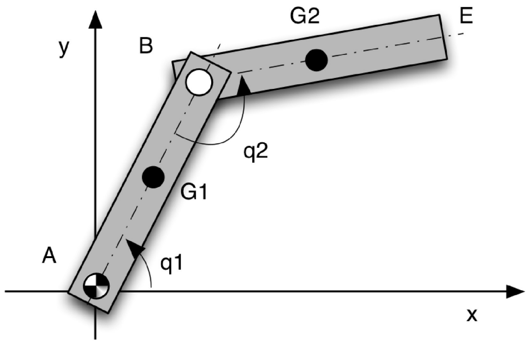
Formulazione con equazioni di Newton-Eulero

La figura rappresenta lo schema di un sistema meccanico che potrebbe essere il modello di diverse cose: per esempio un manipolatore tipo SCARA, un braccio umano o di un robot, il braccio di uno scavatore (in questo caso il piano xy sarebbe verticale).
Il manipolatore è formato da due corpi rigidi, il primo (braccio) incernierato al telaio in A, il secondo (avambraccio) incernierato in B alla estremità del primo. Le cerniere A e B sono rispettivamente la "spalla" e il "gomito" del manipolatore. Lo scopo del manipolatore è posizionare l'estremità E in un punto a piacere del piano xy e applicare (o contrastare) eventuali forze in E.
La rotazione della spalla è imposta da un attuatore (un motore/un gruppo muscolare) che agisce *fra la spalla e il telaio*. La rotazione del gomito è imposta da un attuatore che agisce *fra il braccio e l'avambraccio* ed è quindi una rotazione *relativa* fra i due corpi.

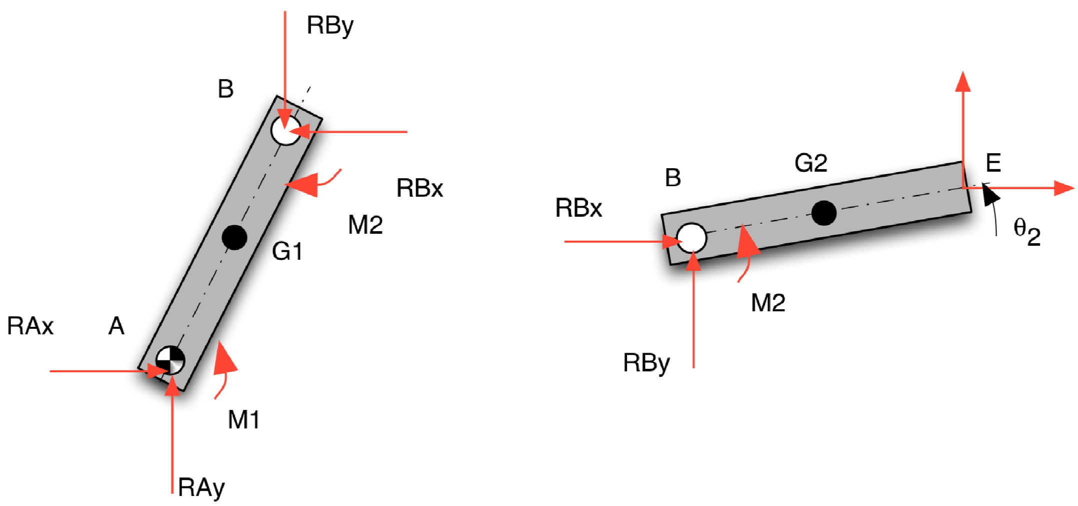
Scriveremo le equazioni del moto secoindo Newton-Eulero.

Assumiamo che il braccio sia nel piano orizzontale (non ci sono forze peso, ma ci sarebbero nel caso per esempio dello scavatore), che alla estremità del braccio in E siano applicate le forze Fx e Fy, che i due corpi abbiano rispettivamente massa m1 e m2 e momenti d'inerzia baricentrici I1 e I2 e che i baricentri G1 e G2 siano posti a metà della lunghezza di ciascuno corpo e che le due lunghezze siano uguali: AB = BE = L.



Procedura

Nel metodo di Newton-Eulòero si scrivono le equazioni cardinali della dinamica per ciascuno dei corpi rigidi presi seprarata-mente. Occorre a questo scopo evidenziare le reazioni vincolari.



Per scrivere le equazioni occorre specificare la posizione dei corpi e dei punti di applicazione delle forze in funzione delle coordinate generalizzate q1 e q2:

```
θ1 = q1[t]; θ2 = q1[t] - π + q2[t];

xA = 0; yA = 0;

xG1 = L / 2 Cos[θ1]; yG1 = L / 2 Sin[θ1];

xB = L Cos[θ1]; yB = L Sin[θ1];

xG2 = L Cos[θ1] + L / 2 Cos[θ2]; yG2 = L Sin[θ1] + L / 2 Sin[θ2];

xE = L Cos[θ1] + L Cos[θ2]; yE = L Sin[θ1] + L Sin[θ2];
```

Momenti delle forze rispetto ai baricentri

Conviene calcolare sepratamente riuspetto ai baricentri dei corpi delle forze:

```
MRAG1 = {xA - xG1, yA - yG1, 0} × {RAx, RAy, 0}
```

$$\left\{0,\, 0,\, -\frac{1}{2} \text{L RAy Cos}[\text{q1}[\text{t}]] + \frac{1}{2} \text{L RAx Sin}[\text{q1}[\text{t}]]\right\}$$

```
MRBG1 = {xB - xG1, yB - yG1, 0} × {-RBx, -RBy, 0}
```

$$\left\{0,\, 0,\, -\frac{1}{2} \text{L RBy Cos}[\text{q1}[\text{t}]] + \frac{1}{2} \text{L RBx Sin}[\text{q1}[\text{t}]]\right\}$$

```
MRBG2 = {xB - xG2, yB - yG2, 0} × {RBx, RBy, 0}
```

$$\left\{0,\, 0,\, \frac{1}{2} \text{L RBy Cos}[\text{q1}[\text{t}] + \text{q2}[\text{t}]] - \frac{1}{2} \text{L RBx Sin}[\text{q1}[\text{t}] + \text{q2}[\text{t}]]\right\}$$

```
MFEG2 = {xE - xG2, yE - yG2, 0} × {Fx, Fy, 0}
```

$$\left\{0,\, 0,\, -\frac{1}{2} \text{Fy L Cos}[\text{q1}[\text{t}] + \text{q2}[\text{t}]] + \frac{1}{2} \text{Fx L Sin}[\text{q1}[\text{t}] + \text{q2}[\text{t}]]\right\}$$

Equazioni corpo 1

```
e1x = m1 ∂t ∂t xG1 == RAx - RBx
```

$$\text{m1} \left(-\frac{1}{2} \text{L Cos}[\text{q1}[\text{t}]]\, \text{q1}'[\text{t}]^2 - \frac{1}{2} \text{L Sin}[\text{q1}[\text{t}]]\, \text{q1}''[\text{t}]\right) == \text{RAx} - \text{RBx}$$

```
e1y = m1 ∂t ∂t yG1 == RAy - RBy
```

$$\text{m1} \left(-\frac{1}{2} \text{L Sin}[\text{q1}[\text{t}]]\, \text{q1}'[\text{t}]^2 + \frac{1}{2} \text{L Cos}[\text{q1}[\text{t}]]\, \text{q1}''[\text{t}]\right) == \text{RAy} - \text{RBy}$$

```
e1θ = I1 ∂t ∂t θ1 == M1 - M2 + MRAG1[[3]] + MRBG1[[3]]
```

$$\text{I1 q1}''[\text{t}] == \text{M1} - \text{M2} - \frac{1}{2} \text{L RAy Cos}[\text{q1}[\text{t}]] - \frac{1}{2} \text{L RBy Cos}[\text{q1}[\text{t}]] + \frac{1}{2} \text{L RAx Sin}[\text{q1}[\text{t}]] + \frac{1}{2} \text{L RBx Sin}[\text{q1}[\text{t}]]$$

Equazioni corpo 2

e2x = m2 ∂t ∂t xG2 == RBx + Fx

$$m2\left(-L\,\text{Cos}[q1[t]]\,q1'[t]^2+\frac{1}{2}L\,\text{Cos}[q1[t]+q2[t]]\,(q1'[t]+q2'[t])^2-L\,\text{Sin}[q1[t]]\,q1''[t]+\frac{1}{2}L\,\text{Sin}[q1[t]+q2[t]]\,(q1''[t]+q2''[t])\right)==Fx+RBx$$

e2y = m2 ∂t ∂t yG2 == RBy + Fy

$$m2\left(-L\,\text{Sin}[q1[t]]\,q1'[t]^2+\frac{1}{2}L\,\text{Sin}[q1[t]+q2[t]]\,(q1'[t]+q2'[t])^2+L\,\text{Cos}[q1[t]]\,q1''[t]-\frac{1}{2}L\,\text{Cos}[q1[t]+q2[t]]\,(q1''[t]+q2''[t])\right)==Fy+RBy$$

e2θ = I2 ∂t ∂t θ2 == M2 + MRBG2[[3]] + MFEG2[[3]]

$$I2\,(q1''[t]+q2''[t])==M2-\frac{1}{2}Fy\,L\,\text{Cos}[q1[t]+q2[t]]+\frac{1}{2}L\,RBy\,\text{Cos}[q1[t]+q2[t]]+\frac{1}{2}Fx\,L\,\text{Sin}[q1[t]+q2[t]]-\frac{1}{2}L\,RBx\,\text{Sin}[q1[t]+q2[t]]$$

Equazioni

Si risolvono le 4 equazioni di Newton esplicitando reazioni vincolari:

Reazioni = First@Simplify@Solve[{e1x, e1y, e2x, e2y}, {RAx, RAy, RBx, RBy}]

$$\Big\{RAx\to\frac{1}{2}\Big(-2\,Fx-L\,((m1+2\,m2)\,\text{Cos}[q1[t]]-m2\,\text{Cos}[q1[t]+q2[t]])\,q1'[t]^2+2\,L\,m2\,\text{Cos}[q1[t]+q2[t]]\,q1'[t]\,q2'[t]+L\,m2\,\text{Cos}[q1[t]+q2[t]]\,q2'[t]^2-L\,m1\,\text{Sin}[q1[t]]\,q1''[t]-2\,L\,m2\,\text{Sin}[q1[t]]\,q1''[t]+L\,m2\,\text{Sin}[q1[t]+q2[t]]\,q1''[t]+L\,m2\,\text{Sin}[q1[t]+q2[t]]\,q2''[t]\Big),$$

$$RAy\to\frac{1}{2}\Big(-2\,Fy-L\,((m1+2\,m2)\,\text{Sin}[q1[t]]-m2\,\text{Sin}[q1[t]+q2[t]])\,q1'[t]^2+2\,L\,m2\,\text{Sin}[q1[t]+q2[t]]\,q1'[t]\,q2'[t]+L\,m2\,\text{Sin}[q1[t]+q2[t]]\,q2'[t]^2+L\,m1\,\text{Cos}[q1[t]]\,q1''[t]+2\,L\,m2\,\text{Cos}[q1[t]]\,q1''[t]-L\,m2\,\text{Cos}[q1[t]+q2[t]]\,q1''[t]-L\,m2\,\text{Cos}[q1[t]+q2[t]]\,q2''[t]\Big),$$

$$RBx\to\frac{1}{2}\Big(-2\,Fx+L\,m2\,(-2\,\text{Cos}[q1[t]]+\text{Cos}[q1[t]+q2[t]])\,q1'[t]^2+2\,L\,m2\,\text{Cos}[q1[t]+q2[t]]\,q1'[t]\,q2'[t]+L\,m2\,\text{Cos}[q1[t]+q2[t]]\,q2'[t]^2-2\,L\,m2\,\text{Sin}[q1[t]]\,q1''[t]+L\,m2\,\text{Sin}[q1[t]+q2[t]]\,q1''[t]+L\,m2\,\text{Sin}[q1[t]+q2[t]]\,q2''[t]\Big),$$

$$RBy\to\frac{1}{2}\Big(-2\,Fy+L\,m2\,(-2\,\text{Sin}[q1[t]]+\text{Sin}[q1[t]+q2[t]])\,q1'[t]^2+2\,L\,m2\,\text{Sin}[q1[t]+q2[t]]\,q1'[t]\,q2'[t]+L\,m2\,\text{Sin}[q1[t]+q2[t]]\,q2'[t]^2+2\,L\,m2\,\text{Cos}[q1[t]]\,q1''[t]-L\,m2\,\text{Cos}[q1[t]+q2[t]]\,q1''[t]-L\,m2\,\text{Cos}[q1[t]+q2[t]]\,q2''[t]\Big)\Big\}$$

Sostituendo le espressioni nelle equazioni di Eulero si ottengono le equazioni idfferenziali per il moto

eq1 = Simplify[e1θ /. Reazioni]

$$4\,M2+4\,Fx\,L\,\text{Sin}[q1[t]]+2\,L^2\,m2\,\text{Sin}[q2[t]]\,q1'[t]^2+4\,L^2\,m2\,\text{Sin}[q2[t]]\,q1'[t]\,q2'[t]+2\,L^2\,m2\,\text{Sin}[q2[t]]\,q2'[t]^2+4\,I1\,q1''[t]+L^2\,m1\,q1''[t]+4\,L^2\,m2\,q1''[t]==4\,M1+4\,Fy\,L\,\text{Cos}[q1[t]]+2\,L^2\,m2\,\text{Cos}[q2[t]]\,q1''[t]+2\,L^2\,m2\,\text{Cos}[q2[t]]\,q2''[t]$$

```
eq2 = Simplify[e2θ /. Reazioni]
```

$$4\,Fy\,L\,Cos[q1[t]+q2[t]] + \left(4\,I2 + L^2\,m2 - 2\,L^2\,m2\,Cos[q2[t]]\right) q1''[t] + \left(4\,I2 + L^2\,m2\right) q2''[t] == 4\,(M2 + Fx\,L\,Sin[q1[t]+q2[t]]) + 2\,L^2\,m2\,Sin[q2[t]]\,q1'[t]^2$$

Equivalenza con gli altri metodi

Queste equazioni sono equaivalenti a quelle ottenute con gli altri due metodi. Infatti, risolvendo nelle accelerazioni si ha:

```
Accelerazioni = First@Simplify@Solve[{eq1, eq2}, {q1''[t], q2''[t]}]
```

$$\Big\{q1''[t] \to -\Big(\Big(4\,L^2\,m2\,Cos[q2[t]]\,\Big(2\,(M2 - Fy\,L\,Cos[q1[t]+q2[t]] + Fx\,L\,Sin[q1[t]+q2[t]]) + L^2\,m2\,Sin[q2[t]]\,q1'[t]^2\Big) - 2\,\left(4\,I2 + L^2\,m2\right)\Big(2\,(-M1 + M2 - Fy\,L\,Cos[q1[t]] + Fx\,L\,Sin[q1[t]]) + L^2\,m2\,Sin[q2[t]]\,q1'[t]^2 + 2\,L^2\,m2\,Sin[q2[t]]\,q1'[t]\,q2'[t] + L^2\,m2\,Sin[q2[t]]\,q2'[t]^2\Big)\Big) \Big/ \Big(-\left(4\,I2 + L^2\,m2\right)\left(4\,I1 + L^2\,(m1 + 4\,m2)\right) + 4\,L^4\,m2^2\,Cos[q2[t]]^2\Big)\Big),$$

$$q2''[t] \to -\Big(\Big(2\,\Big(2\,\Big(4\,I2\,M1 + L^2\,M1\,m2 - 4\,I1\,M2 - 4\,I2\,M2 - L^2\,m1\,M2 - 5\,L^2\,m2\,M2 + 4\,Fy\,I2\,L\,Cos[q1[t]] - Fy\,L^3\,m2\,Cos[q1[t]-q2[t]] - 2\,L^2\,M1\,m2\,Cos[q2[t]] + 4\,L^2\,m2\,M2\,Cos[q2[t]] + 4\,Fy\,I1\,L\,Cos[q1[t]+q2[t]] + Fy\,L^3\,m1\,Cos[q1[t]+q2[t]] + 3\,Fy\,L^3\,m2\,Cos[q1[t]+q2[t]] - Fy\,L^3\,m2\,Cos[q1[t]+2\,q2[t]] - 4\,Fx\,I2\,L\,Sin[q1[t]] + Fx\,L^3\,m2\,Sin[q1[t]-q2[t]] - 4\,Fx\,I1\,L\,Sin[q1[t]+q2[t]] - Fx\,L^3\,m1\,Sin[q1[t]+q2[t]] - 3\,Fx\,L^3\,m2\,Sin[q1[t]+q2[t]] + Fx\,L^3\,m2\,Sin[q1[t]+2\,q2[t]]\Big) + L^2\,m2\,\left(-4\,I1 - 4\,I2 - L^2\,m1 - 5\,L^2\,m2 + 4\,L^2\,m2\,Cos[q2[t]]\right) Sin[q2[t]]\,q1'[t]^2 + 2\,L^2\,m2\,\left(-4\,I2 - L^2\,m2 + 2\,L^2\,m2\,Cos[q2[t]]\right) Sin[q2[t]]\,q1'[t]\,q2'[t] + L^2\,m2\,\left(-4\,I2 - L^2\,m2 + 2\,L^2\,m2\,Cos[q2[t]]\right) Sin[q2[t]]\,q2'[t]^2\Big)\Big) \Big/ \Big(4\,I1\,\left(4\,I2 + L^2\,m2\right) + L^2\,\left(L^2\,m2\,(m1 + 2\,m2) + 4\,I2\,(m1 + 4\,m2)\right) - 2\,L^4\,m2^2\,Cos[2\,q2[t]]\Big)\Big)\Big\}$$

E sostituendo nelle equazioni ottenutre con gli altri metodi si ottengono identità:

$$\textbf{EquazioniPLV} = \Big\{M1 + Fy\,L\,Cos[q1[t]] - Fy\,L\,Cos[q1[t]+q2[t]] + Fx\,L\,(-Sin[q1[t]] + Sin[q1[t]+q2[t]]) - \frac{1}{2}\,L^2\,m2\,Sin[q2[t]]\,q2'[t]\,(2\,q1'[t] + q2'[t]) + \left(\frac{1}{4}\left(-4\,I1 - 4\,I2 - L^2\,(m1 + 5\,m2)\right) + L^2\,m2\,Cos[q2[t]]\right) q1''[t] + \frac{1}{4}\left(-4\,I2 - L^2\,m2 + 2\,L^2\,m2\,Cos[q2[t]]\right) q2''[t] == 0,$$

$$M2 - Fy\,L\,Cos[q1[t]+q2[t]] + Fx\,L\,Sin[q1[t]+q2[t]] + \frac{1}{2}\,L^2\,m2\,Sin[q2[t]]\,q1'[t]^2 + \frac{1}{4}\left(-4\,I2 - L^2\,m2 + 2\,L^2\,m2\,Cos[q2[t]]\right) q1''[t] + \left(-I2 - \frac{L^2\,m2}{4}\right) q2''[t] == 0\Big\};$$

```
Simplify[Collect[ eq1, {q1''[t], q2''[t]}, FullSimplify] /.
  First@Simplify@Solve[EquazioniPLV, {q1''[t], q2''[t]}]]
```

```
True
```

```
Simplify[Collect[ eq2, {q1''[t], q2''[t]}, FullSimplify] /.
  First@Simplify@Solve[EquazioniPLV, {q1''[t], q2''[t]}]]
```

```
True
```