Purità e compattezza algebrica per gruppi abeliani

Relatrice: Prof.ssa Silvana Bazzoni
Candidato: Marco Morosin

Università degli Studi di Padova

17.10.2019

Contenuti

Definizione

$B(\leq A)$ è *puro* in A se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

- per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $B \cap nA = nB$
- per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $b \in B$, se $nx = b$ ha soluzione in A allora ha soluzione in B
- ogni sistema $\sum_{j=1}^{n} n_{ij}x_j = b_i$ $(b_i \in B,\ i = 1, \dots, m)$ risolvibile in A è risolvibile anche in B

Esempi

Addendi diretti, sottogruppo di torsione, sottogruppi divisibili.

Quando un sottogruppo puro è addendo diretto?

- Quando B è limitato, i.e. esiste $n \neq 0 : nB = \{0\}$
- Quando A/B è somma diretta di gruppi ciclici

Una sequenza esatta $0 \longrightarrow A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} B \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} C \longrightarrow 0$ si dice *pura-esatta* se $\operatorname{im}\alpha$ è puro in B.

Ricordiamo che:

G ha la proprietà iniettiva rispetto a una sequenza esatta se, per ogni $\phi\colon A \to G$, esiste ψ tale che

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\phi"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[dl, dashed, "\psi"] & C \arrow[r] & 0 \\ & G & & & \end{tikzcd}$$

G ha la proprietà proiettiva rispetto a una sequenza esatta se, per ogni $\phi\colon G \to C$, esiste ψ tale che

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, hook] & B \arrow[r, two heads] & C \arrow[r] & 0 \\ & & & G \arrow[u, "\phi"] \arrow[ul, dashed, "\psi"] & \end{tikzcd}$$

Una sequenza esatta è pura-esatta se e solo se:

ogni gruppo ciclico ha la proprietà proiettiva.
Dualmente:
se e solo se ogni gruppo cociclico ha la proprietà iniettiva.

Gruppi cociclici

Un gruppo G si dice *cociclico* se $\exists g \in G$ tale che:
per ogni morfismo $\phi \colon G \to X$, $g \notin \ker\phi \implies \ker\phi = \{0\}$.

Un gruppo è cociclico se e solo se

- l'intersezione di tutti i sottogruppi $\neq \{0\}$ è $\neq \{0\}$;
- $G \cong \mathbb{Z}(p^k)$ oppure $G \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$.

Quali sono *tutti* i gruppi che hanno la proprietà iniettiva o proiettiva rispetto a sequenze pure-esatte?

Chiamiamo *puri-iniettivi* (*puri-proiettivi*) i gruppi che hanno la proprietà iniettiva (proiettiva) rispetto a tutte le sequenze pure-esatte.

Un gruppo è puro-proiettivo se e solo se è somma diretta di gruppi ciclici.

È puro-iniettivo se e solo se è addendo diretto di un prodotto diretto di gruppi cociclici.

I gruppi puri-iniettivi si prestano ad essere studiati sotto diversi aspetti:

Sono equivalenti:

(caratterizzazioni algebriche)

- A è puro-iniettivo
- A è addendo diretto di ogni gruppo di cui è sottogruppo puro;
- A è addendo diretto di un prodotto diretto di gruppi cociclici;

(caratterizzazioni topologiche)

- A è addendo diretto di un gruppo che ammette una topologia compatta;

(caratterizzazione in termini di risolubilità di sistemi di equazioni)

- ogni sistema su A finitamente risolubile in A è risolubile in A.

Parliamo quindi di gruppi *algebricamente compatti*.

Li studiamo ora da un punto di vista topologico.

Topologie lineari su un gruppo

Scegliamo una base di intorni di 0 del tipo $\mathscr{B} = \{U_i \leq A \mid i \in I\}$;
allora una base di intorni di $a \in A$ è formata dalle classi $a + U$ con $U \in \mathscr{B}$.

Esempi

$\mathscr{B} = \{nA \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ topologia $\mathbb{Z}$-adica
$\mathscr{B} = \{p^n A \mid n \in \mathbb{N}\}$ topologia p-adica.

- Rendono continue $(x, y) \mapsto x + y$ e $x \mapsto -x$;
- Sono Hausdorff se e solo se $\bigcap_{i \in I} U_i = \{0\}$;

Parliamo di reti $\{a_i\}_{i \in I}$ dotando I dell'ordine parziale $i \leq j \iff U_i \supseteq U_j$.

- Proprietà di Cauchy: $a_j - a_i \in U_i$ per ogni $j \geq i$.
- Completezza: se ogni rete di Cauchy è convergente ($\exists a \in A : a_j - a \in U_i$ per ogni $j \geq i$).

Quando parleremo di completezza, assumeremo sempre che i gruppi in questione siano Hausdorff.

Completamenti

- Un *completamento* di A è un gruppo topologico completo di cui A sia sottogruppo denso.
- Il completamento di un gruppo è unico a meno di omeomorfismo.
- Un modo per costruirlo è attraverso i limiti inversi.

Limiti inversi nel caso della topologia $\mathbb{Z}$-adica

Per ogni $n \leq m$ consideriamo i morfismi

$$\begin{aligned} \pi_{nm} \colon A/mA &\to A/nA \\ a + mA &\mapsto a + nA \end{aligned}$$

$$\varprojlim_n A/nA = \{(\cdots a_n + nA \cdots)_n \in \prod_{n>0} A/nA \mid \pi_{nm}(a_m + mA) = a_n + nA \text{ se } n \leq m\}$$

(sono gli elementi del prodotto che soddisfano $a_m - a_n \in nA$ per ogni $m \geq n$).

$\varprojlim_n A/nA$ è un completamento di A rispetto alla topologia $\mathbb{Z}$-adica.

Osservazione preliminare

Ogni gruppo abeliano può essere decomposto come $A = D \oplus R$ dove D è un gruppo divisibile e R è ridotto (non ha sottogruppi divisibili non banali).

- I gruppi divisibili sono algebricamente compatti
- La struttura dei gruppi divisibili è nota

Pertanto: è sufficiente studiare i gruppi algebricamente compatti ridotti.

Teorema

Un gruppo è ridotto algebricamente compatto se e solo se è completo nella topologia $\mathbb{Z}$-adica.

Teorema di struttura dei gruppi algebricamente compatti

A è un gruppo ridotto algebricamente compatto se e solo se

$$A = \prod_p A_p$$

con A_p completo nella sua topologia p-adica. Inoltre gli A_p sono determinati univocamente da A.

Esempio

Il gruppo J_p degli interi p-adici è algebricamente compatto.

$$J_p = \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

ha come elementi le serie formali $b_0 + b_1 p + \cdots + b_n p^n + \ldots$ con $b_i \in \{0, \ldots, p-1\}$.

Teorema di struttura dei gruppi algebricamente compatti

A è un gruppo ridotto algebricamente compatto se e solo se $A = \prod_p A_p$ con A_p completo nella sua topologia p-adica.

($\Longrightarrow$)

- $A \oplus B = C = \prod_p C_p$ con C_p prodotto diretto di p-gruppi ciclici.
- Per la piena invarianza di C_p si ha $C_p = (A \cap C_p) \oplus (B \cap C_p) =: A_p \oplus B_p$
- $C = \prod_p C_p = \prod_p (A_p \oplus B_p) = (\prod_p A_p) \oplus (\prod_p B_p)$
- Dalla divisibilità di $\prod_p A_p / \bigoplus_p A_p$ si arriva a dimostrare che $\prod_p A_p \leq A$.
- $A = \prod_p A_p \cong A_q \oplus \prod_{p \neq q} A_p$
- A completo e Hausdorff $\Longrightarrow$ A_q Hausdorff e completo nella sua topologia $\mathbb{Z}$-adica (uguale alla sua topologia q-adica).

Teorema di struttura dei gruppi algebricamente compatti

A è un gruppo ridotto algebricamente compatto se e solo se $A = \prod_p A_p$ con A_p completo nella sua topologia p-adica.

($\Longleftarrow$)

- A_p completo nella topologia p-adica $\implies$ A_p è un modulo su $\mathbb{Z}_p$
- $qA_p = A_p$ per ogni primo $q \neq p$ $\implies$ la topologia $\mathbb{Z}$-adica di A_p coincide con la sua topologia p-adica
- A_p è completo nella sua topologia p-adica $\implies$ $\prod_p A_p$ lo è.