	9
6	Descrizione di un'operazione di vendita	12
7	Aggiornamento del saldo dopo un'operazione di vendita	16

<i>INDICE</i>	2
8 Rendimento indicato nel riepilogo del patrimonio	16
9 Strategie per la scelta dei prezzi di vendita	17
9.1 Accoppiamento diretto tra acquisti e vendite	18
9.2 Metodo delle medie ponderate	19
A GNU Free Documentation License	23
A.1 APPLICABILITY AND DEFINITIONS	23
A.2 VERBATIM COPYING	25
A.3 COPYING IN QUANTITY	25
A.4 MODIFICATIONS	26
A.5 COMBINING DOCUMENTS	28
A.6 COLLECTIONS OF DOCUMENTS	29
A.7 AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS	29
A.8 TRANSLATION	29
A.9 TERMINATION	30
A.10 FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE	30
A.11 RELICENSING	31
A.12 ADDENDUM: How to use this License for your documents . . .	31

Copyright © 2017, 2018 Marco Maggi <marco.maggi-ipsu@poste.it>.

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled “GNU Free Documentation License”.

Il codice sorgente di questa guida è disponibile in Rete all’indirizzo:

<https://github.com/marcomaggi/mmux-personal-finance>

1 Introduzione

Il calcolo dei redditi da capitale e dei redditi diversi per investimenti in ETF deve essere eseguito come specificato nella “Circolare dell’Agenzia dell’Entrate 21/E del 10 Luglio 2014”. Il calcolo di questi redditi permette sia la determinazione dei rendimenti che il calcolo delle tasse.

Per ogni operazione di compravendita eseguita sul Conto Titoli: nella sezione documenti del sito di *home banking* è disponibile una *nota di eseguito* con tutti i dati dell’operazione. Nei calcoli qui illustrati: alcuni valori riportati nelle note di eseguito sono i dati di partenza; altri valori sono i risultati ricalcolati per verifica.

Questa guida utilizza sia la terminologia della Banca che quella della circolare dell’Agenzia dell’Entrate. Da notare che i prezzi di acquisto e vendita sulle Borse di negoziazione sono chiamati *effettivi* dalla circolare.

Tutti i numeri in questa guida sono presentati arrotondati, il più delle volte al centesimo di Euro; l’esecuzione dei calcoli è invece eseguita con precisione maggiore.

2 Media aritmetica e media ponderata

Nei calcoli di tenuta Conto Titoli si usa spesso l’operazione di *media aritmetica* e in particolare la sua riscrittura come *media ponderata*; è utile richiamare queste idee e alcune delle loro proprietà.

Si ricorda che la **media aritmetica** tra i numeri 11, 22 e 33 si scrive:

$$\frac{11 + 22 + 33}{3} = 22$$

il denominatore è 3 perché al numeratore ci sono 3 numeri.

L’operazione si costruisce nello stesso modo se qualche numero compare più di una volta; la media aritmetica tra i numeri: 11, 11, 11, 22, 33 e 33 si scrive:

$$\frac{11 + 11 + 11 + 22 + 33 + 33}{6} = \frac{121}{6} \simeq 20,17$$

il denominatore è 6 perché:

- 11 compare 3 volte;
- 22 compare 1 volta;
- 33 compare 2 volte;

quindi $3 + 1 + 2 = 6$.

Il “numero di volte in cui un numero compare” si chiama **molteplicità**; allora si può dire che:

- 11 compare con *molteplicità* 3;
- 22 compare con *molteplicità* 1;
- 33 compare con *molteplicità* 2;

evidenziando le molteplicità e considerando le semplici identità:

$$11 + 11 + 11 = 3 \times 11 \qquad 22 = 1 \times 22 \qquad 33 + 33 = 2 \times 33$$

l'espressione della *media aritmetica* si può riscrivere:

$$\begin{aligned} \frac{11 + 11 + 11 + 22 + 33 + 33}{6} &= \frac{3 \times 11 + 1 \times 22 + 2 \times 33}{6} = \\ &= \frac{3 \times 11}{6} + \frac{1 \times 22}{6} + \frac{2 \times 33}{6} = \frac{3}{6} \times 11 + \frac{1}{6} \times 22 + \frac{2}{6} \times 33 \end{aligned}$$

in cui si evidenzia come:

- il numero 11 compaia con “peso” 3 rispetto al totale 6;
- il numero 22 compaia con “peso” 1 rispetto al totale 6;
- il numero 33 compaia con “peso” 2 rispetto al totale 6.

In questo modo: la *media aritmetica* tra i numeri 11, 11, 11, 22, 33 e 33 è riscritta come **media ponderata** tra i numeri 11, 22 e 33 rispetto alle loro molteplicità 3, 1 e 2.

Nei calcoli di tenuta Conto Titoli: si eseguono medie ponderate tra prezzi di acquisto o vendita di quote di fondi, rispetto al numero di quote acquistate; tale numero di quote assume il ruolo di “molteplicità di un prezzo”.

2.1 Calcolo incrementale della media ponderata

L'attività di investire in un ETF è costituita da una sequenza di operazioni di acquisto e vendita di quote del fondo; acquisti e vendite possono essere intercalati; il prezzo del totale delle quote possedute viene calcolato aggiornando una *media ponderata* dopo ogni operazione. È utile richiamare come il calcolo di una *media ponderata* possa essere eseguito passo dopo passo.

Si considerino ancora i numeri 11, 11, 11, 22, 33 e 33; si è calcolato che la loro *media aritmetica* può essere riscritta come *media ponderata* e risulta:

$$\frac{11 + 11 + 11 + 22 + 33 + 33}{6} = \frac{3 \times 11 + 1 \times 22 + 2 \times 33}{6} \simeq 20,17$$

si considerino prima i numeri 11, 22 e 33; poi si aggiungano i numeri 11 e 11; infine si aggiunga il numero 33:

1. la *media ponderata* tra i numeri 11, 22 e 33 risulta:

$$\frac{1 \times 11 + 1 \times 22 + 1 \times 33}{3} = 22$$

2. ora si aggiungano i numeri 11 e 11; la *media ponderata aggiornata* risulta:

$$\frac{3 \times 11 + 1 \times 22 + 1 \times 33}{5} = \frac{88}{5} \simeq 17,6$$

e si può scrivere:

$$\frac{3 \times 11 + 1 \times 22 + 1 \times 33}{5} = \frac{2 \times 11}{5} + \frac{1 \times 11 + 1 \times 22 + 1 \times 33}{5}$$

la seconda frazione al membro di destra si può riscrivere:

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} \times \frac{5}{3} \times \frac{1 \times 11 + 1 \times 22 + 1 \times 33}{5} &= \frac{3}{5} \times \frac{1 \times 11 + 1 \times 22 + 1 \times 33}{3} \\ &\simeq \frac{3}{5} \times 20,17 = \frac{3 \times 20,17}{5} \end{aligned}$$

e quindi la *media ponderata aggiornata* risulta:

$$\frac{2 \times 11}{5} + \frac{3 \times 20,17}{5} = \frac{2 \times 11 + 3 \times 20,17}{5} \simeq 17,6$$

cioè la *media ponderata aggiornata* è pari alla *media ponderata* tra:

- la *media ponderata precedente*, con la sua molteplicità;
- il nuovo numero aggiunto, con la sua molteplicità;

3. infine si aggiunga il numero 33; la nuova *media ponderata aggiornata* è la *media ponderata totale* e procedendo come prima risulta:

$$\frac{1 \times 33 + 5 \times 17,6}{6} \simeq 20,17$$

Nei calcoli di tenuta Conto Titoli: dopo ogni acquisto di quote di un fondo, si calcola il prezzo medio di ogni quota posseduta come *media ponderata aggiornata* tra:

- la *media ponderata precedente*, con il precedente numero di quote possedute come molteplicità;
- il prezzo delle nuove quote acquistate, con il numero di quote acquistate come molteplicità.

3 Direzione dei trasferimenti di denaro

Con abusiva semplificazione, le somme di denaro descritte in questa guida si ritengono scambiate tra il Conto Corrente e il Conto Titoli:

- le somme di denaro *investite* in quote di fondi sono in *uscita dal Conto Corrente* e in *entrata nel Conto Titoli*;
- le somme di denaro *disinvestite* da quote di fondi sono in *entrata nel Conto Corrente* e in *uscita dal Conto Titoli*.

Per esempio, si supponga di acquistare quote di un fondo per 1000,00 € tutto incluso; questa quantità di denaro esce dal Conto Corrente ed entra nel Conto Titoli; si considerino i due casi:

- si vendono le quote al prezzo netto di 1200,00 €; questa quantità di denaro esce dal Conto Titoli ed entra nel Conto Corrente; il bilancio delle operazioni si esprime con la differenza algebrica:

$$1200,00 - 1000,00 = +200,00 \text{ €}$$

cioè, nel saldo finale, 200,00 € “appaiono” nel Conto Titoli, vi escono ed entrano nel Conto Corrente: un guadagno;

- si vendono le quote al prezzo netto di 900,00 €; questa quantità di denaro esce dal Conto Titoli ed entra nel Conto Corrente; il bilancio delle operazioni si esprime con la differenza algebrica:

$$900,00 - 1000,00 = -100,00 \text{ €}$$

cioè, nel saldo finale, 100,00 € escono dal Conto Corrente ed entrano nel Conto Titoli in cui poi “spariscono”: una perdita;

le differenze algebriche hanno due interpretazioni:

- *uscite dal Conto Titoli* meno *entrate nel Conto Titoli*;
- *entrate nel Conto Corrente* meno *uscite dal Conto Corrente*.

4 Descrizione di un'operazione di acquisto

Scelta la strategia di acquisto con prezzo limite: in una certa data, e a una certa ora, si inserisce l'ordine di acquisto per un numero di quote del fondo a un certo prezzo massimo (si può acquistare a qualsiasi prezzo al di sotto del limite fissato).

L'ordine può essere eseguito in più fasi in cui solo una parte delle quote è acquistata, in ogni fase a un prezzo diverso; è possibile che non tutte le quote siano acquistate, nel qual caso ci interessa solo la parte "eseguita" dell'ordine.

Il **prezzo medio eseguito di un acquisto** (nella terminologia della Banca), anche detto **prezzo medio effettivo di un acquisto** (nella terminologia dell'Agenzia dell'Entrate), è la media ponderata dei prezzi di acquisto rispetto al numero di quote acquistate. Per esempio, se un singolo ordine di acquisto per 100 quote è eseguito nelle tre fasi:

1. acquisto di 20 quote al prezzo di 52,00 €;
2. acquisto di 30 quote al prezzo di 53,00 €;
3. acquisto di 50 quote al prezzo di 55,00 €;

allora il *prezzo medio eseguito* risulta:

$$\frac{20 \times 52,00 + 30 \times 53,00 + 50 \times 55,00}{20 + 30 + 50} = 53,80 \text{ €}$$

Il **controvalore dell'operazione di acquisto** è il prodotto tra il numero totale di quote acquistate e il *prezzo medio eseguito*. Per esempio, se si acquistano 100 quote al *prezzo medio eseguito* di 53,80 € il controvalore dell'operazione risulta:

$$100 \times 53,80 = 5380,00 \text{ €}$$

Il **costo dell'operazione di acquisto** è la somma tra costi, spese e commissioni associate all'operazione. Per ogni ordine di acquisto eseguito, occorre pagare:

- le spese per la Banca pari a un fisso di 0,50 €;
- i costi di intermediario pari a un fisso di 2,50 €;
- le commissioni per la Banca pari allo 0,24 % del *controvalore dell'operazione*.

Se un ordine non è eseguito: si paga nulla. Se un ordine è eseguito in più fasi: nella prima fase si pagano i costi fissi più la commissione percentuale; nelle fasi successive si paga solo la commissione percentuale. Per esempio, se il *controvalore dell'operazione* è 5380,00 € il *costo dell'operazione* risulta:

$$0,50 + 2,50 + 0,0024 \times 5380,00 = 15,91 \text{ €}$$

Il **controvalore totale di un acquisto** è la somma tra *controvalore dell'operazione* e *costo dell'operazione*; è la quantità di denaro in uscita dal Conto Corrente

5 AGGIORNAMENTO DEL SALDO DOPO UN'OPERAZIONE DI ACQUISTO⁹

e in entrata nel Conto Titoli. Per esempio, se il *controvalore dell'operazione* è 5380,00 € e il *costo dell'operazione* è pari a 15,91 €, il *controvalore totale* risulta:

$$5380,00 + 15,91 = 5395,91 \text{ €}$$

Il **prezzo medio di carico di un acquisto** è il rapporto tra il *controvalore totale* e il numero di quote acquistate ed è usato per l'aggiornamento del saldo: è il prezzo medio di una singola quota acquistata, tutto incluso. Per esempio, se si sono acquistate 100 quote al *controvalore totale* di 5395,91 €, il *prezzo medio di carico* risulta:

$$5395,91/100 = 53,96 \text{ €}$$

5 Aggiornamento del saldo dopo un'operazione di acquisto

Dopo l'esecuzione di ogni operazione di acquisto occorre ricalcolare il saldo del Conto Titoli; per un investimento in quote di ETF, la parte da aggiornare è rappresentata dalle tre quantità:

- numero di quote in carico nel Conto Titoli;
- **prezzo medio effettivo nel saldo**: è il prezzo medio, per quota acquistata, degli ordini eseguiti sulla Borsa di negoziazione; si calcola come media ponderata tra il *prezzo medio effettivo di un nuovo acquisto* e il precedente *prezzo medio effettivo nel saldo*; nella documentazione della Banca: questo valore è chiamato *Net Asset Value (NAV)* del prezzo medio di carico (da non confondere con il NAV dell'attività sottostante il fondo);
- **prezzo medio di carico nel saldo**: è il prezzo medio per quota acquistata, tutto incluso; si calcola come media ponderata tra il *prezzo medio di carico di un nuovo acquisto* e il precedente *prezzo medio di carico nel saldo*.

Dai valori nel saldo si può calcolare il **costo medio per quota nel saldo**: si calcola come differenza tra il *prezzo medio di carico nel saldo* e il *prezzo medio di effettivo nel saldo*.

Per esempio, si supponga di eseguire le operazioni:

1. acquisto di 101 quote al *prezzo medio effettivo* di 51,00 €;
2. acquisto di 102 quote al *prezzo medio effettivo* di 52,00 €;
3. acquisto di 103 quote al *prezzo medio effettivo* di 53,00 €.

5 AGGIORNAMENTO DEL SALDO DOPO UN'OPERAZIONE DI ACQUISTO 10

all'inizio si consideri un Conto Titoli vuoto, con saldo convenzionale di: 0 quote; *prezzo medio di carico* di 0 €; *prezzo medio effettivo* di 0 €. L'aggiornamento del saldo avviene come segue.

1. Per la prima operazione:

- numero di quote acquistate: 101;
- *prezzo medio effettivo*: 51,00 €;
- *controvalore dell'operazione*: 5151,00 €;
- *costo dell'operazione*: 15,36 €;
- *controvalore totale*: 5166,36 €;
- *prezzo medio di carico*: 51,1521 €.

Dopo la prima operazione:

- numero quote nel saldo: 101; uguale al numero quote del primo acquisto;
- *prezzo medio effettivo nel saldo*: 51,00 €; uguale al *prezzo medio effettivo* del primo acquisto;
- *prezzo medio carico nel saldo*: 51,1521 €; uguale al *prezzo medio di carico* del primo acquisto;

il *costo medio per quota nel saldo* risulta:

$$51,1521 - 51,00 = 0,1521 \text{ €}$$

2. Per la seconda operazione:

- numero di quote acquistate: 102;
- *prezzo medio effettivo*: 52,00 €;
- *controvalore dell'operazione*: 5304,00 €;
- *costo dell'operazione*: 15,73 €;
- *controvalore totale*: 5319,73 €;
- *prezzo medio di carico*: 52,1542 €.

Dopo la seconda operazione:

- numero quote nel saldo: $101 + 102 = 203$;

5 AGGIORNAMENTO DEL SALDO DOPO UN'OPERAZIONE DI ACQUISTO 11

- il *prezzo medio effettivo nel saldo* è la media ponderata dei *prezzi medi effettivi* del saldo precedente e del nuovo acquisto:

$$\frac{101 \times 51,00 + 102 \times 52,00}{101 + 102} = 51,5025 \text{ €}$$

- il *prezzo medio di carico nel saldo* è la media ponderata dei *prezzi medi di carico* del saldo precedente e del nuovo acquisto:

$$\frac{101 \times 51,1521 + 102 \times 52,1542}{101 + 102} = 51,6556 \text{ €}$$

il *costo medio per quota nel saldo* risulta:

$$51,6556 - 51,5025 = 0,1532 \text{ €}$$

3. Per la terza operazione:

- numero di quote acquistate: 103;
- *prezzo medio effettivo*: 53,00 €;
- *controvalore dell'operazione*: 5459,00 €;
- *costo dell'operazione*: 16,10 €;
- *controvalore totale*: 5475,10 €;
- *prezzo medio di carico*: 53,1563 €.

Dopo la terza operazione:

- numero quote nel saldo: $203 + 103 = 306$;
- il *prezzo medio effettivo nel saldo* è la media ponderata dei *prezzi medi effettivi* del saldo precedente e del nuovo acquisto:

$$\frac{203 \times 51,5025 + 103 \times 53,00}{203 + 103} = 52,0065 \text{ €}$$

- il *prezzo medio di carico nel saldo* è la media ponderata dei *prezzi medi di carico* del saldo precedente e del nuovo acquisto:

$$\frac{203 \times 51,6556 + 103 \times 53,1563}{203 + 103} = 52,1608 \text{ €}$$

il *costo medio per quota nel saldo* risulta:

$$52,1608 - 52,0065 = 0,1542 \text{ €}$$

Evidenziando i prezzi medi: ogni nuova quota acquistata viene “buttata nel secchio” insieme alle vecchie, indipendentemente dal suo prezzo di acquisto; è come se ogni quota fosse stata acquistata allo stesso prezzo, pari al prezzo medio.

Si osservi come, **solo quando si sono eseguiti degli acquisti ma nessuna vendita:**

- il *prezzo medio effettivo nel saldo* si possa calcolare anche come media ponderata tra i *prezzi medi effettivi degli acquisti*:

$$\frac{101 \times 51,00 + 102 \times 52,00 + 103 \times 53,00}{101 + 102 + 103} = 52,01 \text{ €}$$

- il *prezzo medio di carico nel saldo* si possa calcolare anche come media ponderata tra i *prezzi medi di carico degli acquisti*:

$$\frac{101 \times 51,1521 + 102 \times 52,1542 + 103 \times 53,1563}{101 + 102 + 103} = 52,1608 \text{ €}$$

- il costo totale di tutte le operazioni si possa calcolare sia come somma tra tutti i costi:

$$15,36 + 15,73 + 16,10 = 47,19 \text{ €}$$

che come prodotto tra il numero di quote nel saldo e il *costo medio per quota*:

$$306 \times 0,1542 = 47,19 \text{ €}$$

dopo la prima operazione di vendita: queste proprietà non valgono più!

6 Descrizione di un'operazione di vendita

Scelta la strategia di vendita con prezzo limite: in una certa data, e a una certa ora, si inserisce l'ordine di vendita per un numero di quote del fondo a un certo prezzo minimo (si può vendere a qualsiasi prezzo al di sopra del limite fissato). L'ordine può essere eseguito in più fasi in cui solo una parte delle quote è venduta, in ogni fase a un prezzo diverso; è possibile che non tutte le quote siano vendute, nel qual caso ci interessa solo la parte “eseguita” dell'ordine.

Il **prezzo medio eseguito di vendita** (nella terminologia della Banca), anche detto **prezzo medio effettivo di vendita** (nella terminologia dell'Agenzia dell'Entrate), è la media ponderata dei prezzi di vendita rispetto al numero di quote vendute. Per esempio, se un singolo ordine di vendita per 100 quote è eseguito nelle fasi:

1. vendita di 20 quote al prezzo di 52,00 €;

2. vendita di 30 quote al prezzo di 53,00 €;

3. vendita di 50 quote al prezzo di 55,00 €;

allora il *prezzo medio effettivo* risulta:

$$\frac{20 \times 52,00 + 30 \times 53,00 + 50 \times 55,00}{20 + 30 + 50} = 53,80 \text{ €}$$

Il **controvalore dell'operazione di vendita** è il prodotto tra il numero totale di quote vendute e il *prezzo medio effettivo*. Per esempio, se si vendono 100 quote al *prezzo medio effettivo* di 53,80 € il controvalore dell'operazione risulta:

$$100 \times 53,80 = 5380,00 \text{ €}$$

La circolare dell'Agenzia dell'Entrate specifica che il *reddito per quota* derivante da un'operazione di vendita è la differenza tra *prezzo medio effettivo della vendita* e *prezzo medio effettivo nel saldo*; peculiarmente:

- quando la differenza tra prezzi medi effettivi è **positiva**: essa è da considerarsi *reddito da capitale*, quindi **non genera** una plusvalenza utilizzabile per compensare precedenti minusvalenze da altri investimenti;
- quando la differenza tra prezzi medi effettivi è **negativa**: essa è da considerarsi un *reddito diverso*, quindi **genera** una minusvalenza compensabile con successive plusvalenze da altri investimenti.

Quando il reddito di una vendita è positivo: occorre pagare la **tassa sul reddito da capitale**¹. Per esempio, se si vendono 100 quote al *prezzo medio effettivo* di 53,80 € e il *prezzo medio effettivo nel saldo* precedente è di 50,00 €, il *reddito da capitale* risulta:

$$100 \times (53,80 - 50,00) = 380,00 \text{ €}$$

per fondi che non contengono Titoli dello Stato Italiano, e assimilati, l'aliquota unica è del 26 %; allora la *tassa sul reddito da capitale* risulta:

$$0,26 \times 380,00 = 98,80 \text{ €}$$

Il **costo dell'operazione di vendita** è la somma tra costi, spese e commissioni associate all'operazione; per ogni ordine di vendita eseguito, occorre pagare:

- le spese per la Banca pari a un fisso di 0,50 €;

¹Si deve pagare anche il bollo sull'estratto conto trimestrale per il Conto Titoli, pari allo 0,2 % all'anno del controvalore alla data di chiusura dei conti trimestrali; il bollo è addebitato direttamente sul Conto Corrente, perciò in questa guida lo si considera conteggiato a parte.

- i costi di intermediario pari a un fisso di 2,50 €;
- le commissioni per la Banca pari allo 0,24 % del *controvalore dell'operazione*;

se un ordine non è eseguito: si paga nulla; se un ordine è eseguito in più fasi: nella prima fase si pagano i costi fissi più la commissione percentuale; nelle fasi successive si paga solo la commissione percentuale. Per esempio, se il *controvalore dell'operazione* è 5380,00 € il *costo dell'operazione* risulta:

$$0,50 + 2,50 + 0,0024 \times 5380,00 = 15,91 \text{ €}$$

Da osservare che: sia il calcolo della *tassa sul reddito da capitale* che i calcoli del *costo dell'operazione* di acquisto e vendita si eseguono usando il *prezzo medio effettivo*; in pratica: si pagano le tasse anche sul *costo dell'operazione* di acquisto e vendita, che però sono redditi di qualcun altro, non dell'investitore!

La circolare dell'Agenzia dell'Entrate specifica che il *costo delle operazioni* genera un *reddito diverso*, da registrare come minusvalenza. Per esempio, si supponga di possedere un Conto Titoli con:

- numero quote nel saldo precedente alla vendita: 100;
- *prezzo medio effettivo nel saldo* precedente alla vendita 50,00 €;
- *prezzo medio di carico nel saldo* precedente alla vendita: 50,15 €;
- *costo medio per quota nel saldo* precedente alla vendita: 0,15 €;

si vendano tutte le quote; l'operazione di vendita sia descritta da:

- numero quote vendute: 100;
- *prezzo medio effettivo di vendita* 53,80 €;
- *reddito da capitale*: 380,00 €;
- *costo dell'operazione di vendita*: 15,91 €;

ogni quota venduta era stata acquistata con un *costo medio per quota* di 0,15 €, perciò il *costo di acquisto delle quote vendute* risulta:

$$100 \times 0,15 = 15,00 \text{ €}$$

allo scopo di far risultare un numero negativo, la circolare specifica che il *reddito diverso* associato alla vendita deve essere calcolato come:

$$[380,00 - (15,91 + 15,00)] - 380,00 = - (15,91 + 15,00) = -30,91 \text{ €}$$

questa minusvalenza viene automaticamente registrata dalla Banca nella “Posizione Fiscale” del Conto Titoli; da notare che **le minusvalenze derivanti dai costi di acquisto e vendita sono registrate nella Posizione Fiscale solo al momento della vendita di quote**, al momento dell'acquisto nulla viene registrato.

Il **controvalore totale di vendita** è la differenza tra il *controvalore dell'operazione* e la somma tra *costo dell'operazione* e *tassa sul reddito da capitale*; è la quantità di denaro in uscita dal Conto Titoli e in entrata nel Conto Corrente. Per esempio, se il *controvalore dell'operazione* è 5380,00 €, il *costo dell'operazione* è 15,91 € e la *tassa sul reddito da capitale* è 98,80 €, il *controvalore totale* risulta:

$$5380,00 - (15,91 + 98,80) = 5265,29 \text{ €}$$

In un'operazione di vendita le quote vengono “scaricate” dal Conto Titoli: la vendita modifica solo il numero di quote in carico nel saldo, il *prezzo medio di carico nel saldo* resta invariato da prima a dopo la vendita. Allo scopo di calcolare il rendimento dell'operazione, si definisce il **prezzo medio netto di vendita** pari al rapporto tra il *controvalore totale* e il numero di quote vendute. Per esempio, se si sono vendute 100 quote al *controvalore totale* di 5265,29 €, il *prezzo medio netto di vendita* risulta:

$$5265,29/100 = 52,6529 \text{ €}$$

Il **rendimento percentuale dell'operazione di vendita**, rispetto alle quote in carico nel saldo precedente, si calcola considerando il *prezzo medio di carico nel saldo precedente* e il *prezzo medio netto di vendita*; in caso di guadagno è un numero positivo, in caso di perdita è un numero negativo. Per esempio, se il *prezzo medio di carico nel saldo precedente* è 50,15 € e il *prezzo medio netto di vendita* è 52,6529 €, il *rendimento percentuale* risulta:

$$\frac{52,6529 - 50,15}{50,15} \times 100 = +4,9908 \%$$

Il **rendimento in valuta dell'operazione di vendita**, rispetto alle quote in carico nel saldo precedente, si calcola considerando il *prezzo medio di carico nel saldo precedente* e il *prezzo medio netto di vendita*; in caso di guadagno è un numero positivo, in caso di perdita è un numero negativo. Per esempio, se si vendono 100 quote con *prezzo medio di carico nel saldo precedente* pari a 50,15 € e *prezzo medio netto di vendita* pari a 52,6529 €, il *rendimento in valuta* risulta:

$$100 \times (52,6529 - 50,15) = 250,29 \text{ €}$$

7 Aggiornamento del saldo dopo un'operazione di vendita

Dopo l'esecuzione di ogni operazione di vendita occorre ricalcolare il saldo. Il saldo di un investimento in quote di ETF è rappresentato dalle tre quantità:

- numero di quote in carico nel Conto Titoli;
- *prezzo medio effettivo nel saldo*;
- *prezzo medio di carico nel saldo*;

sia il *prezzo medio effettivo nel saldo* che il *prezzo medio di carico nel saldo* restano **immutati** dopo una vendita: essa modifica solo il numero di quote in carico diminuendolo del numero di quote vendute.

Per esempio, si supponga di avere un Conto Titoli con saldo iniziale:

- numero di quote: 100;
- *prezzo medio effettivo nel saldo*: 50,00 €;
- *prezzo medio di carico nel saldo*: 50,15 €;

se si vendessero 90 quote, non importa a quale prezzo, il saldo finale risulterebbe:

- numero di quote: $100 - 90 = 10$;
- *prezzo medio effettivo nel saldo*: 50,00 €, immutato;
- *prezzo medio di carico nel saldo*: 50,15 €, immutato.

8 Rendimento indicato nel riepilogo del patrimonio

Nel sito di *home banking* è indicato, per ogni fondo nel Conto Titoli, il saldo costituito dal numero di quote in carico e dal *prezzo medio di carico*; in più è visibile la stima dell'*Utile o Perdita* (U/P), nell'ipotesi di vendita di tutte le quote al prezzo dell'ultima quotazione rilevata sulla Borsa di negoziazione del titolo:

- l'*Utile* mostrato è al lordo sia del *costo dell'operazione di vendita* che della *tassa sul reddito da capitale*;
- la *Perdita* mostrata è al lordo del *costo dell'operazione di vendita*.

Si supponga di possedere 100 quote al *prezzo medio di carico nel saldo* di 50,00 €:

- se l'ultimo rilevamento per il prezzo di una quota fosse di 52,00 €, l'*Utile percentuale* mostrato nella tabella del patrimonio risulterebbe:

$$\frac{52,00 - 50,00}{50,00} \times 100 = +3,6889 \%$$

mentre l'*Utile in valuta* risulterebbe:

$$100 \times (52,00 - 50,00) = +185,00 \text{ €}$$

in realtà, vendendo tutte le quote al *prezzo medio effettivo* di 52,00 €, risulterebbe:

- *prezzo medio netto*: 51,33 €;
- *rendimento percentuale*: +2,3434 %;
- *rendimento in valuta*: +117,52 €;

- se l'ultimo rilevamento per il prezzo di una quota fosse di 48,00 €, la *Perdita percentuale* mostrata nella tabella del patrimonio risulterebbe:

$$\frac{48,00 - 50,00}{50,00} \times 100 = -4,2871 \%$$

mentre la *Perdita in valuta* risulterebbe:

$$100 \times (48,00 - 50,00) = -215,00 \text{ €}$$

in realtà, vendendo tutte le quote al *prezzo medio effettivo* di 48,00 €, risulterebbe:

- *prezzo medio netto*: 47,85 €;
- *perdita percentuale*: -4,5767 %;
- *perdita in valuta*: -229,52 €.

9 Strategie per la scelta dei prezzi di vendita

Si cerca di vendere a un prezzo maggiore del prezzo di acquisto; se occorresse liquidità per le proprie spese: si potrebbe essere costretti a disinvestire, vendendo a prezzi inferiori.

9.1 Accoppiamento diretto tra acquisti e vendite

Si cerca di vendere ogni singola quota a un *prezzo medio netto di vendita* maggiore del suo *prezzo medio di carico di acquisto*. Per esempio, si supponga di eseguire le operazioni:

1. acquisto di 101 quote al *prezzo medio di carico di acquisto* pari a 51,00 €;
2. acquisto di 102 quote al *prezzo medio di carico di acquisto* pari a 52,00 €;
3. acquisto di 103 quote al *prezzo medio di carico di acquisto* pari a 53,00 €;
4. vendita di 101 quote a un *prezzo medio netto di vendita* pari a 55,10 €;
5. vendita di 102 quote a un *prezzo medio netto di vendita* pari a 55,20 €;
6. vendita di 103 quote a un *prezzo medio netto di vendita* pari a 55,30 €;

per ogni gruppo di quote acquistate e poi vendute:

- accoppiando le operazioni 1 e 4, il rendimento percentuale risulta:

$$\frac{55,10 - 51,00}{51,00} \times 100 = 8,04 \%$$

il rendimento in valuta risulta:

$$101 \times (55,10 - 51,00) = 414,10 \text{ €}$$

- accoppiando le operazioni 2 e 5, il rendimento percentuale risulta:

$$\frac{55,20 - 52,00}{52,00} \times 100 = 6,15 \%$$

il rendimento in valuta risulta:

$$102 \times (55,20 - 52,00) = 326,40 \text{ €}$$

- accoppiando le operazioni 3 e 6, il rendimento percentuale risulta:

$$\frac{55,30 - 53,00}{53,00} \times 100 = 4,34 \%$$

il rendimento in valuta risulta:

$$103 \times (55,30 - 53,00) = 236,90 \text{ €}$$

Con questo metodo, i dati del saldo sono usati per calcolare: le *tasse sui redditi da capitale*, le minusvalenze accumulate e i *prezzi medi netti di vendita*; quindi tutti i calcoli **devono** essere eseguiti. Però, ogni operazione di acquisto è considerata separatamente dalle altre per quanto riguarda la scelta del prezzo di vendita e la determinazione del conseguente rendimento.

9.2 Metodo delle medie ponderate

Si cerca di vendere le quote a un prezzo talmente maggiore del prezzo di acquisto che, recuperati i costi e pagate le tasse, si realizza un guadagno.

- Se il *prezzo medio netto di vendita* è maggiore del *prezzo medio di carico nel saldo* in quel momento: si recuperano i costi di acquisto e vendita; si recuperano le tasse; si chiude con un guadagno.
- Se il *prezzo medio netto di vendita* è uguale al *prezzo medio di carico nel saldo* in quel momento: si recuperano i costi di acquisto e vendita; si recuperano le tasse; ma resta nessun guadagno, si chiude in pareggio.
- Se il *prezzo medio netto di vendita* è minore del *prezzo medio di carico nel saldo*: tolti i costi di acquisto e vendita ed eventualmente le tasse, l'operazione genera una perdita.

In ogni caso, restano le minusvalenze accumulate che, se e quando possibile, potranno essere usate per ridurre le tasse da pagare in future operazioni che generano redditi diversi.

Si supponga di avere un Conto Titoli con il seguente saldo:

- numero quote: 100;
- prezzo medio effettivo: 50,00 €;
- costo medio per quota: 0,15 €;
- prezzo medio carico: 50,15 €;
- controvalore di carico: 5015,00 €;
- minusvalenze accumulate: 0,00 €;

si vogliano vendere tutte le quote.

Come esempio di guadagno, si venda come segue:

- numero quote: 100;
- prezzo medio eseguito: 52,00 €;
- controvalore dell'operazione: 5200,00 €;
- controvalore totale: 5132,52 €;
- prezzo medio netto di vendita: 51,33 €;

- reddito da capitale: 200,00 €;
- tasse sul reddito: 52,00 €;
- costo dell'operazione di vendita: 15,48 €;
- costo convenzionale di acquisto delle quote vendute: 15,00 €;
- reddito diverso: -30,48 €;
- rendimento percentuale: 2,3434 %;
- rendimento in valuta: 117,52 €;

il *prezzo medio netto di vendita* pari a 51,33 € è maggiore del *prezzo medio di carico nel saldo* pari a 50,15 €, quindi, recuperati costi e tasse, si realizza un guadagno; il reddito diverso è una minusvalenza da compensare con future operazioni.

Come esempio di perdita, si venda come segue:

- numero quote: 100;
- prezzo medio eseguito: 50,30 €;
- controvalore dell'operazione: 5030,00 €;
- controvalore totale: 5007,13 €;
- prezzo medio netto di vendita: 50,07 €;
- reddito da capitale: 30,00 €;
- tasse sul reddito: 7,80 €;
- costo dell'operazione di vendita: 15,07 €;
- costo convenzionale di acquisto delle quote vendute: 15,00 €;
- reddito diverso: -30,07 €;
- rendimento percentuale: -0,1570 %;
- rendimento in valuta: -7,87 €;

nonostante il *prezzo medio eseguito* pari a 50,30 € sia maggiore del *prezzo medio di carico nel saldo* pari a 50,15 €, il *prezzo medio netto di vendita* di 50,07 € è minore, quindi, tolti costi e tasse, si realizza una perdita; il reddito diverso è una minusvalenza da compensare con future operazioni.

Come ulteriore esempio di perdita, si venda come segue:

- numero quote: 100;
- prezzo medio eseguito: 48,00 €;
- controvalore dell'operazione: 4800,00 €;
- controvalore totale: 4785,48 €;
- prezzo medio netto di vendita: 47,85 €;
- reddito da capitale: 0,00 €;
- tasse sul reddito: 0,00 €;
- costo dell'operazione di vendita: 14,52 €;
- costo convenzionale di acquisto delle quote vendute: 15,00 €;
- redditi diversi: -229,52 €;
- rendimento percentuale: -4,5767 %;
- rendimento in valuta: -229,52 €;

il *prezzo medio netto di vendita* pari a 47,85 € è minore del *prezzo medio di carico nel saldo* pari a 50,15 €, quindi si realizza una perdita; si osserva che:

- il *reddito da capitale* è zero e le tasse sono nulle;
- la differenza tra il *controvalore dell'operazione di vendita* e il *controvalore di carico nel saldo*:

$$4800,00 - 5015,00 = -215,00 \text{ €}$$

rappresenta la perdita di reddito dovuta alla vendita, è negativa ed è registrata come reddito diverso;

- la differenza tra il *controvalore totale di vendita* e il *controvalore di carico nel saldo*:

$$4785,48 - 5015,00 = -229,52 \text{ €}$$

è negativa e rappresenta l'intero reddito diverso, includendo sia la perdita di reddito dovuta alla vendita che il costo delle operazioni;

il reddito diverso è una minusvalenza da compensare con future operazioni.

La domanda fondamentale è: **possedendo un numero di quote a un certo prezzo medio effettivo e un certo prezzo medio di carico nel saldo, qual'è il prezzo medio eseguito di vendita che permette di realizzare un guadagno?**

Per esempio, si posseggano 100 quote a un *prezzo medio effettivo nel saldo* pari a 50,00 € e a un *prezzo medio di carico nel saldo* pari a 50,15 €, si voglia determinare il *prezzo medio eseguito di vendita* per tutte le quote che realizzi un guadagno. Detto X tale valore, risulta:

- *controvalore dell'operazione*: $100 \times X$;

- *costo dell'operazione di vendita*:

$$\begin{aligned} 0,50 + 2,50 + 0,0024 \times (100 \times X) &= 3 + 0,0024 \times 100 \times X = \\ &= 3 + 0,24 \times X \end{aligned}$$

- *tassa sul reddito da capitale*:

$$\begin{aligned} 0,26 \times 100 \times (X - 50,00) &= 26 \times X - 26 \times 50 = \\ &= 26 \times X - 1300 \end{aligned}$$

- *controvalore totale di vendita*:

$$\begin{aligned} (100 \times X) - (3 + 0,24 \times X) - (26 \times X - 1300) &= \\ &= 100 \times X - 3 - 0,24 \times X - 26 \times X + 1300 = \\ &= (100 - 0,24 - 26) \times X + (1300 - 3) = \\ &= 73,76 \times X + 1297 \end{aligned}$$

- *prezzo medio netto di vendita*:

$$\frac{73,76 \times X + 1297}{100}$$

il pareggio si raggiungerebbe vendendo le quote a un *prezzo medio netto* uguale al *prezzo medio di carico nel saldo* pari a 50,15 €; quindi:

$$\frac{73,76 \times X + 1297}{100} = 50,15$$

risolvendo rispetto a X :

$$X = \frac{100 \times 50,15 - 1297}{73,76} = 50,4067 \text{ €}$$

vendendo con un *prezzo medio eseguito* maggiore di 50,4067 € si realizza un guadagno.

A GNU Free Documentation License

Version 1.3, 3 November 2008

Copyright © 2000, 2001, 2002, 2007, 2008 Free Software Foundation, Inc.

`<https://fsf.org/>`

Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies of this license document, but changing it is not allowed.

Preamble

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document “free” in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondly, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of “copyleft”, which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

A.1 APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The “**Document**”, below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as “**you**”. You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A “**Modified Version**” of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A “**Secondary Section**” is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors

of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The “**Invariant Sections**” are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The “**Cover Texts**” are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A “**Transparent**” copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not “Transparent” is called “**Opaque**”.

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.

The “**Title Page**” means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, “Title Page” means the text near the most prominent appearance of the work's title, preceding the beginning of the body of the text.

The “**publisher**” means any person or entity that distributes copies of the Document to the public.

A section “**Entitled XYZ**” means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as “**Acknowledgements**”, “**Dedications**”, “**Endorsements**”, or “**History**”.) To “**Preserve the Title**” of such a section when you modify the Document means that it remains a section “**Entitled XYZ**” according to this definition.

The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties: any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

A.2 VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

A.3 COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document’s license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

A.4 MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

- A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.
- B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.
- C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.
- D. Preserve all the copyright notices of the Document.

- E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.
- F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.
- G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.
- H. Include an unaltered copy of this License.
- I. Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.
- J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.
- K. For any section Entitled "Acknowledgements" or "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.
- L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.
- M. Delete any section Entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version.
- N. Do not retitle any existing section to be Entitled "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section.
- O. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled "Endorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties—for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

A.5 COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled "History" in the various original documents, forming one section Entitled "History"; likewise combine any sections Entitled "Acknowledgements", and any sections Entitled "Dedications". You must delete all sections Entitled "Endorsements".

A.6 COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

A.7 AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an “aggregate” if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation’s users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document’s Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

A.8 TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled “Acknowledgements”, “Dedications”, or “History”, the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

A.9 TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided under this License. Any attempt otherwise to copy, modify, sublicense, or distribute it is void, and will automatically terminate your rights under this License.

However, if you cease all violation of this License, then your license from a particular copyright holder is reinstated (a) provisionally, unless and until the copyright holder explicitly and finally terminates your license, and (b) permanently, if the copyright holder fails to notify you of the violation by some reasonable means prior to 60 days after the cessation.

Moreover, your license from a particular copyright holder is reinstated permanently if the copyright holder notifies you of the violation by some reasonable means, this is the first time you have received notice of violation of this License (for any work) from that copyright holder, and you cure the violation prior to 30 days after your receipt of the notice.

Termination of your rights under this section does not terminate the licenses of parties who have received copies or rights from you under this License. If your rights have been terminated and not permanently reinstated, receipt of a copy of some or all of the same material does not give you any rights to use it.

A.10 FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See <https://www.gnu.org/licenses/>.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License “or any later version” applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document specifies that a proxy can decide which future versions of this License can be used, that proxy’s public statement of acceptance of a version permanently authorizes you to choose that version for the Document.

A.11 RELICENSING

“Massive Multiauthor Collaboration Site” (or “MMC Site”) means any World Wide Web server that publishes copyrightable works and also provides prominent facilities for anybody to edit those works. A public wiki that anybody can edit is an example of such a server. A “Massive Multiauthor Collaboration” (or “MMC”) contained in the site means any set of copyrightable works thus published on the MMC site.

“CC-BY-SA” means the Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 license published by Creative Commons Corporation, a not-for-profit corporation with a principal place of business in San Francisco, California, as well as future copyleft versions of that license published by that same organization.

“Incorporate” means to publish or republish a Document, in whole or in part, as part of another Document.

An MMC is “eligible for relicensing” if it is licensed under this License, and if all works that were first published under this License somewhere other than this MMC, and subsequently incorporated in whole or in part into the MMC, (1) had no cover texts or invariant sections, and (2) were thus incorporated prior to November 1, 2008.

The operator of an MMC Site may republish an MMC contained in the site under CC-BY-SA on the same site at any time before August 1, 2009, provided the MMC is eligible for relicensing.

A.12 ADDENDUM: How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

Copyright © YEAR YOUR NAME. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled “GNU Free Documentation License”.

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the “with ... Texts.” line with this:

with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.