# Guía para el calculo de la Incertidumbre

**NOCIONES BÁSICAS PARA EL CALCULO DE LA INCERTIDUMBRE TIPO A Y B**

Ing. Pablo De César

Año 2022

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA

# Historia

- IRAM 35050 – Procedimientos para la evaluación de la incertidumbre de la medición – Argentina- 2001

Antecedentes

- Guide to the expression of Uncertainty in measurements – 1981 – BIPM – France
- Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results – 1994 – NIST – EE.UU

# Teoría Clásica del Error

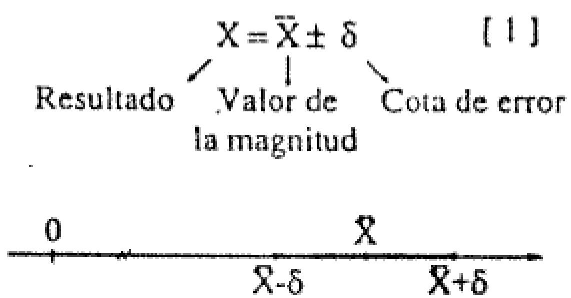
- Una *magnitud física* es un atributo de un cuerpo, un fenómeno o una sustancia, que puede determinarse cuantitativamente, es decir, *es un atributo susceptible de ser medido*.

- Para establecer el valor de un mesurando tenemos que usar *instrumentos de medición* y un *método de medición*. Asimismo es necesario definir *unidades de medición (S.I.)*.

# Resultado de medición – VIM 1º edición (1987)

- Resultado de una medición

  Valor atribuido a un mensurando, obtenido por medición




Libro de Mandrut
10.000 A.C.

El valor representativo de la medición ocupa el centro del intervalo
$\Delta x$ es el error asociado al valor x

# Ley general de los errores

Sea

$$m = f(m_1; m_2; m_3 \ldots)$$

$$\overline{m} = f(\overline{m_1}; \overline{m_2}; \overline{m_3} \ldots)$$

$$|\Delta m| = \left|\frac{\partial m}{\partial m_1}\right|_{\overline{m_1};\overline{m_2};\overline{m_3}\ldots} \cdot |\Delta m_1| + \left|\frac{\partial m}{\partial m_2}\right|_{\overline{m_1};\overline{m_2};\overline{m_3}\ldots} \cdot |\Delta m_2| + \left|\frac{\partial m}{\partial m_3}\right|_{\overline{m_1};\overline{m_2};\overline{m_3}\ldots} \cdot |\Delta m_3|$$

# Ley general de los errores

Ejemplos:

1) Determinar el resultado de la medición de una resistencia en forma indirecta sabiendo que la tensión medida en sus extremos es de $V_R = 8\,V \pm 0{,}2\,V$ y la corriente que por ella circula es de $I_R = 0{,}5\,A \pm 0{,}02\,A$.

La ley es $R = \frac{V}{I}$ $\qquad \bar{R} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$

$\bar{V} = 8\,V \qquad \bar{I} = 0{,}5\,A \qquad \bar{R} = 16\Omega$

$$|\Delta R| = \left|\frac{\partial R}{\partial V}\right|_{\bar{V},\bar{I}} |\Delta V| + \left|\frac{\partial R}{\partial I}\right|_{\bar{V},\bar{I}} |\Delta I|$$

$$|\Delta R| = \frac{1}{\bar{I}}|\Delta V| + \frac{\bar{V}}{\bar{I}^2}|\Delta I|$$

$$|\Delta R| = \frac{1}{0{,}5A}|0{,}2V| + \frac{8V}{0{,}25A^2}|0{,}02A|$$

$$|\Delta R| = 0{,}4\Omega + 0{,}64\Omega$$

$$|\Delta R| = 1{,}04\,\Omega$$

$$\boxed{R = (16 \pm 1{,}04)\,\Omega}$$

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA

# Resultado de medición – VIM 3º edición (2008)

**2.9** (3.1)
**resultado de medida**, m
resultado de una medición, m

conjunto de **valores de una magnitud** atribuidos a un **mensurando**, acompañados de cualquier otra información relevante disponible

NOTA 1 Un resultado de medida contiene generalmente información relevante sobre el conjunto de valores de una magnitud. Algunos de ellos representan el mensurando mejor que otros. Esto puede representarse como una función de densidad de probabilidad (FDP).

NOTA 2 El resultado de una medición se expresa generalmente como un **valor medido** único y una **incertidumbre de medida.** Si la incertidumbre de medida se considera despreciable para un determinado fin, el resultado de medida puede expresarse como un único valor medido de la magnitud. En muchos campos ésta es la forma habitual de expresar el resultado de medida.

NOTA 3 En la bibliografía tradicional y en la edición precedente del VIM, el término **resultado de medida** estaba definido como un valor atribuido al mensurando y podía entenderse como **indicación**, resultado no corregido o resultado corregido, según el contexto.

# Error de medida

**2.16** (3.10)
**error de medida**, m
error, m

diferencia entre un **valor medido de una magnitud** y un **valor de referencia**

NOTA 1 El concepto de error de medida puede emplearse

a) cuando exista un único valor de referencia, como en el caso de realizar una **calibración** mediante un **patrón** cuyo **valor medido** tenga una **incertidumbre de medida** despreciable, o cuando se toma un **valor convencional**, en cuyo caso el error es conocido.

b) cuando el mensurando se supone representado por un valor verdadero único o por un conjunto de valores verdaderos, de amplitud despreciable, en cuyo caso el error es desconocido.

NOTA 2 Conviene no confundir el error de medida con un error en la producción o con un error humano.

# Error sistemático – Error Aleatorio

**2.17** (3.14)
**error sistemático de medida**, m
error sistemático, m

componente del **error de medida** que, en **mediciones** repetidas, permanece constante o varía de manera predecible

NOTA 1 El **valor de referencia** para un error sistemático es un **valor verdadero,** un **valor medido** de un **patrón** cuya **incertidumbre de medida** es despreciable, o un **valor convencional**.

NOTA 2 El error sistemático y sus causas pueden ser conocidas o no. Para compensar un error sistemático conocido puede aplicarse una **corrección**.

NOTA 3 El error sistemático es igual a la diferencia entre el error de medida y el **error aleatorio.**

**2.19** (3.13)
**error aleatorio de medida**, m
error aleatorio, m

componente del **error de medida** que, en **mediciones** repetidas, varía de manera impredecible

NOTA 1 El **valor de referencia** para un error aleatorio es la media que se obtendría de un número infinito de mediciones repetidas del mismo **mensurando.**

NOTA 2 Los errores aleatorios de un conjunto de mediciones repetidas forman una distribución que puede representarse por su esperanza matemática, generalmente nula, y por su varianza.

NOTA 3 El error aleatorio es igual a la diferencia entre el **error de medida** y el **error sistemático.**

# Dos enfoques: Error e Incertidumbre

El objetivo de la medición en el enfoque "del error" es obtener una estimación del valor verdadero tan próxima como sea posible a ese valor verdadero único. La desviación respecto al valor verdadero está constituida por errores sistemáticos y aleatorios, admitiéndose que siempre es posible distinguir entre sí estos dos tipos de errores, y que deben tratarse de manera diferente. No existe una regla que indique cómo combinarlos en un error total que caracterice el resultado de medida dado, obteniéndose únicamente un valor estimado. En general, solo es posible estimar un límite superior del valor absoluto del error total denominado, en forma un tanto inapropiada, "incertidumbre".

El objetivo de las mediciones en el enfoque "de la incertidumbre" no es determinar el mejor valor verdadero posible. Se supone más bien que la información obtenida de la medición permite únicamente atribuir al mensurando un intervalo de valores razonables, suponiendo que la medición se ha efectuado correctamente. Puede reducirse la extensión del intervalo incorporando información relevante adicional. Sin embargo, ni la medición más refinada permite reducir el intervalo a un único valor, a causa de la cantidad finita de detalles que intervienen en la definición del mensurando. La incertidumbre de la definición del mensurando (incertidumbre intrínseca) impone un límite inferior a toda incertidumbre de medida. El intervalo puede representarse por uno de sus valores, llamado "valor medido".

# INCERTIDUMBRE

**2.26** (3.9)
**incertidumbre de medida** , f
incertidumbre, f

parámetro no negativo que caracteriza la dispersión de los **valores** atribuidos a un **mensurando**, a partir de la información que se utiliza

NOTA 1 La incertidumbre de medida incluye componentes procedentes de efectos sistemáticos, tales como componentes asociadas a **correcciones** y a valores asignados a patrones, así como la **incertidumbre debida a la definición**. Algunas veces no se corrigen los efectos sistemáticos estimados y en su lugar se tratan como componentes de incertidumbre.

NOTA 2 El parámetro puede ser, por ejemplo, una desviación típica, en cuyo caso se denomina **incertidumbre típica de medida** (o un múltiplo de ella), o una semiamplitud con una **probabilidad de cobertura** determinada.

NOTA 3 En general, la incertidumbre de medida incluye numerosas componentes. Algunas pueden calcularse mediante una **evaluación tipo A de la incertidumbre de medida,** a partir de la distribución estadística de los valores que proceden de las series de mediciones y pueden caracterizarse por desviaciones típicas. Las otras componentes, que pueden calcularse mediante una **evaluación tipo B de la incertidumbre de medida,** pueden caracterizarse también por desviaciones típicas, evaluadas a partir de funciones de densidad de probabilidad basadas en la experiencia u otra información.

NOTA 4 En general, para una información dada, se sobrentiende que la incertidumbre de medida está asociada a un valor determinado atribuido al mensurando. Por tanto, una modificación de este valor supone una modificación de la incertidumbre asociada.

# Aplicación

Este procedimiento se aplica para la información del resultado de todas las mediciones.

- Comparaciones internacionales de patrones
- Investigación y Desarrollo
- Calibraciones y mediciones
- Certificación de materiales de referencia
- Generación de normas de referencia

# Clasificación de las componentes de incertidumbre

- El resultado de una medición es solo una aproximación o  estimación del valor de una cantidad especifica de una magnitud.

- El resultado es COMPLETO cuando es asociado a un valor de incertidumbre. Este:
  - Da un grado de confianza de la medición
  - Permite realizar comparación entre distintos resultados

# Clasificación de las componentes de incertidumbre

- La incertidumbre en los resultados de una medición esta integrada por varios componentes que son agrupados en dos categorías de acuerdo a como se estime su valor numérico.
  - Tipo A
  - Tipo B

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA

# Clasificación de las componentes de incertidumbre

- TIPO A

  Aquellos que se evalúen por métodos estadísticos

- TIPO B

  Aquellos que se evalúen por otros métodos

  Ejemplo

  - Datos de mediciones previas
  - Experiencia. conocimiento de materiales de referencia o instrumentos
  - Especificaciones del fabricante
  - Datos obtenidos de reportes de calibración

UCA

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA

**2.28**
**evaluación tipo A de la incertidumbre de medida**, f
evaluación tipo A, f

evaluación de una componente de la **incertidumbre de medida** mediante un análisis estadístico de los **valores medidos** obtenidos bajo condiciones de **medida** definidas

NOTA 1 Para varios tipos de condiciones de medida, véase **condición de repetibilidad, condición de precisión intermedia** y **condición de reproducibilidad.**

NOTA 2 Para más información sobre análisis estadístico, véase por ejemplo la Guía ISO/IEC 98-3.

**2.29**
**evaluación tipo B de la incertidumbre de medida**, f
evaluación tipo B, f

evaluación de una componente de la **incertidumbre de medida** de manera distinta a una **evaluación tipo A de la incertidumbre de medida**

EJEMPLOS Evaluación basada en informaciones
- asociadas a **valores** publicados y reconocidos;
- asociadas al valor de un **material de referencia certificado**;
- obtenidas a partir de un **certificado de calibración;**
- relativas a la deriva;
- obtenidas a partir de la **clase de exactitud** de un **instrumento de medida** verificado;
- obtenidas a partir de los límites procedentes de la experiencia personal.

NOTA Véase también la Guía ISO/IEC 98-3:2008, 2.3.3.

# Incertidumbre Tipo A

La componente de incertidumbre tipo A es representada por ui.

Se caracteriza por:

- La estimación estadística del **desvío estándar experimental de la media.** (Si) que es igual a la raíz cuadrada de la varianza.
- El número de grados de libertad vi

# Incertidumbre tipo B

- La componente de incertidumbre tipo B es representada por $u_j$.

- Es una aproximación del desvió estándar igual a la raíz cuadrada de la varianza $u_j$ que es obtenida de una función de distribución asumida de la información disponible

# Modelo matemático de una medición

- En la mayoría de los casos el mensurando Y no se mide directamente, sino que se determina a partir de otras N magnitudes de entrada X1. X2. X3.... XN

$$Y = f\,(X1, X2, X3.... Xn) \qquad (1)$$

- X1. X2. X3.... Xn pueden a su vez depender de otras magnitudes, incluyendo factores de corrección por errores sistemáticos etc.
- f podría determinarse experimentalmente !!!.

  f representa en sentido amplio la función que contiene a todas las variables de entrada.

# Modelo matemático de una medición

- Una estimación del mensurando **Y** denominado **y** se obtiene usando como magnitudes de entrada $x_1$, $x_2$, $x_3$.... $x_n$ para los valores de las N magnitudes $X_1$, $X_2$, $X_3$.... $X_N$

$$y = Y = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Y_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(X_{1,k}, X_{2,k}, X_{3,k}, \ldots X_{N,k})$$

- **y** se toma como media aritmética de n determinaciones de independientes de Y

$$y = f(\overline{X_1}, \overline{X_2}, \overline{X_3}, \ldots\ldots, \overline{X_N})$$

UCA

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA

# Incertidumbre Combinada

- La desviación estándar estimada, asociada con la estimación del resultado de la medición se denomina **INCERTIDUMBRE ESTANDAR COMBINADA u2c(y).**
- Y se define como:

**1º Taylor !!**

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j).$$

# Incertidumbre Combinada

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j).$$

Tipo A

Tipo B

Cuando hay dos variables aleatorias correlacionadas.

UCA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA

# Modelo matemático de una medición

- La incertidumbre combinada $u_c$ representa la desviación estándar del resultado de la medición.

- Es obtenida combinando la $u_i$ obtenida de la evaluación tipo A y la $u_j$ de la evaluación tipo B utilizando la **"Ley de la propagación de la incertidumbre"**

$$u^2(x_i) = u^2_i(x_i) + u^2_j(x_i)$$

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA

# INCERTIDUMBRE
# Conceptos Clave

- **SIEMPRE DEBE SER CACULA E INFORMADA**
- **HAY DOS TIPOS : TIPO A Y TIPO B**
- **LA INCERTIDUMBRE ASOCIADA A LA MEDICION DE LA MAGNITUD "Y" SE OBTIENE CON EL 1º TAYLOR**

# Evaluación Tipo A

La incertidumbre de una magnitud de entrada $X_i$ obtenida a partir de observaciones repetidas bajo condiciones de repetibilidad, se estima con base en la dispersión de los resultados individuales.

El mejor estimador disponible de la esperanza o valor esperado de una magnitud Xi que varia aleatoriamente para la cual se toman n observaciones independientes, bajo las mismas condiciones es la MEDIA ARITMETICA o PROMEDIO

(3)

$$x_i = \bar{X}_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{i,k}$$

# Evaluación Tipo A

- Las observaciones individuales Xi difieren en valor debido a variaciones aleatorias.
- La varianza experimental de las observaciones, que estima la varianza de la distribución de probabilidad de Xi esta dada por.

$$s^2(Xi) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (X_{i,k} - \overline{X_i})^2$$

UCA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA

# Evaluación Tipo A

- La varianza experimental de la media $s^2(\overline{X_i})$ se define como

$$s^2(\overline{Xi}) = \frac{s^2(Xi)}{n}$$

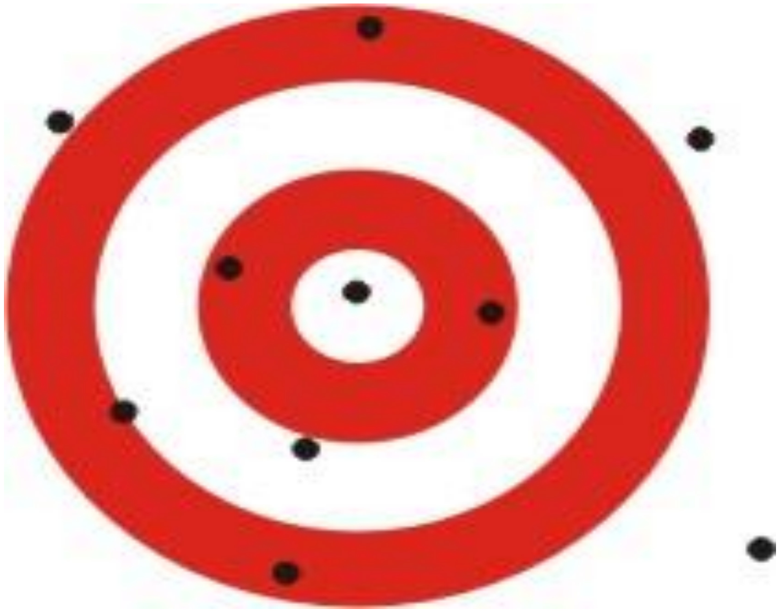
Nota: n es el numero de observaciones independientes

- Y cuantifica que tan bien $\overline{X_i}$ estima la esperanza de Xi y puede ser usada como una medida de la incertidumbre de $\overline{X_i}$

$$u(\overline{Xi}) = s(\overline{Xi})$$

Cuyos grados de libertad son $v = n-1$

# Evaluación Tipo A



En que caso debería incrementar n para estimar con mayor grado de confianza la media?

# Evaluación Tipo A

No se puede dar una recomendación general para el número ideal de las repeticiones $n$, ya que éste depende de las condiciones y exigencias (meta para la incertidumbre) de cada medición específica. Hay que considerar que:

- Aumentar el número de repeticiones resulta en una reducción de la incertidumbre tipo A, la cual es proporcional a $1/\sqrt{n}$ .
- Un número grande de repeticiones aumenta el tiempo de medición, que puede ser contraproducente, si las condiciones ambientales u otras magnitudes de entrada no se mantienen constantes en este tiempo.
- En pocos casos se recomienda o se requiere $n$ mayor de 10 .
  Ejemplo cuando se caracterizan instrumentos o patrones, o se hacen mediciones o calibraciones de alta exactitud.
- Para determinar el impacto que tiene $n$ en la incertidumbre expandida hay que estimar su influencia en el número de grados efectivos de libertad .

UCA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA

# Evaluación Tipo A

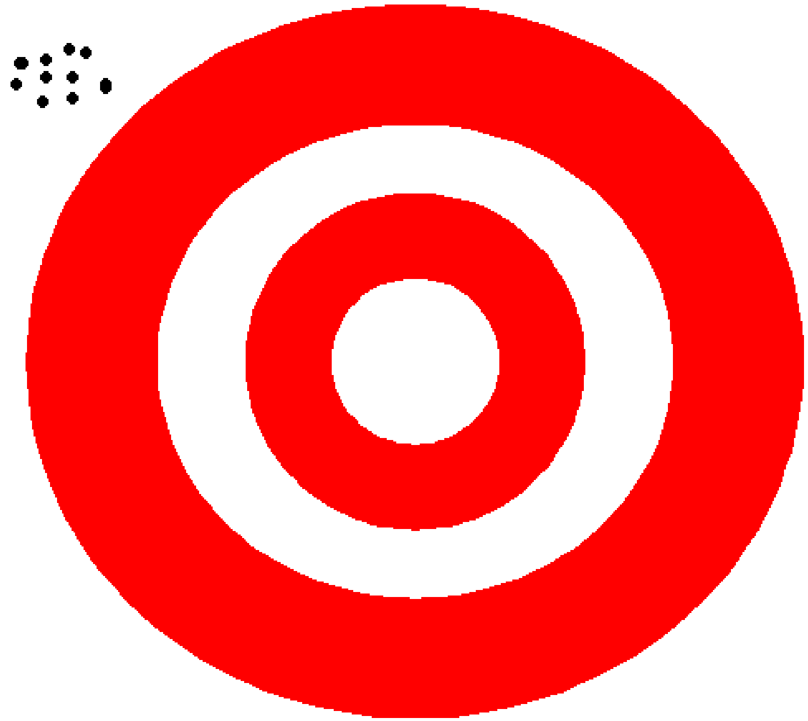
**Ejemplo de una medición de corriente**

| N° de mediciones | Valores tomados[mA] |
|---|---|
| 1 | 11,331 |
| 2 | 11,352 |
| 3 | 11,352 |
| 4 | 11,341 |
| 5 | 11,353 |
| 6 | 11,337 |
| 7 | 11,342 |
| 8 | 11,343 |
| 9 | 11,334 |
| 10 | 11,338 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **I** | Promedio | $\bar{I} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I_k$ | 11,342 [mA] |
| **s(I$_k$)** | Desvio Estandar | $s(I_k) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(I_k - \bar{I})^2}$ | 0,0078 [mA] |
| **u(I)** | incertidumbre Estandar | $s(\bar{I}) = \frac{s(I_k)}{\sqrt{n}}$ | 0,0025 [mA] |

$\nu$=9

# Evaluación Tipo A



Un error sistemático o de método es mejorado aumentando el numero de mediciones?

# Evaluación Tipo B

Los datos de esta incertidumbre provendrán principalmente de dos fuentes:

- Especificaciones del fabricante
- Resultado de calibraciones

**Distribuciones de probabilidad**

La cuantificación de una fuente de incertidumbre incluye la asignación de un valor y la determinación de la distribución a la cual se refiere este valor. Las distribuciones que aparecen más frecuentemente son:

- Distribución Normal
- Distribución rectangular o uniforme
- Distribución Triangular
- Distribución U

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA

FLUKE

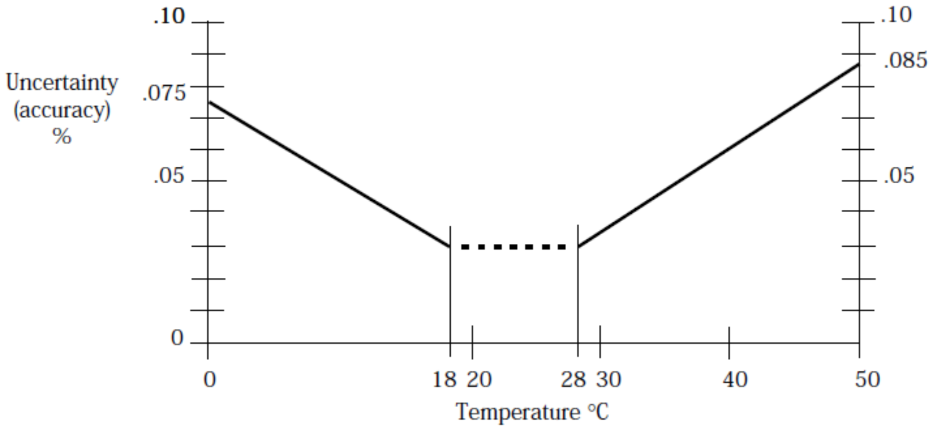
# Understanding specifications for process calibrators

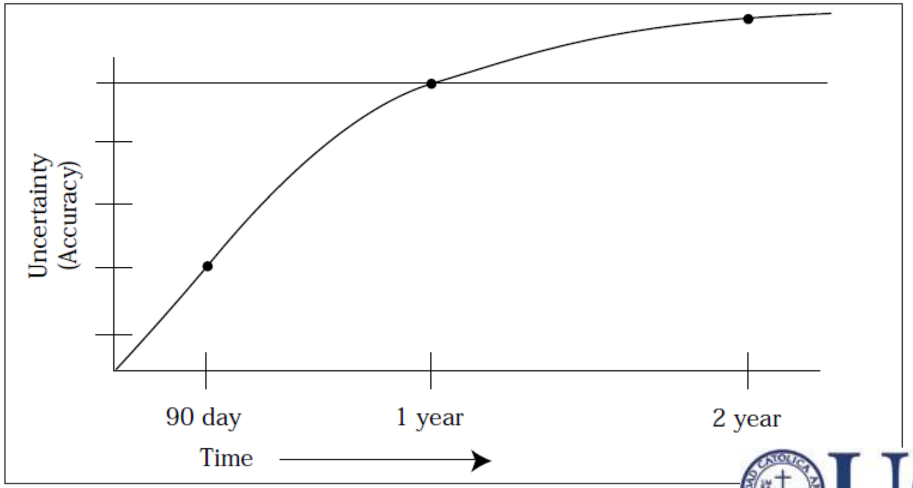
Application Note

## Key components of a specification

The analysis of specifications can be complicated. To have a clear picture of the true specifications, you should be aware of the key components of a specification, and how to extract them from all the foot-notes, from the fine print, and from the specification itself. Each specification must be carefully considered when comparing calibrators from different vendors. The four most important components of a documenting process calibrator specification are:

- time
- temperature
- allowance for traceability to standards
- confidence level




UCA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA

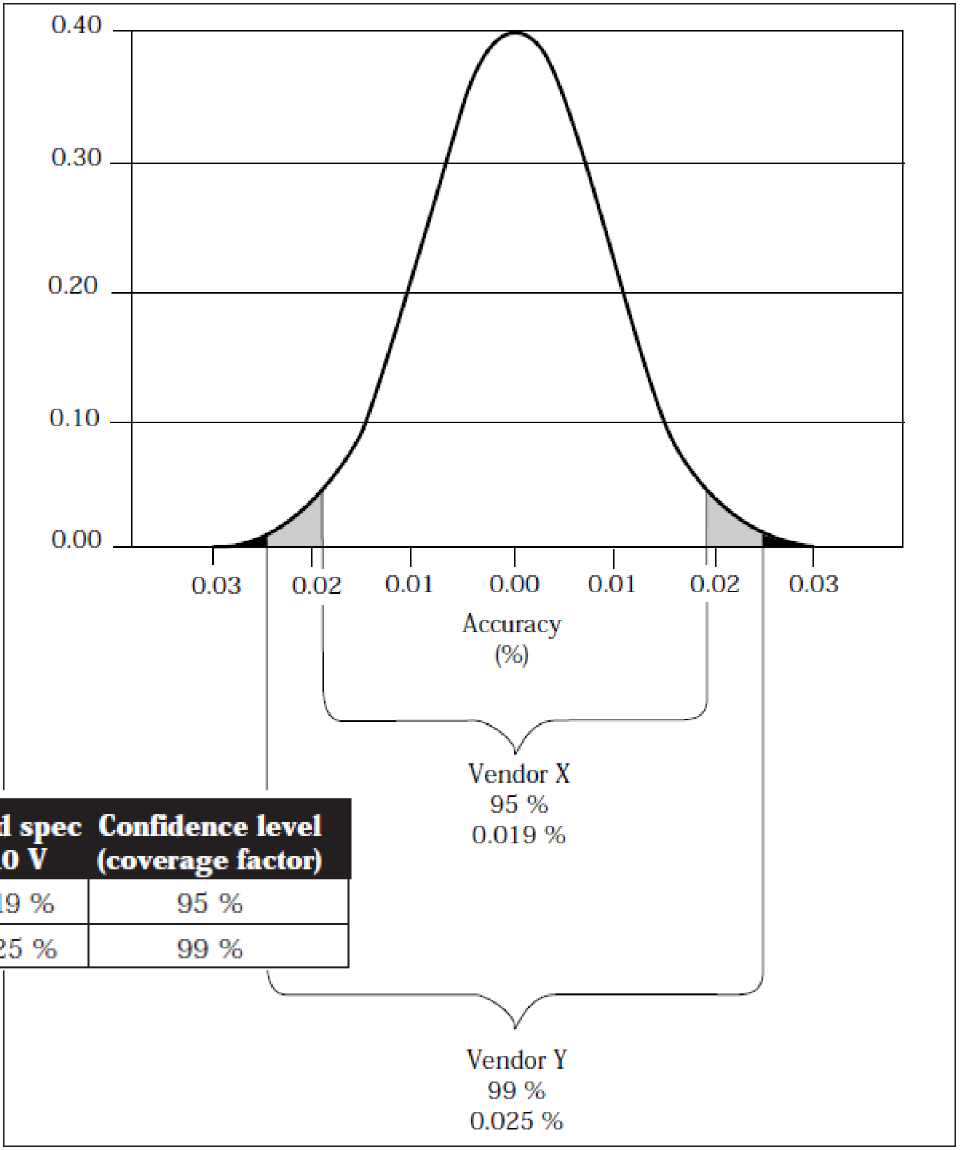
FLUKE

# Understanding specifications for process calibrators

Application Note

## How should a calibrator's performance compare to its specifications?

It must be understood that the published specifications of equipment apply to an entire population of equipment provided by a manufacturer, not just one individual piece of equipment. Consequently, an individual piece of equipment should not just marginally meet its published specifications, but usually should perform much better than its published specification. Just how much better is determined by the philosophy and policies of the manufacturer. This refers to the confidence level or coverage factor that supports a specification.




| Vendor | Stated spec @10 V | Confidence level (coverage factor) |
|---|---|---|
| X | 0.019 % | 95 % |
| Y | 0.025 % | 99 % |

Figure 3. Same performance, different specifications.

# Un poco de estadística

$$E(x) = \int_{A}^{B} f(x).x.dx \ =$$

Esperanza

$$V(x) = \int_{A}^{B} x^2.f(x).dx \ =$$

Varianza

# Evaluación Tipo B

- Veamos un ejemplo. Supongamos la siguiente función distribución:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B-A} & A \leq x \leq B \\ 0 & \end{cases}$$

Los desarrollos de las integrales darán:

$$E(x) = \int_A^B f(x).x.dx = \frac{B+A}{2}$$

$$V(x) = \int_A^B x^2.f(x).dx = \frac{(B-A)^2}{12}$$

# Especificaciones

**Multímetros digitales de RMS verdadero TX-DMM™ TX1 y TX3**

**070-9884-00**

**Cuadro 8: Características de corriente de CC**

| Características | Descripción |
|---|---|
| Voltaje de carga | 5 mA a 5 A: 0,3 V máx.<br>10 A: 0,5 V máx. |
| Porcentaje de 4-20 mA (calculado en un rango de 50 mA) | 4 mA = 0%<br>20 mA = 100% |
| Tiempo de establecimiento | 4 lecturas (habitual) |
| Frecuencia de lectura | 5.000 ct.: 4 lecturas por segundo<br>50.000 ct.: 1 lectura por segundo |

**Cuadro 9: Rango, resolución y precisión de corriente de CC**

| | Resolución | | Precisión | |
|---|---|---|---|---|
| **Rango** | **5.000 conteos** | **50.000 conteos** | **TX1** | **TX3** |
| 500 µA | 100 nA | 10 nA | ± (0,2% + 4 conteos) | |
| 5 mA | 1 µA | 100 nA | ± (0,2% + 2 conteos) | |
| 50 mA | 10 µA | 1 µA | | |
| 500 mA | 100 µA | 10 µA | | |
| 5 A | 1 mA | 100 µA | ± (0,4% + 2 conteos) | |
| 10 A para 3 minutos (15 A para 30 seg.) | 10 mA | 1 mA | ± (0,5% + 2 conteos) | |
| Coeficiente de temperatura | | Se suma (0,05% + 0,1 ct.)/°C al exceso del rango de temperatura estimada. | | |

Todas las especificaciones están garantizadas, a no ser que se indique de la forma acostumbrada, para una temperatura de 23° C ± 5° C, a menos de un 80% de humedad relativa.

# Evaluación Tipo B

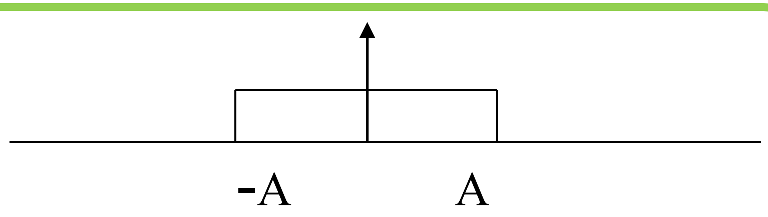
- Si ahora evaluamos una medición de corriente

Siendo: I = 11.342 mA Especificación: ± (0,2% + 2 conteos)

$$2 \text{ conteos} = \frac{2 \cdot 100}{11342} = 0.017\% \qquad \text{Total} = 0.2\% + 0.017\% = 0.217\%$$

$$\text{Precisión} \quad \frac{\Delta I}{I}\% = \pm 0.22\% \quad \Delta I = \pm 0.025 \text{ mA}$$

Podemos aproximar su distribución como:




$$V(x) = \frac{(2A)^2}{12}$$

$$V(x) = \frac{A^2}{3}$$

# Evaluación Tipo B

Tendremos Finalmente que:

$$u_j = s_j = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{A^2}{3}} = \frac{A}{\sqrt{3}}$$

$$u_j = \frac{0.025}{\sqrt{3}} mA = 0.014 mA$$

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA

# Evaluación Tipo B

Antes de comparar y combinar contribuciones de la incertidumbre que tienen distribuciones diferentes, es necesario representar los valores de las incertidumbres originales como incertidumbres estándar. Para ello se determina la desviación estándar de la distribución asignada a cada fuente.

- La incertidumbre estándar queda definida por la precisión de la variable de entrada dividido un número asociado a la función de distribución asumida.

| Distribución | Divisor |
|---|---|
| Normal | 1 |
| Normal (k=2) | 2 |
| Rectangular | $\sqrt{3}$ |
| Triangular | $\sqrt{6}$ |
| U | $\sqrt{2}$ |

# Incertidumbre combinada

## Volviendo a nuestra fórmula

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j).$$

$u^2(xi) = u^2_i(xi) + u^2_j(xi)$

Que sucede en el caso de mediciones directas ??

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \mathbf{1}$$

# Incertidumbre combinada

$$u_c^2(xi) = u^2_i(xi) + u^2_j(xi)$$

- *En nuestro Ejemplo*

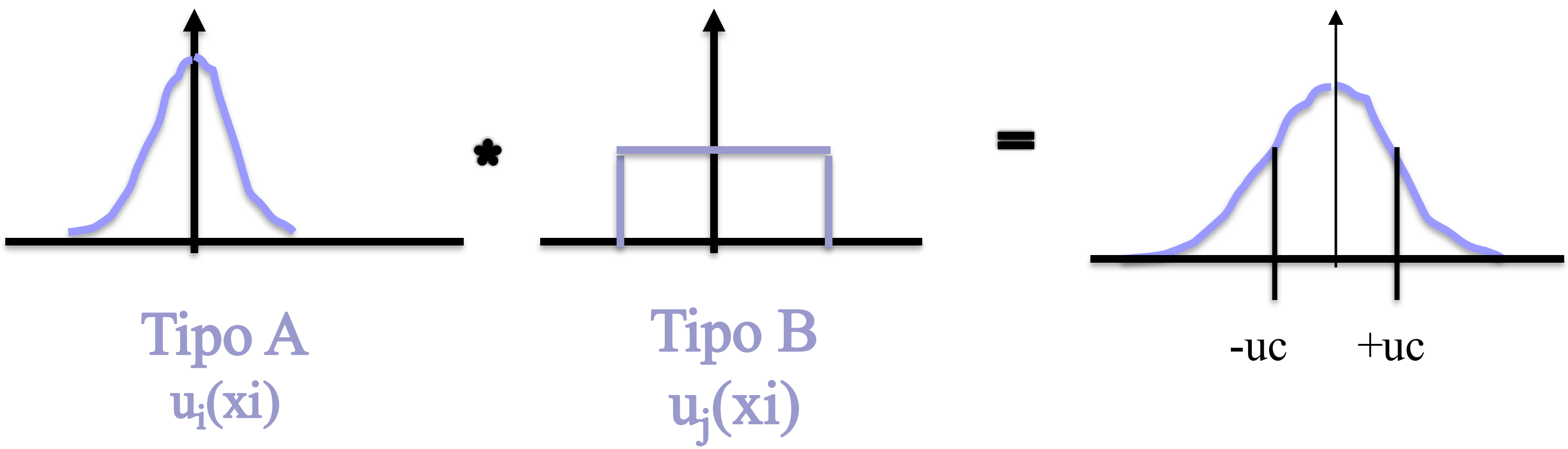
$$u\ (I) = 0.0025 + 0.014 \quad mA$$

$$u\ (I) = 0.00017\ mA$$

$$u_c\ (I) = 0.013\ mA$$

# Interpretación Grafica

$$u_c^2(xi) = u^2_i(xi)+u^2_j(xi)$$



# Que distribución de probabilidad tiene uc ?

Si se conocen las funciones de distribución de probabilidad de las magnitudes de entrada $X1, X2, \ldots, Xn$ del mensurando $Y$ , y además $Y$ es una función lineal, es decir:

$$Y = c1.X1 + c2.X2 + \ldots cn.Xn$$

La distribución de probabilidad de la incertidumbre combinada resulta de la **convolución** de las distribuciones de probabilidad de las variables $X1, X2, \ldots Xn$.

IRAM 35050, ANEXO G

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA

# Que distribución de probabilidad tiene uc ?

Pero, debido a las complicación practicas que existen, donde:

- Y no es función lineal de X1,X2...Xn.
- Las funciones de distribución de las variables de entrada son desconocidas.

Rara vez se usa la convolución para obtener la función de distribución de uc, en su lugar se utiliza el **teorema central del límite.**

IRAM 35050, ANEXO G

# TEOREMA CENTRAL DEL LIMITE

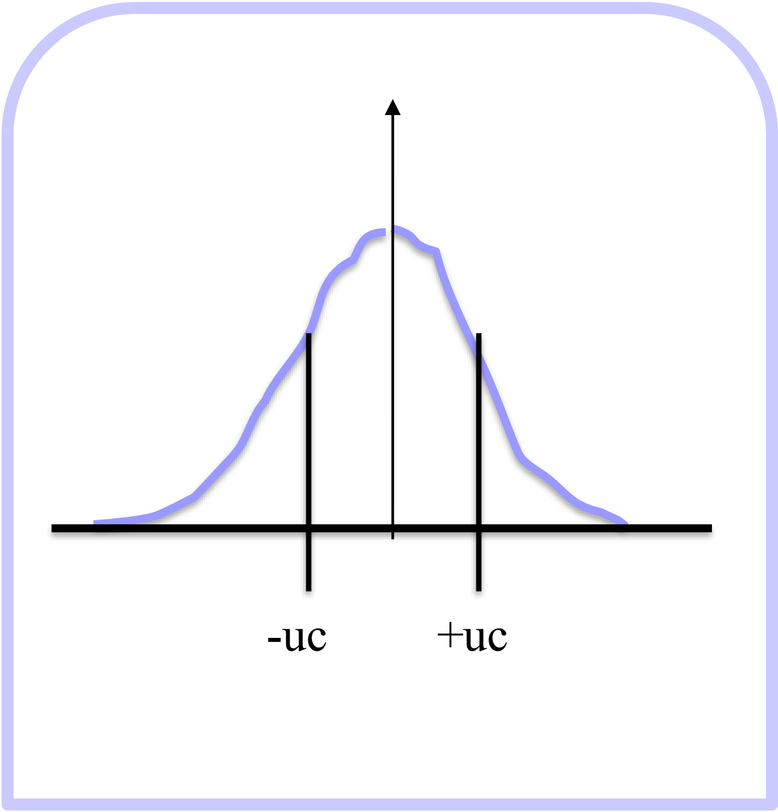
No importa la distribución de probabilidad, a medida que aumenta el número de magnitudes de entrada que contribuyen con la $u_c(Y)$ y cuanto mas próximos sean los valores de $c_i.u_i$, la distribución converge mas rápido a la normal o Gausseana.

**Ejemplo:** La distribución rectangular es un caso extremo de distribución "No normal" pero la convolución de tres distribuciones rectangulares ya es con un buen grado de aproximación NORMAL.

IRAM 35050, ANEXO G

UCA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA

# Incertidumbre combinada




- Con que grado de "confianza" cae el valor de la medición dentro del intervalo ± uc ??
- Que probabilidad existe que el valor de la media caiga fuera de ± uc ??

# Grados efectivos de libertad

Estimar el valor del factor de cobertura $k$ nos obliga tener en cuenta que tan bien estimamos la desviación estándar asociada a $u_c$ con el resultado de la medición.

Para una estimación de la desviación estándar de una distribución normal, los grados de libertad de la estimación, que dependen del tamaño de a muestra.

Para obtener los grados de libertad efectivos $V_{eff}$ de $u_c$ utilizamos la formula de Welch-Satterthwaite

# Grados efectivos de libertad

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{c_i^4 u^4(x_i)}{\nu_i}},$$

con $c_i \equiv \partial f / \partial x_i$ y

$$u(x_i) = s(\bar{X}_i) = \left( \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (X_{i,k} - \bar{X}_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Si Veff > 30

- Es lógico asumir como infinito los grados de libertad obtenidos de una evaluación TIPO B.
- Típicamente, Veff no es un entero, se debe asumir el entero menor al valor calculado.

UKAS M3003

UCA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA

# Factor de confianza

Cuando la incertidumbre combinada $u$ cumple con el *teorema central del límite*, es decir cuando puede asumirse que la distribución de probabilidad de la $u$ tiende a la normal o *Gausseana*, $u$ representa un sigma de dicha distribución.

De aquí que la probabilidad de que la variable aleatoria $Y$ caiga dentro del intervalo $-u$ a $+u$ esta dada por el área bajo la curva normal entre $-u$ a $+u$ .

Recordando que la incertidumbre combinada es un desvío estándar, el área bajo la curva normal es de aproximadamente $68.5\%$.

# 6.12 de la IRAM 35050

Aunque $u_c$ pueda ser utilizada para la expresión de la incertidumbre de un resultado de medición; en ciertas aplicaciones es necesario informar entre que valores se encontraría la mayoría de los resultados atribuibles al mensurando con un grado determinado de confianza.

$$U = k \, . \, u_c(xi)$$

La incertidumbre expandida de obtiene de multiplicar la incertidumbre estándar combinada por un factor de cobertura k

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA

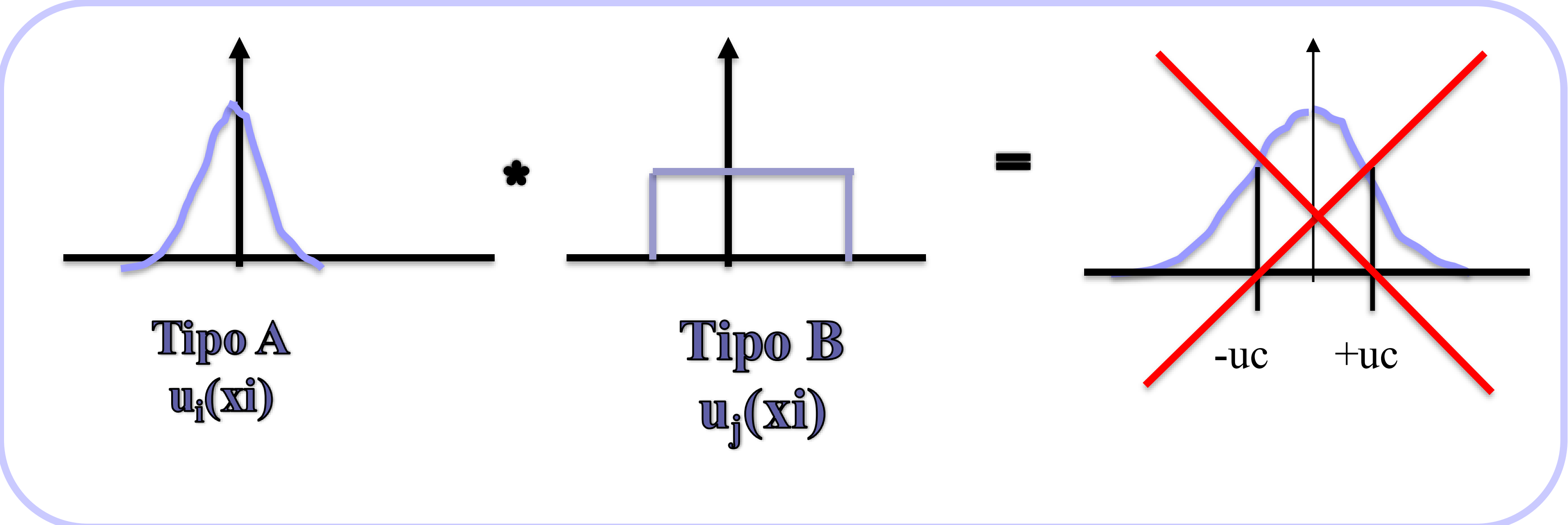
# Incertidumbre Expandida

- Se obtienen directamente del área bajo la curva normal

| K | Grados de cobertura |
|---|---|
| 1 | 68.26% |
| 2 | 95.44% |
| 3 | 99.74% |

$$U = k \,.\, u_c(xi)$$

# Que sucede si la distribución de $u_c$ no se ajusta a la normal?

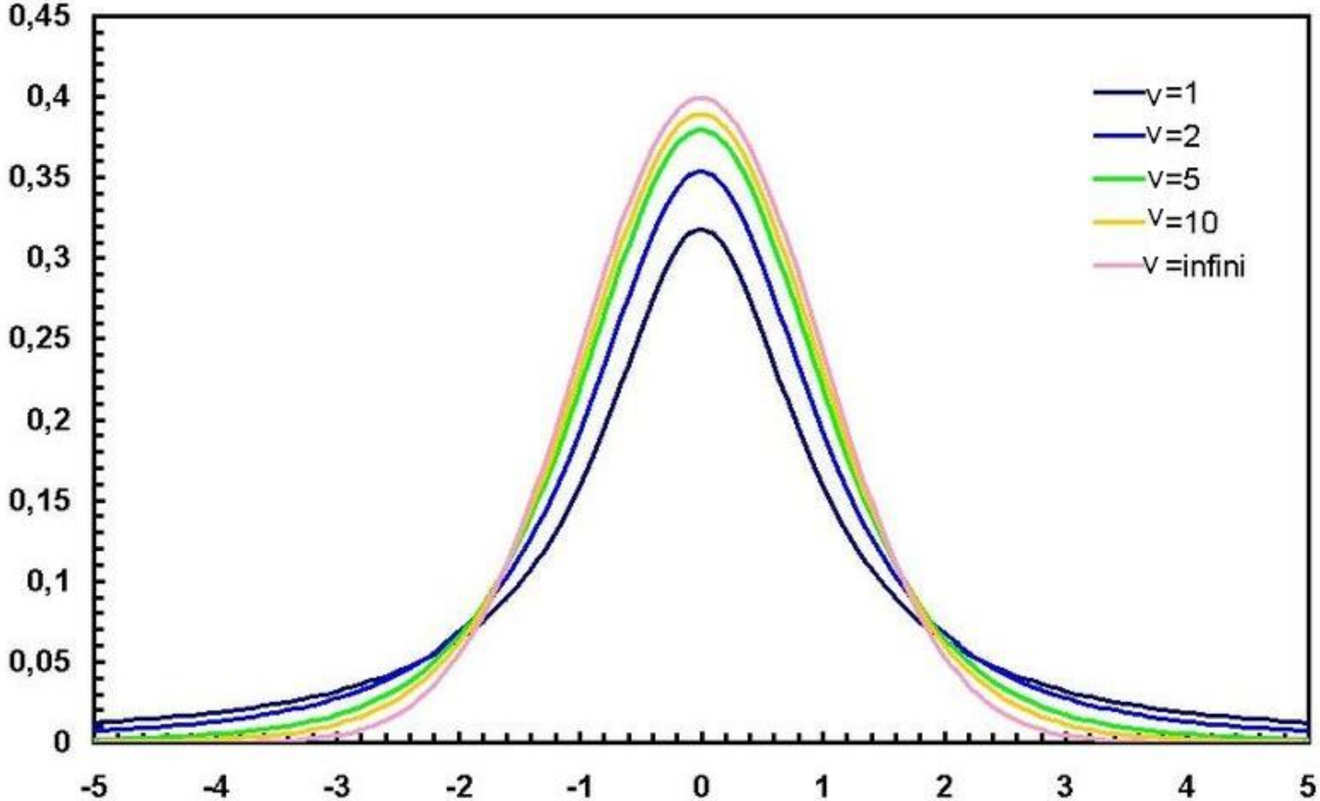



**Cuando sucede esto?**

• Cuando la incertidumbre Tipo A es muy significativa frente a la Tipo B no tenemos suficientes grado de libertad para aproximarnos a la normal. La muestra obtenida no es significativa.

# Distribución t-Student

En probabilidad y estadística, la **distribución t** (**de Student**) es una distribución de probabilidad que surge del problema de estimar la media de una población normalmente distribuida cuando el tamaño de la muestra es pequeño.



# Obtención del coeficiente K

Con el valor de Veff ingresamos a la tabla de la distribución t-sudent para extraer el valor del coeficiente k de cobertura.

Cada columna indica el grado de confianza.

Table B.1 — Value of $t_p(\nu)$ from the $t$-distribution for degrees of freedom $\nu$ that defines an interval $-t_p(\nu)$ to $+t_p(\nu)$ that encompasses the fraction $p$ of the distribution

| Degrees of freedom $\nu$ | Fraction $p$ in percent | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 68.27[a] | 90 | 95 | 95.45[a] | 99 | 99.73[a] |
| 1 | 1.84 | 6.31 | 12.71 | 13.97 | 63.66 | 235.80 |
| 2 | 1.32 | 2.92 | 4.30 | 4.53 | 9.92 | 19.21 |
| 3 | 1.20 | 2.35 | 3.18 | 3.31 | 5.84 | 9.22 |
| 4 | 1.14 | 2.13 | 2.78 | 2.87 | 4.60 | 6.62 |
| 5 | 1.11 | 2.02 | 2.57 | 2.65 | 4.03 | 5.51 |
| 6 | 1.09 | 1.94 | 2.45 | 2.52 | 3.71 | 4.90 |
| 7 | 1.08 | 1.89 | 2.36 | 2.43 | 3.50 | 4.53 |
| 8 | 1.07 | 1.86 | 2.31 | 2.37 | 3.36 | 4.28 |
| 9 | 1.06 | 1.83 | 2.26 | 2.32 | 3.25 | 4.09 |
| 10 | 1.05 | 1.81 | 2.23 | 2.28 | 3.17 | 3.96 |
| 11 | 1.05 | 1.80 | 2.20 | 2.25 | 3.11 | 3.85 |
| 12 | 1.04 | 1.78 | 2.18 | 2.23 | 3.05 | 3.76 |
| 13 | 1.04 | 1.77 | 2.16 | 2.21 | 3.01 | 3.69 |
| 14 | 1.04 | 1.76 | 2.14 | 2.20 | 2.98 | 3.64 |
| 15 | 1.03 | 1.75 | 2.13 | 2.18 | 2.95 | 3.59 |
| 16 | 1.03 | 1.75 | 2.12 | 2.17 | 2.92 | 3.54 |
| 17 | 1.03 | 1.74 | 2.11 | 2.16 | 2.90 | 3.51 |
| 18 | 1.03 | 1.73 | 2.10 | 2.15 | 2.88 | 3.48 |
| 19 | 1.03 | 1.73 | 2.09 | 2.14 | 2.86 | 3.45 |
| 20 | 1.03 | 1.72 | 2.09 | 2.13 | 2.85 | 3.42 |
| 25 | 1.02 | 1.71 | 2.06 | 2.11 | 2.79 | 3.33 |
| 30 | 1.02 | 1.70 | 2.04 | 2.09 | 2.75 | 3.27 |
| 35 | 1.01 | 1.70 | 2.03 | 2.07 | 2.72 | 3.23 |
| 40 | 1.01 | 1.68 | 2.02 | 2.06 | 2.70 | 3.20 |
| 45 | 1.01 | 1.68 | 2.01 | 2.06 | 2.69 | 3.18 |
| 50 | 1.01 | 1.68 | 2.01 | 2.05 | 2.68 | 3.16 |
| 100 | 1.005 | 1.660 | 1.984 | 2.025 | 2.626 | 3.077 |
| $\infty$ | 1.000 | 1.645 | 1.960 | 2.000 | 2.576 | 3.000 |

[a]For a quantity $z$ described by a normal distribution with expectation $\mu_z$ and standard deviation $\sigma$, the interval $\mu_z \pm k\sigma$ encompasses $p$ = 68.27, 95.45, and 99.73 percent of the distribution for $k$ = 1, 2, and 3, respectively.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA

# Grados efectivos de libertad en nuestro ejemplo

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{c_i^4 u^4(x_i)}{\nu_i}},$$

*$u_c$ (I)= 0.013 mA*
*$u_c^4$(I) = 2.85 . $10^{-8}$ $mA^2$*

*$u^4_i$(xi)= $0.0025^4$ = 3.90 . $10^{-11}$*
*$c_i$ = 1*
*vi =9*

**$V_{eff}$ > 6500**

**La distribución de $u_c$ es prácticamente la normal**

**Con cuantos grados de libertad suponemos a contribución tipo B?**

UCA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA

# Incertidumbre Expandida

## En nuestro Ejemplo

$u_c^2(I) = \quad 0.0025^2 + 0.013^2 \quad mA^2$

$u_c^2(I) = 0.00017\ mA^2$

$u\ \ (I) = 0.013\ mA$

$U\ (I) = \ k.\ u_c\ (I)$

$U\ (I) = \ 2\ .\ 0.013\ mA$

$U\ (I) = \ 0.026\ mA$

**Para calibraciones eléctricas y electrónicas que no incluyan aviónica y electromedicina k=2**

# Información del resultado

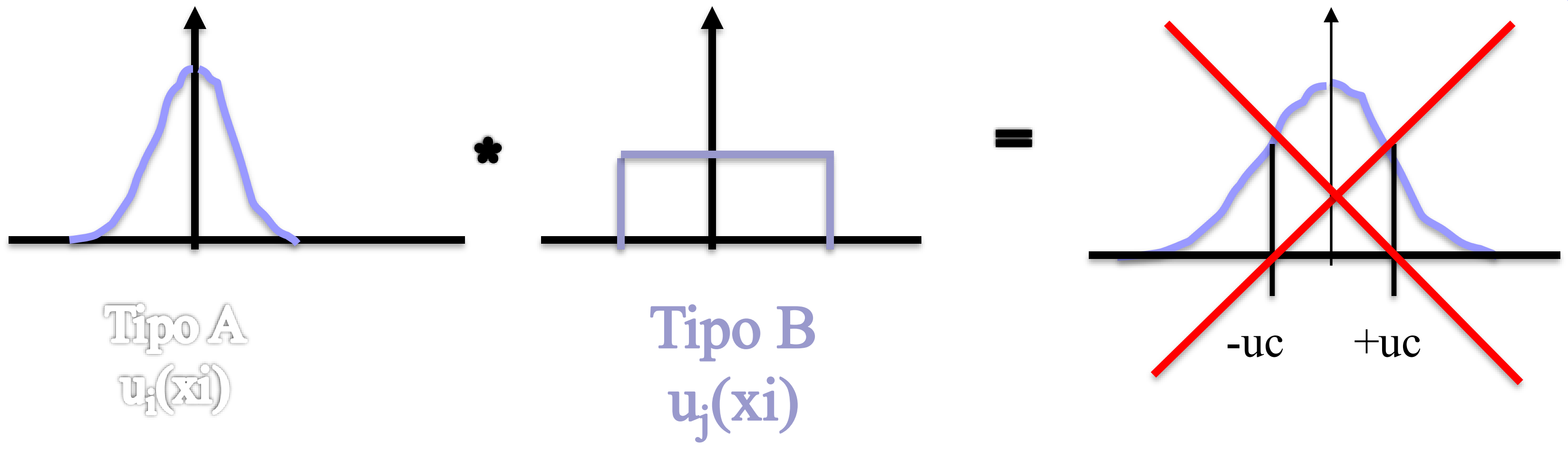
El valor de la corriente de anillo es de

**11.342 mA ± 0.026 mA**

**Con un grado de confianza de 95%**

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA

# Que sucede si la distribución de $u_c$ no se ajusta a la normal?




**Cuando sucede esto?**

- Cuando la incertidumbre Tipo B es muy significativa frente a la Tipo A.

# Tipo B dominante

- En algunos procesos de medición puede haber un componente de incertidumbre derivada de una evaluación Tipo B, que es dominante en magnitud en comparación con los otros componentes.

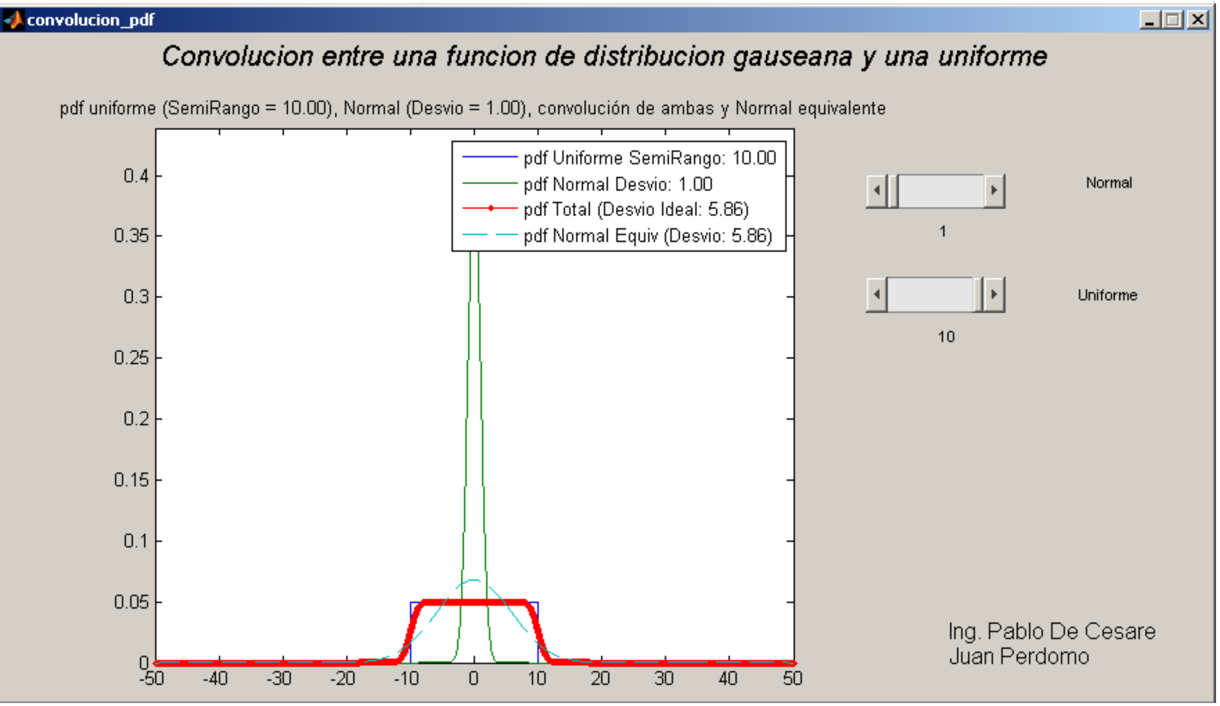
- Cuando el elemento dominante se caracteriza por límites en los que existe una alta probabilidad de ocurrencia,(caso especificación de fabricante) una incertidumbre expandida calculada, U, utilizando el factor de cobertura de k = 2, puede ser mayor que la suma aritmética de los semi-rangos todos los valores individuales. Como es razonable suponer que la suma aritmética de las contribuciones sería para una probabilidad de cobertura cercana al 100%, hay un grado de pesimismo en el procedimiento normal recomendado para la combinación de las incertidumbres.

- Por lo tanto una consideración especial debe ser dada a la situación en la que la incertidumbre expandida calculada no cumple con el criterio de

**U < suma aritmética de los valores límite de todas las contribuciones.**

UCA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA

# Tipo B dominante




Tipo A=1
Tipo B=10

La normal equivalente, a la distribución obtenida por convolución, tiene un desvío estándar de 5.86, que representa el 68%

Al expandirla para obtener un grado de confianza del 95% informamos 11.72 valor muy pesimista como se aprecia al comprar ambas curvas.

# Tipo B dominante

Dos métodos alternativos se proponen

1) Separar la componente dominante y sumarla al resto de la incertidumbre

$a_d$ es el semirango de la componente tipo B dominante
U' es la incertidumbre combinada de todos los demas componentes de incertidumbre.

$$U = a_d + U'$$

En esta situación la incertidumbre ese informa de la siguiente manera

*"El valor de incertidumbre es dominado por la incertidumbre de la exactitud del instrumento por lo tanto una distribución rectangular debe ser asumida"*

UCA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA

# Tipo B dominante

M3003

EDITION 2 | JANUARY 2007

The Expression of Uncertainty and Confidence in Measurement

There may be, however, situations where a single value of uncertainty is required even if there is a Type B uncertainty that causes the distribution to be non-normal. This will involve evaluation of a coverage factor for a stated coverage probability for the convolved distributions.

If a rectangular distribution and a normal distribution are convolved, the coverage factor *k* for a coverage probability of 95.45% may be obtained from the following table:

| $\frac{u_i(y)_{normal}}{u_i(y)_{rect}}$ | $k_{95.45}$ | $\frac{u_i(y)_{normal}}{u_i(y)_{rect}}$ | $k_{95.45}$ | $\frac{u_i(y)_{normal}}{u_i(y)_{rect}}$ | $k_{95.45}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 1.65 | 0.50 | 1.84 | 0.95 | 1.95 |
| 0.10 | 1.66 | 0.55 | 1.85 | 1.00 | 1.95 |
| 0.15 | 1.68 | 0.60 | 1.87 | 1.10 | 1.96 |
| 0.20 | 1.70 | 0.65 | 1.89 | 1.20 | 1.97 |
| 0.25 | 1.72 | 0.70 | 1.90 | 1.40 | 1.98 |
| 0.30 | 1.75 | 0.75 | 1.91 | 1.80 | 1.99 |
| 0.35 | 1.77 | 0.80 | 1.92 | 2.00 | 1.99 |
| 0.40 | 1.79 | 0.85 | 1.93 | 2.50 | 2.00 |
| 0.45 | 1.82 | 0.90 | 1.94 | $\infty$ | 2.00 |

Example

A digital voltmeter is calibrated with an applied voltage of 1.0000 V; the resulting reading is 1.001 V. The expanded uncertainty of the applied voltage is ± 0.0002 V ($k$=2). The only other uncertainty of significance is due to the rounding of the indicator display. The indicator can display readings in steps of 0.001 V; therefore there will be a possible rounding error of ± 0.0005 V. A rectangular probability distribution is assumed.

The uncertainty budget will therefore be as follows:

| Symbol | Source of uncertainty | Value ± V | Probability distribution | Divisor | $c_i$ | $u_i(V)$ V | $v_i$ or $v_{eff}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_s$ | Uncertainty of applied voltage | 0.0002 | Normal | 2 | 1 | 0.000100 | ∞ |
| $\delta I_d$ | Digital rounding of indicator | 0.0005 | Rectangular | √3 | 1 | 0.000289 | ∞ |
| $u_c(V)$ | Combined standard uncertainty | | Convolved $\frac{0.000100}{0.000289} = 0.346$ | | | 0.000306 | ∞ |
| $U$ | Expanded uncertainty | | Convolved $k = 1.77$ | | | 0.000541 | ∞ |

Reported result

For an applied voltage of 1.000 V the voltmeter reading was 1.001 V ± 0.00054V.

The reported expanded uncertainty is based on a convolution of a dominant rectangular uncertainty with other, smaller, uncertainties. The resulting standard uncertainty has been multiplied by a coverage factor $k$ = 1.77, which, for this particular convolution, corresponds to a coverage probability of approximately 95%. The uncertainty evaluation has been carried out in accordance with UKAS requirements.

NOTE

A simple test to determine whether a rectangular uncertainty is a dominant component is to check whether its standard uncertainty is more than 1.4 times the combined standard uncertainty for the remaining components. If it is not, then $\frac{u_i(y)_{normal}}{u_i(y)_{rect}} \geq 0.71$ and the coverage factor $k$ will be within 5% of the usual value of 2.00.

# Correlación

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j).$$

Tipo A

Tipo B

Cuando hay dos variables aleatorias correlacionadas.

A menudo los resultados de mediciones de dos magnitudes de entrada están ligados, ya sea porque **existe una tercera magnitud que influye sobre ambas, porque se usa el mismo instrumento para medir o el mismo patrón para calibrar**, o por alguna otra razón.

# Correlación

Desde el punto de vista estadístico, dos variables son independientes cuando la probabilidad asociada a una de ellas no depende de la otra,
esto es:
- si *q* y *w* son dos variables aleatorias independientes, ***la probabilidad conjunta se expresa como el producto de las probabilidades de las variables respectivas***.

$$p(q,w) = p(q).p(w)$$

Frecuentemente, se encuentran magnitudes de entrada que no son independientes. La independencia lineal de dos variables puede estimarse estadísticamente con el ***coeficiente de correlación***.

$$r(q,w) = \frac{u(q,w)}{u(q).u(w)}$$

En el denominador aparecen las incertidumbres estándar de las variables aludidas y en el numerador ***la covarianza*** de las mismas.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA

# Correlación

## Covarianza

La covarianza puede ser estimada:

- por medio de las relaciones funcionales entre ambas variables y la tercera que influye sobre ellas
- a partir de un conjunto de $n$ valores de $q$ y $w$ según:

$$u(q,w) = \frac{1}{n.(n-1)} \sum_{k=1}^{n} \left(q_k - \overline{q}\right).\left(w_k - \overline{w}\right)$$

Un valor de $r$ = 0 indica independencia de $q$ y $w$. Los valores de $r$ = +1 o –1 indican una correlación total.

# Correlación

Puede existir una correlación significativa entre 2 magnitudes de entrada si se utiliza para su determinación el mismo instrumento de medida, el mismo patrón o el mismo dato de referencia con incertidumbres significativas.

Las correlaciones entre magnitudes de entrada no pueden ignorarse siempre que existan y sean significativas. Las covarianzas asociadas deben evaluarse experimentalmente

IRAM 35050 5.2.4

# Ejemplo:

## Medición de resistencia con voltímetro y amperímetro

Los mensurandos se relacionan a través de la ley de ohm.

$$R = \frac{V}{I}$$

Se considera que se han obtenido cinco grupos de mediciones independientes y simultaneas

| Set number $k$ | Input quantities | |
|---|---|---|
| | $V$ (V) | $I$ (mA) |
| 1 | 5,007 | 19,663 |
| 2 | 4,994 | 19,639 |
| 3 | 5,005 | 19,640 |
| 4 | 4,990 | 19,685 |
| 5 | 4,999 | 19,678 |
| Arithmetic mean | $\overline{V}$ = 4,999 0 | $\overline{I}$ = 19,661 0 |
| Experimental standard deviation of mean | $s(\overline{V})$ = 0,003 2 | $s(\overline{I})$ = 0,009 5 |
| Correlation coefficients | | |
| $r(\overline{V},\overline{I})$ = −0,36 | | |

$$u_c^2(Z) = \left(\frac{1}{\overline{I}}\right)^2 u^2(\overline{V}) + \left(\frac{\overline{V}}{\overline{I}^2}\right)^2 u^2(\overline{I}) + 2\left(\frac{1}{\overline{I}}\right)\left(-\frac{\overline{V}}{\overline{I}^2}\right) u(\overline{V})\,u(\overline{I})\,r(\overline{V},\overline{I})$$

UCA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA ARGENTINA