Formulazione con le Equazioni di Lagrange

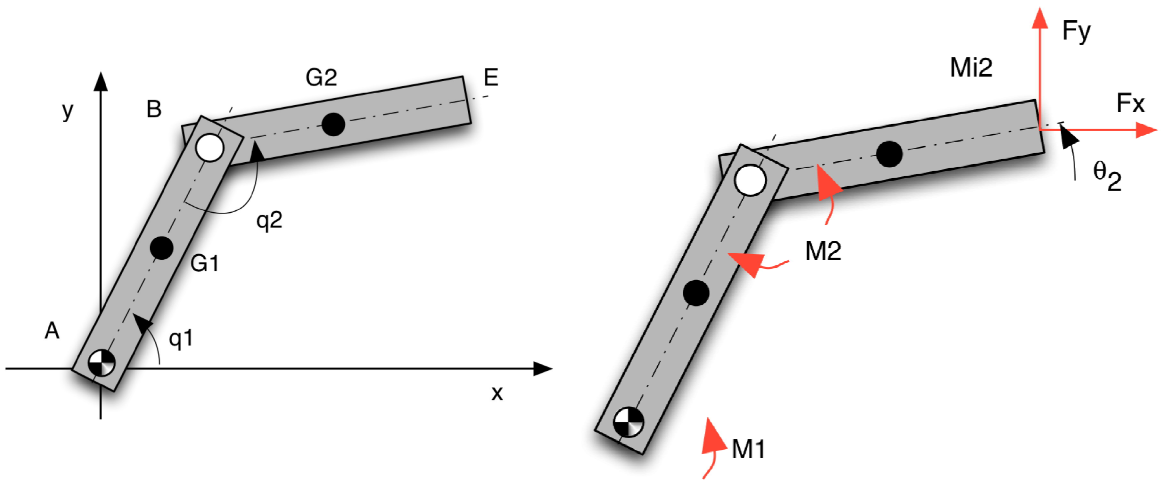
La figura rappresenta lo schema di un sistema meccanico che potrebbe essere il modello di diverse cose: per esempio un manipolatore tipo SCARA, un braccio umano o di un robot, il braccio di uno scavatore (in questo caso il piano xy sarebbe verticale).
Il manipolatore è formato da due corpi rigidi, il primo (braccio) incernierato al telaio in A, il secondo (avambraccio) incernierato in B alla estremità del primo. Le cerniere A e B sono rispettivamente la "spalla" e il "gomito" del manipolatore. Lo scopo del manipolatore è posizionare l'estremità E in un punto a piacere del piano xy e applicare (o contrastare) eventuali forze in E.
La rotazione della spalla è imposta da un attuatore (un motore/un gruppo muscolare) che agisce *fra la spalla e il telaio*. La rotazione del gomito è imposta da un attuatore che agisce *fra il braccio e l'avambraccio* ed è quindi una rotazione *relativa* fra i due corpi.

Scriveremo le equazioni del moto usando le Equazioni di Lagrange.

Assumiamo che il braccio sia nel piano orizzontale (non ci sono forze peso, ma ci sarebbero nel caso per esempio dello scavatore), che alla estremità del braccio in E siano applicate le forze Fx e Fy, che i due corpi abbiano rispettivamente massa m1 e m2 e momenti d'inercia baricentrici I1 e I2 e che i baricentri G1 e G2 siano posti a metà della lunghezza di ciascuno corpo e che le due lunghezze siano uguali: AB = BE = L.

Procedura

Per scrivere le equazioni con formulazione Lagrangian, occorre prima calcolare la funzione lagrangiana L(q,q',t) = T-V. Nel noastro caso l'energia potenziale V = 0 perchè non si considera la forza peso e le forze in E non sono considerate conservative (quindi non hanno potenziale). Notare che solo nel PLV si aggiungono le forse fittizie di inerzia (perchè il PLV sarebbe un principio di equilibrio, e per usarlo occorre aggiungere le forze fittizie con il principio di D'Alembert).



Per scrivere l'energia cinetica dobbiamo definire le coordinate di G1 e G2 e la rotazione dei corpi $\theta 1$ e $\theta 2$, in funzione delle coordinate generalizzate q1 e q2. Si ha:

```
θ1 = q1[t];
θ2 = q1[t] - π + q2[t];

xG1 = L / 2 Cos[θ1];
yG1 = L / 2 Sin[θ1];

xG2 = L Cos[θ1] + L / 2 Cos[θ2];
yG2 = L Sin[θ1] + L / 2 Sin[θ2];

xE = L Cos[θ1] + L Cos[θ2];
yE = L Sin[θ1] + L Sin[θ2];
```

Energia cinetica

L'energia cinetica del sistema è quindi la somma delle energie cinetiche dei due corpi:

T = $\frac{1}{2}$ m1 $\left((\partial_t \text{ xG1})^2 + (\partial_t \text{ yG1})^2\right)$ + $\frac{1}{2}$ I1 $(\partial_t\, \theta 1)^2$ + $\frac{1}{2}$ m2 $\left((\partial_t \text{ xG2})^2 + (\partial_t \text{ yG2})^2\right)$ + $\frac{1}{2}$ I2 $(\partial_t\, \theta 2)^2$

$$\frac{1}{2}\,\text{I1}\,\text{q1}'[\text{t}]^2+\frac{1}{2}\,\text{m1}\left(\frac{1}{4}\,\text{L}^2\,\text{Cos}[\text{q1}[\text{t}]]^2\,\text{q1}'[\text{t}]^2+\frac{1}{4}\,\text{L}^2\,\text{Sin}[\text{q1}[\text{t}]]^2\,\text{q1}'[\text{t}]^2\right)+\frac{1}{2}\,\text{I2}\,(\text{q1}'[\text{t}]+\text{q2}'[\text{t}])^2+\frac{1}{2}\,\text{m2}\left(\left(\text{L}\,\text{Cos}[\text{q1}[\text{t}]]\,\text{q1}'[\text{t}]-\frac{1}{2}\,\text{L}\,\text{Cos}[\text{q1}[\text{t}]+\text{q2}[\text{t}]]\,(\text{q1}'[\text{t}]+\text{q2}'[\text{t}])\right)^2+\left(-\text{L}\,\text{Sin}[\text{q1}[\text{t}]]\,\text{q1}'[\text{t}]+\frac{1}{2}\,\text{L}\,\text{Sin}[\text{q1}[\text{t}]+\text{q2}[\text{t}]]\,(\text{q1}'[\text{t}]+\text{q2}'[\text{t}])\right)^2\right)$$

Questa espressione si semplifica:

```
T = FullSimplify[T]
```

$$\frac{1}{8}\left(\left(4\,\text{I1}+4\,\text{I2}+\text{L}^2\,(\text{m1}+5\,\text{m2})-4\,\text{L}^2\,\text{m2}\,\text{Cos}[\text{q2}[\text{t}]]\right)\text{q1}'[\text{t}]^2+2\left(4\,\text{I2}+\text{L}^2\,\text{m2}-2\,\text{L}^2\,\text{m2}\,\text{Cos}[\text{q2}[\text{t}]]\right)\text{q1}'[\text{t}]\,\text{q2}'[\text{t}]+\left(4\,\text{I2}+\text{L}^2\,\text{m2}\right)\text{q2}'[\text{t}]^2\right)$$

Forze generalizzate

Per il calcolo delle forze generalizzate bisogna calcolare la potenza virtuale dellee forze attive:

W = Fx ∂_t xE + Fy ∂_t yE + M1 $\partial_t\, \theta 1$ − M2 $\partial_t\, \theta 1$ + M2 $\partial_t\, \theta 2$

$$\text{M1}\,\text{q1}'[\text{t}]-\text{M2}\,\text{q1}'[\text{t}]+\text{M2}\,(\text{q1}'[\text{t}]+\text{q2}'[\text{t}])+\text{Fy}\,(\text{L}\,\text{Cos}[\text{q1}[\text{t}]]\,\text{q1}'[\text{t}]-\text{L}\,\text{Cos}[\text{q1}[\text{t}]+\text{q2}[\text{t}]]\,(\text{q1}'[\text{t}]+\text{q2}'[\text{t}]))+\text{Fx}\,(-\text{L}\,\text{Sin}[\text{q1}[\text{t}]]\,\text{q1}'[\text{t}]+\text{L}\,\text{Sin}[\text{q1}[\text{t}]+\text{q2}[\text{t}]]\,(\text{q1}'[\text{t}]+\text{q2}'[\text{t}]))$$

```
Q1 = Coefficient[W, q1'[t]]
```

M1 + Fy L Cos[q1[t]] − Fy L Cos[q1[t] + q2[t]] − Fx L Sin[q1[t]] + Fx L Sin[q1[t] + q2[t]]

```
Q2 = Coefficient[W, q2'[t]]
```

M2 − Fy L Cos[q1[t] + q2[t]] + Fx L Sin[q1[t] + q2[t]]

Equazioni di Lagrange

eq1 = Simplify[∂_t ($\partial_{\text{q1}'[\text{t}]}$ T) − $\partial_{\text{q1}[\text{t}]}$ T − Q1] == 0;

```
Collect[ eq1, {q1''[t], q2''[t]}, FullSimplify]
```

$$-\text{M1}-\text{Fy}\,\text{L}\,\text{Cos}[\text{q1}[\text{t}]]+\text{Fy}\,\text{L}\,\text{Cos}[\text{q1}[\text{t}]+\text{q2}[\text{t}]]+\text{Fx}\,\text{L}\,(\text{Sin}[\text{q1}[\text{t}]]-\text{Sin}[\text{q1}[\text{t}]+\text{q2}[\text{t}]])+\frac{1}{2}\,\text{L}^2\,\text{m2}\,\text{Sin}[\text{q2}[\text{t}]]\,\text{q2}'[\text{t}]\,(2\,\text{q1}'[\text{t}]+\text{q2}'[\text{t}])+\left(\text{I1}+\text{I2}+\frac{1}{4}\,\text{L}^2\,(\text{m1}+5\,\text{m2})-\text{L}^2\,\text{m2}\,\text{Cos}[\text{q2}[\text{t}]]\right)\text{q1}''[\text{t}]+\left(\text{I2}+\frac{\text{L}^2\,\text{m2}}{4}-\frac{1}{2}\,\text{L}^2\,\text{m2}\,\text{Cos}[\text{q2}[\text{t}]]\right)\text{q2}''[\text{t}]==0$$

eq2 = Simplify[∂_t ($\partial_{\text{q2}'[\text{t}]}$ T) − $\partial_{\text{q2}[\text{t}]}$ T − Q2] == 0;

```
Collect[ eq2, {q1''[t], q2''[t]}, FullSimplify]
```

$$-\text{M2}+\text{Fy}\,\text{L}\,\text{Cos}[\text{q1}[\text{t}]+\text{q2}[\text{t}]]-\text{Fx}\,\text{L}\,\text{Sin}[\text{q1}[\text{t}]+\text{q2}[\text{t}]]-\frac{1}{2}\,\text{L}^2\,\text{m2}\,\text{Sin}[\text{q2}[\text{t}]]\,\text{q1}'[\text{t}]^2+\left(\text{I2}+\frac{\text{L}^2\,\text{m2}}{4}-\frac{1}{2}\,\text{L}^2\,\text{m2}\,\text{Cos}[\text{q2}[\text{t}]]\right)\text{q1}''[\text{t}]+\left(\text{I2}+\frac{\text{L}^2\,\text{m2}}{4}\right)\text{q2}''[\text{t}]==0$$

Si ottiene lo stesso sistema di equazioni prodotto con il metodo del PLV