UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

OFICINA DE MODELAGEM E SIMULAÇÃO

Lista de Exercícios 03

Marcone Márcio da Silva Faria

1. No texto, foi deduzido o modelo matemático para um sistema massa-mola-amortecedor no qual a mola e o amortecedor viscoso se encontravam em paralelo. Deduzir a EDO para um sistema massa-mola-amortecedor no qual a mola e o amortecedor se encontram em série. Quantos graus de liberdade tem esse sistema?

Sabemos que quando amortecedor e uma mola estão em série a relação entre força e deslocamento é dada pela equação:

$$\dot{f} + \frac{k}{c} f = k\,\dot{u}$$

A função de deslocamento ao longo do tempo causada por uma força unitária constante aplicada em t = 0 pode ser descrita como:

$$J_{(t)} = \frac{1}{k} + \frac{t}{c}$$

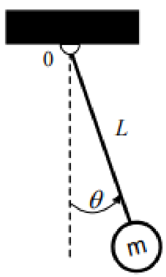
Esse tipo de sistema pode ser modelado segundo o modelo de Maxwell, cuja função é igual a:

$$\phi_{(t)} = ke^{-t\frac{k}{c}}$$

apresentando apenas um grau de liberdade.

2. Determine os modelos matemáticos para os sistemas apresentados nas Figuras 13, 14, 15 e 16.

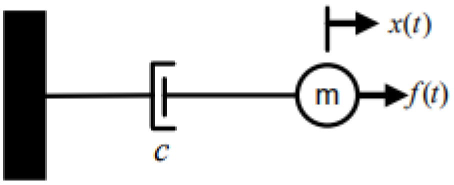
- **Pêndulo simples**



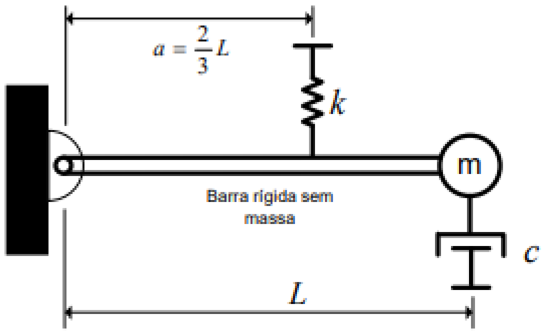
$$-\ mgsen(\theta)\ =\ m\frac{d^2s}{dt^2}\ \rightarrow\ \ -\ gsen(\theta)\ =\ l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}\ +\ \frac{g}{l}sen(\theta)\ =\ 0$$

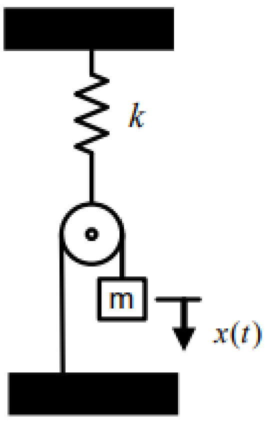
- **Sistema massa-amortecedor:**



- **Sistema de suspensão:**



- **Sistema com polia:**



$$F_R =-\ (mg\ +\ kx)$$

$$ma\ =-\ (mg\ +\ kx)$$

$$a\ =\ \frac{-(mg+kx)}{m}$$

$$x(t)\ =\ x_0\ +\ v_0t\ +\ \frac{1}{2}a^2$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{mg+kx}{m}\right)^2$$

3. Considere o pêndulo apresentado na Figura 13 e o modelo matemático encontrado no Exercício 2. Assuma que, para pequenas oscilações, sen(θ) ≈ θ em radianos. Linearize o modelo matemático do pêndulo, transformando-o em uma EDO linear.

Considerando-se pequenos ângulos de oscilação no sistema, podemos escrever que $sen(\theta) = \theta$ e assim teremos:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

essa é uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes e portanto tem solução:

$$\theta(t) = c_1 e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} + c_2 e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t}$$

da relação elemental, sabemos que as exponenciais podem ser escritas como senos e cossenos e as constantes redefinidas para escrevermos:

$$\theta(t) = \theta_0 cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \varphi_0\right)$$

utilizando as condições iniciais $\theta(0) = \theta_{max}$ e $\frac{d\theta}{dt}(0) = 0$ teremos $\varphi_0 = 0$ e assim podemos encontrar a linearização da equação:

$$\theta(t) = \theta_{max} cos(\omega t)$$

sendo ω definido por:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

a partir dessas relações, portanto, podemos expressar também o período e a frequência do pêndulo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}} \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- PAVANI, Ana. **CENTRO DIGITAL DE REFERÊNCIA: O PROJETO MAXWELL.** Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC-Rio, 2000. Disponível em: <https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/23309/23309_3.PDF> Acesso em: 14 de setembro de 2022.

- LAVOR, Otávio Paulino; OLIVEIRA, Antônio Nunes de. **Equações diferenciais aplicadas ao pêndulo com massa dependente do tempo: estudo de massa com variação exponencial e polinomial**. REMAT: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 7, n. 1, p. e3001, 05 jan. 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.35819/remat2021v7i1id4164> Acesso em: 14 de setembro de 2022.