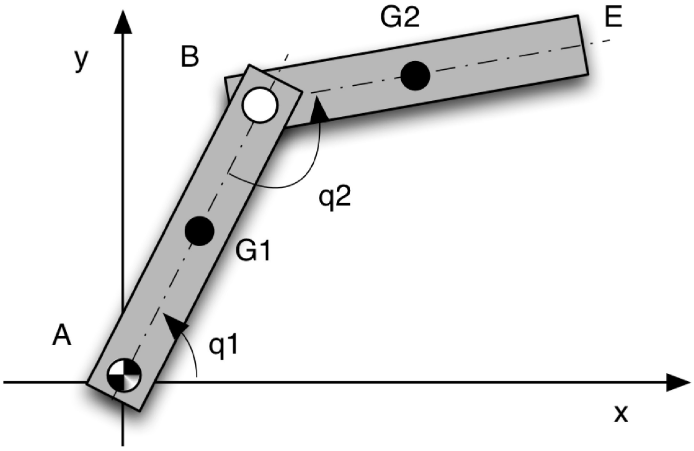
Formulazione con il PLV

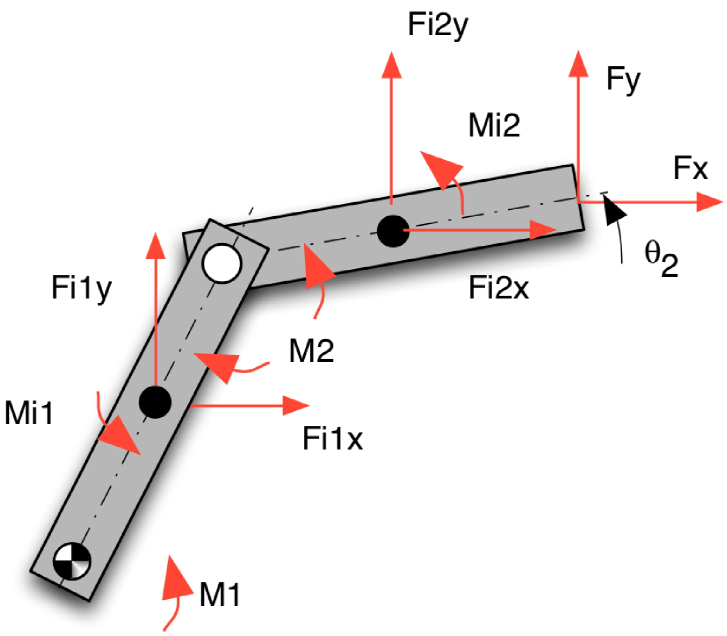
La figura rappresenta lo schema di un sistema meccanico che potrebbe essere il modello di diverse cose: per esempio un manipolatore tipo SCARA, un braccio umano o di un robot, il braccio di uno scavatore (in questo caso il piano xy sarebbe verticale).
Il manipolatore è formato da due corpi rigidi, il primo (braccio) incernierato al telaio in A, il secondo (avambraccio) incernierato in B alla estremità del primo. Le cerniere A e B sono rispettivamente la "spalla" e il "gomito" del manipolatore. Lo scopo del manipolatore è posizionare l'estremità E in un punto a piacere del piano xy e applicare (o contrastare) eventuali forze in E.
La rotazione della spalla è imposta da un attuatore (un motore/un gruppo muscolare) che agisce *fra la spalla e il telaio*. La rotazione del gomito è imposta da un attuatore che agisce *fra il braccio e l'avambraccio* ed è quindi una rotazione *relativa* fra i due corpi.

Scriveremo le equazioni del moto usando il principio dei lavori virtuali (PLV).
Assumiamo che il braccio sia nel piano orizzontale (non ci sono forze peso, ma ci sarebbero nel caso per esempio dello scavatore), che alla estremità del braccio in E siano applicate le forze Fx e Fy, che i due corpi abbiano rispettivamente massa m1 e m2 e momenti d’inercia baricentrici I1 e I2 e che i baricentri G1 e G2 siano posti a metà della lunghezza di ciascuno corpo e che le due lunghezze siano uguali: AB = BE = L.



Procedura

Per scrivere le equazioni del moto con il principio dei lavori virtuali occorre, prima, aggiungere le forze apparenti di inerzia secondo il principio di D'Alembert.
Cioè, si aggiungono come forze *fittizie* i termini che nelle equazioni di Newton Eulero sarebbero a primo membro (si mettono come forze con segno invertito). In figura sono mostrate le frorze di inerzia. Sono mostrati anche i momenti dei due motori (notare che il motore 2 applica un momento fra i corpi 1 e 2) e le forze Fx ed Fy in E.
Non ci sono altre forze perchè le reazioni vincolari non compiono lavoro (nella ipotesi di coppie cinematiche senza attrito) e la forza peso si trascura (pensando al braccio posto in un piano orizzontale).



Notare che la rotazione assoluta del corpo 2 è:

θ2 = q1 − π + q2;

Invece la rotazione assoluta del corpo 1 è uguale alla coordinata q1 (ma potrebbe essere diversa se q1 fosse scelto in altro modo):

θ1 = q1;

Principio dei lavori virtuali

Il lavoro virtuale delle forze in figura, corrispondente a una posizione variata δq1, δq2 vale:

**δL = Mi2 δθ2 + Fi2x δxG2 + Fi2y δyG2 + Mi1 δθ1 +
Fi1x δxG1 + Fi1y δyG1 + M2 δq2 + M1 δq1 + Fx δxE + Fy δyE;**

Notare che il lavoro del motore 2 è pari al prodotto M2 δq2 che è infatti quanto si ottiene calcolando separatamente il lavoro della coppia M2 applicata al corpo 2 (che ruota di δθ2) e al corpo 1 che ruaota di δθ1.

M2 δq2 == M2 δθ2 − M2 δθ1;

Per ricavare le equazioni del moto si devono esprimere le coordinate dei baricentri e le rotazioni assolute dei corpi in funzione delle variazioni delle coordinate generalizzate.

δθ1 = δq1;
δθ2 = δq1 + δq2;

δxG1 = τx11 δq1 + τx12 δq2;
δyG1 = τy11 δq1 + τy12 δq2;

δxG2 = τx21 δq1 + τx22 δq2;
δyG2 = τy21 δq1 + τy22 δq2;

δxE = τxE1 δq1 + τxE2 δq2;
δyE = τyE1 δq1 + τyE2 δq2;

L'espressione del lavoro virtuale risulta quindi una combinazione lineare di δq1 e δq2:

```
Collect[δL, {δq1, δq2}]
```

$\delta q1\ (M1 + Mi1 + Mi2 + Fi1x\ \tau x11 + Fi2x\ \tau x21 + Fx\ \tau xE1 + Fi1y\ \tau y11 + Fi2y\ \tau y21 + Fy\ \tau yE1) +$
$\delta q2\ (M2 + Mi2 + Fi1x\ \tau x12 + Fi2x\ \tau x22 + Fx\ \tau xE2 + Fi1y\ \tau y12 + Fi2y\ \tau y22 + Fy\ \tau yE2)$

Poichè il lavoro δL deve essere zero indipendentemente dalle variazioni δq1 e δq2, ne consegue che i coefficienti di δq1 e δq2 devono essere entrambi zero (e da questo si ottengono due equazioni):

```
eq1 = Coefficient[δL, δq1] == 0
```

$M1 + Mi1 + Mi2 + Fi1x\ \tau x11 + Fi2x\ \tau x21 + Fx\ \tau xE1 + Fi1y\ \tau y11 + Fi2y\ \tau y21 + Fy\ \tau yE1 == 0$

```
eq2 = Coefficient[δL, δq2] == 0
```

$M2 + Mi2 + Fi1x\ \tau x12 + Fi2x\ \tau x22 + Fx\ \tau xE2 + Fi1y\ \tau y12 + Fi2y\ \tau y22 + Fy\ \tau yE2 == 0$

Espressione dei rapporti di velocità

Per esplicitare le equazioni occorre esprimere le forze di inerzia e i rapporti di velocità in funzione delle coordinate generalizzate q1 e q2. Per questo è necessatrio fare l'analisi cinematica.
Le coordinate dei baricentri e le rotazioni assolute possono essere espresse in funzione delle due coordinate generalizzate q1 e q2. Indicando con L la lunghezza dei corpi si ha:

```
θ1 = q1[t];
θ2 = q1[t] - π + q2[t];

xG1 = L / 2 Cos[θ1];
yG1 = L / 2 Sin[θ1];

xG2 = L Cos[θ1] + L / 2 Cos[θ2];
yG2 = L Sin[θ1] + L / 2 Sin[θ2];

xE = L Cos[θ1] + L Cos[θ2];
yE = L Sin[θ1] + L Sin[θ2];
```

Da questi si hanno i rapporti di velocità:

$$\tau x11 = \partial_{q1[t]}\ xG1 = -\frac{1}{2} L\, Sin[q1[t]]$$

$$\tau x12 = \partial_{q2[t]}\ xG1 = 0$$

$$\tau x21 = \partial_{q1[t]}\ xG2 = -L\, Sin[q1[t]] + \frac{1}{2} L\, Sin[q1[t] + q2[t]]$$

$$\tau x22 = \partial_{q2[t]}\ xG2 = \frac{1}{2} L\, Sin[q1[t] + q2[t]]$$

$$\tau xE1 = \partial_{q1[t]}\ xE = -L\, Sin[q1[t]] + L\, Sin[q1[t] + q2[t]]$$

$$\tau xE2 = \partial_{q2[t]}\ xE = L\, Sin[q1[t] + q2[t]]$$

$$\tau y11 = \partial_{q1[t]}\ yG1 = \frac{1}{2} L\, Cos[q1[t]]$$

$$\tau y12 = \partial_{q2[t]}\ yG1 = 0$$

$$\tau y21 = \partial_{q1[t]}\ yG2 = L\, Cos[q1[t]] - \frac{1}{2} L\, Cos[q1[t] + q2[t]]$$

$\tau y22 = \partial_{q2[t]}\, yG2 \quad = \quad -\frac{1}{2} L \operatorname{Cos}[q1[t] + q2[t]]$

$\tau yE1 = \partial_{q1[t]}\, yE \quad = \quad L \operatorname{Cos}[q1[t]] - L \operatorname{Cos}[q1[t] + q2[t]]$

$\tau yE2 = \partial_{q2[t]}\, yE \quad = \quad -L \operatorname{Cos}[q1[t] + q2[t]]$

Espressione delle forze fittizie

Le forze di Inerzia sono:

Fi1x = - m1 $\partial_t\, \partial_t$ xG1
Fi1y = - m1 $\partial_t\, \partial_t$ yG1
Mi1 = - I1 $\partial_t\, \partial_t\, \theta 1$

$$-m1 \left(-\frac{1}{2} L \operatorname{Cos}[q1[t]]\, q1'[t]^2 - \frac{1}{2} L \operatorname{Sin}[q1[t]]\, q1''[t]\right)$$

$$-m1 \left(-\frac{1}{2} L \operatorname{Sin}[q1[t]]\, q1'[t]^2 + \frac{1}{2} L \operatorname{Cos}[q1[t]]\, q1''[t]\right)$$

$$-I1\, q1''[t]$$

Fi2x = - m2 $\partial_t\, \partial_t$ xG2
Fi2y = - m2 $\partial_t\, \partial_t$ yG2
Mi2 = - I2 $\partial_t\, \partial_t\, \theta 2$

$$-m2 \left(-L \operatorname{Cos}[q1[t]]\, q1'[t]^2 + \frac{1}{2} L \operatorname{Cos}[q1[t] + q2[t]]\, (q1'[t] + q2'[t])^2 - L \operatorname{Sin}[q1[t]]\, q1''[t] + \frac{1}{2} L \operatorname{Sin}[q1[t] + q2[t]]\, (q1''[t] + q2''[t])\right)$$

$$-m2 \left(-L \operatorname{Sin}[q1[t]]\, q1'[t]^2 + \frac{1}{2} L \operatorname{Sin}[q1[t] + q2[t]]\, (q1'[t] + q2'[t])^2 + L \operatorname{Cos}[q1[t]]\, q1''[t] - \frac{1}{2} L \operatorname{Cos}[q1[t] + q2[t]]\, (q1''[t] + q2''[t])\right)$$

$$-I2\, (q1''[t] + q2''[t])$$

Equazioni

Sostituendo le espressioni nelle equazioni 1 e 2 si ha

```
Collect[eq1, {q1''[t], q2''[t]}, FullSimplify]
```

$$M1 + Fy\, L \operatorname{Cos}[q1[t]] - Fy\, L \operatorname{Cos}[q1[t] + q2[t]] + Fx\, L\, (-\operatorname{Sin}[q1[t]] + \operatorname{Sin}[q1[t] + q2[t]]) - \frac{1}{2} L^2\, m2 \operatorname{Sin}[q2[t]]\, q2'[t]\, (2\, q1'[t] + q2'[t]) + \left(\frac{1}{4} \left(-4\, I1 - 4\, I2 - L^2\, (m1 + 5\, m2)\right) + L^2\, m2 \operatorname{Cos}[q2[t]]\right) q1''[t] + \frac{1}{4} \left(-4\, I2 - L^2\, m2 + 2\, L^2\, m2 \operatorname{Cos}[q2[t]]\right) q2''[t] == 0$$

```
Collect[eq2, {q1''[t], q2''[t]}, FullSimplify]
```

$$M2 - Fy\, L \operatorname{Cos}[q1[t] + q2[t]] + Fx\, L \operatorname{Sin}[q1[t] + q2[t]] + \frac{1}{2} L^2\, m2 \operatorname{Sin}[q2[t]]\, q1'[t]^2 + \frac{1}{4} \left(-4\, I2 - L^2\, m2 + 2\, L^2\, m2 \operatorname{Cos}[q2[t]]\right) q1''[t] + \left(-I2 - \frac{L^2\, m2}{4}\right) q2''[t] == 0$$

Si nota come in questa formulazione si ottengono due equazioni in due incognite (M1 e M2 in dinamica inversa o q1 e q2 in dinamica diretta). Le reazioni vincolari non si vedono.