Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Engenharia Eletrônica
ELT129 – Oficina de Modelagem e Simulação

Professor: Leonardo Mozelli – lamoz@ufmg.br

Tutorial 7 – Representação de Sistemas por Diagrama de Blocos

1 Introdução

Neste tutorial são apresentadas a representação de sistemas lineares utilizando Diagrama de Blocos e redução destes para obter uma função de transferência equivalente.

2 Diagrama de Blocos

Sistemas de engenharia podem ser constituídos de um grande número de componentes. Pode ser quase impossível, por exemplo, analisar o diagrama do circuito de um rádio ou de um receptor de televisão de uma só vez. Nesses casos, é conveniente representar o sistema por meio de subsistemas interconectados, onde o diagrama de blocos é construído a partir das equações que descrevem um determinado sistema.

Um diagrama de blocos de um sistema é uma representação das funções desempenhadas por cada componente e do fluxo de sinais. Esse diagrama indica a inter-relação que existe entre os vários componentes. Em um diagrama de blocos todas a variáveis do sistema são ligadas às outras variáveis em termos de relações de entrada $X(s)$ e saída $Y(s)$. Esta relação em sistemas lineares é chamada de função de transferência $H(s)$.

A representação de sistemas por diagrama de blocos facilita visualizar todas as partes fundamentais que compõe o sistema sob análise (ver Figura 1). As variáveis que constituem as entradas e saídas de cada um dos blocos podem ser definidas de forma única, independente do tipo de grandeza física que se deseja controlar.

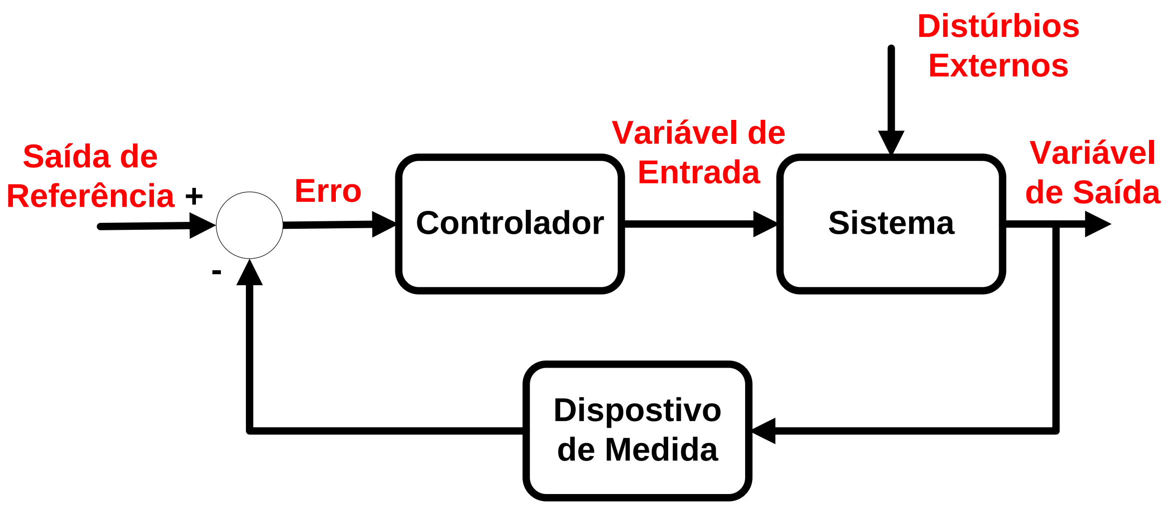


Figura 1: Diagrama de blocos.

Os sistemas lineares representados por meio de diagrama de blocos utilizam três elementos básicos: bloco, somador e nó, como ilustrado, respectivamente, nas Figuras 2, 3 e 4.

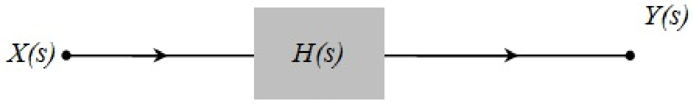


Figura 2: Representação de diagrama de bloco.

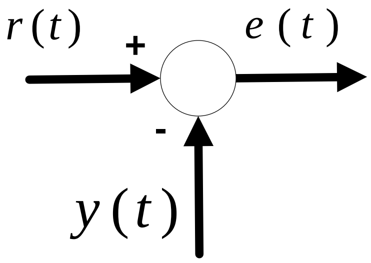


Figura 3: Representação do somador.

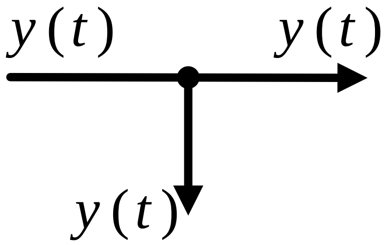


Figura 4: Representação do nó.

2.1 Álgebra de Blocos

A regra principal na álgebra de blocos é não alterar a relação entre as variáveis de entrada e saída dos blocos que se quer simplificar.

As Figuras 5-7 mostram diferentes diagramas de blocos de sistemas. Nas figuras é possível observar também que funções de transferência de subsistemas interconectados podem ser simplificadas em uma função de transferência única equivalente.

Configurações Básicas

- Conexão de blocos em série:

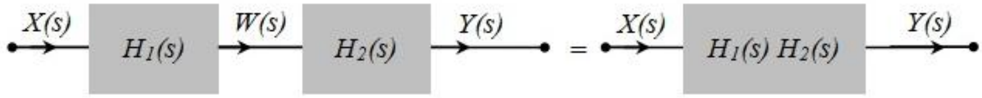


Figura 5: Representação em diagrama de blocos em série.

- Conexão de blocos em paralelo:

- Conexão de blocos em malha fechada:

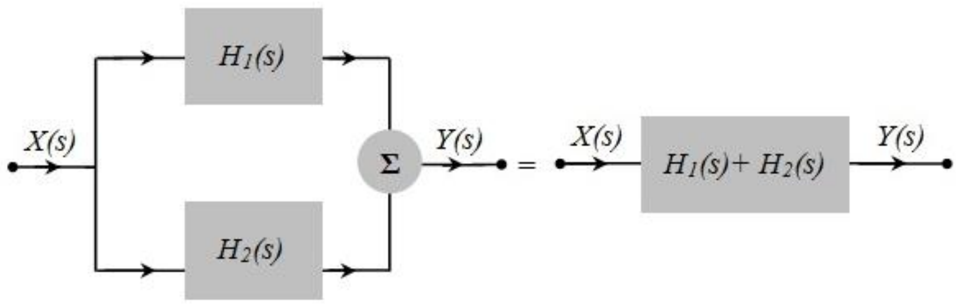


Figura 6: Representação em diagrama de blocos em paralelo.

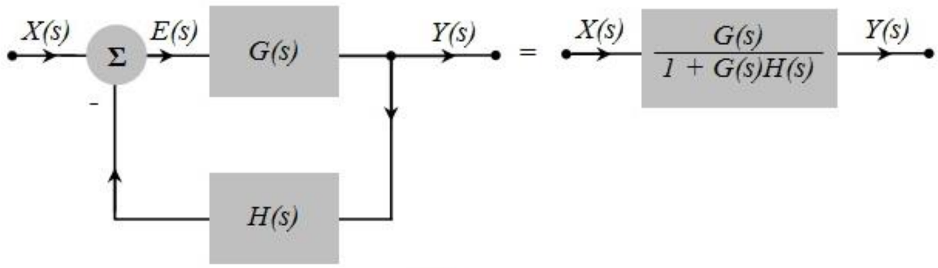


Figura 7: Representação em diagrama de blocos em malha fechada.

Particularmente, quando a saída de um sistema é realimentada à entrada (Figura 7), a função de transferência equivalente pode ser calculada da seguinte forma:

$$\left.\begin{array}{l} E(s) = X(s) - H(s)Y(s) \\ Y(s) = G(s)E(s) = G(s)[X(s) - H(s)Y(s)] \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad Y(s)[1 + G(s)H(s)] = G(s)X(s)$$

Desta forma, um sistema realimentado, como o da Figura Figura 7, pode ser substituído por um bloco único com a seguinte função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

2.1.1 Movimento do Bloco em Relação a um Somador

Na Figura 8 são apresentadas duas manipulações de blocos com relação a um bloco somador: a inserção de um bloco dentro da malha e a retirada de um bloco de dentro da malha.

2.1.2 Movimento do Bloco em Relação a um Ponto de Junção:

Na Figura 9 são apresentadas duas manipulações de blocos com relação a um ponto de junção: mudar o bloco para depois do ponto de junção ou mudar o bloco para antes do ponto de junção.

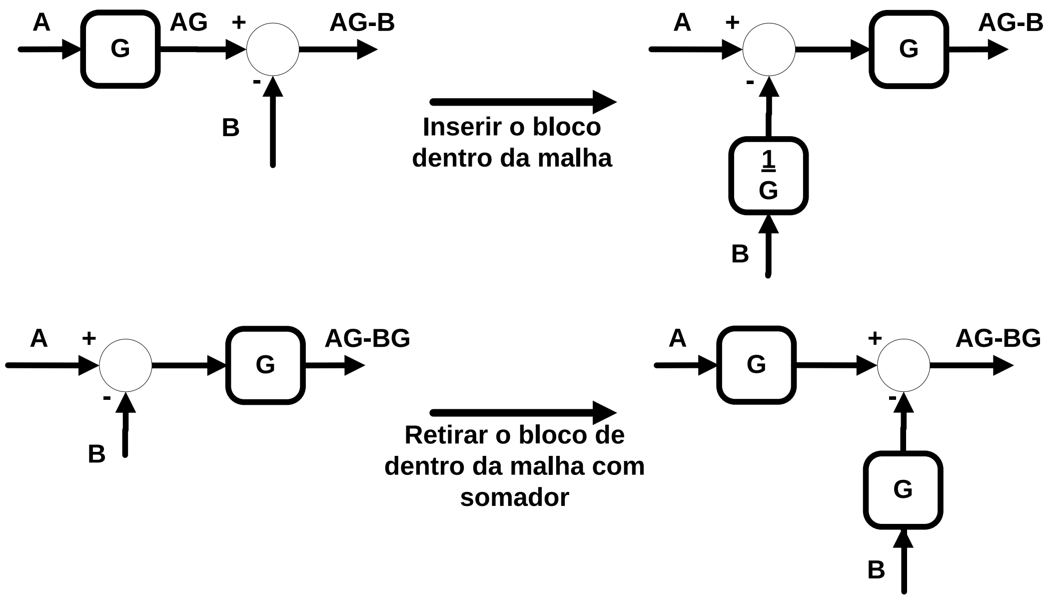


Figura 8: Movimento do Bloco em Relação a um Somador.

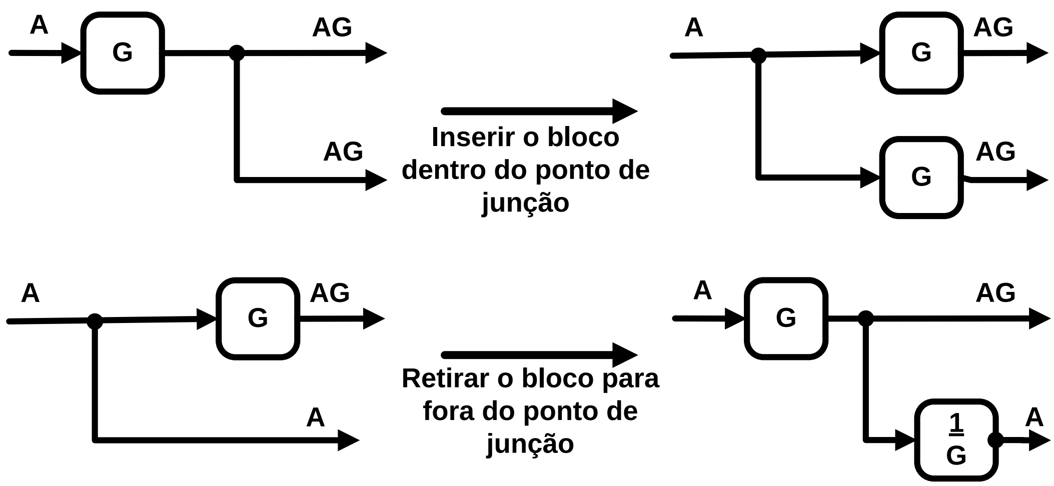


Figura 9: Movimento do Bloco em Relação a um Ponto de Junção.

2.1.3 Exemplo

Considere dois tanques interligados, representados pela Figura 10, cuja relação linear entre as vazões $Q_1(t)$ e $Q_2(t)$ e as respectivas alturas das colunas de líquido existentes em cada um dos tanques é dada por:

$$Q_1(t) = \frac{H_1(t) - H_2(t)}{R_1}$$
$$Q_2(t) = \frac{H_2(t)}{R_2}$$

sendo R_1 e R_2 constantes que representam a resistência aos fluxos e são dependentes da posição de ajuste das válvulas C_1 e C_2.

O modelo que representa a variação de volume nos tanques é descrito por equações diferen-

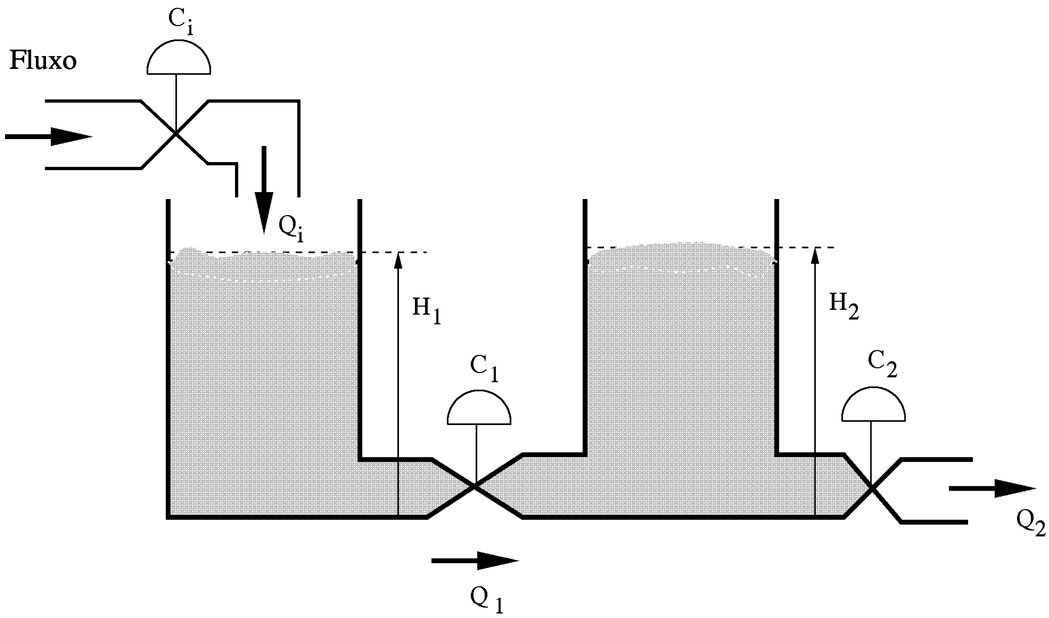


Figura 10: Dois tanques interligados.

ciais de primeira ordem invariantes no tempo:

$$\begin{array}{lll}\frac{dV_1(t)}{dt} = \frac{dA_1H_1(t)}{dt} = Q_i - Q_1 & \Rightarrow & \frac{dA_1H_1(t)}{dt} = Q_i - \dfrac{H_1(t) - H_2(t)}{R_1} \\ \frac{dV_2(t)}{dt} = \frac{dA_2H_2(t)}{dt} = Q_1 - Q_2 & \Rightarrow & \frac{dA_2H_2(t)}{dt} = \dfrac{H_1(t) - H_2(t)}{R_1} - \dfrac{H_2(t)}{R_2}\end{array}$$

com A_1 e A_2 as áreas transversais das superfícies de cada um dos tanques, consideradas uniformes. A Figura 11 esquematiza a conexão entre os tanques e como a saída de interesse $Q_2(t)$ é afetada pela entrada $Q_i(t)$.

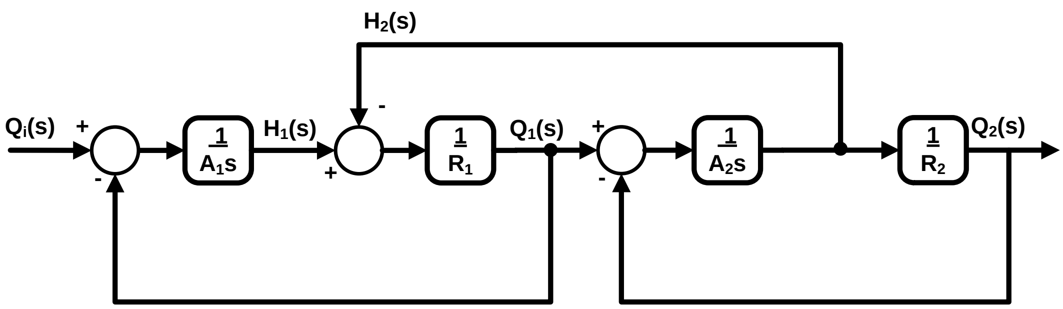
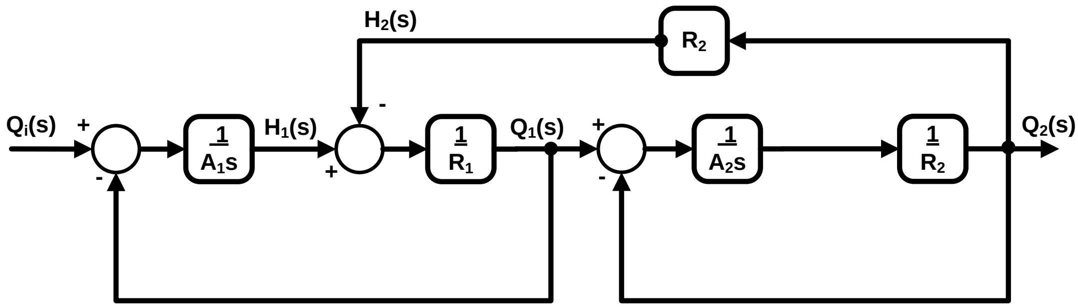


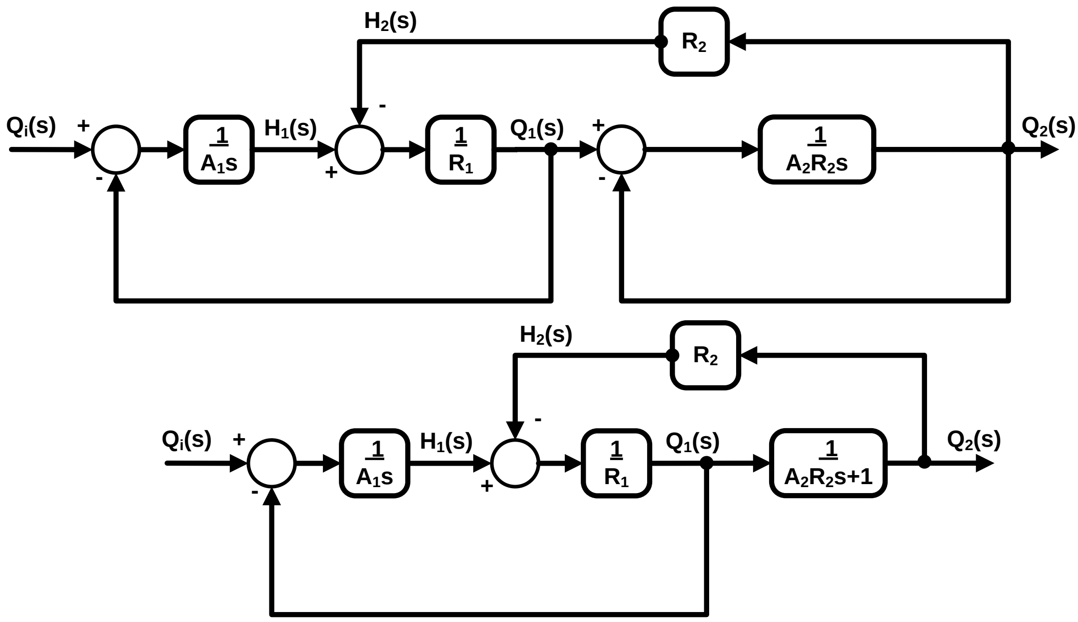
Figura 11: Diagrama de blocos.

Usando álgebra de blocos, o intuito é obter a função de transferência equivalente entre Q_i e Q_2.

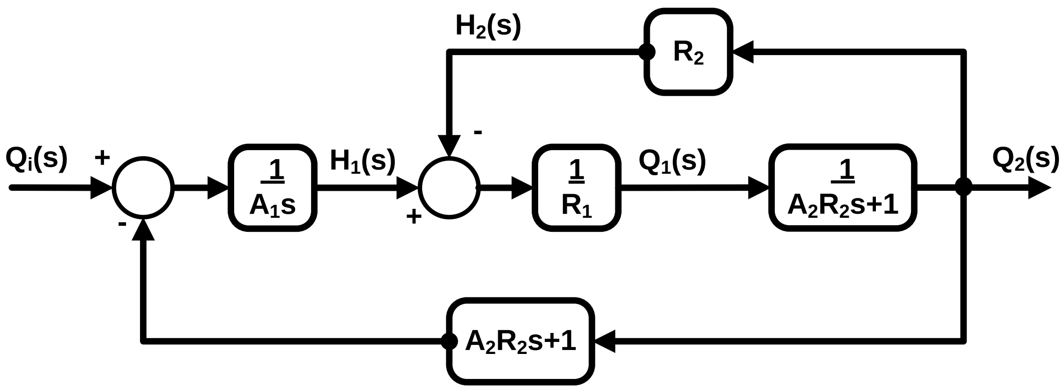
Passo 1: Movimentação do bloco $\frac{1}{R_2}$



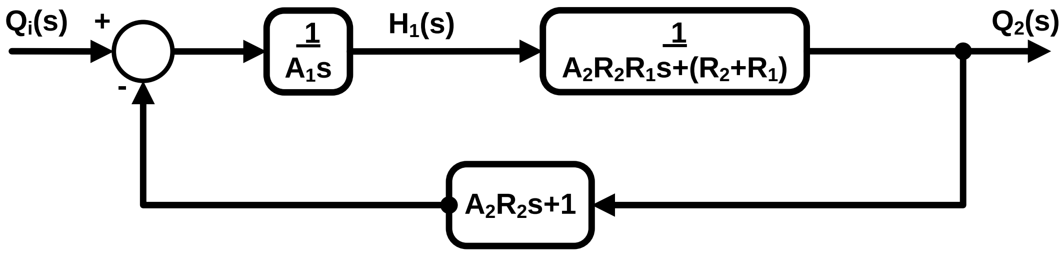
Passo 2: União dos blocos $\frac{1}{R_2}$ e $\frac{1}{A_2 s}$ e fechamento desta malha



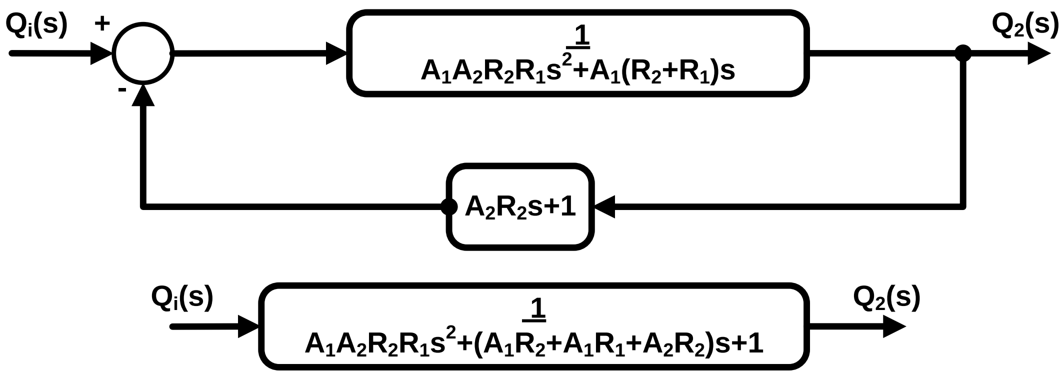
Passo 3: Passagem do bloco $\frac{Q_2}{Q_1}$ para dentro da junção



Passo 4: União dos blocos $\frac{1}{R_1}$ e $\frac{1}{A_2R_2s+1}$ e fechamento da malha entre $\frac{Q_2}{H_1}$



Passo 5: União dos blocos $\frac{1}{A_1s}$ e $\frac{Q_2}{H_1}$ e fechamento da malha entre $\frac{Q_2}{Q_i}$



2.1.4 Exemplo com MatLab

Suponha as seguintes funções de transferência

$$H_1(s) = \frac{num1}{den1} \quad \text{e} \quad H_2(s) = \frac{num2}{den2}$$

Em Matlab, as possíveis associações entre as funções H_1 e H_2, conforme descritas na seção anterior, podem ser obtidas a partir dos comandos `series`, `parallel` e `feedback`, cuja sintaxe é:

```
>> Sys = series(H1,H2);
>> Sys = parallel(H1,H2);
>> Sys = feedback(H1,H2);
```

Também é possível realizar redução de blocos através dos comandos `connect` e `sumblk`.

2.2 Fórmula de Mason

O método para redução de diagrama de blocos apresentado na seção anterior utiliza de reduções sucessivas, o que pode resultar muito trabalhoso. Para evitar este trabalho, a *Fórmula de Mason* permite uma redução imediata dos diagramas de blocos da seguinte forma

$$F(s) = \frac{\sum \bar{G}_k \Delta_k}{\Delta}$$

sendo que $F(s)$ é a função de transferência do sistema representado pelo diagrama de blocos, $\bar{G}_k$ é o ganho do caminho de avanço de número k que liga a entrada à saída, e Δ é dado por

$$\Delta = 1 + \sum_i L_i + \sum_{i,j} L_i L_j + \sum_{i,j,r} L_i L_j L_r + \cdots$$

com L_i, $L_j\, L_r$, ... são os ganhos das malhas $i, j, r, \ldots$ do diagrama, com os sinais trocados, sendo que os produtos dos vários ganhos não devem incluir malhas que se tocam (passar mais de uma vez pelo mesmo caminho).

No numerador, Δ_k é o mesmo que Δ, não contendo, porém, o ganho das malhas que tenham um ou mais pontos de contato com o caminho de avanço k.

2.2.1 Exemplo

Reduza com auxílio da fórmula de Mason o diagrama de blocos da Figura 12.

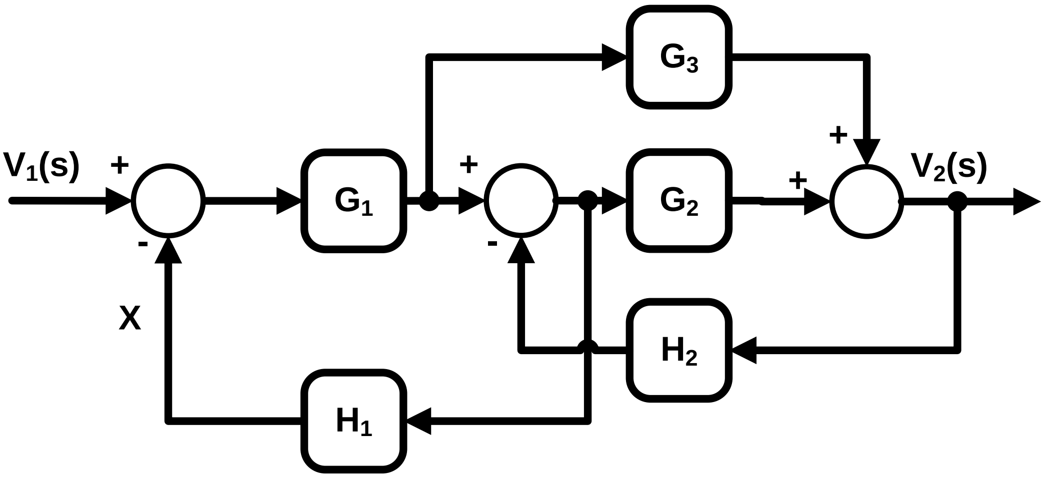


Figura 12: Diagrama de blocos.

Solução:

- Caminhos de avanço

$$\bar{G}_1 = G_1G_2 \quad \text{e} \quad \bar{G}_2 = G_1G_3$$

- Há três malhas cujos ganhos são $L_1 = G_1H_1$, $L_2 = G_2H_2$ e $L_3 = -G_1G_3H_1H_2$. O Δ do denominador é, então

$$\Delta = 1 + G_1H_1 + G_2H_2 - G_1G_3H_1H_2$$

- Finalmente,

$$F(s) = \frac{G_1G_2 + G_1G_3}{1 + G_1H_1 + G_2H_2 - G_1G_3H_1H_2}$$

3 Exercícios

1. Dadas as funções de transferência $H_1(s) = \frac{1}{s+2}$ e $H_2(s) = \frac{3}{s+4}$, pede-se:

   a. Conecte os modelos em série

   b. Conecte os modelos em paralelo

   c. Conecte os modelos em malha fechada, com $H_1(s)$ no ramo direto e $H_2(s)$ na realimentação

   d. Idem ao exercício 1c, mas considerando realimentação positiva

   e. Repita o exercício 1c usando o comando `feedback`

   f. Repita o exercício 1c usando o comando `connect`

2. Baseado no sistema realimentado da Figura 7 com $G(s) = \frac{K}{s(s+8)}$ e $H(s) = 1$, determine a função de transferência para cada um dos seguintes casos:

   a. $K = 7$

   b. $K = 16$

   c. $K = 80$

   Comente a respeito da 'resposta ao degrau unitário' em cada um dos casos. Trace as respostas no mesmo gráfico usando `plot` e `hold`.

   Adicionalmente:

   d. Encontre a resposta à rampa unitária quando $K = 80$. Note que a resposta à rampa unitária é equivalente à derivada da resposta ao degrau unitário.

3. Reduza o diagrama de blocos da Figura 12 utilizando álgebra de blocos.

4. Reduza o diagrama de blocos da Figura 13 utilizando

   a. Álgebra de blocos

   b. Fórmula de Mason

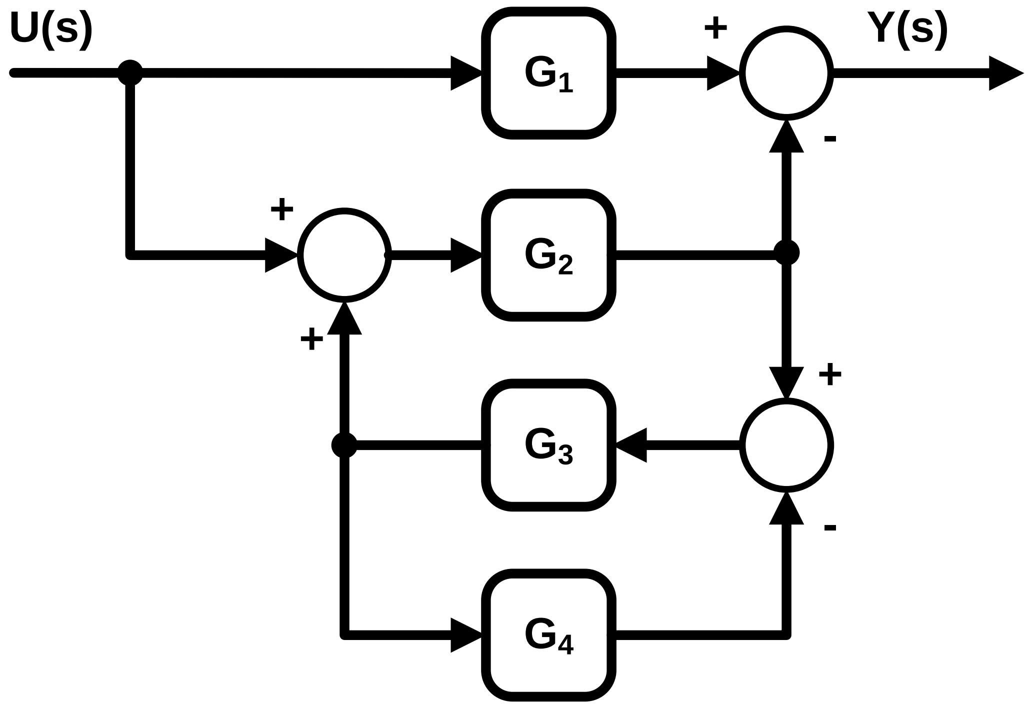


Figura 13: Diagrama de blocos.

5. Para o exemplo do dois tanques interligados, obtenha as seguintes funções de transferência utilizando redução de blocos:

   a. $H_2(s)/H_1(s)$

   b. $H_2 s)/Q_i(s)$

   c. $H_1(s)/Q_i(s)$