

# **140452 - Sistemi Meccanici e Modelli**

Marco Peressutti

192864

marco.peressutti@studenti.unitn.it

5 ottobre 2025

# **Indice**

# **Elenco delle figure**

# **Elenco delle tavelle**

# 1 Introduzione

La Meccanica Applicata alle Macchine ha come obiettivo lo studio delle macchine o meglio dei sistemi meccanici. Cerchiamo per prima cosa di chiarire il concetto di macchina:

## Definition 1: Macchina

costruzione dell'uomo, il cui stato evolve nel tempo, atta al raggiungimento di un prefissato obiettivo.

Dato che l'obiettivo principale dell'uomo è l'esecuzione di un determinato lavoro utile, la macchina può essere vista come: *Sistema di organi disposti in modo tale da compiere lavoro di interesse industriale*. L'esecuzione del lavoro comporta, di conseguenza, la presenza di forze applicate e trasmesse tra i vari organi della macchine e di spostamenti degli stessi.

Secondo un approccio classico le macchine si possono dividere in 2 classi principali (in base alla loro funzione):

1. **Macchine energetiche**: costituite allo scopo di ottenere determinate trasformazioni di energia.

Esse si possono distinguere a loro volta tra:

- macchine **motrici**: trasformano l'energia di altra forma in energia meccanica
- macchine **generatrici**: trasformano l'energia meccanica in energia di altra forma

2. **Macchine operatrici**: costruite allo scopo di realizzare specifiche operazioni diverse dalla trasformazione di energia. È possibile formulare un'ulteriore distinzione delle diverse macchine operatrici per esempio in base al loro utilizzo (e.g. macchine utensile, macchine di sollevamento, macchine tessili, macchine per lo scavo e sollevamento terra, robot, macchine da trasporto...)

A questa classificazione formulata secondo un *approccio classico*, è preferito un secondo approccio, detto approccio metodologico.

La principale distinzione tra i due approcci risiede nella classificazione in base alle loro caratteristiche cinematiche e dinamiche (metodologico) piuttosto che in base alla loro funzione (classico).

Secondo le premesse appena esposte è possibile, dunque, dare una nuova definizione di Macchina:

## Definition 2: Macchina

La macchina è un sistema meccanico costituito da più componenti o sottoinsiemi. Ciò che caratterizza il sistema è il modello matematico (i.e. insieme di equazioni che ne rappresentano il comportamento cinematico e dinamico in determinate condizioni).

dove un **Sistema meccanico** consiste in un insieme di più componenti (solidi, deformabili, rigidi, fluidi, liquidi, aeriformi) collegati tra di loro da coppie cinematiche in modo da realizzare determinati moti relativi tra di loro e in modo da trasmettere determinate forze.

Il sistema in questione è caratterizzato dal fatto di essere separabile dall'ambiente mediante un confine di tipo fisico o concettuale attraverso il quale avvengono scambi di energia o di informazioni, e di essere costituito da più componenti interconnessi in modo da formare un'unica entità. Note le proprietà dei sistemi meccanici, l'obiettivo fondamentale della meccanica applicata è, di conseguenza, la costruzione di un modello matematico (è possibile costruirne più di uno tra cui è da preferire il più semplice tra quelli che riescono a conservare le caratteristiche essenziali del sistema reale) che è possibile formulare tramite la cosiddetta operazione di sintesi.

L'operazione di sintesi consiste nell'utilizzo di una serie di procedure razionali per la scelta del tipo di sistema meccanico, del numero dei suoi membri e delle sue dimensioni. La sintesi è suddivisa in tre fasi:

- **sintesi di tipo**: scelta del tipo di sistema meccanico

- **sintesi di numero:** definizione del sistema (e.g. numero di componenti e loro collegamento relativo)
- **sintesi dimensionale:** determinazione delle dimensioni degli organi del sistema

CINEMATICA DIRETTA	PROBLEMI DI ANALISI	DINAMICA DIRETTA
Assegnato il modo del membro motore, studio del moto degli altri membri del sistema (indipendentemente dalle forze che li generano).		Studio del moto dei membri generato dalle forze applicate o dalle condizioni iniziali diverse da quelle di equilibrio stabile
CINEMATICA INVERSA	PROBLEMI DI ANALISI	DINAMICA INVERSA
Assegnato il moto di uno o di alcuni membri condotti del sistema determinare come deve muoversi il membro motore affinché il membro condotto sia quello desiderato		Assegnate le forze applicate al sistema e le leggi del moto del membro motore, determinare il valore della forza motrice da applicare affinché si ottenga il moto desiderato.
CINEMATICA	PROBLEMI DI SINTESI	DINAMICA
Determinare con procedure razionali le caratteristiche strutturali del sistema in grado di realizzare il moto desiderato		Determinare con procedure razionali le caratteristiche strutturali del sistema in grado di realizzare il moto desiderato

## 2 Gradi di libertà, struttura dei meccanismi e richiami

### 2.1 Gradi di libertà

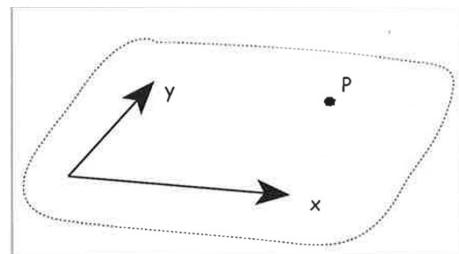
I gradi di libertà di un sistema meccanico sono pari al numero di variabili indipendenti che si devono specificare per descrivere il movimento.

Esempi:

1. La posizione di una particella posta su un piano può essere completamente definita:

- una volta fissato un sistema di riferimento cartesiano, da due variabili indipendenti ( $x_p, y_p$ )
- una volta assegnato l'angolo e il raggio (coordinate polari del punto), da due variabili indipendenti ( $\rho, \alpha$ )

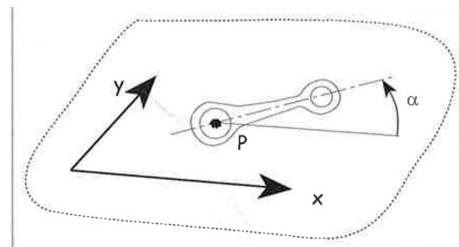
Per definire la posizione di un punto sono sufficienti due variabili, di conseguenza si dice che la particella nel piano ha due gradi di libertà.



2. Un corpo rigido nel piano ha invece tre gradi di libertà (una volta fissato un sistema di riferimento cartesiano):

- due gradi di libertà possono essere associati alle coordinate di un punto qualsiasi di questo corpo rigido (posizione)
- il terzo all'angolo  $\alpha$  dell'asse di simmetria con uno dei vettori di riferimento (orientamento)

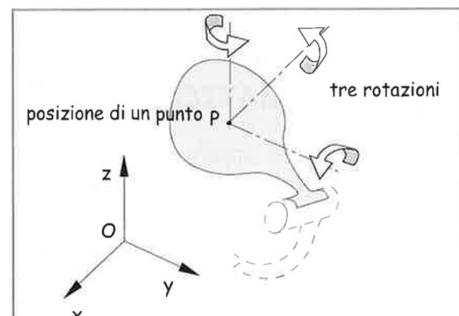
È possibile definire altri metodi per descrivere la posizione del corpo rigido nel piano, ma alla fine dobbiamo specificare sempre 3 variabili



3. Una particella libera di muoversi nello spazio ha 3 gradi di libertà: infatti sono necessarie solo 3 coordinate (cartesiane o sferiche) per descrivere completamente la sua posizione nello spazio.

4. Un corpo rigido nello spazio ha 6 gradi di libertà, perché per descriverlo completamente sono necessarie:

- 3 coordinate per specificare la posizione di un punto del corpo rigido nello spazio
- 3 angoli per definirne l'orientamento



Dagli esempi proposti si può dedurre facilmente che esistono diversi modi di associare i gradi di libertà alle varie coordinate, ma devono essere rispettati due requisiti:

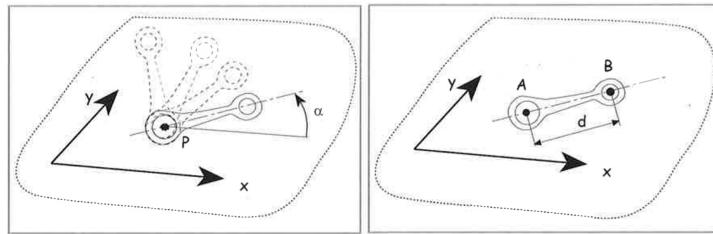
1. Le coordinate devono essere **SUFFICIENTI** a descrivere completamente il sistema
2. Le coordinate devono essere **INDIPENDENTI**

Un insieme di coordinate sufficienti e indipendenti viene chiamato insieme di "coordinate generalizzate"

!! Il numero di gradi di libertà può essere diminuito imponendo dei vincoli al corpo o al sistema di corpi rigidi in esame. In tal caso si parla di **EQUAZIONE DI VINCOLO DI CORPO RIGIDO** (=corpo non deformabile).

**Esempio:** nell'occasione della definizione della posizione di un corpo sono sufficienti le coordinate del punto P ( $x_p, y_p$ ) e l'angolo  $\alpha$  a descrivere il sistema, infatti se sono assegnate il corpo rigido può avere una sola posizione e un solo orientamento. (Figura a sinistra)

Alternativamente se avessimo preso le coordinate di due punti su un piano non avrei avuto bisogno di tutte e 4 le variabili ( $x_a, x_b, y_a, y_b$ ) [con A e B due punti materiale del corpo in questione] bensì solo di 3 in quanto il corpo, essendo rigido e dunque indeformabile, impone un'equazione di vincolo fisso sulla distanza dei punti A e B. (figura a destra)



I punti in questione, infatti, sono vincolati a tenersi alla medesima distanza:

$$d = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2} = \text{cost}$$

Si può notare che imponendo tale vincolo una delle variabili scelte risulta essere rindondante e può essere ricavata dall'equazione di vincolo conoscendo le 3 rimanenti.

## 2.2 Coppie cinematiche piane

I corpi rigidi interagiscono tra loro all'interno di uno stesso sistema meccanico per via di collegamenti reciproci che ne limitano i gradi di libertà. Tali limiti imposti sul moto relativo fra i corpi sono chiamati **VINCOLI**.

\*\* **Elementi cinematici** := superfici dei due corpi fra loro a contatto della coppia.

\*\* **Coppia cinematica** := sistema che accoppia due membri e che quindi toglie alcuni gradi di libertà del moto relativo

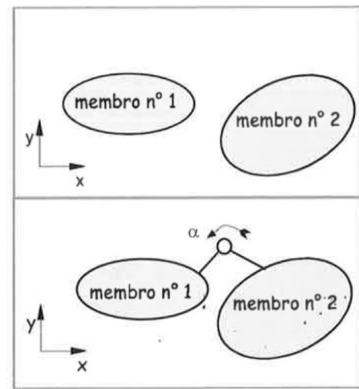
Nel piano possiamo distinguere tra 3 coppie cinematiche:

### 1. Coppia rotoidale (R) o Cerniera

Consideriamo due corpi rigidi nel piano. Ognuno di essi prevede 3 gradi di libertà che identificano la posizione di un loro punto materiale nel piano e uno che ne identifica l'orientamento (es. angolo rispetto all'orizzontale).

La **coppia rotoidale** o **cerniera** consiste nell'accoppiamento di una superficie cilindrica piena (appartenente ad un corpo) e di una superficie cilindrica vuota (appartenente all'altro corpo) con medesimo raggio (per ovviare al problema della presenza di giochi tra i due componenti; questo tipo di coppia priva di giochi è anche chiamata **COMBACIANTE**).

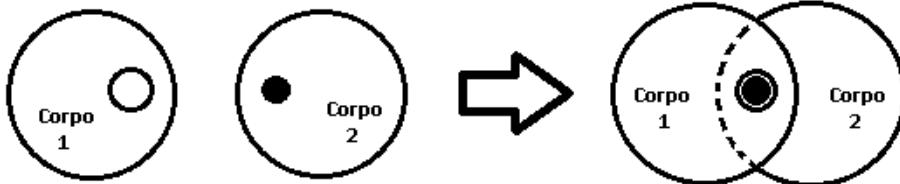
Se i raggi sono idealmente uguali un corpo sarebbe capace di ruotare intorno al centro della cerniera il che equivale a dire che i 2 corpi condividono/hanno 2 punti coincidenti



- per cui le equazioni di congruenza che rappresentano/descrivono questa coppia cinematica saranno:

$$x(p_1) = x(p_2) \quad y(p_1) = y(p_2)$$

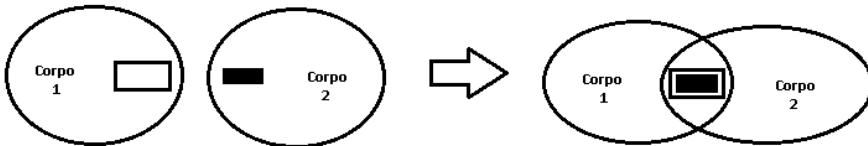
- tale vincolo è dovuto all'accoppiamento dei due corpi e alla rotazione relativa di uno rispetto all'altro attorno al punto in cui è presente la cerniera



In conclusione: due corpi separati hanno 3 gradi di libertà ciascuno; due corpi incernierati hanno 2 variabili rindondanti (ovvero, combinati, 4 gradi di libertà)

### 2. Coppia prismatica (P)

Nel caso si voglia che sopravviva un moto relativo di traslazione è possibile decidere di applicare una coppia prismatica: essa consiste nella realizzazione di una cava rettangolare su un corpo e di un prisma sull'altro corpo (idealmente le superfici devono essere: uguali, in modo da permetterne lo scorrimento, e avere le stesse dimensioni).

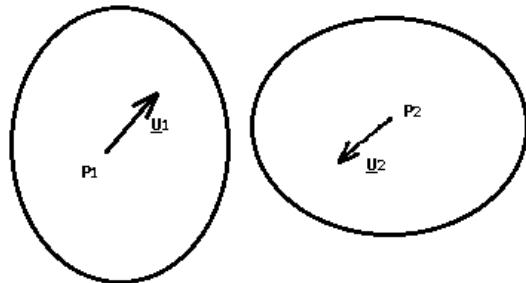


Al fine di rappresentare la coppia prismatica devo definire in primo luogo l'asse (identificato dai vettori  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$ ) e la posizione dell'elemento prismatico ( $p_1, p_2$ ) in questione.

A partire da tali dati sui due corpi devo successivamente imporre i seguenti vincoli:

- a)  $\underline{u}_1$  e  $\underline{u}_2$  devono essere paralleli, ovvero il prodotto vettoriale/esterno dei vettori degli assi deve essere nullo (in questo modo l'angolo di rotazione di entrambi i corpi sarà lo stesso)

$$\underline{u}_1 \wedge \underline{u}_2 = 0$$

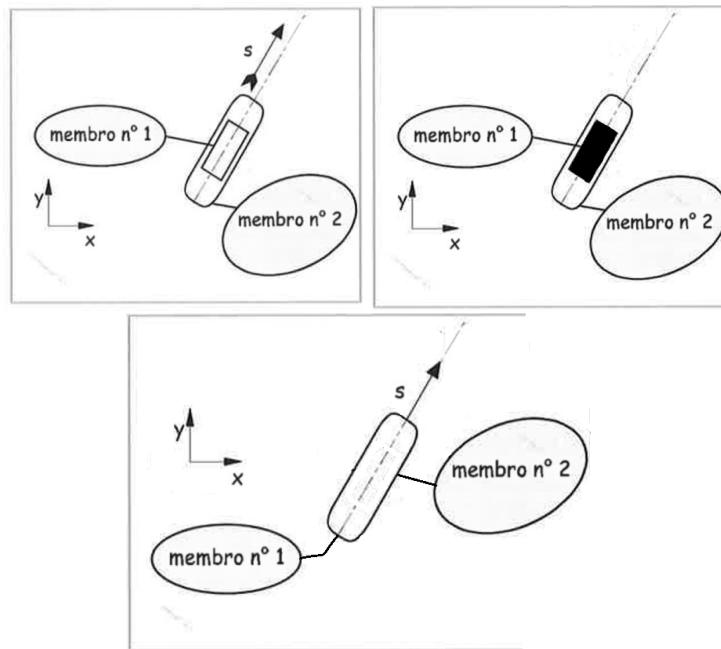


- b) la distanza di  $p_2$  dal vettore  $\underline{u}_1$  deve essere nulla

$$d_{p_2 \rightarrow u_1} = 0$$

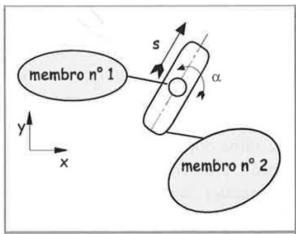
In questo modo rimane libera la traslazione nella direzione dell'asse comune ai 2 elementi prismatici  
OSS:

- le precedenti coppie cinematiche hanno superfici cinematiche coincidenti/presentano contatto superficiale
- La seguenti rappresentazioni, assieme a quelle già proposte precedentemente, della coppia prismatica sono ammesse:



### 3. Coppia a camma (C)

Contrariamente alle precedenti coppie cinematiche in cui venivano eliminati 2 gradi di libertà, la coppia a camma permette di eliminare solo un grado di libertà (ovvero la traslazione lungo una direzione).



Essa viene schematizzata da:

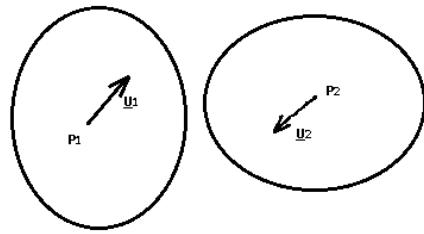
- Una guida prismatica connessa al corpo 1
- Un cilindro di diametro pari alla dimensione della cava/guida connessa al corpo 2

In tal modo il cilindro può scorrere all'interno della cava e ruotare su se stesso.

Il vincolo da imporre in tale situazione è che il punto  $p_2$  (ovvero il centro/asse del cilindro) sia sull'asse della cava e viene rappresentata dall'equazione di vincolo

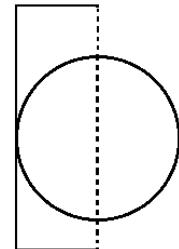
$$(p_1, p_2) \parallel \mathbf{u}_1$$

Ovvero che il vettore che collega i due punti in questione sia parallelo all'orientazione della cava prismatica che farà da guida al cilindro.



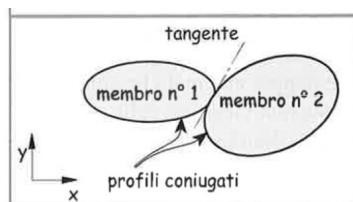
**OSS:**

- Nella coppia a camma si ha contatto su una dimensione/un punto nel piano non sulla linea o tutte le superfici, come invece avveniva per la coppia rotoidale e la coppia prismatica (*contatto non combaciante*)
- a volte la realizzazione di tale coppia impiega mezza cava prismatica (in questa situazione la coppia si definisce **unilaterale** e il vincolo è anch'esso definito unilaterale)
  - il vincolo bilaterale (descritto precedentemente) prende, dunque, un accoppiamento di forma (chiusa) o a comando positivo [la forma stessa degli elementi cinematici è sufficiente a mantenere il contatto]
  - il vincolo unilaterale prende, invece, un accoppamento di forza o di forma aperta [per mantenere la coppia è necessaria una forza] (cfr. comando desmodromico)



- Non si è vincolati ad avere l'asse della camma rettilinea (essa può assumere qualsiasi forma), per questa ragione è necessario introdurre il concetto di:

**PROFILI CONIUGATI** := profili di due corpi che vengono a contatto durante il moto dove non è presente un vera e propria coppia a camma, ma tale coppia è realizzata dalla opportuna profilazione dei due corpi coinvolti



- Nelle concrete realizzazioni, gli elementi cinematici possono essere rigidi o deformabili
  - Gli elementi cinematici si possono accoppiare tra di loro in modo tale da realizzare un contatto su superficie estesa (combaciante)
  - oppure un contatto lineare o puntiforme (tipico della coppia a camma) (non combaciante)
- Le coppie cinematiche realizzate con elementi rigidi e combacianti che lasciano un solo grado di libertà relativo sono dette coppie elementari od inferiori (aka rotoidale e prismatica)
- Le altre coppie cinematiche sono chiamate superiori e sono realizzate con membri rigidi aventi elementi cinematici non combacianti oppure membri rigidi aventi elementi cinematici combacianti (aka cinghie che sono corpi non estensibili ma flessibili).

Delle coppie di classe superiore si distinguono, difatti, diverse classi in base al numero di gradi di libertà che lasciano liberi (ossia non vincolati dalla coppia)

Il contatto tra gli elementi cinematici può essere:

1. di puro rotolamento se la velocità nel punto di contatto è nulla (**SENZA STRISCIAMENTO**)
2. di strisciamento se la velocità tra le superfici a contatto non è nulla (**CON STRISCIAMENTO**) [⇒ favorisce l'usura del pezzo]
3. d'**URTO** se la velocità relativa dei due elementi cinematici ha una componente non nulla nella direzione normale alle superfici -> la realizzazione di giochi per l'accoppiamento è particolarmente soggetto ad urti che ne determina un aumento dell'usura superficiale, vibrazione, e perdita di performance.

## 2.3 Struttura dei meccanismi

È giunto il momento di discutere su come mettere insieme un certo numero di corpi a formare un sistema/macchina

**MEMBRO** := elemento di una macchina in movimento rispetto agli altri e ad essi connesso tramite coppie cinematiche

Il membro che è fisso rispetto al riferimento assoluto è detto **TELAIO** (corpo rispetto a cui vado a studiare il movimento / di riferimento)

Un membro che è connesso agli altri tramite due coppie cinematiche viene detto *binario*

Un membro che è connesso agli altri tramite tre coppie cinematiche viene detto *ternario*

Tradizionalmente i diversi membri binari si distinguono in:

- **Manovelle**: se hanno
  - due coppie rotoidali, di cui una fissa a telaio,
  - possono ruotare di 360 deg rispetto a telaio
- **Bilanciere** : se hanno
  - due coppie rotoidali di cui una fissa a telaio
  - non riescono a compiere una rotazione completa rispetto al telaio
- **Bielle**: se hanno due coppie rotoidali entrambe non a telaio

Un sistema di membri connessi tra di loro da coppie cinematiche formano una **CATENA CINEMATICA**. Queste possono essere:

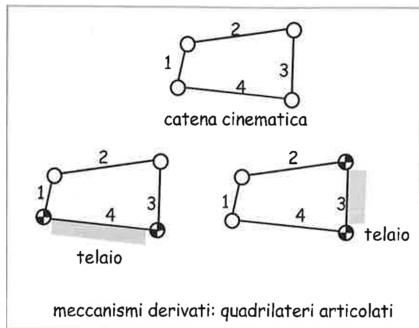
- **Chiuse** = se forma uno o più anelli chiusi
- **Aperti** = se presenta uno o più rami aperti

La differenza concettuale tra catena cinematica e meccanismo risiede nel momento in cui viene scelto il telaio:

- una **Catena cinematica** è un sistema/insieme di membri in cui non è stato ancora definito un telaio
- un **Meccanismo** è un sistema/insieme di membri in cui è presente un telaio

Da tale definizione si può denotare che da una stessa catena cinematica possono essere definiti più meccanismi, in quanto ogni membro della catena può essere definito come telaio. Procediamo, dunque, a osservare più nel dettaglio le possibili catene cinematiche che si possono estrarre dalla diversa combinazione delle sue proprietà:

La più semplice e comune catena cinematica chiusa è la catena a quadrilatero che è formata da quattro membri binari.

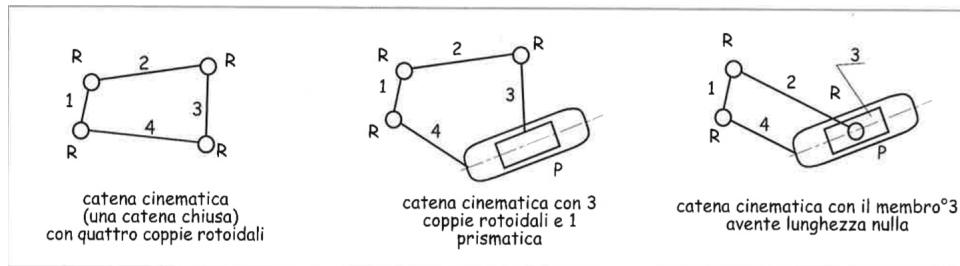


**Figura a sinistra:**  
Membro 1 e 3 bilanciere;  
Membro 2 biella;  
Membro 4 telaio.

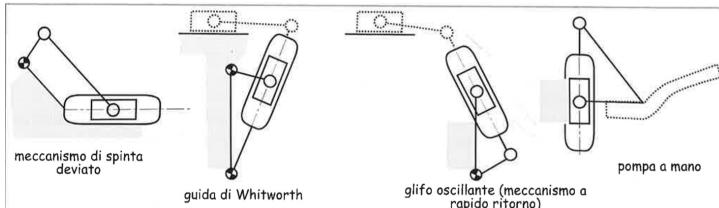
**Figura a destra:**  
Membro 2 e 4 bilanciere;  
Membro 1 biella;  
Membro 3 telaio.

Nel caso in cui le quattro coppie cinematiche siano rotoidali da questa catena deriveranno tutti i meccanismi del tipo a quadrilatero articolato (vengono proposti degli esempi nella figura a lato, in cui dalla catena cinematica sono stati scelti come telaio, rispettivamente, il membro 3 e 4)

Tuttavia è possibile sostituire alcune coppie rotoidali con coppie prismatiche, ottenendo la relativa catena cinematica a quadrilatero RRRP. Inoltre, se il membro binario con coppia rotoidale e prismatica avesse lunghezza nulla le due coppie cinematiche si confonderebbero/risulterebbero sovrapposte. Ciò a dimostrare che è possibile ricondursi a catene cinematiche equivalenti a seconda dei casi, purché si rispetti la funzione e il movimento relativo dei membri. (La natura di una coppia cinematica può essere cambiata)



La catena cinematica appena ottenuta può, a questo punto, essere analizzata per scoprirne le funzioni che può compiere a seconda di quale membro venga posto a telaio.



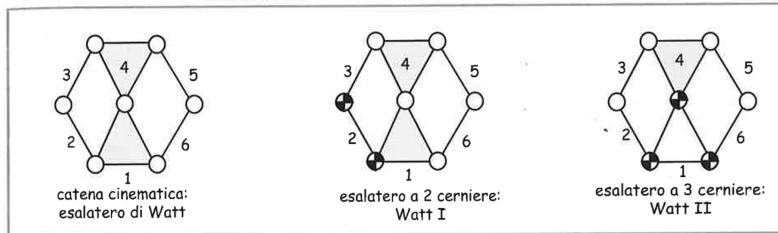
Il meccanismo di spinta deviato corrisponde ad un meccanismo a catena a quadrilatero chiuso in cui il perno della manovella non è sull'asse del pattino; l'utilità di tale meccanismo è da ricercarsi nella diversa lunghezza dell'arco di compressione e espansione.

Più nel dettaglio il **meccanismo di spinta** deviato è costituito dal telaio collegato ad una manovella (capace di compiere un giro completo attorno ad una coppia rotoidale fissa) e da una biella collegata alla manovella tramite coppie rotoidali mobili. Il moto della biella viene dunque trasferito ad un pattino o corsoio che, data la coppia prismatica (pattino) in cui è inserito, converte il moto rotazionale degli elementi precedenti in un moto lineare.

Per quanto riguarda le catene cinematiche a 6 corpi/membri, le più importanti sono da attribuire a Watt e Stephenson. Di seguito vengono proposti alcuni meccanismi derivanti dall'esalatero di Watt e Stephenson:

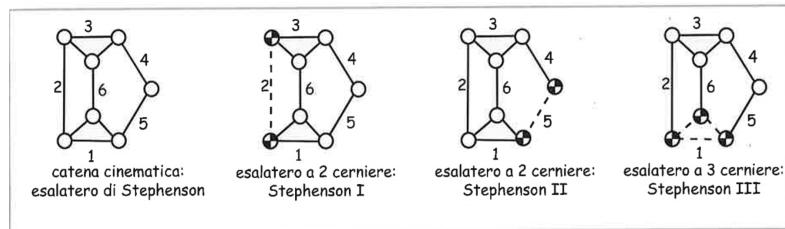
#### • ESALATERO DI WATT E RISPETTIVI MECCANISMI

I 6 corpi/membri che compongono l'esalatero di Watt sono collegati vicendevolmente da 2 coppie ternarie e 2 coppie binarie.



In particolare i due corpi ternari sono collegati tra di loro e i due quadrilateri sono collegati in sequenza.

#### • ESALATERO DI STEPHENSON E RISPETTIVI MECCANISMI

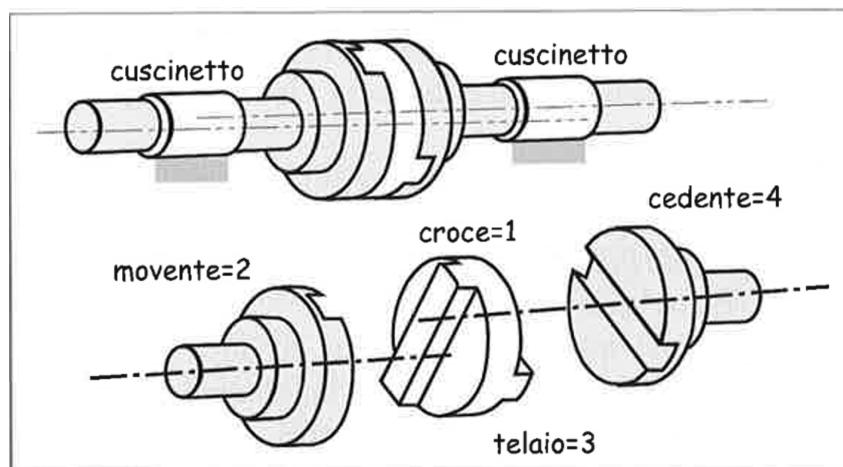


I 6 corpi/membri che compongono l'esalatero di Stephenson sono collegati vicendevolmente da 2 coppie ternarie e 2 coppie binarie.

Tuttavia a differenza dell'esalatero di Watt i due corpi ternari non risultano essere collegati tra di loro direttamente, bensì vi è presente un corpo binario a svolgere tale funzione.

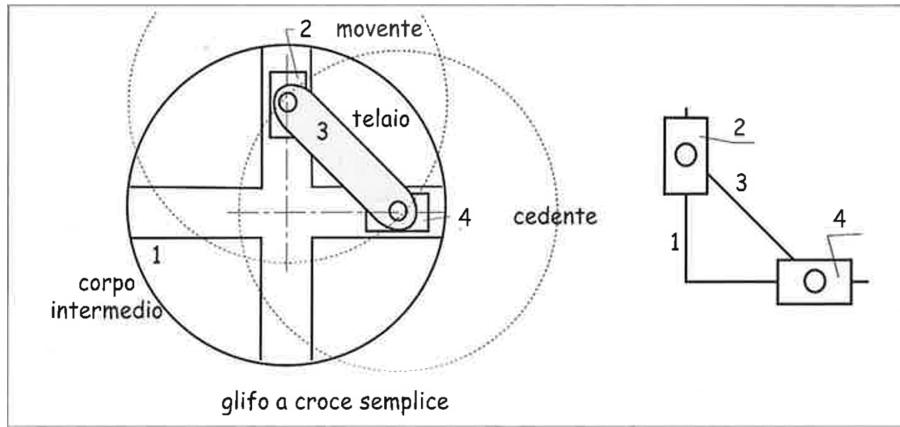
Fino ad ora sono stati affrontati dei meccanismi rappresentativi in maniera convenzionale mediante i loro schemi cinematici; nella realtà la realizzazione costruttiva potrebbe essere assai diversa dal corrispondente schema cinematico (*e non immediatamente identificabile*).

Un esempio di tale problema di identificazione può essere ricercato nel **giunto di Oldham**, che viene generalmente impiegato per trasmettere il moto tra due assi paralleli disallineati (aka **Giunto omocinetico**), e di cui è proposta una rappresentazione di seguito.



Infatti se volessimo rappresentare lo schema cinematico che descrive questo particolare giunto, esso si comporrebbe di un glifo con l'asta 3 fissata al telaio, il pattino 2 e 4 (rispettivamente movente e cedente) e la croce 1 rappresentata dal corpo intermedio.

In futuro avremo molto a che fare con moventi e cedenti nella rappresentazione degli schemi cinematici. Di conseguenza risulta fondamentale darne subito una definizione:



**MOVENTI DEL MECCANISMO** (*membri motori*) := membri sui quali agiscono delle forze esterne che compiono lavoro positivo detto lavoro motore (corpo di una catena cinematica a cui è imposto un movimento)

**CEDENTI DEL MECCANISMO** (*membri condotti*) := membri sui quali agiscono delle forze esterne che compiono lavoro negativo detto lavoro resistente (corpo di una catena cinematica che impone il movimento)

Ad esempio, nel meccanismo biella manovella azionato da un motore elettrico, il pistone/glifo rappresenta il cedente, il motore elettrico il movente. Nel sistema ad ingranaggi il cedente è rappresentato dal carico sostenuto da una fune collegata all'ultima ruota ad ingranaggi, il movente è rappresentata dalla prima ruota ad ingranaggi che trasmette la rotazione al treno di ingranaggi successivi.

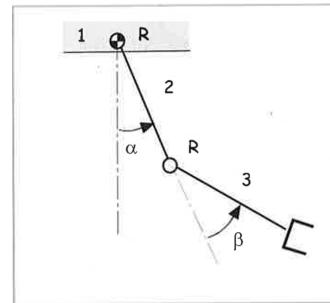
## 2.4 Gradi di libertà dei meccanismi piani

Nel decorso di questa sezione ci occuperemo della determinazione dei gradi di libertà di sistemi meccanici, vincolati da coppie cinematiche, tramite degli esempi:

### 1. ESEMPIO N.1

Il sistema in figura è composto da 3 corpi/membri:

- Il telaio 1 che non conferisce al sistema alcun G.d.L. (0 G.d.L.)
- Il corpo 2 che è collegato al telaio tramite una coppia rotoidale (R) e di conseguenza presenta un solo G.d.L. (1 G.d.L.)
- Il corpo 3 anch'esso collegato al corpo 2 tramite una coppia rotoidale (R) ed è, di conseguenza, denotato da un solo G.d.L. (1 G.d.L.)



In totale il meccanismo in questione presenta 2 G.d.L. che possono essere ricondotti agli angoli  $\alpha$  (descrive la rotazione di 2 rispetto a 1) e  $\beta$  (descrive la rotazione di 3 rispetto a 2).

Tali coordinate risultano essere 2 coordinate generalizzate, ovvero sufficienti e indipendenti a descrivere completamente il sistema di corpi.

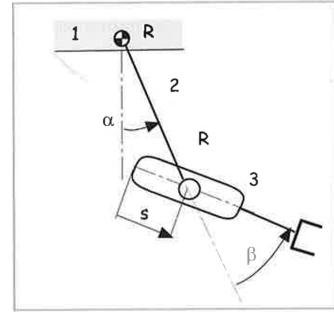
### 2. ESEMPIO N.2

Sostituendo all'esempio precedente la coppia rotoidale responsabile del collegamento tra i membri 2 e 3 con una coppia a camma (C) si libera un ulteriore G.d.L. del sistema, più in particolare di

traslazione del corpo 3 rispetto a 2.

In tal modo si potranno osservare 3 G.d.L. del meccanismo:

- Il telaio 1 che non conferisce al sistema alcun G.d.L. (0 G.d.L.)
- Il corpo 2 che è collegato al telaio tramite una coppia rotoidale (R) e di conseguenza denota un solo G.d.L. (1 G.d.L.)
- Il corpo 3 che è collegato al corpo 2 tramite una coppia a camma, di classe  $c_2$ , che conferisce al corpo 3 di ruotare attorno alla coppia stessa e di traslare (2 G.d.L.)

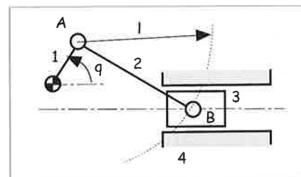


Le coordinate generalizzate del sistema in esame saranno, di conseguenza:  $\alpha$ ,  $\beta$  (cfr. Esempio n.1) e  $s$  (= traslazione rispetto ad un estremo della coppia prismatica in cui è presente la camma) (tutte funzioni del tempo:  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  e  $s(t)$ ) e risultano, difatti, parametri sufficienti e necessari a descrivere completamente la posizione del sistema meccanico

### 3. ESEMPIO N.3

La catena cinematica chiusa, anche conosciuta con il nome di meccanismo di spinta deviato, e riportata a fianco, si compone di 4 membri/corpi, che se considerati indipendenti contribuiscono al calcolo con 3 G.d.L. ciascuno ( $4(\text{membri}) \cdot 3(\text{G.d.L.}) = 12(\text{G.d.L.})$ ):

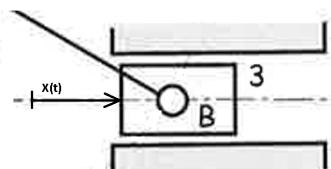
- Il corpo 1 (manovella) che è collegato al telaio e al corpo 2 tramite 2 coppie rotoidali (R) e priva il sistema di 2 G.d.L
- Il corpo 2 (biella) che è collegato ai corpi 1 e 3 tramite coppie rotoidali (R) ( $-2 \cdot 3 = -6$  G.d.L.)
- Il corpo 3 (pistone) che trasforma il moto rotoidale dei corpi precedenti in un moto lineare ed è collegata al telaio tramite una coppia prismatica che priva il sistema di 2 G.d.L. ( $-2$  G.d.L · 1)
- Il corpo 4 (telaio) che rappresenta la sede entro cui avviene la traslazione del pistone e priva il sistema di 3 G.d.L. (- 3 G.d.L.)

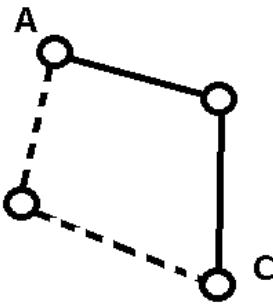


In conclusione possiamo determinare il numero di G.d.L. del meccanismo nel seguente modo:

$$12(\text{corpi indipendenti}) - 3(\text{telaio}) - 6(R) - 2(P) = 1(\text{G.d.L.})$$

Infatti si può osservare che la posizione e il movimento del meccanismo può essere descritto da un'unica coordinata generalizzata, ad esempio l'angolo rispetto all'orizzontale  $q(t)$  che la manovella individua attorno il telaio, oppure la posizione del pistone/glio ripetuto alla sua condizione iniziale  $x(t)$ .





Ciò che non viene tenuto in considerazione è che in questo particolare esempio esistono in realtà due soluzioni ammesse/configurazioni: Infatti in catene cinematiche chiuse esistono più modi per calcolare il meccanismo.

Una volta date le posizioni del punto/copie di punti A e C, esistono due modi di chiudere la catena cinematica.

Il metodo appena utilizzato per la determinazione dei G.d.L. del meccanismo prende il nome di **Equazione di Grübler** e risulta applicabile a meccanismi piani in catena chiusa. Il processo iterativo che sta alla base di questo metodo si basa sui seguenti step:

- Ogni corpo/membro indipendente dal sistema, contribuisce al calcolo dei G.d.L. del meccanismo introducendo 3 G.d.L. ciascuno (se il corpo appartiene al piano)
- Sottrarre i 3 G.d.L. che il telaio, essendo fisso, priva.
- Sottrarre i 2 G.d.L per ogni coppia di classe  $c_1$  che vincola il sistema di corpi lasciando libero 1 G.d.L., ovvero coppie prismatiche (P) e coppie rotoidali (R)
- Sottrarre 1 G.d.L. per ogni coppia di classe  $c_2$  che vincola il corpo lasciando liberi 2 G.d.L., ovvero la coppia a camma (C)

E può essere sintetizzato enunciando la seguente formulazione:

$$n = 3m - 2c_1 - c_2 \quad (2.1)$$

se il sistema in questione è una catena cinematica piana (1)

$$n = 3(m - 1) - 2c_1 - c_2 \quad (2.2)$$

nel caso di meccanismi piani (2).<sup>1</sup>

I parametri che compongono tali formule sono:

**n** = numero di G.d.L. del sistema di corpi

**m** = numero di membri/corpi che compongono il sistema

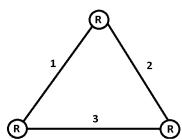
(dove il “-1” considera i G.d.L. che il telaio rimuove)

$2 \cdot c_1$  = indica il numero di G.d.L. (2) che il numero di coppie di classe  $c_1$  privano

$c_2$  = indica il numero di G.d.L (1) che il numero di coppie di classe  $c_2$  privano

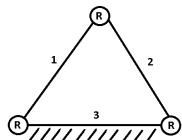
Affrontiamo più nel dettaglio l'utilità e i limiti dell'equazione di Grübler con i seguenti esempi:

• **Catene cinematiche chiuse con 3 corpi**



$$n = 3 \cdot (3) - 2 \cdot 3 = 9 - 6 = 3 \text{ G.d.L.}$$

(la catena cinematica è libera di muoversi nel piano)

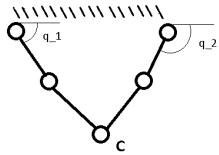


$$n = 3 \cdot (3 - 1) - 2 \cdot 3 = 0 \text{ G.d.L.}$$

(una volta definito un telaio tale accoppiamento dei tre corpi assume il valore di una struttura)

• **Catene cinematiche a 5 corpi**

<sup>1</sup>La principale differenza tra le due equazioni risiede nella presenza o meno di un telaio che sottrae al calcolo 3 G.d.L.

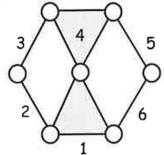


$$n = 3 \cdot (5 - 1) - 2 \cdot 5 = 12 - 10 = 2 G.d.L.$$

Il pentalatero in questione, su cui si basano i manipolatori paralleli, una vota che vengono determinati  $q_1$  e  $q_2$ , permette il controllo della posizione del punto C

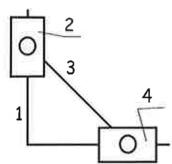
- **Catene cinematiche a 6 corpi**

Esalatero di Watt



$$n = 3 \cdot (6 - 1) - 2 \cdot 7 = 15 - 14 = 1 G.d.L.$$

Giunto di Oldham

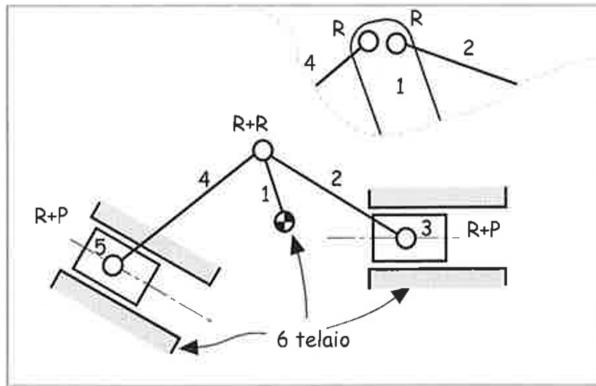


$$n = 3 \cdot (4 - 1) - 2 \cdot 4 = 9 - 8 = 1 G.d.L.$$

Tuttavia la formula di Grübler non considera alcuni casi:

### 1. CASO 1

Consideriamo il seguente sistema a 6 corpi (esalatero) i cui accoppiamenti sono eseguiti da 6 coppie (4 rotoidali e 2 prismatiche) di classe  $c_1$ . Utilizzando la formula di Grübler per determinare il numero di G.d.L. di tale meccanismo si ottiene un risultato scorretto:



$$n = 3 \cdot (6 - 1) - 2 \cdot 6 = 15 - 12 = 3 \text{ G.d.L.}$$

Tuttavia, si può notare che scegliendo una variabile  $q$  come coordinata generalizzata, la posizione del punto B viene completamente identificata e, di conseguenza, anche la posizione degli altri membri è identificata.

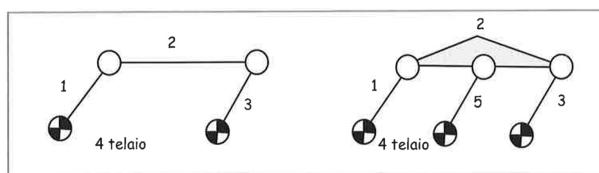
La ragione per cui la formula di Grübler abbia ritornato un risultato sbagliato pur da una corretta identificazione dei membri appartenenti al sistema e delle coppie a loro applicate è da ricercarsi al punto B: infatti la coppia rotoidale che è applicata nel punto B e che lega i corpi 1, 2 e 4 deve essere contata 2 volte.

$$n = 3 \cdot (6 - 1) - 2 \cdot 7 = 1 \text{ G.d.L.}$$

Non a caso il meccanismo proposto è equivalente ad un esalatero di Watt

### 2. CASO 2

Consideriamo il seguente sistema formato da due manovelle e una biella, e immaginiamo di introdurre a metà della biella una coppia rotoidale che lega un ulteriore corpo a telaio.



Dal calcolo dei G.d.L. ramite la formula di Grübler si ottiene un risultato errato:

$$n = 3 \cdot (5 - 1) - 2 \cdot 6 = 12 - 12 = 0 \text{ G.d.L.}$$

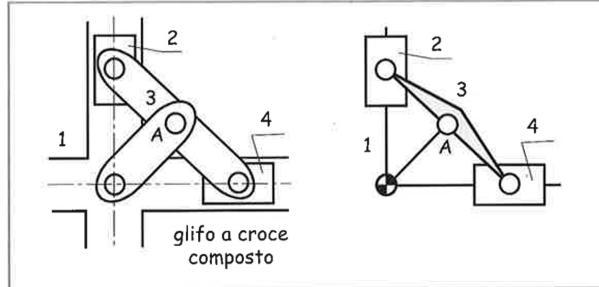
Questo meccanismo dovrebbe avere 0 G.d.L. seguendo la relazione di Grübler, tuttavia tutti i punti della biella centrale descrivono una circonferenza attorno alla coppia R del telaio adiacente (membro 4). Ho aggiunto cioè dei vincoli non necessari che il meccanismo originale già aveva in quanto poteva compiere già una rotazione (manovelle 1 e 3) attorno al telaio

In sintesi: la manovella 5, che è parallela alla 1 e alla 3, non aggiunge alcun vincolo addizionale al movimento del membro 2. La formula di Grübler pur essendo stata applicata in maniera corretta non considera che le coppie aggiunte possono non introdurre vincoli al moto del meccanismo.

### 3. CASO 3

Considerando il glifo a croce composto il numero di gradi di libertà che si ottengono dall'applicazione della formula di Grübler è:

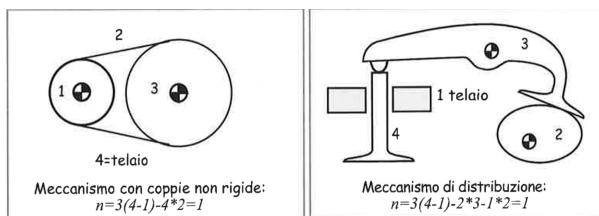
$$n = 3 \cdot (5 - 1) - 2 \cdot 6 = 12 - 12 = 0 G.d.L.$$



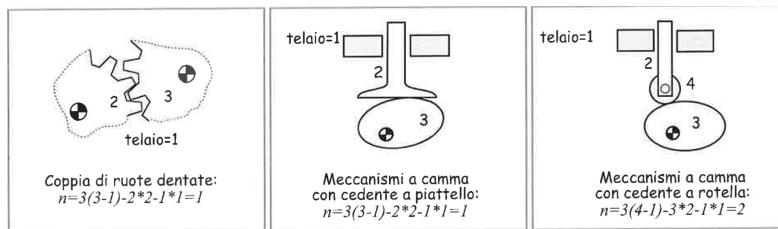
Tuttavia, analogamente al caso precedente, l'aggiunta del corpo in A non introduce vincoli aggiuntivi al movimento del meccanismo, in quanto A, sia prima che dopo l'introduzione del corpo, descriveva una traiettoria circolare avente come centro il punto di intersezione dei due assi di scorrimento.

Osservazioni conclusive:

- Spesso nei meccanismi abbiamo anche degli elementi elastici quali molle; questi elementi elastici non modificano la possibilità di movimento ma fanno nascere delle forze.  
Ad esempio una molla non modifica i G.d.L. del meccanismo di spinta perché essa può allungarsi o accorciarsi. Possiamo quindi ignorarle quando scriviamo l'equazione di Grübler.
- In altri casi dei membri rigidi sono connessi da elementi deformabili che permettono la trasmissione del moto (*ad esempio cinghie e funi*). In tal caso il numero di G.d.L. può essere facilmente determinato facendo delle ipotesi semplificate.  
Se si ipotizza che la cinghia sia inestensibile e non presenti scorrimenti la ruota 3 si muove insieme alla ruota 1 e quindi il sistema ha un solo G.d.L.



- Di seguito sono riportati alcuni esempi di applicazione della equazione di Grübler.

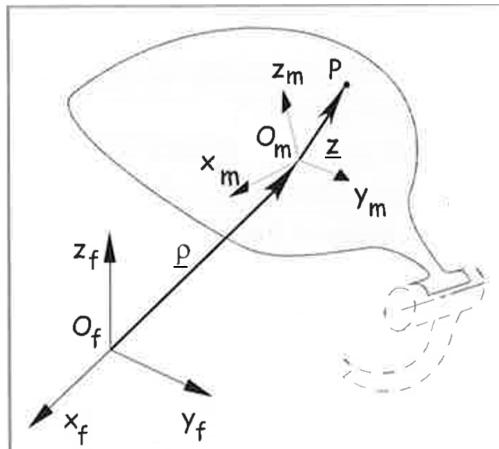


## 2.5 Cinematica dei corpi rigidi

### 2.5.1 Introduzione

Al variare del tipo di problema da studiare gli organi costituenti le macchine possono venire schematizzati come dei punti materiali, dei corpi rigidi, dei sistemi di corpi rigidi, dei corpi deformabili. Una delle schematizzazioni più importanti è quella di corpo rigido; ne richiamiamo quindi le relazioni fondamentali della cinematica.

Procediamo, dunque, a definire alcuni elementi che saranno di utilità nel decorso della trattazione di tali relazioni:



- **Terna mobile:** una terna solidale al corpo stesso individuata dai versori ( $\mathbf{i}_m, \mathbf{j}_m, \mathbf{k}_m$ ), e dalle generiche coordinate  $(x_m, y_m, z_m)$  in cui viene esplicitato il pedice "m" in riferimento al fatto che sono solidali alla terna mobile.
- **Terna fissa:** una terna di versori  $(\mathbf{i}_f, \mathbf{j}_f, \mathbf{k}_f)$  e coordinate generiche  $(x_f, y_f, z_f)$  in cui viene esplicitato il pedice "f" in riferimento al fatto che sono solidali ad un osservatore inerziale.
- **Un punto P** solidale alla terna mobile.
- il vettore  $\rho$  che identifica la distanza della terna mobile dalla terna fissa
- il vettore  $\mathbf{z}$  che identifica la distanza del punto P dalla terna mobile

Si è interessati a trovare le coordinate del punto P in un sistema di riferimento assoluto, ovvero le coordinate del punto P rispetto alla terna fissa ( $\mathbf{O}_f \mathbf{P}$ ): bisognerà risolvere l'equazione vettoriale:

$$\begin{aligned}\mathbf{O}_f \mathbf{P} &= \mathbf{O}_f \mathbf{O}_m + \mathbf{O}_m \mathbf{P} \\ \mathbf{P} &= \underline{\rho} + \mathbf{z}\end{aligned}$$

Osservazioni:

→  $\mathbf{O}_m \mathbf{P}$  sono le coordinate del punto P rispetto all'origine della terna mobile e possono essere esplicite come combinazione lineare dei versori della stessa terna, ovvero:

$$\mathbf{O}_m \mathbf{P} = {}^m x_P \cdot \mathbf{i}_m + {}^m y_P \cdot \mathbf{j}_m + {}^m z_P \cdot \mathbf{k}_m$$

- Introducendo la nozione di corpo rigido le coordinate relative di qualsiasi punto rispetto ad un sistema di riferimento solidale all'oggetto sono fisse / costanti. Di conseguenza, le coordinate  $({}^m x_P, {}^m y_P, {}^m z_P)$  sono per l'ipotesi di corpo rigido, costanti durante tutto il moto.
- **Corpo rigido** (Definizione #1): sistema di punti materiali che hanno coordinate costanti in un sistema di riferimento solidale con il corpo stesso.
- **Corpo rigido** (Definizione #2): insieme di punti che a due a due hanno distanza costante.
- Per le ipotesi di corpo rigido che abbiamo appena posto al sistema, si può fare riferimento al moto del punto P come **moto dello spazio rigido solidale alla terna mobile**

### 2.5.2 Velocità angolare

Siamo giunti a formulare la relazione vettoriale che lega la posizione di un punto rispetto ad una terna mobile alla sua posizione rispetto alla terna fissa, e abbiamo constatato che le coordinate del punto P solidale alla terna mobile sono costanti durante tutto il moto.

$$\mathbf{O}_f \mathbf{P} = \rho + {}^m x_P \cdot \mathbf{i}_m + {}^m y_P \cdot \mathbf{j}_m + {}^m z_P \cdot \mathbf{k}_m$$

Procediamo ora a valutare una relazione che leggi la velocità del corpo (e quindi del punto P) rispetto all'osservatore assoluto/inerziale, eseguendo la derivata rispetto al tempo della relazione appena ottenuta:

$$\dot{\mathbf{O}_f \mathbf{P}} = {}^f \mathbf{v}_P = \dot{\rho} + {}^m x_P \cdot \dot{\mathbf{i}}_m + {}^m y_P \cdot \dot{\mathbf{j}}_m + {}^m z_P \cdot \dot{\mathbf{k}}_m$$

Per dare un significato fisico al risultato sopra esposto, rimane da determinare le derivate nel tempo dei tre versori della terna mobile:

$$\dot{\mathbf{i}}_m = \frac{d}{dt} \mathbf{i}_m \quad ; \quad \dot{\mathbf{j}}_m = \frac{d}{dt} \mathbf{j}_m \quad ; \quad \dot{\mathbf{k}}_m = \frac{d}{dt} \mathbf{k}_m$$

Considerando, ad esempio, il versore  $\mathbf{k}_m$  (vettore di modulo unitario), il prodotto scalare per se stesso ritorna la norma al quadrato:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_m \cdot \mathbf{k}_m &= \|k_m\|^2 = 1 \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{k}_m) &= \frac{d}{dt}(1) \\ \left( \frac{d}{dt} \mathbf{k}_m \right) \cdot \mathbf{k}_m + \mathbf{k}_m \cdot \left( \frac{d}{dt} \mathbf{k}_m \right) &= 0 \\ 2 \left( \frac{d}{dt} \mathbf{k}_m \right) \cdot \mathbf{k}_m &= 0 \end{aligned}$$

La conclusione che possiamo trarre dallo sviluppo del versore in questione, e che può essere estesa anche ai rimanenti, è che: poiché il prodotto scalare  $\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{k}_m$  è nullo, i due vettori sono ortogonali.

Fu Poisson a ipotizzare che esistesse un vettore tale per cui il suo prodotto vettoriale con il versore desse come risultato la derivata del versore. Come è noto, infatti, il prodotto vettoriale di due vettori non paralleli dà come risultato un vettore con direzione perpendicolare al piano che tali vettori individuano e verso definito dalla regola della mano destra.

Rimane, dunque, da trovare i vettori  $(\underline{\omega}^{(1)}, \underline{\omega}^{(2)}, \underline{\omega}^{(3)})$  tali per cui valgano le relazioni (anche conosciute come formule di Poisson):

$$\dot{\mathbf{i}}_m = \underline{\omega}^{(1)} \wedge \mathbf{i}_m \quad ; \quad \dot{\mathbf{j}}_m = \underline{\omega}^{(2)} \wedge \mathbf{j}_m \quad ; \quad \dot{\mathbf{k}}_m = \underline{\omega}^{(3)} \wedge \mathbf{k}_m$$

Per nostra fortuna Poisson si accorse che i vettori  $(\underline{\omega}^{(1)}, \underline{\omega}^{(2)}, \underline{\omega}^{(3)})$  rappresentavano il medesimo vettore che, di conseguenza, prende il nome di vettore velocità angolare e a cui si farà riferimento, d'ora in poi, con il simbolo  $\underline{\omega}$  in quanto il moto dei versori della terna mobile non è scorrelato.

Perciò, per qualsiasi vettore unitario **solidale** al sistema di riferimento della terna mobile varrà l'uguaglianza vettoriale  $\frac{d}{dt} \mathbf{u} = \underline{\omega} \wedge \mathbf{u}$ .

Per quanto riguarda il moto di un vettore non necessariamente solidale alla terna mobile, si può eseguire un ragionamento analogo a quello fatto precedentemente:

La posizione del vettore  $\mathbf{u}$  può essere espressa come combinazione lineare delle sue coordinate rispetto ai versori della terna mobile:

$$\mathbf{u} = {}^m u_x \cdot \mathbf{i}_m + {}^m u_y \cdot \mathbf{j}_m + {}^m u_z \cdot \mathbf{k}_m$$

Mentre il suo moto è descritto dalla derivata totale rispetto al tempo dell'espressione appena ottenuta:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{u} &= \frac{d}{dt}({}^m u_x) \cdot \mathbf{i}_m + \frac{d}{dt}({}^m u_y) \cdot \mathbf{j}_m + \frac{d}{dt}({}^m u_z) \cdot \mathbf{k}_m \\ &\quad + {}^m u_x \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{i}_m) + {}^m u_y \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{j}_m) + {}^m u_z \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{k}_m) \\ &= \dot{u}_x \cdot \mathbf{i}_m + \dot{u}_y \cdot \mathbf{j}_m + \dot{u}_z \cdot \mathbf{k}_m + u_x (\underline{\omega} \wedge \mathbf{i}_m) + u_y (\underline{\omega} \wedge \mathbf{j}_m) + u_z (\underline{\omega} \wedge \mathbf{k}_m) \\ &= \dot{\mathbf{u}} + (\underline{\omega} \wedge \mathbf{u}) \end{aligned}$$

dove:

- $\dot{\mathbf{u}}$  rappresenta la variazione di  $\mathbf{u}$  rispetto alla terna mobile/osservata dal sistema di riferimento terna mobile
- $\underline{\omega} \wedge \mathbf{u}$  è la velocità di trascinamento

In conclusione:

$$\begin{aligned} {}^f \mathbf{v}_P &= \dot{\rho} + {}^m x_P \cdot \dot{\mathbf{i}}_m + {}^m y_P \cdot \dot{\mathbf{j}}_m + {}^m z_P \cdot \dot{\mathbf{k}}_m \\ &= \dot{\rho} + \underline{\omega} \wedge ({}^m x_P \cdot \mathbf{i}_m + {}^m y_P \cdot \mathbf{j}_m + {}^m z_P \cdot \mathbf{k}_m) \\ &= \dot{\rho} + \underline{\omega} \wedge \mathbf{z} \end{aligned}$$

L'espressione appena ottenuta della velocità di un punto solidale ad una terna mobile P rispetto ad un osservatore assoluto prende il nome di **formula fondamentale del corpo rigido**

In un moto rigido la velocità di un punto dipende da 6 parametri (a.k.a. 6 G.d.L.): 3 componenti di velocità della terna mobile ( $\dot{\rho}$ ) e 3 componenti del vettore  $\underline{\omega}$  che ne descrivono la rotazione

### 2.5.3 Accelerazione angolare

Ripetendo ulteriormente il processo di derivazione è possibile descrivere le accelerazioni che agiscono sul punto P, e quindi il corpo rigido, per un osservatore assoluto:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{v}_P &= \frac{d}{dt} \dot{\rho} + \frac{d}{dt} \underline{\omega} \wedge \mathbf{z} + \underline{\omega} \wedge \frac{d}{dt} \mathbf{z} \\ \text{siccome } \mathbf{z} \text{ è costante nella terna mobile } \dot{\mathbf{z}} &= 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \mathbf{z} = \dot{\mathbf{z}} + \underline{\omega} \wedge \mathbf{z} \\ &= \ddot{\rho} + \dot{\underline{\omega}} \wedge \mathbf{z} + \underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge \mathbf{z}) \end{aligned}$$

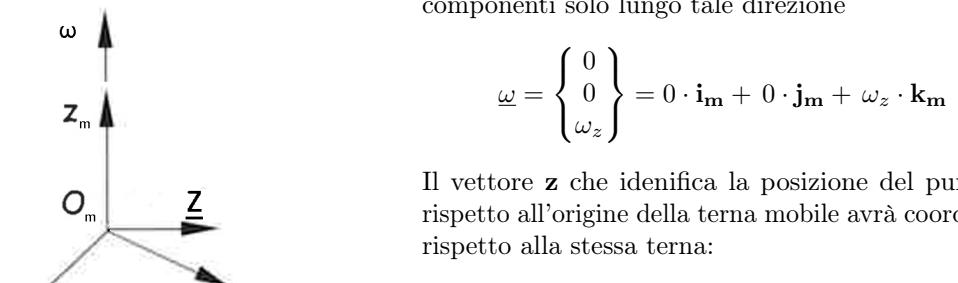
si noti che ( $\frac{d}{dt} \underline{\omega} = \dot{\underline{\omega}} + \underline{\omega} \wedge \underline{\omega}$ ) in quanto il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è nullo.

In conclusione:

$$\mathbf{a}_P = \ddot{\rho} + \dot{\underline{\omega}} \wedge \mathbf{z} + \underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge \mathbf{z})$$

Il termine  $\underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge \mathbf{z})$  può essere espresso in maniera diversa per mettere in risalto il suo significato fisico. Al fine di facilitare lo sviluppo analitico, la direzione dell'asse  $z_m$  della terna mobile viene posta uguale a quella del vettore velocità angolare  $\underline{\omega}$

Il vettore  $\underline{\omega}$  essendo parallelo all'asse  $z_m$  avrà componenti solo lungo tale direzione



Il vettore  $\mathbf{z}$  che identifica la posizione del punto P rispetto all'origine della terna mobile avrà coordinate rispetto alla stessa terna:

$$\mathbf{z} = \begin{Bmatrix} {}^m x_P \\ {}^m y_P \\ {}^m z_P \end{Bmatrix} = {}^m x_P \cdot \mathbf{i}_m + {}^m y_P \cdot \mathbf{j}_m + {}^m z_P \cdot \mathbf{k}_m$$

Sotto tali ipotesi procediamo a risolvere analiticamente ogni singolo membro del terzo termine dell'equazione dell'accelerazione di un punto P solidale ad una terna mobile rispetto ad un osservatore assoluto.

1.

$$\underline{\omega} \wedge \mathbf{z} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_m & \mathbf{j}_m & \mathbf{k}_m \\ 0 & 0 & \omega_z \\ x_P & y_P & z_P \end{vmatrix} = -\omega_z (y_P \mathbf{i}_m - x_P \mathbf{j}_m) \\ = (-y_P \omega_z) \mathbf{i}_m + (x_P \omega_z) \mathbf{j}_m + 0 \mathbf{k}_m$$

2.

$$\underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge \mathbf{z}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_m & \mathbf{j}_m & \mathbf{k}_m \\ 0 & 0 & \omega_z \\ x_P & y_P & z_P \end{vmatrix} = -\omega_z (x_P \omega_z \mathbf{i}_m + \omega_z y_P \mathbf{j}_m) \\ = (-\omega_z^2 x_P) \mathbf{i}_m + (-\omega_z^2 y_P) \mathbf{j}_m + 0 \mathbf{k}_m \\ = -\omega_z^2 \underbrace{(x_P \mathbf{i}_m + y_P \mathbf{j}_m)}_r$$

$\mathbf{r}$  rappresenta la proiezione di  $\mathbf{z} = {}^m x_P \cdot \mathbf{i}_m + {}^m y_P \cdot \mathbf{j}_m + {}^m z_P \cdot \mathbf{k}_m$  sul piano descritto dagli assi della terna mobile  $(x_m, y_m)$  ed è quindi ortogonale al vettore  $\omega$

L'equazione dell'accelerazione del punto P rispetto alla terna fissa:

$$\mathbf{a}_P = \ddot{p} + \dot{\underline{\omega}} \wedge \mathbf{z} + \underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge \mathbf{z}) \\ = \ddot{p} + \dot{\underline{\omega}} \wedge \mathbf{z} - \omega^2 \mathbf{r}$$

dove:

$\ddot{p}$  = è l'accelerazione della terna mobile

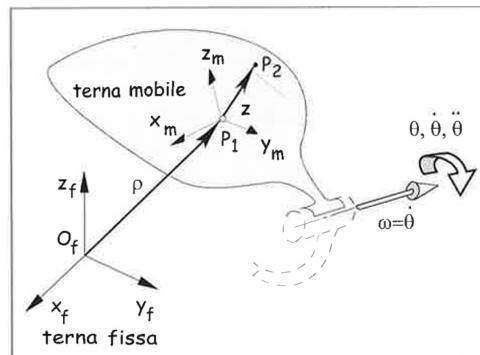
$\dot{\underline{\omega}} \wedge \mathbf{z}$  = è l'accelerazione tangenziale del punto, in virtù del fatto che la sua direzione è tangenziale al punto di rotazione

$-\omega^2 \mathbf{r}$  = è l'accelerazione centripeta del punto, in virtù del fatto che il vettore risultante punta verso l'asse di rotazione

Non è sempre necessario, né conveniente, fissare una terna ad ogni corpo rigido del nostro sistema. Le relazioni precedenti possono essere espresse anche riferendoci alla sola terna fissa.

Nota la posizione, la velocità, l'accelerazione di un punto  $P_1$  appartenente al corpo rigido e il vettore velocità angolare, si possono calcolare le posizioni, le velocità e le accelerazioni di qualsiasi altro punto  $P_2$  appartenente al corpo rigido:

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 + \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{P}}_2 = \dot{\mathbf{P}}_1 + \dot{\underline{\omega}} \wedge \mathbf{z} \\ \ddot{\mathbf{P}}_2 = \ddot{\mathbf{P}}_1 + \ddot{\underline{\omega}} \wedge \mathbf{z} + \dot{\underline{\omega}} \wedge (\dot{\underline{\omega}} \wedge \mathbf{z})$$



## 2.5.4 Cinematica di un corpo nel piano

È utile scrivere le relazioni vettoriali precedenti, valide sia nello spazio che nel piano, in forma scalare per i soli moti piani. Data la posizione, velocità e accelerazione di un punto  $P_1$  di un corpo rigido, la velocità e l'accelerazione angolare di un qualsivoglia punto  $P_2$  del corpo rigido sono date da:

$$\begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{Bmatrix} + \dot{\vartheta} \begin{Bmatrix} -a_y \\ a_x \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \end{Bmatrix} + \ddot{\vartheta} \begin{Bmatrix} -a_y \\ a_x \end{Bmatrix} + \dot{\vartheta} \begin{Bmatrix} -\dot{\vartheta} a_x \\ -\dot{\vartheta} a_y \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \end{Bmatrix} + \ddot{\vartheta} \begin{Bmatrix} -a_y \\ a_x \end{Bmatrix} - \dot{\vartheta}^2 \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 + \underline{\omega} \wedge \mathbf{z} - \omega^2 \mathbf{r}$$

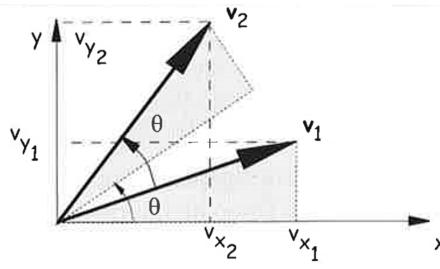
$$a_x = a \cos \vartheta \quad \dot{a}_x = -a \dot{\vartheta} \sin \vartheta = -\dot{\vartheta} a_y$$

$$a_y = a \sin \vartheta \quad \dot{a}_y = a \dot{\vartheta} \cos \vartheta = \dot{\vartheta} a_x$$

Quest'ultima relazione è nota con il nome di **teorema di Rivals**

### 2.5.5 Matrice di rotazione

Consideriamo un sistema di riferimento ed un vettore  $\mathbf{v}_1$ . Vogliamo calcolare le componenti del vettore  $\mathbf{v}_2$  che otteniamo ruotando  $\mathbf{v}_1$  di un angolo  $\vartheta$ . Le componenti di  $\mathbf{v}_2$  risultano:



$$v_{2x} = v_{1x} \cos \vartheta - v_{1y} \sin \vartheta$$

$$v_{2y} = v_{1x} \sin \vartheta + v_{1y} \cos \vartheta$$

che possono essere rappresentate in forma matriciale in funzione delle coordinate di  $\mathbf{v}_1$ :

$$\begin{Bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{Bmatrix}$$

La matrice che lega gli elementi del vettore  $\mathbf{v}_2$  a quelle del vettore  $\mathbf{v}_1$  è detta **Matrice di rotazione**. La Matrice di rotazione, dunque, è un operatore di rotazione che applicato ad un vettore qualsiasi ritorna la sua rotazione di angolo  $\vartheta$  (che è anche l'unico parametro dell'operatore).

### 2.5.6 Trasformazione di coordinate

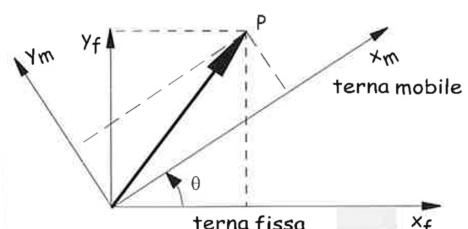
Un'applicazione alternativa della matrice di rotazione è la trasformazione di coordinate di due sistemi di riferimento. Consideriamo due sistemi di riferimento aventi origine in comune, uno fisso e l'altro mobile, e che il secondo sistema sia ruotato di angolo  $\vartheta$  rispetto al primo.

Vediamo come note le coordinate di un punto P rispetto al sistema mobile si possano calcolare le coordinate di P rispetto al sistema di riferimento fisso indicato con l'apice f.

$${}^f x_P = {}^m x_P \cos \vartheta - {}^m y_P \sin \vartheta$$

$${}^f y_P = {}^m x_P \sin \vartheta + {}^m y_P \cos \vartheta$$

Si può notare che il calcolo è analogo a quello visto per la rotazione di un vettore, in quanto possiamo immaginare l'operazione di cambio di coordinate come una rotazione del sistema di riferimento mobile a partire da una condizione iniziale coincidente con quello fisso.



La rotazione del sistema di riferimento mobile si porterà dietro tutti i vettori a lui solidale.  
In forma matriciale il cambiamento di coordinate risulta essere:

$$\begin{matrix} {}^f \left\{ \begin{matrix} x_P \\ y_P \end{matrix} \right\} = {}^f \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} & {}^m \left\{ \begin{matrix} x_P \\ y_P \end{matrix} \right\} \end{matrix}$$

La matrice di rotazione così rappresentata è rappresentativa della rotazione che da  $f$  (apice) va a  $m$  (pedice), assume il significato di operatore che identifica la rotazione/posizione di un sistema di riferimento ad un altro e può essere rappresentato sinteticamente dall'espressione  ${}^f\{P\} = {}^f_m\{R\} {}^m\{P\}$ .

Osservazioni: Le colonne della matrice di rotazione  $R$  nascondono un significato intrinseco: esse infatti coincidono con le componenti dei versori degli assi  $x_m, y_m$  rispetto a  $x_f, y_f$ , cioè contiene i coseni direttori dell'asse  $x$  e  $y$ . Da tale proprietà si può facilmente notare che la matrice di rotazione  $R$  è ortonormale, ovvero la sua inversa coincide con la sua trasposta

$${}^f_m[R]^{-1} = {}^f_m[R]^T = {}^m_f[R]$$

Di conseguenza ponendoci solidali alla terna mobile, la matrice di rotazione da  $f$  a  $m$  può essere ottenuta ponendo le componenti dei versori della terna fissa proiettata sulla terna mobile sulle sue colonne.

$${}^f_m[\mathbf{i}_f \quad \mathbf{j}_f] = {}^f_m \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

Verifichiamo rapidamente che la matrice di rotazione è ortonormale verificando che il prodotto tra la matrice di rotazione e la sua trasposta ritorni la matrice identità. In questo modo avremo la certezza che l'inversa e la trasposta coincidano con la stessa matrice.

*Dimostrazione.*

$$\begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta & -\sin \vartheta \cos \vartheta + \sin \vartheta \cos \vartheta \\ -\sin \vartheta \cos \vartheta + \sin \vartheta \cos \vartheta & \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

La matrice di trasformazione ci consente di riscrivere la formula fondamentale della cinematica, nel caso in cui la posizione del punto di cui si vuole calcolare la velocità e l'accelerazione è nota rispetto ad un sistema solidale al corpo rigido.

Le equazioni che esprimono la posizione, la velocità e l'accelerazione di un generico punto  $P$  diventano:

- **CASO 1:** Origini coincidenti ( $\rho = 0$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \overset{\circ}{\mathbf{p}} + \mathbf{z} \\ {}^f \left\{ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\} &= {}^f_m[R] {}^m \left\{ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\} \\ {}^f \left\{ \begin{matrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{matrix} \right\} &= \frac{d}{dt}({}^f_m[R] {}^m \left\{ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\}) \end{aligned}$$

Si osserva che:

- la derivata di  ${}^m \left\{ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\} = 0$  dato che, per ipotesi di corpo rigido, il vettore in questione risulta costante.
- La matrice di rotazione è funzione di un unico parametro  $\vartheta(t)$ , perciò:

$$\frac{d}{dt}[R] = \begin{bmatrix} -\dot{\vartheta} \sin \vartheta & -\dot{\vartheta} \cos \vartheta \\ \dot{\vartheta} \cos \vartheta & -\dot{\vartheta} \sin \vartheta \end{bmatrix} = \dot{\vartheta} \begin{bmatrix} -\sin \vartheta & -\cos \vartheta \\ \cos \vartheta & -\sin \vartheta \end{bmatrix}$$

L'equazione così ottenuta può essere riscritta in funzione della matrice di rotazione R introducendo una matrice di permutazione P:

$$\frac{d}{dt} [R] = \dot{\vartheta} \begin{bmatrix} -\sin \vartheta & -\cos \vartheta \\ \cos \vartheta & -\sin \vartheta \end{bmatrix} = \dot{\vartheta} \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \dot{\vartheta} [R] [P]$$

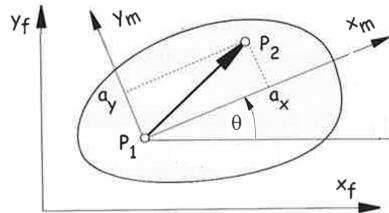
Di conseguenza:

$$\begin{aligned} {}^f \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} &= \frac{d}{dt} ([R]) {}^m \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \\ &= \dot{\vartheta} [R] [P] {}^m \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \\ &= \dot{\vartheta} [R] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} {}^m \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \\ &= \dot{\vartheta} [R] {}^m \begin{Bmatrix} -y \\ x \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^f \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} &= \frac{d}{dt} (\dot{\vartheta} [R] [P] {}^m \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}) \\ &= \frac{d}{dt} (\dot{\vartheta} [R] [P]) {}^m \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \\ &= \ddot{\vartheta} [R] [P] {}^m \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + \dot{\vartheta}^2 [R] [P] [P] {}^m \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \\ &= \ddot{\vartheta} [R] [P] {}^m \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + \dot{\vartheta}^2 [R] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} {}^m \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \\ &= \ddot{\vartheta} [R] [P] {}^m \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + \dot{\vartheta}^2 [R] \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} {}^m \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \\ &= \ddot{\vartheta} [R] [P] {}^m \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} - \dot{\vartheta}^2 [R] {}^m \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

- **CASO 2:** Origini non coincidenti ( $\underline{\rho} \neq 0$ )

$$\begin{aligned} {}^f x_P &= {}^m x_P \cos \vartheta - {}^m y_P \sin \vartheta + {}^f x_{O_m} \\ {}^f y_P &= {}^m x_P \sin \vartheta + {}^m y_P \cos \vartheta + {}^f y_{O_m} \\ {}^f \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} &= {}^m [R] {}^m \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + {}^f \begin{Bmatrix} x_{O_m} \\ y_{O_m} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$



### 2.5.7 Cinematica dei moti relativi

L'accelerazione di Coriolis fa parte della cinematica dei moti relativi: in tali condizioni il punto P non è solidale alla terna mobile, ovvero cade l'ipotesi per cui le coordinate del punto P rispetto alla terna mobile siano costanti. ( $\mathbf{z} = ({}^m x_P(t), {}^m y_P(t), {}^m z_P(t))$ )

Sia:

**P**: Le coordinate del punto P in questione rispetto alla terna fissa

**$\underline{\rho}$**  =  $\mathbf{O}_f \mathbf{O}_m$ : La distanza delle origini dei due sistemi di riferimento (mobile e fisso)

**$\mathbf{z}$**  =  $\mathbf{O}_m \mathbf{P}$ : Le coordinate in funzione del tempo del punto P rispetto alla terna mobile

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \underline{\rho} + \mathbf{z} \\ &= \underline{\rho} + {}^m x_P \mathbf{i}_m + {}^m y_P \mathbf{j}_m + {}^m z_P \mathbf{k}_m\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P} = \dot{\underline{\rho}} + \underline{\omega} \wedge \mathbf{z} + \frac{d}{dt} \mathbf{z}$$

Procediamo a sviluppare separatamente il termine  $\frac{d}{dt} \mathbf{z}$ :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \mathbf{z} &= {}^m x_P \dot{\mathbf{i}}_m + {}^m y_P \dot{\mathbf{j}}_m + {}^m z_P \dot{\mathbf{k}}_m \\ &\quad + {}^m x_P (\underline{\omega} \wedge \mathbf{i}_m) + {}^m y_P (\underline{\omega} \wedge \mathbf{j}_m) + {}^m z_P (\underline{\omega} \wedge \mathbf{k}_m) \\ &= ({}^m \dot{x}_P \mathbf{i}_m + {}^m \dot{y}_P \mathbf{j}_m + {}^m \dot{z}_P \mathbf{k}_m) + (\underline{\omega} \wedge \mathbf{z})\end{aligned}$$

L'equazione della velocità del punto P rispetto alla terna fissa risulta, di conseguenza, essere:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P} = \dot{\underline{\rho}} + \underline{\omega} \wedge \mathbf{z} + \dot{\mathbf{z}}$$

dove:

$(\dot{\underline{\rho}} + \underline{\omega} \wedge \mathbf{z})$ : velocità di trascinamento che P avrebbe se fosse solidale alla terna mobile  
 $(\dot{\mathbf{z}})$ : velocità relativa del punto rispetto alla terna mobile

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{P} &= \ddot{\underline{\rho}} + \dot{\underline{\omega}} \wedge \mathbf{z} + \underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge \mathbf{z} + \dot{\mathbf{z}}) + \underline{\omega} \wedge \dot{\mathbf{z}} + \ddot{\mathbf{z}} \\ &= \ddot{\underline{\rho}} + \dot{\underline{\omega}} \wedge \mathbf{z} + \underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge \mathbf{z}) + 2\underline{\omega} \wedge \dot{\mathbf{z}} + \ddot{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

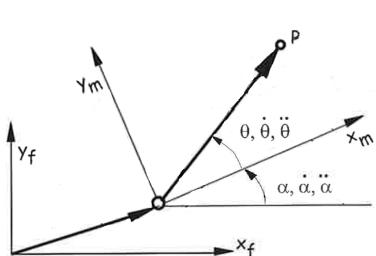
dove:

$\ddot{\underline{\rho}} + \dot{\underline{\omega}} \wedge \mathbf{z} + \underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge \mathbf{z})$ : accelerazione della terna o accelerazione di trascinamento  
 $2\underline{\omega} \wedge \dot{\mathbf{z}}$ : accelerazione di Coriolis  
 $\ddot{\mathbf{z}}$ : accelerazione relativa

## 2.5.8 Cinematica dei moti relativi nel piano

Nel caso piano le relazioni cinematiche dei moti relativi, scritte in forma scalare diventano:

→ **Posizione.** Le coordinate del punto P risultano:



$${}^f \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \end{Bmatrix} = {}^f \begin{Bmatrix} x_{O_m} \\ y_{O_m} \end{Bmatrix} + {}^f_m [R] {}^m \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \end{Bmatrix}$$

R indica la matrice di trasformazione che consente il passaggio dalla terna mobile m alla terna fissa f.

→ **Velocità.** Le componenti della velocità del punto P risultano:

$${}^f \begin{Bmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{y}_P \end{Bmatrix} = {}^f \begin{Bmatrix} \dot{x}_{O_m} \\ \dot{y}_{O_m} \end{Bmatrix} + {}^f_m [R] {}^m \begin{Bmatrix} \dot{a}_x \\ \dot{a}_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{a}_x \\ \dot{a}_y \end{Bmatrix}$$

→ **Accelerazione.** Le componenti dell'accelerazione del punto P risultano:

$${}^f \begin{Bmatrix} \ddot{x}_P \\ \ddot{y}_P \end{Bmatrix} = {}^f \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{O_m} \\ \ddot{y}_{O_m} \end{Bmatrix} + {}^f_m [R] {}^m \begin{Bmatrix} -a_y \\ a_x \end{Bmatrix} - \dot{\alpha}^2 \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \ddot{a}_x \\ \ddot{a}_y \end{Bmatrix} + 2\dot{\alpha} \begin{Bmatrix} -\dot{a}_y \\ \dot{a}_x \end{Bmatrix}$$

Precisazione:

- nel caso spaziale il prodotto esterno in forma scalare diventa:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k} \\ &= \begin{Bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

- nel caso piano (a perpendicolare al piano):

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (-a_z b_y) \mathbf{i} + (-a_z b_x) \mathbf{j} + 0 \mathbf{k} \\ &= \begin{Bmatrix} -a_z b_y \\ a_z b_x \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & 0 \\ a_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} = a_z \begin{Bmatrix} -b_y \\ b_x \\ 0 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

# 3 Analisi cinematica dei meccanismi piani

Le catene cinematiche sono lo scheletro da cui ogni meccanismo nasce. Tra le molteplici catene cinematiche che si possono trovare e immaginare una fondamentale distinzione va fatta prima di proseguire con la loro trattazione: catene cinematiche a catena chiusa e a catena aperta.

Per quanto elementare tale distinzione possa essere, non altrettanto elementare è la loro analisi cinematica: infatti, molte macchine, come, a titolo di esempio, i **manipolatori**, prevedono la connessione di membri secondo uno schema a catena cinematica (sia essa aperta o chiusa) e il conseguente controllo dei molteplici G.d.L. che gli possono essere attribuiti può, a volte, risultare problematico. (Soprattutto qualora si voglia posizionare un organo di tale macchina nello spazio)

Procediamo, dunque, alle modalità di analisi dei meccanismi piani in catena aperta e chiusa.

## 3.1 Analisi cinematica dei meccanismi piani in catena aperta

Consideriamo un sistema piano in catena aperta di cui vogliamo conoscere posizione, velocità ed accelerazione dei vari punti appartenenti ai membri del corpo.

Come esempio consideriamo un escavatore con i cingoli bloccati: è un meccanismo in catena aperta formato da tre membri rigidi (*uno è a telaio*) connessi da 2 coppie rotoidali  $c_1$ .

Dalla figura dell'escavatore sopra proposta e dall'eventuale analisi del meccanismo, possiamo notare che tale sistema di corpi prevede 4 G.d.L. attribuibili a:

- Rotazione intorno all'asse verticale
- Movimento di sollevamento del braccio
- Controllo del movimento dell'articolazione del gomito
- Controllo del movimento del polso

Per ora, come già accennato ad inizio capitolo, ci soffermeremo sull'analisi cinematica dei meccanismi piani, dove, di conseguenza, non è prevista la rotazione intorno all'asse verticale.

Il meccanismo così descritto presenta 3 G.d.L. che possono essere facilmente individuati nel controllo dei 3 attuatori in figura.

Per ragioni di semplificazione dei calcoli analitici, che tuttavia non compromettono la spiegazione delle modalità di analisi che andremo ad esporre in questa sezione, ci poniamo l'obiettivo di descrivere la posizione, la velocità e l'accelerazione del punto P (in corrispondenza del collegamento tramite coppia R tra il sistema 2 e la benna).

In tal modo priviamo la nostra analisi dello studio di un ulteriore G.d.L. (attribuibile alla posizione della benna stessa): il punto P, infatti, risulta un punto solidale al sistema 2 (le sue coordinate rispetto ad un sistema di riferimento solidale a sistema 2 sono, cioè, costanti).

Hic rebus stantibus procediamo alla descrizione del meccanismo in questione.

1. Il punto P è solidale al sistema di riferimento 2 (a cui faremo riferimento con il termine *sistema 2*). Ciò, come già indicato in precedenza, comporta che le coordinate del punto P rispetto a tale sistema siano costanti.

Tali coordinate verranno identificate dalla notazione: 
$$\begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \end{Bmatrix}$$

2. Si consideri un secondo sistema di riferimento, solidale al corpo 1 (tra telaio e corpo 2) (a cui faremo riferimento con il termine *sistema 1*).

La proiezione delle coordinate del punto P sul sistema di riferimento 1 prevedono l'utilizzo della relativa matrice di rotazione e assume la seguente forma:

$$\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = {}^1 \begin{pmatrix} x_{O2} \\ y_{O2} \end{pmatrix} + {}^1 [R] \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$$

3. Infine, per esplicitare le coordinate del punto P e il relativo moto, si consideri l'introduzione di un ultimo sistema di riferimento fisso. Allo stesso modo del punto precedente le coordinate del punto P rispetto a tale sistema di riferimento risultano essere:

$$\begin{aligned} {}^f \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} &= {}^f \begin{pmatrix} x_{O1} \\ y_{O1} \end{pmatrix} + {}^f [R] \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} \\ &= {}^f \begin{pmatrix} x_{O1} \\ y_{O1} \end{pmatrix} + {}^1 [R] \begin{pmatrix} x_{O2} \\ y_{O2} \end{pmatrix} + {}^f [R] {}^1 [R] \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} \quad // sostituzione dell'espressione al punto 2 \\ &= {}^f \begin{pmatrix} x_{O1} \\ y_{O1} \end{pmatrix} + {}^1 [R] \begin{pmatrix} x_{O2} \\ y_{O2} \end{pmatrix} + {}^f [R] \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Una parentesi va aperta riguardo alla scelta degli angoli quando si ha a che fare con una matrice di rotazione:

I due principali metodi di rappresentazione coinvolgono angoli relativi e angoli assoluti, che sono rappresentati nelle figure a lato.

La scelta che è stata effettuata a priori per l'analisi della cinematica dei moti della macchina in esame è la seconda. Infatti, l'utilizzo di angoli assoluti semplifica notevolmente la definizione della matrice di rotazione:

#### → ANGOLI ASSOLUTI

$${}^1 [R] = f(q_1) = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 \\ \sin q_1 & \cos q_1 \end{bmatrix}$$

la matrice di rotazione da 1 ad f è esclusivamente funzione dell'angolo assoluto  $q_1$

$${}^2 [R] = f(q_2) = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 \\ \sin q_2 & \cos q_2 \end{bmatrix}$$

la matrice di rotazione da 2 ad f è esclusivamente funzione dell'angolo assoluto  $q_2$

#### → ANGOLI RELATIVI

Mentre la conclusione riguardante la matrice di rotazione da 1 ad f non cambia, lo stesso non può essere detto della matrice da 2 ad f:

$$\begin{aligned} {}^2 [R] &= {}^1 [R] {}^1 [R] {}^2 [R] \\ &= \begin{bmatrix} \cos q_1 \cos q_2 - \sin q_1 \sin q_2 & -\cos q_1 \sin q_2 - \sin q_1 \cos q_2 \\ \sin q_1 \cos q_2 - \cos q_1 \sin q_2 & \cos q_1 \cos q_2 - \sin q_1 \sin q_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(q_1 + q_2) & -\sin(q_1 + q_2) \\ \sin(q_1 + q_2) & \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

In conclusione: possiamo ammettere che  $q_{1R} + q_{2R} = q_{2A}$

Continuiamo l'analisi della cinematica della nostra macchina con la cosiddetta analisi di velocità: applichiamo, dunque, le formule ottenute nel capitolo precedente anche in questo caso mantenendo la convenzione di angoli assoluti.

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{y}_P \end{Bmatrix}^f = \begin{Bmatrix} \dot{x}_{O1} \\ \dot{y}_{O1} \end{Bmatrix}^f + \dot{q}_1 \begin{Bmatrix} R & [P] \end{Bmatrix}^1 \begin{Bmatrix} x_{O2} \\ y_{O2} \end{Bmatrix} + \dot{q}_2 \begin{Bmatrix} R & [P] \end{Bmatrix}^2 \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \end{Bmatrix}$$

<sup>1</sup>

Per concludere svolgiamo l'analisi di accelerazione:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_P \\ \ddot{y}_P \end{Bmatrix}^f &= \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{O1} \\ \ddot{y}_{O1} \end{Bmatrix}^f + \ddot{q}_1 \begin{Bmatrix} R & [P] \end{Bmatrix}^1 \begin{Bmatrix} x_{O2} \\ y_{O2} \end{Bmatrix} + \dot{q}_1^2 \begin{Bmatrix} R & [P] & [P] \end{Bmatrix}^1 \begin{Bmatrix} x_{O2} \\ y_{O2} \end{Bmatrix} \\ &\quad + \ddot{q}_2 \begin{Bmatrix} R & [P] \end{Bmatrix}^2 \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \end{Bmatrix} + \dot{q}_2^2 \begin{Bmatrix} R & [P] & [P] \end{Bmatrix}^2 \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{O1} \\ \ddot{y}_{O1} \end{Bmatrix}^f + \ddot{q}_1 \begin{Bmatrix} R & [P] \end{Bmatrix}^1 \begin{Bmatrix} x_{O2} \\ y_{O2} \end{Bmatrix} - \dot{q}_1^2 \begin{Bmatrix} R & [P] \end{Bmatrix}^1 \begin{Bmatrix} x_{O2} \\ y_{O2} \end{Bmatrix} \\ &\quad + \ddot{q}_2 \begin{Bmatrix} R & [P] \end{Bmatrix}^2 \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \end{Bmatrix} - \dot{q}_2^2 \begin{Bmatrix} R & [P] \end{Bmatrix}^2 \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

<sup>2</sup>

In cui si distinguono i termini di:

- £ Accelerazione dell'origine del sistema 1
- £ Accelerazione tangenziale denotata dal fattore moltiplicativo  $\dot{q}_i$
- £ Accelerazione centripeta individuata dal fattore moltiplicativo  $-\ddot{q}_i^2$

Se ne deduce che nel caso di meccanismi piani l'analisi cinematica è relativamente semplice; infatti è stato agevole esprimere analiticamente le coordinate del punto P, e delle sue derivate rispetto al tempo, in forma esplicita, in funzione delle coordinate libere:

$$x_P = f(q_1, q_2, t) \quad ; \quad \dot{x}_P = \dot{f}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t) \quad ; \quad \ddot{x}_P = \ddot{f}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \ddot{q}_1, \dot{q}_2, \ddot{q}_2, t)$$

Per la definizione delle prestazioni e del campo di lavoro di un meccanismo piano è importante, specie per le applicazioni in cui si vuole che un certo membro raggiunga una determinata zona nello spazio, conoscere il campo ammissibile degli spostamenti nel piano dei vari membri del meccanismo, in funzione della geometria e del tipo di accoppiamenti.

Si tratta quindi di studiare la mobilità del meccanismo; l'analisi di mobilità può essere svolta in due diverse modalità:

- **Nozione semplice di spazio raggiungibile:** ovvero tutti i punti che l'organo di interesse riesce a raggiungere (*cfr. escavatore*)
- **Nozione di spazio destro:** ovvero lo spazio che l'organo di interesse può occupare (tramite rotazioni e altri moti relativi tra i membri) al raggiungimento di un determinato punto. (*cfr. manipolatore industriale*)

---

<sup>1</sup>Si ricorda ancora una volta che  $\begin{Bmatrix} x_{O2} \\ y_{O2} \end{Bmatrix}^1 = \text{cost.}$  e che la matrice di permutazione  $[P] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

<sup>2</sup>Si ricorda al lettore che  $[P] \cdot [P] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

## 3.2 Analisi cinematica di meccanismi piani con una catena chiusa

Abbiamo visto che se un meccanismo ha un solo G.d.L. esso può essere descritto completamente con una sola coordinata generalizzata.

Perciò il problema che si pone è il seguente: data la coordinata generalizzata e la sua derivata prima (*velocità*) e la sua derivata seconda (*accelerazione*) calcolare la posizione, velocità e accelerazione di tutti i punti del meccanismo.

In genere questo calcolo non viene fatto per un solo valore della coordinata generalizzata e delle sue derivate, ma per tutto un insieme di valori; in sostanza si vuole studiare il movimento del meccanismo.

Esistono vari metodi per risolvere tale problema, ma quello che verrà esposto in questa sezione sarà la cosiddetta: **analisi cinematica di meccanismi in catena chiusa con il poligono di chiusura**

Broadly speaking se esiste una catena cinematica chiusa è possibile compiere un percorso chiuso che comprenda corpi diversi del meccanismo in esame.

### 3.2.1 Glifo oscillante

#### ANALISI DI POSIZIONE

Esponiamo il metodo iterativo in cui consiste tale tecnica di risoluzione dell'analisi cinematica di meccanismi piani con una catena chiusa tramite l'esempio del glifo oscillante:

Data la rotazione della manovella motrice 3, individuata dall'angolo di rotazione rispetto al telaio ( $\vartheta_3$ ), ci si propone di calcolare la rotazione della manovella 1 rispetto al telaio e lo scorrimento del pattino. Di conseguenza associamo ai membri, dei vettori che uniscono le varie coppie cinematiche presenti; essi formano un poligono che prende il nome di poligono di chiusura.

Il verso dei vettori può essere scelto arbitrariamente in quanto comunque il poligono costruito deve chiudersi e la somma vettoriale dei vettori associati ai membri dovrà essere nulla.

Alternativamente alla notazione proposta dal libro verrà seguita una convenzione che prevede l'identificazione dei vettori con quella degli estremi dei membri stessi. Sia, dunque:

- A la coppia rotoidale che connette il membro 1 a telaio
- B la coppia prismatica + rotoidale che collega il membro 1 al membro 2 (in realtà corrisponderebbe a un vettore di lunghezza nulla tra le due coppie cinematiche  $z_2 = 0$ )
- C la coppia rotoidale che collega il membro 2 a telaio

Così facendo l'espressione che mi descrive il poligono di chiusura

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4 &= 0 \\ \mathbf{AB} + \mathbf{BC} + \mathbf{CA} &= 0 \end{aligned}$$

dove:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{z}_1 \quad ; \quad \mathbf{BC} = -\mathbf{z}_3 \quad ; \quad \mathbf{CA} = -\mathbf{z}_4$$

Ogni vettore così ottenuto può essere espresso in termini scalari come Lunghezza ( $L_i$ ) e angolo rispetto al telaio ( $\vartheta_i$ ).

Procediamo sotto tali ipotesi all'analisi di posizione:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{AB} &= \begin{Bmatrix} L_1 \cos \vartheta_1 \\ L_1 \sin \vartheta_1 \end{Bmatrix} & \mathbf{AB} + \mathbf{BC} + \mathbf{CA} &= 0 \\
 \mathbf{CB} &= \begin{Bmatrix} L_3 \cos \vartheta_3 \\ L_3 \sin \vartheta_3 \end{Bmatrix} = -\mathbf{BC} & \mathbf{AB} - \mathbf{CB} - \mathbf{AC} &= 0 \\
 \mathbf{CA} &= \begin{Bmatrix} L_0 \cos \vartheta_0 \\ L_0 \sin \vartheta_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_0 \\ 0 \end{Bmatrix} = -\mathbf{AC} & \begin{Bmatrix} L_1 \cos \vartheta_1 \\ L_1 \sin \vartheta_1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} L_3 \cos \vartheta_3 \\ L_3 \sin \vartheta_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} L_0 \\ 0 \end{Bmatrix} &= 0 \\
 &&&\Downarrow \\
 &&&\begin{Bmatrix} L_1 \cos \vartheta_1 - L_3 \cos \vartheta_3 - L_0 = 0 \\ L_1 \sin \vartheta_1 - L_3 \sin \vartheta_3 = 0 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Il sistema di equazioni sopra proposto presenta 2 equazioni in 2 incognite con grandezze variabili  $\vartheta_1, \vartheta_3, L_1$ .<sup>3</sup> Più in particolare le funzioni che compongono tale sistema di equazioni sono funzioni definite in maniera implicita, nella forma:

$$\begin{cases} f_1(\vartheta_1, \vartheta_3, L_1) = 0 \\ f_2(\vartheta_1, \vartheta_3, L_1) = 0 \end{cases}$$

Nell'ipotesi, quindi, che  $\vartheta_3$  sia il movente ( $\vartheta_3 = q$ ). Possiamo esprimere le altre due variabili come una funzione di tale angolo:

$$\begin{cases} L_1 = g_1(\vartheta_3) \\ \vartheta_1 = g_2(\vartheta_3) \end{cases} \quad \text{Il problema si presenta qualora, come in questo caso, tali equazioni non siano lineari.}$$

Sotto tali condizioni l'inversione della matrice può risultare complicato e a volte addirittura impossibile.

Nell'esempio proposto è possibile trovare l'inversa e ottenere le variabili  $L_1$  e  $\vartheta_1$ . Procediamo dunque ad affrontare tali calcoli. Si consideri il sistema di equazioni in cui è già stata esplicitata la coordinata generalizzata ( $\vartheta_3 = q$ ):

$$\begin{cases} L_1 \sin \vartheta_1 = L_3 \sin q \\ L_1 \cos \vartheta_1 = L_3 \cos q + L_0 \end{cases} \quad \parallel \quad \text{Si divida membro a membro tali equazioni}$$

$$\tan \vartheta_1 = \frac{L_3 \sin q}{L_3 \cos q + L_0} \quad \rightarrow \quad \vartheta_1 = f(q) = \arctan \frac{L_3 \sin q}{L_3 \cos q + L_0}$$

Problema: L'atan è una funzione che prevede 2 soluzioni:

$$\vartheta_1 : \arctan \frac{L_3 \sin q}{L_3 \cos q + L_0} \quad \vee \quad \arctan \frac{L_3 \sin q}{L_3 \cos q + L_0} + k\pi$$

$$L_1 = \frac{L_3 \sin q}{\sin \vartheta_1} \quad \vee \quad \frac{L_3 \cos q + L_0}{\cos \vartheta_1}$$

Ciò mi permette di usare una espressione qualora le condizioni di esistenza dell'altra espressione vengano meno

### ANALISI DI VELOCITÀ

Proseguiamo con l'analisi di velocità. Anche in questa situazione si presentano due metodi per affrontare tali analisi:

- Svolgere la derivata dell'espressione delle variabili di interesse (e.i.  $\vartheta_1$ )

$$\dot{\vartheta}_1 = \frac{1}{1 + \left( \frac{L_3 \sin q}{L_3 \cos q + L_0} \right)^2} \cdot \left( \frac{L_3 \cos q \dot{q} (L_3 \cos q + L_0) + L_3 \dot{q} \sin q \sin q}{(L_3 \cos q + L_0)^2} \right)$$

<sup>3</sup> $L_1$  è variabile nel tempo in quanto il corrispettivo pattino può scorrere lungo il membro 1

- In alternativa è possibile svolgere la derivata delle singole funzioni definite in modo implicito.

$$\begin{cases} \dot{L}_1 \cos \vartheta_1 - L_1 \dot{\vartheta}_1 \sin \vartheta_1 + L_3 \dot{q} \sin q = 0 \\ \dot{L}_1 \sin \vartheta_1 + L_1 \dot{\vartheta}_1 \cos \vartheta_1 - L_3 \dot{q} \cos q = 0 \end{cases}$$

Le equazioni di velocità dei vettori (**AB**, **BC**, **CA**) così ottenute risultano lineari nella velocità e di conseguenza possono essere ricondotte ad una forma matriciale

$$\begin{bmatrix} \cos \vartheta_1 & -L_1 \sin \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 & L_1 \cos \vartheta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{\vartheta}_1 \end{Bmatrix} = \dot{q} \begin{bmatrix} -L_3 \sin q \\ L_3 \cos q \end{bmatrix}$$

Conoscendo  $q, \dot{q}, \vartheta_1$  e  $L_1$  che abbiamo determinato dall'analisi di posizione svolta precedentemente è possibile invertire la matrice e ottenere un'espressione per  $\dot{L}_1$  e  $\dot{\vartheta}_1$ :

$$\begin{Bmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{\vartheta}_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{L_1 \cos^2 \vartheta_1 + L_1 \sin^2 \vartheta_1} \begin{bmatrix} L_1 \cos \vartheta_1 & L_1 \sin \vartheta_1 \\ -\sin \vartheta_1 & \cos \vartheta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -L_3 \sin q \\ L_3 \cos q \end{Bmatrix} \dot{q}$$

$$= \frac{1}{L_1} \begin{bmatrix} L_1 \cos \vartheta_1 & L_1 \sin \vartheta_1 \\ -\sin \vartheta_1 & \cos \vartheta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -L_3 \sin q \\ L_3 \cos q \end{Bmatrix} \dot{q}$$

$$\begin{cases} \dot{L}_1 = \frac{1}{L_1} \dot{q} (-L_3 \cancel{L_1} \cos \vartheta_1 \sin q + L_3 \cancel{L_1} \sin \vartheta_1 \cos q) = -L_3 \dot{q} \sin(q - \vartheta_1) \\ \dot{\vartheta}_1 = \frac{1}{L_1} \dot{q} (L_3 \sin q \sin \vartheta_1 + L_3 \cos q \cos \vartheta_1) = \frac{L_3}{L_1} \dot{q} \cos(q - \vartheta_1) \end{cases}$$

**Osservazione:** La velocità dei cedenti è proporzionale alla velocità dei moventi tramite un rapporto di proporzionalità, dove:

- $\tau_{\vartheta_1 q} = -L_3 \sin(q - \vartheta_1)$  è il rapporto di proporzionalità tra  $\dot{\vartheta}_1$  e  $\dot{q}$
- $\tau_{L_1 q} = \frac{L_3}{L_1} \cos(q - \vartheta_1)$  è il rapporto di proporzionalità tra  $\dot{L}_1$  e  $\dot{q}$

In sintesi: per compiere l'analisi di velocità non è necessario fare la derivata della forma invertita, ma è sufficiente compiere la derivata delle funzioni implicite:

$$\begin{cases} f_1(q, L_1, \vartheta_1) = 0 \\ f_2(q, L_1, \vartheta_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{f}_1(q, L_1, \vartheta_1) = 0 \\ \dot{f}_2(q, L_1, \vartheta_1) = 0 \end{cases}$$

dato che la derivata delle equazioni di chiusura ( $\dot{\vartheta}_1 = g_1(q)$  e  $\dot{L}_1 = g_2(q)$ ) è molto spesso più complicata da risolvere.

Procediamo dunque con l'analisi di velocità del glifo oscillante esplicitando le derivate delle funzioni implicite:

$$\begin{cases} \frac{df_1}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_1} \dot{\vartheta}_1 + \frac{\partial f_1}{\partial L_1} \dot{L}_1 = 0 \\ \frac{df_2}{dt} = \frac{\partial f_2}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_1} \dot{\vartheta}_1 + \frac{\partial f_2}{\partial L_1} \dot{L}_1 = 0 \end{cases}$$

Tale sistema di equazioni prende il nome di equazioni di velocità e sono state ottenute dalla derivazione delle equazioni prima di essere risolte.

Nel complesso le derivate parziali possono essere interpretate come dei fattori moltiplicativi delle velocità dei cedenti rispetto alla velocità dei moventi e il sistema di equazioni è di fatto un sistema lineare nelle derivate dei moventi rispetto ai cedenti.

Può, dunque, essere rappresentato in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial L_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_1} & \frac{\partial f_2}{\partial L_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{L}_1 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} \end{Bmatrix} \dot{q}$$

Il sistema lineare così ottenuto è del tipo:

$$[A] \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{L}_1 \end{Bmatrix} = - \{B\} \dot{q}$$

La cui soluzione può essere ottenuta premoltiplicando entrambi i membri per la matrice inversa della matrice A:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{L}_1 \end{Bmatrix} = - [A]^{-1} \{B\} \dot{q}$$

$$= - \underbrace{\begin{Bmatrix} \tau_{\vartheta_1 q} \\ \tau_{L_1 q} \end{Bmatrix}}_{\underline{\tau}} \dot{q}$$

Il vettore colonna  $\underline{\tau}$  così ottenuto è il vettore dei rapporti di velocità che contiene il rapporto di proporzionalità tra la velocità dei cedenti e del movente.

I rapporti di velocità sono delle funzioni/espressioni di  $\vartheta_1, L_1, q$ , ma ricordando che concettualmente posso pensare di aver invertito le equazioni di chiusura e di aver espresso  $\vartheta_1 = g_1(q)$  e  $L_1 = g_2(q)$ , se ne conclude che pure il vettore rapporto di velocità è, di fatto, una funzione del movente:

$$\tau = f(\vartheta_1(q), L_1(q), q) = f(q)$$

Alcune considerazioni/osservazioni sui risultati appena ottenuti:

- La matrice A delle derivate parziali è una matrice a noi già nota dal corso di Analisi 2: **Matrice Jacobiana**.
- Solo nel caso in cui il determinante della Jacobiana è invertibile, il sistema lineare trova soluzione.
- I rapporti di velocità tendono a infinito in corrispondenza di una configurazione singolare (ovvero quando la funzione che si deriva non è continua o derivabile in un punto). In corrispondenza di questa singolarità il determinante tenderà, dunque, a zero facendo tendere i rapporti di velocità a infinito.
- I rapporti di velocità dipendono dalla configurazione. Date le relazioni lineari esistenti tra le velocità dei membri e la velocità della coordinata generalizzata, una volta noti i rapporti di velocità possiamo calcolare la velocità dei membri, per qualsiasi valore della velocità della coordinata generalizzata.

#### ANALISI DI ACCELERAZIONE

Analogamente per l'analisi di velocità anche per l'analisi di accelerazione è possibile seguire due strade per trovare un'espressione che metta in relazione il moto del movente con quella di ogni cedente.

##### 1. 1° METODO

Derivare le espressioni  $\begin{cases} \dot{\vartheta}_1 = \tau_{\vartheta_1 q} \dot{q} \\ \dot{L}_1 = \tau_{L_1 q} \dot{q} \end{cases}$  rispetto al tempo:

##### 2. 2° METODO

Fare la derivata totale delle equazioni di velocità in forma matriciale

Al fine di esporre le modalità con cui agiscono nell'analisi di accelerazione tali metodi procediamo ad applicarli entrambi:

1.

$$\frac{d\dot{\vartheta}_1}{dt} = \ddot{\vartheta}_1 = \frac{d\tau_{\vartheta_1 q}}{dt} \dot{q} + \tau_{\vartheta_1 q} \ddot{q}$$

Dove:

$$\frac{d\tau_{\vartheta_1 q}}{dt} = \frac{\partial \tau_{\vartheta_1 q}}{\partial \vartheta_1} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \tau_{\vartheta_1 q}}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \tau_{\vartheta_1 q}}{\partial q} \ddot{q}$$

Di conseguenza l'accelerazione del cedente  $\ddot{\vartheta}_1$  risulta essere:

$$\begin{aligned}\ddot{\vartheta}_1 &= \left( \frac{\partial \tau_{\vartheta_1 q}}{\partial \vartheta_1} \underbrace{\frac{\partial \vartheta_1}{\partial q}}_{\tau_{\vartheta_1 q}} + \frac{\partial \tau_{\vartheta_1 q}}{\partial L_1} \underbrace{\frac{\partial L_1}{\partial q}}_{\tau_{L_1 q}} + \frac{\partial \tau_{\vartheta_1 q}}{\partial q} \right) \dot{q}^2 + \tau_{\vartheta_1 q} \ddot{q} \\ &= \left( \frac{\partial \tau_{\vartheta_1 q}}{\partial \vartheta_1} \tau_{\vartheta_1 q} + \frac{\partial \tau_{\vartheta_1 q}}{\partial L_1} \tau_{L_1 q} + \frac{\partial \tau_{\vartheta_1 q}}{\partial q} \right) \dot{q}^2 + \tau_{\vartheta_1 q} \ddot{q} \\ &= \tau_{\vartheta_1 q} \ddot{q} + \tau'_{\vartheta_1 q} \left( = \frac{d \tau_{\vartheta_1 q}}{dq} \right) \dot{q}^2\end{aligned}$$

2. Procediamo ad eseguire la derivata rispetto al tempo dell'equazione matriciale:

$$[A] \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{L}_1 \end{Bmatrix} = - \{B\} \dot{q}$$

Poiché la matrice A è funzione dei cedenti, che a loro volta sono funzioni del tempo:

$$\begin{aligned}\left[ \frac{dA}{dt} \right] \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{L}_1 \end{Bmatrix} + [A] \begin{Bmatrix} \ddot{\vartheta}_1 \\ \ddot{L}_1 \end{Bmatrix} &= - \{B\} \ddot{q} - \left\{ \frac{dB}{dt} \right\} \dot{q} \\ \left[ \frac{dA}{dq} \right] \dot{q} \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{L}_1 \end{Bmatrix} + [A] \begin{Bmatrix} \ddot{\vartheta}_1 \\ \ddot{L}_1 \end{Bmatrix} &= - \{B\} \ddot{q} - \left\{ \frac{dB}{dq} \right\} \dot{q}^2 \\ [A] \begin{Bmatrix} \ddot{\vartheta}_1 \\ \ddot{L}_1 \end{Bmatrix} &= - \{B\} \ddot{q} - \left\{ \frac{dB}{dq} \right\} \dot{q}^2 - \left[ \frac{dA}{dq} \right] \dot{q} \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{L}_1 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \ddot{\vartheta}_1 \\ \ddot{L}_1 \end{Bmatrix} &= \{\tau\} \ddot{q} - [A]^{-1} \left( \left[ \frac{dA}{dq} \right] \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{L}_1 \end{Bmatrix} \dot{q} + \left\{ \frac{dB}{dq} \right\} \dot{q}^2 \right)\end{aligned}$$

Possiamo dunque concludere che:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\vartheta}_1 \\ \ddot{L}_1 \end{Bmatrix} = \{\tau\} \ddot{q} + \{C\} \dot{q}^2$$

e che, a titolo d'esempio possiamo riconoscere la presenza dei medesimi coefficienti ottenuti con l'altro metodo. Infatti:

$$\ddot{\vartheta}_1 = \tau_{\vartheta_1 q} \ddot{q} + \tau'_{\vartheta_1 q} \dot{q}^2$$

Dove riconosciamo una proporzionalità rispetto all'accelerazione della coordinata generalizzata ( $\ddot{q}$ ) e all'accelerazione di coriolis ( $\dot{q}^2$ )

### 3.2.2 Analisi cinematica del quadrilatero articolato

Il quadrilatero articolato è uno dei meccanismi più diffusi, lo troviamo in tutti i campi della tecnica. Esso è costituito da un telaio, due manovelle o bilancieri e da una biella.

#### ANALISI DI POSIZIONE

Dato il valore della coordinata libera  $q$  determinare la rotazione della biella 2 e della manovella 3.

Il poligono di chiusura disegnato a fianco permette di scrivere le equazioni vettoriali a lui associate:

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BC} - \mathbf{DC} = \mathbf{AD}$$

ovvero, in forma scalare;

$$\begin{cases} L_1 \cos q + L_2 \cos \vartheta_2 - L_3 \cos \vartheta_3 = L_0 \\ L_1 \sin q + L_2 \sin \vartheta_2 - L_3 \sin \vartheta_3 = 0 \end{cases}$$

Noto che le  $L_i \forall i = 0, \dots, 3$  sono le lunghezze dei membri del quadrilatero e sono assunte costanti, e che  $\vartheta_1 = q$  rappresenta la coordinata generalizzata (aka movente) le incognite dell'analisi di posizione risultano essere gli angoli  $\vartheta_2$  e  $\vartheta_3$ .

Per la loro risoluzione si può usare il metodo Newton-Raphson, dato un certo valore di  $q$  i valori di primo tentativo, richiesti dall'algoritmo numerico, possono essere ricavati mediante un'analisi grafica.

Nel caso del quadrilatero, facendo alcune considerazioni geometriche, si può pervenire abbastanza facilmente ad una soluzione in forma chiusa; infatti, è immediato calcolare la distanza tra i punti B e D, nonché la sua inclinazione rispetto all'asse x.

Procediamo dunque a descrivere l'algoritmo iterativo che dovrà essere seguito per giungere ad una soluzione in forma chiusa:

1. Dato un valore del movente  $q$  è possibile trovare una relazione che leggi le coordinate cartesiane del punto B con l'angolo stesso  $q$ :

$$\begin{cases} x_B = x_A + L_1 \cos q \\ y_B = y_A + L_1 \sin q \end{cases}$$

Mentre le coordinate del punto D corrispondono a  $(L_0, 0)$  noto che gli angoli  $\vartheta_i$  sono angoli relativi al telaio **AD**

2. Osserviamo, dunque, che è possibile costruire una diade BCD (risolvibile con relazioni trigonometriche) tramite l'introduzione di un membro fittizio che collega le cerniere B e D e che presenta una lunghezza

$$L_5 = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2}$$

3. Tramite il teorema di Carnot (o del coseno)<sup>4</sup> è possibile ricavare un valore per l'angolo  $\alpha$ :

$$\cos \alpha = \frac{-L_3^2 + L_2^2 + L_5^2}{2 L_2 L_5}$$

4. Si hanno per un fissato valore di  $q$ , due possibili valori di  $\alpha$ ; e di conseguenza anche due valori di  $\vartheta_2$  che corrispondono a **due diversi modi di assemblaggio** del meccanismo.

$$\alpha = \pm \arccos \frac{-L_3^2 + L_2^2 + L_5^2}{2 L_2 L_5}$$

5. risulta utile a questo punto mettere in relazione  $\vartheta_2$  e  $\alpha$  introducendo l'angolo  $\vartheta_5$  (che individua l'inclinazione di **BD** rispetto al telaio):

Noto infatti che  $\mathbf{BD} = \begin{Bmatrix} x_D - x_B \\ y_D - y_B \end{Bmatrix}$  il valore di  $\vartheta_5$  può essere ottenuto applicando l'arcotangente del rapporto tra la componente del vettore opposta a  $\vartheta_5$  e della componente adiacente all'angolo  $\vartheta_5$ .

$$\vartheta_5 = \arctan \left( \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} \right) + k\pi$$

Il problema di questa formulazione è che l'arcotangente è una funzione che individua due angoli:  $\vartheta_5$  e  $\vartheta_5 + k\pi$ .

Per ovviare a tale problematica molti programmi supportano la cosiddetta arcotangente a 2 parametri che si prende in carico le situazioni particolari in cui il punto in considerazione si trovi sull'asse delle y e la dualità degli angoli ( $\vartheta$  o  $\vartheta + k\pi$ )

$$\vartheta_5 = \arctan(x_D - x_B, y_D - y_B)$$

<sup>4</sup>Dato un triangolo generico di lati a,b e c per calcolare la lunghezza del lato c noto l'angolo  $\alpha$  compreso tra a e b, si può utilizzare la formula:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

6. A questo punto si presentano diversi casi che necessitano di essere analizzati.

Noto che gli angoli  $(\vartheta_2, \vartheta_5, \alpha)$  sono legati dalla relazione  $\vartheta_2 = \vartheta_5 \pm \alpha$  e che esistono due possibili modi di assemblaggio attribuibile al  $(\pm\alpha = \pm \arccos[\dots])$ , possiamo distinguere tra:

- $\alpha = 0$ : due soluzioni reali e coincidenti che corrispondono ad un'unica configurazione;
- $\alpha = a + jb$  (l'argomento dell' $\arccos$  non è compreso tra -1 e +1): nessuna soluzione reale, che corrisponde ad un meccanismo non assemblabile;
- $\alpha = \pm sol$ : due soluzioni reali distinte che corrispondono a due diverse configurazioni

7. Una volta calcolato  $\vartheta_2$  si può procedere alla determinazione delle coordinate della cerniera C nel seguente modo:

$$\begin{cases} x_C = x_D + L_2 \cos \vartheta_2 \\ y_C = y_D + L_2 \sin \vartheta_2 \end{cases}$$

8. Infine calcolare il valore di  $\vartheta_3$  con l'arcotangente a due parametri:

$$\vartheta_3 = \arctan(x_C - x_D, y_C - y_D)$$

In conclusione:

Possiamo interpretare gli angoli  $\vartheta_2$  e  $\vartheta_3$  come funzioni del movente q e di un parametro m ( $= \pm 1$ ) detto **modo di assemblaggio**:

$$\vartheta_2 = g_2(q, m) \quad ; \quad \vartheta_3 = g_3(q, m)$$

I risultati così ottenuti pongono termine all'analisi di posizione del quadrilatero articolato preso in considerazione.

#### ANALISI DI VELOCITÀ

Procediamo, dunque, all'analisi di velocità; Per fare ciò si possono seguire due strade:

- La derivazione delle equazioni di chiusura ( $\mathbf{AB} + \mathbf{BC} - \mathbf{DC} - \mathbf{AD} = 0$ )
- La derivazione dell'espressione dei cedenti  $(\dot{\vartheta}_2, \dot{\vartheta}_3)$  ottenuti dall'analisi di posizione.

Come già osservato in precedenza, molto spesso la seconda opzione porta a calcoli complicati, soprattutto per la presenza di un denominatore.

Nella nostra trattazione si deriverà, di conseguenza, le equazioni del poligono di chiusura che vengono riportate di seguito in forma vettoriale e scalare:

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} + \mathbf{BC} - \mathbf{DC} - \mathbf{AD} &= 0 \\ L_1 \begin{Bmatrix} \cos q \\ \sin q \end{Bmatrix} + L_2 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{Bmatrix} - L_3 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_3 \\ \sin \vartheta_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} L_0 \\ 0 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Derivando le espressioni in forma scalare rispetto al tempo si ottiene:

$$L_1 \dot{q} \begin{Bmatrix} -\sin q \\ \cos q \end{Bmatrix} + L_2 \dot{\vartheta}_2 \begin{Bmatrix} -\sin \vartheta_2 \\ \cos \vartheta_2 \end{Bmatrix} - L_3 \dot{\vartheta}_3 \begin{Bmatrix} -\sin \vartheta_3 \\ \cos \vartheta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Le equazioni derivate risultano essere lineari nella velocità dei cedenti  $\dot{\vartheta}_2, \dot{\vartheta}_3$  rispetto a quella del movente  $\dot{q}$

$$\begin{bmatrix} -L_2 \sin \vartheta_2 & L_3 \sin \vartheta_3 \\ L_2 \cos \vartheta_2 & -L_3 \cos \vartheta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_2 \\ \dot{\vartheta}_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} -L_1 \sin q \\ L_1 \cos q \end{Bmatrix} \dot{q}$$

#### Osservazione:

- Come si è fatto notare in precedenza la matrice che premoltiplica il vettore colonna delle velocità dei cedenti è la **matrice Jacobiana**.

A titolo di esempio procediamo al calcolo della matrice tramite le nozioni acquisite dal corso di Analisi Matematica 2, ovvero

$$[J] = [\nabla f_1 \quad \nabla f_2]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_2 \sin \vartheta_2 & L_3 \sin \vartheta_3 \\ L_2 \cos \vartheta_2 & -L_3 \cos \vartheta_3 \end{bmatrix}$$

dove:

- $f_1 = L_1 \cos q + L_2 \cos \vartheta_2 - L_3 \cos \vartheta_3 - L_0 = 0$
- $f_2 = L_1 \sin q + L_2 \sin \vartheta_2 - L_3 \sin \vartheta_3 = 0$

- Anche B in un certo senso può essere considerata una matrice Jacobiana:

$$\{B\} = \{\nabla f_1\}^T = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L_1 \sin q \\ L_1 \cos q \end{Bmatrix}$$

L'equazione ottenuta dalla derivazioni delle equazioni di chiusura, alla luce delle osservazioni sopra esposte, può essere riscritta in forma compatta, come segue:

$$\begin{aligned} [J] \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_2 \\ \dot{\vartheta}_3 \end{Bmatrix} &= -\{B\} \dot{q} \\ \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_2 \\ \dot{\vartheta}_3 \end{Bmatrix} &= -\underbrace{[J]^{-1}}_{\tau} \{B\} \dot{q} = \{\tau\} \dot{q} \\ &= -\frac{1}{L_2 L_3 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 - L_2 L_3 \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_3} \begin{bmatrix} -L_3 \cos \vartheta_2 & -L_3 \sin \vartheta_3 \\ -L_2 \cos \vartheta_2 & -L_2 \sin \vartheta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -L_1 \sin q \\ L_1 \cos q \end{Bmatrix} \dot{q} \\ &= -\frac{1}{L_2 L_3 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3)} \begin{Bmatrix} L_3 L_1 \sin(q - \vartheta_3) \\ L_1 L_2 \sin q - \vartheta_2 \end{Bmatrix} \dot{q} \\ &= \begin{Bmatrix} -\frac{L_1}{L_2} \frac{\sin(q - \vartheta_3)}{\sin(\vartheta_2 - \vartheta_3)} \\ -\frac{L_1}{L_3} \frac{\sin(q - \vartheta_2)}{\sin(\vartheta_2 - \vartheta_3)} \end{Bmatrix} \dot{q} \end{aligned}$$

Si osserva che al fine di poter invertire la matrice Jacobiana e raggiungere una soluzione del corrispettivo sistema lineare il determinante della matrice Jacobiana stessa deve essere diverso da zero.

Qualora tale condizione non fosse verificata si raggiungerebbe una condizione di singolarità che porterebbe  $\det(J) \rightarrow 0$  e  $\tau \rightarrow \infty$ . La condizione di determinante non nulla, nel caso particolare del quadrilatero articolato in esame, si ottiene se:

$$\det[J] = L_2 L_3 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3) \neq 0, \text{ ovvero se:}$$

- $\rightarrow L_2 \neq 0 \vee L_3 \neq 0$
- $\rightarrow \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3) \neq 0 \Rightarrow \vartheta_2 - \vartheta_3 \neq k\pi \Rightarrow \vartheta_2 = \vartheta_3 + k\pi$

Whereas la prima condizione può benissimo essere trascurata per costruzione del quadrilatero, non si può dire lo stesso della seconda.

Le condizioni di singolarità che ne derivano sono riportate a lato:

#### ANALISI DI ACCELERAZIONE

Concludiamo dunque la trattazione del quadrilatero articolato con l'analisi di accelerazione; ancora una volta è possibile utilizzare due metodi per la sua enunciazione: derivare le equazioni delle velocità dei cedenti o fare al derivata rispetto al tempo dell'equazione di velocità del poligono di chiusura in forma matriciale.

Seppur poco agevole in termini di risoluzione analitica proseguiamo la trattazione derivando le equazioni di velocità ricavate dalla relativa analisi di velocità (per il solo  $\vartheta_2$ ):

$$\begin{aligned}\ddot{\vartheta}_2 &= \tau \ddot{q} + \frac{d\tau}{dt} \dot{q}^2 \\ &= \frac{L_1}{L_2} \frac{\sin(\vartheta_3 - q)}{\sin(\vartheta_2 - \vartheta_3)} \ddot{q} + \frac{L_1}{L_2} \dot{q} \left[ \frac{-(\cos(\vartheta_3 - q)(\dot{\vartheta}_3 - \dot{q}) \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3)) - (\cos(\vartheta_2 - \vartheta_3)(\dot{\vartheta}_2 - \dot{\vartheta}_3) \sin(\vartheta_3 - q))}{\sin^2(\vartheta_2 - \vartheta_3)} \right] \\ \text{sostituendo i valori di } \dot{\vartheta}_2 &= \tau_{\vartheta_2 q} \dot{q} \text{ e } \dot{\vartheta}_3 = \tau_{\vartheta_3 q} \dot{q} \\ &= \frac{L_1}{L_2} \frac{\sin(\vartheta_3 - q)}{\sin(\vartheta_2 - \vartheta_3)} \ddot{q} + \frac{L_1}{L_2} \dot{q} \left[ \frac{-(\cos(\vartheta_3 - q)(\tau_{\vartheta_3 q} \dot{q} - \dot{q}) \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3)) - (\cos(\vartheta_2 - \vartheta_3)(\tau_{\vartheta_2 q} \dot{q} - \tau_{\vartheta_3 q} \dot{q}) \sin(\vartheta_3 - q))}{\sin^2(\vartheta_2 - \vartheta_3)} \right] \\ &= \frac{L_1}{L_2} \frac{\sin(\vartheta_3 - q)}{\sin(\vartheta_2 - \vartheta_3)} \ddot{q} + \frac{L_1}{L_2} \dot{q}^2 \left[ \frac{-(\cos(\vartheta_3 - q)(\tau_{\vartheta_3 q} - 1) \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3)) - (\cos(\vartheta_2 - \vartheta_3)(\tau_{\vartheta_2 q} - \tau_{\vartheta_3 q}) \sin(\vartheta_3 - q))}{\sin^2(\vartheta_2 - \vartheta_3)} \right]\end{aligned}$$

Abbiamo così concluso l'analisi cinematica di un quadrilatero articolato completando le relative analisi di posizione, velocità e accelerazione.

Una parentesi, tuttavia, va aperta su come effettivamente i membri del quadrilatero si muovono gli uni rispetto agli altri: se considerassimo a titolo di esempio la manovella **AB** potremmo notare che il quadrilatero così costruito non è detto che ne permetta la rotazione completa intorno alla rispettiva cerniera a telaio.

Risulta, dunque, necessario compiere un'analisi di raggiungibilità per effettivamente ricavare la natura del moto di suddetta manovella.

Per individuare il tipo di quadrilatero valgono le seguenti **regole di Grashof**. In primo luogo si verifica se la somma del lato più lungo  $l_{max}$  e del lato più corto  $l_{min}$  è minore della somma degli altri due  $l_3, l_4$ . Se:

$$l_{max} + l_{min} \leq l_3 + l_4$$

il quadrilatero è detto di Grashof e valgono le seguenti regole:

- il telaio è il più corto  $\Rightarrow$  quadrilatero a doppia manovella
- la biella è il membro più corto  $\Rightarrow$  quadrilatero a doppio bilanciere
- una delle due aste collegate al telaio è il membro più corto  $\Rightarrow$  quadrilatero manovella-bilanciere (l'asta più corta è la manovella)

Se il quadrilatero non è di Grashof:

$$l_{max} + l_{min} > l_3 + l_4$$

allora il quadrilatero è sempre a doppio bilanciere.

In alternativa alle regole di Grashof si può utilizzare un approccio di tipo grafico individuando lo spazio raggiungibile della manovella (**AB**) e del resto del quadrilatero (**BCD**)

Dove la circonferenza è lo spazio di raggiungimento del membro AB e la corona circolare indicata in grigio lo spazio di raggiungimento dei rimanenti due corpi (di raggi  $l_{min}$  e  $l_{max}$ ), le linee di spessore maggiore indicano le intersezioni tra i sue spazi di raggiungimento e suggeriscono tipo di moto che il meccanismo può compiere.

- Le figure 1 e 4 descrivono il moto del membro AB come bilanciere
- Le figure 3 e 5 descrivono il moto del membro AB come manovella
- La figura 2 rappresenta un meccanismo non assemblabile

### 3.2.3 Meccanismo di spinta

#### ANALISI DI POSIZIONE

Procediamo all'analisi di posizione scrivendo le equazioni del poligono di chiusura:

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BC} - \mathbf{DC} - \mathbf{AD} = 0$$

$$r \begin{Bmatrix} \cos q \\ \sin q \end{Bmatrix} + c \begin{Bmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} a \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$r \begin{Bmatrix} \cos q \\ \sin q \end{Bmatrix} + c \begin{Bmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} a \\ d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Data la particolarità dell'analisi di posizione (e visto che dobbiamo ancora formalizzare l'algoritmo risolutivo) procediamo direttamente all'analisi di velocità

#### ANALISI DI VELOCITÀ

L'analisi di velocità per semplicità analitica verrà compiuta dalla derivazione delle equazioni di chiusura sopra riportate, ovvero dal calcolo della matrice Jacobiana alle equazioni lineari associate:

$$\begin{aligned} [J] \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{a} \end{Bmatrix} &= -r \{B\} \dot{q} \\ \begin{bmatrix} -c \sin \vartheta & -1 \\ c \cos \vartheta & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{a} \end{Bmatrix} &= -r \begin{Bmatrix} -\sin q \\ \cos q \end{Bmatrix} \dot{q} \\ \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{a} \end{Bmatrix} &= -\frac{r}{0 - (-c \cos \vartheta)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c \cos \vartheta & -c \sin \vartheta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sin q \\ \cos q \end{Bmatrix} \dot{q} \\ &= -\frac{r}{c \cos \vartheta} \begin{Bmatrix} \cos q \\ c \sin(\vartheta - q) \end{Bmatrix} \dot{q} \end{aligned}$$

Si osserva la presenza di singolarità quando il determinante della matrice jacobiana (derivante dalla sua inversione) è nullo, ovvero:

$$\det[J] = c \cos \vartheta = 0$$

Le configurazioni singolari possibili risultano in corrispondenza di:

- $c = 0$  (per costruzione del meccanismo non è mai verificata);
- $\cos \vartheta = 0 \Rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Per quest'ultima ipotesi verificata il meccanismo di spinta si trova nelle due configurazioni singolari proposte di seguito:

Si tenga sempre a mente che non è detto che la configurazione singolare sia raggiungibile  
A tal proposito bisogna sempre compiere un'analisi di raggiungibilità:

Dove la circonferenza in nero rappresenta lo spazio di raggiungibilità del membro AB, la banda grigia rappresenta lo spazio raggiungibile dagli altri due membri attorno all'asse in cui il pattino è vincolato a traslare

- La figura 1 rappresenta, dunque, un meccanismo non assemblabile
- La figura 2 suggerisce che il membro AB è un bilanciere
- La figura 3 suggerisce che il membro AB è una manovella

A dimostrazione che le **configurazioni singolari dipendono dalla scelta del movente** rieseguiamo l'analisi di posizione e velocità del meccanismo di spinta scegliendo, questa volta, non più  $\vartheta_1$  come movente, bensì la corsa del glifo (precedentemente indicato con il parametro "a").

#### ANALISI DI POSIZIONE ( $q = a$ )

Identificando lo scorrimento a come movente, conseguentemente i cedenti risulteranno essere  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$ ; e le equazioni del poligono di chiusura prenderanno la seguente forma:

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BC} = \mathbf{AD} + \mathbf{DC}$$

$$r \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 \end{Bmatrix} + c \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{Bmatrix} = d \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + q \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$r \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 \end{Bmatrix} + c \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q \\ d \end{Bmatrix}$$

Le due equazioni di chiusura che si ricavano dal poligono scegliendo come movente lo scorrimento del pistone sono, di conseguenza:

$$\begin{cases} f_1 : & r \cos \vartheta_1 + c \cos \vartheta_2 - q = 0 \\ f_2 : & r \sin \vartheta_1 + c \sin \vartheta_2 - d = 0 \end{cases}$$

#### ANALISI DI VELOCITÀ

Per quanto riguarda l'analisi di velocità, procediamo come di consueto ad esprimere, in primo luogo la matrice Jacobiana dei cedenti ( $\vartheta_1, \vartheta_2$ ) e successivamente ad invertirla al fine di trovare una relazione lineare nelle velocità dei cedenti rispetto alla velocità del cedente:

$$[J] = [\nabla f_1 \quad \nabla f_2]^T = \begin{bmatrix} -r \sin \vartheta_1 & -c \sin \vartheta_2 \\ r \cos \vartheta_1 & c \cos \vartheta_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -r \sin \vartheta_1 & -c \sin \vartheta_2 \\ r \cos \vartheta_1 & c \cos \vartheta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{-rc \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + rc \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1} \begin{bmatrix} c \cos \vartheta_2 & c \sin \vartheta_2 \\ -r \cos \vartheta_1 & r \sin \vartheta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{rc \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)} \begin{bmatrix} c \cos \vartheta_2 & c \sin \vartheta_2 \\ -r \cos \vartheta_1 & r \sin \vartheta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Come fatto notare precedentemente le configurazioni singolari di tale meccanismo, scelto "a" come movente, si trovano ponendo il determinante della matrice Jacobiana a zero. In corrispondenza di tali configurazioni singolari il rapporto di velocità tende ad infinito:

$$\det[J] = rc \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) = 0$$

La condizione appena imposta si può realizzare solo nei seguenti casi:

- $r = 0 \vee c = 0$
- $\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) = 0 \Rightarrow \vartheta_2 - \vartheta_1 = k\pi \Rightarrow \vartheta_2 = \vartheta_1 + k\pi$

Whereas le prime sono trascurate per ipotesi di lunghezza non nulla dei rispettivi bilancieri/manovelle la seconda individua due condizioni singolari che sono state proposte di seguito:

### 3.3 Riepilogo analisi cinematica

#### 3.3.1 Analisi di posizione

Riassumendo, l'analisi con il poligono di chiusura, per meccanismi ad 1 G.d.L. con una catena chiusa, consiste nella scrittura di una equazione vettoriale di chiusura di posizione che fornisce due equazioni scalari di chiusura di posizione. Otteniamo un sistema di due equazioni in due incognite:

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{z}_i = 0 \quad \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^m \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_i \\ \sin \vartheta_i \end{Bmatrix} a_i = 0$$

#### 3.3.2 Analisi di velocità

L'equazione di chiusura delle velocità si ottiene per derivazione rispetto al tempo delle equazioni di chiusura di posizione:

$$\sum_{i=1}^m \dot{\mathbf{z}}_i = \sum_{i=1}^m \dot{\vartheta}_i \wedge \mathbf{z}_i + \dot{a}_i \text{ vers } \mathbf{z}_i = 0 \quad \begin{Bmatrix} \frac{df_1}{dt} \\ \frac{df_2}{dt} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^m a_i \dot{\vartheta}_i \begin{Bmatrix} -\sin \vartheta_i \\ \cos \vartheta_i \end{Bmatrix} + \dot{a}_i \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_i \\ \sin \vartheta_i \end{Bmatrix} = 0$$

#### 3.3.3 Analisi di accelerazione

L'equazione di chiusura delle accelerazioni si ottiene per derivazione rispetto al tempo della equazione di chiusura delle velocità:

$$\sum_{i=1}^m \ddot{\mathbf{z}}_i = 0 \quad \sum_{i=1}^m \ddot{\vartheta}_i \wedge \mathbf{z}_i + \ddot{a}_i \text{ vers } \mathbf{z}_i - \dot{\vartheta}_i^2 \mathbf{z}_i + 2\dot{\vartheta}_i \wedge \dot{a}_i \text{ vers } \mathbf{z}_i = 0$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{d^2f_1}{dt^2} \\ \frac{d^2f_2}{dt^2} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^m a_i \ddot{\vartheta}_i \begin{Bmatrix} -\sin \vartheta_i \\ \cos \vartheta_i \end{Bmatrix} + \ddot{a}_i \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_i \\ \sin \vartheta_i \end{Bmatrix} - a_i \dot{\vartheta}_i^2 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_i \\ \sin \vartheta_i \end{Bmatrix} + 2a_i \dot{\vartheta}_i \begin{Bmatrix} -\sin \vartheta_i \\ \cos \vartheta_i \end{Bmatrix} = 0$$

Il termine  $\tau_i$  è detto rapporto di velocità dell'elemento i-esimo rispetto alla coordinata libera:

$$\{\dot{\varphi}\} = \{\tau\} \dot{q}$$

I rapporti di velocità sono uguali alle velocità  $\dot{\varphi}_i$  fornite dalla analisi di velocità ponendo  $\dot{q} = 1$

Il termine  $\frac{d\tau_i}{dq} = \frac{d^2\varphi_i}{dq^2}$  è detto rapporto di accelerazione dell'elemento i-esimo rispetto alla coordinata libera.

$$\{\ddot{\varphi}\} = \{\tau\} \ddot{q} + \left\{ \frac{d\tau}{dq} \right\} \dot{q}^2$$

I rapporti di accelerazione sono uguali alle accelerazioni  $\ddot{\varphi}_i$  fornite dalle analisi di accelerazione ponendo  $\dot{q} = 1, \ddot{q} = 0$ .  $\tau_i$  si definisce rapporto di trasmissione quando  $\dot{\varphi}_i$  e  $\dot{q}$  rappresentano delle rotazioni.

### 3.4 Analisi cinematica dei meccanismo piani con due o più catene cinematiche

L'analisi cinematica con due o più catene chiuse viene condotta generalizzando quella vista per i meccanismi ad 1 G.d.L. con una catena chiusa.

Nel caso di meccanismo con 2 o più catene chiuse si devono individuare i poligoni di chiusura. Questi poligoni devono essere indipendenti; per essere indipendenti ciascun poligono deve contenere qualche membro non contenuto nell'altro poligono.

Se i poligoni sono indipendenti le equazioni scalari ottenute (pari al doppio del numero di poligoni) sono indipendenti.

Nel caso di meccanismi con 2 o più G.d.L. sono necessarie un numero di coordinate generalizzate pari al numero dei G.d.L. del meccanismo. Procediamo, dunque, ad analizzare un sollevatore, ovvero un meccanismo composto da due quadrilateri articolati atto al sollevamento di carichi.

Di fianco ne è proposta una raffigurazione semplificata in cui vengono messi in evidenza:

- un primo corpo ternario evidenziato dalle cerniere A,B e E
- un secondo corpo ternario evidenziato dalle cerniere D,C e G
- un primo quadrilatero formato dalle cerniere A,B,C,D
- un secondo quadrilatero formato dalle cerniere B, E, F, G

Seguendo una trattazione del tutto generale qualora i due corpi ternari sopra indicati fossero collegati direttamente si verrebbe a formare un Esalatero di Watt.

Contrariamente se i due corpi ternari sono connessi tramite un altro membro binario l' Esalatero sarebbe di Stephenson.

In particolare per la catena cinematica sotto esame, l'esalatero è di Stephenson, ma è un esalatero degenere dato che le cerniere C e G coincidono, ovvero formano una cerniera doppia.

In virtù di questa particolarità, il sistema in questione può essere analizzato come un esalatero di Watt dove i due corpi ternari collegati direttamente sono identificati dalle cerniere "A,B ed E" e "B,C e G".

Procediamo, di conseguenza, a scrivere le possibili equazioni di chiusura dei poligoni: tra i diversi percorsi indipendenti che si possono seguire ne possiamo identificare tre:

$$\begin{aligned} A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A \\ ABCDA \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} A \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A \\ AEFGCDA \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} B \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow C \rightarrow B \\ BRFGCB \end{aligned} \tag{3.3}$$

Tuttavia, sommando membro a membro il primo e il terzo percorso si giunge ad una conclusione piuttosto curiosa:

$$\begin{array}{rcl} AB + BC + CD + DA & = & 0 \\ BE + EF + FG + \cancel{GC}^0 + CB & = & 0 \\ \hline AE + EF + FG + \cancel{GC}^0 + (\cancel{BC} + \cancel{CB}) + CD + DA & = & 0 \end{array}$$

Come si può infatti notare la somma membro a membro del primo e del terzo poligono di chiusura yields il secondo poligono di chiusura AEFGCDA, ovvero: delle tre catene cinematiche chiuse, solo due sono **indipendenti**. In altri termini è possibile ricondursi ad un poligono di chiusura dalla combinazione lineare dei rimanenti due poligoni di chiusura (e questo rende tale poligono dipendente dagli altri due).

#### ANALISI DI POSIZIONE

Procediamo dunque all'analisi cinematica del meccanismo (che ricordiamo essere composto da due catene cinematiche) scegliendo due delle equazioni di chiusura del poligono (che sono perciò indipendenti). Per semplificare lo svolgimento analitico sceglieremo i poligoni che contengono meno membri: ABCDA e BEFGCB.

Per l'analisi di posizione del meccanismo in esame si assumerà che:

- I membri AB e BE siano allineati (ovvero  $\vartheta_1 = \vartheta_3$ )
- Il primo estremo che compare nel vettore sia quello da cui si misura l'angolo (e.i. AB: A è l'estremo su cui è misurato il rispettivo angolo  $\vartheta_i$ )
- È nota l'inclinazione del telaio ( $\vartheta_0 = \text{cost.}$ )
- $(\vartheta_1 = \vartheta_3), \vartheta_2, \vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6$  sono di conseguenza variabili

1. Scriviamo le equazioni del poligono di chiusura ABCDA:

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BC} - \mathbf{DC} - \mathbf{AD} = 0$$

$$L_1 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 \end{Bmatrix} + L_2 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{Bmatrix} - L_6 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_6 \\ \sin \vartheta_6 \end{Bmatrix} - L_0 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_0 \\ \sin \vartheta_0 \end{Bmatrix} = 0$$

Di questa prima equazione di chiusura si osserva che:

- La lunghezza dei membri  $L_i$  è nota e costante per costruzione;
- Gli angoli  $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_6$  sono variabili e, dunque, abbiamo ottenuto 2 equazioni in 3 incognite;
- L'angolo  $\vartheta_0$  è noto;

2. Scriviamo le equazioni del poligono di chiusura BEFGCB:

$$\mathbf{BE} + \mathbf{EF} - \mathbf{GF} + \mathbf{GC}^0 - \mathbf{BC} = 0$$

$$L_3 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 \end{Bmatrix} + L_4 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_4 \\ \sin \vartheta_4 \end{Bmatrix} - L_5 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_5 \\ \sin \vartheta_5 \end{Bmatrix} - L_2 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{Bmatrix} = 0$$

Di questa seconda equazione di chiusura si osserva che:

- La lunghezza dei membri  $L_i$  è nota e costante per costruzione;
- Gli angoli  $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_4, \vartheta_6$  sono variabili e, dunque, abbiamo ottenuto 2 equazioni in 4 incognite;

In conclusione, ciò che abbiamo ricavato è un sistema di quattro equazioni in 5 incognite, ovvero:  $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6$  a testimonianza che il meccanismo in questione presenta 1G.d.L.

Possiamo, dunque, giungere ad una soluzione del sistema in forma chiusa scegliendo come movente uno degli angoli variabili: in questo caso si sceglierà l'angolo  $q = \vartheta_{1=3}$ .

Una volta definito il movente sarà possibile ricavare un'espresione di  $\vartheta_2$  e  $\vartheta_6$  in funzione di  $q$  dalle prime due equazioni e, conseguentemente, un'espressione di  $\vartheta_4$  e  $\vartheta_5$  dalle seconde due equazioni.

Questa analisi potrebbe risultare poco utile in campo pratico, ma è fondamentale per il controllo, nel caso del sollevatore, del carico da sollevare rispetto al telaio:

La posizione del punto P si può ricavare non appena si è risolta l'analisi di posizione del quadrilatero, nel seguente modo:

$$\mathbf{AP} = \mathbf{AE} + \mathbf{EP}$$

Nell'ipotesi che EP sia rettilineo/allineato con F è possibile semplificare enormemente il problema poiché l'angolo  $\vartheta_P = \vartheta_4 + \pi$

$$\mathbf{AP} = (L_1 + L_3) \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 \end{Bmatrix} + L'_4 \begin{Bmatrix} \cos (\vartheta_4 + \pi) \\ \sin (\vartheta_4 + \pi) \end{Bmatrix}$$

### 3.4.1 Meccanismi debolmente accoppiati

Consideriamo il meccanismo ad 1 G.d.L. a ginocchiera (che può essere visto come un quadrilatero a cui è stato aggiunto un gruppo composto da una biella e una pattino).

La coordinata generalizzata è la rotazione  $q$  della manovella del quadrilatero. Questo meccanismo, avente come membro motore proprio la manovella 1 è frequentemente usato nelle presse. Infatti è un moltiplicatore di forza poiché con una piccola coppia applicata al membro 1 permette di esercitare una elevata forza tramite il pattino.

#### ANALISI DI POSIZIONE

Data  $q$  determinare le rotazioni di 2,3,4 e la traslazione del pattino  $a_5$ . Individuiamo i poligoni di chiusura, le cui equazioni vettoriali risultano essere:

$$\begin{cases} \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_6 = 0 \\ \mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_5 + \mathbf{z}_3 = 0 \end{cases}$$

Tali equazioni espresse in forma scalare prendono la seguente forma:

$$a_1 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 \end{Bmatrix} + a_2 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{Bmatrix} - a_3 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_3 \\ \sin \vartheta_3 \end{Bmatrix} - a_6 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_6 \\ \sin \vartheta_6 \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.4)$$

$$a_4 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_4 \\ \sin \vartheta_4 \end{Bmatrix} - a_5 \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} + a_3 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_3 \\ \sin \vartheta_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.5)$$

Poiché, come già accennato precedentemente,  $q = \vartheta_1$  è il movente e le lunghezze dei membri  $a_i$  (con  $i \neq 5$ ) sono noti le incognite del sistema di equazioni, ovvero i cedenti, risulteranno essere  $\vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$  (si noti che l'inclinazione del telaio  $\vartheta_6$  e l'angolo  $\vartheta_5$  sono costanti e quindi noti).

Il sistema di equazioni si può dunque riscrivere nel seguente modo:

$$\begin{cases} a_2 \cos \vartheta_2 - a_3 \cos \vartheta_3 - a_6 \cos \vartheta_6 = -a_1 \cos q \\ a_2 \sin \vartheta_2 - a_3 \sin \vartheta_3 - a_6 \sin \vartheta_6 = -a_1 \sin q \end{cases} \quad \begin{cases} a_4 \cos \vartheta_4 + a_3 \cos \vartheta_3 = 0 \\ a_4 \sin \vartheta_4 + a_5 + a_3 \sin \vartheta_3 = 0 \end{cases}$$

Ovvero un sistema di 4 funzioni  $f_i$  di  $(\vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4, a_5, q)$ :

$$\begin{cases} f_1(\vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4, a_5, q) = 0 \\ f_2(\vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4, a_5, q) = 0 \\ f_3(\vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4, a_5, q) = 0 \\ f_4(\vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4, a_5, q) = 0 \end{cases}$$

Osservando i due sistemi di equazioni si può concludere che le prime due equazioni sono in realtà funzione di due incognite  $(\vartheta_2, \vartheta_3)$ .

Si può dunque risolvere tale sistema di 2 equazioni in due incognite, ottenere un'espressione di  $\vartheta_2, \vartheta_3$ , sostituirla alla seconda coppia di equazioni per poi risolvere il secondo sistema e ottenere le rimanenti incognite  $\vartheta_4, a_5$ .

Dato che le equazioni in esame non sono lineari, bensì contengono funzioni trigonometriche, a nostro soccorso giungono gli algoritmi risolutivi visti nel corso di Calcolo numerico, come, a titolo di esempio, l'algoritmo di Newton-Raphson.

#### ANALISI DI VELOCITÀ

L'analisi di velocità si può compiere derivando rispetto alla variabile temporale le funzioni implicite ( $f_i$ ) dei cedenti e del movente che abbiamo introdotto nell'analisi di posizione.

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_2} \dot{\vartheta}_2 + \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_3} \dot{\vartheta}_3 + \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_4} \dot{\vartheta}_4 + \frac{\partial f_1}{\partial a_5} \dot{a}_5 + \frac{\partial f_1}{\partial q} \dot{q} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_2} \dot{\vartheta}_2 + \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_3} \dot{\vartheta}_3 + \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_4} \dot{\vartheta}_4 + \frac{\partial f_2}{\partial a_5} \dot{a}_5 + \frac{\partial f_2}{\partial q} \dot{q} = 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial \vartheta_2} \dot{\vartheta}_2 + \frac{\partial f_3}{\partial \vartheta_3} \dot{\vartheta}_3 + \frac{\partial f_3}{\partial \vartheta_4} \dot{\vartheta}_4 + \frac{\partial f_3}{\partial a_5} \dot{a}_5 + \frac{\partial f_3}{\partial q} \dot{q} = 0 \\ \frac{\partial f_4}{\partial \vartheta_2} \dot{\vartheta}_2 + \frac{\partial f_4}{\partial \vartheta_3} \dot{\vartheta}_3 + \frac{\partial f_4}{\partial \vartheta_4} \dot{\vartheta}_4 + \frac{\partial f_4}{\partial a_5} \dot{a}_5 + \frac{\partial f_4}{\partial q} \dot{q} = 0 \end{cases}$$

Espressa in forma matriciale:

$$[J] \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_2 \\ \dot{\vartheta}_3 \\ \dot{\vartheta}_4 \\ \dot{a}_5 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} \\ \frac{\partial f_3}{\partial q} \\ \frac{\partial f_4}{\partial q} \end{Bmatrix} \dot{q}$$

$$\begin{bmatrix} -a_2 \sin \vartheta_2 & a_3 \sin \vartheta_3 & 0 & 0 \\ a_2 \cos \vartheta_2 & a_3 \cos \vartheta_3 & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 \sin \vartheta_3 & -a_4 \sin \vartheta_4 & 0 \\ 0 & a_3 \cos \vartheta_3 & a_4 \cos \vartheta_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_2 \\ \dot{\vartheta}_3 \\ \dot{\vartheta}_4 \\ \dot{a}_5 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} -a_1 \sin q \\ a_1 \cos q \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dot{q}$$

In conclusione, dall'analisi di velocità del meccanismo debolmente accoppiato si deduce che:

- Le prime due equazioni non dipendono dalla velocità dei cedenti  $\vartheta_4, a_5$  a riconferma che il meccanismo è debolmente accoppiato
- Le seconde due equazioni non sono sensibili a  $\vartheta_2$

Invertendo, dunque, la matrice Jacobiana  $[J]$  si può giungere ad una espressione della velocità dei cedenti come funzione della posizione dei cedenti, della posizione del movente e della velocità del movente.

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_2 \\ \dot{\vartheta}_3 \\ \dot{\vartheta}_4 \\ \dot{a}_5 \end{Bmatrix}}_{\{\dot{\varphi}\}} = - [J]^{-1} \underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} \\ \frac{\partial f_3}{\partial q} \\ \frac{\partial f_4}{\partial q} \end{Bmatrix}}_{\{\tau\}} \dot{q}$$

$$\{\dot{\varphi}\} = \{\tau\} \dot{q}$$

Dove la matrice che moltiplica la velocità del movente è la matrice dei rapporti di velocità.

#### ANALISI DI ACCELERAZIONE

Derivando la forma matriciale compatta ricavata a conclusione dell'analisi di velocità si può ottenere una rappresentazione generale delle accelerazione dei cedenti:

$$\{\ddot{\varphi}\} = \{\tau\} \ddot{q} + \left\{ \frac{\partial \tau}{\partial q} \right\} \dot{q}^2$$

Noto che

$$\{\tau\} = - [J]^{-1} \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial q} \right\}$$

$$[J] \{\tau\} = - \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial q} \right\}$$

La derivata parziale del vettore dei rapporti di velocità rispetto al movente si può ottenere nel seguente modo:

$$\left[ \frac{\partial J}{\partial q} \right] \{\tau\} + [J] \left\{ \frac{\partial \tau}{\partial q} \right\} = - \left\{ \frac{\delta^2 f_i}{\delta q^2} \right\}$$

$$\left\{ \frac{\partial \tau}{\partial q} \right\} = - [J]^{-1} \left( \left[ \frac{\partial J}{\partial q} \right] \{\tau\} + \left\{ \frac{\delta^2 f_i}{\delta q^2} \right\} \right)$$

### 3.4.2 Meccanismi fortemente accoppiati

Consideriamo il meccanismo a rapido ritorno (Glifo oscillante) a 1 G.d.L. illustrato in figura. In questo caso il meccanismo non è schematizzabile come un meccanismo a 1 G.d.L. con una sola catena chiusa e un gruppo biella-pattino. Assumiamo come coordinata generalizzata la rotazione della manovella 1.

#### ANALISI DI POSIZIONE

Dato il valore della coordinata libera determinare la rotazione del glifo e le traslazioni dei 3 pattini. Consideriamo le equazioni vettoriali di chiusura dei poligoni:

$$\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_6 = 0$$

$$\mathbf{z}_6 + \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4 + \mathbf{z}_5 = 0$$

I due poligoni scelti sono indipendenti infatti ciascun poligono include vettori non appartenenti all'altro. In termini scalari si ottengono 4 equazioni indipendenti:

$$a_1 \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} + a_2 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{Bmatrix} - a_6 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_6 \\ \sin \vartheta_6 \end{Bmatrix} = 0$$

$$a_6 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_6 \\ \sin \vartheta_6 \end{Bmatrix} + a_3 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_3 \\ \sin \vartheta_3 \end{Bmatrix} + a_4 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_4 \\ \sin \vartheta_4 \end{Bmatrix} + a_5 \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = 0$$

Ricordando che abbiamo assunto come coordinata libera  $q = \vartheta_6$  e che  $a_3 = b - a_2$  e  $\vartheta_3 = \vartheta_2$ , si ottiene:

$$\begin{cases} a_2 \cos \vartheta_2 = a_6 \cos q \\ -a_1 + a_2 \sin \vartheta_2 = a_6 \sin q \\ (b - a_2) \cos \vartheta_2 + a_4 \cos \vartheta_4 = a_6 \cos q \\ (b - a_2) \sin \vartheta_2 + a_4 \sin \vartheta_4 - a_5 = -a_6 \sin q \end{cases}$$

Le incognite, nonché i cedenti, sono;  $a_1, a_2, a_4, \vartheta_2$ . La matrice Jacobiana è:

$$[J] = \begin{bmatrix} 0 & \cos \vartheta_2 & 0 & -a_2 \sin \vartheta_2 \\ -1 & \sin \vartheta_2 & 0 & a_2 \cos \vartheta_2 \\ 0 & -\cos \vartheta_2 & \cos \vartheta_4 & -(b - a_2) \sin \vartheta_2 \\ 0 & -\sin \vartheta_2 & \sin \vartheta_4 & (b - a_2) \cos \vartheta_2 \end{bmatrix}$$

Dalla forma della matrice Jacobiana notiamo che non si possono ricavare due incognite indipendentemente dalle altre due usando due sole equazioni, e poi una volta note due incognite ricavare le restanti tramite le altre due equazioni.

Quindi il meccanismo è **fortemente accoppiato**, come la nostra analisi preliminare ci aveva fatto intuire (non avevamo trovato un meccanismo a 1 G.d.L. con una catena chiusa, membro motore e telaio sommato ad un altro meccanismo).

Vale la pena osservare che anche se ordiniamo in maniera diversa le incognite il sistema non diventa separabile. Per quanto concerne l'analisi di velocità e di accelerazione si deve procedere nella solita maniera.

### 3.4.3 Meccanismi a più gradi di libertà

Introduciamo lo studio con un esempio: il pentalatero composto da 5 membri di cui uno fissato a telaio con le due manovelle fissate a telaio considerate come membri moventi.

#### ANALISI DI POSIZIONE

Dati i valori delle coordinate generalizzate determinare i valori delle inclinazione delle altre due aste mobili. Il poligono di chiusura è il seguente:

$$\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_5 = 0$$

Le corrispondenti equazioni scalari sono:

$$\begin{cases} f_1 \\ f_2 \end{cases} = a_1 \begin{cases} \cos q_1 \\ \sin q_1 \end{cases} + a_2 \begin{cases} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{cases} - a_3 \begin{cases} \cos q_2 \\ \sin q_2 \end{cases} - a_4 \begin{cases} \cos \vartheta_4 \\ \sin \vartheta_4 \end{cases} - a_5 \begin{cases} \cos \vartheta_5 \\ \sin \vartheta_5 \end{cases} = 0$$

Se sono assegnate  $q_1$  e  $q_2$  abbiamo due equazioni non lineari nelle due incognite  $\vartheta_2$  e  $\vartheta_4$ .

La matrice Jacobiana risulta:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} \\ \frac{\partial f}{\partial q_1} & \frac{\partial f}{\partial q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_2} \\ \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_4} & \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2 \sin \vartheta_2 & a_4 \sin \vartheta_4 \\ a_2 \cos \vartheta_2 & -a_4 \cos \vartheta_4 \end{bmatrix}$$

L'analisi di posizione può essere risolta numericamente

#### ANALISI DI VELOCITÀ

Le velocità si possono ottenere derivando le equazioni scalari, in forma matriciale si ha:

$$\begin{bmatrix} -a_2 \sin \vartheta_2 & a_4 \sin \vartheta_4 \\ a_2 \cos \vartheta_2 & -a_4 \cos \vartheta_4 \end{bmatrix} \begin{cases} \dot{\vartheta}_2 \\ \dot{\vartheta}_4 \end{cases} = - \begin{bmatrix} -a_1 \sin q_1 & a_3 \sin q_2 \\ a_1 \cos q_1 & -a_3 \cos q_2 \end{bmatrix} \begin{cases} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{cases}$$

La matrice al primo membro è la matrice Jacobiana del sistema; a secondo membro non abbiamo il vettore contenente le derivate delle equazioni rispetto alla coordinata generalizzata moltiplicata per le velocità della coordinata generalizzata, come nel caso dei meccanismo a un grado di libertà, ma abbiamo la matrice delle derivate parziali delle equazioni scalari di chiusura rispetto alle coordinate generalizzate, moltiplicate per il vettore delle velocità delle coordinate generalizzate.

$$[J] \begin{cases} \dot{\vartheta}_2 \\ \dot{\vartheta}_4 \end{cases} = - [B] \begin{cases} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{cases} \quad ; \quad [B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} \\ \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} \end{bmatrix}$$

Per calcolare le incognite velocità si moltiplica ambo i membri per l'inversa della matrice Jacobiana e si ottiene:

$$\{\dot{\varphi}\} = [J]^{-1} [B] \{\dot{q}\} = [\tau] \{\dot{q}\}$$

dove  $[\tau]$  indica la matrice dei rapporti di velocità fornita dal prodotto  $-[J]^{-1} [B]$ .

Pertanto possiamo scrivere in forma matriciale:

$$\begin{cases} \dot{\vartheta}_2 \\ \dot{\vartheta}_4 \end{cases} = \begin{bmatrix} \tau_{\vartheta_2, q_1} & \tau_{\vartheta_2, q_2} \\ \tau_{\vartheta_4, q_1} & \tau_{\vartheta_4, q_2} \end{bmatrix} \begin{cases} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{cases}$$

In questo caso i rapporti di velocità dipendono sia da  $\dot{q}_1$  che da  $\dot{q}_2$ :

$$\begin{aligned} \tau_{\vartheta_2, q_1} &= \frac{a_1 \sin (q_1 - \vartheta_4)}{a_2 \sin (\vartheta_4 - \vartheta_2)} & \tau_{\vartheta_2, q_2} &= \frac{a_3 \sin (\vartheta_4 - q_2)}{a_2 \sin (\vartheta_4 - \vartheta_2)} \\ \tau_{\vartheta_4, q_1} &= \frac{a_1 \sin (q_1 - \vartheta_2)}{a_4 \sin (\vartheta_4 - \vartheta_2)} & \tau_{\vartheta_4, q_2} &= \frac{a_3 \sin (\vartheta_2 - q_2)}{a_2 \sin (\vartheta_4 - \vartheta_2)} \end{aligned}$$

Da osservare che in questo caso si ha una matrice di rapporti di velocità, mentre nel caso di meccanismi a 1 G.d.L. avevamo un vettore di rapporti di velocità.

Il fatto che la matrice dei rapporti di velocità sia quadrata è una conseguenza del fatto che si ha una sola catena chiusa (due equazioni scalari) e due G.d.L. (due coordinate generalizzate), in genere è rettangolare.

#### ANALISI DI ACCELERAZIONE

Anche in questo caso sono possibili due approcci: derivazione rispetto al tempo delle equazioni scalari di chiusura delle velocità, ottenendo le equazioni scalari di chiusura delle accelerazioni, oppure la derivazione della equazione contenente i rapporti di velocità.

Secondo la seconda strada si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\vartheta}_2 \\ \ddot{\vartheta}_4 \end{Bmatrix} = [\tau] \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \left[ \frac{\partial \tau}{\partial q_1} \right] \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} \dot{q}_1 + \left[ \frac{\partial \tau}{\partial q_2} \right] \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} \dot{q}_2$$

### 3.5 Meccanismi con elementi dotati di moto di puro rotolamento

In molte applicazioni abbiamo delle ruote che rotolano senza strisciare su una superficie.

Vediamo come si analizza questo problema dal punto di vista cinematico.

Consideriamo il caso di una ruota che si muove in contatto con una rotaia senza potersi staccare.

In assenza di attrito il sistema ha 2 G.d.L., uno associato alla traslazione  $x_C$  del centro della ruota e uno associato alla rotazione  $\vartheta$  (la coppia è superiore).

In presenza di attrito possono verificarsi due casi in relazione alle forze applicate dall'esterno della ruota ( $F$  e  $M$ ):

- La rotaia riesce a sviluppare una forza di attrito tale da opporsi allo slittamento tra ruota e rotaia;
- La rotaia non riesce a sviluppare una forza di attrito tale da opporsi allo slittamento.

Nel primo caso abbiamo il moto di puro rotolamento e la traslazione e la rotazione non sono più indipendenti (*quindi non posso avere due coordinate generalizzate*)

Volendo rappresentare solo l'effetto della rotazione, dovremmo definire un sistema di riferimento mobile nel centro C e scrivere la formula fondamentale della cinematica.

$$\mathbf{v} = \underline{\omega} \wedge \underline{\varrho}$$

La velocità lungo un diametro verticale della ruota (*nonché la velocità relativa*) è ottenibile tramite la relazione sopra descritta

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{\vartheta} \mathbf{k} \wedge \varrho \mathbf{j} = -\dot{\vartheta} \varrho \mathbf{i} \\ (\mathbf{k} \wedge \mathbf{j}) &= -\mathbf{i} \end{aligned}$$

Analogamente per la velocità di rotazione possiamo analizzare separatamente l'effetto della velocità di trascinamento  $x'_C$ .

Lungo un diametro tale velocità risulta essere una costante.

Tutti i punti dello spazio mobile hanno, infatti, stessa velocità  $x'_C$  che verrà assunta negativa.

Definita, dunque, la velocità di trascinamento di ciascun punto sarà possibile sommarla ad ogni velocità relativa degli stessi per ottenere quella assoluta

Dalla loro somma/combinazione si ottiene la seguente rappresentazione schematica/vettoriale delle velocità:

La rappresentazione grafica proposta è rappresentativa di un caso del tutto generale, ovvero di una condizione di strisciamento.

Imponendo alcune condizioni/accorgimenti al sistema in esame è possibile ricondursi ad un moto della ruota in questione, di puro rotolamento.

L'ipotesi da imporre per ricondursi ad una condizione di puro rotolamento è che la velocità del punto P, ovvero il punto di contatto tra la ruota e la superficie sia nulla (nel sistema di riferimento assoluto).

Noto che, per il punto P:

$$\mathbf{v} = -\varrho \dot{\vartheta} \mathbf{i} = -(-R) \dot{\vartheta} \mathbf{i} = R \dot{\vartheta} \mathbf{i}$$

In quanto il sistema di riferimento scelto aveva origine nel centro della ruota e versore  $\mathbf{j}$  positivo nel verso verticale, il valore di  $\varrho$  sarà negativo e pari al raggio R della ruota stessa

La velocità del punto P nel sistema di riferimento assoluto, sarà dunque:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -\varrho \dot{\vartheta} + \dot{x}_C = 0 \\ &+ R \dot{\vartheta} + \dot{x}_c = 0 \\ \dot{x}_C &= -R \dot{\vartheta} \end{aligned}$$

Integrando l'espressione nella variabile temporale, si ottiene:

$$x_C = -R \vartheta + \text{cost.}$$

La relazione cinematica appena ottenuta è l'equazione di vincolo in quanto esprime il legame che deve esserci tra "x" e " $\vartheta$ " nel caso di moto di puro rotolamento. Dato questo legame una sola coordinata è sufficiente a descrivere il sistema che quindi ha un solo G.d.L.

Se la forza di attrito sviluppata in P non riesce ad opporsi allo slittamento la ruota slitterà e quindi diventerà un sistema a due G.d.L. Si deve perciò verificare se la rotaia riesce a sviluppare la forza di attrito necessaria ad evitare lo strisciamento. Per fare questo si devono scrivere le equazioni della dinamica della ruota e si devono conoscere le caratteristiche di attrito dei materiali a contatto (*non è quindi un problema cinematico!*).

Inizialmente si ipotizza che la superficie sia perfettamente ruvida, cioè che in qualsiasi condizione dinamica sia in grado di impedire lo slittamento. In base a questa ipotesi si determina il moto del sistema e il valore della forza di attrito che deve essere esercitata nel punto P per impedire lo slittamento. Si abbandona poi l'ipotesi di superficie perfettamente ruvida e si verifica se essa è realmente in grado di esercitare la forza di attrito necessaria per impedire lo strisciamento.

### 3.5.1 Esempio

Consideriamo il seguente esempio composto da una biella connessa ad una ruota appoggiata su una superficie perfettamente ruvida. Il sistema ha 1 G.d.L..

Come coordinata generalizzata si sceglie la distanza q tra i perni A e B.

L'equazione vettoriale di chiusura è:

$$\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3 = 0$$

Che nella relativa forma scalare corrisponde a:

$$\begin{aligned} q \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 \end{Bmatrix} - a_2 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} a_3 \cos \vartheta_3 \\ a_3 \sin \vartheta_3 \end{Bmatrix} &= 0 \\ q \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 \end{Bmatrix} - a_2 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \end{Bmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Poiché la coordinata ( $y_C$ ) del centro della ruota è nota in virtù del vincolo con il terreno, la coordinata generalizzata q è nota in quanto tale, e la distanza ( $a_2$ ) è nota per costruzione del meccanismo. Possiamo identificare tre incognite: ( $x_C, \vartheta_1, \vartheta_2$ ).

Abbiamo ottenuto, di conseguenza, due equazioni in tre incognite, e il sistema di equazioni, così scritto non prevere soluzioni in forma chiusa.

Imponiamo, dunque, la condizione di moto di puro rotolamento: ( $x_C = -r \vartheta_2 + cost.$ ), dove la costante sarà il valore della coordinata  $x_C = x_{C0}$  quando  $\vartheta_2 = 0$ .

Così facendo abbiamo imposto un'equazione di vincolo che lega due delle incognite del problema e ci riconduce ad un sistema di due equazioni in due incognite.

Vale la pena mettere in luce che questa relazione esprime il fatto che il punto P di contatto si sposta della stessa quantità lungo la rotaia e lungo la periferia della ruota e ciò significa non strisciamento.

È da osservare che in questo caso per risolvere il problema bisogna conoscere la configurazione iniziale. Infatti ad un valore di  $q$  corrispondono infiniti modi di assemblaggio del meccanismo, mentre negli usuali meccanismi articolati possono esserci al più alcuni modi di assemblaggio che devono essere comunque specificati prima dell'inizio dell'analisi. In definitiva il sistema è rappresentato da 3 equazioni non lineari in tre incognite che può essere risolto con i soliti metodi numerici. Per quanto riguarda le analisi di velocità e di accelerazione si devono derivare assieme le equazioni scalari di chiusura e l'equazione che esprime il vincolo.

### 3.5.2 Esercizio N.1

Come è possibile notare dalle raffigurazioni proposte il meccanismo in questione risulta essere la composizione di due catene cinematiche chiuse, che potrebbero essere studiate separatamente, se il meccanismo è debolmente accoppiato.

Scrivendo l'equazione di chiusura del poligono della prima catena cinematica si osserva che:

$$\begin{aligned} \mathbf{DO} + \mathbf{OA} - \mathbf{BA} - \mathbf{DB} &= 0 \\ l \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + l \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{Bmatrix} - l \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 \end{Bmatrix} - q \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

“q” è noto in quanto coordinata generalizzata e che quindi le incognite sono  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$ . È, dunque, possibile risolvere separatamente questo primo sistema di due equazioni in due incognite, in quanto il meccanismo è debolmente accoppiato.

A tal scopo svolgiamo separatamente le analisi di posizione e velocità dei due poligoni di chiusura delle catene cinematiche di cui è composto il meccanismo:

1. Procediamo dunque ad esplicitare le due funzioni del primo poligono di chiusura:

$$\begin{cases} f_1 : l + l \cos \vartheta_2 - l \cos \vartheta_1 = 0 \\ f_2 : l \sin \vartheta_2 - l \sin \vartheta_1 + q = 0 \end{cases}$$

Tramite tali equazioni possiamo dunque calcolare la matrice Jacobiana e trovare le configurazioni singolari di questa parte di meccanismo.

$$[J_1] = \begin{bmatrix} l \sin \vartheta_1 & -l \sin \vartheta_2 \\ -l \cos \vartheta_1 & l \cos \vartheta_2 \end{bmatrix} \quad [J_1]^{-1} = \frac{1}{l^2 (\sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1)} \begin{bmatrix} l \cos \vartheta_2 & l \sin \vartheta_2 \\ l \cos \vartheta_1 & l \sin \vartheta_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [J_1] \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \dot{q} \\ \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \end{Bmatrix} &= \frac{1}{l^2 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)} \begin{bmatrix} l \cos \vartheta_2 & l \sin \vartheta_2 \\ l \cos \vartheta_1 & l \sin \vartheta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \dot{q} \\ &= \frac{1}{l \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)} \begin{Bmatrix} -\sin \vartheta_2 \\ -\sin \vartheta_1 \end{Bmatrix} \dot{q} \end{aligned}$$

Dove:

$$\dot{\vartheta}_1 = -\frac{\sin \vartheta_2}{l \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)} \dot{q} \quad ; \quad \dot{\vartheta}_2 = -\frac{\sin \vartheta_1}{l \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)} \dot{q}$$

Le configurazioni singolari si ottengono ponendo il determinante della matrice Jacobiana pari a zero e corrispondono a:

$$l = 0 \quad ; \quad \vartheta_1 = \vartheta_2 + k\pi \quad ; \quad \vartheta_1 = \vartheta_2$$

Sostituendo le 2 condizioni singolari sugli angoli si ottiene che:

$$\begin{cases} l + l \cos \vartheta + l \cos \vartheta = 0 \\ l \sin \vartheta + l \sin \vartheta = -q \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \cos \vartheta = -1 \\ 2l \sin \vartheta = -q \end{cases} \quad \begin{cases} \vartheta = \frac{2\pi}{3} \vee \frac{4\pi}{3} \\ q = \mp l\sqrt{3} \end{cases}$$

In conclusione i rapporti di velocità per questo poligono di chiusura saranno:

$$\tau_{\vartheta_1, q} = \frac{\sin \vartheta_2}{l \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)} \quad ; \quad \tau_{\vartheta_2, q} = \frac{\sin \vartheta_1}{l \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)}$$

2. Proseguiamo la trattazione ripetendo i passaggi precedenti anche per il secondo poligono di chiusura:

$$l \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{Bmatrix} + l \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_3 \\ \sin \vartheta_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ y_C \end{Bmatrix} = 0$$

Tramite tali equazioni è possibile ricondursi alla matrice Jacobiana:

$$[J_2] = \begin{bmatrix} -l \sin \vartheta_3 & 0 \\ l \cos \vartheta_3 & -1 \end{bmatrix} \quad [J_2]^{-1} = \frac{1}{l \sin \vartheta_3} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -l \cos \vartheta_3 & -l \sin \vartheta_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [J_2] \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_3 \\ y_C \end{Bmatrix} &= -l \begin{Bmatrix} -\sin \vartheta_2 \\ \cos \vartheta_2 \end{Bmatrix} \dot{\vartheta}_2 \\ \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_3 \\ y_C \end{Bmatrix} &= -\frac{l}{\sin \vartheta_3} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -l \cos \vartheta_3 & -l \sin \vartheta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sin \vartheta_2 \\ \cos \vartheta_2 \end{Bmatrix} \dot{\vartheta}_2 \\ &= -\frac{1}{\sin \vartheta_3} \begin{Bmatrix} \sin \vartheta_2 \\ l \cos \vartheta_3 \sin \vartheta_2 - l \sin \vartheta_3 \cos \vartheta_2 \end{Bmatrix} \dot{\vartheta}_2 \end{aligned}$$

Dove:

$$\dot{\vartheta}_3 = -\frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_3} \dot{\vartheta}_2 \quad ; \quad y_C = -\frac{l \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3)}{\sin \vartheta_3} \dot{\vartheta}_2$$

Le configurazioni singolari di questo secondo poligono di chiusura si riducono a:

$$\det[J_2] = 0 \quad \Rightarrow \quad l \sin \vartheta_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} l = 0 \\ \vartheta_3 = k\pi \end{cases}$$

Dando un'occhiata al meccanismo composto da queste configurazioni singolari si osserva che:

Per  $\vartheta_3 = 0$ ,  $\vartheta_2 = \pi$  e le equazioni di chiusura del primo poligono si riducono a:

$$\begin{cases} l + l \cos \pi - l \cos \vartheta_1 = 0 \\ l \sin \pi - l \sin \vartheta_1 = -q \end{cases} \quad \vartheta_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \begin{cases} \vartheta_1 = \frac{\pi}{2} \& l = q \\ \vartheta_1 = \frac{3\pi}{2} \& l = -q \end{cases}$$

Per concludere esprimiamo i rapporti di velocità tra  $\vartheta_3$ ,  $\vartheta_2$  e  $y_C$ ,  $\vartheta_2$  rispetto a “q”:

$$\begin{cases} \dot{\vartheta}_3 = \tau_{\vartheta_3, \vartheta_2} \dot{\vartheta}_2 = \tau_{\vartheta_3, \vartheta_2} \tau_{\vartheta_2, q} \dot{q} \\ \dot{y}_C = \tau_{y_C, \vartheta_2} \dot{\vartheta}_2 = \tau_{y_C, \vartheta_2} \tau_{y_C, q} \dot{q} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\vartheta}_3 = -\frac{\sin \vartheta_1}{\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)} \left( -\frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_3} \right) \dot{q} \\ \dot{y}_C = -\frac{\sin \vartheta_1}{\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)} \left( -\frac{l \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3)}{\sin \vartheta_3} \right) \dot{q} \end{cases}$$

### 3.6 Polo di istantanea rotazione

Consideriamo un membro rigido in moto piano al quale associamo un S.d.R.

Nel moto piano, che non sia una pura traslazione, in ogni istante esiste uno ed un solo punto solidale al sistema rigido avente velocità nulla. Da osservare che il punto può essere anche al di fuori del corpo rigido. Per trovare questo punto consideriamo la formula fondamentale della cinematica dei corpi rigidi nella forma scalare:

$$\begin{Bmatrix} f \dot{x}_P \\ f \dot{y}_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \dot{x}_{O_m} \\ f \dot{y}_{O_m} \end{Bmatrix} + \dot{\alpha} \begin{Bmatrix} f \\ m \end{Bmatrix} [R] \begin{Bmatrix} m \\ -y_P \\ x_P \end{Bmatrix}$$

Imponiamo a P una velocità nulla e cerchiamo le due coordinate di P=C che soddisfano la relazione:

$$\begin{Bmatrix} f \dot{x}_C \\ f \dot{y}_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \dot{x}_{O_m} \\ f \dot{y}_{O_m} \end{Bmatrix} + \dot{\alpha} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m \\ -y_C \\ x_C \end{Bmatrix}$$

da cui:

$$\begin{Bmatrix} m \\ -y_C \\ x_C \end{Bmatrix} = -\frac{1}{\dot{\alpha}} \begin{Bmatrix} f \\ m \end{Bmatrix} [R] \begin{Bmatrix} f \dot{x}_{O_m} \\ f \dot{y}_{O_m} \end{Bmatrix}$$

ossia:

$$m x_C = \frac{f x_{O_m}}{\dot{\alpha}} \sin(\alpha) - \frac{f y_{O_m}}{\dot{\alpha}} \cos(\alpha) \quad ; \quad m y_C = \frac{f x_{O_m}}{\dot{\alpha}} \cos(\alpha) + \frac{f y_{O_m}}{\dot{\alpha}} \sin(\alpha)$$

Il punto avente coordinate  $m x_C$ ,  $m y_C$  rispetto al sistema mobile viene chiamato centro di istantanea rotazione perché nell'istante considerato tutti i punti del corpo rigido ruotano attorno ad esso.

Le coordinate del centro di istantanea rotazione rispetto al sistema fisso  $f$  si ottengono dalla trasformazione:

$$\begin{Bmatrix} f \\ y_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ y_{O_m} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_C \\ y_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ y_{O_m} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{f x_{O_m}}{\dot{\alpha}} \sin(\alpha) - \frac{f y_{O_m}}{\dot{\alpha}} \cos(\alpha) \\ \frac{f x_{O_m}}{\dot{\alpha}} \cos(\alpha) + \frac{f y_{O_m}}{\dot{\alpha}} \sin(\alpha) \end{Bmatrix}$$

In definitiva si ottiene:

$$f x_C = f x_{O_m} - \frac{f y_{O_m}}{\dot{\alpha}} \quad ; \quad f y_C = f y_{O_m} + \frac{f x_{O_m}}{\dot{\alpha}}$$

Le formule che ci danno le coordinate del centro di istantanea rotazione mostrano che in generale esso si sposta sia nel sistema di riferimento mobile che nel sistema fisso. Il centro di istantanea rotazione non varia solo se il corpo ruota intorno ad un punto fisso.

Una volta noto il centro di istantanea rotazione si possono calcolare, in quell'istante, le velocità di tutti i punti del corpo rigido piano tramite la formula fondamentale dei corpi rigidi:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_C + \dot{\vartheta} \wedge \mathbf{CP}$$

Poiché  $\mathbf{v}_C$  è nulla si ottiene in forma scalare:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{y}_P \end{Bmatrix} = \dot{\vartheta} \begin{Bmatrix} -CP_y \\ CP_x \end{Bmatrix}$$

Se invece in un istante la velocità angolare è nulla, tutti i punti del corpo rigido hanno la stessa velocità ed abbiamo quindi un moto traslatorio.

In questo caso non esiste un centro di istantanea rotazione, infatti le due formule che permettono di calcolare il centro di istantanea rotazione hanno al denominatore la velocità angolare; se questa tende a zero, le coordinate del centro tendono all'infinito.

Possiamo ora enunciare il **teorema di Chasles**: le velocità dei punti di un corpo rigido nel moto piano o sono ortogonali alla congiungente i punti con il centro di istantanea rotazione (moto rotatorio) o sono parallele (moto traslatorio).

- **Esempio relativo ad un quadrilatero piano**

Vogliamo calcolare il centro di istantanea rotazione della biella 3 (non ruota attorno ad un asse fisso).

La velocità dei punti B e E sono già note.

B, che appartiene anche al segmento 2, ha velocità ortogonale al segmento AB mentre E, che appartiene al segmento 4, ha velocità ortogonale al segmento DE.

Ma la velocità di B, pensando B appartenente al segmento 3, deve essere, per il teorema di Chasles, ortogonale alla congiungente di B con il centro di istantanea rotazione di 3.

Per gli stessi motivi la velocità di E è ortogonale alla congiungente di E con il centro di istantanea rotazione di 3.

Perciò il centro di istantanea rotazione di 3 si trova all'intersezione tra la normale a  $\mathbf{v}_B$ , condotta per B e la normale a  $\mathbf{v}_E$  condotta per E.

Tale centro, che è il centro di rotazione di 3 rispetto al segmento 1 (telaio) lo chiamiamo  $C_{31}$ .

Molto spesso non è sufficiente conoscere il centro di istantanea rotazione di un corpo rigido nel suo moto assoluto rispetto ad un sistema fisso, ma si deve conoscere il centro di rotazione di un corpo rigido nel suo moto rispetto ad un altro corpo rigido in movimento.

Nel caso del quadrilatero ad esempio, si vuole conoscere il centro di istantanea rotazione di 4 rispetto a 2. Per calcolarlo possiamo pensare di sbloccare il membro 1 e di fissare a telaio il membro 2 e applicare la costruzione fatta precedentemente; in tal modo otteniamo il punto  $C_{42}$ , centro di istantanea rotazione di 4 rispetto a 2.

Gli altri centri di rotazione ( $C_{12}, C_{23}, C_{34}, C_{41}$ ) sono tra segmenti contrigui e quindi coincidono con i centri delle coppie cinematiche.

Dalla figura osserviamo che i centri di istantanea rotazione sono a 3 a 3 allineati e ciò non è un caso.

Vale infatti il teorema di **Kennedy-Aronhold**: durante il moto rigido piano i centri di istantanea rotazione sono a 3 a 3 allineati.

### 3.6.1 Curve polari

Abbiamo visto che in generale il centro di istantanea rotazione cambia in ogni istante. Perciò si sposta sia rispetto al sistema solidale al corpo rigido (di cui si studia il moto) che rispetto al sistema fisso.

Ad esempio nel quadrilatero il punto  $C_{31}$  si muove sia rispetto alla biella che al telaio.

Chiamiamo polare fissa la traiettoria percorsa da C rispetto al membro fisso e polare mobile la traiettoria percorsa da C rispetto al membro mobile.

Vale il seguente teorema: durante il moto rigido la polare mobile rotola senza strisciare sulla polare fissa; durante il moto di rotolamento le due polari sono tangenti nel punto di contatto.

• **Esempio di calcolo delle polari**

Consideriamo il meccanismo a crociera. Si voglia determinare la polare mobile e la polare fissa della biella AB.

Le coordinate e le velocità dell'origine della terna mobile rispetto al sistema fisso sono:

$$\begin{aligned}x_{Om} &= 0 & y_{Om} &= -l \sin \alpha \\x_{\dot{O}m} &= 0 & y_{\dot{O}m} &= -\dot{\alpha} l \cos \alpha\end{aligned}$$

Da cui, applicando la formula che fornisce il centro di rotazione nel sistema fisso (polare fissa):

$$\begin{aligned}{}^f x_C &= {}^f x_{Om} - \frac{{}^f y_{\dot{O}m}}{\dot{\alpha}} & {}^f x_C &= l \cos \alpha \\{}^f y_C &= {}^f y_{Om} + \frac{{}^f x_{\dot{O}m}}{\dot{\alpha}} & {}^f y_C &= -l \sin \alpha\end{aligned}$$

Perciò al variare della configurazione del meccanismo (variazione di  $\alpha$ ) il centro di istantanea rotazione descrive rispetto al sistema fisso una circonferenza di centro  $O_f$  e raggio  $l$ , questa è la polare fissa.

Di questo ci si poteva rendere conto anche graficamente dato che i punti A e B della biella hanno velocità sempre parallele rispettivamente all'asse y e x, le loro normali si incontrano nel punto C, che per il teorema di Chasles è centro di istantanea rotazione.

Il punto C appartiene al rettangolo  $O_fABC$  che ha sempre diagonali uguali a  $l$ , perciò la distanza di C da  $O_f$  è sempre  $l$  e quindi C si mantiene in una circonferenza.

Le coordinate del centro di istantanea rotazione nel sistema mobile sono (polare mobile):

$$\begin{aligned}{}^m x_C &= \frac{{}^f x_{\dot{O}m}}{\dot{\alpha}} \sin \alpha - \frac{{}^f y_{\dot{O}m}}{\dot{\alpha}} \cos \alpha & {}^m x_C &= l \cos^2 \alpha = \frac{l}{2}(1 + \cos 2\alpha) \\{}^m y_C &= \frac{{}^f x_{\dot{O}m}}{\dot{\alpha}} \cos \alpha + \frac{{}^f y_{\dot{O}m}}{\dot{\alpha}} \sin \alpha & {}^m y_C &= -l \cos \alpha \sin \alpha = -\frac{l}{2} \sin 2\alpha\end{aligned}$$

Perciò al variare della configurazione del meccanismo il centro di istantanea rotazione descrive rispetto al sistema mobile una circonferenza di raggio  $l/2$ , avente origine (rispetto al sistema mobile) nel punto di coordinate  $(l/2, 0)$ . La polare mobile passa sempre per l'origine del sistema fisso perché è a contatto con la polare fissa nel punto C e ha diametro  $l$ .

Ad esempio per  $\alpha = 45^\circ$  le coordinate del centro di istantanea rotazione risultano:

$$\begin{aligned}x_C &= 0.707l & y_C &= -0.707l \\{}^m x_C &= 0.500l & {}^m y_C &= -0.500l\end{aligned}$$

Se consideriamo il movimento relativo tra due membri ed entrambi sono mobili, allora anche il sistema di riferimento  $f$  è mobile, le polari prendono in questo caso il nome di primitive

### 3.6.2 Profili coniugati

Il moto di un membro mobile rispetto ad uno fisso è definito dal rotolamento della polare mobile sulla polare fissa.

Sia  $\lambda_m$  una curva solidale al piano mobile diversa dalla polare mobile. Durante il moto rigido del piano mobile la curva  $\lambda_m$  occupa sul piano fisso una infinità di posizioni che generalmente ammette una curva involuppo (tangente a  $\lambda_m$  in tutte le posizioni) che chiamiamo  $\lambda_f$ .

Le due curve  $\lambda_m$  e  $\lambda_f$  si chiamano profili coniugati.

Valgono le seguenti importanti proprietà:

- Nel punto di contatto P i profili hanno tangente e normale comune
- La normale comune passa per il centro di istantanea rotazione C.

In generale tra i profili coniugati si ha strisciamento durante il moto relativo dei due membri, cioè velocità di strisciamento non nulla in P e diretta secondo la tangente.

Perciò il moto relativo tra due membri piani può essere definito, oltre che dal moto di puro rotolamento della polare mobile sulla polare fissa, anche dal moto con strisciamento di una coppia di profili coniugati, uno solidale al membro mobile e l'altro solidale al membro fisso. Questa è la soluzione comunemente adottata negli ingranaggi dove i profili coniugati sono i fianchi dei denti.

#### • Esempio

Consideriamo una coppia di ruote dentate, per comodità supponiamo che la ruota 1 sia fissata al telaio.

Cerchiamo il centro di istantanea rotazione  $C_{21}$ . Consideriamo due punti caratteristici del corpo 2 i punti B e P.

Il punto B, pensato appartenente al membro 3, ha velocità ortogonale alla retta AB; per il teorema di Chasles la retta AB deve quindi passare per il centro di istantanea rotazione.

Il punto P, che è il punto di contatto tra i profili coniugati ha la velocità (velocità di strisciamento) allineata alla tangente comune ai due profili. Poiché la tangente è ortogonale alla normale ai profili, ne consegue che il centro di istantanea rotazione deve giacere sulla retta normale.

Il centro di istantanea rotazione è allora all'intersezione tra la retta AB e la normale in comune ai due profili.

Se ora andiamo a considerare il meccanismo che si ottiene tenendo fisso il membro 3, il punto  $C_{21}$  rappresenta il centro di istantanea rotazione di 2 rispetto a 1; i tre centri sono allineati.