Universidade Federal de Minas Gerais
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELETRÔNICA
ELT129 – Oficina de Modelagem e Simulação

Professor: Leonardo Mozelli – lamoz@ufmg.br

Tutorial 4 – Resposta livre de sistemas dinâmicos

1 Introdução

Neste tutorial é apresentada a análise da resposta livre de sistemas dinâmicos de primeira e de segunda ordens. O comportamento dos sistemas de primeira ordem é notadamente distinto do comportamento de sistemas de segunda ordem. Especificamente, a resposta livre dos sistemas de primeira ordem tende a ser aperiódica, ao passo que a resposta livre dos sistemas de segunda ordem é de natureza oscilatória (a não ser que o coeficiente de amortecimento do sistema seja muito "forte").

2 Resposta livre ou resposta à entrada nula

A resposta livre, ou resposta à entrada nula, de um sistema é a solução de uma equação diferencial linear quando a entrada é zero (equação diferencial homogênea), isto é:

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0)y(t) = 0$$

sendo

$$p^n = \frac{d^n}{dt^n}$$

Note que a resposta do sistema é baseada apenas na condição inicial. Fisicamente, a condição inicial é associada à energia armazenada no sistema no instante inicial.

Uma solução para esta equação diferencial pode ser obtida sistematicamente ou a partir de raciocínio heurístico. A equação mostra que uma combinação linear de $y(t)$ e suas n derivadas sucessivas é zero, para todo t. Tal resultado é possível se, e somente se, $y(t)$ e suas n derivadas sucessivas forem da mesma forma. Caso contrário, sua soma não pode ser zero para todos os valores de t. Apenas funções exponenciais $e^{\lambda t}$ têm essa propriedade. A demonstração é omitida aqui.

2.1 Exemplos

Encontre a resposta livre $y(t)$ de um sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial:

$$(p^2 + 3p + 2)y(t) = px(t)$$

As condições iniciais são $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = -5$.

Solução: Note que $y(t)$, sendo $x(t) = 0$, é a solução de:

$$(p^2 + 3p + 2)y(t) = 0$$

O polinômio característico do sistema é $\Delta(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$. A equação característica do sistema é, então, $\Delta(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$. As raízes características do sistema são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$. Consequentemente, a resposta à entrada nula possui a forma

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \tag{1}$$

Para determinar as constantes c_1 e c_2, é necessário derivar (1) para obter uma segunda equação. Logo,

$$\dot{y}(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t} \tag{2}$$

Fazendo $t = 0$ em (1) e (2), e substituindo as condições iniciais $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = -5$ tem-se que

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 + c_2 \\ -5 &= -c_1 - 2c_2 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema de equações encontra-se

$$c_1 = -5, \quad c_2 = 5$$

Portanto,

$$y(t) = -5e^{-t} + 5e^{-2t}$$

é a resposta à entrada nula de $y(t)$.

Um procedimento similar pode ser adotado quando há raízes iguais. Seja o sistema especificado pela equação diferencial:

$$(p^2 + 6p + 9)y(t) = (3p + 5)x(t)$$

Deseja-se determinar $y(t)$, a componente de entrada nula da resposta considerando as condições iniciais $y(0) = 3$ e $\dot{y}(0) = -7$.

O polinômio característico do sistema é $\Delta(\lambda) = \lambda^2+6\lambda+9 = (\lambda+3)^2$ As raízes características do sistema são $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$. A resposta à entrada nula é dada por

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-3t}$$

Pode-se encontrar as constantes arbitrárias c_1 e c_2 a partir das condições iniciais $y(0) = 3$ e $\dot{y}(0) = -7$ seguindo o procedimento do exemplo anterior. Dessa forma, obtém-se $c_1 = 3$ e $c_2 = 2$. Logo,

$$y(t) = (3 + 2t)e^{-3t}$$

Considere agora a resposta à entrada nula de um sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$(p^2 + 4p + 40)y(t) = (p + 2)x(t)$$

As condições iniciais são $y(0) = 2$ e $\dot{y}(0) = 16.78$.

O polinômio característico é $\lambda^2 + 4\lambda + 40 = (\lambda + 2 - j6)(\lambda + 2 + j6)$. Neste caso as raízes características são $-2 \pm j6$. A solução pode ser escrita tanto na forma complexa como na forma real. Na forma complexa temos $y(t) = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}$, com $\lambda_1 = -2 + j6$ e $\lambda_2 = -2 - j6$. Por sua vez, a solução real é[1]

$$y(t) = ce^{-2t} \cos(6t + \theta) \tag{3}$$

sendo c e θ constantes a serem determinadas a partir da condição inicial $y(0) = 2$ e $\dot{y}(0) = 16.78$. Diferenciando (3) tem-se

$$\dot{y}(t) = -2ce^{-2t} \cos(6t + \theta) - 6ce^{-2t} \mathrm{sen}\,(6t + \theta) \tag{4}$$

Fazendo $t = 0$ em (3) e (4) e substituindo as condições iniciais obtém-se

$$\begin{aligned} 2 &= c \cos(\theta) \\ 16.78 &= -2c \cos(\theta) - 6c\,\mathrm{sen}\,(\theta) \end{aligned}$$

[1]Usando a identidade de Euler: $e^{jx} = \cos x + j\mathrm{sen}\, x$

Desenvolvendo o sistema de equações:

$$c\cos(\theta) = 2$$
$$c\,\text{sen}\,(\theta) = -3.463$$

Logo,

$$c^2 = (2)^2 + (-3.463)^2 = 16 \;\Rightarrow\; c = 4$$

Dividindo $c\,\text{sen}\,(\theta)$ por $c\cos(\theta)$, tem-se

$$\tan(\theta) = \frac{-3.463}{2}$$

e

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-3.463}{2}\right) \approx \frac{\pi}{3}$$

Portanto,

$$y(t) = 4e^{-2t}\cos(6t - \frac{\pi}{3})$$

é a resposta à entrada nula.

3 Resposta livre de sistemas de primeira ordem

A resposta livre (ou natural) de um sistema é definida como a resposta do mesmo na ausência de uma excitação externa durante o movimento. Portanto, a causa do movimento se deve apenas às condições iniciais impostas ao sistema, ou seja, um deslocamento inicial $x(0) = x_0$.

Considere o modelo matemático de um sistema mecânico de primeira ordem dado por

$$c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

assumindo que não há excitação, isto é, $f(t) = 0$, e normalizando o sistema através da divisão deste pelo valor de c, tem-se

$$\dot{x} + ax(t) = 0 \tag{5}$$

no qual

$$a = \frac{k}{c}$$

é um parâmetro do sistema, cuja unidade SI é s^{-1}.

Para encontrar a resposta livre do sistema, deve-se resolver a equação (5). Usando o método da Transformada de Laplace, tem-se

$$sX(s) - x(0) + aX(s) = 0 \quad\Rightarrow\quad X(s) = \frac{x(0)}{s+a}$$

Realizando, então, a Transformada Inversa de Laplace, obtém-se a resposta livre no domínio do tempo

$$x(t) = x_0 e^{-at} \tag{6}$$

Pode-se, agora, definir a **constante de tempo** do sistema como:

$$\tau = \frac{1}{a} = \frac{c}{k} \tag{7}$$

Substituindo a, da equação (7), na equação (6), chega-se à resposta livre do sistema de primeira ordem:

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

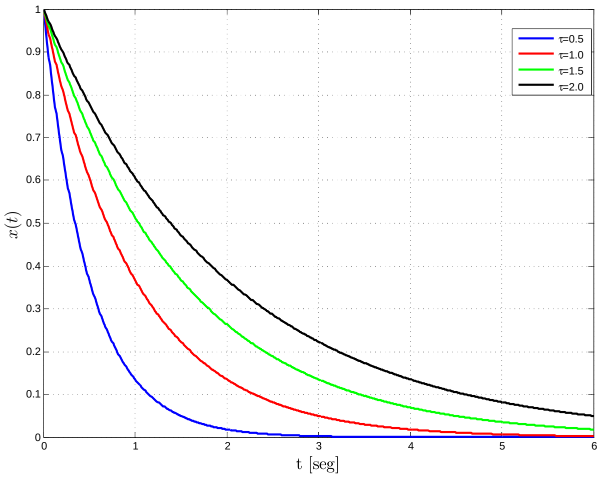

Figura 1: Resposta livre de um sistema de primeira ordem.

cuja resposta é apresentada na Figura 1 para vários valores de τ e considerando $x_0 = 1$. Observa-se que a constante de tempo τ é uma medida da capacidade de reação do sistema, ou seja, quanto maior a constante de tempo, mais lentamente este reage à condição inicial imposta. Isso é facilmente compreensível, do ponto de vista físico, quando se considera, de acordo com a equação (7), que o amortecedor c é mais "forte" do que a mola k.

4 Resposta livre de sistemas de segunda ordem

4.1 Frequência natural. Período natural. Coeficiente de amortecimento. Fator de amortecimento

Considere o modelo matemático de um sistema mecânico de segunda ordem

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

No caso de resposta livre, não existe excitação externa durante o movimento, de modo que $f(t) = 0$. O movimento é causado somente pelas condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$. Logo a EDO da resposta livre é dada por

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \tag{8}$$

Dividindo a equação (8) pela massa, tem-se

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0 \tag{9}$$

Para o sistema da equação (9), pode-se definir alguns parâmetros:

- **Frequência natural**

  A frequência natural é definida por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{10}$$

  onde a unidade SI é o rad/s. Note que k/m é o coeficiente da variável $x(t)$ da equação (9). A variável ω_n é denominada **frequência angular natural** ou **frequência circular natural**. No caso de se expressar esse parâmetro em Hz, basta dividir ω_n por 2π, passando a ser chamado de **frequência natural**

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Fisicamente, a frequência natural corresponde à quantidade de ciclos por segundo que o sistema apresenta quando em oscilação livre.

- **Período natural**

  É definido como o inverso da frequência natural, sendo a sua unidade no SI o s:

  $$\tau_n = \frac{1}{f_n} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

- **Coeficiente de amortecimento crítico**

  Trata-se de um parâmetro fictício. Todo sistema mecânico possui um coeficiente de amortecimento real, c, e um coeficiente de amortecimento crítico, c_{cr}, definido como

  $$c_{cr} = 2m\omega_n = 2\sqrt{km} \tag{11}$$

- **Fator de amortecimento (coeficiente de amortecimento)**

  É definido como a relação entre o coeficiente de amortecimento real, c, e o coeficiente de amortecimento crítico, c_{cr}:

  $$\zeta = \frac{c}{c_{cr}}$$

  O fator de amortecimento é adimensional.

  Considerando a equação (11), tem-se:

  $$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} \tag{12}$$

  Na expressão do fator de amortecimento estão presentes os três elementos básicos do sistema mecânico: m, c e k. Portanto, o fator de amortecimento representa todo o sistema.

4.2 Resposta livre de um sistema mecânico de segunda ordem

Considerando as equações (10) e (12), a equação (9) pode ser reescrita na forma

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = 0 \tag{13}$$

A solução da EDO de segunda ordem é dada por

$$x(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$

sendo A e B constantes a serem determinadas pelas condições iniciais do problema e s_1 e s_2 são as raízes da equação característica associada à EDO (13)

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

As raízes s_1 e s_2 são

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{14}$$

Evidentemente, os valores das raízes s_1 e s_2 são função do valor de ζ, podendo assumir valores reais ou complexos. Assim, dependendo do valor de ζ, quatro casos podem ser identificados:

1. $\zeta < 1$, o que implica em duas raízes complexas e conjugadas

2. $\zeta = 1$, o que implica em duas raízes reais e iguais

3. $\zeta > 1$, o que implica em duas raízes reais e distintas

4. $\zeta = 0$, o que implica em duas raízes imaginárias puras conjugadas

A Figura 2 ilustra os 4 casos no plano complexo.

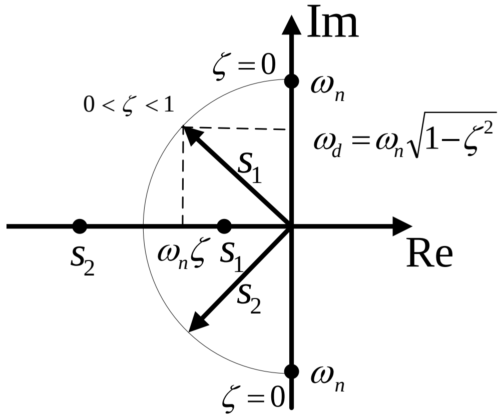

Figura 2: Raízes de um sistema de segunda ordem no plano complexo.

4.3 Caso 1. $\zeta < 1$ – Sistema subamortecido

Também conhecido como oscilação livre com amortecimento viscoso, é o caso de maior interesse em engenharia, devido à grande frequência com que acontece na prática. Um exemplo clássico é a suspensão independente de um automóvel, ilustrada na Figura 3.

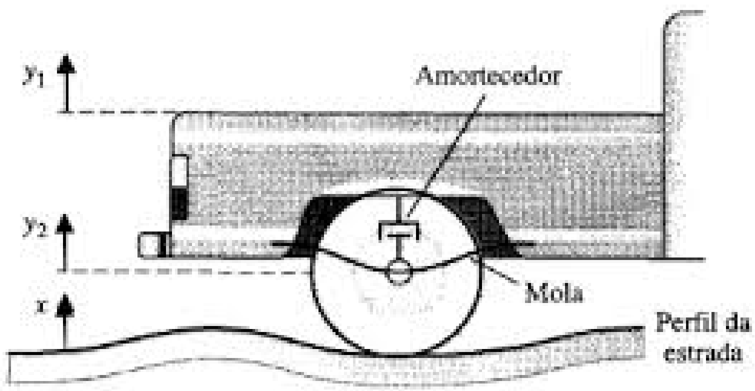

Figura 3: Suspensão de um automóvel.

Calculando a Transformada de Laplace da equação (13) e considerando as condições iniciais, tem-se

$$X(s) = \frac{(s + 2\zeta\omega_n)x_0 + \dot{x_0}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{15}$$

O denominador da equação (15) pode ser expresso como

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = (s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2$$

sendo

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

chamada de **frequência natural amortecida**.

Expandindo a equação (15) em frações parciais e realizando a Transformada Inversa de Laplace, obtém-se a resposta livre no domínio do tempo:

$$x(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \left[x_0 \cos(\omega_d t) + \frac{\zeta \omega_n x_0 + \dot{x}_0}{\omega_d} \text{sen}\,(\omega_d t) \right] \tag{16}$$

Analisando a equação (16), percebe-se que ela é composta pelo produto de uma função exponencial decrescente por uma função harmônica. A função harmônica é claramente oscilatória (composição de senos e cossenos), ao passo que a exponencial decrescente faz com que haja uma diminuição da amplitude da função harmônica à medida que o tempo avança. Trata-se portanto, de um movimento oscilatório amortecido, logo, de uma oscilação livre amortecida. A representação gráfica da equação (16) é apresentada na Figura 4, para um sistema com os seguintes parâmetros: $\zeta = 0.1$, $\omega_n = 5rad/s$, $x_0 = 0$ e $\dot{x_0} = 0.2m/s$.

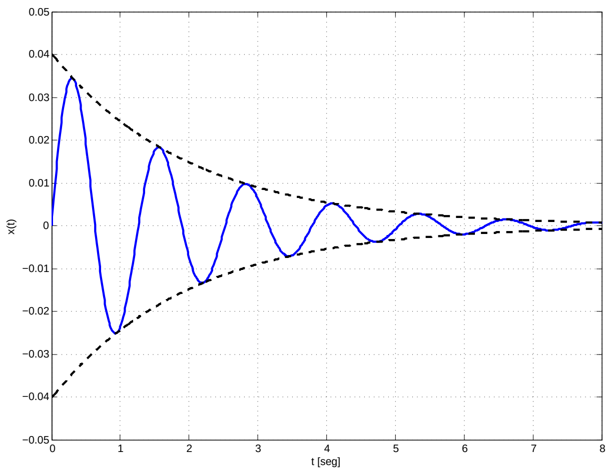

Figura 4: Resposta de um sistema de segunda ordem subamortecido.

4.4 Caso 2. $\zeta = 1$ – Sistema criticamente amortecido

Para obter a equação da resposta livre para esse caso, faz-se $\zeta = 1$ na equação (16), da qual obtém-se

$$x(t) = e^{-\omega_n t} \left[x_0 + (\omega_n x_0 + \dot{x}_0) t \right] \tag{17}$$

Examinando a equação (17), percebe-se que $x(t)$ é composto pelo produto de uma exponencial decrescente por uma linha reta, não havendo oscilação como no Caso 1. A Figura 5 ilustra a equação (17) para $\zeta = 1$, $\omega_n = 2rad/s$, posição inicial nula e alguns valores de velocidade inicial.

Esse caso recebe o nome de *movimento criticamente amortecido* exatamente pelo fato de se situar entre o movimento subamortecido e o movimento superamortecido. Uma característica importante do movimento criticamente amortecido é que, além de não apresentar oscilação, a volta ao repouso se dá em um tempo mínimo. Recomenda-se esse tipo de movimento para certas aplicações, tais como nos manipuladores robóticos e mecanismo recuperador de canhão, onde é desejável que o movimento de um ponto a outro se dê sem oscilação (por questões de precisão) e em um tempo mínimo (por questões de produtividade).

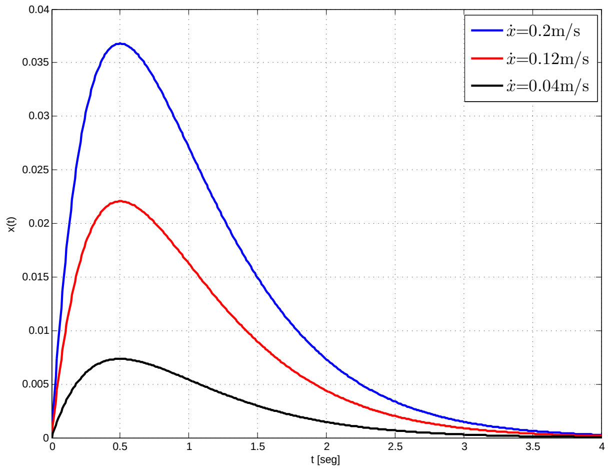

Figura 5: Resposta de um sistema de segunda ordem criticamente amortecido.

4.5 Caso 3. $\zeta > 1$ – Sistema superamortecido

Nesse caso, pode-se reescrever a equação (15) e colocá-la na forma

$$X(s) = \frac{c_1}{s+s_1} + \frac{c_2}{s+s_2}$$

sendo s_1 e s_2 as raízes dadas pela equação (14) e c_1 e c_2 são calculados aplicando as condições iniciais do problema. A solução é, portanto, dada por

$$x(t) = c_1 e^{-s_1 t} + c_2 e^{-s_2 t} \tag{18}$$

A Figura 6 apresenta a resposta da equação (18) para $\zeta = 1.4$, $\omega_n = 4rad/s$, posição inicial nula e alguns valores de velocidade inicial.

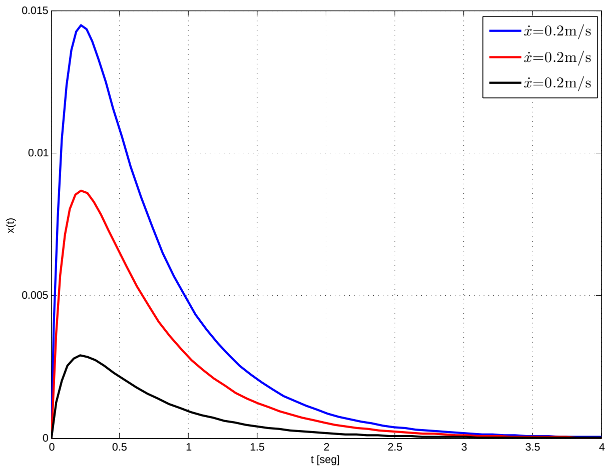

Figura 6: Resposta de um sistema de segunda ordem superamortecido.

Esse tipo de movimento recebe o nome de movimento superamortecido e não constitui uma oscilação, assim como no caso do movimento criticamente amortecido. A diferença entre esses dois tipos de movimento está no tempo de volta ao repouso. No caso do movimento criticamente amortecido, esse tempo é mínimo, enquanto no caso do movimento superamortecido ele não o é. Um exemplo clássico de movimento superamortecido é a porta equipada com um conjunto de mola-amortecedor, quando desejamos que a mesma, uma vez aberta, retorne à posição de fechamento sem oscilar, não havendo necessidade que tal se dê em um tempo mínimo.

4.6 Caso 4. $\zeta = 0$ – Sistema sem amortecimento

Embora não haja, na prática, um sistema totalmente desprovido de amortecimento, existem alguns casos em que o amortecimento é tão pequeno que se pode considerá-lo nulo. Nesse caso, o movimento é oscilatório, sendo também chamado de oscilação livre sem amortecimento, ou também, movimento harmônico. Exemplos clássicos são os sistemas pendulares, em que é desprezado o atrito na articulação e o atrito com o ar.

Para obter a resposta livre, basta considerar $\zeta = 0$ na equação (16), o que resulta em

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \text{sen}\,(\omega_n t) \tag{19}$$

A resposta da equação (19) é apresentada na Figura 7.

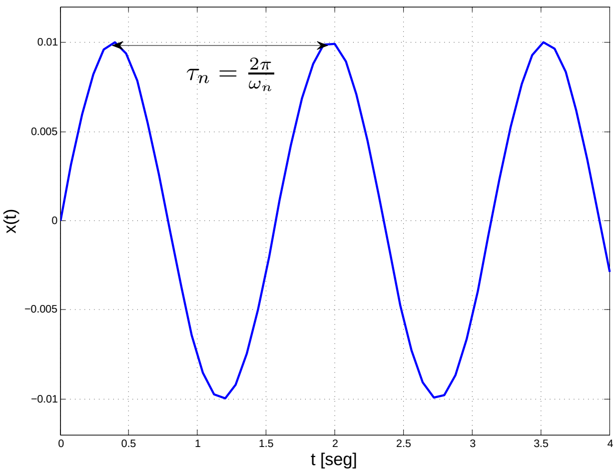

Figura 7: Resposta de um sistema de segunda ordem sem amortecimento.

5 Exercícios

1. Encontre a resposta à entrada nula de um sistema linear invariante no tempo descrito por $(p + 5)y(t) = x(t)$ com condição inicial $y(0) = 5$. Explore o comando `dsolve`.

2. Resolva $(p^2 + 2p)y(t) = 0$, com $y(0) = 1$ e $\dot{y}(0) = 4$.

3. Achar a resposta para a EDO de segunda ordem $\ddot{y}+3\dot{y}+2y = 8\text{sen}\,(5t)$, para as condições iniciais $\dot{y}(0) = 0$ e $y(0) = 0$.

4. Achar a resposta para a EDO de segunda ordem $\ddot{y} + 3\dot{y} + e^{-t}y = 8\text{sen}\,(5t)$, para as condições iniciais $\dot{y}(0) = 0$ e $y(0) = 0$.

5. Achar a resposta para a EDO com coeficientes constantes $\dddot{y} + 4\dot{y} = t$, para as condições iniciais $\dot{y}(0) = y(0) = 0$ e $\ddot{y}(0) = 1$.

6. Demonstrar a equação (15).

7. Demonstrar a equação (16).

8. Considere o sistema da Figura 8 cujo modelo matemático foi obtido no Tutorial 3 (Exercício 2). Assumindo $m = 100kg$, $c = 50N.s/m$ e $k = 1200N/m$, determine:

   a. Rigidez equivalente em N/m.

b. Frequência natural em Hz.

c. Fator de amortecimento.

d. Tipo de resposta livre.

e. Equação da resposta livre, sendo as condições iniciais dadas por um deslocamento angular inicial $\theta(0) = 0.15rad$ e velocidade inicial nula.

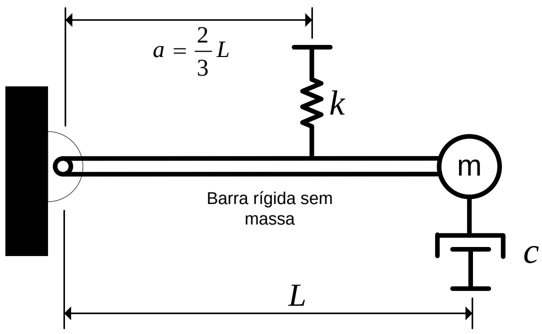

Figura 8: Sistema de supensão.

9. Dado o sistema com polia da Figura 9, cujo modelo matemático foi obtido no Tutorial 3 (Exercício 2), calcule:

a. Rigidez equivalente em N/m.

b. Frequência natural em Hz.

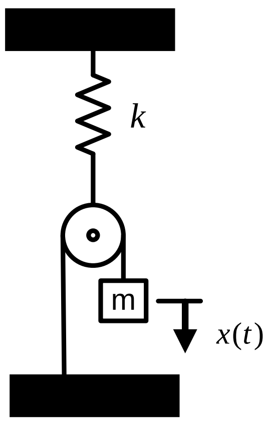

Figura 9: Sistema com polia.

10. Simular no MatLab a oscilação subamortecida correspondente à Figura 4. Usar a equação (16) com os dados apresentados na figura. Comparar o seu gráfico com o da apostila.

11. Simular no MatLab o movimento criticamente amortecido correspondente à Figura 5. Usar a equação (17) com os dados apresentados na figura. Comparar o seu gráfico com o da apostila.

12. Simular no MatLab o movimento superamortecido correspondente à Figura 5. Usar a equação (14) para calular s_1 e s_2. Usar as condições iniciais dadas na Figura 5 para calcular as constantes de integração c_1 e c_2. Usar a equação (18) para realizar a simulação. Comparar o seu gráfico com o da apostila.

13. Simular no MatLab o movimento sem amortecimento correspondente à Figura 7. Usar a equação (19) com os dados $\omega_n = 5rad/s$, $x_0 = 0$ e $\dot{x}_0 = 0.2m/s$. Comparar o seu gráfico com o da apostila.