Rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo paralelo a $\hat{k}$

Seja $\vec{L}$ o momento angular total de um sistema formado por N partículas:

$$\vec{L} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(\vec{r}_\alpha \times \dot{\vec{r}}_\alpha\right).$$

Como

$$\dot{\vec{r}}_\alpha = \vec{v}_\alpha = \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha,$$

temos

$$\vec{L} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \big(\vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)\big).$$

Assumindo

$$\vec{\omega} = \omega\,\hat{k}, \qquad \vec{r}_\alpha = x_\alpha\,\hat{\imath} + y_\alpha\,\hat{\jmath} + z_\alpha\,\hat{k},$$

então

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha = \omega\,x_\alpha\,\hat{\jmath} \;-\; \omega\,y_\alpha\,\hat{\imath},$$
$$\vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) = -\,\omega\,x_\alpha\,z_\alpha\,\hat{\imath} -\,\omega\,y_\alpha\,z_\alpha\,\hat{\jmath} +\,\omega\,(x_\alpha^2 + y_\alpha^2)\,\hat{k}.$$

Logo,

$$\vec{L} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \big(-\,\omega\,x_\alpha\,z_\alpha\,\hat{\imath} -\,\omega\,y_\alpha\,z_\alpha\,\hat{\jmath} +\,\omega\,(x_\alpha^2 + y_\alpha^2)\,\hat{k}\big),$$
$$\vec{L} = \omega\,\sum_{\alpha=1}^{N} \big(-\,m_\alpha x_\alpha\,z_\alpha\,\hat{\imath} -\,m_\alpha y_\alpha\,z_\alpha\,\hat{\jmath} +\,m_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2)\,\hat{k}\big).$$

Definindo o momento de inércia I_{zz} e os produtos de inércia I_{xz}, I_{yz}:

$$I_{xz} = -\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha\,x_\alpha\,z_\alpha,$$
$$I_{yz} = -\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha\,y_\alpha\,z_\alpha,$$
$$I_{zz} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha\,(x_\alpha^2 + y_\alpha^2).$$

Então podemos escrever:

$$\vec{L} = L_x\,\hat{\imath} + L_y\,\hat{\jmath} + L_z\,\hat{k},$$

onde

$$L_x = \omega\,I_{xz},$$
$$L_y = \omega\,I_{yz},$$
$$L_z = \omega\,I_{zz}.$$

Para o caso contínuo, I_{zz}, I_{xz} e I_{yz} são dados por integrais em vez de somatórios:

$$I_{xz} = -\int x\,z\,dm,$$
$$I_{yz} = -\int y\,z\,dm,$$
$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2)\,dm.$$