Universidade Federal de Minas Gerais
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELETRÔNICA
ELT129 – Oficina de Modelagem e Simulação

Professor: Leonardo Mozelli – lamoz@ufmg.br

Tutorial 5 – Resposta de Sistemas a Entradas do Tipo Impulso e Degrau Unitários

1 Introdução

No Tutorial 4 foi apresentada a resposta livre de sistemas lineares. Neste tutorial a resposta transitória de sistemas de primeira e segunda ordem será analisada quando entradas do tipo impulso e degrau são utilizadas como funções de teste.

2 Resposta transitória

A resposta $y(t)$ de um sistema linear a uma excitação $u(t)$ é constituída de duas parcelas: parcela transitória $y_{\text{tr}}(t)$ e parcela estacionária (ou de regime permanente) $y_{\text{rp}}(t)$.

Para sistemas estáveis, no domínio do tempo, a resposta transitória possui relação direta com a dinâmica do sistema, isto é, a equação diferencial que rege o seu comportamento. Essa resposta esvanece ao longo do tempo, dando lugar a resposta estacionária. A parcela que perdura na saída após passado o transitório, é essencialmente caracterizada pelo sinal de entrada $u(t)$, sendo modulada por características estáticas do sistema.

No domínio da frequência, esse comportamento está associado a análise de polos e zeros da função de transferência do sistema. Tomando um sistema com polos e zeros puramente reais e sem multiplicidade:

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= G(s)U(s) \\
&= \left(\frac{\prod_{i=1}^{m} s + z_i}{\prod_{i=1}^{n} s + p_i}\right)\left(\frac{\prod_{i=1}^{l} s + z_i^e}{\prod_{i=1}^{k} s + p_i^e}\right) \\
&= \frac{A_1(s)}{s + p_1} + \frac{A_2(s)}{s + p_2} + \cdots + \frac{A_n(s)}{s + p_n} + \frac{A_{n+1}(s)}{s + p_1^e} + \frac{A_{n+k}(s)}{s + p_k^e}
\end{aligned}
$$

A componente transitória é aquela que provém das frações parciais que contêm os polos da função de transferência do sistema. A resposta forçada, por outro lado, é relacionada aos polos do sinal de entrada. Por exemplo, uma entrada do tipo degrau unitário se refere a um polo na origem; uma entrada em rampa acrescenta dois polos na origem.

3 Representação de sistemas lineares em Matlab

A função de transferência $G(s)$ de um sistema pode ser representada por dois vetores-linha. Os vetores-linha contêm os coeficientes do numerador e do denominador de $G(s)$ com potências de s decrescentes. Um vetor de tamanho 3 corresponde a um polinômio de grau 2, como a seguir:

$$
[\overset{s^2}{1}\ \overset{s^1}{2}\ \overset{s^0}{1}] \Rightarrow s^2 + 2s + 1
$$

Por exemplo:

```
>> num = [0 2 25];
>> den = [1 4 25];
```

A função de transferência $G(s)$ pode ser então determinada por meio do comando `tf`, isto é,

```
>> G = tf(num,den);
```

Note que a ordem do polinômio do numerador de $G(s)$ é, geralmente, inferior à ordem do polinômio do denominador. Se o numerador de $G(s)$ é convenientemente completado com zeros, a dimensão dos vetores `num` e `den` é a mesma. Uma vantagem de acrescentar zeros é que os vetores `num` e `den` podem ser, por exemplo, somados ou multiplicados ponto a ponto diretamente.

Se `num` e `den` (o numerador e o denominador da função de transferência de um sistema) são conhecidos, comandos como:

```
>> step(num,den);
>> step(num,den,t);
>> step(tf);
>> step(tf,t);
```

podem ser usados para gerar curvas de resposta ao degrau unitário de entrada.

4 Resposta ao impulso

No Tutorial 2 foi definido o impulso unitário (Delta de Dirac) como sendo a função $\delta(t)$, tal que

$$\delta(t-a) = 0, \qquad t \neq a$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)dt = 1$$

como ilustrado na Figura 1.

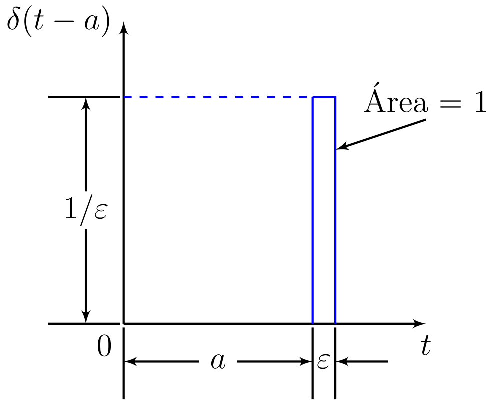

Figura 1: Impulso unitário.

Também foi mostrado que a transformada de Laplace do impulso unitário é dada por

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$$

e que, normalmente, o impulso ocorre no instante $a = 0$, o que resulta em $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$.

A resposta de um sistema ao impulso unitário aplicado no instante $t = 0$, com condições iniciais nulas, é chamada de resposta ao impulso. Evidentemente, se o impulso unitário for aplicado em um instante de tempo posterior, $t = a$, a resposta ao impulso será deslocada para a direita, ao longo do eixo do tempo, de um intervalo $t = a$.

4.1 Resposta de Sistemas de Primeira Ordem

Um sistema linear de primeira ordem pode ser representado pela equação diferencial

$$a\dot{x}(t) + bx(t) = f(t) \tag{1}$$

sendo a e b parâmetros constantes e $f(t)$ a entrada de excitação do sistema.

Tomando $f(t) = \delta(t)$ e aplicando a transformada de Laplace, para condições iniciais nulas, tem-se

$$X(s) = \frac{1}{as + b} \tag{2}$$

Tendo em vista que a constante de tempo para um sistema de primeira ordem pode ser definida como

$$\tau = \frac{a}{b}$$

a relação (2) é reescrita na forma

$$X(s) = \frac{1}{b\tau}\frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} = \frac{\frac{1}{b}}{\tau s + 1}$$

que são denominadas primeira e segunda formas padrão de sistemas de primeira ordem, respectivamente.

Realizando a transformada inversa de Laplace, obtém-se

$$x_\delta(t) = \frac{1}{b\tau}e^{-t/\tau}u(t) = \frac{1}{a}e^{-t/\tau}u(t)$$

sendo que $x_\delta(t)$ simboliza a resposta ao impulso unitário e $u(t)$ é o degrau unitário definido no Tutorial 2. Note que a resposta foi multiplicada por $u(t)$ tendo em vista que ela deve ser nula para $t < 0$ (sistema causal).

A resposta de um sistema de primeira ordem submetido a uma condição inicial $x(0) = x_0$ é tal que (como visto no Tutorial 4):

$$x(t) = x_0 e^{-t/\tau}$$

Portanto, conclui-se que a resposta ao impulso unitário de um sistema de primeira ordem é equivalente à resposta do mesmo a uma condição inicial. No presente caso, a condição inicial é o deslocamento inicial $x(0) = 1/a$.

4.2 Resposta de Sistemas de Segunda Ordem

Um sistema de dinâmico linear invariante no tempo de segunda ordem pode ser representado de forma geral pela equação diferencial

$$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = f(t)$$

sendo a, b e c parâmetros constantes e $f(t)$ uma entrada do sistema.

Substituindo $f(t)$ por $\delta(t)$ e tomando a transformada de Laplace para condições iniciais nulas:

$$(as^2 + bs + c)X(s) = 1 \quad \Rightarrow \quad X(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c}$$

Considerando que o sistema é subamortecido e levando em conta que $\omega_n = \sqrt{\frac{c}{a}}$ e que $\zeta = \frac{b}{2a\omega_n}$, obtém-se

$$X(s) = \frac{1}{a(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

Para obter a resposta no tempo, $x(t)$, primeiro expande-se o lado direito da relação em frações parciais e, em seguida, aplica-se a transformada inversa de Laplace

$$X(s) = \frac{1}{a(s_1 - s_2)}\left(\frac{1}{s - s_1} - \frac{1}{s - s_2}\right)$$

sendo s_1 e s_2 as raízes da equação característica $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ dadas por

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d \tag{3}$$

com ω_d a frequência natural amortecida, dada por

$$\omega_d = \omega\sqrt{1 - \zeta^2}$$

Portanto, aplicando a transformada inversa de Laplace, obtém-se

$$x(t) = \frac{1}{a(s_1 - s_2)}\left(e^{s_1 t} - e^{s_2 t}\right) u(t)$$

Substituindo s_1 e s_2 dadas em (3), chega-se à resposta de um sistema de segunda ordem ao impulso unitário

$$x_\delta(t) = \frac{1}{a\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_d t) u(t) \tag{4}$$

sendo que $x_\delta(t)$ representa a resposta ao impulso unitário e $u(t)$ é o degrau unitário.

Por outro lado, a resposta de um sistema de segunda ordem submetido às condições iniciais $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$:

$$x_\delta(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[x_0 \cos(\omega_d t) + \frac{\zeta\omega_n x_0 + \dot{x}_0}{\omega_d} \operatorname{sen}(\omega_d t)\right] = \frac{\dot{x}_0}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_d t) u(t)$$

Portanto, a resposta de um sistema de segunda ordem ao impulso unitário é equivalente à resposta do mesmo a uma condição inicial. No presente caso, a condição inicial é a velocidade inicial $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = 1/a$

Exemplo 1. O sistema:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

é chamado *sistema padrão de segunda ordem.* Os comandos:

```
>> printsys(num,den);
>> printsys(num,den,s);
```

imprimem *num/den* como uma relação de polinômios.

Considere o caso em que $\omega_n = 5 rad/s$ e $\zeta = 0.4$. O exemplo abaixo gera, em Matlab, o sistema de segunda ordem correspondente. Note no programa que `num0` é igual a 1.

```
% Programa 1
wn = 5;
damping_ratio = 0.4;
[num0,den] = ord2(wn,damping_ratio);
num = 5^2*num0;
printsys(num,den,'s')

num/den =

25
-------------
s^2 + 4 s + 25
```

O comando `ord2` gera uma função de transferência. O comando `tf(num,den)` tem um propósito semelhante ao comando `ord2` usado no exemplo. Verifique!

5 Resposta ao Degrau

No Tutorial 2, o degrau unitário foi definido como:

$$u(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{para } t < a \\ 1, & \text{para } t > a \end{cases}$$

como ilustrado na Figura 2.

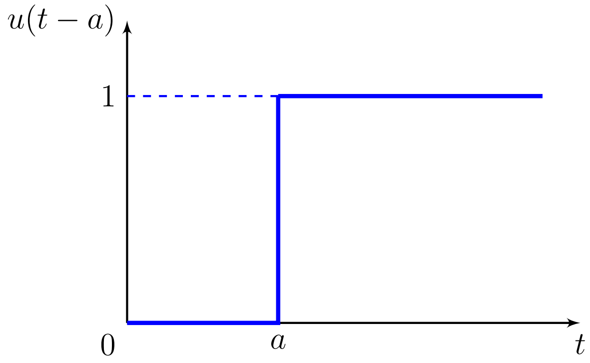

Figura 2: Degrau unitário.

Também foi visto que a Transformada de Laplace é dada por

$$U(s) = \frac{e^{-as}}{s}$$

e que, normalmente, o degrau ocorre no instante $a = 0$, o que resulta em $U(s) = \dfrac{1}{s}$.

A resposta de um sistema ao degrau unitário aplicado no instante $t = 0$, com condições iniciais nulas é chamada de resposta ao degrau. Evidentemente, se o degrau unitário for aplicado em um instante de tempo posterior, $t = a$, a resposta ao degrau será deslocada para a direita, ao longo do eixo dos tempos, de um intervalo $t = a$.

5.1 Resposta de Sistemas de Primeira Ordem

Considerando o modelo dado pela equação (1), substituindo $f(t)$ por $u(t)$ e aplicando a transformada de Laplace com condições iniciais nulas, tem-se

$$(as+b)X(s) = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{as+b}$$

que expandindo em frações parciais resulta

$$X(s) = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/\tau}\right)$$

onde τ é a constante de tempo definida anteriormente.

Aplicando a tranformada inversa de Laplace, tem-se a resposta ao degrau

$$x_u(t) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)u(t)$$

sendo que $x_u(t)$ simboliza a resposta ao degrau e $u(t)$ é o degrau unitário. Note que a resposta foi multiplicada por $u(t)$ tendo em vista que ela deve ser nula para $t < 0$.

O gráfico da resposta ao degrau de um sistema de primeira odem é apresentado na Figura 3.

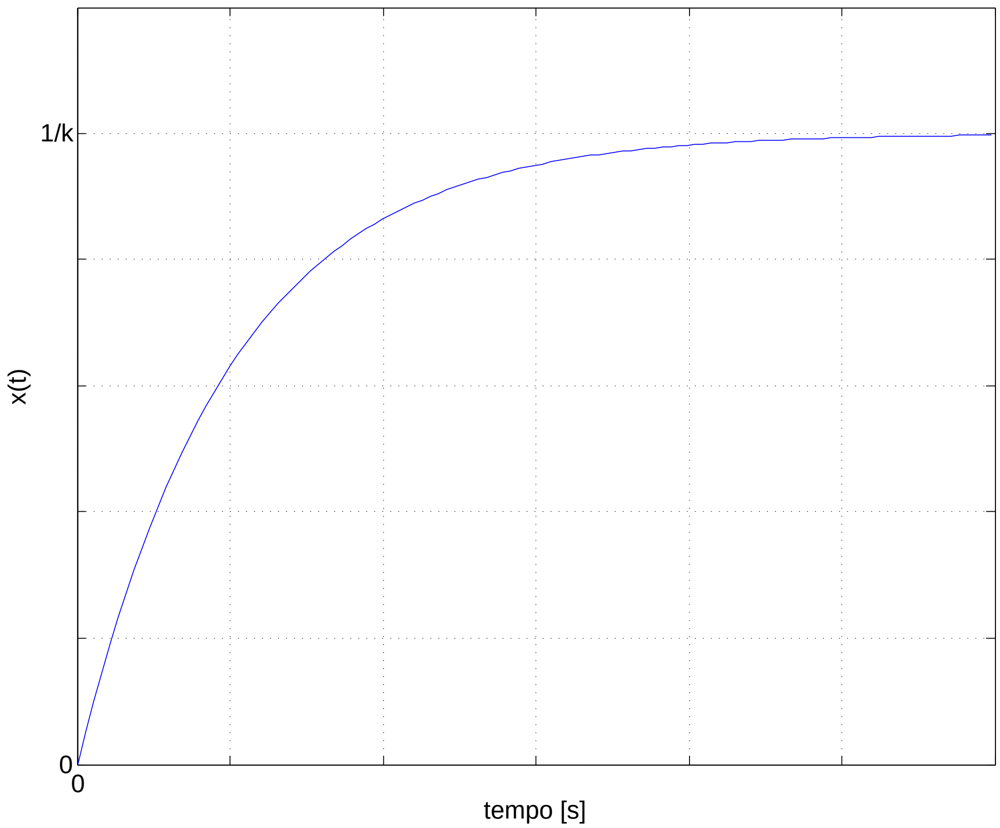

Figura 3: Resposta ao degrau de um sistema de primeira ordem.

5.2 Resposta de Sistemas de Segunda Ordem

Como discutido anteriormente, o degrau unitário é a integral do impulso unitário. Se o sistema é linear, é possível aplicar o Princípio da Superposição e concluir que a resposta ao degrau unitário é a integral da reposta ao impulso unitário, ou seja,

$$x_u(t) = \int_{-\infty}^{t} x_\delta(\epsilon) d\epsilon \tag{5}$$

A propriedade acima pode ser aplicada simplesmente substituindo $x_\delta(t)$, dado pela equação (4), em (5)

$$x_u(t) = \frac{1}{a\omega_d} \int_{-\infty}^{t} e^{-\zeta\omega_n\epsilon} \text{sen}\,(\omega_d\epsilon) u(\epsilon) d\epsilon$$

Levando em consideração a definição de degrau unitário, tem-se que

$$x_u(t) = \frac{1}{a\omega_d} \int_{0}^{t} e^{-\zeta\omega_n\epsilon} \text{sen}\,(\omega_d\epsilon) u(\epsilon) d\epsilon$$

e, usando a fórmula de Euler, $\text{sen}\,(\omega_d\epsilon) = \dfrac{e^{j\omega_d\epsilon} - e^{-j\omega_d\epsilon}}{2j}$, é possível realizar a integração, que leva à resposta ao degrau unitário

$$x_u(t) = \frac{1}{a}\left[1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}\text{sen}\,(\omega_d t)\right)\right] \tag{6}$$

O resposta temporal de um sistema de segunda ordem sujeito a uma entrada do tipo degrau unitário é ilustrado na Figura 4.

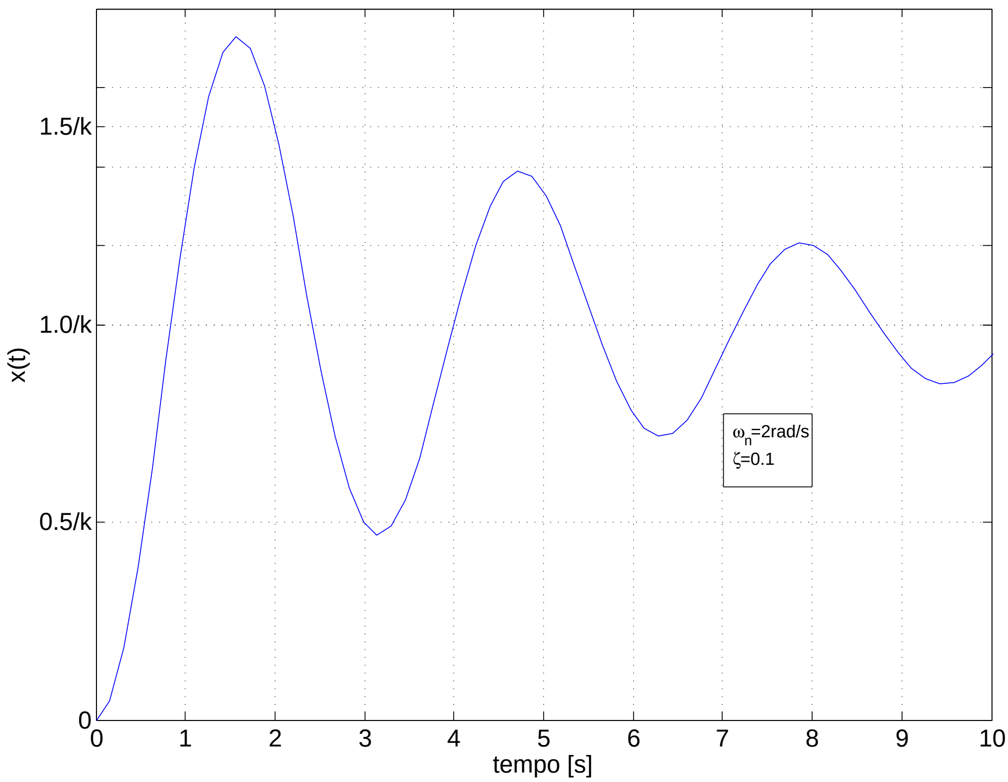

Figura 4: Resposta ao degrau de um sistema de segunda ordem.

Exemplo 2. Considere o sistema definido pela função de transferência

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 4s + 25}$$

O seguinte programa gera a curva de resposta ao degrau unitário desse sistema.

```
% Programa 2
% Resposta ao degrau unitario
% Numerador e denominador da funcao de transferencia
num = [0 0 25];
den = [1 4 25];
step(num,den)
% Inserir grade e titulo do grafico
grid on
title ('Resposta ao degrau unitario de G(s) = 25/(s^2+4s+25)')
```

Em geral, o rótulo dos eixos x e y são determinados automaticamente. Se for desejado rotular os eixos de modo diferente é necessário modificar o comando `step`. Por exemplo, for desejável rotular o eixo x como '$t(s)$' e o eixo y como 'Saída', então deve-se utilizar o comando com argumentos do lado esquerdo

```
>> C = step(num,den)
```

ou, mais genericamente,

```
>> [y,t,x] = step(num,den)
```

Em seguida, o gráfico pode ser construído a partir do comando `plot(t,y)`.

6 Critério de desempenho

As características de desempenho de um sistema são frequentemente especificadas em termos da resposta transitória a uma entrada em degrau unitário. A resposta transitória depende, sobretudo, das condições iniciais do sistema. É uma prática comum considerar condições iniciais nulas, isto é, considerar o sistema inicialmente em repouso.

Antes de atingir o estado estacionário, a resposta transitória pode apresentar oscilações amortecidas (sistema subamortecido). Observe que isto não se aplica a todos os casos, i.e., não se aplica a sistemas super e criticamente amortecidos.

Alguns critérios para avaliação de desempenho de sistemas de segunda ordem subamortecidos podem ser estabelecidos. Os critérios mais usualmente adotados são:

- **Tempo de subida** t_s**:** tempo para que a resposta atinja o seu valor final (pela primeira vez), ou para passar de 10% a 90% da diferença entre o valor inicial e de regime permanente. Por definição,

$$t_s = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1}\left(\frac{\omega_d}{-\sigma}\right) = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

  sendo β o ângulo entre o vetor ω_n e o eixo real do plano das frequências complexas, vide Figura 5.

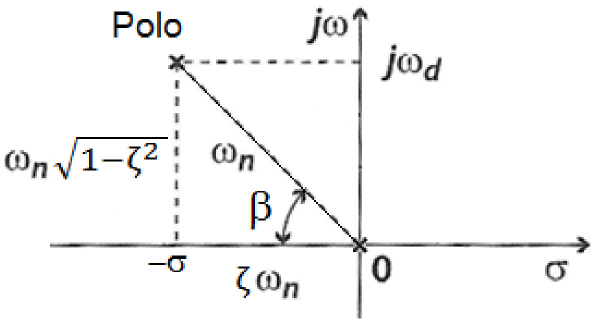

Figura 5: Definição do ângulo β.

- **Tempo de pico** t_p**:** tempo para que a resposta atinja o seu valor máximo.

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

- **Máximo sobressinal** M_p**:** máximo valor da resposta do sistema menos o valor final. O máximo sobressinal ocorre no tempo de pico. Por definição,

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi}$$

- **Tempo de acomodação** t_a**:** tempo para que a resposta se estabilize em $\pm 2\%$ ou $\pm 5\%$ do valor final. Definição para sistemas de segunda ordem subamortecidos:

$$t_{a2\%} = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$
$$t_{a5\%} = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

- **Erro de regime permanente** e_0**:** diferença entre o valor final desejado e o atingido: $e_0 = r - y_\infty$

A Figura 6 ilustra a resposta de um sistema subamortecido dado um degrau unitário de entrada. A figura enfatiza os critérios de desempenho especificados acima.

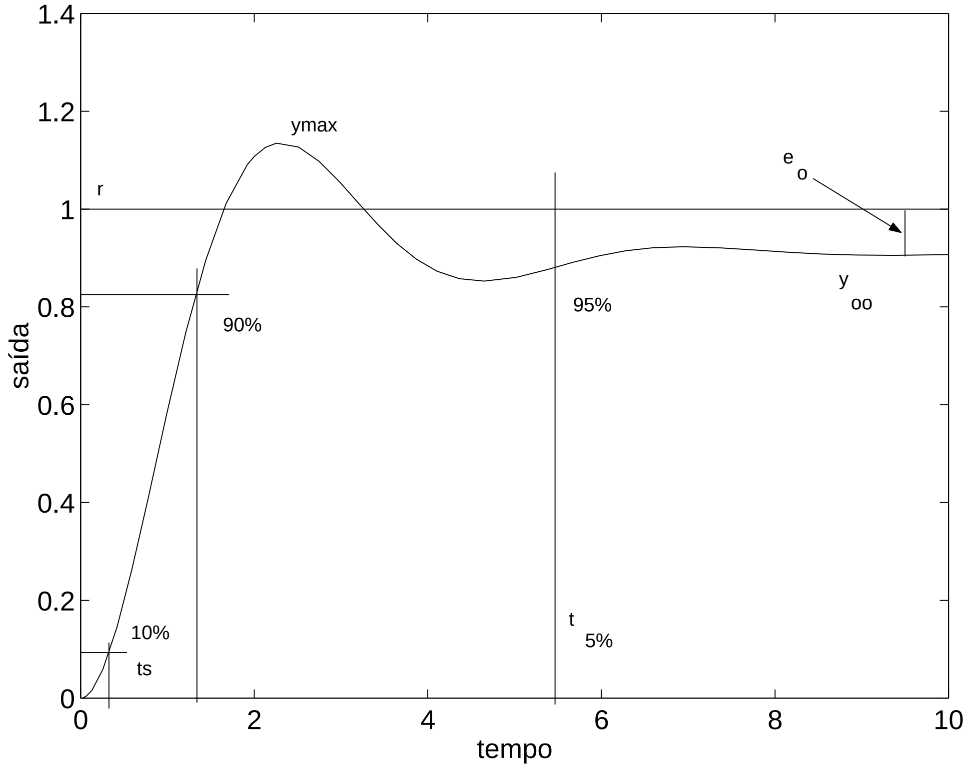

Figura 6: Especificações de um sistema de segunda ordem.

7 Exercícios

1. O sistema da Figura 7 é submetido a uma força impulsiva $f(t) = f_0\delta(t)$, com f_0 a amplitude do impulso. Determine a função de transferência do sistema e, usando o Matlab, apresente o deslocamento da massa m em função do tempo. Dados $m = 1\,kg$, $c = 10\,Ns/m$, $f_0 = 100\,N$.

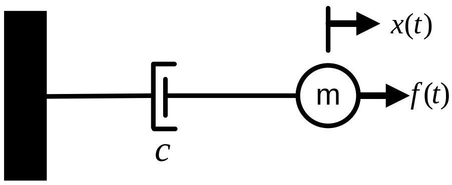

Figura 7: Sistema Massa-Amortecedor.

2. Idem exercício 1, porém agora a excitação é uma força constante $f(t) = f_0u(t)$. Compare a forma do gráfico com o da Figura 4.

3. Um sistema mecânico sem amortecimento, com $m = 1kg$ e $k = 100N/m$, inicialmente em repouso, é submetido a uma força constante com módulo $f_0 = 10N$. Apresente, graficamente, a resposta do sistema.

4. A partir da equação (6), deduzir uma expressão para a resposta do sistema do exercício anterior e graficá-la usando MatLab, comparando-a com o gráfico obtido anteriormente.

5. Seja $G(s) = \dfrac{10s+4}{s^2 4s+4}$ a função de transferência de um sistema em malha fechada. Usando Matlab, obtenha a resposta $y(t)$ quando é aplicado:

a. um impulso unitário de entrada

b. um degrau unitário de entrada

6. Considere o sistema de 4ª ordem definido por $G(s) = \dfrac{6.32s^2 + 18s + 12.81}{s^4 + 6s^3 + 11.32s^2 + 18s + 12.81}$. Desenhe a curva de resposta ao degrau unitário desse sistema. Obtenha o tempo de subida, tempo de pico, máximo sobressinal e tempo de acomodação.

7. Considere o sistema de malha fechada definido por $G(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$. Utilizando um loop `for`, escreva um programa para obter a resposta ao degrau unitário desse sistema para os seguintes casos:

   a. $\zeta = 0.3$ e $\omega_n = 1$

   b. $\zeta = 0.5$ e $\omega_n = 2$

   c. $\zeta = 0.7$ e $\omega_n = 4$

   d. $\zeta = 0.8$ e $\omega_n = 6$

   Apresente os gráficos das respostas em uma única figura, identificando adequadamente cada curva.

8. Considerando a mesma função de transferência e entrada do exercício anterior, obtenha as respostas do sistema variando o valor de ζ, para ω_n fixo em 1. Para quais valores de ζ o sistema é sub, super e criticamente amortecido?

9. Pesquise e análise os comandos tf2ss e ss2tf, comentando-os. Mostre um exemplo para um sistema de segunda ordem de como utilizar ambos os comandos.

10. Analise/Comente o código:

```
>> num = [0 2 25];
>> den = [1 4 25];
>> [u,t] = gensig('square',20,100,.01);
>> lsim (num,den,u,t)
```

Os comandos `impulse`, `stepinfo` e `ginput` podem ajudar.