1. Mostrare una formula tale per cui l'algoritmo di propagazione unitaria produce alla prima iterazione due nuove clausole unitarie, poi una e poi tre.

Partiamo da una formula:

$$\{x \vee y \vee \neg z,\ \neg x \vee w,\ \neg y \vee w,\ y,\ \neg y \vee x,\ \neg x \vee j,\ \neg x \vee k,\ \neg x \vee q\}$$

1° iterazione: $y = true \rightarrow I$

$$\{\neg x \vee w,\ w,\ x,\ \neg x \vee j,\ \neg x \vee k,\ \neg x \vee q\}$$

2° iterazione:

$w = true \rightarrow I$

$$\{x,\ \neg x \vee j,\ \neg x \vee k,\ \neg x \vee q\}$$

3° iterazione:

$x = true \rightarrow I$

$$\{j,\ k,\ q\}$$

Alla terza iterazione otteniamo 3 clausole unitarie. Ovviamente, se vogliamo rendere la formula sodisfacibile, si può fare un altro esempio dove alla fine si ottiene la clausola vuota.

$$\{x \vee y \vee \neg z,\ \neg x \vee w,\ \neg y \vee w,\ y,\ \neg y \vee x,\ \neg x \vee j,\ \neg x \vee k,\ \neg x \vee q,\ j \vee q,\ \neg q \vee k,\ q \vee z\}$$

1°: $y = true \rightarrow I$

$$\{\neg x \vee w,\ w,\ x,\ \neg x \vee j,\ \neg x \vee k,\ \neg x \vee q,\ j \vee q,\ \neg q \vee k,\ q \vee z\}$$

2°: $w = true \rightarrow I$

$\{x, \neg x \vee j, \neg x \vee k, \neg x \vee q, j \vee q, \neg q \vee k, q \vee z\}$

$3^\circ \quad x = \text{true} \longrightarrow I$

$\{j, k, q, j \vee q, \neg q \vee k, q \vee z\}$

$4^\circ \quad j = \text{true} \longrightarrow I$

$\{k, q, \neg q \vee k, q \vee z\}$

$5^\circ \quad k = \text{true} \longrightarrow I$

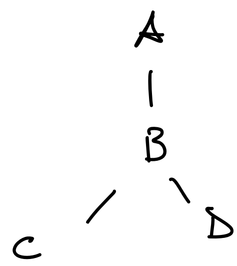
$\{q, q \vee z\}$

$6^\circ \quad q = \text{true} \longrightarrow I$

$\emptyset$

2. Mostrare un esempio di tableau ground in cui e' necessario espandere la stessa formula due volte in un ramo e tre volte in un altro, altrimenti il tableau non chiude.

In prima battuta, diciamo che dato un tableau



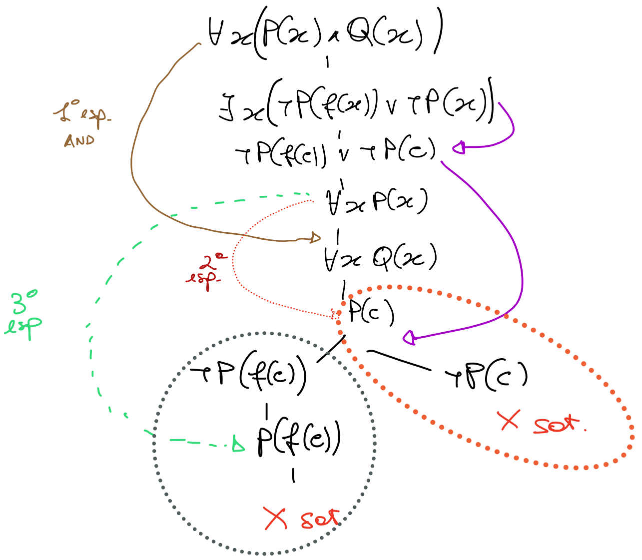
diciamo che possiamo avere 2 rami in totale:

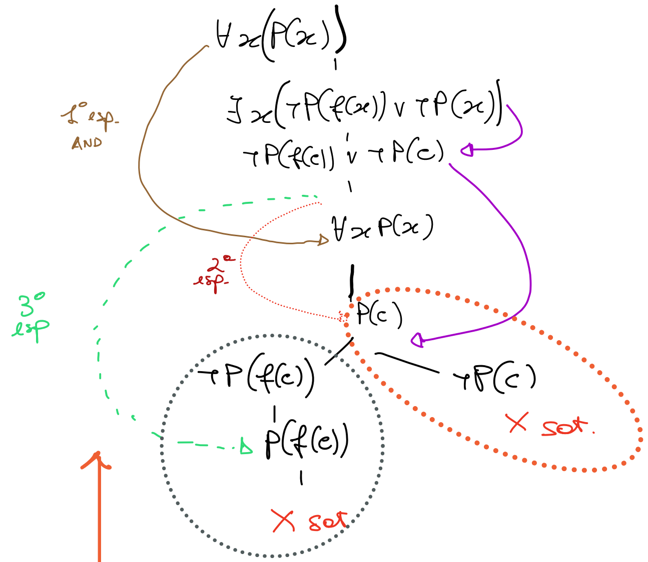
$$\begin{cases} B_1 = A \land B \land C \\ B_2 = A \land B \land D \end{cases}$$

Con queste premesse, possiamo costruire un tableau ground avente le stesse formule richiamate 2 volte nel ramo comune e 1 volta nel ramo di sinistra, avendo quindi la formula richiamata 3 volte in un ramo e 2 volte nell'altro

$\{\forall x(P(x) \land Q(x)), \exists x(\neg P(f(x)) \lor \neg P(x))\}$

$\{\forall x(P(x)), \exists x(\neg P(f(x)) \lor \neg P(x))$

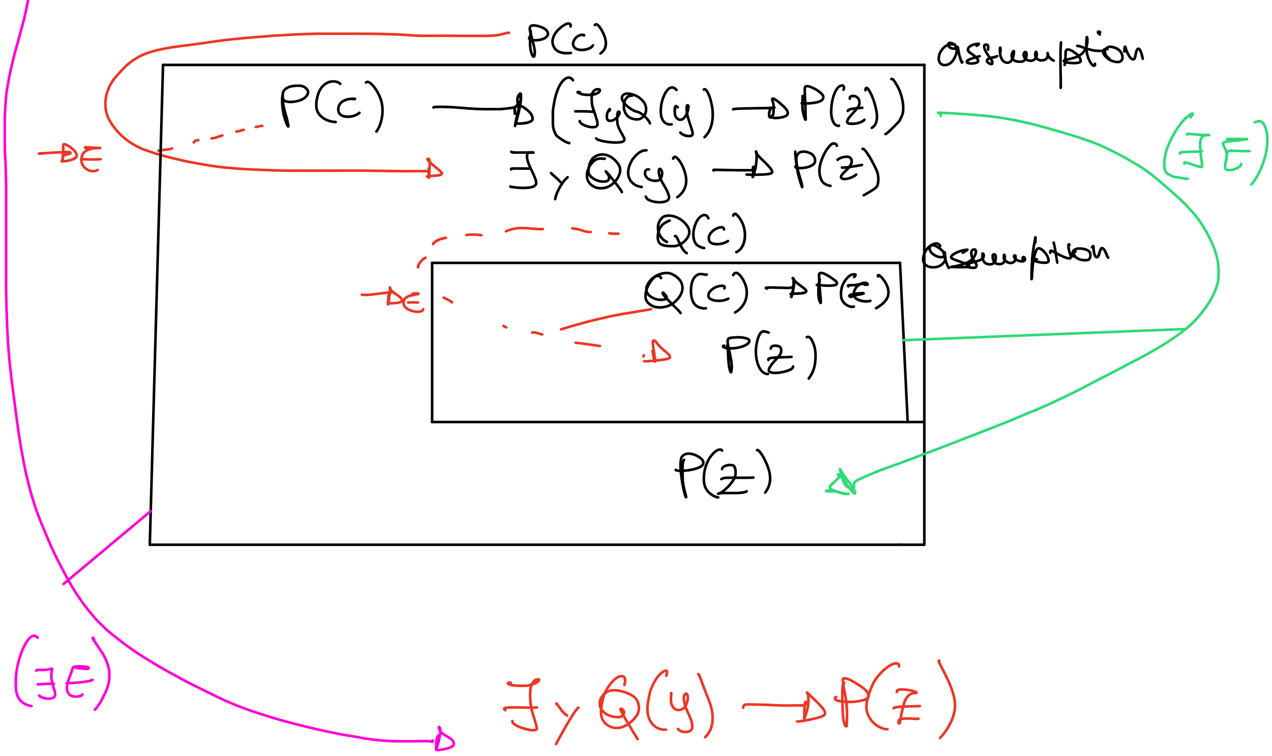




questo in quanto noi possiamo espandere solo formule e non sottoformule e, avendo $\forall x(P(x) \land Q(x))$, allora in questo caso $P(x)$ sarebbe una sotto formula. Allora usiamo solo $\forall x\, P(x)$ come FORMULA.

3. Mostrare una deduzione naturale del primo ordine che impiega due volte la regola di eliminazione dei quantificatori esistenziali.

$$\exists x \big(P(x) \to (\exists y Q(y) \to P(z))\big) \vdash (\exists y Q(y) \to P(z))$$



questo perché:

$$\dfrac{\exists x A \qquad \boxed{\begin{matrix} A[y/x] \\ \vdots \\ C \end{matrix}}}{C}\ (\exists E)$$

Se A è vera per qualche valore e per qualche valore abbiamo che $A \to C$, allora otteniamo C.