Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Engenharia Eletrônica
ELT129 – Oficina de Modelagem e Simulação

Professor: Leonardo Mozelli – lamoz@ufmg.br

Tutorial 9 – Análise Frequencial

1 Introdução

Este tutorial tem o intuito de familiarizar o leitor com os Diagramas de Bode e a ferramenta conhecida como FFT (*Fast Fourier Transform*).

2 *Fast Fourier Transform* – FFT

FFT é o nome dado a algoritmos rápidos que calculam a DFT (*Discrete Fourier Transform*). Na DFT, o sinal é discreto nos domínios do tempo e da frequência e, portanto, pode ser representado em um computador digital. Note a diferença com relação à DTFT (*Discrete Time Fourier Transform*), que transforma um sinal discreto no tempo em um sinal contínuo na frequência.

Uma das propriedades da DTFT afirma que a um sinal discreto no tempo corresponde um sinal periódico na frequência. Analogamente, um sinal discreto no domínio da frequência implica em um sinal periódico no tempo. Dessa forma, pode-se entender a DFT como sendo a DTFT de um sinal discreto e finito no tempo que foi estendido para um sinal discreto e periódico na frequência.

Uma DFT mapeia um sinal discreto no tempo $x[n]$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ para um sinal discreto na frequência $X[\omega]$. À sequência temporal $x[n]$,

$$x[0],\ x[1 \cdot T_s],\ x[2 \cdot T_s],\ \ldots,\ x[(N-1) \cdot T_s],$$

corresponde uma sequência frequencial $X[\omega]$:

$$X[0],\ X[1 \cdot \frac{2\pi F_s}{N}],\ X[2 \cdot \frac{2\pi F_s}{N}],\ \ldots,\ X[(N-1) \cdot \frac{2\pi F_s}{N}],$$

sendo T_s o tempo de amostragem, $F_s = 1/T_s$ a frequência de amostragem e N o número de pontos disponíveis. Aqui há duas observações importantes:

- o número de pontos da DFT é o mesmo do sinal original;
- a resolução no domínio da frequência ($2\pi F_s/N$) será tanto melhor quanto maior o número N de pontos amostrados para uma taxa de amostragem fixa.

Ainda é importante notar que a DFT $X[\omega]$ de sinais reais é anti-simétrica em torno de πF_s.

Para iniciar o estudo das FFTs, consideremos o seguinte sinal periódico (qual o período fundamental?)

$$x(t) = \cos(2\pi t)\text{sen}\,(6\pi t)$$

o qual será amostrado com uma taxa F_s. Para conseguir representar adequadamente o sinal em tempo discreto, essa taxa deve ser superior a duas vezes, *no mínimo*, a frequência máxima do sinal. Em termos práticos, deve-se considerar uma taxa, ao menos, 10 a 20 vezes maior. O código a seguir calcula a FFT do sinal $x(t)$ e apresenta os gráficos de magnitude e fase do sinal transformado.

```
close all
clear
clc

Ts = 0.01;     % intervalo de amostragem
t = 0:Ts:8;
x = cos(2*pi*t) .* sin(6*pi*t);                   % sinal no tempo
X = fft(x);                                       % transformada

N = length(t);                                    % numero de
   pontos
w = 2*pi*(0:(N-1))/(N*Ts);                        % frequencia
   angular

figure
subplot(2,1,1), plot(w,abs(X));                   % magnitude
ylabel('|X|')
axis tight
subplot(2,1,2), plot(w,rad2deg(angle(X)))         % fase
ylabel('\angle X [deg]')
xlabel('\omega [rad/s]')
axis tight
```

Execute o código e observe o gráfico obtido. Uma primeira observação é de que o gráfico é anti-simétrico em torno de πF_s. Observamos também que $X[\omega]$ apresenta dois picos, um em 4π [rad/s] e outro em 8π [rad/s]. Esses picos confirmam nosso conhecimento de que $x[n]$ consiste num sinal periódico. De fato, se plotarmos $x(t)$, veremos que é um sinal periódico com período 0.5 [s].

```
figure
plot(t,x)
xlabel('t [s]')
ylabel('x(t)')
```

Calculemos em seguida a DFT de um sinal mais complexo, que corresponde à resposta de um sistema dinâmico linear sujeito a um ruído branco de entrada.

```
G=tf([10],[1 1 10]);    % funcao de transferencia do sistema
u=0.2*randn(N,1);       % ruido de entrada % N definido
   anteriormente
y=lsim(G,u,t');         % resposta do sistema % t definido
   anteriormente

figure
plot(t,u,t,y)
legend('u(t)','y(t)')
xlabel('t [s]')
```

Em seguida é calculado o espectro de $y(t)$ utilizando o comando `fft`$(\cdot)$ e os gráficos de magnitude e fase são traçados.

```
Y = fft(y);
figure
subplot(2,1,1)
```

```
semilogx(w, 20*log10(abs(Y)));
ylabel('|Y| [dB]')
axis tight
subplot(2,1,2)
semilogx(w, unwrap(rad2deg(unwrap(angle(Y)))));
ylabel('\angle Y [deg]')
xlabel('\omega [rad/s]')
axis tight
```

Neste caso o comando `unwrap` é utilizado para evitar saltos no diagrama de fase. Sem esse recurso, o diagrama de fase pode ter uma aparência ruidosa, dado que saltos de múltiplos de 2π são possíveis quando calculamos a fase pelo comando `angle`.

Alguns pontos significativos dos gráficos traçados são importantes de destacar:

- via de regra, quando as respostas de sistemas dinâmicos são analisadas, utiliza-se escala logarítmica no eixo das abscissas para cobrir uma maior faixa de frequências;

- um outro motivo para usar a escala logarítmica é que o comportamento da resposta tende a variar pouco para valores de frequência próximos (trace os gráficos utilizando o comando `plot` e analise o resultado);

- a máxima frequência representável nos gráficos é πF_s [rad/s] e está intimamente ligada com a taxa de amostragem utilizada;

- a amplitude do gráfico de magnitude é dada em decibéis [dB], cuja definição é

  $$Y_{\text{dB}}[\omega] = 20\log(|Y[\omega]|).$$

  Tal medida é adotada para ter uma representação mais significativa dos valores de amplitude, evidenciando também valores muito próximos de zero.

Além dos pontos destacados, vale frisar que sistemas dinâmicos são, geralmente, passa-baixas, ou seja, sinais de entrada com frequências baixas aparecem na saída do sistema ao passo que sinais com frequências altas são atenuados na saída.

Os gráficos traçados para a resposta do sistema são comumente denominados *Diagramas de Bode* e constituem uma importante ferramenta de análise para sistemas lineares. Esse assunto é abordado com mais detalhes na Seção 3.

2.1 Diferença entre a DFT e a Transformada de Fourier

Para compreender um pouco melhor as diferenças entre a DFT e a FT (*Fourier Transform*), tentemos realizar uma convolução usando `fft`. Definiremos dois vetores e realizaremos a convolução por dois métodos distintos: no primeiro usaremos o comando `conv`; no segundo vamos multiplicar as DFTs dos dois sinais e depois tomar a transformada inversa.

```
a=[1 2 3 4 5];
b=[5 1 2 3 4];
c=conv(a,b)  % convolucao no tempo

A=fft(a);
B=fft(b);

C=ifft(A.*B) % DFT inversa
```

Executando os comandos listados podemos ver que os resultados são discrepantes. A explicação para isso é que, enquanto o primeiro método consiste em uma convolução linear, o segundo consiste numa convolução circular, o que acontece devido ao fato de que a DFT assume que o sinal discreto no tempo é periódico.

Não obstante, é possível obter a convolução linear a partir da DFT. Para isso, é utilizado um procedimento conhecido como *zero-padding*, que consiste em preencher os sinais `a` e `b` com zeros de forma que a convolução circular dê o mesmo resultado que a convolução linear.

```
la=length(a);
lb=length(b);

a=[a zeros(1,lb-1)]    % zero-padding
b=[b zeros(1,la-1)]    % zero-padding

A=fft(a);
B=fft(b);

C=ifft(A.*B)
```

Execute o arquivo e observe que a convolução linear foi obtida por ambos os métodos. Usar a FFT desta forma para realizar convoluções é uma prática comum em filtragem de sinais.

Um detalhe digno de nota sobre a implementação da FFT é que os algoritmos são mais rápidos quando o número de pontos é uma potência de 2. Por isso, é uma prática comum completar o sinal com zeros até que o número de pontos atinja a próxima potência de 2.

3 Resposta em Frequência e Diagramas de Bode

O termo "resposta em frequência" se refere à resposta em regime permanente de um sistema a uma entrada senoidal. Os métodos de resposta em frequência foram desenvolvidos entre às décadas de 1930 e 1940 por Nyquist, Bode, Nichols e outros. Esses métodos são muito importantes nas teorias de controle clássico e controle robusto, provendo informações fundamentais tanto para análise do comportamento do sistema em uma faixa larga de valores frequenciais quanto para o projeto de controladores.

Uma vantagem dos métodos de resposta em frequência é que seus testes são, em geral, simples e podem ser realizados com exatidão com auxílio de um gerador de sinais senoidais. Variamos a frequência do sinal de entrada e estudamos a resposta resultante. Além disso, esses métodos podem ser aplicados diretamente a dados experimentais, isto é, dados obtidos a partir de medições de sistemas físicos (como fizemos anteriormente).

Funções de transferência senoidais são funções complexas da variável ω. Estas funções são caracterizadas por um módulo e um ângulo de fase; a frequência ω é um parâmetro independente. Dentre os métodos existentes para representação gráfica de uma função de transferência senoidal, focaremos o estudo nos Diagramas de Bode, que correspondem a dois gráficos, gráfico de módulo e gráfico de fase, os quais devem ser analisados em conjunto.

Como mencionado os diagramas de Bode podem ser obtidos a partir de dados experimentais, de forma similar ao realizado na Seção 2. Não obstante, é também possível fazer o traçado dos diagramas de Bode a partir da função de transferência do sistema em estudo. Iniciaremos nosso estudo traçando os diagramas de Bode referentes a funções de transferência conhecidas e, em seguida, veremos como obter funções de transferência aproximadas, para sistemas de primeira e segunda ordens, a partir de dados experimentais.

3.1 O comando `bode`

Para uma função de transferência genérica a tempo contínuo

$$G(s) = \frac{\text{num}(s)}{\text{den}(s)} = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

com $m, n \in \mathbb{N}$, os seus diagramas de Bode podem ser obtidos utilizando o comando `bode()` de três formas distintas.

```
bode(G)
bode(num,den)
bode(num,den,w)
```

Observação 1. Apesar dos valores de m e n poderem ser quaisquer naturais, usualmente assume-se $m \leq n$ para que a função de transferência seja própria. Funções impróprias acarretam no aparecimento de derivadas sucessivas da função impulso no tempo, não sendo, portanto, implementáveis.

A primeira forma do comando `bode` requer, inicialmente, a definição da função de transferência $G(s)$ por meio do comando `tf()`; a segunda maneira assume que são passados dois vetores correspondentes aos coeficientes do numerador (`num`) e do denominador (`den`), do termo de mais alta ordem para o termo de menor ordem; por fim, a última forma, considera que também é passado um vetor de frequências (`w`), nas quais a função de transferência será analisada. Como exemplo, vamos executar o seguinte código

```
G=tf([10],[1 1 10]);    % funcao de transferencia do sistema

figure
bode(G)
```

Veja que os diagramas de módulo e fase são apresentados em uma mesma janela. O mesmo resultado seria obtido utilizando os outros dois comandos, passando um vetor `w` conveniente no terceiro caso. Esse vetor pode ser gerado por meio do comando `logspace`, pois os diagramas de Bode são traçados em escala logarítmica,

```
w = logspace(d1, d2, N)
```

Omitindo o terceiro argumento, o comando `logspace(d1, d2)` gera 50 pontos igualmente espaços em escala logarítmica entre as frequências $10^{\mathtt{d1}}$ e $10^{\mathtt{d2}}$. O argumento `N`, por sua vez, serve para especificar o número desejado de pontos entre as frequências especificadas. Por exemplo, rode os seguintes comandos e compare os resultados

```
w = logspace(-1, 2)
w = logspace(-1, 2, 150)
```

Em alguns casos pode ser interessante obter apenas os valores de magnitude e fase para diferentes valores de frequência e não traçar os diagramas de Bode. Esse comportamento pode ser obtido do comando `bode` especificando parâmetros de retorno

```
[mag, phase, w] = bode(.)
```

Nessa situação, os diagramas não são apresentados e são retornados os valores de magnitude (`mag`), em escala linear, e fase (`phase`), em graus, avaliados nos valores de frequência `w`. Isso pode ser conveniente, por exemplo, quando queremos traçar os diagramas de Bode estimados sobre os gráficos de valores experimentais colhidos (como veremos a seguir).

3.2 Diagramas de Bode a partir de dados experimentais

A partir da saída medida de um experimento, e de posse da sequência de entrada que originou tal saída, podemos traçar os diagramas de Bode de modo a estimar a função de transferência do sistema em estudo.

Como exemplo, considere o *script* apresentado na sequência.

```
close all
clear
clc

Ts = 0.01;     % intervalo de amostragem
t = 0:Ts:8;
N = length(t);
w = 2*pi*(0:(N-1))/(N*Ts);     % frequencia angular

G=tf([10],[1 1 10]);    % funcao de transferencia do sistema
u=chirp(t,0,t(end),50)'; % sinal de entrada entra 0Hz e 50Hz
y=lsim(G,u,t');         % resposta do sistema

Y = fft(y);
U = fft(u);

G2 = Y./U;              % funcao de transferencia estimada

[mag,pha,wg] = bode(G);

figure
subplot(2,1,1)
semilogx(w(1:end/2),20*log10(abs(G2(1:end/2))),'r')
hold on
semilogx(wg,20*log10(squeeze(mag)),'b')
ylabel('|G|')
legend('estimado', 'conhecido')

subplot(2,1,2)
semilogx(w(1:end/2),rad2deg(unwrap(angle(G2(1:end/2)))),'r')
hold on
semilogx(wg,squeeze(pha),'b')
ylabel('\angle G')
xlabel('\omega [rad/s]')
```

Execute o arquivo e observe os resultados. Note que os diagramas de Bode obtidos a partir dos sinais de entrada u e saída y estão muito próximos dos diagramas obtidos a partir do comando `bode`. Isso ocorre pois estamos trabalhando em um cenário idealizado no qual não há influência de ruídos externos. Para tratar uma situação mais realística, considere que o sinal de entrada u está corrompido por um ruído branco de amplitude 0.01, ou seja,

```
uc = u + 0.01*randn(N,1);
```

Tomando `uc` como o novo sinal de entrada, repita o *script* acima e analise os resultados. É interessante executar o arquivo várias vezes, pois, como a entrada `uc` é sempre diferente, você notará que algumas vezes a aproximação da função de transferência é melhor do que outras.

4 Exercícios

1. Gere o sinal $x_1[n] = 0.9\delta[n]$, $0 \leq n \leq 19$. Plote o gráfico de magnitude e fase da FFT calculada. Os resultados estão coerentes com o que você esperava? Comente.

2. Gere agora o sinal $x_2[n] = 0.9\delta[n-5]$, $0 \leq n \leq 19$. Plote o gráfico de magnitude e fase da FFT calculada. Comente.

3. Gere um sinal do seu interesse e plote a magnitude e fase da FFT.

4. Construa e comente o diagrama de Bode de módulo e fase de:

   a) $G(s) = \dfrac{100(s+5)}{s^2 + 10s + 100}$

   b) $G(s) = \dfrac{-100(s+5)}{s^2 + 10s + 100}$

   c) $G(s) = \dfrac{25}{s^2 + 4s + 25}$

   d) $G(s) = \dfrac{9(s^2 + 0,2s + 1)}{s(s^2 + 1,2s + 9}$, no intervalo $0,01 \leq \omega \leq 1000$

5. Neste exercício o intuito é identificar dois sistemas lineares e determinar suas respectivas funções de transferência a partir de sinais de entrada e saída obtidos experimentalmente.

   É escolhido um sinal de entrada rico em frequências para excitar o sistema na maior banda de frequências possível. A saída está sujeita a um ruído de medida da ordem de -40dB. O sinal de entrada foi passado por uma função janela para suavizar os efeitos do número finito de amostras. Os dados para dois sistemas diferentes são fornecidos nos arquivos `exp1.mat` e `exp2.mat`. Para cada um dos arquivos, siga as instruções abaixo e apresente como solução a função de transferência estimada para o sistema.

   Instruções:

   - Mova os arquivos `exp1.mat` e `exp2.mat` para seu diretório de trabalho no Matlab. Cada arquivo contém três variáveis. A variável `u` representa uma amostra de um sinal de entrada aplicado a um sistema linear de tempo contínuo. A variável `y` representa a respectiva saída do sistema e a variável `time` representa o tempo em que foram tomadas as amostras.
   - No Matlab, use o comando `load` para carregar as variáveis deste arquivo no seu *workspace* (ex.: `load exp1`).
   - Calculando as FFTs de `u` e `y`, obtenha a função de tranferência $H(j\omega) = Y(j\omega)/U(j\omega)$ dividindo as duas FFTs.
   - Plote o diagrama de Bode da função de transferência obtida com o eixo das frequências em [rad/s] ($\omega = 2\pi f$) devidamente ajustado.
   - Sabemos que o sistema pode ser de 1^a ou 2^a ordem e que não há zeros finitos. A partir do diagrama de Bode, identifique a ordem do sistema. Lembre-se de que sistemas de 1^a ordem sem zeros finitos apresentam um decaimento de 20 dB por década nas altas frequências e que sistemas de 2^a ordem possuem um decaimento de 40 dB por década.
   - A partir do diagrama, identifique a função de transferência do sistema

– Em se tratando de um sistema de 1^a ordem, identifique K e a de forma que

$$H(s) = K\frac{a}{s+a}$$

– Em se tratando de um sistema de 2^a ordem, identifique K, ξ e ω_n de forma que

$$H(s) = K\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad .$$

Para tanto, use o fato de que o pico de ressonância M_p e a frequência de ressonância ω_r obedecem às seguintes relações:

$$\xi = \frac{|\ln M_p|}{\sqrt{\pi^2 + (\ln M_p)^2}}$$
$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1 - 2\xi^2}$$

em que $M_p = \max_\omega |H(j\omega)|/|H(j0)|$ e $\omega_r = \arg\max_\omega |H(j\omega)|/|H(j0)|$.

- Use o comando `lsim` para obter a resposta à entrada `u` do sistema com os parâmetros identificados no item anterior. Plote no mesmo gráfico a saída obtida experimentalmente e a obtida por simulação. Comente.