Universidade Federal de Minas Gerais
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELETRÔNICA
ELT129 – Oficina de Modelagem e Simulação

Professor:Leonardo Mozelli – lamoz@ufmg.br

Tutorial 2 – Conceitos Básicos de Sistemas Lineares

1 Introdução

A Teoria de Sistemas Lineares, que trata da relação entre excitação e resposta de sistemas lineares, é de fundamental importância para os estudos de Sistemas Dinâmicos e de Controle.

A relação entre excitação e resposta (ou entrada e saída) pode ser estudada no domínio do tempo ou no domínio da frequência. A análise no domínio da frequência é usada quando a excitação é senoidal (harmônica), enquanto que a análise no domínio do tempo é utilizada no caso de excitação arbitrária.

A maioria dos sistemas dinâmicos pode ser descrita matematicamente por um conjunto de equações diferenciais. No caso de sistemas dinâmicos lineares, é possível modelá-los usando equações diferenciais ordinárias lineares (EDOLs) com coeficientes constantes, sendo a análise de tais sistemas feita convenientemente por meio da Transformada de Laplace, no caso de tempo contínuo. Por outro lado, é possível também descrever sistemas dinâmicos no tempo discreto através de equações a diferenças e analisá-los por meio de Transformada $\mathcal{Z}$.

2 Conceitos de Análise de Sistemas

Denomina-se **sistema** um conjunto de componentes interconectados atuando como um todo, com um determinado objetivo. Assim, por exemplo, um motor a combustão interna constitui um sistema cujos componentes (ou subsistemas) são as diversas peças (bielas, manivelas, pistões, cilindros, válvulas, etc). Um **processo** é definido como o sistema a ser controlado, também chamado de **planta**.

Quando o sistema é solicitado por uma dada **excitação (entrada)**, o sistema exibe uma certa **resposta (saída)**. A **entrada do processo** é o sinal arbitrado pelo operador para controlar a evolução do sistema, que é chamado de **variável de controle** ou **variável manipulada - MV**. No entanto, sistemas são constantemente afetados por **entradas externas**, estas chamadas de **perturbação**, que podem ser mensuráveis ou não, e não são manipuladas pelo operador. A **saída do processo**, chamada de **variável controlada** ou **variável de processo - PV**, é o sinal de interesse medido, que mostra a evolução do sistema no tempo. A saída pode ser controlada ou não. O sinal de saída medido normalmente é afetado por **ruído de medição**.

A ideia principal em um sistema de controle é **Medir** $\Rightarrow$ **Controlar** $\Rightarrow$ **Atuar**.

A **dinâmica** constitui o estudo desta relação de causa e efeito. A **análise dinâmica** de um sistema se processa em vários estágios:

- **Primeiro estágio:** Identificação do sistema a ser estudado
  - Desenvolvimento de um modelo simplificado para o sistema **(modelo físico)**.
  - Consideração de certas hipóteses simplificadoras.
  - O modelo simplificado deve simular (aproximar) o comportamento do sistema real.
- **Segundo estágio:** Desenvolvimento do modelo matemático

- Identificação dos vários componentes do sistema dinâmico.
- Determinação das relações entre excitação e resposta, com base em leis físicas, por exemplo.
- Desenvolvimento das **equações do sistema**, as quais podem ser equações diferenciais, integrais ou a diferenças, e devem garantir que os vários componentes atuem como um sistema e não como entidades individuais.

• **Terceiro estágio:** Resolução das equações do sistema e interpretação

  - Se o comportamento do sistema, obtido a partir da solução, concorda razoavelmente bem com a observação experimental, então o modelo pode ser considerado como representativo do sistema real, dentro da faixa em que as hipóteses simplificadoras adotadas são válidas, podendo ser usado para prever o seu comportamento sob diversas excitações; senão, há necessidade de rever e refinar mais o modelo.

Denomina-se **projeto** a criação de um sistema que, ao ser solicitado por excitações conhecidas, apresente respostas especificadas (desejadas). O projeto envolve praticamente todos os estágios da análise, a qual, agora deverá ser repetida várias vezes. O projeto não é único, podendo haver vários projetos apresentando desempenho satisfatório.

O **diagrama de blocos** é a representação gráfica da relação entre entrada e saída:

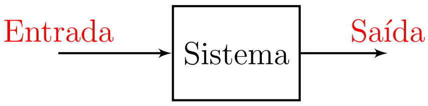

Figura 1: Representação de um sistema através de diagrama de bloco.

Example 1. *Vôo vertical de foguete balístico (sem controle) (ver Figura 2):*

- *Sistema: o próprio foguete.*
- *Excitações: força gravitacional (peso) e resistência aerodinâmica.*
- *Resposta: pode-se considerar a altitude, $h(t)$, ou a velocidade, $v(t)$, ou ambas.*

Para o sistema apresentar uma resposta desejada, deve-se selecionar uma certa entrada e submeter o sistema a essa entrada através de um controlador, conforme Figura 3:

Se a entrada é pré-fixada e não sofre influência da saída, diz-se que o sistema tem um **controle em malha aberta - (MA)**. Como exemplo, considere o caso do foguete balístico da Figura 4, no qual, em adição às forças peso e de resistência aerodinâmica, tem-se também o empuxo, $T(t)$. A variação do empuxo com o tempo é pré-determinada de modo a preencher certos objetivos, como alcançar uma certa altitude em um certo tempo, mas não sofre a influência do valor da saída (altitude ou velocidade). Portanto, diz-se que um sistema de controle em MA corresponde aos sistemas nos quais a saída não é medida nem realimentada para comparação com o valor desejado (referência). A cada valor de entrada corresponde uma condição de operação fixa, ou seja, não se altera com a evolução da saída. Em geral, a operação não é satisfatória.

As principais características da operação em MA são:

- saída depende somente da entrada e das caraterísticas intrínsecas do processo;
- na presença de perturbações o sistema não desempenhará a função especificada, afastando-se do ponto de operação desejado;

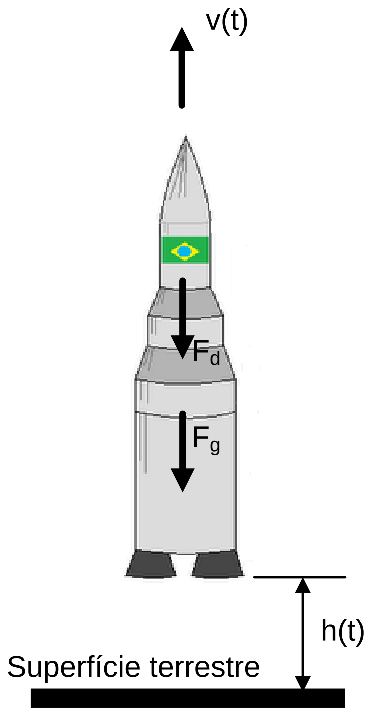

Figura 2: Esquemático de um foguete sem controle.

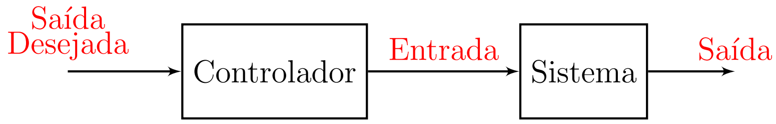

Figura 3: Representação de um sistema de controle em malha aberta.

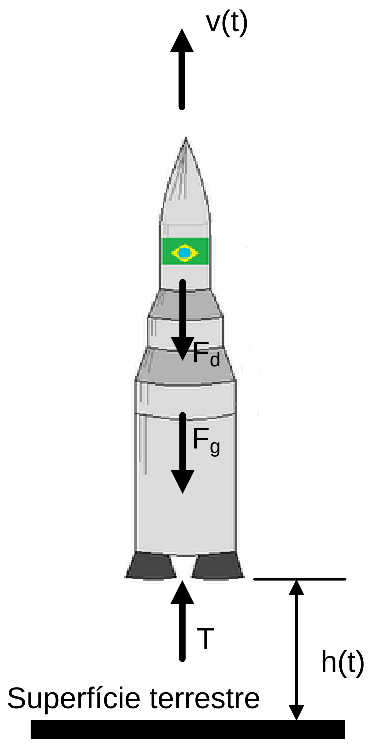

Figura 4: Esquemático de um foguete com controle em malha aberta.

- o operador deve monitorar o sistema.

Na maioria dos casos, porém, há interesse que a entrada dependa da saída e, então, dizemos que existe um **controle em malha fechada - (MF)**. O diagrama de blocos de um controle em malha fechada está representado na Figura 5.

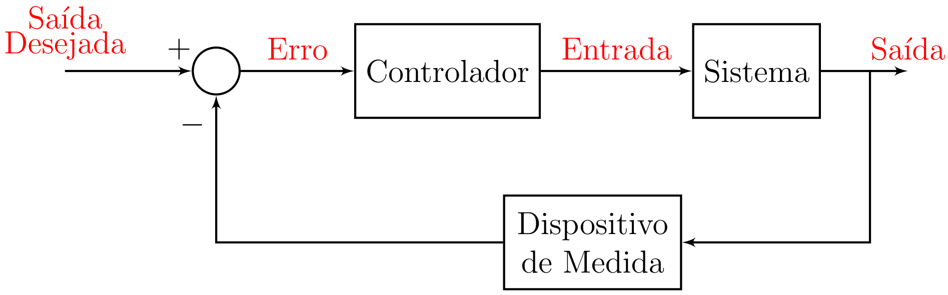

Figura 5: Representação de um sistema de controle em malha fechada.

Como pode ser observado, além do controlador existem também um **dispositivo de medida** (conhecido como **sensor** ou **dispositivo de realimentação**) e um **dispositivo de comparação**. O dispositivo de realimentação mede a saída e a envia para o dispositivo de comparação, o qual calcula a diferença entre a saída desejada e a saída real, ou seja, calcula o **erro**. Baseado nesse erro, o controlador gera o comando de entrada para o sistema, de modo a reduzir o erro a zero, ou, simplesmente, melhorar o desempenho do sistema tanto em regime transitório como em regime permanente. As principais características de uma operação em MF são:

- realimentação unitária;
- utilização das operações de medição, controle e atuação;
- inclusão das perturbações no sistema de controle.

Como exemplo, pode-se considerar novamente o caso do foguete, o qual, neste caso, está dotado de um sensor chamado **acelerômetro**, que mede a aceleração instantânea do veículo, conforme Figura 6.

Através de um *hardware* e um algoritmo apropriado, a aceleração é integrada e é calculada a velocidade instantânea do foguete, a qual passa a ser a saída. A diferença entre a velocidade desejada e a real pode ser usada para calcular a variação no empuxo do foguete necessária para melhorar o desempenho do sistema, ou mesmo, reduzir a diferença (erro) a zero.

Como no exemplo acima não há interferência do ser humano após o início do funcionamento, o controle é denominado **controle automático**.

3 Parâmetros Concentrados e Distribuídos

No desenvolvimento do modelo matemático de um sistema é necessário identificar os componentes do sistema e determinar as características individuais de entrada-saída. Tais características são governadas por leis físicas (Leis de Newton, de Kirchhoff, de Fourier, etc., conforme a natureza do componente) e são descritas em termos dos chamados **parâmetros** do sistema. Tais parâmetros podem ser divididos em duas grandes classes: parâmetros que não dependem das coordenadas espaciais, chamados **parâmetros concentrados**, e parâmetros que dependem das coordenadas espaciais, denominados **parâmetros distribuídos**. No caso de parâmetros concentrados, a excitação e a resposta dependem apenas do tempo, logo são descritos por **equações diferenciais ordinárias**; por outro lado, no caso de parâmetros distribuídos, a excitação e a resposta dependem do tempo e das coordenadas espaciais, logo são descritos por **equações**

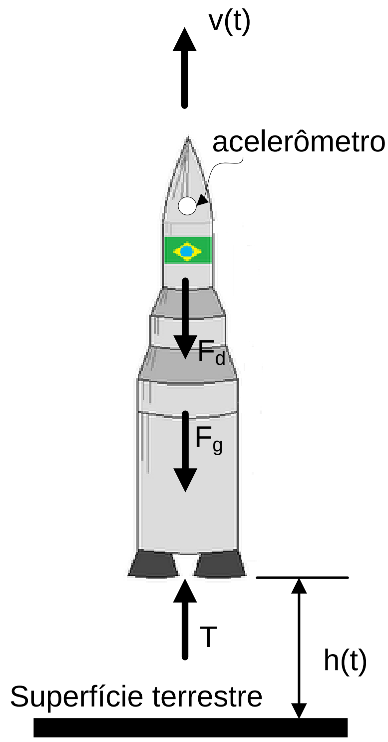

Figura 6: Esquemático de um foguete com controle em malha fechada.

diferenciais parciais (mais de uma variável independente). Como exemplo do primeiro caso, pode-se citar um conjunto de discos montados em um eixo cuja massa é pequena em comparação às massas dos discos, podendo-se, portanto, concentrar as massas dos eixos nos discos. Por sua vez, uma laje constitui um exemplo do segundo caso, pois vê-se nitidamente que o parâmetro massa está distribuído ao longo das coordenadas espaciais.

No modelo matemático, isto é, nas equações diferenciais, os parâmetros do sistema aparecem em forma de coeficientes. Se os coeficientes são constantes, dize-se que o sistema é **invariante no tempo**, se não são constantes, diz-se que o sistema é **variante no tempo**. Neste curso serão tratados sistemas invariantes no tempo com parâmetros concentrados.

4 Princípio da Superposição

Uma propriedade do sistema que tem profundas implicações na análise é a **linearidade**. Considere a Figura 7, na qual está expressa a relação entre a entrada $r(t)$ e a saída $y(t)$ sob forma de diagrama de blocos:

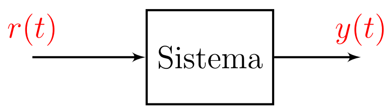

Figura 7: Representação de um sistema.

Tome dois pares de entrada e saída, $r_1(t)$, $y_1(t)$ e $r_2(t)$, $y_2(t)$, conforme Figuras 8a e 8b. Então, para o mesmo sistema, seja a entrada $r_3(t)$, Figura 8c, uma combinação linear de $r_1(t)$ e $r_2(t)$:

$$r_3(t) = \alpha_1 r_1(t) + \alpha_2 r_2(t)$$

na qual α_1 e α_2 são constantes.

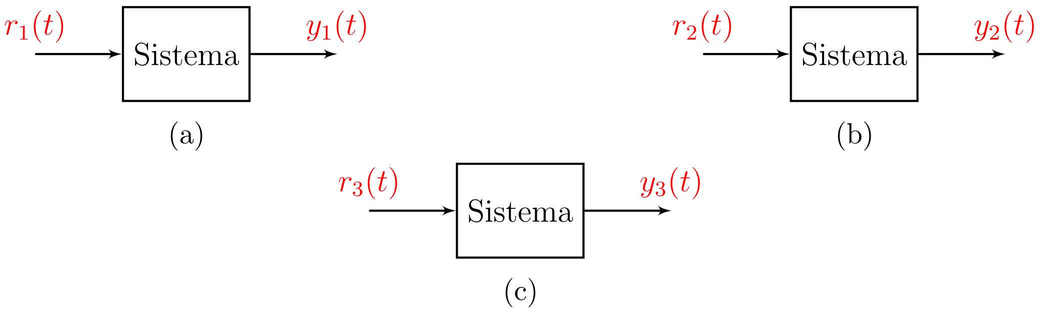

Figura 8: Exemplo do princípio da superposição.

Se a saída $y_3(t)$ representa uma combinação linear de mesma forma, i.e.:

$$y_3(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$$

então pode-se dizer que o sistema é um **sistema linear**. Caso contrário, ou seja, se:

$$y_3(t) \neq \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$$

então o sistema é dito ser um **sistema não linear**. Em outras palavras, para um sistema linear, respostas a diferentes entradas podem ser obtidas separadamente e depois combinadas linearmente, o que constitui o **Princípio da Superposição**, que é o princípio fundamental da Teoria de Sistemas Lineares.

A grande vantagem de trabalhar com sistemas lineares é que o modelo matemático desses é descrito por um sistema de Equações Diferenciais Lineares, que são de fácil solução analítica. Por outro lado, o modelo de sistemas não lineares é descrito por Equações Diferenciais Não Lineares, as quais são de difícil solução analítica (ou mesmo impossível). Nesse caso, há duas opções: ou certas hipóteses simplificadoras são impostas conduzindo à linearização do sistema, ou lança-se mão de métodos numéricos aproximados, como os métodos de Euler, Runge-Kutta, etc., os quais, felizmente, encontram-se implementados em muitos softwares de simulação, tais como MatLab.

Um sistema linear com parâmetros concentrados tem por modelo matemático uma Equação Diferencial Ordinária Linear (EDOL) do tipo:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = r(t)$$

na qual $y(t)$ é a saída, $r(t)$ é a entrada e os coeficientes a_i, $i = 0, \ldots, n-1$, são os parâmetros do sistema. A equação acima representa uma relação entre entrada e saída para o sistema. Pode-se, neste ponto, definir um **operador diferencial linear** $D(t)$ como

$$D(t) = a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0$$

e reescrever a EDOL do sistema na forma

$$D(t) y(t) = r(t) \tag{1}$$

que, por sua vez, pode ser representada em diagrama de blocos como apresentado na Figura 9.

A equação (4) indica que a excitação $r(t)$ pode ser obtida aplicando sobre a resposta $y(t)$ o operador $D(t)$, sendo que $D(t)$ difere de sistema para sistema, uma vez que os coeficientes a_i são os parâmetros do sistema, os quais traduzem as características dinâmicas do sistema.

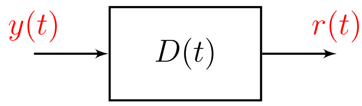

Figura 9: Representação de um EDOL.

Na análise, entretanto, o interesse é determinar a resposta a uma dada entrada, i.e., encontrar $y(t)$ para uma determinada $r(t)$. Isso pode ser expresso matematicamente por

$$y(t) = D^{-1}(t)r(t) \tag{2}$$

sendo que o operador $D^{-1}(t)$ pode ser interpretado como o inverso do operador $D(t)$. O operador $D^{-1}(t)$ recebe o nome de **operador integral**. A equação (4) pode ser representada pelo diagrama de blocos da Figura 10.

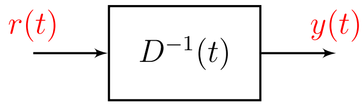

Figura 10: Representação de um sistema.

5 Resposta do Sistema

Para obter a resposta do sistema, ou seja, o seu comportamento quando submetido a uma excitação ou a condições iniciais (tais como deslocamento inicial ou velocidade inicial), basta resolver a equação diferencial do modelo matemático. Para o caso de sistemas lineares invariantes no tempo, a equação diferencial é linear com coeficientes constantes, os quais representam os parâmetros do sistema.

A solução de uma equação diferencial consiste de duas partes: a solução homogênea e a solução particular.

A **solução homogênea** corresponde ao caso em que a entrada externa é nula, podendo o sistema entrar em movimento somente quando lhe forem impostas condições iniciais. Se não existirem condições iniciais, o sistema permanece em repouso. Em Engenharia é comum chamar a solução homogênea de **resposta livre** ou **resposta natural**.

Por outro lado, a **solução particular** é a parte da resposta devida inteiramente à entrada externa, considerando as condições iniciais nulas. Em Engenharia é comum chamar a solução particular de **resposta forçada**.

No caso de sistemas lineares, pode-se invocar o Princípio da Superposição dos Efeitos para combinar a resposta livre com a resposta forçada, obtendo a resposta total do sistema:

$$\textbf{resposta total} = \textbf{resposta livre} + \textbf{resposta forçada}$$

A natureza da resposta depende da entrada utilizada, assim como das características do sistema. A esse respeito, é conveniente distinguir entre resposta permanente e resposta transitória.

Em geral, a **resposta permanente** é aquela em que o sistema atinge um certo estado de equilíbrio, tal como uma resposta constante ou uma resposta periódica que se repete indefinidamente. Matematicamente, é a parte da resposta total que permanece quando se faz o tempo tender ao infinito.

A **resposta transitória**, por outro lado, depende fortemente do tempo. No que diz respeito ao tipo de entrada, pode-se dizer que a resposta permanente ocorre no caso de excitação harmônica ou periódica, enquanto que a resposta transitória ocorre no caso de outras excitações que não as mencionadas.

A natureza da entrada afeta também a escolha do método a ser utilizado para determinação da resposta. No caso de excitação harmônica ou periódica, é vantajoso estudar a resposta permanente no domínio da frequência, a qual é conhecida como **resposta em frequência**. Para os demais tipos de excitação, é mais conveniente estudar a resposta no **domínio do tempo**.

6 Função de Transferência do Sistema

A obtenção da resposta do sistema é feita através da resolução da equação (4). Tal resolução pode ser realizada pelo método dos coeficientes a determinar, encontrando a solução homogênea e a solução particular, ou pelo método da Transformada de Laplace.

Intimamente ligado à Transformada de Laplace está o conceito de **Função de Transferência do Sistema**, $G(s)$, a qual é definida como sendo a razão da Transformada de Laplace do sinal de saída para a Transformada de Laplace do sinal de entrada, considerando condições inciais nulas:

$$G(s) = \left.\frac{Y(s)}{R(s)}\right|_{c.i.nulas} \tag{3}$$

Assim, o método da Transformada de Laplace pode ser aplicado para resolver a equação (4), calculando a função de transferência $G(s)$ e colocando a equação (6) na forma

$$Y(s) = G(s)R(s) \tag{4}$$

Esse procedimento pode ser ilustrado pelo diagrama de blocos dado na Figura 11.

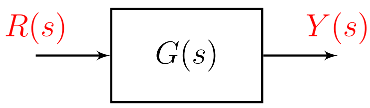

Figura 11: Representação de um sistema FT.

A resposta do sistema no domínio do tempo contínuo é obtida através da aplicação da transformação inversa de Laplace na equação (6)

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)R(s)\right\}$$

As transformadas inversas podem ser encontradas nas tabelas de transformadas de Laplace. Em geral, antes de usar as tabelas, é necessário fazer o desenvolvimento do membro direito da equação (6) em frações parciais.

7 Funções de Teste

As funções de teste (ou funções singulares) formam a base para a análise de sistemas lineares no domínio do tempo e são de considerável interesse em sistemas de controle. Elas se caracterizam por dois fatos:

1. Elas, juntamente com todas as suas derivadas, são funções contínuas no tempo, exceto em um dado instante;

2. Uma pode ser obtida de uma outra por derivação ou integração sucessiva.

Devido às descontinuidades inerentes às funções singulares, é de se esperar dificuldades na obtenção da resposta do sistema a tais sinais. Contudo, tal fato não acontece quando se utiliza o método da Transformada de Laplace, conforme será visto mais adiante.

As funções de teste são importantes na fase de simulação de um sistema em computador. De acordo com a excitação real a que o sistema será submetido, pode-se escolher uma função de teste apropriada. Assim, por exemplo, a pancada que ocorre em uma prensa de forjamento pode ser simulada por uma função do tipo impulso (força com grande intensidade com pequena duração de tempo).

As funções fundamentais de teste que serão estudadas nesta apostila são: o impulso unitário (delta de Dirac), o degrau unitário e a rampa unitária. Também será considerada a combinação de tais sinais de teste com outras funções, de modo a formar sinais de teste compostos.

7.1 Impulso Unitário (Delta de Dirac)

A definição matemática do impulso unitário é

$$\delta(t-a) = 0, \qquad t \neq a$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)dt = 1$$

sendo sua representação gráfica apresentada na Figura 12.

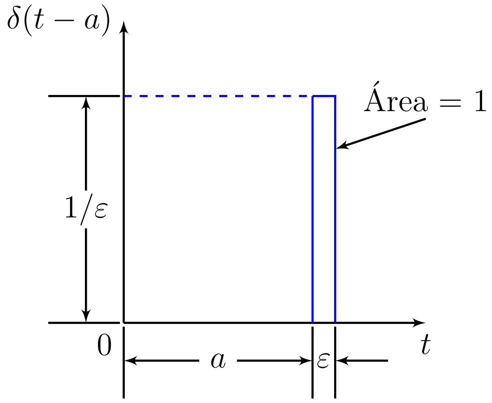

Figura 12: Impulso unitário.

Observando a Figura 12, concluí-se que o impulso unitário é nulo, exceto em um intervalo de tempo muito pequeno ϵ nas vizinhanças do instante $t = a$. Nesse intervalo, a amplitude é muito grande e igual a $1/\epsilon$. Quando $\epsilon \to 0$, a amplitude tende a $+\infty$, porém de tal modo que a área sob a curva permaneça constante e igual a 1. A unidade SI do impulso unitário é, portanto, s^{-1}.

A Transformada de Laplace do Impulso Unitário é dada por

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$$

Normalmente, o impulso ocorre no instante $a = 0$, o que resulta em $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$.

7.2 Degrau Unitário

O degrau unitário é tão importante quanto o impulso unitário. Esta função pode representar uma carga unitária constante, subitamente aplicada, conservando-se por um longo período de tempo. Ele é definido matematicamente como

$$u(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{para } t < a \\ 1, & \text{para } t > a \end{cases}$$

A Figura 13 ilustra o degrau unitário. Pode-se perceber que o degrau unitário é adimensional.

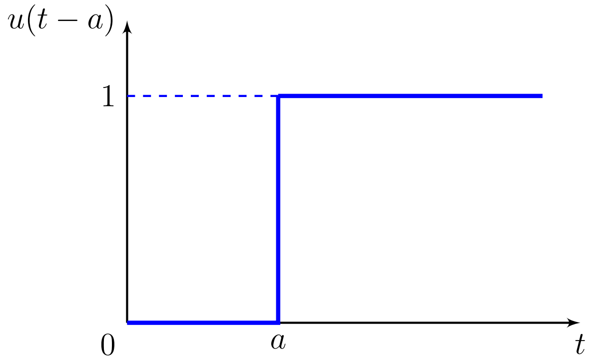

Figura 13: Degrau unitário.

A Transformada de Laplace do degrau unitário é dada por

$$U(s) = \frac{e^{-as}}{s}$$

Normalmente, o degrau ocorre no instante $a = 0$, o que resulta em

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

É fácil demonstrar que são verdadeiras as seguintes propriedades que relacionam o degrau unitário e o impulso unitário

- O degrau unitário é a integral do impulso unitário.
- O impulso unitário é a derivada do degrau unitário.

A multiplicação de uma função $f(t)$ pelo degrau unitário implica na anulação da parte de $f(t)$ correspondente a $t < a$, conservando a porção de $f(t)$ correspondente a $t > a$. A Figura 14 apresenta um exemplo em que $f(t) = \text{sen}\,(\omega t)$ e $a = 0$.

Assim, a função mostrada na parte inferior da Figura 14 pode ser descrita como

$$f(t) = \text{sen}\,(\omega t) u(t)$$

O degrau unitário também é muito útil na construção de outras funções. Por exemplo, a função pulso retangular, mostrada na Figura 15, que é dada por

$$f(t) = F[u(t + T/2) - u(t - T/2)]$$

7.3 Rampa Unitária

Outra função de teste de interesse é a rampa unitária, a qual simula uma excitação linearmente crescente. A função rampa unitária é dada por

$$r(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < a \\ t - a & \text{para } t > a \end{cases}$$

ou como

$$r(t-a) = (t-a)u(t-a)$$

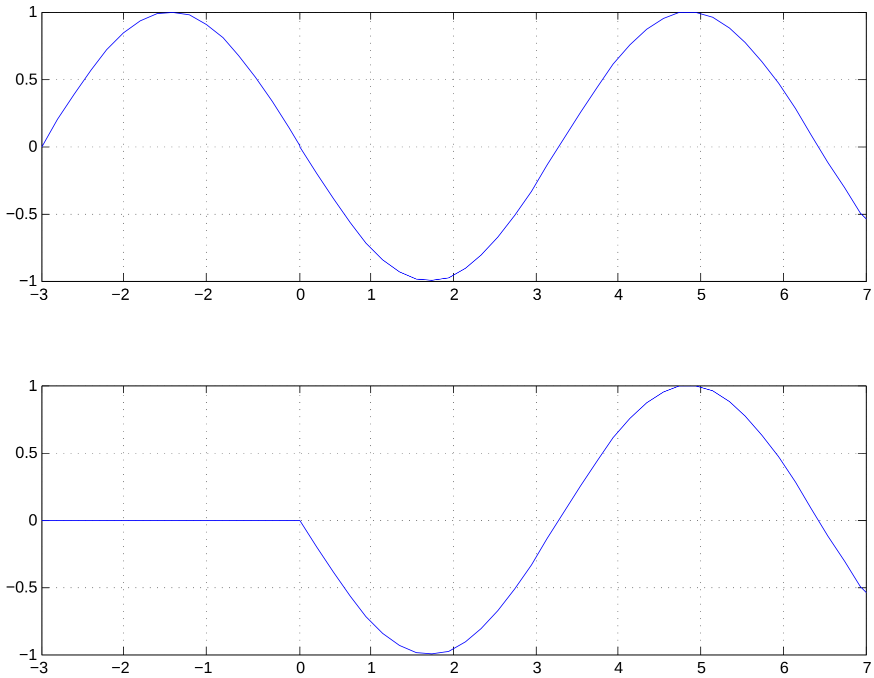

Figura 14: Multiplicação entre uma senóide e um degrau unitário.

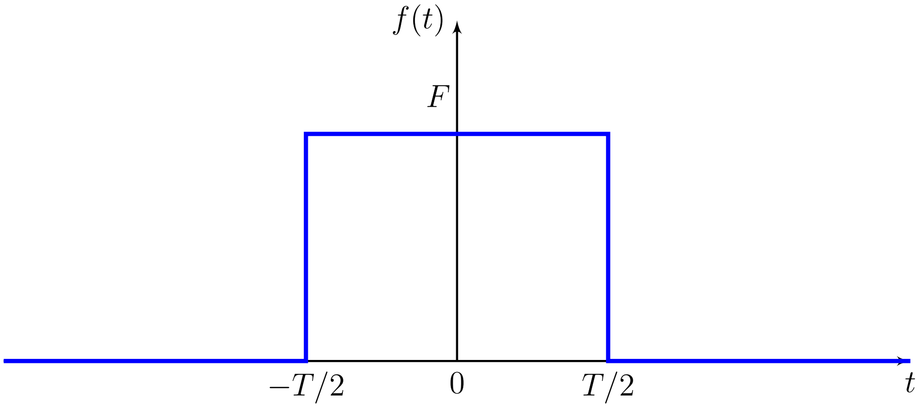

Figura 15: Função pulso retangular.

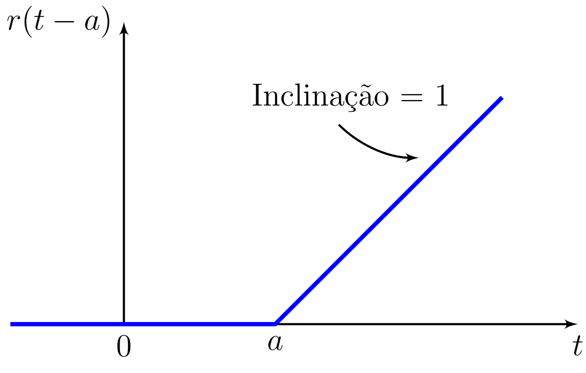

Figura 16: Rampa unitária.

A unidade SI da rampa unitária é o $[s]$. A Figura 16 ilustra a rampa unitária, cuja inclinação é unitária.

A Transformada de Laplace de uma função rampa é dada por

$$R(s) = \frac{e^{-as}}{s^2}$$

Normalmente, a rampa ocorre no instante $a = 0$, o que resulta em:

$$U(s) = \frac{1}{s^2}$$

É fácil demonstrar que são verdadeiras as seguintes propriedades que relacionam o degrau unitário e a rampa unitária:

- A rampa unitária é a integral do degrau unitário.
- O degrau unitário é a derivada da rampa unitária.

A rampa unitária também pode ser usada para a obtenção de certas funções. Por exemplo, o pulso triangular apresentado na Figura 17, cuja expressão matemática é dada por:

$$f(t) = \frac{2F}{T}\left[r(t+\frac{T}{2}) - 2r(t) + r(t-\frac{T}{2})\right]$$

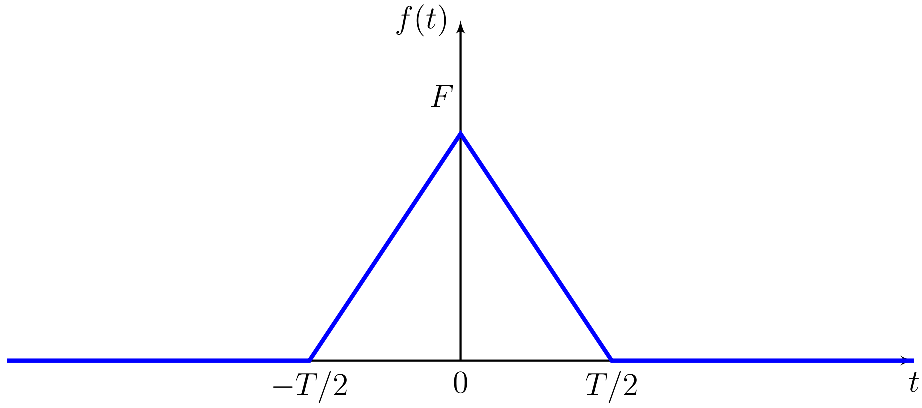

Figura 17: Pulso Triangular.

8 Exercícios

1. Suponha que a resposta de um sistema dinâmico seja dado por:

$$x(t) = -10e^{-t} + cos(5t)$$

   - Achar a resposta transitória e a resposta permanente.
   - Plotar a resposta transitória, a resposta permanente e a resposta do sistema em uma mesma figura usando Matlab.

2. O modelo matemático de sistemas mecânicos com 1GDL com apenas uma massa m, uma mola k e um amortecedor c é dado pela EDOL

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

sendo $x(t)$ a resposta no tempo e $f(t)$ a excitação.

- Calcular a função de transferência do sistema.
- Mostrá-la de forma simbólica usando Matlab. Nota: usar o comando `pretty`.
- Aplicar uma excitação do tipo degrau unitário e apresentar a resposta $x(t)$ de forma gráfica. Assumir os seguintes parâmetros do sistema: $m = 1kg$, $c = 2N.s/m$ e $k = 4N/m$. Nota: Simular usando o comando `step` do Matlab.

3. O modelo matemático do sistema mecânico da Figura 18 é dado por

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky$$

sendo $x(t)$ o deslocamento da massa ao longo do tempo e $y(t)$ é a excitação do tipo

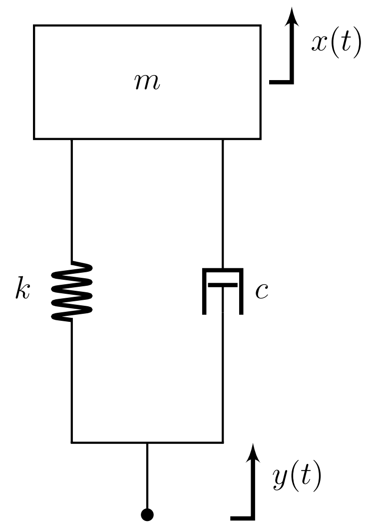

Figura 18: Sistema mecânico Massa-Mola-Amortecedor.

deslocamento da base.

- Calcular a função de transferência do sistema.
- Mostrá-la de forma simbólica usando Matlab.
- Aplicar ao sistema uma excitação senoidal com amplitude 2 e frequência $1rad/s$. Apresentar a resposta $x(t)$ de forma gráfica. Assumir os seguintes parâmetros do sistema: $m = 1kg$, $c = 2N.s/m$ e $k = 4N/m$.
- Calcular a resposta temporal $x(t)$ para a entrada do item anterior.

4. Calcular a Transformada de Laplace do sinal mostrado na Figura 19.

   Sugestão: Usar a definição de Transformada de Laplace e usar integração por partes.

5. Calcular a Transformada de Laplace do pulso triangular da Figura 20 e simulá-lo usando Matlab.

6. Dada a Figura 21, encontrar a Transformada de Laplace da função e reproduzi-la em MatLab.

7. Na Figura 22 são apresentados alguns forçamentos que podem ser obtidos a partir de combinações de outros forçamentos.

   Com base na Figura 22, gerar o pulso trapezoidal conforme ilustrado na Figura 23 usando o prompt do MatLab, onde $F_0 = 10N$, $t_1 = 1s$, $t_2 = 2s$, $t_3 = 2s$.

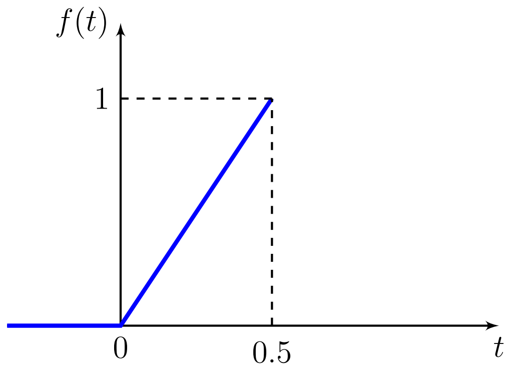

Figura 19

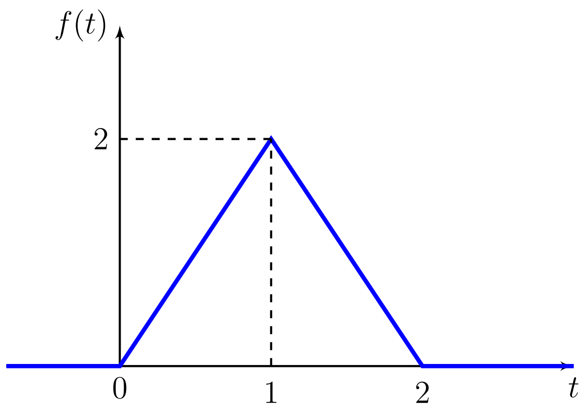

Figura 20

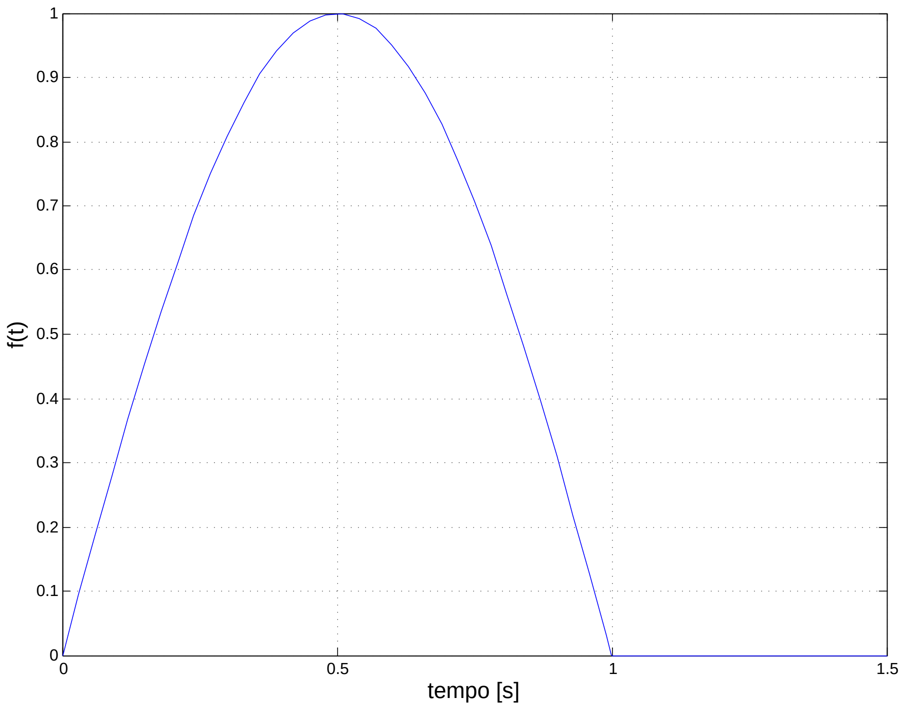

Figura 21

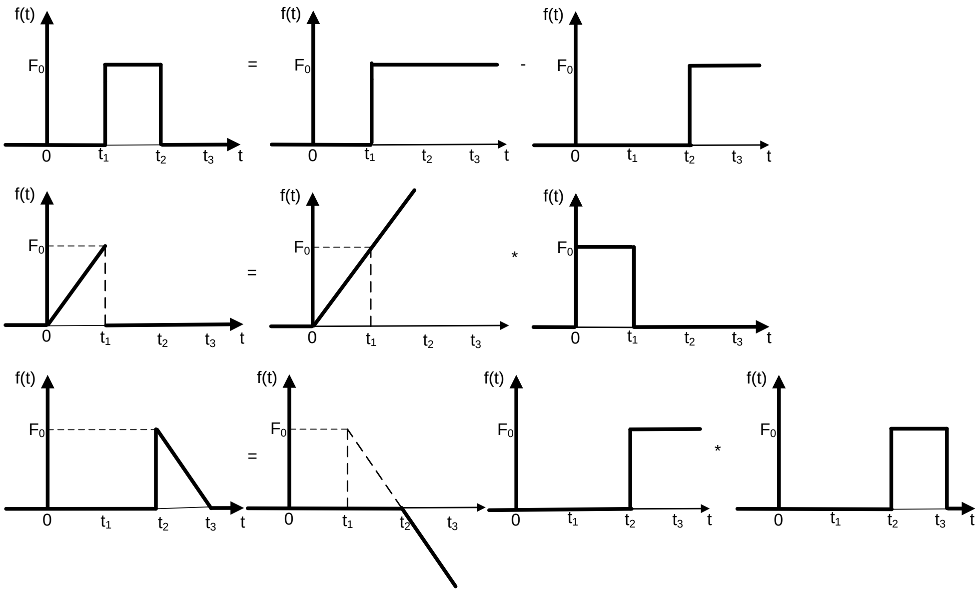

Figura 22: Exemplos.

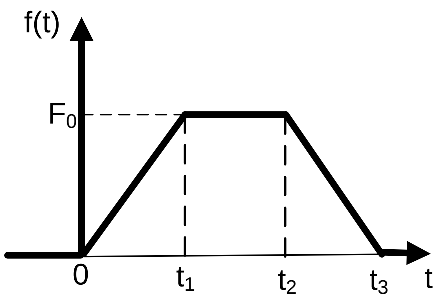

Figura 23