

Professor: Leonardo Mozelli – lamozi@ufmg.br

Tutorial 3 – Modelagem de Sistemas

1 Introdução

Neste tutorial é apresentada uma maneira de se realizar a modelagem de sistemas dinâmicos, sobretudo, elétricos e mecânicos, dando principal enfoque a sistemas de primeira e segunda ordens. Os conceitos apresentados podem ser estendidos para a modelagem de outros tipos de sistemas, como sistemas hidráulicos e sistemas térmicos.

2 Modelagem Matemática

Modelos matemáticos são sempre idealizações dos sistemas reais, válidos somente para excitações dentro de certos limites de amplitude e de frequência. A construção de um modelo matemático normalmente baseia-se em quatro atributos:

- Leis básicas;
- Simplicidade;
- Precisão;
- Validação.

Os três primeiros atributos podem ser adotados com o intuito de atender ao último. Note que particular cautela deve ser adotada para aplicar as leis básicas que regem o comportamento de um fenômeno físico. As hipóteses para aplicação de cada uma delas devem ser absolutamente observadas. A seguir destacam-se alguns fenômenos físicos e leis básicas que podem ser utilizadas para modelá-los:

- Processos mecânicos: Leis de Newton;
- Eletricidade, com parâmetros concentrados: Leis de Kirchhoff;
- Processos químicos e térmicos: Leis da termodinâmica;
- Processos fluídicos: Leis da mecânica dos fluídos.

É claro que um sistema dinâmico pode conter um ou mais fenômenos físicos envolvidos. Por exemplo, um motor de corrente contínua engloba os fenômenos elétrico (acionamento do motor) e mecânico (rotação de seu eixo).

Particular enfoque será dado aos sistemas elétricos e mecânicos ao longo desta apostila.

2.1 Sistemas Mecânicos

Para tornar a elaboração de um modelo matemático mais simples, os seguintes passos podem ser considerados:

- Arbitrar um sentido de movimento para cada componente (referencial inercial).
- Decompor o sistema em partes, identificando as interações entre elas (forças e momentos).
- Identificar e modelar forças externas.
- Assumir como dissipativas as forças produzidas por dispositivos básicos (molas e amortecedores) segundo os referenciais inerciais adotados.
- Adotar o Princípio de D'Alembert que afirma:

Em cada instante de tempo, incluída a força (torque) de inércia como dissipativa, a resultantes das forças (torques) que agem no centro de massa (rotação) é nula.

Para ilustrar o processo de obtenção de modelos matemáticos, considere os seguintes exemplos para mecânicas translacionais, rotacionais e ambas.

Exemplo 1. Considere o modelo massa-mola-amortecedor ilustrado na Figura 1, sendo m a massa do bloco, k o coeficiente de rigidez da mola, c o coeficiente de atrito viscoso do amortecedor e $f(t)$ uma força externa atuando sobre o sistema.

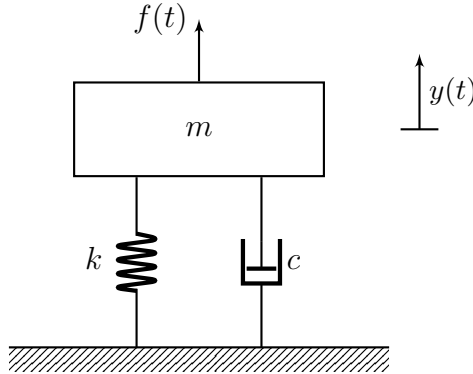


Figura 1: Sistema massa-mola-amortecedor.

Arbitrando o sentido de movimento (referencial inercial) do bloco como para cima, desenha-se o diagrama de corpo livre, identificando todas as forças atuantes sobre o bloco, como apresentado na Figura 2. Note que todas as forças dissipativas estão indicadas no sentido oposto ao referencial adotado.

A resultante das forças que atuam no centro de massa do bloco é obtida somando as forças em um sentido e igualando à soma das forças no sentido oposto. Portanto,

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) + mg = f(t) \quad (1)$$

Essa equação pode ser simplificada eliminando o efeito da força peso mg . Para tanto mede-se o deslocamento a partir da posição de equilíbrio estático, $x(t)$, obtida a partir da posição anterior, $y(t)$, e permitindo que a mola sofra uma deflexão estática δ_{est} , conforme apresentado na Figura 3.

Considerando que a deflexão da mola equilibra a força peso, ou seja, $mg = k\delta_{\text{est}}$, pode-se realizar uma transformação de coordenadas

$$y(t) = x(t) - \delta_{\text{est}} = x(t) - \frac{mg}{k} \quad (2)$$

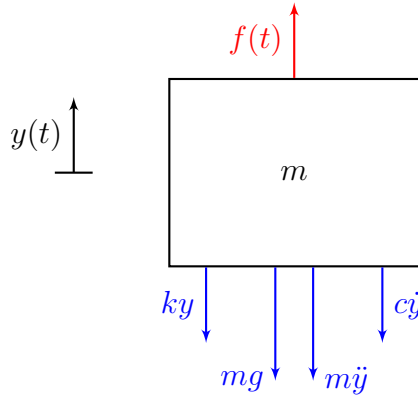


Figura 2: Diagrama de corpo livre para o sistema massa-mola-amortecedor.

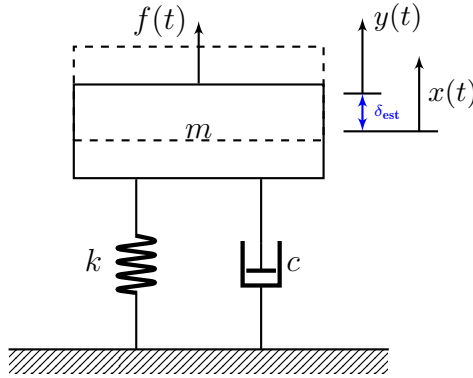


Figura 3: Sistema massa-mola-amortecedor na posição de equilíbrio estático.

Portanto, substituindo a equação (2) na equação (1), obtém-se a EDO de segunda ordem que constitui o modelo matemático do sistema da Figura 1

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

Assim, adotando a coordenada $x(t)$ a partir da posição de equilíbrio estático, é possível omitir a força peso mg da equação que descreve o sistema.

Exemplo 2. Neste exemplo é analisado o sistema de suspensão ativa veicular, cujos principais objetivos são minimizar distúrbios externos, oriundos de irregularidades no solo, e maximizar o conforto dos ocupantes do veículo. Para iniciar o modelamento, considere o modelo de um quarto de veículo apresentado na Figura 4.

Os parâmetros dados na figura são os seguintes:

- M – porção da massa do veículo.
- m – massa do conjunto da roda.
- k_s – coeficiente de amortecimento da suspensão.
- k_p – coeficiente de amortecimento do pneu.
- b – coeficiente de atrito viscoso.
- u – atuador.

O primeiro passo é desenhar o diagrama de corpo livre de cada uma das massas e, em seguida, identificar as forças atuantes, como mostrado na Figura 5. Todas as forças dissipativas

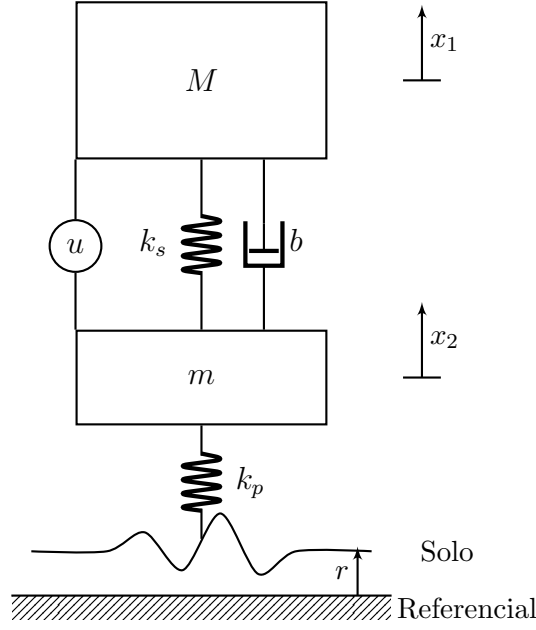


Figura 4: Modelo de um quarto de carro.

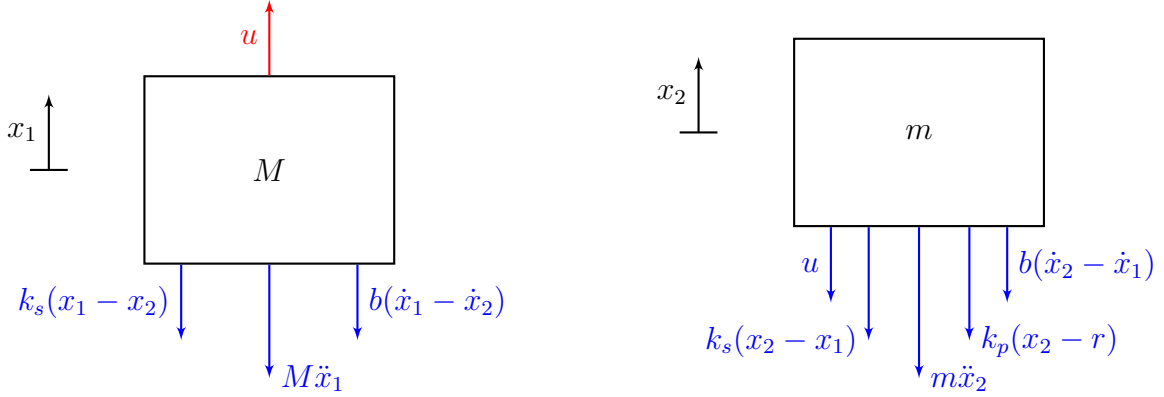


Figura 5: Diagramas de corpo livre para o sistema de suspensão ativa.

(incluindo a inércia) são indicadas como opostas ao sentido de movimento arbitrado. A força $u(t)$ do atuador gera um binário que empurra os blocos de massas M e m em sentidos opostos.

Para cada bloco, a soma das forças em um sentido deve ser igual a soma das forças no sentido oposto. Assim, as equações que descrevem o comportamento das massas são

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_1 + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_s(x_1 - x_2) &= u \\ m\ddot{x}_2 + b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_s(x_2 - x_1) + k_p(x_2 - r) + u &= 0 \end{aligned}$$

Exemplo 3. Neste exemplo é analisado o comportamento de um sistema de transmissão por correia, similar aos utilizados em motores de automóveis. O esquemático desse sistema é apresentado na Figura 6, sendo J_1 e J_2 as inércias de cada engrenagem, r_1 e r_2 seus raios e ω_1 e ω_2 as velocidades angulares de rotação das engrenagens. Ambas as engrenagens são conectadas por uma correia, de maneira que, ao se aplicar um torque de intensidade τ na engrenagem 1, a sua rotação produz uma rotação proporcional na engrenagem 2. As tensões nos pontos de contato da correia com as engrenagens são dadas por f_1 e f_2 e não há escorregamentos.

Para se obter um modelo desse sistema, primeiramente considere os diagramas de corpo livre apresentados na Figura 7.

A partir dos diagramas apresentados, as equações que descrevem o movimento das duas

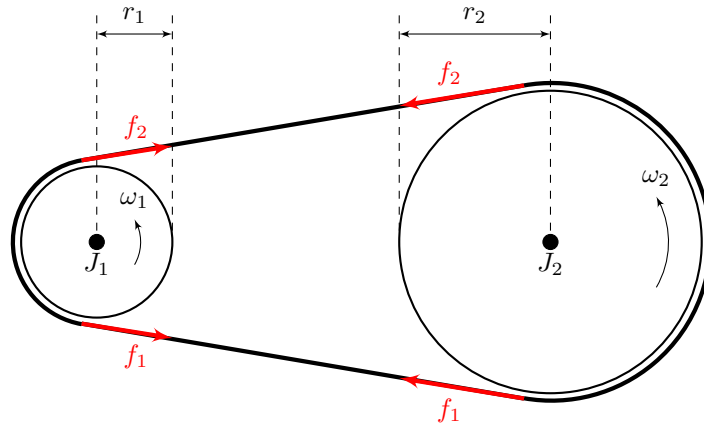


Figura 6: Sistema de transmissão por correia.



Figura 7: Diagramas de corpo livre para o sistema de transmissão por correia.

engrenagens são

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 + f_2 r_1 - f_1 r_1 &= \tau \\ J_2 \dot{\omega}_2 + f_1 r_2 - f_2 r_2 &= 0 \end{aligned}$$

Caso queiramos analisar o movimento da engrenagem 2 em função do torque de entrada τ aplicado à engrenagem 1, combinamos ambas as equações, eliminando f_1 , f_2 e ω_1 das relações. Assim, chega-se ao seguinte modelo

$$(J_1 r_2^2 + J_2 r_1^2) \dot{\omega}_2 = r_1 r_2 \tau.$$

Exemplo 4. Considere um pêndulo invertido de massa m e comprimento 2ℓ preso sobre um carrinho de massa M que trafega sobre uma superfície com coeficiente de atrito b , como ilustrado na Figura 8. A força u atua no carrinho de maneira a manter o pêndulo na posição vertical.

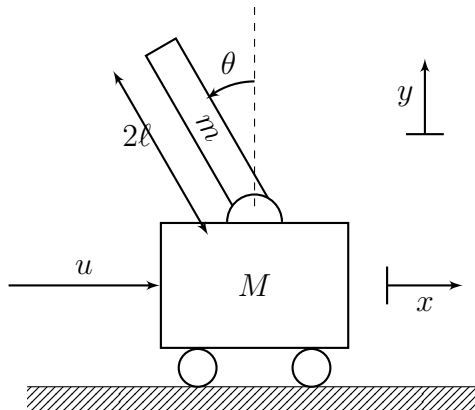


Figura 8: Sistema pêndulo invertido sobre carro.

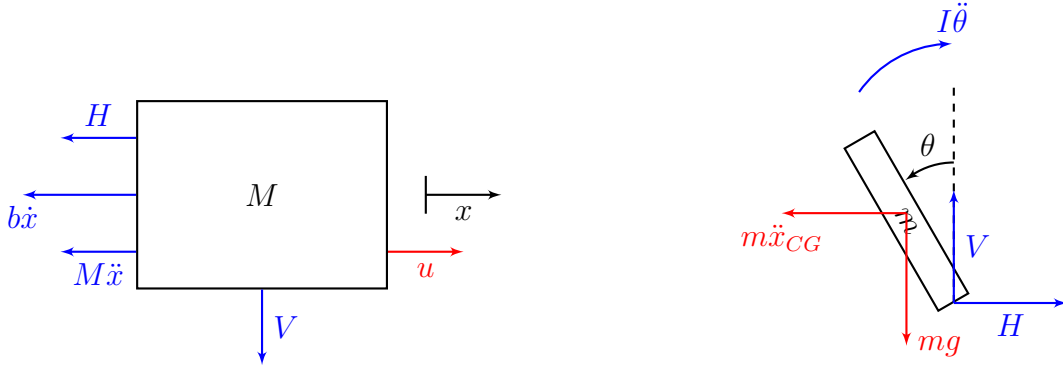


Figura 9: Diagramas de corpo livre para o pêndulo invertido sobre um carrinho.

O modelo para o sistema da Figura 8 pode ser obtido por meio do princípio de D'Alembert. Considere, portanto, os diagramas de corpo livre apresentados na Figura 9.

Definindo as coordenadas do centro de gravidade (CG) da haste como

$$x_{CG} = x + \ell \sin \theta, \quad y_{CG} = \ell \cos \theta$$

tem-se que o movimento rotacional da haste em torno do CG é dado por

$$I\ddot{\theta} + H\ell \cos \theta = V\ell \sin \theta. \quad (3)$$

O movimento horizontal do CG do pêndulo é

$$H = m\ddot{x}_{CG} = m \frac{d^2}{dt^2} (x + \ell \sin \theta) \quad (4)$$

e o movimento vertical do CG é

$$V = mg + m\ddot{y}_{CG} = mg + m \frac{d^2}{dt^2} (\ell \cos \theta). \quad (5)$$

Por fim, o movimento horizontal do carrinho é descrito por

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + H = u. \quad (6)$$

Substituindo, então H e V dados, respectivamente, nas Equações (4) e (5) em (3) e (6) e expandindo, temos que

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta} + m(\ddot{x} - \ell\dot{\theta}^2 \sin \theta + \ell\ddot{\theta} \cos \theta)\ell \cos \theta &= m\ell^2(-\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta) \sin \theta + mg\ell \sin \theta \\ (I + m\ell^2)\ddot{\theta} + m\ell\ddot{x} \cos \theta - mg\ell \sin \theta &= 0 \\ M\ddot{x} + b\dot{x} + m(\ddot{x} - \ell\dot{\theta}^2 \sin \theta + \ell\ddot{\theta} \cos \theta) &= u \\ (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} - m\ell\dot{\theta}^2 \sin \theta + m\ell\ddot{\theta} \cos \theta &= u \end{aligned}$$

2.2 Sistemas Elétricos

No caso de sistemas elétricos, a modelagem é feita, sobretudo, utilizando as Leis de Kirchhoff, também conhecidas como Lei das Malhas e Lei dos Nós, as quais são enunciadas como a seguir:

- **Lei de Kirchhoff das correntes (Lei dos Nós):** A soma algébrica das correntes deixando um nó é igual à soma algébrica das correntes que entram nesse nó.
- **Lei de Kirchhoff das tensões (Lei das Malhas):** A soma algébrica das tensões tomadas em torno de um caminho fechado em um circuito é zero.

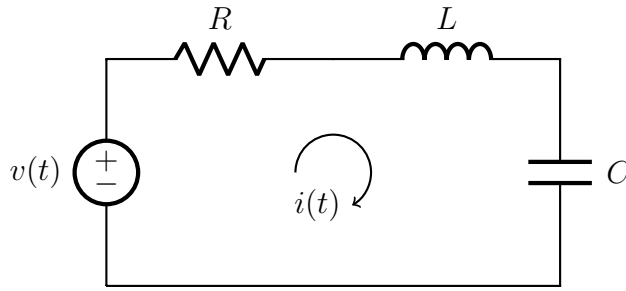


Figura 10: Circuito em ponte-T.

Os dois exemplos apresentados ilustram a utilização de cada uma dessas metodologias.

Exemplo 5. Considere um circuito elétrico do tipo RLC em série, representado na Figura 10, cuja entrada é a tensão $v(t)$ aplicada pela fonte ideal de tensão e cuja variável de saída é a corrente $i(t)$ no circuito.

A equação que relaciona a variável de saída $i(t)$ à variável de entrada $v(t)$ pode ser obtida aplicando a lei de Kirchhoff das tensões

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = v(t) \quad (7)$$

Por outro lado, considerando que a variável de saída é a carga $q(t)$ no capacitor, ao invés da corrente no circuito, e lembrando que $q(t) = \int_0^t i dt$, a equação (7) pode ser reescrita como

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = v(t)$$

Exemplo 6. Considere o circuito em ponte-T apresentado na Figura 11. Esse circuito é alimentado por uma tensão de entrada $v_i(t)$ e deseja-se medir a tensão de saída $v_o(t)$. Neste exemplo é utilizada a Lei das Malhas para equacionamento do circuito.

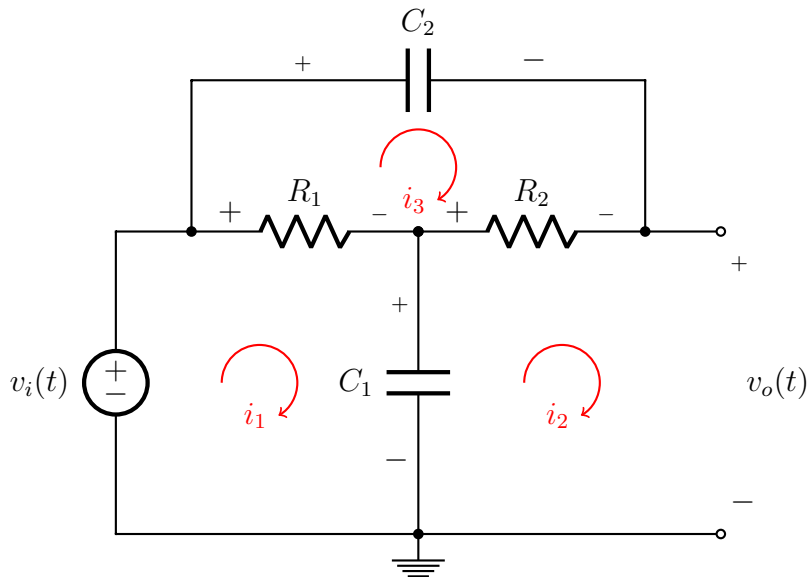


Figura 11: Circuito em ponte-T.

Sejam as correntes i_1 , i_2 e i_3 definidas de modo arbitrário. As equações do circuito são:

$$\begin{aligned} -v_i + R_1(i_1 - i_3) + v_{C_1} &= 0 \\ -v_{C_1} + R_2(i_2 - i_3) + v_o &= 0 \\ v_{C_2} + R_2(i_3 - i_2) + R_1(I_3 - i_1) &= 0 \\ i_2 &= 0, \quad i_1 = C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt}, \quad i_3 = C_2 \frac{dv_{C_2}}{dt} \end{aligned}$$

Escolhendo as variáveis de estados como as tensões nos capacitores, uma representação do modelo do sistema no espaço de estados é tal que

$$\begin{bmatrix} \frac{dv_{C_1}}{dt} \\ \frac{dv_{C_2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \frac{1}{C_1} & \frac{1}{R_2 C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_2} & \frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \frac{1}{C_1} \\ -\frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} v_i$$

$$v_o = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \end{bmatrix} - v_i$$

Exemplo 7. A Figura 12 apresenta um circuito com amplificador operacional, cujo ganho é suposto infinito. Nessa configuração as tensões v_1 e v_2 em suas entradas podem ser consideradas iguais (terra virtual).

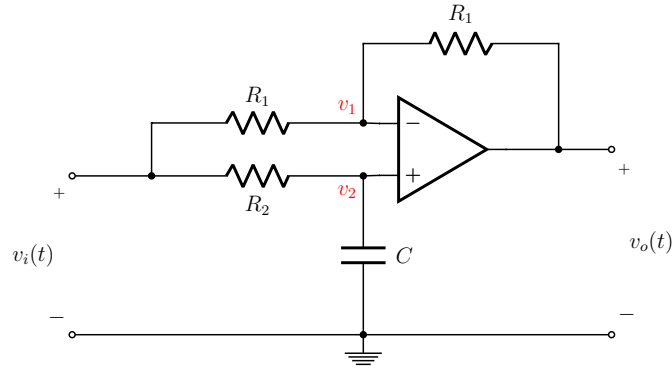


Figura 12: Circuito com amplificador operacional.

Aplicando a Lei dos Nós, as equações que descrevem o comportamento do circuito são:

$$\begin{aligned} \frac{v_i - v_1}{R_1} + \frac{v_o - v_1}{R_1} &= 0 \\ \frac{v_i - v_2}{R_2} - C \frac{dv_2}{dt} &= 0 \\ v_1 &= v_2 \end{aligned}$$

Escolhendo a tensão no capacitor como a variável de estado de interesse, o modelo no espaço de estados do sistema é

$$\begin{aligned} \frac{dv_2}{dt} &= \left[-\frac{1}{R_2 C} \right] v_2 + \left[\frac{1}{R_2 C} \right] v_i \\ v_o &= 2v_2 - v_i \end{aligned}$$

3 Exercícios

1. No texto, foi deduzido o modelo matemático para um sistema massa-mola-amortecedor no qual a mola e o amortecedor viscoso se encontravam em paralelo. Deduzir a EDO para um sistema massa-mola-amortecedor no qual a mola e o amortecedor se encontram em série. Quantos graus de liberdade tem esse sistema?

2. Determine os modelos matemáticos para os sistemas apresentados nas Figuras 13, 14, 15 e 16.

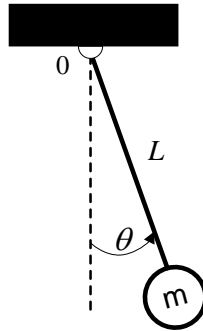


Figura 13: Pêndulo Simples.

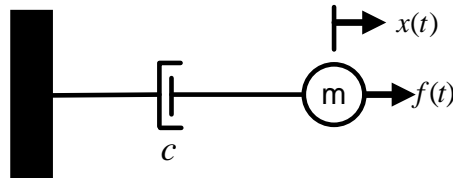


Figura 14: Sistema Massa-Amortecedor.

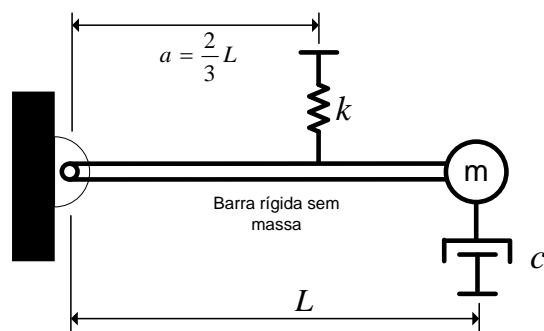


Figura 15: Sistema de suspensão.

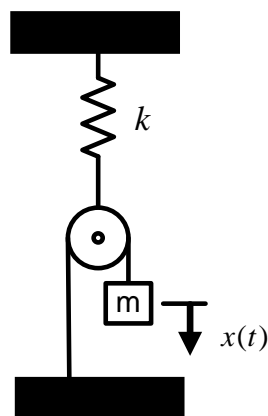


Figura 16: Sistema com polia.

3. Considere o pêndulo apresentado na Figura 13 e o modelo matemático encontrado no Exercício 2. Assuma que, para pequenas oscilações, $\sin(\theta) \approx \theta$ em radianos. Linearize o modelo matemático do pêndulo, transformando-o em uma EDO linear.