

# **140452 - Sistemi Meccanici e Modelli**

Marco Peressutti

192864

marco.peressutti@studenti.unitn.it

5 ottobre 2025

# Indice

<b>Elenco delle figure</b>	<b>iv</b>
<b>Elenco delle tabelle</b>	<b>v</b>
<b>1 Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2 Gradi di libertà, struttura dei meccanismi e richiami</b>	<b>3</b>
2.1 Gradi di libertà . . . . .	3
2.2 Coppie cinematiche piane . . . . .	4
2.3 Struttura dei meccanismi . . . . .	8
2.4 Gradi di libertà dei meccanismi piani . . . . .	11
2.5 Cinematica dei corpi rigidi . . . . .	17
2.5.1 Introduzione . . . . .	17
2.5.2 Velocità angolare . . . . .	17
2.5.3 Accelerazione angolare . . . . .	19
2.5.4 Cinematica di un corpo nel piano . . . . .	20
2.5.5 Matrice di rotazione . . . . .	21
2.5.6 Trasformazione di coordinate . . . . .	21
2.5.7 Cinematica dei moti relativi . . . . .	23
2.5.8 Cinematica dei moti relativi nel piano . . . . .	24
<b>3 Analisi cinematica dei meccanismi piani</b>	<b>26</b>
3.1 Analisi cinematica dei meccanismi piani in catena aperta . . . . .	26
3.2 Analisi cinematica di meccanismi piani con una catena chiusa . . . . .	29
3.2.1 Glifo oscillante . . . . .	29
3.2.2 Analisi cinematica del quadrilatero articolato . . . . .	33
3.2.3 Meccanismo di spinta . . . . .	38
3.3 Riepilogo analisi cinematica . . . . .	40
3.3.1 Analisi di posizione . . . . .	40
3.3.2 Analisi di velocità . . . . .	40
3.3.3 Analisi di accelerazione . . . . .	41
3.4 Analisi cinematica dei meccanismi piani con due o più catene cinematiche . . . . .	41
3.4.1 Meccanismi debolmente accoppiati . . . . .	43
3.4.2 Meccanismi fortemente accoppiati . . . . .	46
3.4.3 Meccanismi a più gradi di libertà . . . . .	47
3.5 Meccanismi con elementi dotati di moto di puro rotolamento . . . . .	48
3.5.1 Esempio . . . . .	50
3.5.2 Esercizio N.1 . . . . .	51
3.6 Polo di istantanea rotazione . . . . .	53
3.6.1 Curve polari . . . . .	55
3.6.2 Profili coniugati . . . . .	56
<b>4 Analisi cinematica dei meccanismi con coppie a camma</b>	<b>57</b>
4.1 Introduzione . . . . .	57
4.2 Analisi cinematica dei meccanismi a camma con il metodo dell'equivalenza cinematica . .	59
4.3 Analisi cinematica dei meccanismi con l'equazione ausiliaria . . . . .	60
4.3.1 Camma a disco con punteria a piattello . . . . .	61
4.4 Camma con cedente oscillante a rotella . . . . .	62

<b>5 Dinamica applicata</b>	<b>63</b>
5.1 Equazione dell'energia . . . . .	63
5.1.1 Esempi . . . . .	64
5.2 Equazione del moto con l'approccio energetico . . . . .	66
5.2.1 Forze e momenti funzione della posizione . . . . .	69
5.2.2 Forze non conservative . . . . .	69
5.3 Analisi dinamica del manovellismo di spinta . . . . .	71
5.4 Rendimento di un sistema meccanico . . . . .	72
5.4.1 Rendimento di macchine disposte in serie . . . . .	73
5.5 Lezione 01-04 – Daniele Boroluzzi . . . . .	73
5.5.1 Rendimento di macchine in parallelo . . . . .	75
5.5.2 Moto diretto e retrogrado . . . . .	76
5.5.3 Equivalenza dinamica di membri rigidi . . . . .	80
5.6 Lezione 08-04 – Daniele Bortoluzzi . . . . .	81
5.6.1 Irregolarità e stabilità del moto . . . . .	81
5.6.2 Stabilità del funzionamento delle macchine . . . . .	85
5.6.3 Componenti meccanici: le coppie cinematiche . . . . .	86
5.7 Lezione 15-04 – Daniele Bortoluzzi . . . . .	90
5.7.1 Richiamo sui vincoli . . . . .	90
5.7.2 Principali fattori che influenzano l'attrito . . . . .	95
5.7.3 Usura . . . . .	99
5.8 Lezione 22-04 – Daniele Bortoluzzi . . . . .	102
5.8.1 Attrito di rotolamento . . . . .	102
5.8.2 Resistenza al rotolamento (attrito volvente) . . . . .	103
5.9 Lezione 29 -04 – Daniele Bortoluzzi . . . . .	111
5.9.1 Meccanismi con elementi dotati di puro rotolamento . . . . .	113
5.9.2 Rotolamento puro oppure con strisciamento . . . . .	115
5.9.3 Componenti meccanici: ruote di frizione . . . . .	116
5.10 Lezione 06-05 – Daniele Bortoluzzi . . . . .	119
5.10.1 Esercizio: sospensione McPherson . . . . .	119
5.10.2 Componenti meccanici: Trasmissioni a cinghia . . . . .	123
5.11 Lezione 13-05 – Daniele Bortoluzzi . . . . .	125
5.11.1 Esercizio . . . . .	126
<b>6 Equazioni fondamentali della dinamica</b>	<b>132</b>
6.1 Equazioni di Newton-Eulero nel piano . . . . .	132
6.1.1 Equazioni di Newton . . . . .	133
6.1.2 Le equazioni di Eulero . . . . .	137
6.1.3 Esempi di applicazione delle equazioni di Newton-Eulero nel piano . . . . .	140
6.2 Equazioni di Newton-Eulero nello spazio . . . . .	144
6.2.1 Equazioni di Newton . . . . .	144
6.2.2 Esempi applicativi . . . . .	145
6.3 Considerazioni aggiuntive sulle equazioni di Eulero . . . . .	146
6.3.1 Momenti d'inerzia principale su una terna mobile . . . . .	148
6.4 Applicazione: Rotori con sbilanciamento dinamico . . . . .	149
6.5 Applicazione: Moto rotatorio con effetti giroscopici . . . . .	150
6.6 Princípio dei Lavori Virtuali (PLV) . . . . .	152
6.6.1 Applicazione del PLV ad un sistema ad 1 G.d.L.: il glifo oscillante . . . . .	156
6.6.2 Applicazione del PLV a sistemi a più G.d.L. . . . .	157
6.6.3 Applicazione: sospensione di una motocicletta . . . . .	158
6.6.4 Princípio di d'Alembert . . . . .	159
6.7 Vincoli olonomi e vincoli anolonomi . . . . .	160
6.8 Equazioni di Lagrange . . . . .	161
6.8.1 Applicazione: Pendolo su vincolo mobile . . . . .	164

<b>7 Meccanismi nello spazio</b>	<b>167</b>
7.1 Meccanismi in catena chiusa . . . . .	167
7.2 Meccanismi in catena aperta . . . . .	168
7.3 Analisi di mobilità . . . . .	168
7.3.1 Catene spaziali chiuse . . . . .	168
7.3.2 Catene spaziali aperte . . . . .	169
7.4 Matrice di rotazione nello spazio . . . . .	170
7.4.1 Angoli di Cardano . . . . .	170
7.4.2 Angoli di Eulero e varianti . . . . .	171
7.4.3 Metodo di Gupta . . . . .	172
7.5 Velocità angolare di un S.d.R . . . . .	175
7.5.1 Velocità angolare in un S.d.R. fisso . . . . .	176
7.5.2 Velocità angolare in un S.d.R. mobile . . . . .	176
7.6 Energia cinetica di corpi rigidi nello spazio . . . . .	176
7.7 Matrici di trasformazione . . . . .	179

## **Elenco delle figure**

# **Elenco delle tavelle**

# 1 Introduzione

La Meccanica Applicata alle Macchine ha come obiettivo lo studio delle macchine o meglio dei sistemi meccanici. Cerchiamo per prima cosa di chiarire il concetto di macchina:

## Definition 1: Macchina

costruzione dell'uomo, il cui stato evolve nel tempo, atta al raggiungimento di un prefissato obiettivo.

Dato che l'obiettivo principale dell'uomo è l'esecuzione di un determinato lavoro utile, la macchina può essere vista come: *Sistema di organi disposti in modo tale da compiere lavoro di interesse industriale*. L'esecuzione del lavoro comporta, di conseguenza, la presenza di forze applicate e trasmesse tra i vari organi della macchine e di spostamenti degli stessi.

Secondo un approccio classico le macchine si possono dividere in 2 classi principali (in base alla loro funzione):

1. **Macchine energetiche**: costituite allo scopo di ottenere determinate trasformazioni di energia.

Esse si possono distinguere a loro volta tra:

- macchine **motrici**: trasformano l'energia di altra forma in energia meccanica
- macchine **generatrici**: trasformano l'energia meccanica in energia di altra forma

2. **Macchine operatrici**: costruite allo scopo di realizzare specifiche operazioni diverse dalla trasformazione di energia. È possibile formulare un'ulteriore distinzione delle diverse macchine operatrici per esempio in base al loro utilizzo (e.g. macchine utensile, macchine di sollevamento, macchine tessili, macchine per lo scavo e sollevamento terra, robot, macchine da trasporto...)

A questa classificazione formulata secondo un *approccio classico*, è preferito un secondo approccio, detto approccio metodologico.

La principale distinzione tra i due approcci risiede nella classificazione in base alle loro caratteristiche cinematiche e dinamiche (metodologico) piuttosto che in base alla loro funzione (classico).

Secondo le premesse appena esposte è possibile, dunque, dare una nuova definizione di Macchina:

## Definition 2: Macchina

La macchina è un sistema meccanico costituito da più componenti o sottoinsiemi. Ciò che caratterizza il sistema è il modello matematico (i.e. insieme di equazioni che ne rappresentano il comportamento cinematico e dinamico in determinate condizioni).

dove un **Sistema meccanico** consiste in un insieme di più componenti (solidi, deformabili, rigidi, fluidi, liquidi, aeriformi) collegati tra di loro da coppie cinematiche in modo da realizzare determinati moti relativi tra di loro e in modo da trasmettere determinate forze.

Il sistema in questione è caratterizzato dal fatto di essere separabile dall'ambiente mediante un confine di tipo fisico o concettuale attraverso il quale avvengono scambi di energia o di informazioni, e di essere costituito da più componenti interconnessi in modo da formare un'unica entità. Note le proprietà dei sistemi meccanici, l'obiettivo fondamentale della meccanica applicata è, di conseguenza, la costruzione di un modello matematico (è possibile costruirne più di uno tra cui è da preferire il più semplice tra quelli che riescono a conservare le caratteristiche essenziali del sistema reale) che è possibile formulare tramite la cosiddetta operazione di sintesi.

L'operazione di sintesi consiste nell'utilizzo di una serie di procedure razionali per la scelta del tipo di sistema meccanico, del numero dei suoi membri e delle sue dimensioni. La sintesi è suddivisa in tre fasi:

- **sintesi di tipo**: scelta del tipo di sistema meccanico

- **sintesi di numero:** definizione del sistema (e.g. numero di componenti e loro collegamento relativo)
- **sintesi dimensionale:** determinazione delle dimensioni degli organi del sistema

CINEMATICA DIRETTA	PROBLEMI DI ANALISI	DINAMICA DIRETTA
Assegnato il modo del membro motore, studio del moto degli altri membri del sistema (indipendentemente dalle forze che li generano).		Studio del moto dei membri generato dalle forze applicate o dalle condizioni iniziali diverse da quelle di equilibrio stabile
CINEMATICA INVERSA	PROBLEMI DI ANALISI	DINAMICA INVERSA
Assegnato il moto di uno o di alcuni membri condotti del sistema determinare come deve muoversi il membro motore affinché il membro condotto sia quello desiderato		Assegnate le forze applicate al sistema e le leggi del moto del membro motore, determinare il valore della forza motrice da applicare affinché si ottenga il moto desiderato.
CINEMATICA	PROBLEMI DI SINTESI	DINAMICA
Determinare con procedure razionali le caratteristiche strutturali del sistema in grado di realizzare il moto desiderato		Determinare con procedure razionali le caratteristiche strutturali del sistema in grado di realizzare il moto desiderato

## 2 Gradi di libertà, struttura dei meccanismi e richiami

### 2.1 Gradi di libertà

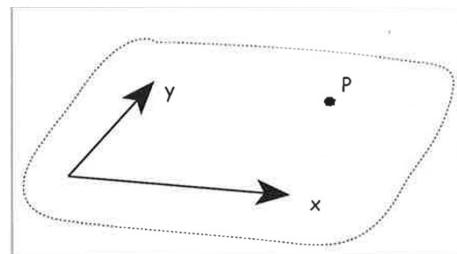
I gradi di libertà di un sistema meccanico sono pari al numero di variabili indipendenti che si devono specificare per descrivere il movimento.

Esempi:

1. La posizione di una particella posta su un piano può essere completamente definita:

- una volta fissato un sistema di riferimento cartesiano, da due variabili indipendenti ( $x_p, y_p$ )
- una volta assegnato l'angolo e il raggio (coordinate polari del punto), da due variabili indipendenti ( $\rho, \alpha$ )

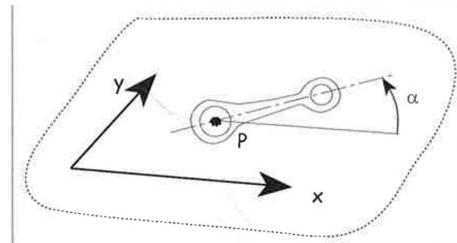
Per definire la posizione di un punto sono sufficienti due variabili, di conseguenza si dice che la particella nel piano ha due gradi di libertà.



2. Un corpo rigido nel piano ha invece tre gradi di libertà (una volta fissato un sistema di riferimento cartesiano):

- due gradi di libertà possono essere associati alle coordinate di un punto qualsiasi di questo corpo rigido (posizione)
- il terzo all'angolo  $\alpha$  dell'asse di simmetria con uno dei vettori di riferimento (orientamento)

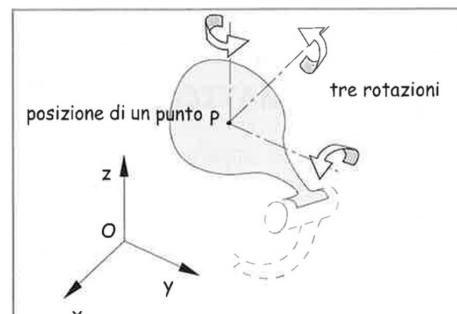
È possibile definire altri metodi per descrivere la posizione del corpo rigido nel piano, ma alla fine dobbiamo specificare sempre 3 variabili



3. Una particella libera di muoversi nello spazio ha 3 gradi di libertà: infatti sono necessarie solo 3 coordinate (cartesiane o sferiche) per descrivere completamente la sua posizione nello spazio.

4. Un corpo rigido nello spazio ha 6 gradi di libertà, perché per descriverlo completamente sono necessarie:

- 3 coordinate per specificare la posizione di un punto del corpo rigido nello spazio
- 3 angoli per definirne l'orientamento



Dagli esempi proposti si può dedurre facilmente che esistono diversi modi di associare i gradi di libertà alle varie coordinate, ma devono essere rispettati due requisiti:

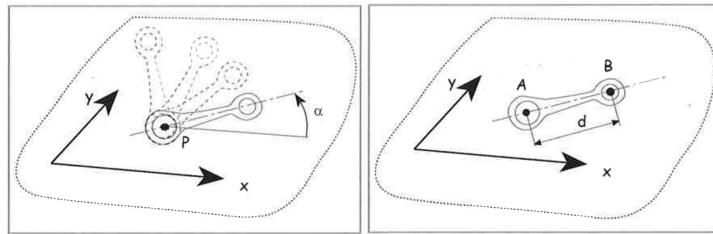
1. Le coordinate devono essere **SUFFICIENTI** a descrivere completamente il sistema
2. Le coordinate devono essere **INDIPENDENTI**

Un insieme di coordinate sufficienti e indipendenti viene chiamato insieme di "coordinate generalizzate"

!! Il numero di gradi di libertà può essere diminuito imponendo dei vincoli al corpo o al sistema di corpi rigidi in esame. In tal caso si parla di **EQUAZIONE DI VINCOLO DI CORPO RIGIDO** (=corpo non deformabile).

**Esempio:** nell'occasione della definizione della posizione di un corpo sono sufficienti le coordinate del punto P ( $x_p, y_p$ ) e l'angolo  $\alpha$  a descrivere il sistema, infatti se sono assegnate il corpo rigido può avere una sola posizione e un solo orientamento. (Figura a sinistra)

Alternativamente se avessimo preso le coordinate di due punti su un piano non avrei avuto bisogno di tutte e 4 le variabili ( $x_a, x_b, y_a, y_b$ ) [con A e B due punti materiale del corpo in questione] bensì solo di 3 in quanto il corpo, essendo rigido e dunque indeformabile, impone un'equazione di vincolo fisso sulla distanza dei punti A e B. (figura a destra)



I punti in questione, infatti, sono vincolati a tenersi alla medesima distanza:

$$d = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2} = \text{cost}$$

Si può notare che imponendo tale vincolo una delle variabili scelte risulta essere rindondante e può essere ricavata dall'equazione di vincolo conoscendo le 3 rimanenti.

## 2.2 Coppie cinematiche piane

I corpi rigidi interagiscono tra loro all'interno di uno stesso sistema meccanico per via di collegamenti reciproci che ne limitano i gradi di libertà. Tali limiti imposti sul moto relativo fra i corpi sono chiamati **VINCOLI**.

\*\* **Elementi cinematici** := superfici dei due corpi fra loro a contatto della coppia.

\*\* **Coppia cinematica** := sistema che accoppia due membri e che quindi toglie alcuni gradi di libertà del moto relativo

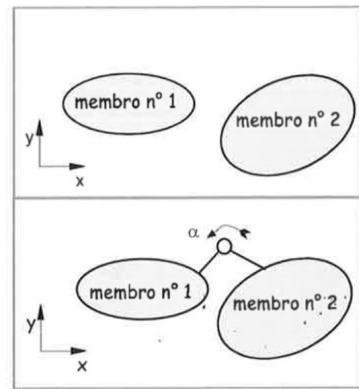
Nel piano possiamo distinguere tra 3 coppie cinematiche:

### 1. Coppia rotoidale (R) o Cerniera

Consideriamo due corpi rigidi nel piano. Ognuno di essi prevede 3 gradi di libertà che identificano la posizione di un loro punto materiale nel piano e uno che ne identifica l'orientamento (es. angolo rispetto all'orizzontale).

La **coppia rotoidale** o **cerniera** consiste nell'accoppiamento di una superficie cilindrica piena (appartenente ad un corpo) e di una superficie cilindrica vuota (appartenente all'altro corpo) con medesimo raggio (per ovviare al problema della presenza di giochi tra i due componenti; questo tipo di coppia priva di giochi è anche chiamata **COMBACIANTE**).

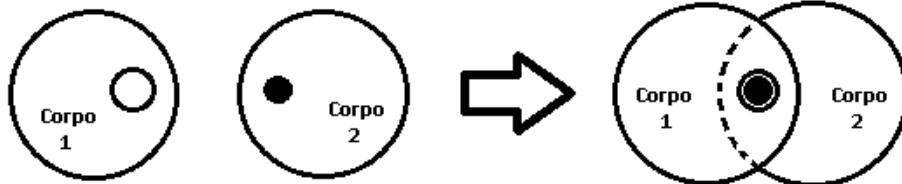
Se i raggi sono idealmente uguali un corpo sarebbe capace di ruotare intorno al centro della cerniera il che equivale a dire che i 2 corpi condividono/hanno 2 punti coincidenti



- per cui le equazioni di congruenza che rappresentano/descrivono questa coppia cinematica saranno:

$$x(p_1) = x(p_2) \quad y(p_1) = y(p_2)$$

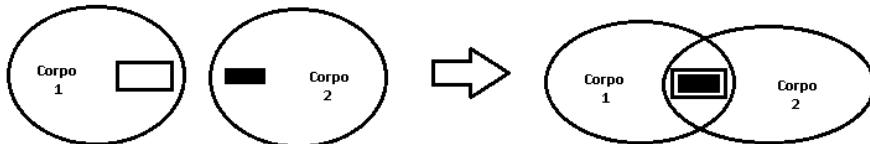
- tale vincolo è dovuto all'accoppiamento dei due corpi e alla rotazione relativa di uno rispetto all'altro attorno al punto in cui è presente la cerniera



In conclusione: due corpi separati hanno 3 gradi di libertà ciascuno; due corpi incernierati hanno 2 variabili rindondanti (ovvero, combinati, 4 gradi di libertà)

### 2. Coppia prismatica (P)

Nel caso si voglia che sopravviva un moto relativo di traslazione è possibile decidere di applicare una coppia prismatica: essa consiste nella realizzazione di una cava rettangolare su un corpo e di un prisma sull'altro corpo (idealmente le superfici devono essere: uguali, in modo da permetterne lo scorrimento, e avere le stesse dimensioni).

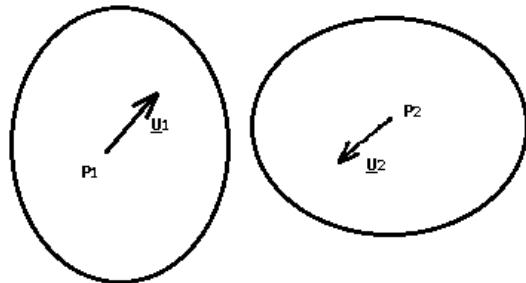


Al fine di rappresentare la coppia prismatica devo definire in primo luogo l'asse (identificato dai vettori  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$ ) e la posizione dell'elemento prismatico ( $p_1, p_2$ ) in questione.

A partire da tali dati sui due corpi devo successivamente imporre i seguenti vincoli:

- a)  $\underline{u}_1$  e  $\underline{u}_2$  devono essere paralleli, ovvero il prodotto vettoriale/esterno dei vettori degli assi deve essere nullo (in questo modo l'angolo di rotazione di entrambi i corpi sarà lo stesso)

$$\underline{u}_1 \wedge \underline{u}_2 = 0$$

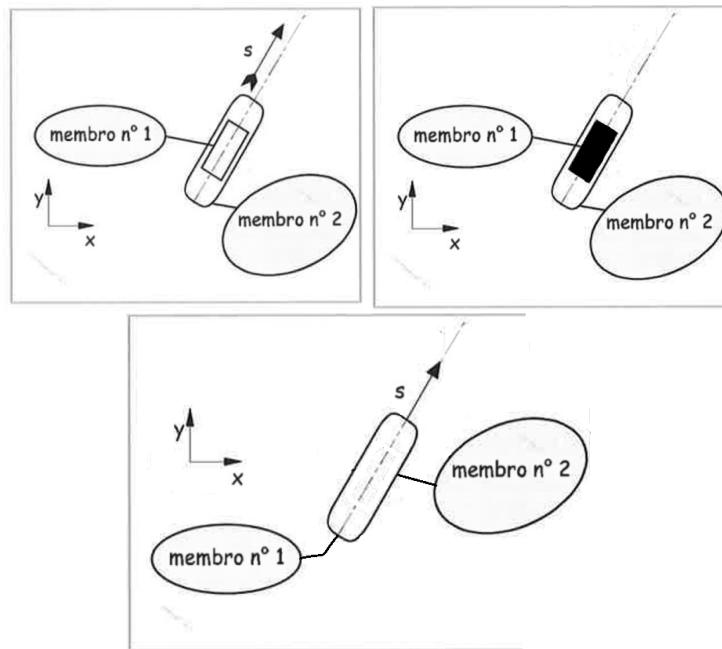


- b) la distanza di  $p_2$  dal vettore  $\underline{u}_1$  deve essere nulla

$$d_{p_2 \rightarrow u_1} = 0$$

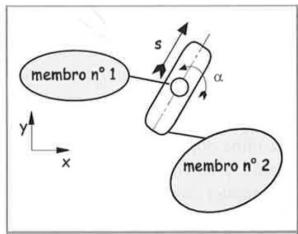
In questo modo rimane libera la traslazione nella direzione dell'asse comune ai 2 elementi prismatici  
OSS:

- le precedenti coppie cinematiche hanno superfici cinematiche coincidenti/presentano contatto superficiale
- La seguenti rappresentazioni, assieme a quelle già proposte precedentemente, della coppia prismatica sono ammesse:



### 3. Coppia a camma (C)

Contrariamente alle precedenti coppie cinematiche in cui venivano eliminati 2 gradi di libertà, la coppia a camma permette di eliminare solo un grado di libertà (ovvero la traslazione lungo una direzione).



Essa viene schematizzata da:

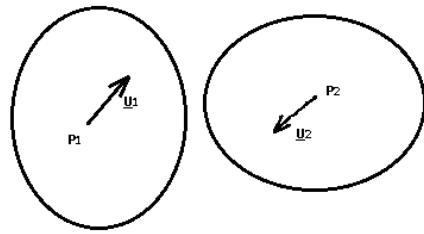
- Una guida prismatica connessa al corpo 1
- Un cilindro di diametro pari alla dimensione della cava/guida connessa al corpo 2

In tal modo il cilindro può scorrere all'interno della cava e ruotare su se stesso.

Il vincolo da imporre in tale situazione è che il punto  $p_2$  (ovvero il centro/asse del cilindro) sia sull'asse della cava e viene rappresentata dall'equazione di vincolo

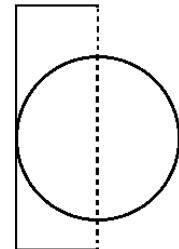
$$(p_1, p_2) \parallel \mathbf{u}_1$$

Ovvero che il vettore che collega i due punti in questione sia parallelo all'orientazione della cava prismatica che farà da guida al cilindro.



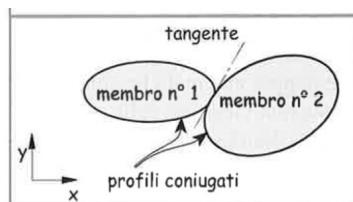
**OSS:**

- Nella coppia a camma si ha contatto su una dimensione/un punto nel piano non sulla linea o tutte le superfici, come invece avveniva per la coppia rotoidale e la coppia prismatica (*contatto non combaciante*)
- a volte la realizzazione di tale coppia impiega mezza cava prismatica (in questa situazione la coppia si definisce **unilaterale** e il vincolo è anch'esso definito unilaterale)
  - il vincolo bilaterale (descritto precedentemente) prende, dunque, un accoppiamento di forma (chiusa) o a comando positivo [la forma stessa degli elementi cinematici è sufficiente a mantenere il contatto]
  - il vincolo unilaterale prende, invece, un accoppamento di forza o di forma aperta [per mantenere la coppia è necessaria una forza] (cfr. comando desmodromico)



- Non si è vincolati ad avere l'asse della camma rettilinea (essa può assumere qualsiasi forma), per questa ragione è necessario introdurre il concetto di:

**PROFILI CONIUGATI** := profili di due corpi che vengono a contatto durante il moto dove non è presente un vera e propria coppia a camma, ma tale coppia è realizzata dalla opportuna profilazione dei due corpi coinvolti



- Nelle concrete realizzazioni, gli elementi cinematici possono essere rigidi o deformabili
  - Gli elementi cinematici si possono accoppiare tra di loro in modo tale da realizzare un contatto su superficie estesa (combaciante)
  - oppure un contatto lineare o puntiforme (tipico della coppia a camma) (non combaciante)
- Le coppie cinematiche realizzate con elementi rigidi e combacianti che lasciano un solo grado di libertà relativo sono dette coppie elementari od inferiori (aka rotoidale e prismatica)
- Le altre coppie cinematiche sono chiamate superiori e sono realizzate con membri rigidi aventi elementi cinematici non combacianti oppure membri rigidi aventi elementi cinematici combacianti (aka cinghie che sono corpi non estensibili ma flessibili).

Delle coppie di classe superiore si distinguono, difatti, diverse classi in base al numero di gradi di libertà che lasciano liberi (ossia non vincolati dalla coppia)

Il contatto tra gli elementi cinematici può essere:

1. di puro rotolamento se la velocità nel punto di contatto è nulla (**SENZA STRISCIAMENTO**)
2. di strisciamento se la velocità tra le superfici a contatto non è nulla (**CON STRISCIAMENTO**) [⇒ favorisce l'usura del pezzo]
3. d'**URTO** se la velocità relativa dei due elementi cinematici ha una componente non nulla nella direzione normale alle superfici -> la realizzazione di giochi per l'accoppiamento è particolarmente soggetto ad urti che ne determina un aumento dell'usura superficiale, vibrazione, e perdita di performance.

## 2.3 Struttura dei meccanismi

È giunto il momento di discutere su come mettere insieme un certo numero di corpi a formare un sistema/macchina

**MEMBRO** := elemento di una macchina in movimento rispetto agli altri e ad essi connesso tramite coppie cinematiche

Il membro che è fisso rispetto al riferimento assoluto è detto **TELAIO** (corpo rispetto a cui vado a studiare il movimento / di riferimento)

Un membro che è connesso agli altri tramite due coppie cinematiche viene detto *binario*

Un membro che è connesso agli altri tramite tre coppie cinematiche viene detto *ternario*

Tradizionalmente i diversi membri binari si distinguono in:

- **Manovelle**: se hanno
  - due coppie rotoidali, di cui una fissa a telaio,
  - possono ruotare di 360 deg rispetto a telaio
- **Bilanciere** : se hanno
  - due coppie rotoidali di cui una fissa a telaio
  - non riescono a compiere una rotazione completa rispetto al telaio
- **Bielle**: se hanno due coppie rotoidali entrambe non a telaio

Un sistema di membri connessi tra di loro da coppie cinematiche formano una **CATENA CINEMATICA**. Queste possono essere:

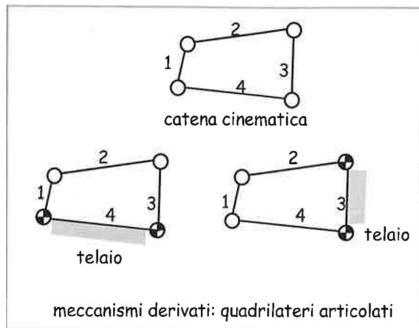
- **Chiuse** = se forma uno o più anelli chiusi
- **Aperti** = se presenta uno o più rami aperti

La differenza concettuale tra catena cinematica e meccanismo risiede nel momento in cui viene scelto il telaio:

- una **Catena cinematica** è un sistema/insieme di membri in cui non è stato ancora definito un telaio
- un **Meccanismo** è un sistema/insieme di membri in cui è presente un telaio

Da tale definizione si può denotare che da una stessa catena cinematica possono essere definiti più meccanismi, in quanto ogni membro della catena può essere definito come telaio. Procediamo, dunque, a osservare più nel dettaglio le possibili catene cinematiche che si possono estrarre dalla diversa combinazione delle sue proprietà:

La più semplice e comune catena cinematica chiusa è la catena a quadrilatero che è formata da quattro membri binari.

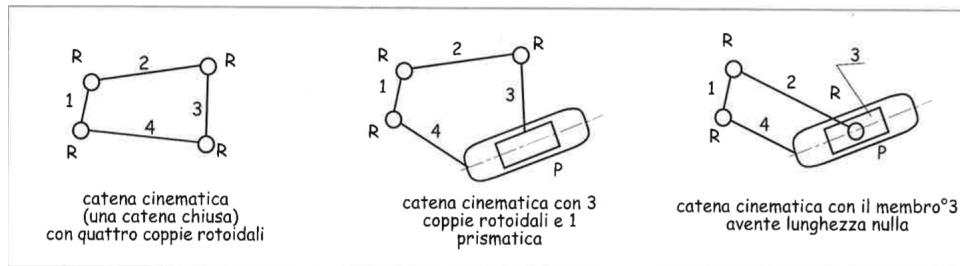


**Figura a sinistra:**  
Membro 1 e 3 bilanciere;  
Membro 2 biella;  
Membro 4 telaio.

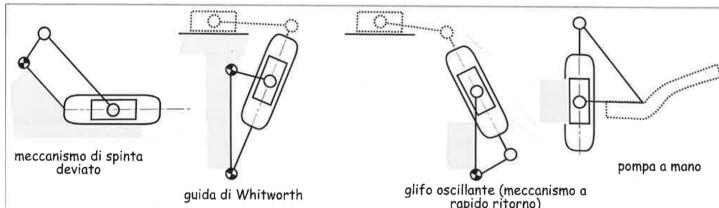
**Figura a destra:**  
Membro 2 e 4 bilanciere;  
Membro 1 biella;  
Membro 3 telaio.

Nel caso in cui le quattro coppie cinematiche siano rotoidali da questa catena deriveranno tutti i meccanismi del tipo a quadrilatero articolato (vengono proposti degli esempi nella figura a lato, in cui dalla catena cinematica sono stati scelti come telaio, rispettivamente, il membro 3 e 4)

Tuttavia è possibile sostituire alcune coppie rotoidali con coppie prismatiche, ottenendo la relativa catena cinematica a quadrilatero RRRP. Inoltre, se il membro binario con coppia rotoidale e prismatica avesse lunghezza nulla le due coppie cinematiche si confonderebbero/risulterebbero sovrapposte. Ciò a dimostrare che è possibile ricondursi a catene cinematiche equivalenti a seconda dei casi, purché si rispetti la funzione e il movimento relativo dei membri. (La natura di una coppia cinematica può essere cambiata)



La catena cinematica appena ottenuta può, a questo punto, essere analizzata per scoprirne le funzioni che può compiere a seconda di quale membro venga posto a telaio.



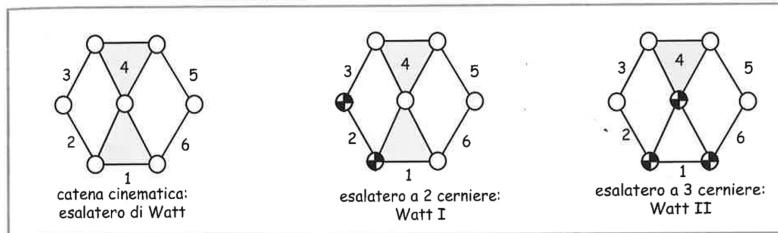
Il meccanismo di spinta deviato corrisponde ad un meccanismo a catena a quadrilatero chiuso in cui il perno della manovella non è sull'asse del pattino; l'utilità di tale meccanismo è da ricercarsi nella diversa lunghezza dell'arco di compressione e espansione.

Più nel dettaglio il **meccanismo di spinta** deviato è costituito dal telaio collegato ad una manovella (capace di compiere un giro completo attorno ad una coppia rotoidale fissa) e da una biella collegata alla manovella tramite coppie rotoidali mobili. Il moto della biella viene dunque trasferito ad un pattino o corsoio che, data la coppia prismatica (pattino) in cui è inserito, converte il moto rotazionale degli elementi precedenti in un moto lineare.

Per quanto riguarda le catene cinematiche a 6 corpi/membri, le più importanti sono da attribuire a Watt e Stephenson. Di seguito vengono proposti alcuni meccanismi derivanti dall'esalatero di Watt e Stephenson:

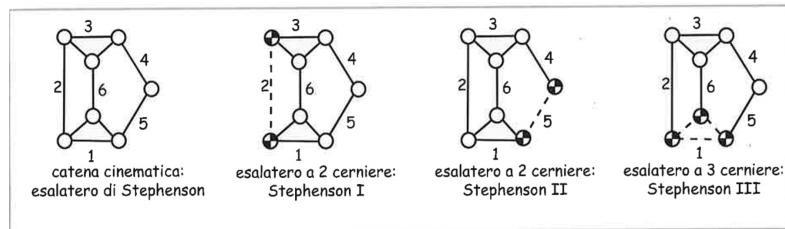
- **ESALATERO DI WATT E RISPETTIVI MECCANISMI**

I 6 corpi/membri che compongono l'esalatero di Watt sono collegati vicendevolmente da 2 coppie ternarie e 2 coppie binarie.



In particolare i due corpi ternari sono collegati tra di loro e i due quadrilateri sono collegati in sequenza.

#### • ESALATERO DI STEPHENSON E RISPETTIVI MECCANISMI

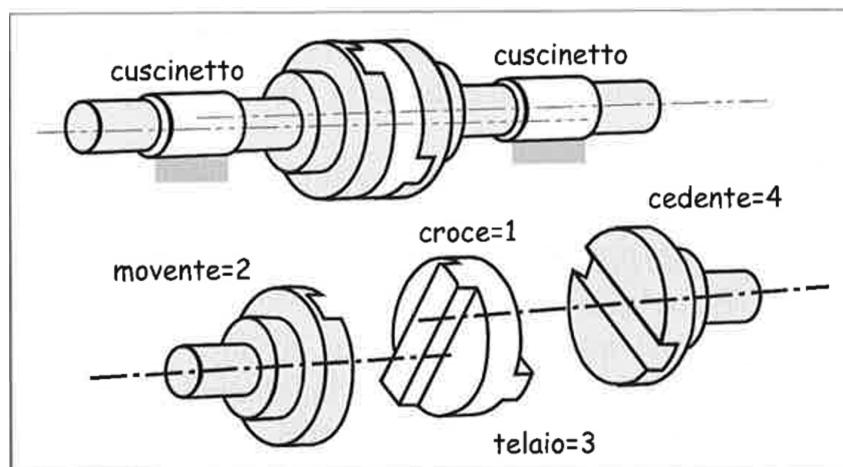


I 6 corpi/membri che compongono l'esalatero di Stephenson sono collegati vicendevolmente da 2 coppie ternarie e 2 coppie binarie.

Tuttavia a differenza dell'esalatero di Watt i due corpi ternari non risultano essere collegati tra di loro direttamente, bensì vi è presente un corpo binario a svolgere tale funzione.

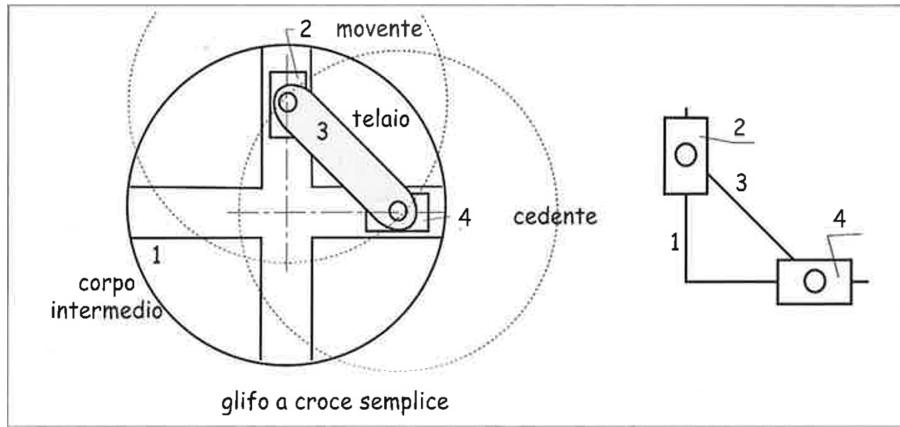
Fino ad ora sono stati affrontati dei meccanismi rappresentativi in maniera convenzionale mediante i loro schemi cinematici; nella realtà la realizzazione costruttiva potrebbe essere assai diversa dal corrispondente schema cinematico (*e non immediatamente identificabile*).

Un esempio di tale problema di identificazione può essere ricercato nel **giunto di Oldham**, che viene generalmente impiegato per trasmettere il moto tra due assi paralleli disallineati (aka **Giunto omocinetico**), e di cui è proposta una rappresentazione di seguito.



Infatti se volessimo rappresentare lo schema cinematico che descrive questo particolare giunto, esso si comporrebbe di un glifo con l'asta 3 fissata al telaio, il pattino 2 e 4 (rispettivamente movente e cedente) e la croce 1 rappresentata dal corpo intermedio.

In futuro avremo molto a che fare con moventi e cedenti nella rappresentazione degli schemi cinematici. Di conseguenza risulta fondamentale darne subito una definizione:



**MOVENTI DEL MECCANISMO** (*membri motori*) := membri sui quali agiscono delle forze esterne che compiono lavoro positivo detto lavoro motore (corpo di una catena cinematica a cui è imposto un movimento)

**CEDENTI DEL MECCANISMO** (*membri condotti*) := membri sui quali agiscono delle forze esterne che compiono lavoro negativo detto lavoro resistente (corpo di una catena cinematica che impone il movimento)

Ad esempio, nel meccanismo biella manovella azionato da un motore elettrico, il pistone/glifo rappresenta il cedente, il motore elettrico il movente. Nel sistema ad ingranaggi il cedente è rappresentato dal carico sostenuto da una fune collegata all'ultima ruota ad ingranaggi, il movente è rappresentata dalla prima ruota ad ingranaggi che trasmette la rotazione al treno di ingranaggi successivi.

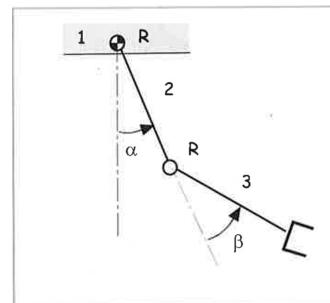
## 2.4 Gradi di libertà dei meccanismi piani

Nel decorso di questa sezione ci occuperemo della determinazione dei gradi di libertà di sistemi meccanici, vincolati da coppie cinematiche, tramite degli esempi:

### 1. ESEMPIO N.1

Il sistema in figura è composto da 3 corpi/membri:

- Il telaio 1 che non conferisce al sistema alcun G.d.L. (0 G.d.L.)
- Il corpo 2 che è collegato al telaio tramite una coppia rotoidale (R) e di conseguenza presenta un solo G.d.L. (1 G.d.L.)
- Il corpo 3 anch'esso collegato al corpo 2 tramite una coppia rotoidale (R) ed è, di conseguenza, denotato da un solo G.d.L. (1 G.d.L.)



In totale il meccanismo in questione presenta 2 G.d.L. che possono essere ricondotti agli angoli  $\alpha$  (descrive la rotazione di 2 rispetto a 1) e  $\beta$  (descrive la rotazione di 3 rispetto a 2).

Tali coordinate risultano essere 2 coordinate generalizzate, ovvero sufficienti e indipendenti a descrivere completamente il sistema di corpi.

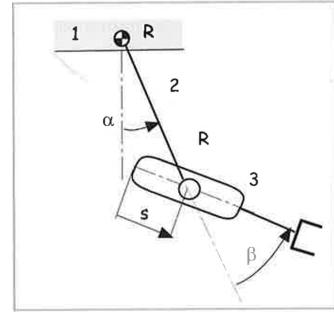
### 2. ESEMPIO N.2

Sostituendo all'esempio precedente la coppia rotoidale responsabile del collegamento tra i membri 2 e 3 con una coppia a camma (C) si libera un ulteriore G.d.L. del sistema, più in particolare di

traslazione del corpo 3 rispetto a 2.

In tal modo si potranno osservare 3 G.d.L. del meccanismo:

- Il telaio 1 che non conferisce al sistema alcun G.d.L. (0 G.d.L.)
- Il corpo 2 che è collegato al telaio tramite una coppia rotoidale (R) e di conseguenza denota un solo G.d.L. (1 G.d.L.)
- Il corpo 3 che è collegato al corpo 2 tramite una coppia a camma, di classe  $c_2$ , che conferisce al corpo 3 di ruotare attorno alla coppia stessa e di traslare (2 G.d.L.)

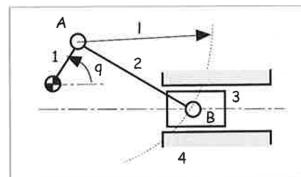


Le coordinate generalizzate del sistema in esame saranno, di conseguenza:  $\alpha$ ,  $\beta$  (cfr. Esempio n.1) e  $s$  (= traslazione rispetto ad un estremo della coppia prismatica in cui è presente la camma) (tutte funzioni del tempo:  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  e  $s(t)$ ) e risultano, difatti, parametri sufficienti e necessari a descrivere completamente la posizione del sistema meccanico

### 3. ESEMPIO N.3

La catena cinematica chiusa, anche conosciuta con il nome di meccanismo di spinta deviato, e riportata a fianco, si compone di 4 membri/corpi, che se considerati indipendenti contribuiscono al calcolo con 3 G.d.L. ciascuno ( $4(\text{membri}) \cdot 3(\text{G.d.L.}) = 12(\text{G.d.L.})$ ):

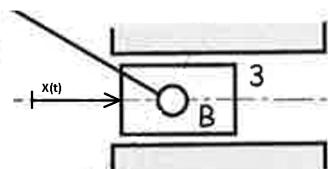
- Il corpo 1 (manovella) che è collegato al telaio e al corpo 2 tramite 2 coppie rotoidali (R) e priva il sistema di 2 G.d.L
- Il corpo 2 (biella) che è collegato ai corpi 1 e 3 tramite coppie rotoidali (R) ( $-2 \cdot 3 = -6$  G.d.L.)
- Il corpo 3 (pistone) che trasforma il moto rotoidale dei corpi precedenti in un moto lineare ed è collegata al telaio tramite una coppia prismatica che priva il sistema di 2 G.d.L. ( $-2$  G.d.L · 1)
- Il corpo 4 (telaio) che rappresenta la sede entro cui avviene la traslazione del pistone e priva il sistema di 3 G.d.L. (- 3 G.d.L.)

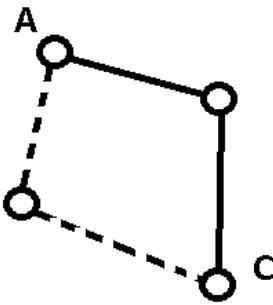


In conclusione possiamo determinare il numero di G.d.L. del meccanismo nel seguente modo:

$$12(\text{corpi indipendenti}) - 3(\text{telaio}) - 6(R) - 2(P) = 1(\text{G.d.L.})$$

Infatti si può osservare che la posizione e il movimento del meccanismo può essere descritto da un'unica coordinata generalizzata, ad esempio l'angolo rispetto all'orizzontale  $q(t)$  che la manovella individua attorno il telaio, oppure la posizione del pistone/glifo ripetuto alla sua condizione iniziale  $x(t)$ .





Ciò che non viene tenuto in considerazione è che in questo particolare esempio esistono in realtà due soluzioni ammesse/configurazioni: Infatti in catene cinematiche chiuse esistono più modi per calcolare il meccanismo.

Una volta date le posizioni del punto/coppe di punti A e C, esistono due modi di chiudere la catena cinematica.

Il metodo appena utilizzato per la determinazione dei G.d.L. del meccanismo prende il nome di **Equazione di Grübler** e risulta applicabile a meccanismi piani in catena chiusa. Il processo iterativo che sta alla base di questo metodo si basa sui seguenti step:

- Ogni corpo/membro indipendente dal sistema, contribuisce al calcolo dei G.d.L. del meccanismo introducendo 3 G.d.L. ciascuno (se il corpo appartiene al piano)
- Sottrarre i 3 G.d.L. che il telaio, essendo fisso, priva.
- Sottrarre i 2 G.d.L per ogni coppia di classe  $c_1$  che vincola il sistema di corpi lasciando libero 1 G.d.L., ovvero coppie prismatiche (P) e coppie rotoidali (R)
- Sottrarre 1 G.d.L. per ogni coppia di classe  $c_2$  che vincola il corpo lasciando liberi 2 G.d.L., ovvero la coppia a camma (C)

E può essere sintetizzato enunciando la seguente formulazione:

$$n = 3m - 2c_1 - c_2 \quad (2.1)$$

se il sistema in questione è una catena cinematica piana (1)

$$n = 3(m - 1) - 2c_1 - c_2 \quad (2.2)$$

nel caso di meccanismi piani (2).<sup>1</sup>

I parametri che compongono tali formule sono:

**n** = numero di G.d.L. del sistema di corpi

**m** = numero di membri/corpi che compongono il sistema

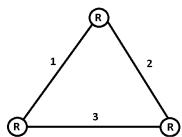
(dove il “-1” considera i G.d.L. che il telaio rimuove)

$2 \cdot c_1$  = indica il numero di G.d.L. (2) che il numero di coppie di classe  $c_1$  privano

$c_2$  = indica il numero di G.d.L (1) che il numero di coppie di classe  $c_2$  privano

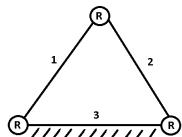
Affrontiamo più nel dettaglio l'utilità e i limiti dell'equazione di Grübler con i seguenti esempi:

• **Catene cinematiche chiuse con 3 corpi**



$$n = 3 \cdot (3) - 2 \cdot 3 = 9 - 6 = 3 \text{ G.d.L.}$$

(la catena cinematica è libera di muoversi nel piano)

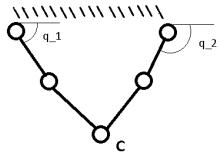


$$n = 3 \cdot (3 - 1) - 2 \cdot 3 = 0 \text{ G.d.L.}$$

(una volta definito un telaio tale accoppiamento dei tre corpi assume il valore di una struttura)

• **Catene cinematiche a 5 corpi**

<sup>1</sup>La principale differenza tra le due equazioni risiede nella presenza o meno di un telaio che sottrae al calcolo 3 G.d.L.

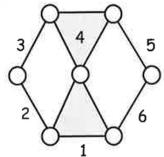


$$n = 3 \cdot (5 - 1) - 2 \cdot 5 = 12 - 10 = 2 G.d.L.$$

Il pentalatero in questione, su cui si basano i manipolatori paralleli, una vota che vengono determinati  $q_1$  e  $q_2$ , permette il controllo della posizione del punto C

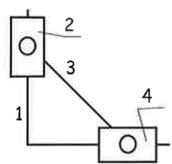
- Catene cinematiche a 6 corpi**

Esalatero di Watt



$$n = 3 \cdot (6 - 1) - 2 \cdot 7 = 15 - 14 = 1 G.d.L.$$

Giunto di Oldham

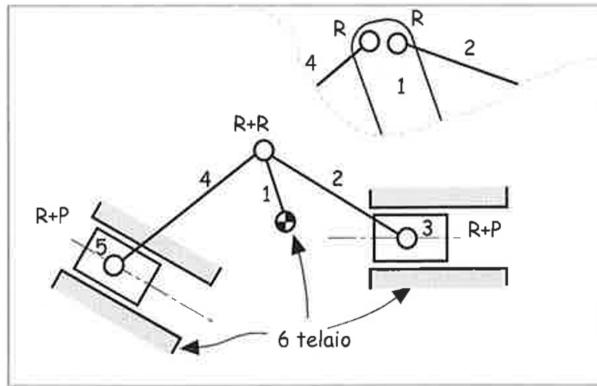


$$n = 3 \cdot (4 - 1) - 2 \cdot 4 = 9 - 8 = 1 G.d.L.$$

Tuttavia la formula di Grübler non considera alcuni casi:

### 1. CASO 1

Consideriamo il seguente sistema a 6 corpi (esalatero) i cui accoppiamenti sono eseguiti da 6 coppie (4 rotoidali e 2 prismatiche) di classe  $c_1$ . Utilizzando la formula di Grübler per determinare il numero di G.d.L. di tale meccanismo si ottiene un risultato scorretto:



$$n = 3 \cdot (6 - 1) - 2 \cdot 6 = 15 - 12 = 3 \text{ G.d.L.}$$

Tuttavia, si può notare che scegliendo una variabile  $q$  come coordinata generalizzata, la posizione del punto B viene completamente identificata e, di conseguenza, anche la posizione degli altri membri è identificata.

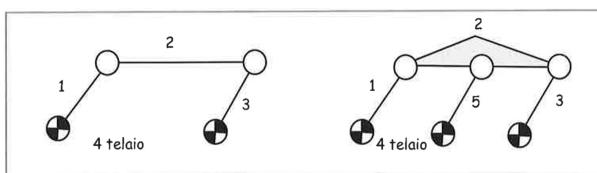
La ragione per cui la formula di Grübler abbia ritornato un risultato sbagliato pur da una corretta identificazione dei membri appartenenti al sistema e delle coppie a loro applicate è da ricercarsi al punto B: infatti la coppia rotoidale che è applicata nel punto B e che lega i corpi 1, 2 e 4 deve essere contata 2 volte.

$$n = 3 \cdot (6 - 1) - 2 \cdot 7 = 1 \text{ G.d.L.}$$

Non a caso il meccanismo proposto è equivalente ad un esalatero di Watt

### 2. CASO 2

Consideriamo il seguente sistema formato da due manovelle e una biella, e immaginiamo di introdurre a metà della biella una coppia rotoidale che lega un ulteriore corpo a telaio.



Dal calcolo dei G.d.L. ramite la formula di Grübler si ottiene un risultato errato:

$$n = 3 \cdot (5 - 1) - 2 \cdot 6 = 12 - 12 = 0 \text{ G.d.L.}$$

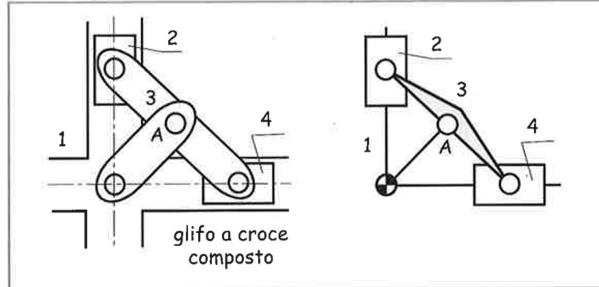
Questo meccanismo dovrebbe avere 0 G.d.L. seguendo la relazione di Grübler, tuttavia tutti i punti della biella centrale descrivono una circonferenza attorno alla coppia R del telaio adiacente (membro 4). Ho aggiunto cioè dei vincoli non necessari che il meccanismo originale già aveva in quanto poteva compiere già una rotazione (manovelle 1 e 3) attorno al telaio

In sintesi: la manovella 5, che è parallela alla 1 e alla 3, non aggiunge alcun vincolo addizionale al movimento del membro 2. La formula di Grübler pur essendo stata applicata in maniera corretta non considera che le coppie aggiunte possono non introdurre vincoli al moto del meccanismo.

### 3. CASO 3

Considerando il glifo a croce composto il numero di gradi di libertà che si ottengono dall'applicazione della formula di Grübler è:

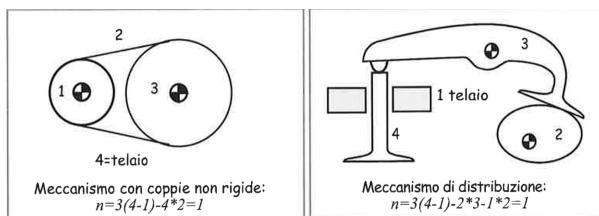
$$n = 3 \cdot (5 - 1) - 2 \cdot 6 = 12 - 12 = 0 G.d.L.$$



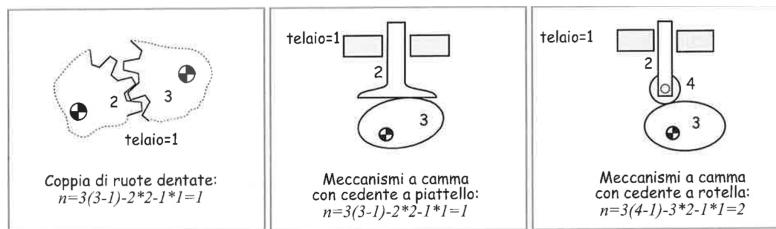
Tuttavia, analogamente al caso precedente, l'aggiunta del corpo in A non introduce vincoli aggiuntivi al movimento del meccanismo, in quanto A, sia prima che dopo l'introduzione del corpo, descriveva una traiettoria circolare avente come centro il punto di intersezione dei due assi di scorrimento.

Osservazioni conclusive:

- Spesso nei meccanismi abbiamo anche degli elementi elastici quali molle; questi elementi elastici non modificano la possibilità di movimento ma fanno nascere delle forze.  
Ad esempio una molla non modifica i G.d.L. del meccanismo di spinta perché essa può allungarsi o accorciarsi. Possiamo quindi ignorarle quando scriviamo l'equazione di Grübler.
- In altri casi dei membri rigidi sono connessi da elementi deformabili che permettono la trasmissione del moto (*ad esempio cinghie e funi*). In tal caso il numero di G.d.L. può essere facilmente determinato facendo delle ipotesi semplificate.  
Se si ipotizza che la cinghia sia inestensibile e non presenti scorrimenti la ruota 3 si muove insieme alla ruota 1 e quindi il sistema ha un solo G.d.L.



- Di seguito sono riportati alcuni esempi di applicazione della equazione di Grübler.

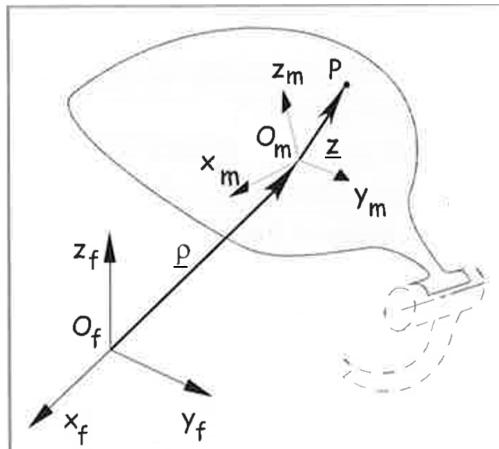


## 2.5 Cinematica dei corpi rigidi

### 2.5.1 Introduzione

Al variare del tipo di problema da studiare gli organi costituenti le macchine possono venire schematizzati come dei punti materiali, dei corpi rigidi, dei sistemi di corpi rigidi, dei corpi deformabili. Una delle schematizzazioni più importanti è quella di corpo rigido; ne richiamiamo quindi le relazioni fondamentali della cinematica.

Procediamo, dunque, a definire alcuni elementi che saranno di utilità nel decorso della trattazione di tali relazioni:



- **Terna mobile:** una terna solidale al corpo stesso individuata dai versori ( $\mathbf{i}_m, \mathbf{j}_m, \mathbf{k}_m$ ), e dalle generiche coordinate  $(x_m, y_m, z_m)$  in cui viene esplicitato il pedice "m" in riferimento al fatto che sono solidali alla terna mobile.
- **Terna fissa:** una terna di versori  $(\mathbf{i}_f, \mathbf{j}_f, \mathbf{k}_f)$  e coordinate generiche  $(x_f, y_f, z_f)$  in cui viene esplicitato il pedice "f" in riferimento al fatto che sono solidali ad un osservatore inerziale.
- **Un punto P** solidale alla terna mobile.
- il vettore  $\rho$  che identifica la distanza della terna mobile dalla terna fissa
- il vettore  $\mathbf{z}$  che identifica la distanza del punto P dalla terna mobile

Si è interessati a trovare le coordinate del punto P in un sistema di riferimento assoluto, ovvero le coordinate del punto P rispetto alla terna fissa ( $\mathbf{O}_f P$ ): bisognerà risolvere l'equazione vettoriale:

$$\begin{aligned}\mathbf{O}_f P &= \mathbf{O}_f \mathbf{O}_m + \mathbf{O}_m P \\ \mathbf{P} &= \underline{\rho} + \mathbf{z}\end{aligned}$$

Osservazioni:

→  $\mathbf{O}_m P$  sono le coordinate del punto P rispetto all'origine della terna mobile e possono essere esplicite come combinazione lineare dei versori della stessa terna, ovvero:

$$\mathbf{O}_m P = {}^m x_P \cdot \mathbf{i}_m + {}^m y_P \cdot \mathbf{j}_m + {}^m z_P \cdot \mathbf{k}_m$$

- Introducendo la nozione di corpo rigido le coordinate relative di qualsiasi punto rispetto ad un sistema di riferimento solidale all'oggetto sono fisse / costanti. Di conseguenza, le coordinate  $({}^m x_P, {}^m y_P, {}^m z_P)$  sono per l'ipotesi di corpo rigido, costanti durante tutto il moto.
- **Corpo rigido** (Definizione #1): sistema di punti materiali che hanno coordinate costanti in un sistema di riferimento solidale con il corpo stesso.
- **Corpo rigido** (Definizione #2): insieme di punti che a due a due hanno distanza costante.
- Per le ipotesi di corpo rigido che abbiamo appena posto al sistema, si può fare riferimento al moto del punto P come **moto dello spazio rigido solidale alla terna mobile**

### 2.5.2 Velocità angolare

Siamo giunti a formulare la relazione vettoriale che lega la posizione di un punto rispetto ad una terna mobile alla sua posizione rispetto alla terna fissa, e abbiamo constatato che le coordinate del punto P solidale alla terna mobile sono costanti durante tutto il moto.

$$\mathbf{O}_f \mathbf{P} = \rho + {}^m x_P \cdot \mathbf{i}_m + {}^m y_P \cdot \mathbf{j}_m + {}^m z_P \cdot \mathbf{k}_m$$

Procediamo ora a valutare una relazione che leggi la velocità del corpo (e quindi del punto P) rispetto all'osservatore assoluto/inerziale, eseguendo la derivata rispetto al tempo della relazione appena ottenuta:

$$\dot{\mathbf{O}_f \mathbf{P}} = {}^f \mathbf{v}_P = \dot{\rho} + {}^m x_P \cdot \dot{\mathbf{i}}_m + {}^m y_P \cdot \dot{\mathbf{j}}_m + {}^m z_P \cdot \dot{\mathbf{k}}_m$$

Per dare un significato fisico al risultato sopra esposto, rimane da determinare le derivate nel tempo dei tre versori della terna mobile:

$$\dot{\mathbf{i}}_m = \frac{d}{dt} \mathbf{i}_m \quad ; \quad \dot{\mathbf{j}}_m = \frac{d}{dt} \mathbf{j}_m \quad ; \quad \dot{\mathbf{k}}_m = \frac{d}{dt} \mathbf{k}_m$$

Considerando, ad esempio, il versore  $\mathbf{k}_m$  (vettore di modulo unitario), il prodotto scalare per se stesso ritorna la norma al quadrato:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_m \cdot \mathbf{k}_m &= \|k_m\|^2 = 1 \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{k}_m) &= \frac{d}{dt}(1) \\ \left(\frac{d}{dt} \mathbf{k}_m\right) \cdot \mathbf{k}_m + \mathbf{k}_m \cdot \left(\frac{d}{dt} \mathbf{k}_m\right) &= 0 \\ 2\left(\frac{d}{dt} \mathbf{k}_m\right) \cdot \mathbf{k}_m &= 0 \end{aligned}$$

La conclusione che possiamo trarre dallo sviluppo del versore in questione, e che può essere estesa anche ai rimanenti, è che: poiché il prodotto scalare  $\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{k}_m$  è nullo, i due vettori sono ortogonali.

Fu Poisson a ipotizzare che esistesse un vettore tale per cui il suo prodotto vettoriale con il versore desse come risultato la derivata del versore. Come è noto, infatti, il prodotto vettoriale di due vettori non paralleli dà come risultato un vettore con direzione perpendicolare al piano che tali vettori individuano e verso definito dalla regola della mano destra.

Rimane, dunque, da trovare i vettori  $(\underline{\omega}^{(1)}, \underline{\omega}^{(2)}, \underline{\omega}^{(3)})$  tali per cui valgano le relazioni (anche conosciute come formule di Poisson):

$$\dot{\mathbf{i}}_m = \underline{\omega}^{(1)} \wedge \mathbf{i}_m \quad ; \quad \dot{\mathbf{j}}_m = \underline{\omega}^{(2)} \wedge \mathbf{j}_m \quad ; \quad \dot{\mathbf{k}}_m = \underline{\omega}^{(3)} \wedge \mathbf{k}_m$$

Per nostra fortuna Poisson si accorse che i vettori  $(\underline{\omega}^{(1)}, \underline{\omega}^{(2)}, \underline{\omega}^{(3)})$  rappresentavano il medesimo vettore che, di conseguenza, prende il nome di vettore velocità angolare e a cui si farà riferimento, d'ora in poi, con il simbolo  $\underline{\omega}$  in quanto il moto dei versori della terna mobile non è scorrelato.

Perciò, per qualsiasi vettore unitario **solidale** al sistema di riferimento della terna mobile varrà l'uguaglianza vettoriale  $\frac{d}{dt} \mathbf{u} = \underline{\omega} \wedge \mathbf{u}$ .

Per quanto riguarda il moto di un vettore non necessariamente solidale alla terna mobile, si può eseguire un ragionamento analogo a quello fatto precedentemente:

La posizione del vettore  $\mathbf{u}$  può essere espressa come combinazione lineare delle sue coordinate rispetto ai versori della terna mobile:

$$\mathbf{u} = {}^m u_x \cdot \mathbf{i}_m + {}^m u_y \cdot \mathbf{j}_m + {}^m u_z \cdot \mathbf{k}_m$$

Mentre il suo moto è descritto dalla derivata totale rispetto al tempo dell'espressione appena ottenuta:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{u} &= \frac{d}{dt}({}^m u_x) \cdot \mathbf{i}_m + \frac{d}{dt}({}^m u_y) \cdot \mathbf{j}_m + \frac{d}{dt}({}^m u_z) \cdot \mathbf{k}_m \\ &+ {}^m u_x \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{i}_m) + {}^m u_y \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{j}_m) + {}^m u_z \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{k}_m) \\ &= \dot{u}_x \cdot \mathbf{i}_m + \dot{u}_y \cdot \mathbf{j}_m + \dot{u}_z \cdot \mathbf{k}_m + u_x (\underline{\omega} \wedge \mathbf{i}_m) + u_y (\underline{\omega} \wedge \mathbf{j}_m) + u_z (\underline{\omega} \wedge \mathbf{k}_m) \\ &= \dot{\mathbf{u}} + (\underline{\omega} \wedge \mathbf{u}) \end{aligned}$$

dove:

- $\dot{\mathbf{u}}$  rappresenta la variazione di  $\mathbf{u}$  rispetto alla terna mobile/osservata dal sistema di riferimento terna mobile
- $\underline{\omega} \wedge \mathbf{u}$  è la velocità di trascinamento

In conclusione:

$$\begin{aligned} {}^f \mathbf{v}_P &= \dot{\rho} + {}^m x_P \cdot \dot{\mathbf{i}}_m + {}^m y_P \cdot \dot{\mathbf{j}}_m + {}^m z_P \cdot \dot{\mathbf{k}}_m \\ &= \dot{\rho} + \underline{\omega} \wedge ({}^m x_P \cdot \mathbf{i}_m + {}^m y_P \cdot \mathbf{j}_m + {}^m z_P \cdot \mathbf{k}_m) \\ &= \dot{\rho} + \underline{\omega} \wedge \mathbf{z} \end{aligned}$$

L'espressione appena ottenuta della velocità di un punto solidale ad una terna mobile P rispetto ad un osservatore assoluto prende il nome di **formula fondamentale del corpo rigido**

In un moto rigido la velocità di un punto dipende da 6 parametri (a.k.a. 6 G.d.L.): 3 componenti di velocità della terna mobile ( $\dot{\rho}$ ) e 3 componenti del vettore  $\underline{\omega}$  che ne descrivono la rotazione

### 2.5.3 Accelerazione angolare

Ripetendo ulteriormente il processo di derivazione è possibile descrivere le accelerazioni che agiscono sul punto P, e quindi il corpo rigido, per un osservatore assoluto:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{v}_P &= \frac{d}{dt} \dot{\rho} + \frac{d}{dt} \underline{\omega} \wedge \mathbf{z} + \underline{\omega} \wedge \frac{d}{dt} \mathbf{z} \\ \text{siccome } \mathbf{z} \text{ è costante nella terna mobile } \dot{\mathbf{z}} &= 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \mathbf{z} = \dot{\mathbf{z}} + \underline{\omega} \wedge \mathbf{z} \\ &= \ddot{\rho} + \dot{\underline{\omega}} \wedge \mathbf{z} + \underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge \mathbf{z}) \end{aligned}$$

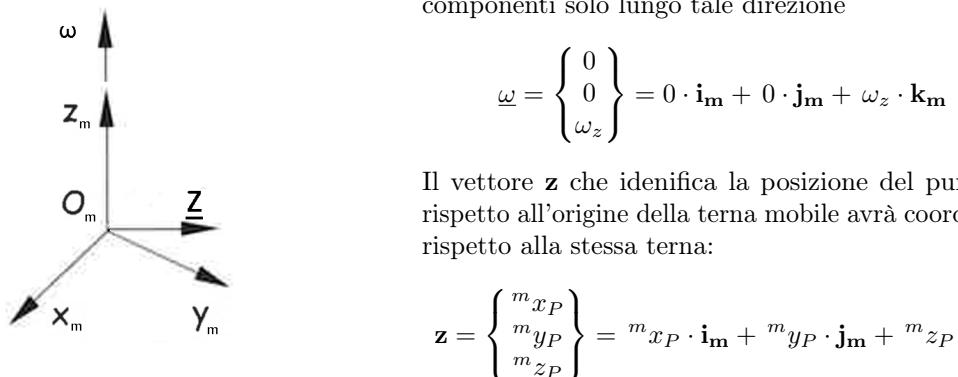
si noti che ( $\frac{d}{dt} \underline{\omega} = \dot{\underline{\omega}} + \underline{\omega} \wedge \underline{\omega}$ ) in quanto il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è nullo.

In conclusione:

$$\mathbf{a}_P = \ddot{\rho} + \dot{\underline{\omega}} \wedge \mathbf{z} + \underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge \mathbf{z})$$

Il termine  $\underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge \mathbf{z})$  può essere espresso in maniera diversa per mettere in risalto il suo significato fisico. Al fine di facilitare lo sviluppo analitico, la direzione dell'asse  $z_m$  della terna mobile viene posta uguale a quella del vettore velocità angolare  $\underline{\omega}$

Il vettore  $\underline{\omega}$  essendo parallelo all'asse  $z_m$  avrà componenti solo lungo tale direzione



Il vettore  $\mathbf{z}$  che identifica la posizione del punto P rispetto all'origine della terna mobile avrà coordinate rispetto alla stessa terna:

Sotto tali ipotesi procediamo a risolvere analiticamente ogni singolo membro del terzo termine dell'equazione dell'accelerazione di un punto P solidale ad una terna mobile rispetto ad un osservatore assoluto.

1.

$$\underline{\omega} \wedge \mathbf{z} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_m & \mathbf{j}_m & \mathbf{k}_m \\ 0 & 0 & \omega_z \\ x_P & y_P & z_P \end{vmatrix} = -\omega_z (y_P \mathbf{i}_m - x_P \mathbf{j}_m) \\ = (-y_P \omega_z) \mathbf{i}_m + (x_P \omega_z) \mathbf{j}_m + 0 \mathbf{k}_m$$

2.

$$\underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge \mathbf{z}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_m & \mathbf{j}_m & \mathbf{k}_m \\ 0 & 0 & \omega_z \\ x_P & y_P & z_P \end{vmatrix} = -\omega_z (x_P \omega_z \mathbf{i}_m + \omega_z y_P \mathbf{j}_m) \\ = (-\omega_z^2 x_P) \mathbf{i}_m + (-\omega_z^2 y_P) \mathbf{j}_m + 0 \mathbf{k}_m \\ = -\omega_z^2 \underbrace{(x_P \mathbf{i}_m + y_P \mathbf{j}_m)}_r$$

$\mathbf{r}$  rappresenta la proiezione di  $\mathbf{z} = {}^m x_P \cdot \mathbf{i}_m + {}^m y_P \cdot \mathbf{j}_m + {}^m z_P \cdot \mathbf{k}_m$  sul piano descritto dagli assi della terna mobile  $(x_m, y_m)$  ed è quindi ortogonale al vettore  $\omega$

L'equazione dell'accelerazione del punto P rispetto alla terna fissa:

$$\mathbf{a}_P = \ddot{p} + \dot{\underline{\omega}} \wedge \mathbf{z} + \underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge \mathbf{z}) \\ = \ddot{p} + \dot{\underline{\omega}} \wedge \mathbf{z} - \omega^2 \mathbf{r}$$

dove:

$\ddot{p}$  = è l'accelerazione della terna mobile

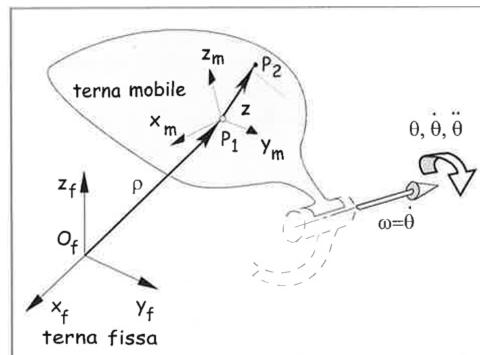
$\dot{\underline{\omega}} \wedge \mathbf{z}$  = è l'accelerazione tangenziale del punto, in virtù del fatto che la sua direzione è tangenziale al punto di rotazione

$-\omega^2 \mathbf{r}$  = è l'accelerazione centripeta del punto, in virtù del fatto che il vettore risultante punta verso l'asse di rotazione

Non è sempre necessario, né conveniente, fissare una terna ad ogni corpo rigido del nostro sistema. Le relazioni precedenti possono essere espresse anche riferendoci alla sola terna fissa.

Nota la posizione, la velocità, l'accelerazione di un punto  $P_1$  appartenente al corpo rigido e il vettore velocità angolare, si possono calcolare le posizioni, le velocità e le accelerazioni di qualsiasi altro punto  $P_2$  appartenente al corpo rigido:

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 + \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{P}}_2 = \dot{\mathbf{P}}_1 + \dot{\underline{\omega}} \wedge \mathbf{z} \\ \ddot{\mathbf{P}}_2 = \ddot{\mathbf{P}}_1 + \ddot{\underline{\omega}} \wedge \mathbf{z} + \dot{\underline{\omega}} \wedge (\dot{\underline{\omega}} \wedge \mathbf{z})$$



## 2.5.4 Cinematica di un corpo nel piano

È utile scrivere le relazioni vettoriali precedenti, valide sia nello spazio che nel piano, in forma scalare per i soli moti piani. Data la posizione, velocità e accelerazione di un punto  $P_1$  di un corpo rigido, la velocità e l'accelerazione angolare di un qualsivoglia punto  $P_2$  del corpo rigido sono date da:

$$\begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{Bmatrix} + \dot{\vartheta} \begin{Bmatrix} -a_y \\ a_x \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \end{Bmatrix} + \ddot{\vartheta} \begin{Bmatrix} -a_y \\ a_x \end{Bmatrix} + \dot{\vartheta} \begin{Bmatrix} -\dot{\vartheta} a_x \\ -\dot{\vartheta} a_y \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \end{Bmatrix} + \ddot{\vartheta} \begin{Bmatrix} -a_y \\ a_x \end{Bmatrix} - \dot{\vartheta}^2 \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 + \underline{\omega} \wedge \mathbf{z} - \omega^2 \mathbf{r}$$

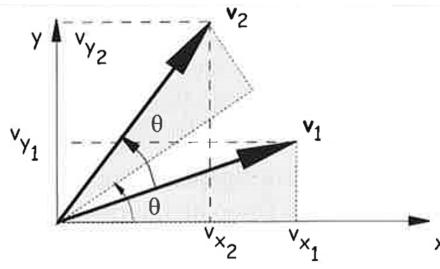
$$a_x = a \cos \vartheta \quad \dot{a}_x = -a \dot{\vartheta} \sin \vartheta = -\dot{\vartheta} a_y$$

$$a_y = a \sin \vartheta \quad \dot{a}_y = a \dot{\vartheta} \cos \vartheta = \dot{\vartheta} a_x$$

Quest'ultima relazione è nota con il nome di **teorema di Rivals**

### 2.5.5 Matrice di rotazione

Consideriamo un sistema di riferimento ed un vettore  $\mathbf{v}_1$ . Vogliamo calcolare le componenti del vettore  $\mathbf{v}_2$  che otteniamo ruotando  $\mathbf{v}_1$  di un angolo  $\vartheta$ . Le componenti di  $\mathbf{v}_2$  risultano:



$$v_{2x} = v_{1x} \cos \vartheta - v_{1y} \sin \vartheta$$

$$v_{2y} = v_{1x} \sin \vartheta + v_{1y} \cos \vartheta$$

che possono essere rappresentate in forma matriciale in funzione delle coordinate di  $\mathbf{v}_1$ :

$$\begin{Bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{Bmatrix}$$

La matrice che lega gli elementi del vettore  $\mathbf{v}_2$  a quelle del vettore  $\mathbf{v}_1$  è detta **Matrice di rotazione**. La Matrice di rotazione, dunque, è un operatore di rotazione che applicato ad un vettore qualsiasi ritorna la sua rotazione di angolo  $\vartheta$  (che è anche l'unico parametro dell'operatore).

### 2.5.6 Trasformazione di coordinate

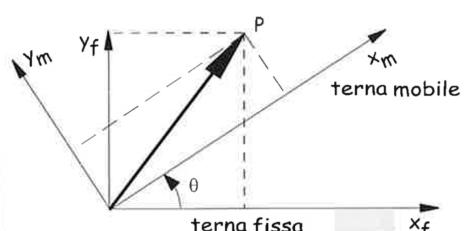
Un'applicazione alternativa della matrice di rotazione è la trasformazione di coordinate di due sistemi di riferimento. Consideriamo due sistemi di riferimento aventi origine in comune, uno fisso e l'altro mobile, e che il secondo sistema sia ruotato di angolo  $\vartheta$  rispetto al primo.

Vediamo come note le coordinate di un punto P rispetto al sistema mobile si possano calcolare le coordinate di P rispetto al sistema di riferimento fisso indicato con l'apice f.

$${}^f x_P = {}^m x_P \cos \vartheta - {}^m y_P \sin \vartheta$$

$${}^f y_P = {}^m x_P \sin \vartheta + {}^m y_P \cos \vartheta$$

Si può notare che il calcolo è analogo a quello visto per la rotazione di un vettore, in quanto possiamo immaginare l'operazione di cambio di coordinate come una rotazione del sistema di riferimento mobile a partire da una condizione iniziale coincidente con quello fisso.



La rotazione del sistema di riferimento mobile si porterà dietro tutti i vettori a lui solidale.  
In forma matriciale il cambiamento di coordinate risulta essere:

$$\begin{matrix} {}^f \left\{ \begin{matrix} x_P \\ y_P \end{matrix} \right\} = {}^f \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} & {}^m \left\{ \begin{matrix} x_P \\ y_P \end{matrix} \right\} \end{matrix}$$

La matrice di rotazione così rappresentata è rappresentativa della rotazione che da  $f$  (apice) va a  $m$  (pedice), assume il significato di operatore che identifica la rotazione/posizione di un sistema di riferimento ad un altro e può essere rappresentato sinteticamente dall'espressione  ${}^f\{P\} = {}^f_m\{R\} {}^m\{P\}$ .

Osservazioni: Le colonne della matrice di rotazione R nascondono un significato intrinseco: esse infatti coincidono con le componenti dei versori degli assi  $x_m, y_m$  rispetto a  $x_f, y_f$ , cioè contiene i coseni direttori dell'asse x e y. Da tale proprietà si può facilmente notare che la matrice di rotazione R è ortonormale, ovvero la sua inversa coincide con la sua trasposta

$${}^f_m[R]^{-1} = {}^f_m[R]^T = {}^m_f[R]$$

Di conseguenza ponendoci solidali alla terna mobile, la matrice di rotazione da  $f$  a  $m$  può essere ottenuta ponendo le componenti dei versori della terna fissa proiettata sulla terna mobile sulle sue colonne.

$${}^f_m[\mathbf{i}_f \quad \mathbf{j}_f] = {}^f_m \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

Verifichiamo rapidamente che la matrice di rotazione è ortonormale verificando che il prodotto tra la matrice di rotazione e la sua trasposta ritorni la matrice identità. In questo modo avremo la certezza che l'inversa e la trasposta coincidano con la stessa matrice.

*Dimostrazione.*

$$\begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta & -\sin \vartheta \cos \vartheta + \sin \vartheta \cos \vartheta \\ -\sin \vartheta \cos \vartheta + \sin \vartheta \cos \vartheta & \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

La matrice di trasformazione ci consente di riscrivere la formula fondamentale della cinematica, nel caso in cui la posizione del punto di cui si vuole calcolare la velocità e l'accelerazione è nota rispetto ad un sistema solidale al corpo rigido.

Le equazioni che esprimono la posizione, la velocità e l'accelerazione di un generico punto P diventano:

- **CASO 1:** Origini coincidenti ( $\rho = 0$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \overset{\circ}{\mathbf{p}} + \mathbf{z} \\ {}^f \left\{ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\} &= {}^f_m[R] {}^m \left\{ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\} \\ {}^f \left\{ \begin{matrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{matrix} \right\} &= \frac{d}{dt}({}^f_m[R]) {}^m \left\{ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

Si osserva che:

- la derivata di  ${}^m \left\{ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\} = 0$  dato che, per ipotesi di corpo rigido, il vettore in questione risulta costante.
- La matrice di rotazione è funzione di un unico parametro  $\vartheta(t)$ , perciò:

$$\frac{d}{dt}[R] = \begin{bmatrix} -\dot{\vartheta} \sin \vartheta & -\dot{\vartheta} \cos \vartheta \\ \dot{\vartheta} \cos \vartheta & -\dot{\vartheta} \sin \vartheta \end{bmatrix} = \dot{\vartheta} \begin{bmatrix} -\sin \vartheta & -\cos \vartheta \\ \cos \vartheta & -\sin \vartheta \end{bmatrix}$$

L'equazione così ottenuta può essere riscritta in funzione della matrice di rotazione R introducendo una matrice di permutazione P:

$$\frac{d}{dt} [R] = \dot{\vartheta} \begin{bmatrix} -\sin \vartheta & -\cos \vartheta \\ \cos \vartheta & -\sin \vartheta \end{bmatrix} = \dot{\vartheta} \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \dot{\vartheta} [R] [P]$$

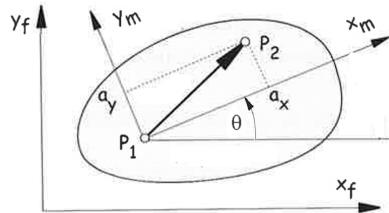
Di conseguenza:

$$\begin{aligned} {}^f \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} &= \frac{d}{dt} ([R]) {}^m \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \\ &= \dot{\vartheta} [R] [P] {}^m \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \\ &= \dot{\vartheta} [R] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} {}^m \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \\ &= \dot{\vartheta} [R] {}^m \begin{Bmatrix} -y \\ x \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^f \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} &= \frac{d}{dt} (\dot{\vartheta} [R] [P] {}^m \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}) \\ &= \frac{d}{dt} (\dot{\vartheta} [R] [P]) {}^m \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \\ &= \ddot{\vartheta} [R] [P] {}^m \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + \dot{\vartheta}^2 [R] [P] [P] {}^m \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \\ &= \ddot{\vartheta} [R] [P] {}^m \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + \dot{\vartheta}^2 [R] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} {}^m \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \\ &= \ddot{\vartheta} [R] [P] {}^m \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + \dot{\vartheta}^2 [R] \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} {}^m \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \\ &= \ddot{\vartheta} [R] [P] {}^m \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} - \dot{\vartheta}^2 [R] {}^m \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

- **CASO 2:** Origini non coincidenti ( $\underline{\rho} \neq 0$ )

$$\begin{aligned} {}^f x_P &= {}^m x_P \cos \vartheta - {}^m y_P \sin \vartheta + {}^f x_{O_m} \\ {}^f y_P &= {}^m x_P \sin \vartheta + {}^m y_P \cos \vartheta + {}^f y_{O_m} \\ {}^f \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} &= {}^m [R] {}^m \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + {}^f \begin{Bmatrix} x_{O_m} \\ y_{O_m} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$



### 2.5.7 Cinematica dei moti relativi

L'accelerazione di Coriolis fa parte della cinematica dei moti relativi: in tali condizioni il punto P non è solidale alla terna mobile, ovvero cade l'ipotesi per cui le coordinate del punto P rispetto alla terna mobile siano costanti. ( $\mathbf{z} = ({}^m x_P(t), {}^m y_P(t), {}^m z_P(t))$ )

Sia:

**P**: Le coordinate del punto P in questione rispetto alla terna fissa

**$\underline{\rho}$**  =  $\mathbf{O}_f \mathbf{O}_m$ : La distanza delle origini dei due sistemi di riferimento (mobile e fisso)

**$\mathbf{z}$**  =  $\mathbf{O}_m \mathbf{P}$ : Le coordinate in funzione del tempo del punto P rispetto alla terna mobile

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \underline{\rho} + \mathbf{z} \\ &= \underline{\rho} + {}^m x_P \mathbf{i}_m + {}^m y_P \mathbf{j}_m + {}^m z_P \mathbf{k}_m\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P} = \dot{\underline{\rho}} + \underline{\omega} \wedge \mathbf{z} + \frac{d}{dt} \mathbf{z}$$

Procediamo a sviluppare separatamente il termine  $\frac{d}{dt} \mathbf{z}$ :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \mathbf{z} &= {}^m x_P \dot{\mathbf{i}}_m + {}^m y_P \dot{\mathbf{j}}_m + {}^m z_P \dot{\mathbf{k}}_m \\ &\quad + {}^m x_P (\underline{\omega} \wedge \mathbf{i}_m) + {}^m y_P (\underline{\omega} \wedge \mathbf{j}_m) + {}^m z_P (\underline{\omega} \wedge \mathbf{k}_m) \\ &= ({}^m \dot{x}_P \mathbf{i}_m + {}^m \dot{y}_P \mathbf{j}_m + {}^m \dot{z}_P \mathbf{k}_m) + (\underline{\omega} \wedge \mathbf{z})\end{aligned}$$

L'equazione della velocità del punto P rispetto alla terna fissa risulta, di conseguenza, essere:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P} = \dot{\underline{\rho}} + \underline{\omega} \wedge \mathbf{z} + \dot{\mathbf{z}}$$

dove:

$(\dot{\underline{\rho}} + \underline{\omega} \wedge \mathbf{z})$ : velocità di trascinamento che P avrebbe se fosse solidale alla terna mobile  
 $(\dot{\mathbf{z}})$ : velocità relativa del punto rispetto alla terna mobile

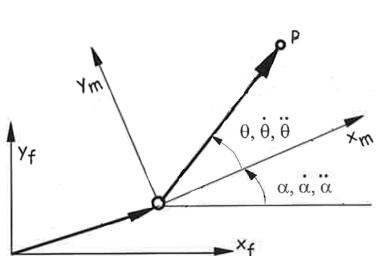
$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{P} &= \ddot{\underline{\rho}} + \dot{\underline{\omega}} \wedge \mathbf{z} + \underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge \mathbf{z} + \dot{\mathbf{z}}) + \underline{\omega} \wedge \dot{\mathbf{z}} + \ddot{\mathbf{z}} \\ &= \ddot{\underline{\rho}} + \dot{\underline{\omega}} \wedge \mathbf{z} + \underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge \mathbf{z}) + 2\underline{\omega} \wedge \dot{\mathbf{z}} + \ddot{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

dove:

$\ddot{\underline{\rho}} + \dot{\underline{\omega}} \wedge \mathbf{z} + \underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge \mathbf{z})$ : accelerazione della terna o accelerazione di trascinamento  
 $2\underline{\omega} \wedge \dot{\mathbf{z}}$ : accelerazione di Coriolis  
 $\ddot{\mathbf{z}}$ : accelerazione relativa

## 2.5.8 Cinematica dei moti relativi nel piano

Nel caso piano le relazioni cinematiche dei moti relativi, scritte in forma scalare diventano:  
→ **Posizione.** Le coordinate del punto P risultano:



$${}^f \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \end{Bmatrix} = {}^f \begin{Bmatrix} x_{O_m} \\ y_{O_m} \end{Bmatrix} + {}^f_m [R] {}^m \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \end{Bmatrix}$$

R indica la matrice di trasformazione che consente il passaggio dalla terna mobile m alla terna fissa f.

→ **Velocità.** Le componenti della velocità del punto P risultano:

$${}^f \begin{Bmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{y}_P \end{Bmatrix} = {}^f \begin{Bmatrix} \dot{x}_{O_m} \\ \dot{y}_{O_m} \end{Bmatrix} + {}^f_m [R] {}^m \begin{Bmatrix} \dot{a}_x \\ \dot{a}_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{a}_x \\ \dot{a}_y \end{Bmatrix}$$

→ **Accelerazione.** Le componenti dell'accelerazione del punto P risultano:

$${}^f \begin{Bmatrix} \ddot{x}_P \\ \ddot{y}_P \end{Bmatrix} = {}^f \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{O_m} \\ \ddot{y}_{O_m} \end{Bmatrix} + {}^f_m [R] {}^m \begin{Bmatrix} \ddot{a}_x \\ \ddot{a}_y \end{Bmatrix} - \dot{\alpha}^2 \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \ddot{a}_x \\ \ddot{a}_y \end{Bmatrix} + 2\dot{\alpha} \begin{Bmatrix} -\dot{a}_y \\ \dot{a}_x \end{Bmatrix}$$

Precisazione:

- nel caso spaziale il prodotto esterno in forma scalare diventa:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k} \\ &= \begin{Bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

- nel caso piano (a perpendicolare al piano):

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (-a_z b_y) \mathbf{i} + (-a_z b_x) \mathbf{j} + 0 \mathbf{k} \\ &= \begin{Bmatrix} -a_z b_y \\ a_z b_x \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & 0 \\ a_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} = a_z \begin{Bmatrix} -b_y \\ b_x \\ 0 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

# 3 Analisi cinematica dei meccanismi piani

Le catene cinematiche sono lo scheletro da cui ogni meccanismo nasce. Tra le molteplici catene cinematiche che si possono trovare e immaginare una fondamentale distinzione va fatta prima di proseguire con la loro trattazione: catene cinematiche a catena chiusa e a catena aperta.

Per quanto elementare tale distinzione possa essere, non altrettanto elementare è la loro analisi cinematica: infatti, molte macchine, come, a titolo di esempio, i **manipolatori**, prevedono la connessione di membri secondo uno schema a catena cinematica (sia essa aperta o chiusa) e il conseguente controllo dei molteplici G.d.L. che gli possono essere attribuiti può, a volte, risultare problematico. (Soprattutto qualora si voglia posizionare un organo di tale macchina nello spazio)

Procediamo, dunque, alle modalità di analisi dei meccanismi piani in catena aperta e chiusa.

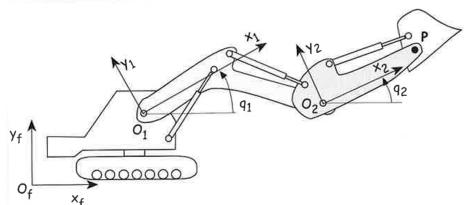
## 3.1 Analisi cinematica dei meccanismi piani in catena aperta

Consideriamo un sistema piano in catena aperta di cui vogliamo conoscere posizione, velocità ed accelerazione dei vari punti appartenenti ai membri del corpo.

Come esempio consideriamo un escavatore con i cingoli bloccati: è un meccanismo in catena aperta formato da tre membri rigidi (*uno è a telaio*) connessi da 2 coppie rotoidali  $c_1$ .

Dalla figura dell'escavatore sopra proposta e dall'eventuale analisi del meccanismo, possiamo notare che tale sistema di corpi prevede 4 G.d.L. attribuibili a:

- Rotazione intorno all'asse verticale
- Movimento di sollevamento del braccio
- Controllo del movimento dell'articolazione del gomito
- Controllo del movimento del polso



Per ora, come già accennato ad inizio capitolo, ci soffermeremo sull'analisi cinematica dei meccanismi piani, dove, di conseguenza, non è prevista la rotazione intorno all'asse verticale.

Il meccanismo così descritto presenta 3 G.d.L. che possono essere facilmente individuati nel controllo dei 3 attuatori in figura.

Per ragioni di semplificazione dei calcoli analitici, che tuttavia non compromettono la spiegazione delle modalità di analisi che andremo ad esporre in questa sezione, ci poniamo l'obiettivo di descrivere la posizione, la velocità e l'accelerazione del punto P (in corrispondenza del collegamento tramite coppia R tra il sistema 2 e la benna).

In tal modo priviamo la nostra analisi dello studio di un ulteriore G.d.L. (attribuibile alla posizione della benna stessa): il punto P, infatti, risulta un punto solidale al sistema 2 (le sue coordinate rispetto ad un sistema di riferimento solidale a sistema 2 sono, cioè, costanti).

Hic rebus stantibus procediamo alla descrizione del meccanismo in questione.

1. Il punto P è solidale al sistema di riferimento 2 (a cui faremo riferimento con il termine *sistema 2*). Ciò, come già indicato in precedenza, comporta che le coordinate del punto P rispetto a tale sistema siano costanti.

Tali coordinate verranno identificate dalla notazione: 
$$\begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \end{Bmatrix}$$

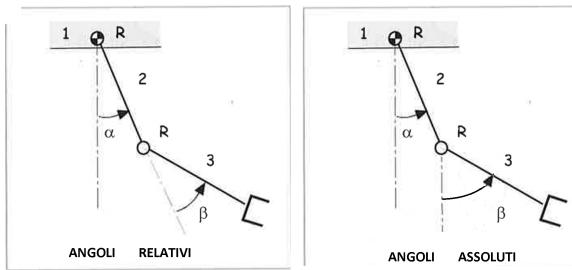
2. Si consideri un secondo sistema di riferimento, solidale al corpo 1 (tra telaio e corpo 2) (a cui faremo riferimento con il termine *sistema 1*).

La proiezione delle coordinate del punto P sul sistema di riferimento 1 prevedono l'utilizzo della relativa matrice di rotazione e assume la seguente forma:

$${}^1 \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \end{Bmatrix} = {}^1 \begin{Bmatrix} x_{O2} \\ y_{O2} \end{Bmatrix} + {}^1 [R] {}^2 \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \end{Bmatrix}$$

3. Infine, per esplicitare le coordinate del punto P e il relativo moto, si consideri l'introduzione di un ultimo sistema di riferimento fisso. Allo stesso modo del punto precedente le coordinate del punto P rispetto a tale sistema di riferimento risultano essere:

$$\begin{aligned} {}^f \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \end{Bmatrix} &= {}^f \begin{Bmatrix} x_{O1} \\ y_{O1} \end{Bmatrix} + {}^f [R] {}^1 \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \end{Bmatrix} \\ &= {}^f \begin{Bmatrix} x_{O1} \\ y_{O1} \end{Bmatrix} + {}^f [R] {}^1 \begin{Bmatrix} x_{O2} \\ y_{O2} \end{Bmatrix} + {}^f [R] {}^1 [R] {}^2 \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \end{Bmatrix} \quad // sostituzione dell'espressione al punto 2 \\ &= {}^f \begin{Bmatrix} x_{O1} \\ y_{O1} \end{Bmatrix} + {}^f [R] {}^1 \begin{Bmatrix} x_{O2} \\ y_{O2} \end{Bmatrix} + {}^f [R] {}^2 \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \end{Bmatrix} \end{aligned}$$



Una parentesi va aperta riguardo alla scelta degli angoli quando si ha a che fare con una matrice di rotazione:

I due principali metodi di rappresentazione coinvolgono angoli relativi e angoli assoluti, che sono rappresentati nelle figure a lato.

La scelta che è stata effettuata a priori per l'analisi della cinematica dei moti della macchina in esame è la seconda. Infatti, l'utilizzo di angoli assoluti semplifica notevolmente la definizione della matrice di rotazione:

#### → ANGOLI ASSOLUTI

$${}^1 [R] = f(q_1) = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 \\ \sin q_1 & \cos q_1 \end{bmatrix}$$

la matrice di rotazione da 1 ad f è esclusivamente funzione dell'angolo assoluto  $q_1$

$${}^2 [R] = f(q_2) = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 \\ \sin q_2 & \cos q_2 \end{bmatrix}$$

la matrice di rotazione da 2 ad f è esclusivamente funzione dell'angolo assoluto  $q_2$

#### → ANGOLI RELATIVI

Mentre la conclusione riguardante la matrice di rotazione da 1 ad f non cambia, lo stesso non può essere detto della matrice da 2 ad f:

$$\begin{aligned} {}^2 [R] &= {}^1 [R] {}^2 [R] \\ &= \begin{bmatrix} \cos q_1 \cos q_2 - \sin q_1 \sin q_2 & -\cos q_1 \sin q_2 - \sin q_1 \cos q_2 \\ \sin q_1 \cos q_2 - \cos q_1 \sin q_2 & \cos q_1 \cos q_2 - \sin q_1 \sin q_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(q_1 + q_2) & -\sin(q_1 + q_2) \\ \sin(q_1 + q_2) & \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

In conclusione: possiamo ammettere che  $q_{1R} + q_{2R} = q_{2A}$

Continuiamo l'analisi della cinematica della nostra macchina con la cosiddetta analisi di velocità: applichiamo, dunque, le formule ottenute nel capitolo precedente anche in questo caso mantenendo la convenzione di angoli assoluti.

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{y}_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_{O1} \\ \dot{y}_{O1} \end{Bmatrix} + \dot{q}_1 \begin{Bmatrix} R & P \end{Bmatrix}^1 \begin{Bmatrix} x_{O2} \\ y_{O2} \end{Bmatrix} + \dot{q}_2 \begin{Bmatrix} R & P \end{Bmatrix}^2 \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \end{Bmatrix}$$

<sup>1</sup>

Per concludere svolgiamo l'analisi di accelerazione:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_P \\ \ddot{y}_P \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{O1} \\ \ddot{y}_{O1} \end{Bmatrix} + \ddot{q}_1 \begin{Bmatrix} R & P \end{Bmatrix}^1 \begin{Bmatrix} x_{O2} \\ y_{O2} \end{Bmatrix} + \dot{q}_1^2 \begin{Bmatrix} R & P & P \end{Bmatrix}^1 \begin{Bmatrix} x_{O2} \\ y_{O2} \end{Bmatrix} \\ &\quad + \ddot{q}_2 \begin{Bmatrix} R & P \end{Bmatrix}^2 \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \end{Bmatrix} + \dot{q}_2^2 \begin{Bmatrix} R & P & P \end{Bmatrix}^2 \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{O1} \\ \ddot{y}_{O1} \end{Bmatrix} + \ddot{q}_1 \begin{Bmatrix} R & P \end{Bmatrix}^1 \begin{Bmatrix} x_{O2} \\ y_{O2} \end{Bmatrix} - \dot{q}_1^2 \begin{Bmatrix} R & P \end{Bmatrix}^1 \begin{Bmatrix} x_{O2} \\ y_{O2} \end{Bmatrix} \\ &\quad + \ddot{q}_2 \begin{Bmatrix} R & P \end{Bmatrix}^2 \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \end{Bmatrix} - \dot{q}_2^2 \begin{Bmatrix} R & P \end{Bmatrix}^2 \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

<sup>2</sup>

In cui si distinguono i termini di:

- £ Accelerazione dell'origine del sistema 1
- £ Accelerazione tangenziale denotata dal fattore moltiplicativo  $\dot{q}_i$
- £ Accelerazione centripeta individuata dal fattore moltiplicativo  $-\ddot{q}_i^2$

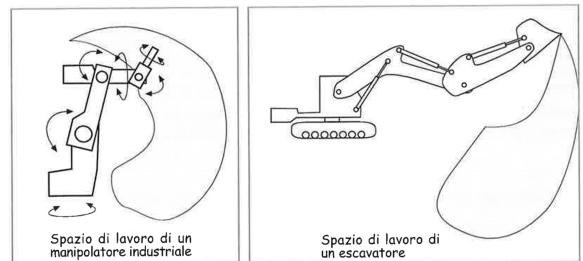
Se ne deduce che nel caso di meccanismi piani l'analisi cinematica è relativamente semplice; infatti è stato agevole esprimere analiticamente le coordinate del punto P, e delle sue derivate rispetto al tempo, in forma esplicita, in funzione delle coordinate libere:

$$x_P = f(q_1, q_2, t) \quad ; \quad \dot{x}_P = \dot{f}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t) \quad ; \quad \ddot{x}_P = \ddot{f}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \ddot{q}_1, \dot{q}_2, \ddot{q}_2, t)$$

Per la definizione delle prestazioni e del campo di lavoro di un meccanismo piano è importante, specie per le applicazioni in cui si vuole che un certo membro raggiunga una determinata zona nello spazio, conoscere il campo ammissibile degli spostamenti nel piano dei vari membri del meccanismo, in funzione della geometria e del tipo di accoppiamenti.

Si tratta quindi di studiare la mobilità del meccanismo; l'analisi di mobilità può essere svolta in due diverse modalità:

- **Nozione semplice di spazio raggiungibile:** ovvero tutti i punti che l'organo di interesse riesce a raggiungere (*cfr. escavatore*)
- **Nozione di spazio destro:** ovvero lo spazio che l'organo di interesse può occupare (tramite rotazioni e altri moti relativi tra i membri) al raggiungimento di un determinato punto. (*cfr. manipolatore industriale*)



<sup>1</sup>Si ricorda ancora una volta che  $\begin{Bmatrix} x_{O2} \\ y_{O2} \end{Bmatrix} = \text{cost.}$  e che la matrice di permutazione  $[P] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

<sup>2</sup>Si ricorda al lettore che  $[P] [P] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

## 3.2 Analisi cinematica di meccanismi piani con una catena chiusa

Abbiamo visto che se un meccanismo ha un solo G.d.L. esso può essere descritto completamente con una sola coordinata generalizzata.

Perciò il problema che si pone è il seguente: data la coordinata generalizzata e la sua derivata prima (*velocità*) e la sua derivata seconda (*accelerazione*) calcolare la posizione, velocità e accelerazione di tutti i punti del meccanismo.

In genere questo calcolo non viene fatto per un solo valore della coordinata generalizzata e delle sue derivate, ma per tutto un insieme di valori; in sostanza si vuole studiare il movimento del meccanismo.

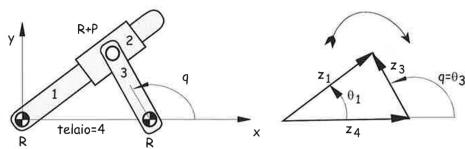
Esistono vari metodi per risolvere tale problema, ma quello che verrà esposto in questa sezione sarà la cosiddetta: **analisi cinematica di meccanismi in catena chiusa con il poligono di chiusura**

Broadly speaking se esiste una catena cinematica chiusa è possibile compiere un percorso chiuso che comprenda corpi diversi del meccanismo in esame.

### 3.2.1 Glifo oscillante

#### ANALISI DI POSIZIONE

Esponiamo il metodo iterativo in cui consiste tale tecnica di risoluzione dell'analisi cinematica di meccanismi piani con una catena chiusa tramite l'esempio del glifo oscillante:



Data la rotazione della manovella motrice 3, individuata dall'angolo di rotazione rispetto al telaio ( $\vartheta_3$ ), ci si propone di calcolare la rotazione della manovella 1 rispetto al telaio e lo scorrimento del pattino. Di conseguenza associamo ai membri, dei vettori che uniscono le varie coppie cinematiche presenti; essi formano un poligono che prende il nome di poligono di chiusura.

Il verso dei vettori può essere scelto arbitrariamente in quanto comunque il poligono costruito deve chiudersi e la somma vettoriale dei vettori associati ai membri dovrà essere nulla.

Alternativamente alla notazione proposta dal libro verrà seguita una convenzione che prevede l'identificazione dei vettori con quella degli estremi dei membri stessi. Sia, dunque:

- A la coppia rotoidale che connette il membro 1 a telaio
- B la coppia prismatica + rotoidale che collega il membro 1 al membro 2 (in realtà corrisponderebbe a un vettore di lunghezza nulla tra le due coppie cinematiche  $z_2 = 0$ )
- C la coppia rotoidale che collega il membro 2 a telaio

Così facendo l'espressione che mi descrive il poligono di chiusura

$$\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4 = 0$$

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BC} + \mathbf{CA} = 0$$

dove:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{z}_1 \quad ; \quad \mathbf{BC} = -\mathbf{z}_3 \quad ; \quad \mathbf{CA} = -\mathbf{z}_4$$

Ogni vettore così ottenuto può essere espresso in termini scalari come Lunghezza ( $L_i$ ) e angolo rispetto al telaio ( $\vartheta_i$ ).

Procediamo sotto tali ipotesi all'analisi di posizione:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{AB} &= \begin{Bmatrix} L_1 \cos \vartheta_1 \\ L_1 \sin \vartheta_1 \end{Bmatrix} & \mathbf{AB} + \mathbf{BC} + \mathbf{CA} &= 0 \\
 \mathbf{CB} &= \begin{Bmatrix} L_3 \cos \vartheta_3 \\ L_3 \sin \vartheta_3 \end{Bmatrix} = -\mathbf{BC} & \mathbf{AB} - \mathbf{CB} - \mathbf{AC} &= 0 \\
 \mathbf{CA} &= \begin{Bmatrix} L_0 \cos \vartheta_0 \\ L_0 \sin \vartheta_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_0 \\ 0 \end{Bmatrix} = -\mathbf{AC} & \begin{Bmatrix} L_1 \cos \vartheta_1 \\ L_1 \sin \vartheta_1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} L_3 \cos \vartheta_3 \\ L_3 \sin \vartheta_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} L_0 \\ 0 \end{Bmatrix} &= 0 \\
 &&&\Downarrow \\
 &&&\begin{Bmatrix} L_1 \cos \vartheta_1 - L_3 \cos \vartheta_3 - L_0 = 0 \\ L_1 \sin \vartheta_1 - L_3 \sin \vartheta_3 = 0 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Il sistema di equazioni sopra proposto presenta 2 equazioni in 2 incognite con grandezze variabili  $\vartheta_1, \vartheta_3, L_1$ .<sup>3</sup> Più in particolare le funzioni che compongono tale sistema di equazioni sono funzioni definite in maniera implicita, nella forma:

$$\begin{cases} f_1(\vartheta_1, \vartheta_3, L_1) = 0 \\ f_2(\vartheta_1, \vartheta_3, L_1) = 0 \end{cases}$$

Nell'ipotesi, quindi, che  $\vartheta_3$  sia il movente ( $\vartheta_3 = q$ ). Possiamo esprimere le altre due variabili come una funzione di tale angolo:

$$\begin{cases} L_1 = g_1(q) \\ \vartheta_1 = g_2(q) \end{cases} \quad \text{Il problema si presenta qualora, come in questo caso, tali equazioni non siano lineari.}$$

Sotto tali condizioni l'inversione della matrice può risultare complicato e a volte addirittura impossibile.

Nell'esempio proposto è possibile trovare l'inversa e ottenere le variabili  $L_1$  e  $\vartheta_1$ . Procediamo dunque ad affrontare tali calcoli. Si consideri il sistema di equazioni in cui è già stata esplicitata la coordinata generalizzata ( $\vartheta_3 = q$ ):

$$\begin{cases} L_1 \sin \vartheta_1 = L_3 \sin q \\ L_1 \cos \vartheta_1 = L_3 \cos q + L_0 \end{cases} \quad \parallel \quad \text{Si divida membro a membro tali equazioni}$$

$$\tan \vartheta_1 = \frac{L_3 \sin q}{L_3 \cos q + L_0} \quad \rightarrow \quad \vartheta_1 = f(q) = \arctan \frac{L_3 \sin q}{L_3 \cos q + L_0}$$

Problema: L'atan è una funzione che prevede 2 soluzioni:

$$\vartheta_1 : \arctan \frac{L_3 \sin q}{L_3 \cos q + L_0} \quad \vee \quad \arctan \frac{L_3 \sin q}{L_3 \cos q + L_0} + k\pi$$

$$L_1 = \frac{L_3 \sin q}{\sin \vartheta_1} \quad \vee \quad \frac{L_3 \cos q + L_0}{\cos \vartheta_1}$$

Ciò mi permette di usare una espressione qualora le condizioni di esistenza dell'altra espressione vengano meno

### ANALISI DI VELOCITÀ

Proseguiamo con l'analisi di velocità. Anche in questa situazione si presentano due metodi per affrontare tali analisi:

- Svolgere la derivata dell'espressione delle variabili di interesse (e.i.  $\vartheta_1$ )

$$\dot{\vartheta}_1 = \frac{1}{1 + \left( \frac{L_3 \sin q}{L_3 \cos q + L_0} \right)^2} \cdot \left( \frac{L_3 \cos q \dot{q} (L_3 \cos q + L_0) + L_3 \dot{q} \sin q \sin q}{(L_3 \cos q + L_0)^2} \right)$$

<sup>3</sup> $L_1$  è variabile nel tempo in quanto il corrispettivo pattino può scorrere lungo il membro 1

- In alternativa è possibile svolgere la derivata delle singole funzioni definite in modo implicito.

$$\begin{cases} \dot{L}_1 \cos \vartheta_1 - L_1 \dot{\vartheta}_1 \sin \vartheta_1 + L_3 \dot{q} \sin q = 0 \\ \dot{L}_1 \sin \vartheta_1 + L_1 \dot{\vartheta}_1 \cos \vartheta_1 - L_3 \dot{q} \cos q = 0 \end{cases}$$

Le equazioni di velocità dei vettori (**AB**, **BC**, **CA**) così ottenute risultano lineari nella velocità e di conseguenza possono essere ricondotte ad una forma matriciale

$$\begin{bmatrix} \cos \vartheta_1 & -L_1 \sin \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 & L_1 \cos \vartheta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{\vartheta}_1 \end{Bmatrix} = \dot{q} \begin{bmatrix} -L_3 \sin q \\ L_3 \cos q \end{bmatrix}$$

Conoscendo  $q, \dot{q}, \vartheta_1$  e  $L_1$  che abbiamo determinato dall'analisi di posizione svolta precedentemente è possibile invertire la matrice e ottenere un'espressione per  $\dot{L}_1$  e  $\dot{\vartheta}_1$ :

$$\begin{Bmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{\vartheta}_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{L_1 \cos^2 \vartheta_1 + L_1 \sin^2 \vartheta_1} \begin{bmatrix} L_1 \cos \vartheta_1 & L_1 \sin \vartheta_1 \\ -\sin \vartheta_1 & \cos \vartheta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -L_3 \sin q \\ L_3 \cos q \end{Bmatrix} \dot{q}$$

$$= \frac{1}{L_1} \begin{bmatrix} L_1 \cos \vartheta_1 & L_1 \sin \vartheta_1 \\ -\sin \vartheta_1 & \cos \vartheta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -L_3 \sin q \\ L_3 \cos q \end{Bmatrix} \dot{q}$$

$$\begin{cases} \dot{L}_1 = \frac{1}{L_1} \dot{q} (-L_3 \cancel{L_1} \cos \vartheta_1 \sin q + L_3 \cancel{L_1} \sin \vartheta_1 \cos q) = -L_3 \dot{q} \sin(q - \vartheta_1) \\ \dot{\vartheta}_1 = \frac{1}{L_1} \dot{q} (L_3 \sin q \sin \vartheta_1 + L_3 \cos q \cos \vartheta_1) = \frac{L_3}{L_1} \dot{q} \cos(q - \vartheta_1) \end{cases}$$

**Osservazione:** La velocità dei cedenti è proporzionale alla velocità dei moventi tramite un rapporto di proporzionalità, dove:

- $\tau_{\vartheta_1 q} = -L_3 \sin(q - \vartheta_1)$  è il rapporto di proporzionalità tra  $\dot{\vartheta}_1$  e  $\dot{q}$
- $\tau_{L_1 q} = \frac{L_3}{L_1} \cos(q - \vartheta_1)$  è il rapporto di proporzionalità tra  $\dot{L}_1$  e  $\dot{q}$

In sintesi: per compiere l'analisi di velocità non è necessario fare la derivata della forma invertita, ma è sufficiente compiere la derivata delle funzioni implicite:

$$\begin{cases} f_1(q, L_1, \vartheta_1) = 0 \\ f_2(q, L_1, \vartheta_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{f}_1(q, L_1, \vartheta_1) = 0 \\ \dot{f}_2(q, L_1, \vartheta_1) = 0 \end{cases}$$

dato che la derivata delle equazioni di chiusura ( $\dot{\vartheta}_1 = g_1(q)$  e  $\dot{L}_1 = g_2(q)$ ) è molto spesso più complicata da risolvere.

Procediamo dunque con l'analisi di velocità del glifo oscillante esplicitando le derivate delle funzioni implicite:

$$\begin{cases} \frac{df_1}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_1} \dot{\vartheta}_1 + \frac{\partial f_1}{\partial L_1} \dot{L}_1 = 0 \\ \frac{df_2}{dt} = \frac{\partial f_2}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_1} \dot{\vartheta}_1 + \frac{\partial f_2}{\partial L_1} \dot{L}_1 = 0 \end{cases}$$

Tale sistema di equazioni prende il nome di equazioni di velocità e sono state ottenute dalla derivazione delle equazioni prima di essere risolte.

Nel complesso le derivate parziali possono essere interpretate come dei fattori moltiplicativi delle velocità dei cedenti rispetto alla velocità dei moventi e il sistema di equazioni è di fatto un sistema lineare nelle derivate dei moventi rispetto ai cedenti.

Può, dunque, essere rappresentato in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial L_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_1} & \frac{\partial f_2}{\partial L_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{L}_1 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} \end{Bmatrix} \dot{q}$$

Il sistema lineare così ottenuto è del tipo:

$$[A] \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{L}_1 \end{Bmatrix} = - \{B\} \dot{q}$$

La cui soluzione può essere ottenuta premoltiplicando entrambi i membri per la matrice inversa della matrice A:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{L}_1 \end{Bmatrix} = - [A]^{-1} \{B\} \dot{q}$$

$$= - \underbrace{\begin{Bmatrix} \tau_{\vartheta_1 q} \\ \tau_{L_1 q} \end{Bmatrix}}_{\underline{\tau}} \dot{q}$$

Il vettore colonna  $\underline{\tau}$  così ottenuto è il vettore dei rapporti di velocità che contiene il rapporto di proporzionalità tra la velocità dei cedenti e del movente.

I rapporti di velocità sono delle funzioni/espressioni di  $\vartheta_1, L_1, q$ , ma ricordando che concettualmente posso pensare di aver invertito le equazioni di chiusura e di aver espresso  $\vartheta_1 = g_1(q)$  e  $L_1 = g_2(q)$ , se ne conclude che pure il vettore rapporto di velocità è, di fatto, una funzione del movente:

$$\tau = f(\vartheta_1(q), L_1(q), q) = f(q)$$

Alcune considerazioni/osservazioni sui risultati appena ottenuti:

- La matrice A delle derivate parziali è una matrice a noi già nota dal corso di Analisi 2: **Matrice Jacobiana**.
- Solo nel caso in cui il determinante della Jacobiana è invertibile, il sistema lineare trova soluzione.
- I rapporti di velocità tendono a infinito in corrispondenza di una configurazione singolare (ovvero quando la funzione che si deriva non è continua o derivabile in un punto). In corrispondenza di questa singolarità il determinante tenderà, dunque, a zero facendo tendere i rapporti di velocità a infinito.
- I rapporti di velocità dipendono dalla configurazione. Date le relazioni lineari esistenti tra le velocità dei membri e la velocità della coordinata generalizzata, una volta noti i rapporti di velocità possiamo calcolare la velocità dei membri, per qualsiasi valore della velocità della coordinata generalizzata.

#### ANALISI DI ACCELERAZIONE

Analogamente per l'analisi di velocità anche per l'analisi di accelerazione è possibile seguire due strade per trovare un'espressione che metta in relazione il moto del movente con quella di ogni cedente.

##### 1. 1° METODO

Derivare le espressioni  $\begin{cases} \dot{\vartheta}_1 = \tau_{\vartheta_1 q} \dot{q} \\ \dot{L}_1 = \tau_{L_1 q} \dot{q} \end{cases}$  rispetto al tempo:

##### 2. 2° METODO

Fare la derivata totale delle equazioni di velocità in forma matriciale

Al fine di esporre le modalità con cui agiscono nell'analisi di accelerazione tali metodi procediamo ad applicarli entrambi:

1.

$$\frac{d\dot{\vartheta}_1}{dt} = \ddot{\vartheta}_1 = \frac{d\tau_{\vartheta_1 q}}{dt} \dot{q} + \tau_{\vartheta_1 q} \ddot{q}$$

Dove:

$$\frac{d\tau_{\vartheta_1 q}}{dt} = \frac{\partial \tau_{\vartheta_1 q}}{\partial \vartheta_1} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \tau_{\vartheta_1 q}}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \tau_{\vartheta_1 q}}{\partial q} \ddot{q}$$

Di conseguenza l'accelerazione del cedente  $\ddot{\vartheta}_1$  risulta essere:

$$\begin{aligned}\ddot{\vartheta}_1 &= \left( \underbrace{\frac{\partial \tau_{\vartheta_1 q}}{\partial \vartheta_1} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial q}}_{\tau_{\vartheta_1 q}} + \underbrace{\frac{\partial \tau_{\vartheta_1 q}}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial q}}_{\tau_{L_1 q}} + \frac{\partial \tau_{\vartheta_1 q}}{\partial q} \right) \dot{q}^2 + \tau_{\vartheta_1 q} \ddot{q} \\ &= \left( \frac{\partial \tau_{\vartheta_1 q}}{\partial \vartheta_1} \tau_{\vartheta_1 q} + \frac{\partial \tau_{\vartheta_1 q}}{\partial L_1} \tau_{L_1 q} + \frac{\partial \tau_{\vartheta_1 q}}{\partial q} \right) \dot{q}^2 + \tau_{\vartheta_1 q} \ddot{q} \\ &= \tau_{\vartheta_1 q} \ddot{q} + \tau'_{\vartheta_1 q} \left( = \frac{d \tau_{\vartheta_1 q}}{dq} \right) \dot{q}^2\end{aligned}$$

2. Procediamo ad eseguire la derivata rispetto al tempo dell'equazione matriciale:

$$[A] \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{L}_1 \end{Bmatrix} = - \{B\} \dot{q}$$

Poiché la matrice A è funzione dei cedenti, che a loro volta sono funzioni del tempo:

$$\begin{aligned}\left[ \frac{dA}{dt} \right] \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{L}_1 \end{Bmatrix} + [A] \begin{Bmatrix} \ddot{\vartheta}_1 \\ \ddot{L}_1 \end{Bmatrix} &= - \{B\} \ddot{q} - \left\{ \frac{dB}{dt} \right\} \dot{q} \\ \left[ \frac{dA}{dq} \right] \dot{q} \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{L}_1 \end{Bmatrix} + [A] \begin{Bmatrix} \ddot{\vartheta}_1 \\ \ddot{L}_1 \end{Bmatrix} &= - \{B\} \ddot{q} - \left\{ \frac{dB}{dq} \right\} \dot{q}^2 \\ [A] \begin{Bmatrix} \ddot{\vartheta}_1 \\ \ddot{L}_1 \end{Bmatrix} &= - \{B\} \ddot{q} - \left\{ \frac{dB}{dq} \right\} \dot{q}^2 - \left[ \frac{dA}{dq} \right] \dot{q} \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{L}_1 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \ddot{\vartheta}_1 \\ \ddot{L}_1 \end{Bmatrix} &= \{\tau\} \ddot{q} - [A]^{-1} \left( \left[ \frac{dA}{dq} \right] \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{L}_1 \end{Bmatrix} \dot{q} + \left\{ \frac{dB}{dq} \right\} \dot{q}^2 \right)\end{aligned}$$

Possiamo dunque concludere che:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\vartheta}_1 \\ \ddot{L}_1 \end{Bmatrix} = \{\tau\} \ddot{q} + \{C\} \dot{q}^2$$

e che, a titolo d'esempio possiamo riconoscere la presenza dei medesimi coefficienti ottenuti con l'altro metodo. Infatti:

$$\ddot{\vartheta}_1 = \tau_{\vartheta_1 q} \ddot{q} + \tau'_{\vartheta_1 q} \dot{q}^2$$

Dove riconosciamo una proporzionalità rispetto all'accelerazione della coordinata generalizzata ( $\ddot{q}$ ) e all'accelerazione di coriolis ( $\dot{q}^2$ )

### 3.2.2 Analisi cinematica del quadrilatero articolato

Il quadrilatero articolato è uno dei meccanismi più diffusi, lo troviamo in tutti i campi della tecnica. Esso è costituito da un telaio, due manovelle o bilancieri e da una biella.

#### ANALISI DI POSIZIONE

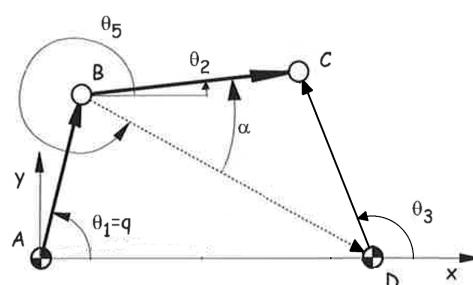
Dato il valore della coordinata libera  $q$  determinare la rotazione della biella 2 e della manovella 3.

Il poligono di chiusura disegnato a fianco permette di scrivere le equazioni vettoriali a lui associate:

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BC} - \mathbf{DC} = \mathbf{AD}$$

ovvero, in forma scalare;

$$\begin{cases} L_1 \cos q + L_2 \cos \vartheta_2 - L_3 \cos \vartheta_3 = L_0 \\ L_1 \sin q + L_2 \sin \vartheta_2 - L_3 \sin \vartheta_3 = 0 \end{cases}$$



Noto che le  $L_i \forall i = 0, \dots, 3$  sono le lunghezze dei membri del quadrilatero e sono assunte costanti, e che  $\vartheta_1 = q$  rappresenta la coordinata generalizzata (aka movente) le incognite dell'analisi di posizione risultano essere gli angoli  $\vartheta_2$  e  $\vartheta_3$ .

Per la loro risoluzione si può usare il metodo Newton-Raphson, dato un certo valore di  $q$  i valori di primo tentativo, richiesti dall'algoritmo numerico, possono essere ricavati mediante un'analisi grafica.

Nel caso del quadrilatero, facendo alcune considerazioni geometriche, si può pervenire abbastanza facilmente ad una soluzione in forma chiusa; infatti, è immediato calcolare la distanza tra i punti B e D, nonché la sua inclinazione rispetto all'asse x.

Procediamo dunque a descrivere l'algoritmo iterativo che dovrà essere seguito per giungere ad una soluzione in forma chiusa:

1. Dato un valore del movente  $q$  è possibile trovare una relazione che leggi le coordinate cartesiane del punto B con l'angolo stesso  $q$ :

$$\begin{cases} x_B = x_A + L_1 \cos q \\ y_B = y_A + L_1 \sin q \end{cases}$$

Mentre le coordinate del punto D corrispondono a  $(L_0, 0)$  noto che gli angoli  $\vartheta_i$  sono angoli relativi al telaio **AD**

2. Osserviamo, dunque, che è possibile costruire una diade BCD (risolvibile con relazioni trigonometriche) tramite l'introduzione di un membro fittizio che collega le cerniere B e D e che presenta una lunghezza

$$L_5 = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2}$$

3. Tramite il teorema di Carnot (o del coseno)<sup>4</sup> è possibile ricavare un valore per l'angolo  $\alpha$ :

$$\cos \alpha = \frac{-L_3^2 + L_2^2 + L_5^2}{2 L_2 L_5}$$

4. Si hanno per un fissato valore di  $q$ , due possibili valori di  $\alpha$ ; e di conseguenza anche due valori di  $\vartheta_2$  che corrispondono a **due diversi modi di assemblaggio** del meccanismo.

$$\alpha = \pm \arccos \frac{-L_3^2 + L_2^2 + L_5^2}{2 L_2 L_5}$$

5. risulta utile a questo punto mettere in relazione  $\vartheta_2$  e  $\alpha$  introducendo l'angolo  $\vartheta_5$  (che individua l'inclinazione di **BD** rispetto al telaio):

Noto infatti che  $\mathbf{BD} = \begin{Bmatrix} x_D - x_B \\ y_D - y_B \end{Bmatrix}$  il valore di  $\vartheta_5$  può essere ottenuto applicando l'arcotangente del rapporto tra la componente del vettore opposta a  $\vartheta_5$  e della componente adiacente all'angolo  $\vartheta_5$ .

$$\vartheta_5 = \arctan \left( \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} \right) + k\pi$$

Il problema di questa formulazione è che l'arcotangente è una funzione che individua due angoli:  $\vartheta_5$  e  $\vartheta_5 + k\pi$ .

Per ovviare a tale problematica molti programmi supportano la cosiddetta arcotangente a 2 parametri che si prende in carico le situazioni particolari in cui il punto in considerazione si trovi sull'asse delle y e la dualità degli angoli ( $\vartheta$  o  $\vartheta + k\pi$ )

$$\vartheta_5 = \arctan(x_D - x_B, y_D - y_B)$$

<sup>4</sup>Dato un triangolo generico di lati a,b e c per calcolare la lunghezza del lato c noto l'angolo  $\alpha$  compreso tra a e b, si può utilizzare la formula:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

6. A questo punto si presentano diversi casi che necessitano di essere analizzati.

Noto che gli angoli  $(\vartheta_2, \vartheta_5, \alpha)$  sono legati dalla relazione  $\vartheta_2 = \vartheta_5 \pm \alpha$  e che esistono due possibili modi di assemblaggio attribuibile al  $(\pm\alpha = \pm \arccos[\dots])$ , possiamo distinguere tra:

- $\alpha = 0$ : due soluzioni reali e coincidenti che corrispondono ad un'unica configurazione;
- $\alpha = a + jb$  (l'argomento dell' $\arccos$  non è compreso tra -1 e +1): nessuna soluzione reale, che corrisponde ad un meccanismo non assemblabile;
- $\alpha = \pm sol$ : due soluzioni reali distinte che corrispondono a due diverse configurazioni

7. Una volta calcolato  $\vartheta_2$  si può procedere alla determinazione delle coordinate della cerniera C nel seguente modo:

$$\begin{cases} x_C = x_D + L_2 \cos \vartheta_2 \\ y_C = y_D + L_2 \sin \vartheta_2 \end{cases}$$

8. Infine calcolare il valore di  $\vartheta_3$  con l'arcotangente a due parametri:

$$\vartheta_3 = \arctan(x_C - x_D, y_C - y_D)$$

In conclusione:

Possiamo interpretare gli angoli  $\vartheta_2$  e  $\vartheta_3$  come funzioni del movente q e di un parametro m ( $= \pm 1$ ) detto **modo di assemblaggio**:

$$\vartheta_2 = g_2(q, m) \quad ; \quad \vartheta_3 = g_3(q, m)$$

I risultati così ottenuti pongono termine all'analisi di posizione del quadrilatero articolato preso in considerazione.

#### ANALISI DI VELOCITÀ

Procediamo, dunque, all'analisi di velocità; Per fare ciò si possono seguire due strade:

- La derivazione delle equazioni di chiusura ( $\mathbf{AB} + \mathbf{BC} - \mathbf{DC} - \mathbf{AD} = 0$ )
- La derivazione dell'espressione dei cedenti  $(\dot{\vartheta}_2, \dot{\vartheta}_3)$  ottenuti dall'analisi di posizione.

Come già osservato in precedenza, molto spesso la seconda opzione porta a calcoli complicati, soprattutto per la presenza di un denominatore.

Nella nostra trattazione si deriverà, di conseguenza, le equazioni del poligono di chiusura che vengono riportate di seguito in forma vettoriale e scalare:

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} + \mathbf{BC} - \mathbf{DC} - \mathbf{AD} &= 0 \\ L_1 \begin{Bmatrix} \cos q \\ \sin q \end{Bmatrix} + L_2 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{Bmatrix} - L_3 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_3 \\ \sin \vartheta_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} L_0 \\ 0 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Derivando le espressioni in forma scalare rispetto al tempo si ottiene:

$$L_1 \dot{q} \begin{Bmatrix} -\sin q \\ \cos q \end{Bmatrix} + L_2 \dot{\vartheta}_2 \begin{Bmatrix} -\sin \vartheta_2 \\ \cos \vartheta_2 \end{Bmatrix} - L_3 \dot{\vartheta}_3 \begin{Bmatrix} -\sin \vartheta_3 \\ \cos \vartheta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Le equazioni derivate risultano essere lineari nella velocità dei cedenti  $\dot{\vartheta}_2, \dot{\vartheta}_3$  rispetto a quella del movente  $\dot{q}$

$$\begin{bmatrix} -L_2 \sin \vartheta_2 & L_3 \sin \vartheta_3 \\ L_2 \cos \vartheta_2 & -L_3 \cos \vartheta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_2 \\ \dot{\vartheta}_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} -L_1 \sin q \\ L_1 \cos q \end{Bmatrix} \dot{q}$$

#### Osservazione:

- Come si è fatto notare in precedenza la matrice che premoltiplica il vettore colonna delle velocità dei cedenti è la **matrice Jacobiana**.

A titolo di esempio procediamo al calcolo della matrice tramite le nozioni acquisite dal corso di Analisi Matematica 2, ovvero

$$[J] = [\nabla f_1 \quad \nabla f_2]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_2 \sin \vartheta_2 & L_3 \sin \vartheta_3 \\ L_2 \cos \vartheta_2 & -L_3 \cos \vartheta_3 \end{bmatrix}$$

dove:

- $f_1 = L_1 \cos q + L_2 \cos \vartheta_2 - L_3 \cos \vartheta_3 - L_0 = 0$
- $f_2 = L_1 \sin q + L_2 \sin \vartheta_2 - L_3 \sin \vartheta_3 = 0$

- Anche B in un certo senso può essere considerata una matrice Jacobiana:

$$\{B\} = \{\nabla f_1\}^T = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L_1 \sin q \\ L_1 \cos q \end{Bmatrix}$$

L'equazione ottenuta dalla derivazioni delle equazioni di chiusura, alla luce delle osservazioni sopra esposte, può essere riscritta in forma compatta, come segue:

$$\begin{aligned} [J] \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_2 \\ \dot{\vartheta}_3 \end{Bmatrix} &= -\{B\} \dot{q} \\ \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_2 \\ \dot{\vartheta}_3 \end{Bmatrix} &= -\underbrace{[J]^{-1} \{B\}}_{\tau} \dot{q} = \{\tau\} \dot{q} \\ &= -\frac{1}{L_2 L_3 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 - L_2 L_3 \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_3} \begin{bmatrix} -L_3 \cos \vartheta_2 & -L_3 \sin \vartheta_3 \\ -L_2 \cos \vartheta_2 & -L_2 \sin \vartheta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -L_1 \sin q \\ L_1 \cos q \end{Bmatrix} \dot{q} \\ &= -\frac{1}{L_2 L_3 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3)} \begin{Bmatrix} L_3 L_1 \sin(q - \vartheta_3) \\ L_1 L_2 \sin q - \vartheta_2 \end{Bmatrix} \dot{q} \\ &= \begin{Bmatrix} -\frac{L_1}{L_2} \frac{\sin(q - \vartheta_3)}{\sin(\vartheta_2 - \vartheta_3)} \\ -\frac{L_1}{L_3} \frac{\sin(q - \vartheta_2)}{\sin(\vartheta_2 - \vartheta_3)} \end{Bmatrix} \dot{q} \end{aligned}$$

Si osserva che al fine di poter invertire la matrice Jacobiana e raggiungere una soluzione del corrispettivo sistema lineare il determinante della matrice Jacobiana stessa deve essere diverso da zero.

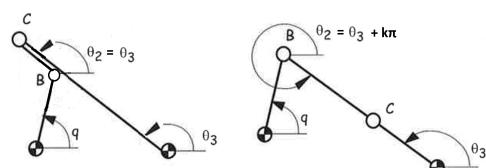
Qualora tale condizione non fosse verificata si raggiungerebbe una condizione di singolarità che porterebbe  $\det(J) \rightarrow 0$  e  $\tau \rightarrow \infty$ . La condizione di determinante non nulla, nel caso particolare del quadrilatero articolato in esame, si ottiene se:

$$\det[J] = L_2 L_3 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3) \neq 0, \text{ ovvero se:}$$

- $\rightarrow L_2 \neq 0 \vee L_3 \neq 0$
- $\rightarrow \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3) \neq 0 \Rightarrow \vartheta_2 - \vartheta_3 \neq k\pi \Rightarrow \vartheta_2 = \vartheta_3 + k\pi$

Whereas la prima condizione può benissimo essere trascurata per costruzione del quadrilatero, non si può dire lo stesso della seconda.

Le condizioni di singolarità che ne derivano sono riportate a lato:



#### ANALISI DI ACCELERAZIONE

Concludiamo dunque la trattazione del quadrilatero articolato con l'analisi di accelerazione; ancora una volta è possibile utilizzare due metodi per la sua enunciazione: derivare le equazioni delle velocità dei cedenti o fare al derivata rispetto al tempo dell'equazione di velocità del poligono di chiusura in forma matriciale.

Seppur poco agevole in termini di risoluzione analitica proseguiamo la trattazione derivando le equazioni di velocità ricavate dalla relativa analisi di velocità (per il solo  $\dot{\vartheta}_2$ ):

$$\begin{aligned}\ddot{\vartheta}_2 &= \tau \ddot{q} + \frac{d\tau}{dt} \dot{q}^2 \\ &= \frac{L_1}{L_2} \frac{\sin(\vartheta_3 - q)}{\sin(\vartheta_2 - \vartheta_3)} \ddot{q} + \frac{L_1}{L_2} \dot{q} \left[ \frac{-(\cos(\vartheta_3 - q)(\dot{\vartheta}_3 - \dot{q}) \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3)) - (\cos(\vartheta_2 - \vartheta_3)(\dot{\vartheta}_2 - \dot{\vartheta}_3) \sin(\vartheta_3 - q))}{\sin^2(\vartheta_2 - \vartheta_3)} \right] \\ &\text{sostituendo i valori di } \dot{\vartheta}_2 = \tau_{\vartheta_2 q} \dot{q} \text{ e } \dot{\vartheta}_3 = \tau_{\vartheta_3 q} \dot{q} \\ &= \frac{L_1}{L_2} \frac{\sin(\vartheta_3 - q)}{\sin(\vartheta_2 - \vartheta_3)} \ddot{q} + \frac{L_1}{L_2} \dot{q} \left[ \frac{-(\cos(\vartheta_3 - q)(\tau_{\vartheta_3 q} \dot{q} - \dot{q}) \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3)) - (\cos(\vartheta_2 - \vartheta_3)(\tau_{\vartheta_2 q} \dot{q} - \tau_{\vartheta_3 q} \dot{q}) \sin(\vartheta_3 - q))}{\sin^2(\vartheta_2 - \vartheta_3)} \right] \\ &= \frac{L_1}{L_2} \frac{\sin(\vartheta_3 - q)}{\sin(\vartheta_2 - \vartheta_3)} \ddot{q} + \frac{L_1}{L_2} \dot{q}^2 \left[ \frac{-(\cos(\vartheta_3 - q)(\tau_{\vartheta_3 q} - 1) \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3)) - (\cos(\vartheta_2 - \vartheta_3)(\tau_{\vartheta_2 q} - \tau_{\vartheta_3 q}) \sin(\vartheta_3 - q))}{\sin^2(\vartheta_2 - \vartheta_3)} \right]\end{aligned}$$

Abbiamo così concluso l'analisi cinematica di un quadrilatero articolato completando le relative analisi di posizione, velocità e accelerazione.

Una parentesi, tuttavia, va aperta su come effettivamente i membri del quadrilatero si muovono gli uni rispetto agli altri: se considerassimo a titolo di esempio la manovella **AB** potremmo notare che il quadrilatero così costruito non è detto che ne permetta la rotazione completa intorno alla rispettiva cerniera a telaio.

Risulta, dunque, necessario compiere un'analisi di raggiungibilità per effettivamente ricavare la natura del moto di suddetta manovella.

Per individuare il tipo di quadrilatero valgono le seguenti **regole di Grashof**. In primo luogo si verifica se la somma del lato più lungo  $l_{max}$  e del lato più corto  $l_{min}$  è minore della somma degli altri due  $l_3, l_4$ . Se:

$$l_{max} + l_{min} \leq l_3 + l_4$$

il quadrilatero è detto di Grashof e valgono le seguenti regole:

- il telaio è il più corto  $\Rightarrow$  quadrilatero a doppia manovella
- la biella è il membro più corto  $\Rightarrow$  quadrilatero a doppio bilanciere
- una delle due aste collegate al telaio è il membro più corto  $\Rightarrow$  quadrilatero manovella-bilanciere (l'asta più corta è la manovella)

Se il quadrilatero non è di Grashof:

$$l_{max} + l_{min} > l_3 + l_4$$

allora il quadrilatero è sempre a doppio bilanciere.

In alternativa alle regole di Grashof si può utilizzare un approccio di tipo grafico individuando lo spazio raggiungibile della manovella (**AB**) e del resto del quadrilatero (**BCD**).

Dove la circonferenza è lo spazio di raggiungimento del membro AB e la corona circolare indicata in grigio lo spazio di raggiungimento dei rimanenti due corpi (di raggi  $l_{min}$  e  $l_{max}$ ), le linee di spessore maggiore indicano le intersezioni tra i sue spazi di raggiungimento e suggeriscono tipo di moto che il meccanismo può compiere.

- Le figure 1 e 4 descrivono il moto del membro AB come bilanciere
- Le figure 3 e 5 descrivono il moto del membro AB come manovella
- La figura 2 rappresenta un meccanismo non assemblabile

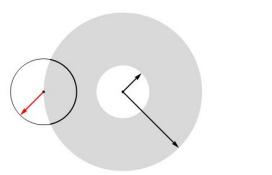


Figura 1

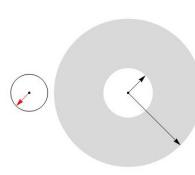


Figura 2

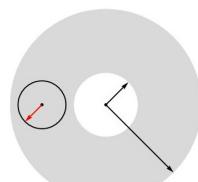


Figura 3

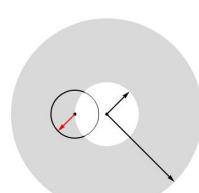


Figura 4

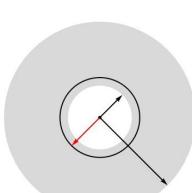


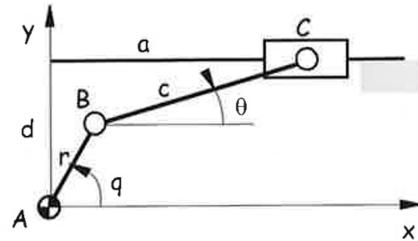
Figura 5

### 3.2.3 Meccanismo di spinta

#### ANALISI DI POSIZIONE

Procediamo all'analisi di posizione scrivendo le equazioni del poligono di chiusura:

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} + \mathbf{BC} - \mathbf{DC} - \mathbf{AD} &= 0 \\ r \begin{Bmatrix} \cos q \\ \sin q \end{Bmatrix} + c \begin{Bmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} a \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ d \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ r \begin{Bmatrix} \cos q \\ \sin q \end{Bmatrix} + c \begin{Bmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} a \\ d \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$



Data la particolarità dell'analisi di posizione (e visto che dobbiamo ancora formalizzare l'algoritmo risolutivo) procediamo direttamente all'analisi di velocità

#### ANALISI DI VELOCITÀ

L'analisi di velocità per semplicità analitica verrà compiuta dalla derivazione delle equazioni di chiusura sopra riportate, ovvero dal calcolo della matrice Jacobiana alle equazioni lineari associate:

$$\begin{aligned} [J] \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{a} \end{Bmatrix} &= -r \{B\} \dot{q} \\ \begin{bmatrix} -c \sin \vartheta & -1 \\ c \cos \vartheta & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{a} \end{Bmatrix} &= -r \begin{Bmatrix} -\sin q \\ \cos q \end{Bmatrix} \dot{q} \\ \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{a} \end{Bmatrix} &= -\frac{r}{0 - (-c \cos \vartheta)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c \cos \vartheta & -c \sin \vartheta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sin q \\ \cos q \end{Bmatrix} \dot{q} \\ &= -\frac{r}{c \cos \vartheta} \begin{Bmatrix} \cos q \\ c \sin(\vartheta - q) \end{Bmatrix} \dot{q} \end{aligned}$$

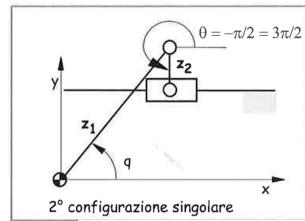
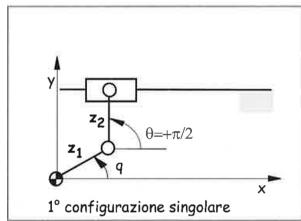
Si osserva la presenza di singolarità quando il determinante della matrice jacobiana (derivante dalla sua inversione) è nullo, ovvero:

$$\det[J] = c \cos \vartheta = 0$$

Le configurazioni singolari possibili risultano in corrispondenza di:

- $c = 0$  (per costruzione del meccanismo non è mai verificata);
- $\cos \vartheta = 0 \Rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Per quest'ultima ipotesi verificata il meccanismo di spinta si trova nelle due configurazioni singolari proposte di seguito:



Si tenga sempre a mente che non è detto che la configurazione singolare sia raggiungibile. A tal proposito bisogna sempre compiere un'analisi di raggiungibilità:



Figura 1



Figura 2

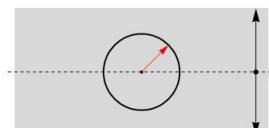


Figura 3

Dove la circonferenza in nero rappresenta lo spazio di raggiungibilità del membro AB, la banda grigia rappresenta lo spazio raggiungibile dagli altri due membri attorno all'asse in cui il pattino è vincolato a traslare

- La figura 1 rappresenta, dunque, un meccanismo non assemblabile
- La figura 2 suggerisce che il membro AB è un bilanciere
- La figura 3 suggerisce che il membro AB è una manovella

A dimostrazione che le **configurazioni singolari dipendono dalla scelta del movente** rieseguiamo l'analisi di posizione e velocità del meccanismo di spinta scegliendo, questa volta, non più  $\vartheta_1$  come movente, bensì la corsa del glifo (precedentemente indicato con il parametro "a").

#### ANALISI DI POSIZIONE ( $q = a$ )

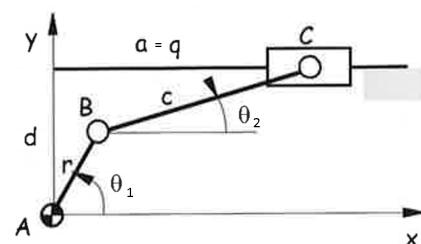
Identificando lo scorrimento a come movente, conseguentemente i cedenti risulteranno essere  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$ ; e le equazioni del poligono di chiusura prenderanno la seguente forma:

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BC} = \mathbf{AD} + \mathbf{DC}$$

$$r \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 \end{Bmatrix} + c \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{Bmatrix} = d \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + q \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$r \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 \end{Bmatrix} + c \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q \\ d \end{Bmatrix}$$

Le due equazioni di chiusura che si ricavano dal poligono scegliendo come movente lo scorrimento del pistone sono, di conseguenza:



$$\begin{cases} f_1 : & r \cos \vartheta_1 + c \cos \vartheta_2 - q = 0 \\ f_2 : & r \sin \vartheta_1 + c \sin \vartheta_2 - d = 0 \end{cases}$$

#### ANALISI DI VELOCITÀ

Per quanto riguarda l'analisi di velocità, procediamo come di consueto ad esprimere, in primo luogo la matrice Jacobiana dei cedenti ( $\vartheta_1, \vartheta_2$ ) e successivamente ad invertirla al fine di trovare una relazione lineare nelle velocità dei cedenti rispetto alla velocità del cedente:

$$[J] = [\nabla f_1 \quad \nabla f_2]^T = \begin{bmatrix} -r \sin \vartheta_1 & -c \sin \vartheta_2 \\ r \cos \vartheta_1 & c \cos \vartheta_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -r \sin \vartheta_1 & -c \sin \vartheta_2 \\ r \cos \vartheta_1 & c \cos \vartheta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{-rc \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + r c \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1} \begin{bmatrix} c \cos \vartheta_2 & c \sin \vartheta_2 \\ -r \cos \vartheta_1 & r \sin \vartheta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{rc \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)} \begin{bmatrix} c \cos \vartheta_2 & c \sin \vartheta_2 \\ -r \cos \vartheta_1 & r \sin \vartheta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

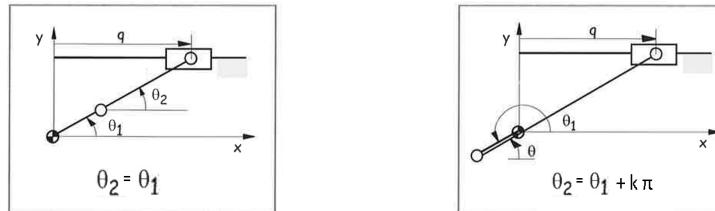
Come fatto notare precedentemente le configurazioni singolari di tale meccanismo, scelto "a" come movente, si trovano ponendo il determinante della matrice Jacobiana a zero. In corrispondenza di tali configurazioni singolari il rapporto di velocità tende ad infinito:

$$\det[J] = rc \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) = 0$$

La condizione appena imposta si può realizzare solo nei seguenti casi:

- $r = 0 \vee c = 0$
- $\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) = 0 \Rightarrow \vartheta_2 - \vartheta_1 = k\pi \Rightarrow \vartheta_2 = \vartheta_1 + k\pi$

Whereas le prime sono trascurate per ipotesi di lunghezza non nulla dei rispettivi bilancieri/manovelle la seconda individua due condizioni singolari che sono state proposte di seguito:



## 3.3 Riepilogo analisi cinematica

### 3.3.1 Analisi di posizione

Riassumendo, l'analisi con il poligono di chiusura, per meccanismi ad 1 G.d.L. con una catena chiusa, consiste nella scrittura di una equazione vettoriale di chiusura di posizione che fornisce due equazioni scalari di chiusura di posizione. Otteniamo un sistema di due equazioni in due incognite:

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{z}_i = 0 \quad \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^m \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_i \\ \sin \vartheta_i \end{Bmatrix} a_i = 0$$

### 3.3.2 Analisi di velocità

L'equazione di chiusura delle velocità si ottiene per derivazione rispetto al tempo delle equazioni di chiusura di posizione:

$$\sum_{i=1}^m \dot{\mathbf{z}}_i = \sum_{i=1}^m \dot{\vartheta}_i \wedge \mathbf{z}_i + \dot{a}_i \text{ vers } \mathbf{z}_i = 0$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{df_1}{dt} \\ \frac{df_2}{dt} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^m a_i \dot{\vartheta}_i \begin{Bmatrix} -\sin \vartheta_i \\ \cos \vartheta_i \end{Bmatrix} + \dot{a}_i \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_i \\ \sin \vartheta_i \end{Bmatrix} = 0$$

### 3.3.3 Analisi di accelerazione

L'equazione di chiusura delle accelerazioni si ottiene per derivazione rispetto al tempo della equazione di chiusura delle velocità:

$$\sum_{i=1}^m \ddot{z}_i = 0 \quad \sum_{i=1}^m \ddot{\vartheta}_i \wedge \mathbf{z}_i + \ddot{a}_i \text{ vers } \mathbf{z}_i - \dot{\vartheta}_i^2 \mathbf{z}_i + 2\dot{\vartheta}_i \wedge \dot{a}_i \text{ vers } \mathbf{z}_i = 0$$

$$\left\{ \frac{d^2 f_1}{dt^2}, \frac{d^2 f_2}{dt^2} \right\} = \sum_{i=1}^m a_i \ddot{\vartheta}_i \begin{Bmatrix} -\sin \vartheta_i \\ \cos \vartheta_i \end{Bmatrix} + \ddot{a}_i \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_i \\ \sin \vartheta_i \end{Bmatrix} - a_i \dot{\vartheta}_i^2 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_i \\ \sin \vartheta_i \end{Bmatrix} + 2a_i \dot{\vartheta}_i \begin{Bmatrix} -\sin \vartheta_i \\ \cos \vartheta_i \end{Bmatrix} = 0$$

Il termine  $\tau_i$  è detto rapporto di velocità dell'elemento i-esimo rispetto alla coordinata libera:

$$\{\dot{\varphi}\} = \{\tau\} \dot{q}$$

I rapporti di velocità sono uguali alle velocità  $\dot{\varphi}_i$  fornite dalla analisi di velocità ponendo  $\dot{q} = 1$

Il termine  $\frac{d\tau_i}{dq} = \frac{d^2 \varphi_i}{dq^2}$  è detto rapporto di accelerazione dell'elemento i-esimo rispetto alla coordinata libera.

$$\{\ddot{\varphi}\} = \{\tau\} \ddot{q} + \left\{ \frac{d\tau}{dq} \right\} \dot{q}^2$$

I rapporti di accelerazione sono uguali alle accelerazioni  $\ddot{\varphi}_i$  fornite dalle analisi di accelerazione ponendo  $\dot{q} = 1, \ddot{q} = 0$ .  $\tau_i$  si definisce rapporto di trasmissione quando  $\dot{\varphi}_i$  e  $\dot{q}$  rappresentano delle rotazioni.

## 3.4 Analisi cinematica dei meccanismo piani con due o più catene cinematiche

L'analisi cinematica con due o più catene chiuse viene condotta generalizzando quella vista per i meccanismi ad 1 G.d.L. con una catena chiusa.

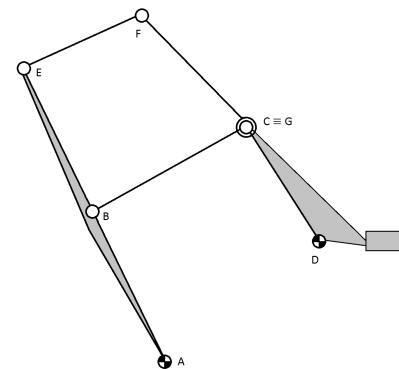
Nel caso di meccanismo con 2 o più catene chiuse si devono individuare i poligoni di chiusura. Questi poligoni devono essere indipendenti; per essere indipendenti ciascun poligono deve contenere qualche membro non contenuto nell'altro poligono.

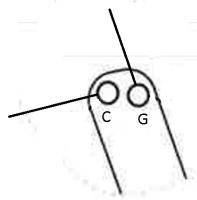
Se i poligoni sono indipendenti le equazioni scalari ottenute (pari al doppio del numero di poligoni) sono indipendenti.

Nel caso di meccanismi con 2 o più G.d.L. sono necessarie un numero di coordinate generalizzate pari al numero dei G.d.L. del meccanismo. Procediamo, dunque, ad analizzare un sollevatore, ovvero un meccanismo composto da due quadrilateri articolati atto al sollevamento di carichi.

Di fianco ne è proposta una raffigurazione semplificata in cui vengono messi in evidenza:

- un primo corpo ternario evidenziato dalle cerniere A,B e E
- un secondo corpo ternario evidenziato dalle cerniere D,C e G
- un primo quadrilatero formato dalle cerniere A,B,C,D
- un secondo quadrilatero formato dalle cerniere B, E, F, G





Seguendo una trattazione del tutto generale qualora i due corpi ternari sopra indicati fossero collegati direttamente si verrebbe a formare un Esalatero di Watt.

Contrariamente se i due corpi ternari sono connessi tramite un altro membro binario l' Esalatero sarebbe di Stephenson.

In particolare per la catena cinematica sotto esame, l'esalatero è di Stephenson, ma è un esalatero degenere dato che le cerniere C e G coincidono, ovvero formano una cerniera doppia.

In virtù di questa particolarità, il sistema in questione può essere analizzato come un esalatero di Watt dove i due corpi ternari collegati direttamente sono identificati dalle cerniere "A,B ed E" e "B,C e G".

Procediamo, di conseguenza, a scrivere le possibili equazioni di chiusura dei poligoni: tra i diversi percorsi indipendenti che si possono seguire ne possiamo identificare tre:

$$\begin{aligned} A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A \\ ABCDA \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} A \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A \\ AEFGCDA \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} B \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow C \rightarrow B \\ BRFGCB \end{aligned} \quad (3.3)$$

Tuttavia, sommando membro a membro il primo e il terzo percorso si giunge ad una conclusione piuttosto curiosa:

$$\begin{array}{rcl} AB + BC + CD + DA & = & 0 \quad + \\ BE + EF + FG + \cancel{GC}^0 + CB & = & 0 \\ \hline AE + EF + FG + \cancel{GC}^0 + \cancel{(BC + CB)} + CD + DA & = & 0 \end{array}$$

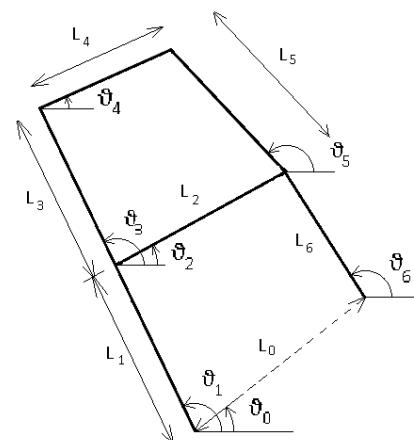
Come si può infatti notare la somma membro a membro del primo e del terzo poligono di chiusura yields il secondo poligono di chiusura AEFGCDA, ovvero: delle tre catene cinematiche chiuse, solo due sono **indipendenti**. In altri termini è possibile ricondursi ad un poligono di chiusura dalla combinazione lineare dei rimanenti due poligoni di chiusura (e questo rende tale poligono dipendente dagli altri due).

#### ANALISI DI POSIZIONE

Procediamo dunque all'analisi cinematica del meccanismo (che ricordiamo essere composto da due catene cinematiche) scegliendo due delle equazioni di chiusura del poligono (che sono perciò indipendenti). Per semplificare lo svolgimento analitico sceglieremo i poligoni che contengono meno membri: ABCDA e BEFGCB.

Per l'analisi di posizione del meccanismo in esame si assumerà che:

- I membri AB e BE siano allineati (ovvero  $\vartheta_1 = \vartheta_3$ )
- Il primo estremo che compare nel vettore sia quello da cui si misura l'angolo (e.i. AB: A è l'estremo su cui è misurato il rispettivo angolo  $\vartheta_i$ )
- È nota l'inclinazione del telaio ( $\vartheta_0 = \text{cost.}$ )
- $(\vartheta_1 = \vartheta_3), \vartheta_2, \vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6$  sono di conseguenza variabili



1. Scriviamo le equazioni del poligono di chiusura ABCDA:

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BC} - \mathbf{DC} - \mathbf{AD} = 0$$

$$L_1 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 \end{Bmatrix} + L_2 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{Bmatrix} - L_6 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_6 \\ \sin \vartheta_6 \end{Bmatrix} - L_0 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_0 \\ \sin \vartheta_0 \end{Bmatrix} = 0$$

Di questa prima equazione di chiusura si osserva che:

- La lunghezza dei membri  $L_i$  è nota e costante per costruzione;
- Gli angoli  $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_6$  sono variabili e, dunque, abbiamo ottenuto 2 equazioni in 3 incognite;
- L'angolo  $\vartheta_0$  è noto;

2. Scriviamo le equazioni del poligono di chiusura BEFGCB:

$$\mathbf{BE} + \mathbf{EF} - \mathbf{GF} + \mathbf{GC}^0 - \mathbf{BC} = 0$$

$$L_3 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 \end{Bmatrix} + L_4 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_4 \\ \sin \vartheta_4 \end{Bmatrix} - L_5 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_5 \\ \sin \vartheta_5 \end{Bmatrix} - L_2 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{Bmatrix} = 0$$

Di questa seconda equazione di chiusura si osserva che:

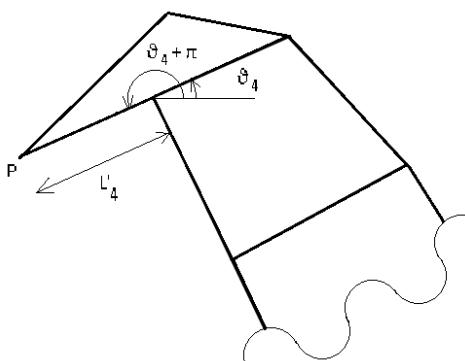
- La lunghezza dei membri  $L_i$  è nota e costante per costruzione;
- Gli angoli  $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_4, \vartheta_6$  sono variabili e, dunque, abbiamo ottenuto 2 equazioni in 4 incognite;

In conclusione, ciò che abbiamo ricavato è un sistema di quattro equazioni in 5 incognite, ovvero:  $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6$  a testimonianza che il meccanismo in questione presenta 1G.d.L.

Possiamo, dunque, giungere ad una soluzione del sistema in forma chiusa scegliendo come movente uno degli angoli variabili: in questo caso si sceglierà l'angolo  $q = \vartheta_{1=3}$ .

Una volta definito il movente sarà possibile ricavare un'espessione di  $\vartheta_2$  e  $\vartheta_6$  in funzione di  $q$  dalle prime due equazioni e, conseguentemente, un'espessione di  $\vartheta_4$  e  $\vartheta_5$  dalle seconde due equazioni.

Questa analisi potrebbe risultare poco utile in campo pratico, ma è fondamentale per il controllo, nel caso del sollevatore, del carico da sollevare rispetto al telaio:



La posizione del punto P si può ricavare non appena si è risolta l'analisi di posizione del quadrilatero, nel seguente modo:

$$\mathbf{AP} = \mathbf{AE} + \mathbf{EP}$$

Nell'ipotesi che EP sia rettilineo/allineato con F è possibile semplificare enormemente il problema poiché l'angolo  $\vartheta_P = \vartheta_4 + \pi$

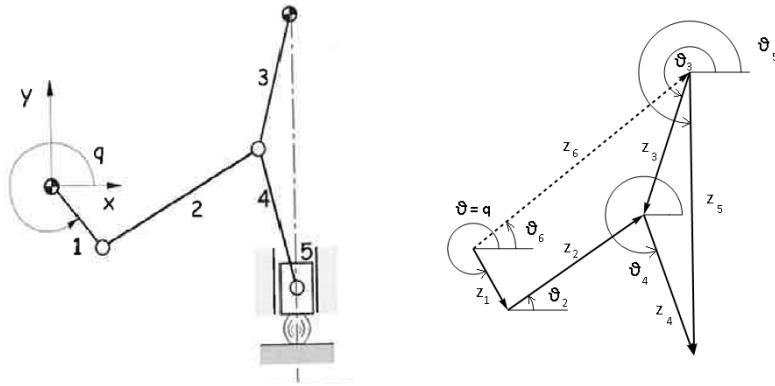
$$\mathbf{AP} = (L_1 + L_3) \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 \end{Bmatrix} + L'_4 \begin{Bmatrix} \cos (\vartheta_4 + \pi) \\ \sin (\vartheta_4 + \pi) \end{Bmatrix}$$

### 3.4.1 Meccanismi debolmente accoppiati

Consideriamo il meccanismo ad 1 G.d.L. a ginocchiera (che può essere visto come un quadrilatero a cui è stato aggiunto un gruppo composto da una biella e una pattina).

La coordinata generalizzata è la rotazione  $q$  della manovella del quadrilatero. Questo meccanismo, avente come membro motore proprio la manovella 1 è frequentemente usato nelle presse. Infatti è un moltiplicatore di forza poiché con una piccola coppia applicata al membro 1 permette di esercitare una elevata forza tramite il pattino.

#### ANALISI DI POSIZIONE



Data  $q$  determinare le rotazioni di 2,3,4 e la traslazione del pattino  $a_5$ . Individuiamo i poligoni di chiusura, le cui equazioni vettoriali risultano essere:

$$\begin{cases} \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_6 = 0 \\ \mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_5 + \mathbf{z}_3 = 0 \end{cases}$$

Tali equazioni espresse in forma scalare prendono la seguente forma:

$$a_1 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 \end{Bmatrix} + a_2 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{Bmatrix} - a_3 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_3 \\ \sin \vartheta_3 \end{Bmatrix} - a_6 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_6 \\ \sin \vartheta_6 \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.4)$$

$$a_4 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_4 \\ \sin \vartheta_4 \end{Bmatrix} - a_5 \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} + a_3 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_3 \\ \sin \vartheta_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.5)$$

Poiché, come già accennato precedentemente,  $q = \vartheta_1$  è il movente e le lunghezze dei membri  $a_i$  (con  $i \neq 5$ ) sono noti le incognite del sistema di equazioni, ovvero i cedenti, risulteranno essere  $\vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$  (si noti che l'inclinazione del telaio  $\vartheta_6$  e l'angolo  $\vartheta_5$  sono costanti e quindi noti).

Il sistema di equazioni si può dunque riscrivere nel seguente modo:

$$\begin{cases} a_2 \cos \vartheta_2 - a_3 \cos \vartheta_3 - a_6 \cos \vartheta_6 = -a_1 \cos q \\ a_2 \sin \vartheta_2 - a_3 \sin \vartheta_3 - a_6 \sin \vartheta_6 = -a_1 \sin q \end{cases} \quad \begin{cases} a_4 \cos \vartheta_4 + a_3 \cos \vartheta_3 = 0 \\ a_4 \sin \vartheta_4 + a_5 + a_3 \sin \vartheta_3 = 0 \end{cases}$$

Ovvero un sistema di 4 funzioni  $f_i$  di  $(\vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4, a_5, q)$ :

$$\begin{cases} f_1(\vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4, a_5, q) = 0 \\ f_2(\vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4, a_5, q) = 0 \\ f_3(\vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4, a_5, q) = 0 \\ f_4(\vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4, a_5, q) = 0 \end{cases}$$

Osservando i due sistemi di equazioni si può concludere che le prime due equazioni sono in realtà funzione di due incognite ( $\vartheta_2, \vartheta_3$ ).

Si può dunque risolvere tale sistema di 2 equazioni in due incognite, ottenere un'espressione di  $\vartheta_2, \vartheta_3$ , sostituirla alla seconda coppia di equazioni per poi risolvere il secondo sistema e ottenere le rimanenti incognite  $\vartheta_4, a_5$ .

Dato che le equazioni in esame non sono lineari, bensì contengono funzioni trigonometriche, a nostro soccorso giungono gli algoritmi risolutivi visti nel corso di Calcolo numerico, come, a titolo di esempio, l'algoritmo di Newton-Raphson.

#### ANALISI DI VELOCITÀ

L'analisi di velocità si può compiere derivando rispetto alla variabile temporale le funzioni implicite ( $f_i$ ) dei cedenti e del movente che abbiamo introdotto nell'analisi di posizione.

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_2} \dot{\vartheta}_2 + \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_3} \dot{\vartheta}_3 + \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_4} \dot{\vartheta}_4 + \frac{\partial f_1}{\partial a_5} \dot{a}_5 + \frac{\partial f_1}{\partial q} \dot{q} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_2} \dot{\vartheta}_2 + \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_3} \dot{\vartheta}_3 + \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_4} \dot{\vartheta}_4 + \frac{\partial f_2}{\partial a_5} \dot{a}_5 + \frac{\partial f_2}{\partial q} \dot{q} = 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial \vartheta_2} \dot{\vartheta}_2 + \frac{\partial f_3}{\partial \vartheta_3} \dot{\vartheta}_3 + \frac{\partial f_3}{\partial \vartheta_4} \dot{\vartheta}_4 + \frac{\partial f_3}{\partial a_5} \dot{a}_5 + \frac{\partial f_3}{\partial q} \dot{q} = 0 \\ \frac{\partial f_4}{\partial \vartheta_2} \dot{\vartheta}_2 + \frac{\partial f_4}{\partial \vartheta_3} \dot{\vartheta}_3 + \frac{\partial f_4}{\partial \vartheta_4} \dot{\vartheta}_4 + \frac{\partial f_4}{\partial a_5} \dot{a}_5 + \frac{\partial f_4}{\partial q} \dot{q} = 0 \end{cases}$$

Espressa in forma matriciale:

$$[J] \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_2 \\ \dot{\vartheta}_3 \\ \dot{\vartheta}_4 \\ \dot{a}_5 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} \\ \frac{\partial f_3}{\partial q} \\ \frac{\partial f_4}{\partial q} \end{Bmatrix} \dot{q}$$

$$\begin{bmatrix} -a_2 \sin \vartheta_2 & a_3 \sin \vartheta_3 & 0 & 0 \\ a_2 \cos \vartheta_2 & a_3 \cos \vartheta_3 & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 \sin \vartheta_3 & -a_4 \sin \vartheta_4 & 0 \\ 0 & a_3 \cos \vartheta_3 & a_4 \cos \vartheta_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_2 \\ \dot{\vartheta}_3 \\ \dot{\vartheta}_4 \\ \dot{a}_5 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} -a_1 \sin q \\ a_1 \cos q \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dot{q}$$

In conclusione, dall'analisi di velocità del meccanismo debolmente accoppiato si deduce che:

- Le prime due equazioni non dipendono dalla velocità dei cedenti  $\vartheta_4, a_5$  a riconferma che il meccanismo è debolmente accoppiato
- Le seconde due equazioni non sono sensibili a  $\vartheta_2$

Invertendo, dunque, la matrice Jacobiana  $[J]$  si può giungere ad una espressione della velocità dei cedenti come funzione della posizione dei cedenti, della posizione del movente e della velocità del movente.

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_2 \\ \dot{\vartheta}_3 \\ \dot{\vartheta}_4 \\ \dot{a}_5 \end{Bmatrix}}_{\{\dot{\varphi}\}} = - [J]^{-1} \underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} \\ \frac{\partial f_3}{\partial q} \\ \frac{\partial f_4}{\partial q} \end{Bmatrix}}_{\{\tau\}} \dot{q}$$

$$\{\dot{\varphi}\} = \{\tau\} \dot{q}$$

Dove la matrice che moltiplica la velocità del movente è la matrice dei rapporti di velocità.

#### ANALISI DI ACCELERAZIONE

Derivando la forma matriciale compatta ricavata a conclusione dell'analisi di velocità si può ottenere una rappresentazione generale delle accelerazione dei cedenti:

$$\{\ddot{\varphi}\} = \{\tau\} \ddot{q} + \left\{ \frac{\partial \tau}{\partial q} \right\} \dot{q}^2$$

Noto che

$$\{\tau\} = - [J]^{-1} \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial q} \right\}$$

$$[J] \{\tau\} = - \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial q} \right\}$$

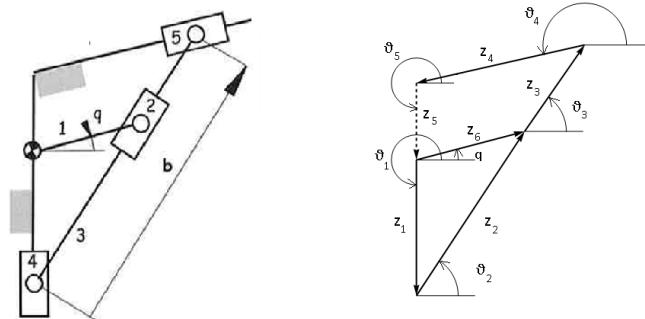
La derivata parziale del vettore dei rapporti di velocità rispetto al movente si può ottenere nel seguente modo:

$$\left[ \frac{\partial J}{\partial q} \right] \{\tau\} + [J] \left\{ \frac{\partial \tau}{\partial q} \right\} = - \left\{ \frac{\delta^2 f_i}{\delta q^2} \right\}$$

$$\left\{ \frac{\partial \tau}{\partial q} \right\} = - [J]^{-1} \left( \left[ \frac{\partial J}{\partial q} \right] \{\tau\} + \left\{ \frac{\delta^2 f_i}{\delta q^2} \right\} \right)$$

### 3.4.2 Meccanismi fortemente accoppiati

Consideriamo il meccanismo a rapido ritorno (Glifo oscillante) a 1 G.d.L. illustrato in figura. In questo caso il meccanismo non è schematizzabile come un meccanismo a 1 G.d.L. con una sola catena chiusa e un gruppo biella-pattino. Assumiamo come coordinata generalizzata la rotazione della manovella 1.



#### ANALISI DI POSIZIONE

Dato il valore della coordinata libera determinare la rotazione del glifo e le traslazioni dei 3 pattini. Consideriamo le equazioni vettoriali di chiusura dei poligoni:

$$\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_6 = 0$$

$$\mathbf{z}_6 + \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4 + \mathbf{z}_5 = 0$$

I due poligoni scelti sono indipendenti infatti ciascun poligono include vettori non appartenenti all'altro. In termini scalari si ottengono 4 equazioni indipendenti:

$$a_1 \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} + a_2 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{Bmatrix} - a_6 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_6 \\ \sin \vartheta_6 \end{Bmatrix} = 0$$

$$a_6 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_6 \\ \sin \vartheta_6 \end{Bmatrix} + a_3 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_3 \\ \sin \vartheta_3 \end{Bmatrix} + a_4 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_4 \\ \sin \vartheta_4 \end{Bmatrix} + a_5 \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = 0$$

Ricordando che abbiamo assunto come coordinata libera  $q = \vartheta_6$  e che  $a_3 = b - a_2$  e  $\vartheta_3 = \vartheta_2$ , si ottiene:

$$\begin{cases} a_2 \cos \vartheta_2 = a_6 \cos q \\ -a_1 + a_2 \sin \vartheta_2 = a_6 \sin q \\ (b - a_2) \cos \vartheta_2 + a_4 \cos \vartheta_4 = a_6 \cos q \\ (b - a_2) \sin \vartheta_2 + a_4 \sin \vartheta_4 - a_5 = -a_6 \sin q \end{cases}$$

Le incognite, nonché i cedenti, sono;  $a_1, a_2, a_4, \vartheta_2$ . La matrice Jacobiana è:

$$[J] = \begin{bmatrix} 0 & \cos \vartheta_2 & 0 & -a_2 \sin \vartheta_2 \\ -1 & \sin \vartheta_2 & 0 & a_2 \cos \vartheta_2 \\ 0 & -\cos \vartheta_2 & \cos \vartheta_4 & -(b - a_2) \sin \vartheta_2 \\ 0 & -\sin \vartheta_2 & \sin \vartheta_4 & (b - a_2) \cos \vartheta_2 \end{bmatrix}$$

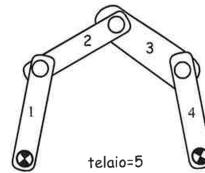
Dalla forma della matrice Jacobiana notiamo che non si possono ricavare due incognite indipendentemente dalle altre due usando due sole equazioni, e poi una volta note due incognite ricavare le restanti tramite le altre due equazioni.

Quindi il meccanismo è **fortemente accoppiato**, come la nostra analisi preliminare ci aveva fatto intuire (non avevamo trovato un meccanismo a 1 G.d.L. con una catena chiusa, membro motore e telaio sommato ad un altro meccanismo).

Vale la pena osservare che anche se ordiniamo in maniera diversa le incognite il sistema non diventa separabile. Per quanto concerne l'analisi di velocità e di accelerazione si deve procedere nella solita maniera.

### 3.4.3 Meccanismi a più gradi di libertà

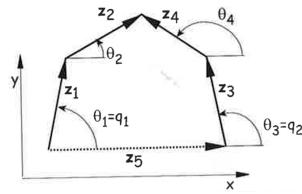
Introduciamo lo studio con un esempio: il pentalatero composto da 5 membri di cui uno fissato a telaio con le due manovelle fissate a telaio considerate come membri moventi.



#### ANALISI DI POSIZIONE

Dati i valori delle coordinate generalizzate determinare i valori delle inclinazioni delle altre due aste mobili. Il poligono di chiusura è il seguente:

$$\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_5 = 0$$



Le corrispondenti equazioni scalari sono:

$$\begin{cases} f_1 \\ f_2 \end{cases} = \begin{cases} a_1 \begin{cases} \cos q_1 \\ \sin q_1 \end{cases} + a_2 \begin{cases} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{cases} - a_3 \begin{cases} \cos q_2 \\ \sin q_2 \end{cases} - a_4 \begin{cases} \cos \vartheta_4 \\ \sin \vartheta_4 \end{cases} - a_5 \begin{cases} \cos \vartheta_5 \\ \sin \vartheta_5 \end{cases} \\ 0 \end{cases} = 0$$

Se sono assegnate  $q_1$  e  $q_2$  abbiamo due equazioni non lineari nelle due incognite  $\vartheta_2$  e  $\vartheta_4$ .

La matrice Jacobiana risulta:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi_3} & \frac{\partial f}{\partial \varphi_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_4} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \vartheta_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2 \sin \vartheta_2 & a_4 \sin \vartheta_4 \\ a_2 \cos \vartheta_2 & -a_4 \cos \vartheta_4 \end{bmatrix}$$

L'analisi di posizione può essere risolta numericamente

#### ANALISI DI VELOCITÀ

Le velocità si possono ottenere derivando le equazioni scalari, in forma matriciale si ha:

$$\begin{bmatrix} -a_2 \sin \vartheta_2 & a_4 \sin \vartheta_4 \\ a_2 \cos \vartheta_2 & -a_4 \cos \vartheta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\vartheta}_2 \\ \dot{\vartheta}_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -a_1 \sin q_1 & a_3 \sin q_2 \\ a_1 \cos q_1 & -a_3 \cos q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

La matrice al primo membro è la matrice Jacobiana del sistema; a secondo membro non abbiamo il vettore contenente le derivate delle equazioni rispetto alla coordinata generalizzata moltiplicata per le velocità della coordinata generalizzata, come nel caso dei meccanismo a un grado di libertà, ma abbiamo la matrice delle derivate parziali delle equazioni scalari di chiusura rispetto alle coordinate generalizzate, moltiplicate per il vettore delle velocità delle coordinate generalizzate.

$$[J] \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_2 \\ \dot{\vartheta}_4 \end{Bmatrix} = - [B] \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} ; \quad [B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} \end{bmatrix}$$

Per calcolare le incognite velocità si moltiplica ambo i membri per l'inversa della matrice Jacobiana e si ottiene:

$$\{\dot{\varphi}\} = [J]^{-1} [B] \{\dot{q}\} = [\tau] \{\dot{q}\}$$

dove  $[\tau]$  indica la matrice dei rapporti di velocità fornita dal prodotto  $-[J]^{-1} [B]$ .

Pertanto possiamo scrivere in forma matriciale:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_2 \\ \dot{\vartheta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{\vartheta_2, q_1} & \tau_{\vartheta_2, q_2} \\ \tau_{\vartheta_4, q_1} & \tau_{\vartheta_4, q_2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix}$$

In questo caso i rapporti di velocità dipendono sia da  $\dot{q}_1$  che da  $\dot{q}_2$ :

$$\begin{aligned} \tau_{\vartheta_2, q_1} &= \frac{a_1 \sin(q_1 - \vartheta_4)}{a_2 \sin(\vartheta_4 - \vartheta_2)} & \tau_{\vartheta_2, q_2} &= \frac{a_3 \sin(\vartheta_4 - q_2)}{a_2 \sin(\vartheta_4 - \vartheta_2)} \\ \tau_{\vartheta_4, q_1} &= \frac{a_1 \sin(q_1 - \vartheta_2)}{a_4 \sin(\vartheta_4 - \vartheta_2)} & \tau_{\vartheta_4, q_2} &= \frac{a_3 \sin(\vartheta_2 - q_2)}{a_2 \sin(\vartheta_4 - \vartheta_2)} \end{aligned}$$

Da osservare che in questo caso si ha una matrice di rapporti di velocità, mentre nel caso di meccanismi a 1 G.d.L. avevamo un vettore di rapporti di velocità.

Il fatto che la matrice dei rapporti di velocità sia quadrata è una conseguenza del fatto che si ha una sola catena chiusa (due equazioni scalari) e due G.d.L. (due coordinate generalizzate), in genere è rettangolare.

#### ANALISI DI ACCELERAZIONE

Anche in questo caso sono possibili due approcci: derivazione rispetto al tempo delle equazioni scalari di chiusura delle velocità, ottenendo le equazioni scalari di chiusura delle accelerazioni, oppure la derivazione della equazione contenente i rapporti di velocità.

Secondo la seconda strada si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\vartheta}_2 \\ \ddot{\vartheta}_4 \end{Bmatrix} = [\tau] \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \left[ \frac{\partial \tau}{\partial q_1} \right] \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} \dot{q}_1 + \left[ \frac{\partial \tau}{\partial q_2} \right] \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} \dot{q}_2$$

### 3.5 Meccanismi con elementi dotati di moto di puro rotolamento

In molte applicazioni abbiamo delle ruote che rotolano senza strisciare su una superficie.

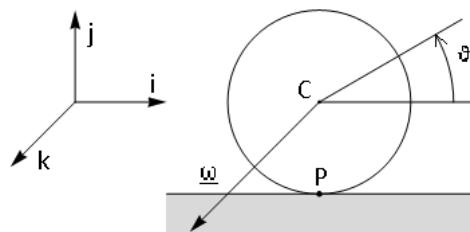
Vediamo come si analizza questo problema dal punto di vista cinematico.

Consideriamo il caso di una ruota che si muove in contatto con una rotaia senza potersi staccare.

In assenza di attrito il sistema ha 2 G.d.L., uno associato alla traslazione  $x_C$  del centro della ruota e uno associato alla rotazione  $\vartheta$  (la coppia è superiore).

In presenza di attrito possono verificarsi due casi in relazione alle forze applicate dall'esterno della ruota ( $F$  e  $M$ ):

- La rotaia riesce a sviluppare una forza di attrito tale da opporsi allo slittamento tra ruota e rotaia;
- La rotaia non riesce a sviluppare una forza di attrito tale da opporsi allo slittamento.



Nel primo caso abbiamo il moto di puro rotolamento e la traslazione e la rotazione non sono più indipendenti (*quindi non posso avere due coordinate generalizzate*)

Volendo rappresentare solo l'effetto della rotazione, dovremmo definire un sistema di riferimento mobile nel centro C e scrivere la formula fondamentale della cinematica.

$$\mathbf{v} = \underline{\omega} \wedge \underline{\varrho}$$

La velocità lungo un diametro verticale della ruota (*nonché la velocità relativa*) è ottenibile tramite la relazione sopra descritta

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \dot{\vartheta} \mathbf{k} \wedge \varrho \mathbf{j} = -\dot{\vartheta} \varrho \mathbf{i} \\ (\mathbf{k} \wedge \mathbf{j} &= -\mathbf{i})\end{aligned}$$

Analogamente per la velocità di rotazione possiamo analizzare separatamente l'effetto della velocità di trascinamento  $\dot{x}_C$ .

Lungo un diametro tale velocità risulta essere una costante.

Tutti i punti dello spazio mobile hanno, infatti, stessa velocità  $\dot{x}_C$  che verrà assunta negativa.

Definita, dunque, la velocità di trascinamento di ciascun punto sarà possibile sommarla ad ogni velocità relativa degli stessi per ottenere quella assoluta

Dalla loro somma/combinazione si ottiene la seguente rappresentazione schematica/vettoriale delle velocità:

La rappresentazione grafica proposta è rappresentativa di un caso del tutto generale, ovvero di una condizione di strisciamento.

Imponendo alcune condizioni/accorgimenti al sistema in esame è possibile ricondursi ad un moto della ruota in questione, di puro rotolamento.

L'ipotesi da imporre per ricondursi ad una condizione di puro rotolamento è che la velocità del punto P, ovvero il punto di contatto tra la ruota e la superficie sia nulla (nel sistema di riferimento assoluto).

Noto che, per il punto P:

$$\mathbf{v} = -\varrho \dot{\vartheta} \mathbf{i} = -(-R) \dot{\vartheta} \mathbf{i} = R \dot{\vartheta} \mathbf{i}$$

In quanto il sistema di riferimento scelto aveva origine nel centro della ruota e versore  $\mathbf{j}$  positivo nel verso verticale, il valore di  $\varrho$  sarà negativo e pari al raggio R della ruota stessa

La velocità del punto P nel sistema di riferimento assoluto, sarà dunque:

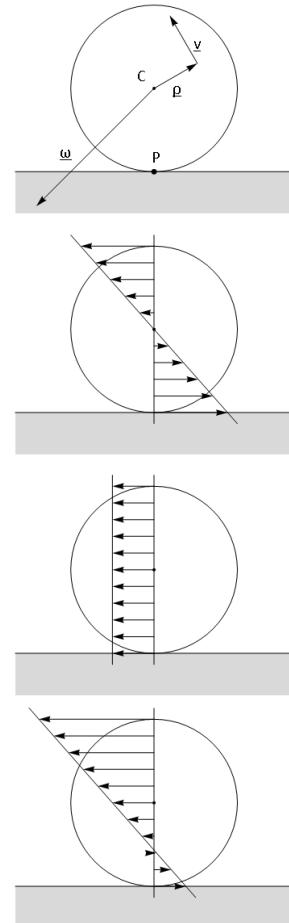
$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= -\varrho \dot{\vartheta} + \dot{x}_C = 0 \\ + R \dot{\vartheta} + \dot{x}_C &= 0 \\ \dot{x}_C &= -R \dot{\vartheta}\end{aligned}$$

*Integrando l'espressione nella variabile temporale, si ottiene:*

$$\dot{x}_C = -R \dot{\vartheta} + \text{cost.}$$

La relazione cinematica appena ottenuta è l'equazione di vincolo in quanto esprime il legame che deve esserci tra "x" e " $\dot{\vartheta}$ " nel caso di moto di puro rotolamento. Dato questo legame una sola coordinata è sufficiente a descrivere il sistema che quindi ha un solo G.d.L.

Se la forza di attrito sviluppata in P non riesce ad opporsi allo slittamento la ruota slitterà e quindi diventerà un sistema a due G.d.L. Si deve perciò verificare se la rotaia riesce a sviluppare la forza di attrito necessaria ad evitare lo strisciamento. Per fare questo si devono scrivere le equazioni della dinamica della ruota e si devono conoscere le caratteristiche di attrito dei materiali a contatto (*non è quindi un problema cinematico!*).



Inizialmente si ipotizza che la superficie sia perfettamente ruvida, cioè che in qualsiasi condizione dinamica sia in grado di impedire lo slittamento. In base a questa ipotesi si determina il moto del sistema e il valore della forza di attrito che deve essere esercitata nel punto P per impedire lo slittamento. Si abbandona poi l'ipotesi di superficie perfettamente ruvida e si verifica se essa è realmente in grado di esercitare la forza di attrito necessaria per impedire lo strisciamento.

### 3.5.1 Esempio

Consideriamo il seguente esempio composto da una biella connessa ad una ruota appoggiata su una superficie perfettamente ruvida. Il sistema ha 1 G.d.L..

Come coordinata generalizzata si sceglie la distanza  $q$  tra i perni A e B.

L'equazione vettoriale di chiusura è:

$$\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3 = 0$$

Che nella relativa forma scalare corrisponde a:

$$\begin{aligned} q \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 \end{Bmatrix} - a_2 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} a_3 \cos \vartheta_3 \\ a_3 \sin \vartheta_3 \end{Bmatrix} &= 0 \\ q \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 \end{Bmatrix} - a_2 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \end{Bmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Poiché la coordinata ( $y_C$ ) del centro della ruota è nota in virtù del vincolo con il terreno, la coordinata generalizzata  $q$  è nota in quanto tale, e la distanza ( $a_2$ ) è nota per costruzione del meccanismo. Possiamo identificare tre incognite: ( $x_C, \vartheta_1, \vartheta_2$ ).

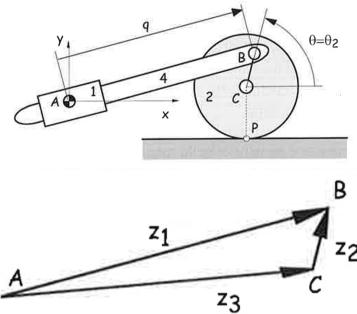
Abbiamo ottenuto, di conseguenza, due equazioni in tre incognite, e il sistema di equazioni, così scritto non prevere soluzioni in forma chiusa.

Imponiamo, dunque, la condizione di moto di puro rotolamento: ( $x_C = -r \vartheta_2 + \text{cost.}$ ), dove la costante sarà il valore della coordinata  $x_C = x_{C0}$  quando  $\vartheta_2 = 0$ .

Così facendo abbiamo imposto un equazione di vincolo che lega due delle incognite del problema e ci riconduce ad un sistema di due equazioni in due incognite.

Vale la pena mettere in luce che questa relazione esprime il fatto che il punto P di contatto si sposta della stessa quantità lungo la rotaia e lungo la periferia della ruota e ciò significa non strisciamento.

È da osservare che in questo caso per risolvere il problema bisogna conoscere la configurazione iniziale. Infatti ad un valore di  $q$  corrispondono infiniti modi di assemblaggio del meccanismo, mentre negli usuali meccanismi articolati possono esserci al più alcuni modi di assemblaggio che devono essere comunque specificati prima dell'inizio dell'analisi. In definitiva il sistema è rappresentato da 3 equazioni non lineari in tre incognite che può essere risolto con i soliti metodi numerici. Per quanto riguarda le analisi di velocità e di accelerazione si devono derivare assieme le equazioni scalari di chiusura e l'equazione che esprime il vincolo.



### 3.5.2 Esercizio N.1

Come è possibile notare dalle raffigurazioni proposte il meccanismo in questione risulta essere la composizione di due catene cinematiche chiuse, che potrebbero essere studiate separatamente, se il meccanismo è debolmente accoppiato.

Scrivendo l'equazione di chiusura del poligono della prima catena cinematica si osserva che:

$$\mathbf{DO} + \mathbf{OA} - \mathbf{BA} - \mathbf{DB} = 0$$

$$l \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + l \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{Bmatrix} - l \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 \end{Bmatrix} - q \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = 0$$

“q” è noto in quanto coordinata generalizzata e che quindi le incognite sono  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$ . È, dunque, possibile risolvere separatamente questo primo sistema di due equazioni in due incognite, in quanto il meccanismo è debolmente accoppiato.

A tal scopo svolgiamo separatamente le analisi di posizione e velocità dei due poligoni di chiusura delle catene cinematiche di cui è composto il meccanismo:

- Procediamo dunque ad esplicitare le due funzioni del primo poligono di chiusura:

$$\begin{cases} f_1 : l + l \cos \vartheta_2 - l \cos \vartheta_1 = 0 \\ f_2 : l \sin \vartheta_2 - l \sin \vartheta_1 + q = 0 \end{cases}$$

Tramite tali equazioni possiamo dunque calcolare la matrice Jacobiana e trovare le configurazioni singolari di questa parte di meccanismo.

$$[J_1] = \begin{bmatrix} l \sin \vartheta_1 & -l \sin \vartheta_2 \\ -l \cos \vartheta_1 & l \cos \vartheta_2 \end{bmatrix} \quad [J_1]^{-1} = \frac{1}{l^2 (\sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1)} \begin{bmatrix} l \cos \vartheta_2 & l \sin \vartheta_2 \\ l \cos \vartheta_1 & l \sin \vartheta_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [J_1] \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_1 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \dot{q} \\ \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_1 \end{Bmatrix} &= \frac{1}{l^2 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)} \begin{bmatrix} l \cos \vartheta_2 & l \sin \vartheta_2 \\ l \cos \vartheta_1 & l \sin \vartheta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \dot{q} \\ &= \frac{1}{l \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)} \begin{Bmatrix} -\sin \vartheta_2 \\ -\sin \vartheta_1 \end{Bmatrix} \dot{q} \end{aligned}$$

Dove:

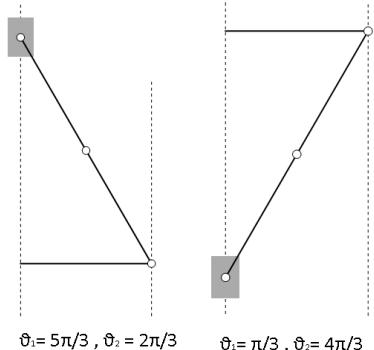
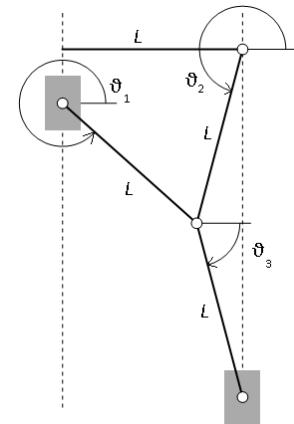
$$\dot{\vartheta}_1 = -\frac{\sin \vartheta_2}{l \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)} \dot{q} \quad ; \quad \dot{\vartheta}_2 = -\frac{\sin \vartheta_1}{l \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)} \dot{q}$$

Le configurazioni singolari si ottengono ponendo il determinante della matrice Jacobiana pari a zero e corrispondono a:

$$l = 0 \quad ; \quad \vartheta_1 = \vartheta_2 + k\pi \quad ; \quad \vartheta_1 = \vartheta_2$$

Sostituendo le 2 condizioni singolari sugli angoli si ottiene che:

$$\begin{cases} l + l \cos \vartheta + l \cos \vartheta = 0 \\ l \sin \vartheta + l \sin \vartheta = -q \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \cos \vartheta = -1 \\ 2l \sin \vartheta = -q \end{cases} \quad \begin{cases} \vartheta = \frac{2\pi}{3} \vee \frac{4\pi}{3} \\ q = \mp l\sqrt{3} \end{cases}$$



In conclusione i rapporti di velocità per questo poligono di chiusura saranno:

$$\tau_{\vartheta_1,q} = \frac{\sin \vartheta_2}{l \sin (\vartheta_1 - \vartheta_2)} ; \quad \tau_{\vartheta_2,q} = \frac{\sin \vartheta_1}{l \sin (\vartheta_1 - \vartheta_2)}$$

2. Proseguiamo la trattazione ripetendo i passaggi precedenti anche per il secondo poligono di chiusura:

$$l \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{Bmatrix} + l \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_3 \\ \sin \vartheta_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ y_C \end{Bmatrix} = 0$$

Tramite tali equazioni è possibile ricondursi alla matrice Jacobiana:

$$[J_2] = \begin{bmatrix} -l \sin \vartheta_3 & 0 \\ l \cos \vartheta_3 & -1 \end{bmatrix} \quad [J_2]^{-1} = \frac{1}{l \sin \vartheta_3} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -l \cos \vartheta_3 & -l \sin \vartheta_3 \end{bmatrix}$$

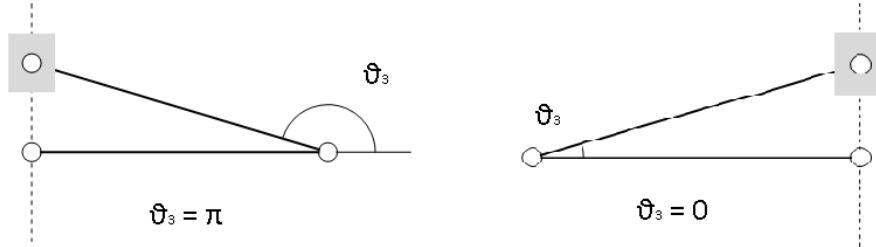
$$\begin{aligned} [J_2] \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_3 \\ \dot{y}_C \end{Bmatrix} &= -l \begin{Bmatrix} -\sin \vartheta_2 \\ \cos \vartheta_2 \end{Bmatrix} \dot{\vartheta}_2 \\ \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_3 \\ \dot{y}_C \end{Bmatrix} &= -\frac{l}{\sin \vartheta_3} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -l \cos \vartheta_3 & -l \sin \vartheta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sin \vartheta_2 \\ \cos \vartheta_2 \end{Bmatrix} \dot{\vartheta}_2 \\ &= -\frac{1}{\sin \vartheta_3} \left\{ \begin{array}{c} \sin \vartheta_2 \\ l \cos \vartheta_3 \sin \vartheta_2 - l \sin \vartheta_3 \cos \vartheta_2 \end{array} \right\} \dot{\vartheta}_2 \end{aligned}$$

Dove:

$$\dot{\vartheta}_3 = -\frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_3} \dot{\vartheta}_2 ; \quad \dot{y}_C = -\frac{l \sin (\vartheta_2 - \vartheta_3)}{\sin \vartheta_3} \dot{\vartheta}_2$$

Le configurazioni singolari di questo secondo poligono di chiusura si riducono a:

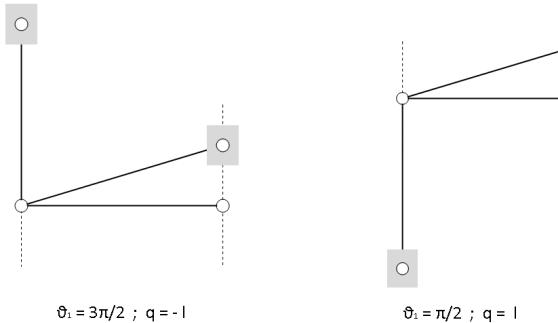
$$\det[J_2] = 0 \Rightarrow l \sin \vartheta_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} l = 0 \\ \vartheta_3 = k\pi \end{cases}$$



Dando un'occhiata al meccanismo composto da queste configurazioni singolari si osserva che:

Per  $\vartheta_3 = 0, \vartheta_2 = \pi$  e le equazioni di chiusura del primo poligono si riducono a:

$$\begin{cases} l + L \cos \pi - l \cos \vartheta_1 = 0 \\ l \sin \pi - l \sin \vartheta_1 = -q \end{cases} \quad \vartheta_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \begin{cases} \vartheta_1 = \frac{\pi}{2} \& l = q \\ \vartheta_1 = \frac{3\pi}{2} \& l = -q \end{cases}$$



Per concludere esprimiamo i rapporti di velocità tra  $\vartheta_3$ ,  $\vartheta_2$  e  $y_C$ ,  $\vartheta_2$  rispetto a "q":

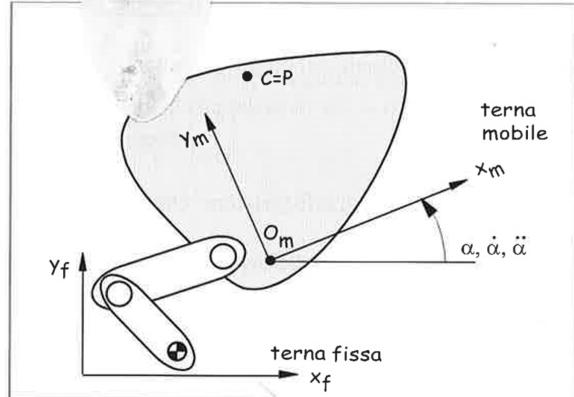
$$\begin{cases} \dot{\vartheta}_3 = \tau_{\vartheta_3, \vartheta_2} \dot{\vartheta}_2 = \tau_{\vartheta_3, \vartheta_2} \tau_{\vartheta_2, q} \dot{q} \\ \dot{y}_C = \tau_{y_C, \vartheta_2} \dot{\vartheta}_2 = \tau_{y_C, \vartheta_2} \tau_{y_C, q} \dot{q} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\vartheta}_3 = -\frac{\sin \vartheta_1}{\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)} \left( -\frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_3} \right) \dot{q} \\ \dot{y}_C = -\frac{\sin \vartheta_1}{\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)} \left( -\frac{l \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3)}{\sin \vartheta_3} \right) \dot{q} \end{cases}$$

### 3.6 Polo di istantanea rotazione

Consideriamo un membro rigido in moto piano al quale associamo un S.d.R.

Nel moto piano, che non sia una pura traslazione, in ogni istante esiste uno ed un solo punto solidale al sistema rigido avente velocità nulla. Da osservare che il punto può essere anche al di fuori del corpo rigido. Per trovare questo punto consideriamo la formula fondamentale della cinematica dei corpi rigidi nella forma scalare:

$${}^f \begin{Bmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{y}_P \end{Bmatrix} = {}^f \begin{Bmatrix} \dot{x}_{O_m} \\ \dot{y}_{O_m} \end{Bmatrix} + \dot{\alpha} {}^f_m [R] {}^m \begin{Bmatrix} -y_P \\ x_P \end{Bmatrix}$$



Imponiamo a P una velocità nulla e cerchiamo le due coordinate di P=C che soddisfano la relazione:

$${}^f \begin{Bmatrix} \dot{x}_C \\ \dot{y}_C \end{Bmatrix} = {}^f \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = {}^f \begin{Bmatrix} \dot{x}_{O_m} \\ \dot{y}_{O_m} \end{Bmatrix} + \dot{\alpha} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} {}^m \begin{Bmatrix} -y_C \\ x_C \end{Bmatrix}$$

da cui:

$${}^m \begin{Bmatrix} -y_C \\ x_C \end{Bmatrix} = -\frac{1}{\dot{\alpha}} {}^f \begin{Bmatrix} \dot{x}_{O_m} \\ \dot{y}_{O_m} \end{Bmatrix}$$

ossia:

$${}^m x_C = \frac{{}^f x_{O_m}}{\dot{\alpha}} \sin(\alpha) - \frac{{}^f y_{O_m}}{\dot{\alpha}} \cos(\alpha) \quad ; \quad {}^m y_C = \frac{{}^f x_{O_m}}{\dot{\alpha}} \cos(\alpha) + \frac{{}^f y_{O_m}}{\dot{\alpha}} \sin(\alpha)$$

Il punto avente coordinate  ${}^m x_C$ ,  ${}^m y_C$  rispetto al sistema mobile viene chiamato centro di istantanea rotazione perché nell'istante considerato tutti i punti del corpo rigido ruotano attorno ad esso.

Le coordinate del centro di istantanea rotazione rispetto al sistema fisso  $f$  si ottengono dalla trasformazione:

$${}^f \begin{Bmatrix} x_C \\ y_C \end{Bmatrix} = {}^f \begin{Bmatrix} x_{O_m} \\ y_{O_m} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} {}^m \begin{Bmatrix} x_C \\ y_C \end{Bmatrix} = {}^f \begin{Bmatrix} x_{O_m} \\ y_{O_m} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{{}^f x_{O_m}}{\dot{\alpha}} \sin(\alpha) - \frac{{}^f y_{O_m}}{\dot{\alpha}} \cos(\alpha) \\ \frac{{}^f y_{O_m}}{\dot{\alpha}} \sin(\alpha) + \frac{{}^f x_{O_m}}{\dot{\alpha}} \cos(\alpha) \end{Bmatrix}$$

In definitiva si ottiene:

$${}^f x_C = {}^f x_{O_m} - \frac{y \dot{\theta}_m}{\dot{\alpha}} \quad ; \quad {}^f y_C = {}^f y_{O_m} + \frac{x \dot{\theta}_m}{\dot{\alpha}}$$

Le formule che ci danno le coordinate del centro di istantanea rotazione mostrano che in generale esso si sposta sia nel sistema di riferimento mobile che nel sistema fisso. Il centro di istantanea rotazione non varia solo se il corpo ruota intorno ad un punto fisso.

Una volta noto il centro di istantanea rotazione si possono calcolare, in quell'istante, le velocità di tutti i punti del corpo rigido piano tramite la formula fondamentale dei corpi rigidi:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_C + \dot{\vartheta} \wedge \mathbf{CP}$$

Poiché  $\mathbf{v}_C$  è nulla si ottiene in forma scalare:

$$\begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \end{Bmatrix} = \dot{\vartheta} \begin{Bmatrix} -CP_y \\ CP_x \end{Bmatrix}$$

Se invece in un istante la velocità angolare è nulla, tutti i punti del corpo rigido hanno la stessa velocità ed abbiamo quindi un moto traslatorio.

In questo caso non esiste un centro di istantanea rotazione, infatti le due formule che permettono di calcolare il centro di istantanea rotazione hanno al denominatore la velocità angolare; se questa tende a zero, le coordinate del centro tendono all'infinito.

Possiamo ora enunciare il **teorema di Chasles**: le velocità dei punti di un corpo rigido nel moto piano o sono ortogonali alla congiungente i punti con il centro di istantanea rotazione (moto rotatorio) o sono parallele (moto traslatorio).

#### • Esempio relativo ad un quadrilatero piano

Vogliamo calcolare il centro di istantanea rotazione della biella 3 (non ruota attorno ad un asse fisso).

La velocità dei punti B e E sono già note.

B, che appartiene anche al segmento 2, ha velocità ortogonale al segmento AB mentre E, che appartiene al segmento 4, ha velocità ortogonale al segmento DE.

Ma la velocità di B, pensando B appartenente al segmento 3, deve essere, per il teorema di Chasles, ortogonale alla congiungente di B con il centro di istantanea rotazione di 3.

Per gli stessi motivi la velocità di E è ortogonale alla congiungente di E con il centro di istantanea rotazione di 3.

Perciò il centro di istantanea rotazione di 3 si trova all'intersezione tra la normale a  $\mathbf{v}_B$ , condotta per B e la normale a  $\mathbf{v}_E$  condotta per E.

Tale centro, che è il centro di rotazione di 3 rispetto al segmento 1 (telaio) lo chiamiamo  $C_{31}$ .

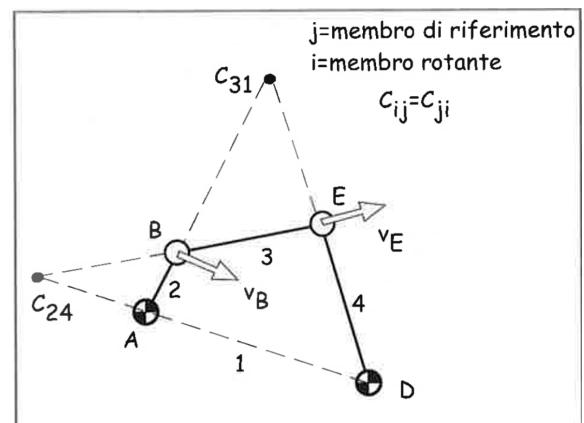
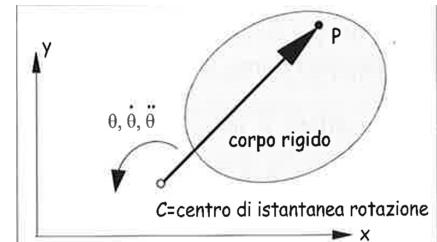
Molto spesso non è sufficiente conoscere il centro di istantanea rotazione di un corpo rigido nel suo moto assoluto rispetto ad un sistema fisso, ma si deve conoscere il centro di rotazione di un corpo rigido nel suo moto rispetto ad un altro corpo rigido in movimento.

Nel caso del quadrilatero ad esempio, si vuole conoscere il centro di istantanea rotazione di 4 rispetto a 2. Per calcolarlo possiamo pensare di sbloccare il membro 1 e di fissare a telaio il membro 2 e applicare la costruzione fatta precedentemente; in tal modo otteniamo il punto  $C_{42}$ , centro di istantanea rotazione di 4 rispetto a 2.

Gli altri centri di rotazione ( $C_{12}, C_{23}, C_{34}, C_{41}$ ) sono tra segmenti contrigui e quindi coincidono con i centri delle coppie cinematiche.

Dalla figura osserviamo che i centri di istantanea rotazione sono a 3 a 3 allineati e ciò non è un caso.

Vale infatti il **teorema di Kennedy-Aronhold**: durante il moto rigido piano i centri di istantanea rotazione sono a 3 a 3 allineati.



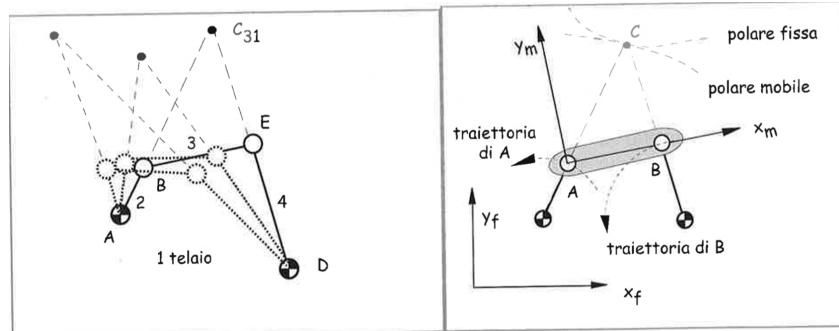
### 3.6.1 Curve polari

Abbiamo visto che in generale il centro di istantanea rotazione cambia in ogni istante. Perciò si sposta sia rispetto al sistema solidale al corpo rigido (di cui si studia il moto) che rispetto al sistema fisso.

Ad esempio nel quadrilatero il punto  $C_{31}$  si muove sia rispetto alla biella che al telaio.

Chiamiamo polare fissa la traiettoria percorsa da C rispetto al membro fisso e polare mobile la traiettoria percorsa da C rispetto al membro mobile.

Vale il seguente teorema: durante il moto rigido la polare mobile rotola senza strisciare sulla polare fissa; durante il moto di rotolamento le due polari sono tangenti nel punto di contatto.



- **Esempio di calcolo delle polari**

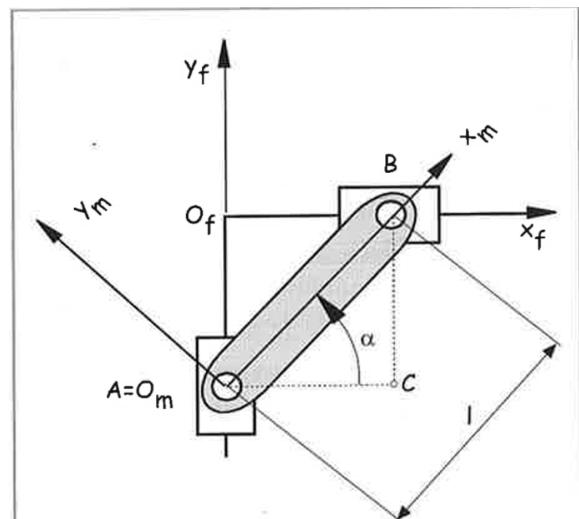
Consideriamo il meccanismo a crociera. Si voglia determinare la polare mobile e la polare fissa della biella AB.

Le coordinate e le velocità dell'origine della terna mobile rispetto al sistema fisso sono:

$$\begin{aligned} x_{O_m} &= 0 & y_{O_m} &= -l \sin \alpha \\ x_{\dot{O}_m} &= 0 & y_{\dot{O}_m} &= -\dot{\alpha} l \cos \alpha \end{aligned}$$

Da cui, applicando la formula che fornisce il centro di rotazione nel sistema fisso (polare fissa):

$$\begin{aligned} {}^f x_C &= {}^f x_{O_m} - \frac{{}^f y_{\dot{O}_m}}{\dot{\alpha}} & {}^f x_C &= l \cos \alpha \\ {}^f y_C &= {}^f y_{O_m} + \frac{{}^f x_{\dot{O}_m}}{\dot{\alpha}} & {}^f y_C &= -l \sin \alpha \end{aligned}$$



Perciò al variare della configurazione del meccanismo (variazione di  $\alpha$ ) il centro di istantanea rotazione descrive rispetto al sistema fisso una circonferenza di centro  $O_f$  e raggio  $l$ , questa è la polare fissa.

Di questo ci si poteva rendere conto anche graficamente dato che i punti A e B della biella hanno velocità sempre parallele rispettivamente all'asse y e x, le loro normali si incontrano nel punto C, che per il teorema di Chasles è centro di istantanea rotazione.

Il punto C appartiene al rettangolo  $O_fABC$  che ha sempre diagonali uguali a  $l$ , perciò la distanza di C da  $O_f$  è sempre  $l$  e quindi C si mantiene in una circonferenza.

Le coordinate del centro di istantanea rotazione nel sistema mobile sono (polare mobile):

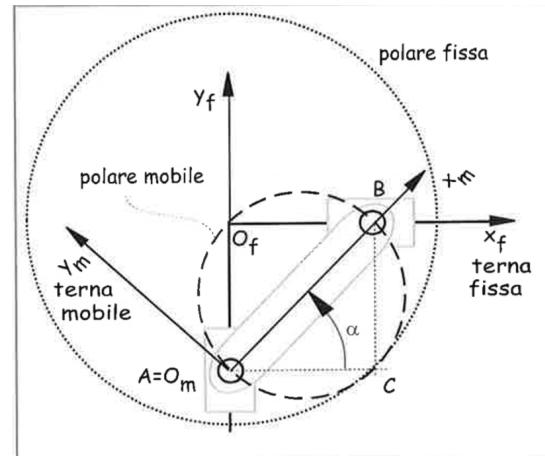
$$\begin{aligned} {}^m x_C &= \frac{{}^f x_{\dot{O}_m}}{\dot{\alpha}} \sin \alpha - \frac{{}^f y_{\dot{O}_m}}{\dot{\alpha}} \cos \alpha & {}^m x_C &= l \cos^2 \alpha = \frac{l}{2}(1 + \cos 2\alpha) \\ {}^m y_C &= \frac{{}^f x_{\dot{O}_m}}{\dot{\alpha}} \cos \alpha + \frac{{}^f y_{\dot{O}_m}}{\dot{\alpha}} \sin \alpha & {}^m y_C &= -l \cos \alpha \sin \alpha = -\frac{l}{2} \sin 2\alpha \end{aligned}$$

Perciò al variare della configurazione del meccanismo il centro di istantanea rotazione descrive rispetto al sistema mobile una circonferenza di raggio  $l/2$ , avente origine (rispetto al sistema mobile) nel punto di coordinate  $(l/2, 0)$ . La polare mobile passa sempre per l'origine del sistema fisso perché è a contatto con la polare fissa nel punto C e ha diametro  $l$ .

Ad esempio per  $\alpha = 45^\circ$  le coordinate del centro di istantanea rotazione risultano:

$$x_C = 0.707l \quad y_C = -0.707l \\ {}^m x_C = 0.500l \quad {}^m y_C = -0.500l$$

Se consideriamo il movimento relativo tra due membri ed entrambi sono mobili, allora anche il sistema di riferimento  $f$  è mobile, le polari prendono in questo caso il nome di primitive



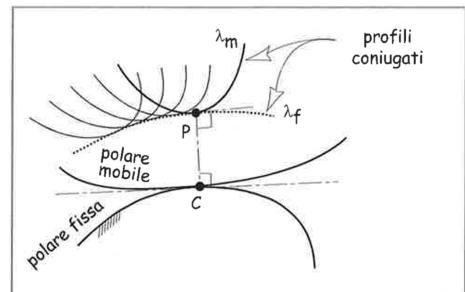
### 3.6.2 Profili coniugati

Il moto di un membro mobile rispetto ad uno fisso è definito dal rotolamento della polare mobile sulla polare fissa.

Sia  $\lambda_m$  una curva solidale al piano mobile diversa dalla polare mobile. Durante il moto rigido del piano mobile la curva  $\lambda_m$  occupa sul piano fisso una infinità di posizioni che generalmente ammette una curva involuppo (tangente a  $\lambda_m$  in tutte le posizioni) che chiamiamo  $\lambda_f$ .

Le due curve  $\lambda_m$  e  $\lambda_f$  si chiamano profili coniugati.

Valgono le seguenti importanti proprietà:



→ Nel punto di contatto P i profili hanno tangente e normale comune

→ La normale comune passa per il centro di istantanea rotazione C.

In generale tra i profili coniugati si ha strisciamento durante il moto relativo dei due membri, cioè velocità di strisciamento non nulla in P e diretta secondo la tangente.

Perciò il moto relativo tra due membri piani può essere definito, oltre che dal moto di puro rotolamento della polare mobile sulla polare fissa, anche dal moto con strisciamento di una coppia di profili coniugati, uno solidale al membro mobile e l'altro solidale al membro fisso. Questa è la soluzione comunemente adottata negli ingranaggi dove i profili coniugati sono i fianchi dei denti.

- **Esempio**

Consideriamo una coppia di ruote dentate, per comodità supponiamo che la ruota 1 sia fissata al telaio.

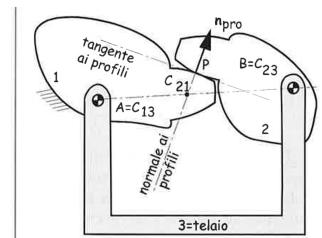
Cerchiamo il centro di istantanea rotazione  $C_{21}$ . Consideriamo due punti caratteristici del corpo 2 i punti B e P.

Il punto B, pensato appartenente al membro 3, ha velocità ortogonale alla retta AB; per il teorema di Chasles la retta AB deve quindi passare per il centro di istantanea rotazione.

Il punto P, che è il punto di contatto tra i profili coniugati ha la velocità (velocità di strisciamento) allineata alla tangente comune ai due profili. Poiché la tangente è ortogonale alla normale ai profili, ne consegue che il centro di istantanea rotazione deve giacere sulla retta normale.

Il centro di istantanea rotazione è allora all'intersezione tra la retta AB e la normale in comune ai due profili.

Se ora andiamo a considerare il meccanismo che si ottiene tenendo fisso il membro 3, il punto  $C_{21}$  rappresenta il centro di istantanea rotazione di 2 rispetto a 1; i tre centri sono allineati.



# 4 Analisi cinematica dei meccanismi con coppie a camma

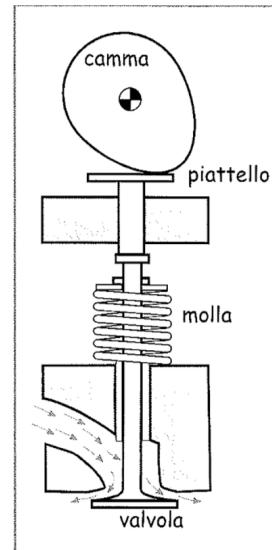
## 4.1 Introduzione

L'analisi cinematica dei meccanismi a camma ha lo scopo di determinare la relazione tra le grandezze cinematiche del cedente e del movente, note la geometria e la forma dei profili coniugati.

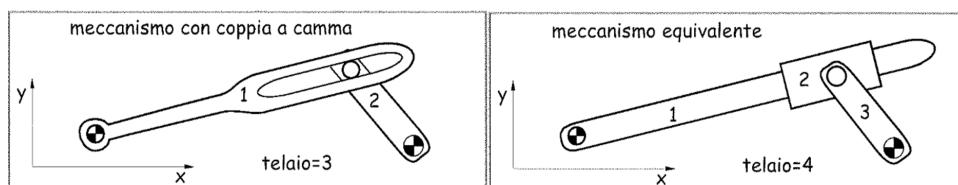
Il movente è collegato al telaio generalmente da una coppia rotoidale; la camma che funge da cedente può essere invece collegata al telaio sia da una coppia rotoidale che prismatiche. Si ha nel primo caso un cedente oscillante (*bilanciere*) e nel secondo caso un cedente dotato di moto traslatorio (*punteria*). Nella figura è rappresentata una tipica applicazione a camma. Alcuni meccanismi con coppie a camma sono immediatamente riconducibili a meccanismi con sole coppie elementari (*prismatiche e rotoidali*).

Consideriamo il meccanismo a glifo oscillante formato da tre membri rigidi (*uno telaio*) connessi tramite due coppie rotoidali ed una coppia a camma. Esso possiede un grado di libertà, infatti applicando la formula di Grubler otteniamo:

$$n = 3(m - 1) - 2c_1 - 1c_2 = 3(3 - 1) - 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1$$



Questo meccanismo è completamente analogo dal punto di vista cinematico al meccanismo a glifo oscillante con sole coppie elementari. I 2 G.d.L rappresentati dal moto relativo tra i due membri 1 e 2 e lasciati liberi dalla coppia a camma sono associati alla traslazione del pattino ed alla rotazione della coppia rotoidale.



Quello che distingue i due meccanismi è la meccanica del contatto, nel meccanismo con coppia a camma vi è un contatto di tipo lineare, mentre nel meccanismo con sole coppie elementari vi è un contatto tra superfici estese.

\*\* Svolgendo il calcolo dei G.d.L. tramite la formula di Grubler del meccanismo equivalente deve essere tenuta in considerazione l'introduzione di un corpo aggiuntivo, ovvero il pattino.

Nel seguito mostreremo come anche altri meccanismi con coppie a camma siano riconducibili, anche se in maniera meno immediata, a dei meccanismi con sole coppie elementari.

Intraprendiamo ora lo studio cinematico dei meccanismi che sono comunemente chiamati meccanismi a camma (*anche se non sono i soli a contenere la coppia a camma*). Essi sono costituiti da un telaio, un membro rigido chiamato camma, collegato al telaio tramite una coppia rotoidale o prismatiche, un secondo membro rigido, chiamato cedente, collegato al telaio pure da una coppia rotoidale o prismatiche.

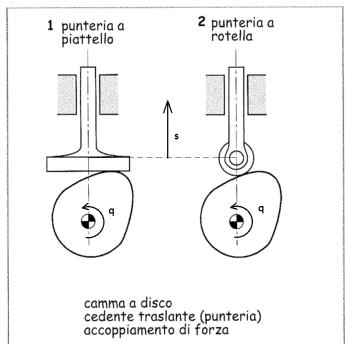
Il **membro motore** è la **camma**, la parte della sua superficie che entra in contatto con il cedente viene chiamata profilo della camma ed è realizzata in modo tale da impartire un particolare movimento desiderato al cedente; si realizza così un meccanismo nel quale la posizione del cedente è una **opportuna**

**funzione della posizione della camma.** Il cedente è mantenuto in contatto con la camma con accoppiamento di forma o di forza.

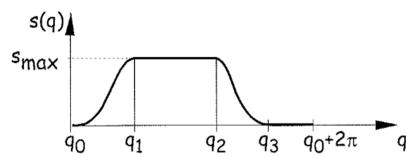
I meccanismi a camma spesso sono la soluzione più semplice per realizzare dei moti complessi con alta ripetibilità ed affidabilità, perciò sono molto diffusi nelle applicazioni industriali.

A titolo di esempio le camme a disco sono le più usate e sono diffusamente impiegate nei motori a combustione interna, nei timer, e nelle macchine utensili; gli altri tipi di camme sono meno diffusi e trovano impiego soprattutto nelle macchine automatiche. Per questa ragione accentreremo il nostro interesse sulle camme a disco.

Consideriamo dunque il meccanismo proposto nella figura a lato:



Scelta come coordinata generalizzata la rotazione  $q$  del sistema solidale alla camma rispetto al sistema fisso, lo spostamento lineare (*cedente traslante*) o angolare (*cedente oscillante*) del cedente viene espresso in funzione della rotazione della camma tramite la funzione di spostamento  $s = f(q)$ , il suo diagramma è chiamato diagramma delle alzate



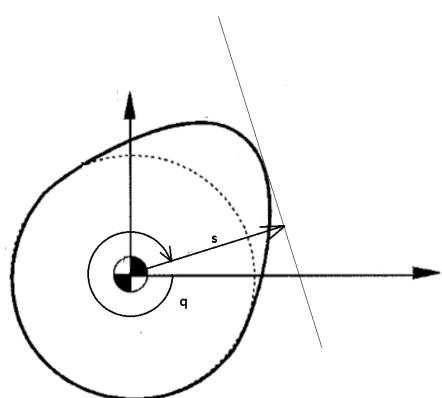
Un tipico diagramma delle alzate è il seguente (*lo spostamento del cedente può essere lineare o angolare*), esso è suddiviso in quattro fasi:

- ⇒ **fase di salita**, nella quale la rotazione della camma passa da  $q_0$  a  $q_1$  e nella quale corrispondentemente lo spostamento del cedente passa da 0 al valore massimo;
- ⇒ **fase di sosta**, nella quale la rotazione della camma passa da  $q_1$  a  $q_2$  e corrispondentemente lo spostamento del cedente si mantiene al valore massimo;
- ⇒ **fase di ritorno**, nella quale la rotazione della camma passa da  $q_2$  a  $q_3$  e corrispondentemente lo spostamento del cedente passa dal valore massimo a zero;
- ⇒ **fase di sosta**, nella quale la rotazione della camma passa da  $q_3$  a  $q_0 + 2\pi$  (*completamento del ciclo*) e corrispondentemente il cedente non si sposta

La posizione  $H(q) = f(s)$  del cedente è legata alla funzione di spostamento, nei casi più semplici dalla formula:

$$H(q) = s(q) + H(q_0)$$

Tramite l'introduzione di tale relazione possiamo svolgere l'analisi cinematica del meccanismo:



$$\dot{H} = \frac{dH}{dt} = \frac{ds}{dq} \frac{dq}{dt} = s'(q) \dot{q}$$

\* $s(q)$ :  $s$  dipende dal profilo geometrico della camma

$$\tau_{H,q} = \frac{\dot{H}}{\dot{q}} = s'(q)$$

$s'(q)$  è dunque il rapporto di velocità tra cedente e movente. Proseguiamo con l'analisi di accelerazione

$$\begin{aligned}
 \ddot{H} &= \frac{d(s'(q) \dot{q})}{dt} = s'(q) \dot{q} + \left( \frac{ds'(q)}{dt} \right) \dot{q} \\
 &= s'(q) \ddot{q} + \frac{ds'(q)}{dq} \frac{dq}{dt} \dot{q} \\
 &= s'(q) \ddot{q} + \frac{ds'(q)}{dq} \dot{q}^2 \\
 &= s'(q) \ddot{q} + s''(q) \dot{q}^2
 \end{aligned}$$

Possiamo notare che anche l'accelerazione del cedente è proporzionale all'accelerazione del movente tramite il fattore  $s'(q)$ , che ricordiamo ancora una volta, è un contributo geometrico.

Un secondo fattore di proporzionalità è dato tra l'accelerazione del movente e la velocità del cedente al quadrato ( $s''(q)$ ): tale fattore suggerisce che anche se l'angolo  $q$  sta girando con velocità angolare costante, dà ugualmente un contributo all'accelerazione del cedente.

Devo preoccuparmi, dunque, che tale termine sia sufficientemente regolare (ha un significato dinamico importante): un profilo di velocità ( $s'(q)$ ) con presenza di discontinuità produrrà un profilo di accelerazione altrettanto pieno di discontinuità indesiderate (si faccia riferimento al terzo principio della dinamica).

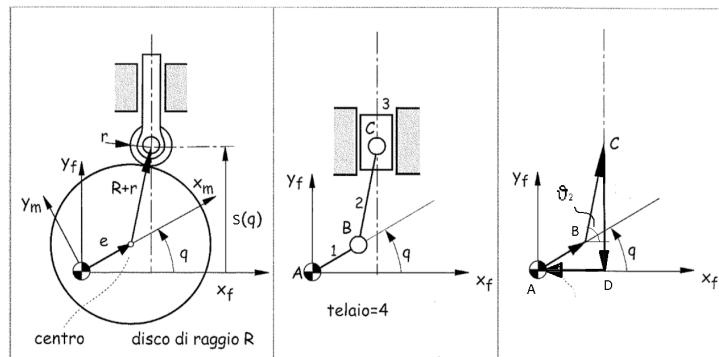
Per avere un movimento regolare del cedente la derivata prima della funzione di spostamento rispetto a  $q$  deve essere continua anche nei punti di transizione e possibilmente anche la derivata seconda deve essere continua nei punti di transizione.

Discontinuità di  $s'(q)$  provocano discontinuità della velocità del cedente e quindi accelerazioni teoricamente infinite e forze d'inerzia inammissibilmente elevate. Discontinuità di  $s''(q)$  provocano discontinuità dell'accelerazione del cedente e quindi discontinuità della forza di contatto tra camma e cedente, che producono vibrazioni ed usura accelerata.

Poiché abbiamo visto che la posizione del cedente è legata alla funzione di spostamento, la velocità del cedente è legata alla derivata rispetto a  $q$  della funzione di spostamento, l'accelerazione del cedente è legata alle derivate prima e seconda della funzione di spostamento, il problema di analisi cinematica dei meccanismi a camma può essere riformulato nel seguente modo: **data una camma già realizzata determinare la funzione di spostamento del cedente e le sue derivate**.

## 4.2 Analisi cinematica dei meccanismi a camma con il metodo dell'equivalenza cinematica

Come primo esempio consideriamo una camma a cerchio eccentrico completo e cedente traslante a rotella (*punteria a rotella*).



Scegliamo il sistema solidale all'asse  $x_m$  passante per il centro del cerchio. In questo caso durante il movimento, grazie alla geometria del profilo ad arco di cerchio e della rotella, la distanza tra centro del cerchio e centro della rotella rimane costante e pari alla somma dei raggi del cerchio  $R$  e della rotella  $r$ , poiché le normali devono rimanere allineate e coincidenti con i raggi.

Anche la distanza tra il centro dell'arco di cerchio e il centro di rotazione della camma è costante e pari all'eccentricità "e" della camma.

Il meccanismo a camma perciò si muove come un equivalente meccanismo di spinta avente la manovella lunga e, la biella 2 lunga ( $R+r$ ) e il pattino 3 coincidente con il cedente traslante.

Per ricavare la funzione di spostamento si effettua l'analisi di posizione del meccanismo articolato equivalente. Si traccia il poligono di chiusura; scelto il verso di percorrenza possiamo scrivere l'equazione:

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} + \mathbf{BC} + \mathbf{CD} + \mathbf{DA} &= 0 \\ l \begin{Bmatrix} \cos q \\ \sin q \end{Bmatrix} + (R+r) \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{Bmatrix} + s \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} + d \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} &= 0 \\ \begin{cases} (R+r) \cos \vartheta_2 = d - e \cos q \\ (R+r) \sin \vartheta_2 = s - e \sin q \end{cases} \end{aligned}$$

elevando le equazioni sopra definite e sommandole membro a membro si ottiene

$$(R+r)^2 = d^2 + e^2 + s^2 - 2e d \cos q - 2e s \sin q$$

risolvendo tale equazione di secondo grado si possono ottenere due soluzioni della funzione di spostamento:

$$s_{1,2} = e \sin q \pm \sqrt{(R+r)^2 - d^2 - e^2 \cos q^2 + 2e d \cos q}$$

Noto che non è di utilità un valore negativo di  $s(q)$ , possiamo concludere che la soluzione di nostro interesse è:

$$s = e \sin q + \sqrt{(R+r)^2 - d^2 - e^2 \cos q^2 + 2e d \cos q}$$

Proseguiamo l'analisi cinematica del meccanismo con l'analisi di velocità:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -(R+r) \sin \vartheta_2 & 0 \\ (R+r) \cos \vartheta_2 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_2 \\ \dot{s} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} e \sin q \\ -e \cos q \end{Bmatrix} \dot{q} \\ \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_2 \\ \dot{s} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{(R+r) \sin \vartheta_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -(R+r) \cos \vartheta_2 & -(R+r) \sin \vartheta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e \sin q \\ -e \cos q \end{Bmatrix} \dot{q} \end{aligned}$$

Da cui possiamo ricavare il rapporto di velocità tra cedente  $s$  e movente  $\dot{s}$  e successivamente l'espressione di  $s'(q)$ :

$$\begin{aligned} \dot{s} &= e \underbrace{\frac{\sin(\vartheta_2 - q)}{\sin \vartheta_2}}_{\tau_{s,q}} \dot{q} \\ \frac{ds}{dq} = s' &= \frac{ds}{dq} \frac{dt}{dq} = \tau_{s,q} = e \frac{\sin(\vartheta_2 - q)}{\sin \vartheta_2} \end{aligned}$$

Per concludere svolgiamo l'analisi d'accelerazione:

$$\frac{d^2 s}{dq^2} = s'' = \frac{d\tau_{s,q}}{dq} = \frac{e \sin(\vartheta_2 - q) \frac{d(\vartheta_2 - q)}{dq} \sin \vartheta_2 - \sin \vartheta_2 - q \cos \vartheta_2 \frac{d\vartheta_2}{dq}}{\sin \vartheta_2^2}$$

### 4.3 Analisi cinematica dei meccanismi con l'equazione ausiliaria

Per descrivere il profilo di una camma di forma arbitraria rispetto al sistema di riferimento solidale avente origine nella coppia rotoidale fissa si introducono le coordinate polari  $\rho$  e  $\beta$ , dove  $\rho$  è il modulo del raggio che unisce l'origine del sistema solidale al generico punto P del profilo e  $\beta$  è l'angolo (*positivo se antiorario*) compreso tra l'asse  $x_m$  e il raggio stesso.

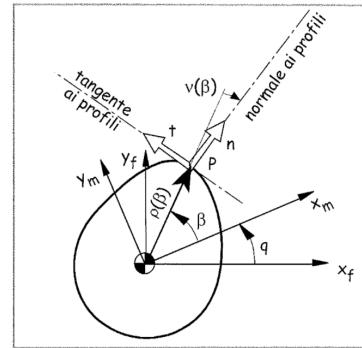
Facendo uso di questa notazione il profilo è espresso matematicamente da una funzione  $\rho(\beta)$ .

Per effettuare l'analisi cinematica si deve conoscere anche l'angolo  $\nu$  formato dal raggio con la normale  $n$  al profilo nel punto  $P$  di contatto con il cedente.

Se la tangente  $t$  è orientata secondo il verso positivo di rotazione intorno a  $z_m$  e la normale  $n$  è orientata in modo tale da sovrapporsi alla tangente con una rotazione di  $+\pi/2$ , allora  $\nu$  può essere espresso in funzione di  $\beta$  nella forma:

$$\nu = \nu(\beta) = \arctan -\frac{d\rho}{d\beta}$$

Stabilite queste definizioni intraprendiamo l'analisi di alcuni meccanismi a camma:



### 4.3.1 Camma a disco con punteria a piattello

Per prima cosa si stabiliscono i S.d.R. fisso e solidale entrambi con origine nel centro della coppia rotoidale fissa; la coordinata generalizzata  $q$  è la rotazione tra sistema fisso e sistema solidale.

La posizione del punto di contatto  $P$  varia nel tempo sia rispetto al S.d.R. fisso che rispetto al sistema di riferimento mobile ed è definita dal vettore  $\mathbf{AP}$  che è inclinato idì  $\beta$  (variabile) rispetto al sistema solidale e di  $(\beta + q)$  rispetto al sistema fisso; il modulo di  $\mathbf{AP}$  è proprio il raggio  $\rho$  della camma, che come è noto è funzione di  $\beta$ .

Chiamiamo  $M$  il punto al centro del piattello. Stabilito il verso di percorrenza si può scrivere l'equazione di chiusura in forma vettoriale e scalare:

$$\begin{aligned} \mathbf{AP} + \mathbf{PM} + \mathbf{MB} + \mathbf{BA} &= 0 \\ \rho(\beta) \begin{Bmatrix} \cos(q + \beta) \\ \sin(q + \beta) \end{Bmatrix} + a \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + s \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} + d \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

$q$  è noto in quanto coordinata generalizzata, le incognite del problema, di conseguenza, risultano essere:  $\beta, a, s$  (2 equazioni in 3 incognite).

Questo sistema di due equazioni non lineari contiene 3 incognite e non è sufficiente a risolvere il problema cinematico, ciò deriva dal fatto che il punto di contatto tra camma e cedente non è noto.

Si può aggiungere una terza equazione scrivendo la condizione che esprime la coincidenza della normale alla camma con la normale al piattello nel punto di contatto  $P$ ; infatti la camma e piattello sono due profili coniugati e devono avere normali e tangenti coincidenti nel punto di contatto. Poiché la normale al piattello è inclinata di  $\pi/2$  rispetto all'orizzontale, dalla figura si ottiene:

$$q + \beta + \nu(\beta) = \pi/2$$

## 4.4 Camma con cedente oscillante a rotella

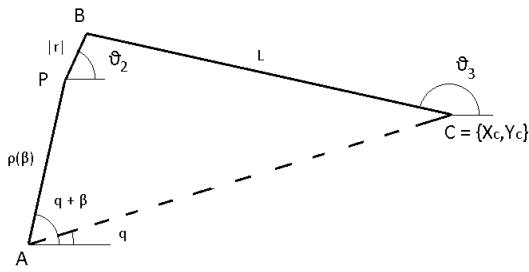
Come secondo esempio consideriamo l'analisi cinematica di un meccanismo a camma con profilo generico e cedente oscillante a rotella.

Si stabiliscono un sistema di riferimento fisso ed uno mobile solodale alla camma, entrambi con origine nella rima coppia rotoidale fissa, la coordinata generalizzata  $q$  è proprio la rotazione da sistema fisso a sistema mobile.

La posizione del punto di contatto P è definita dal vettore  $\mathbf{AB}$ , che è inclinato di  $\beta$  rispetto al sistema mobile e di  $\beta+q$  rispetto al sistema fisso ed ha modulo  $\rho(\beta)$ .

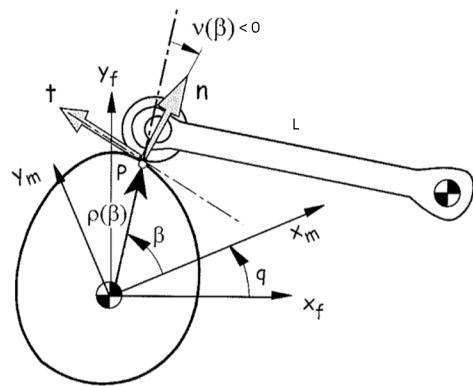
Chiamiamo PB il vettore (*allineato con il raggio della rotella*), che unisce il punto di contatto P al centro della rotella.

Chiamiamo **BC** il vettore che unisce la seconda coppia rotoidale fissa al centro della rotella. Infine chiamiamo **AC** il vettore che unisce le due coppie rotoidali fisse. Possiamo tracciare il seguente poligono di chiusura.



Noto il movente "q" le variabili incognite risultano essere  $\vartheta_2$ ,  $\vartheta_3$  e  $\beta$ . Tuttavia il poligono di chiusura tracciato propone solamente 2 equazioni in 3 incognite: sarà dunque necessario utilizzare l'equazione ausiliaria.

$$q + \beta(q) + \nu(\beta) = \vartheta_2$$



Stabilito il verso di percorrenza si può scrivere l'equazione vettoriale di chiusura:

$$\mathbf{AP} + \mathbf{PB} + \mathbf{BC} + \mathbf{CA} = 0$$

che in termini scalari fornisce:

$$\rho(\beta) \begin{cases} \cos(q + \beta) \\ \sin(q + \beta) \end{cases} + r \begin{cases} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{cases} + L \begin{cases} -\cos \vartheta_3 \\ -\sin \vartheta_3 \end{cases} + \begin{cases} -x_C \\ -y_C \end{cases}$$

# 5 Dinamica applicata

Il problema dinamico diretto consiste, una volta assegnate le forze attive, nella determinazione del movimento del sistema, quindi andamento temporale delle coordinate generalizzate e delle loro derivate, che come è noto determinano posizioni (*angolari e lineari*) velocità e accelerazioni di tutti i membri. Questo tipo di problema viene chiamato dinamico diretto ed è un problema differenziale e non lineare.

La simulazione dinamica può essere affrontata facendo uso delle equazioni di Newton e/o di Eulero o facendo uso di metodi energetici, equazioni della potenza, equazione di Lagrange.

Nel caso di macchine a 1 G.d.L. l'approccio energetico presenta un notevole vantaggio rispetto al metodo basato sulle equazioni di Newton e di Eulero.

Se infatti applichiamo le equazioni di Newton-Eulero ad un sistema piano composto da  $n$  membri mobili dobbiamo scrivere  $3n$  equazioni, alle quali si devono aggiungere le equazioni che esprimono il principio di azione e reazione per le forze scambiate attraverso le coppie cinematiche. Le incognite sono in numero pari alle equazioni e comprendono tutte le forze reattive e la coordinata generalizzata. Dobbiamo quindi risolvere un sistema differenziale anche se siamo interessati esclusivamente a determinare il moto del sistema e non le forze reattive.

Il vantaggio dell'approccio energetico consiste proprio nel fatto che, se è lecito trascurare l'attrito Coulombiano, possiamo calcolare il movimento della macchina ad 1 G.d.L. risolvendo una sola equazione differenziale incognita (*la coordinata generalizzata*) senza fare entrare in gioco forze reattive incognite.

In altri termini il problema del poligono di chiusura è che ogni accoppiamento prevede una coppia di equazioni (nel piano) ed è dunque preferibile nel caso di meccanismi più complicati utilizzare approcci energetici per ricavare le equazioni del moto dalle equazioni di bilancio energetico.

## 5.1 Equazione dell'energia



Il blocco **Sistema meccanico** rappresenta dunque l'insieme delle entità che interagiscono tra loro semplificando notevolmente il problema dinamico. Considerando un sistema meccanico generico l'equazione di bilancio dell'energia nell'intervallo  $dt$  è data da:

$$dL_e + dL_i = dE_C$$

dove:

- $dL_e$  Lavoro delle forze esterne applicate al sistema (*motrice, resistenti, dissipative*);
- $dL_i$  Lavoro delle forze interne applicate al sistema (*motrice, resistenti, dissipative*);
- $dE_c$  La variazione infinitesima di energia cinetica del sistema.

L'equazione può essere riordinata nella seguente forma, ricordando che il lavoro delle forze motrici, siano esse esterne o interne, è **sempre positivo** perché produce il moto mentre quello delle forze resistenti e dissipative, siano esse esterne o interne al sistema, è **sempre negativo** perché si oppone al moto:

$$\underbrace{dL_M}_{\text{Forze motrici } (>0)} + \underbrace{dL_R}_{\text{Forze resistenti } (<0)} + \underbrace{dL_P}_{\text{Forze dissipate } (<0)} = dE_C$$

Se rapportiamo gli scambi energetici al tempo  $dt$ , nel quale hanno luogo, l'equazione può essere scritta in termini di potenza ( $P = dL/dt$ ). Si ottiene in questo modo l'equazione di bilancio della potenza, che lega le potenze delle forze applicate al sistema alla derivata temporale dell'energia cinetica:

$$P_M + P_r + P_P = \frac{dE_c}{dt}$$

Qualora le forze interne ed esterne fossero di tipo conservativo il loro lavoro può essere espresso dall'energia potenziale  $dL_e + dL_i = -dE_P$ . L'integrazione dell'equazione dell'energia, espressa nella nuova forma,  $-dE_P = dE_C$  fornisce l'integrale primo dell'energia:

$$E_C + E_P = \text{cost.}$$

il quale mostra che la somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica è una costante e si verifica, in particolare, quando non v'è presenza di forze dissipative.

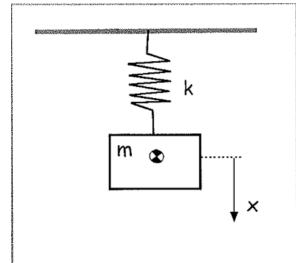
### 5.1.1 Esempi

#### 1. OSCILLATORE ARMONICO

Consideriamo una massa sospesa elasticamente mediante una molla di rigidezza  $k$ .

Poiché la forza elastica della molla è una forza conservativa, essa sarà in equilibrio con l'energia cinetica data dalla massa.

Andando ad osservare gli andamenti temporali di velocità e posizione della massa rispetto alla sua posizione iniziale si possono trarre alcune conclusioni sulla configurazione di equilibrio del sistema in esame:



Procediamo dunque ad eseguire il bilancio di energia tra istanti diversi di tempo ( $t_1$  e  $t_2$ ).

In  $t_1$ :  $X = 0$  e  $\dot{X} = MAX$

lo spostamento è nullo e la molla è completamente rilassata.

In  $t_2$ :  $X = MAX$  e  $\dot{X} = 0$

(configurazione di equilibrio tra forza peso e forza elastica della molla)

Il sistema meccanico proposto può dunque immagazzinare energia tramite due forme:

$$E_{pot} = \frac{1}{2}kx^2 \quad ; \quad E_C = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

A  $t = t_1$

$$\cancel{E_{pot} + E_c} = \frac{1}{2}kx^2 + E_c = E_{c1}$$

A  $t = t_2$

$$E_{pot} + E_c = E_{pot} + \cancel{\frac{1}{2}m\dot{x}^2} = E_{pot2}$$

Poiché la legge del moto è del tipo armonico:

sia  $x(t) = x_0 \sin(\omega t)$  e il relativo andamento della velocità  $\dot{x}(t) = \omega x_0 \cos(\omega t)$

Dal bilancio di energia tra i due istanti considerati si ottiene;

$$\begin{aligned} E_{c1} &= E_{pot2} \\ \cancel{\frac{1}{2}m(\omega^2 x_0^2 \cos^2(\omega t))} &= \cancel{\frac{1}{2}kx_0^2 \sin^2(\omega t)} \\ m\omega^2 \cos^2(\omega t)|_{t=0} &= k \sin^2 \omega t|_{t=\frac{2\pi}{\omega} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\pi}{2\omega} \\ m\omega^2 &= k \sin^2 \left( \omega \frac{\pi}{2\omega} \right) \\ m\omega^2 &= k \\ \omega &= \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

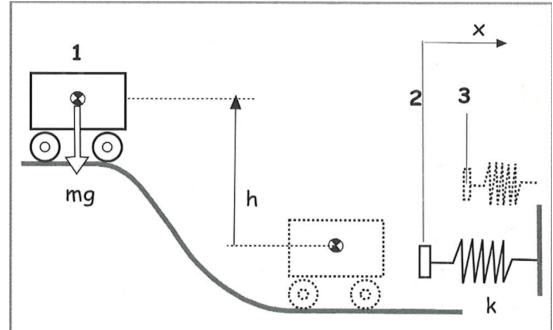
## 2. CARRO CONTRO UN RESPINGENTE

Si consideri il carrello rappresentato in figura inizialmente fermo ad una altezza  $h$ .

Nell'ipotesi di attrito nullo si voglia calcolare la velocità di arrivo, nella posizione 2 (un delta prima che il respingente sia compresso), e lo schiacciamento della molla tra le posizioni 2 e 3.

Si può pervenire molto facilmente ad una soluzione considerando che la forza gravitazionale e la forza elastica del respingente sono di natura conservativa, per cui vale l'equazione:

$$E_{pot} + E_c = \text{cost.} = E_{tot}$$



L'istante/posizione 1 del carrello ha una  $E_{tot} = E_{pot1} + E_{c1} = mgh$

L'istante/posizione 2 del carrello ha una  $E_{tot} = E_{pot2} + E_{c2} = \frac{1}{2}mv^2$

Da tali considerazioni si può ricavare la velocità del carrello, che risulta pari a:

$$\cancel{mg}h = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 \iff v = \sqrt{2gh}$$

L'istante/posizione 3 del carrello ha una  $E_{tot} = E_{pot3} + E_{c3} = \frac{1}{2}kx_0^2$

Dal bilancio energetico tra l'istante 2 e 3 si ottiene:

$$\frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 \iff x_0 = \sqrt{\frac{m}{k}v^2} = v\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{v}{\omega}$$

Siamo pervenuti ad un'espressione della pulsazione naturale dell'oscillatore  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , grazie alla quale è possibile calcolare la forza massima che l'oscillatore/respingente deve sopportare:

$$F_0 = kx_0 = \frac{kv}{\omega}$$

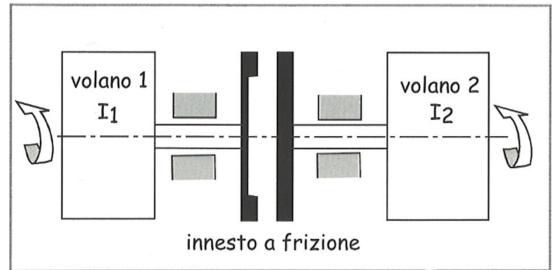
### 3. INNESTO DI DUE VOLANI

Due volani i cui momenti di inerzia sono rispettivamente  $I_1$  e  $I_2$  vengono collegati con un innesto a frizione.

Calcolare la velocità di rotazione finale comune ai due volani e la dissipazione di energia prodotta dall'attrito.

Il momento della quantità di moto di un sistema particellare è:

$$\mathbf{K}_0 = \sum_i m_i \cdot \mathbf{OP}_i \wedge \mathbf{v}_i$$



Il momento delle forze esterne rispetto ad un polo O o rispetto al baricentro del sistema, è invece:

$$\sum \mathbf{M}_0 = \frac{d\mathbf{K}_0}{dt}$$

All'innesto dei due dischi/volani la  $\frac{d\mathbf{K}_0}{dt} = 0$ , in altri termini:

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_{tot}$$

dove:  $\mathbf{K}_1$  e  $\mathbf{K}_2$  sono rispettivamente i momenti della quantità di moto dei 2 volani.

Tale relazione vale anche se l'energia non si conserva.

Noto dunque che:

$$K_{tot\ i} = I_1 \cdot \omega_1 \quad ; \quad K_{tot\ f} = (I_1 + I_2) \omega_f$$

Dal momento che il sistema è composto esclusivamente dai due volani e che non sono applicati al sistema momenti esterni:

$$\begin{aligned} K_{tot\ i} &= K_{tot\ f} \\ I_1 \omega_1 &= (I_1 + I_2) \omega_f \\ \omega_f &= \frac{I_1}{(I_1 + I_2)} \omega_1 \end{aligned}$$

La variazione dell'energia cinetica è uguale al lavoro dissipato per attrito e trasformato in calore:

$$\int_i^f dL_i = \int_i^f dE_c = E_{cf} - E_{ci} = \frac{1}{2} (I_1 + I_2) \omega^2 - \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = -\frac{1}{2} \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} \omega_1^2$$

Da osservare che il lavoro risulta negativo in quanto lavoro dissipato.

## 5.2 Equazione del moto con l'approccio energetico

Alla base di questo approccio vi è l'equazione di bilancio della potenza:

$$P = P_M + P_R + P_P = \frac{dE_C}{dt}$$

la potenza delle forze motrici è positiva mentre la potenza delle forze resistenti è negativa come la potenza persa dovuta alle forze di attrito. Alcune delle forze motrici e resistenti possono essere di natura conservativa, distinguendo il contributo da quello delle forze non conservative:

$$\underbrace{P_{con}}_{\text{per loro natura ammettono un potenziale}} + P_{N.con} = \frac{dE_c}{dt}$$

Il lavoro delle forze conservative può essere espresso in funzione delle variazioni di energia potenziale:

$$dL_{con} = -dE_P$$

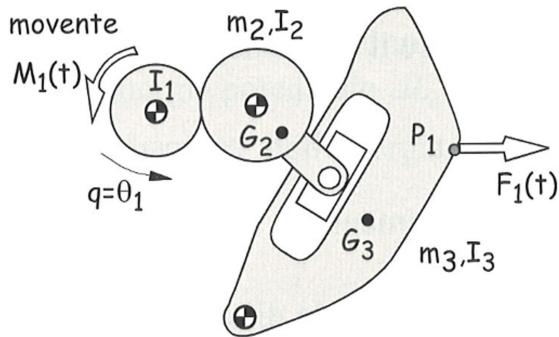
L'equazione della potenza può quindi essere scritta nella forma:

$$P_{N.con} = \frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt}$$

Nelle macchine ad alta velocità il termine preponderante al secondo membro è rappresentato dal tasso di variazione dell'energia cinetica, mentre nelle macchine lente e pesanti il termine preponderante può essere rappresentato dalla variazione dell'energia potenziale dovuta agli spostamenti verticali dei suoi membri.

Oltre all'energia potenziale elastica immagazzinata nelle molle o in altri organi elastici può essere importante anche l'energia dissipata. La dissipazione ha luogo nei cuscinetti e nelle parti della macchina, dove le parti slittano o rotolano l'una rispetto all'altra, e negli smorzatori; i meccanismi di dissipazione sono l'attrito viscoso, l'attrito radente, l'attrito volvente. La dissipazione di energia ha come effetto il riscaldamento delle parti a contatto cui segue un flusso di calore dalla macchina all'ambiente circostante. L'energia è persa nel senso che si sottrae al possibile lavoro utile prodotto dalla macchina.

Consideriamo una macchina piana ad 1 G.d.L. formata da corpi rigidi (*eventuali molle hanno massa trascurabile*), ad esempio come quella rappresentata di seguito:



Al fine di ricavare il sistema dinamicamente equivalente a quello proposto, è necessario conoscere le masse, i centri di massa, i momenti e i momenti d'inerzia di ogni singolo corpo.

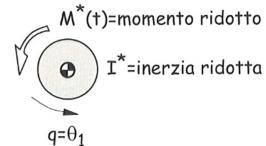
Nel caso di azioni di rotazione come coppie e momenti d'inerzia è preferibile definire per analogia una coordinata rotante.

Il meccanismo equivalente così composto vogliamo che risponda allo stesso modo del meccanismo reale.

Ciò è possibile imponendo l'uguaglianza delle due energie cinetiche dei membri 1 e 2 per trovare l'inerzia equivalente.

Determiniamo le caratteristiche della macchina, dinamicamente equivalente alla prima, costituita da una sola inerzia rotante, detta inerzia ridotta del sistema, sulla quale agisce una sola coppia, detto momento ridotto.

Da osservare che nel caso di movente traslante il meccanismo equivalente è costituito da una massa ridotta traslante sulla quale agisce una sola forza ridotta nella direzione del moto.



$$\begin{aligned} E_{ceq} &= \frac{1}{2} I^* \dot{\theta}^2 \\ &= E_{cG2} + E_{cr} \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 + \frac{1}{2} m_i \dot{y}_i^2 + \frac{1}{2} I_i \dot{\vartheta}_i^2 \right) \end{aligned}$$

Dove:

- i termini  $\frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2$  e  $\frac{1}{2} m_i \dot{y}_i^2$  rappresentano l'energia cinetica associata all'i-esimo centro di massa
- il termine  $\frac{1}{2} I_i \dot{\vartheta}_i^2$  rappresenta il momento d'inerzia rispetto all'i-esimo centro di massa.

Noto che il sistema sotto esame ha 1 G.d.L. tutte le velocità degli i-esimi centri di massa possono essere espresse come (derivanti dall'analisi cinematica del sistema):

$$\dot{x}_i = \tau_{xi} \dot{q} \quad ; \quad \dot{y}_i = \tau_{yi} \dot{q} \quad ; \quad \dot{\vartheta}_i = \tau_{\vartheta i} \dot{q}$$

L'equazione dunque diviene:

$$\frac{1}{2} I^* \dot{q}^2 = \sum_{i=1}^n (\frac{1}{2} m_i \tau_{xi}^2 \dot{q}^2 + \frac{1}{2} m_i \tau_{yi}^2 \dot{q}^2 + \frac{1}{2} I_i \tau_{\vartheta i}^2 \dot{q}^2)$$

$$I^* = \sum_{i=1}^n (m_i \tau_{xi}^2 + m_i \tau_{yi}^2 + I_i \tau_{\vartheta i}^2)$$

Il momento d'inerzia così ottenuto è detto **momento d'inerzia ridotto** e poiché contiene nella sua espressione i rapporti di velocità, i quali dipendono dalla configurazione, è anch'esso dipendente dal movente "q" scelto ( $I^* = I^*(q)$ ).

Le azioni della coppia  $Q^*$  deve essere equivalente all'effetto delle azioni sul meccanismo reale.

La potenza delle azioni coppie-forze deve essere uguale alla somma delle potenze delle azioni che agiscono sul meccanismo reale:

$$P_{eq} = Q^* \dot{q} = \underbrace{\sum_{i=1}^r (F_{xi} \cdot \dot{x}_i + F_{yi} \cdot \dot{y}_i)}_{\text{Potenza delle forze applicate}} + \underbrace{\sum_{i=1}^s (M_i \dot{\vartheta}_i)}_{\text{Potenza dei momenti applicati}}$$

Si tenga presente che le potenze delle forze applicate sono moltiplicate per la velocità delle coordinate ( $x_i, y_i$ ) che non sono necessariamente i centri di massa, bensì i punti a cui è applicata la forza.

$$Q^* \dot{q} = \sum_{i=1}^r (F_{xi} \tau_{xi} \dot{q} + F_{yi} \tau_{yi} \dot{q}) + \sum_{i=1}^s (M_i \tau_{\vartheta i} \dot{q})$$

$$Q^* = \sum_{i=1}^r (F_{xi} \tau_{xi} + F_{yi} \tau_{yi}) + \sum_{i=1}^s (M_i \tau_{\vartheta i}) = Q^*(q, t)$$

La relazione così ottenuta esprime il momento ridotto del sistema dinamicamente equivalente con una relazione di dipendenza dalla configurazione (derivante dalla presenza dei rapporti di velocità) e temporale ( $F(t), M(t)$ ).

Una volta ricavata l'espressione del momento ridotto e del momento d'inerzia ridotto è possibile scrivere l'equazione della potenza:

$$Q^* \dot{q} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} I^* \dot{q}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{dI^*}{dt} \dot{q}^2 + \frac{1}{2} I^* \left( \frac{d\dot{q}^2}{dt} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{dI^*}{dq} \frac{dq}{dt} \dot{q}^2 + \frac{1}{2} I^* \left( \frac{d\dot{q}^2}{d\dot{q}} \frac{d\dot{q}}{dt} \right)$$

$$Q^* \dot{q} = \frac{1}{2} \frac{dI^*}{dq} \dot{q}^2 + \frac{1}{2} I^* \ddot{q} \dot{q}$$

$$Q^* = \frac{1}{2} \frac{dI^*}{dq} \dot{q}^2 + I^* \ddot{q}$$

Questa equazione, se sono assegnate le forze e le coppie motrici e resistenti e le condizioni iniziali, consente di calcolare l'andamento temporale di  $q$ .

Anche il termine  $dI^*/dq$  dipende solo dalla posizione. Infatti si può scrivere:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{dI^*}{dq} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\cancel{\tau}_{m_i} \tau_{xi} \frac{d\tau_{xi}}{dq} + \cancel{\tau}_{m_i} \tau_{yi} \frac{d\tau_{yi}}{dq} + \cancel{\tau}_{I_i} \tau_{\vartheta i} \frac{d\tau_{\vartheta i}}{dq}) \\ &= \sum_{i=1}^n (m_i \tau_{xi} \frac{d\tau_{xi}}{dq} + m_i \tau_{yi} \frac{d\tau_{yi}}{dq} + I_i \tau_{\vartheta i} \frac{d\tau_{\vartheta i}}{dq})\end{aligned}$$

I derivati dei rapporti di velocità risultano:

$$\begin{aligned}\frac{d\tau_{xi}}{dq} &= \frac{d\frac{\dot{x}_i}{\dot{q}}}{dq} = \frac{\ddot{x}_i \frac{\dot{q}}{\dot{q}} - \dot{x}_i \frac{\ddot{q}}{\dot{q}^2}}{\dot{q}^2} \\ &= \frac{\ddot{x}_i - \dot{x}_i \frac{\ddot{q}}{\dot{q}}}{\dot{q}^2} \\ &= \frac{\ddot{x}_i - \tau_{xi} \ddot{q}}{\dot{q}^2}\end{aligned}$$

### 5.2.1 Forze e momenti funzione della posizione

Se le forze applicate al sistema sono funzioni esplicite delle sole posizioni (e *non del tempo o delle velocità*), l'equazione dell'energia può essere risolta tramite due integrazioni successive.

Sia  $Q^* = Q^*(q)$  e  $I^* = I^*(q)$ , allora:

$$\begin{aligned}Q^* \dot{q} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} I^* \dot{q}^2 \right) = \frac{d}{dq} \left( \frac{1}{2} I^* \dot{q}^2 \right) \frac{dq}{dt} \\ &= \frac{d}{dq} \left( \frac{1}{2} I^* \dot{q}^2 \right) \dot{q} \\ Q^* dq &= d \left( \frac{1}{2} I^* \dot{q}^2 \right)\end{aligned}$$

Come si può evincere dalla relazione appena ottenuta il *rhs* in quanto differenziale esatto risulta essere una primitiva del *lhs*, perciò alla sua integrazione dipenderà esclusivamente dagli estremi di integrazione.

Definito **stato 1** lo stato iniziale del sistema indicato con la sintassi  $(q_1, \dot{q}_1)$ , si vuole conoscere l'evoluzione del sistema nello stato  $(q_2, \dot{q}_2)$ :

$$\begin{aligned}\int_{q_1}^{q_2} Q^*(q) dq &= \int_{q_1}^{q_2} d \left( \frac{1}{2} I^*(q) \dot{q}^2 \right) = \left( \frac{1}{2} I^*(q) \dot{q}^2 \right) \Big|_{q_1}^{q_2} \\ &= \frac{1}{2} I^*(q_2) \dot{q}_2^2 - \frac{1}{2} I^*(q_1) \dot{q}_1^2\end{aligned}$$

Noto dunque lo stato iniziale e la funzione  $Q^*(q)$ , si può determinare la rimanente incognita:

$$\dot{q}_2 = \sqrt{\frac{\left( \int_{q_1}^{q_2} Q^*(q) dq + \frac{1}{2} I^*(q_1) \dot{q}_1^2 \right)}{\frac{1}{2} I^*(q_2)}}$$

### 5.2.2 Forze non conservative

È noto dai paragrafi precedenti che l'equazione della potenza nel caso di compresenza di forze conservative e non è pari a :

$$\begin{aligned}
 P_{N.con.} &= \frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_{pot.}}{dt} \\
 Q^* \dot{q} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} I^* \dot{q}^2 \right) + \frac{dE_{pot}}{dt} \\
 Q^* \dot{q} &= \frac{1}{2} \frac{dI^*}{dt} \dot{q}^2 + I^* \ddot{q} \dot{q} + \frac{dE_{pot}}{dt} \\
 Q^* \dot{q} - \frac{dE_{pot}}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{dI^*}{dt} \dot{q}^2 + I^* \ddot{q} \dot{q} \\
 (Q^* - \frac{1}{\dot{q}} \frac{dE_{pot}}{dt}) \dot{q} &= \frac{1}{2} \frac{dI^*}{dt} \dot{q}^2 + I^* \ddot{q} \dot{q} \\
 (Q^* + Q_{pot}^*) \dot{q} &= \boxed{\frac{1}{2} \frac{dI^*}{dt} \dot{q}^2 + I^* \ddot{q} \dot{q}}
 \end{aligned}$$

Finora non abbiamo fatto alcuna distinzione tra le forze applicate (*forze conservative e non*) nel calcolo della potenza. Vediamo ora di esplicitare la potenza nel caso di forze peso, di forze elastiche, di forze dissipative di tipo viscoso e di forze dissipative di tipo Coulombiano.

- 1. FORZA PESO** Nel caso di forze peso l'energia potenziale dovuta all'elevazione del corpo rigido al di sopra di un certo livello di riferimento è:

$$E_{pot} = mgh$$

Il relativo contributo da sommare alla forza ridotta risulterà dunque essere:

$$Q_{peso}^* = -\frac{1}{\dot{q}} \left( \frac{dE_{pot}}{dt} \right) = -\frac{1}{\dot{q}} \frac{d(mgh)}{dt} = -\frac{\dot{h}}{\dot{q}} mg = -mg\tau_h$$

ed è funzione solo di  $q$  in quanto il rapporto di velocità  $\tau_h$  è funzione di  $q$ .

- 2. FORZA ELASTICA** L'energia potenziale di una molla lineare è data dall'espressione:

$$E_{pot} = \frac{1}{2} k (s - s_0)^2$$

dove  $k$  è la costante elastica della molla,  $s$  è il vettore che congiunge gli estremi della molla e  $s_0$  è lo stesso vettore prima della deformazione.

La derivata risulta:

$$\frac{dE_{pot}}{dt} = k (s - s_0) \dot{s}$$

e la forza ridotta:

$$Q_{elastica}^* = -\frac{k(s - s_0)\dot{s}}{\dot{q}} = -k(s - s_0)\tau_s$$

Essa dipende da  $s$  che è funzione di  $q$  e dal rapporto di velocità che è pure funzione di  $q$ .

- 3. FORZA VISCOSE**

Se le forze di attrito sono schematizzabili con un modello di tipo viscoso, la forza necessaria per muovere relativamente gli elementi di uno smorzatore viscoso è data da:

$$F_{viscoso} = -c\dot{s}$$

dove  $c$  è il coefficiente di smorzamento viscoso e  $\dot{s}$  è il modulo della velocità relativa tra i due elementi dello smorzatore. La potenza dissipata da uno smorzatore è data da:

$$P = -c\dot{s}\dot{s}$$

La forza ridotta risulta:

$$Q_{viscosa}^* = -\frac{P}{\dot{q}} = -\frac{c \dot{s} \dot{s}}{\dot{q}} = -c \dot{s} \frac{\dot{q}}{\dot{q}} \tau_s = -c \dot{q} \tau_s^2$$

ed anche in questo caso è funzione della coordinata generalizzata e delle sue derivate.

- 4. ATTRITO COULOMBIANO** Supponiamo ora che la natura della macchina sia tale per cui non possono essere trascurate le forze di attrito di tipo Coulombiano. In generale una forza di attrito Coulombiano può scriversi nella forma:

$$F_{Coulomb} = -\mu_d \|N\| vers(\underline{\nu})$$

Dove  $-vers(\underline{\nu})$  è un vettore che si oppone al moto, ovvero si oppone al vettore velocità

La corrispondente potenza dissipata vale:

$$P_{Coulomb} = -\mu_d \|N\| vers(\underline{\nu}) \nu = -\mu_d \|N\| vers(\underline{\nu}) \tau_\nu \dot{q}$$

Ed è funzione di  $\dot{q}$  e della componente della forza reattiva  $\|N\|$ .

Pertanto, a differenza di tutti gli altri casi considerati, in questo termine compare una forza reattiva. Perciò l'equazione del moto, in presenza di attrito Coulombiano conterrebbe oltre all'incognita  $q$  anche una seconda incognita, perciò da sola non è sufficiente a risolvere il problema.

Per risolvere il problema bisogna affiancare all'equazione del moto l'equazione di equilibrio dei vari membri; in questo caso allora può essere più vantaggioso effettuare l'analisi dinamica direttamente con l'approccio Newtoniano.

### 5.3 Analisi dinamica del manovellismo di spinta

Consideriamo il meccanismo di spinta centrato e supponiamo che la manovella motrice sia bilanciata e che la biella abbia massa trascurabile. Manovella motrice bilanciata significa che il baricentro della manovella è coincidente con il perno di banco A. Vogliamo scrivere l'equazione del moto.

Determiniamo l'inerzia ridotta, considerando trascurabile l'inerzia della biella:

$$I^* = \sum (m_i \tau_i^2 + I_i \tau_{\vartheta i}^2) = I_A \tau_{\vartheta 1}^2 + m_c \tau_{xi}^2$$

Noto che  $\tau_{\vartheta 1} = q = \frac{\dot{q}}{\ddot{q}} = 1$

Il momento d'inerzia ridotto sarà pari a:  $I^* = I_A + m_c \tau_{xi}^2$

Calcoliamo a questo punto il momento ridotto ponendo in uguaglianza le due espressioni che abbiamo ricavato:

$$Q^* = \frac{1}{2} \frac{dI^*}{dq} \dot{q}^2 + I^* \ddot{q} \quad ; \quad Q^* = \sum_{i=1}^r (F_{xi} \tau_{xi} + F_{yi} \tau_{yi}) + \sum_{i=1}^s (M_i \tau_{\vartheta i})$$

La derivata dell'inerzia ridotta rispetto alla coordinata libera risulta:

$$\frac{1}{2} \frac{dI^*}{dq} = m_C \tau_{xi} \frac{d\tau_{xi}}{dq}$$

La coppia ridotta dipende dal momento motore applicato alla manovella e dalla forza resistente applicata al pistone:

$$Q^* = M(t) \tau_{\vartheta 1} + F(t) \tau_{xi} = M(t) + F(t) \tau_{xi}$$

È necessario conoscere il rapporto di velocità relativo alla traslazione del pattino (*punto C*) e il suo derivato.

Nell'ipotesi che la biella abbia lunghezza molto maggiore della lunghezza della manovella ( $c/r > 4$ ), si sono determinate delle espressioni analitiche approssimate sia per il rapporto di velocità che per la sua derivata.

$$\tau_{xi} \approx -r \left( \sin q + \frac{r}{c} \frac{\sin(2q)}{2} \right) ; \quad \frac{d\tau_{xi}}{dq} = -r \left( \cos q + \frac{r}{c} \cos(2q) \right)$$

L'equazione del moto:

$$I^*(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \frac{dI^*(q)}{dq} \dot{q}^2 = Q^*$$

si può quindi esplicitare in funzione della sola coordinata libera sostituendo  $I^*(q)$ ,  $\frac{dI^*(q)}{dq}$ ,  $Q^*$  con le espressioni trovate.

## 5.4 Rendimento di un sistema meccanico



Scatola nella quale entra un lavoro motore, esce un lavoro resistente e dissipato.

Inoltre il sistema può accumulare energia sotto forma di energia cinetica. Consideriamo di nuovo l'equazione dell'energia applicata ad una macchina nell'intervallo  $\Delta t$ :

$$L_M + L_R + L_D = \Delta E_c$$

dove

- $L_M$  è il lavoro positivo compiuto dalle forze motrici nell'intervallo  $\Delta t$ ;
- $L_R$  è il lavoro compiuto dalle forze resistenti e quindi negativo;
- $L_D$  è il lavoro, di valore negativo, compiuto dalle forze dissipative, sempre nell'intervallo  $\Delta t$ .

Se la macchina funziona *in regime assoluto* la velocità di tutti i membri è costante nel tempo per cui  $\Delta E_c = 0$  per ogni valore di  $\Delta t$  e l'equazione si riduce a:

$$L_M + L_R + L_P = 0$$

Tale bilancio di energia vale quando il sistema ha finito di accumulare energia cinetica e la mantiene costante nel tempo.

Essendo nulla anche la derivata dell'energia cinetica vale anche la relazione in termini di potenza:

$$P_M + P_R + P_D = 0$$

Se la macchina funziona *in regime periodico* la velocità di tutti i membri si ripetono ad intervalli pari al periodo.

$E_c(t) = E_c(t + T_F)$  dove  $T_F$  è il periodo.

Il bilancio energetico sotto tali ipotesi è sempre pari a:

$$L_M + L_R + L_P = 0$$

sia che il moto sia permanente, sia che si compia il bilancio tra due istanti in fase in un regime periodico.

Tuttavia in questo caso non vale l'equazione in termini di potenza in quanto in generale  $\frac{dE_c}{dt} \neq 0$  e quindi:

$$P_M + P_R + P_D \neq 0$$

Con riferimento ad una macchina funzionante in regime assoluto o in regime periodico, considerando in questo caso intervalli di tempo multipli del periodo, si definisce **rendimento** il rapporto tra il modulo del lavoro resistente utile e il lavoro motore:

$$\eta = \frac{\|L_R\|}{L_M} = \frac{L_M - \|L_D\|}{L_M} = 1 - \frac{\|L_D\|}{L_M} = \frac{\|L_R\|}{\|L_R\| + \|L_D\|} \quad (< 1)$$

Il rendimento è un numero adimensionale, ed è sempre minore di 1 per la presenza nella realtà di forze resistenti passive. Se la macchina funziona in regime assoluto il rendimento può essere espresso anche in termini di potenza, nella forma:

$$\eta = \frac{\|P_R\|}{P_M} = \frac{P_M - \|P_D\|}{P_M} = 1 - \frac{\|P_D\|}{P_M} = \frac{\|P_R\|}{\|P_R\| + \|P_D\|}$$

Al rendimento può essere data anche una espressione diversa. Se supponiamo che la macchina funzioni in condizioni ideali, cioè in assenza di forze resistenti passive, e sia sottoposta alla stessa forza resistente nel caso reale, in condizioni di regime assoluto o periodico avremo:

$$L_{Mi} + L_R = 0 \quad \Leftarrow \quad L_{Mi} = \|L_R\|$$

dove con  $L_{Mi}$  si è indicato il lavoro motore richiesto in questa situazione puramente ideale. Perciò, tenendo conto della definizione di rendimento si ottiene:

$$\eta = \frac{\|L_R\|}{L_M} = \frac{L_{Mi}}{L_M}$$

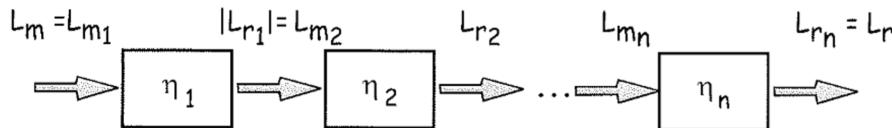
Ossia il rendimento è anche dato dal rapporto tra il lavoro motore in condizioni ideali e il lavoro motore in condizioni reali, necessari per contrastare lo stesso lavoro resistente. Se la macchina funziona in regime assoluto tale relazione può essere espressa anche in termini di potenza.

Queste relazioni mostrano che a causa delle resistenze passive il lavoro motore reale è sempre maggiore di quello ideale.

È possibile determinare il rendimento complessivo di una macchina o di un gruppo di macchine fra loro collegate:

#### 5.4.1 Rendimento di macchine disposte in serie

Nel collegamento in serie il lavoro resistente di una macchina eguala quello motore della macchina che la segue e con la quale scambia energia.



Applicando la definizione, poiché  $\|L_{R,i}\| = L_{M,i+1}$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \eta_s &= \frac{\|L_R\|}{L_M} = \frac{L_{R,n}}{L_{M,n}} \cdot \frac{\|L_{R,n-1}\|}{L_{M,n-1}} \cdots \frac{\|L_{R,2}\|}{L_{M,2}} \cdot \frac{\|L_{R,1}\|}{L_{M,1}} \\ &= \eta_n \cdot \eta_{n-1} \cdots \eta_2 \cdot \eta_1 \end{aligned}$$

Perciò il rendimento globale è il prodotto dei rendimenti delle singole macchine. Se una sola macchina ha un basso rendimento tutto il sistema ha un basso rendimento.

---

## 5.5 Lezione 01-04 – Daniele Boroluzzi

Riprendiamo alcuni concetti che abbiamo già esposto nelle sottosezioni precedenti: in particolare partiamo dal concetto di rendimento di un sistema meccanico. Come viene solitamente diagrammato, si rappresenta il sistema tramite uno schema a blocchi in cui sono presenti:

- Una freccia entrante a rappresentare il lavoro motore che entra nel sistema meccanico in esame
- Una freccia uscente a rappresentare il lavoro resistente

- Una freccia uscente a rappresentare il lavoro dissipato
- In generale il nostro sistema può accumulare energia nella forma cinetica, per questo tale componente di energia viene rappresentata all'interno del blocco.

Quindi, è possibile scrivere un primo bilancio di energia:

$$L_m + L_r + L_p = \Delta E_C$$

E tale bilancio deve valere in genere in virtù del principio di conservazione dell'energia.

Supponiamo ora di avere un funzionamento a regime, ovvero un funzionamento in cui l'energia del sistema (in forma cinetica) non varia ( $\Delta E_c = 0$ ), il bilancio di energia si può semplicemente riscrivere come:

$$L_m + L_r + L_p = 0$$

Tale situazione si osserva quando il sistema ha terminato di accumulare energia cinetica e la mantiene costante nel tempo. Possiamo, inoltre, pensare che tale bilancio di energia possa essere espresso anche in termini di bilancio di potenze, per cui è possibile anche scrivere che la derivata dell'equazione precedente sia comunque uguale a zero e quindi:

$$P_m + P_r + P_p = 0$$

C'è da precisare che per definizione in questo sistema la potenza (o anche il lavoro motore) è positivo, in altri termini vi è energia che entra nel nostro sistema, e che il lavoro resistente è negativo, di conseguenza dove è presente l'utenza della macchina che preleva l'energia necessaria, e il lavoro dissipato negativo che chiude il bilancio a zero.

In realtà le equazioni che abbiamo scritto, sotto l'ipotesi di  $\Delta E_c = 0$ , può valere anche non necessariamente quando l'energia cinetica è costante, ma vale anche in regime periodico in cui l'energia cinetica presenta una certa ciclicità che si ripete nel tempo di periodo  $\mathbf{T}$  e quindi in un periodo è possibile scrivere che l'energia cinetica raggiunge lo stesso valore all'inizio e alla fine del ciclo. In altri termini  $E_c(t) = E_c(t + T)$ .

Una volta definito in questo modo il sistema, come cioè un oggetto che riceve energia dal lato motore e la restituisce al lato resistente dissipandone una certa parte, è utile definire il **rendimento del sistema meccanico** come un rapporto ciò che si ottiene dal sistema ( $L_r$ ) e ciò che gli viene fornito ( $L_m$ ).

$$\eta = \frac{\|L_R\|}{L_M} = \frac{L_M - \|L_P\|}{L_M} = 1 - \frac{\|L_P\|}{L_M} = \frac{\|L_R\|}{\|L_R\| + \|L_P\|} < 1$$

Quanto formulato in termini di lavori può essere espresso in termini di potenze, quindi in termini di flusso di energia nell'unità di tempo

$$\eta = \frac{\|P_R\|}{P_M} = \frac{P_M - \|P_P\|}{P_M} = 1 - \frac{\|P_P\|}{P_M} = \frac{\|P_R\|}{\|P_R\| + \|P_P\|} < 1$$

Pensiamo adesso al medesimo sistema meccanico in condizioni ideali, ovvero nelle condizioni in cui la potenza dissipata che è presente nel nostro sistema sia nulla ( $L_P = 0$ , non sono presenti perdite). Supponiamo, inoltre, che si trovi in condizioni di funzionamento dettate dallo stesso lavoro resistente o potenza resistente, quindi l'utenza della nostra macchina riceve esattamente lo stesso lavoro/potenza di quella nelle condizioni non ideali e in tali condizioni di funzionamento ideali ci chiediamo: come può funzionare il nostro sistema?

Il bilancio dei lavori suggerisce che: in condizioni ideali di assenza di lavoro dissipato basterà un lavoro motore minore per far funzionare il sistema. In altri termini il lavoro motore in condizioni ideali ( $L_{M,i}$ ) + il lavoro resistente ( $L_R$ ) è pari a zero, in quanto non vi è nè accumulo di energia nel nostro sistema e non è presente energia dissipata.

L'equazione, in questo caso, diventa molto semplice e intuitiva perché ci dice che il lavoro motore in condizioni ideali è uguale in valore assoluto al lavoro resistente:

$$L_{M,i} = \|L_R\|$$

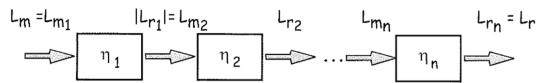
Non essendoci alcun'altra forma in cui questo lavoro motore viene accumulato o dissipato, va interamente all'utenza e di conseguenza vale l'uguaglianza in forma stretta.

Possiamo a questo punto calcolare il rendimento di questo caso di riferimento ideale come:

$$\eta = \frac{\|L_R\|}{L_M} = \frac{L_{M,i}}{L_M} = \frac{P_{M,i}}{P_M}$$

Ci chiediamo a questo punto cosa succede al funzionamento di un sistema di macchine, quindi di un sistema di macchine connesse tra loro una volta noto il rendimento di ciascuna di esse.

Supponiamo quindi di avere  $n$  macchine che sono disposte in serie, per cui il flusso di lavoro che esce dalla prima macchina è interamente indirizzato verso la seconda macchina e costituisce lavoro motore di quest'ultima e così via per le successive.



Ci chiediamo anche in questo caso che rendimento possa avere la disposizione in serie di queste macchine. Compiamo dunque delle semplici considerazioni chiamando in causa le definizioni che abbiamo dato precedentemente.

$$\|L_{R,i}\| = L_{M,(i+1)}$$

Attraverso la definizione dei rendimenti delle macchine che abbiamo dato precedentemente possiamo esprimere il rendimento complessivo del sistema di macchine come:

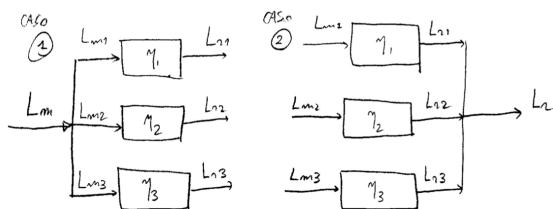
$$\eta_S = \frac{\|L_R\|}{L_M} = \frac{\|L_{Rn}\|}{L_{Mn}} \cdot \frac{\|L_{Rn-1}\|}{L_{Mn-1}} \cdots \frac{\|L_{R1}\|}{L_{M1}} = \eta_n \cdot \eta_{n-1} \cdots \eta_1$$

Abbiamo cioè sfruttata l'identità tra il lavoro motore della macchina a monte e il lavoro resistente della macchina a valle per scrivere una serie di rapporti ed esprimere il rendimento complessivo come prodotto dei singoli rendimenti di ciascuna macchina.

La considerazione più importante da fare su tale espressione è che il rendimento della serie, essendo calcolabile come prodotto di rendimenti delle singole macchine, fa sì che sia influenzato allo stesso modo dai fattori della sua espressione in egual misura: basta che uno solo dei rendimenti sia molto basso per inficiare il rendimento di tutta la serie di macchine.

### 5.5.1 Rendimento di macchine in parallelo

Ci occupiamo ora della disposizione in parallelo delle macchine; supponiamo di avere tre macchine che sono attraversate da dei flussi di energia di cui è noto il singolo rendimento ( $\eta_1, \eta_2$  e  $\eta_3$ ), ognuna di queste riceve il lavoro motore che le compete ( $L_{M1}, L_{M2}$  e  $L_{M3}$ ), complessivamente questi lavori motori sono forniti al sistema di macchine e la loro somma è  $L_M$ .



Ciascuna delle macchine in esame avrà il suo lavoro resistente ( $L_{R1}, L_{R2}$  e  $L_{R3}$ ), la cui somma restituisce il lavoro complessivamente fornito dal sistema di macchine che risulta essere  $L_R$ . Applichiamo la definizione di rendimento a questo sistema di macchine:

$$\eta = \frac{\|L_{R1}\| + \|L_{R2}\| + \dots + \|L_{R3}\|}{L_M} = \frac{L_{M1}\eta_1 + L_{M2}\eta_2 + \dots + L_{Mn}\eta_n}{L_M}$$

Il rendimento dunque può essere interpretato come la media pesata dei rendimenti, i coefficienti di peso sono i lavori motore delle singole macchine. Il problema caratteristico della disposizione in serie viene mitigato in quanto anche se una macchina di quelle presenti nel sistema avesse un rendimento molto basso andrebbe a influenzare il rendimento complessivo del sistema in maniera inferiore nella misura in cui il lavoro che la attraversa è limitato, di conseguenza il fatto di pesare i rendimenti con il flusso effettivo di potenza rende questa espressione meno sensibile al rendimento di ciascuna macchina in quanto è pesato sul lavoro motore effettivo che la macchina riceve.

Possiamo ora focalizzarci sulla stessa definizione di rendimento per un parallelo di macchine prendendo in esame, anziché i lavori motore di ciascuna macchina, i lavori resistenti di ciascuna macchina: stiamo cioè cercando un'espressione del rendimento in cui i coefficienti dei rendimenti non siano più i lavori motore, ma quelli resistenti.

Per fare ciò sfruttiamo la definizione alternativa del rendimento:

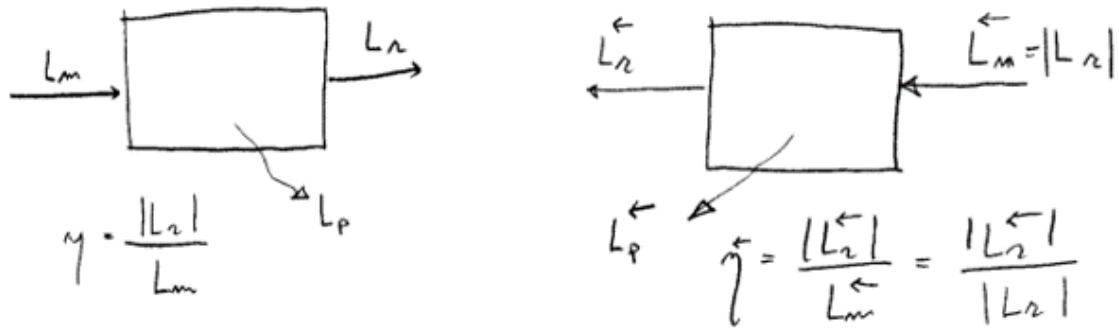
$$\eta = \frac{\|L_R\|}{L_{M1} + L_{M2} + \dots + L_{Mn}} = \frac{\|L_R\|}{\frac{\|L_{R1}\|}{\eta_1} + \frac{\|L_{R2}\|}{\eta_2} + \dots + \frac{\|L_{Rn}\|}{\eta_n}}$$

Questa espressione descrive ugualmente il rendimento del parallelo di macchine in funzione dei rendimenti di ciascuna macchina, ma in questo caso lo esprime in maniera pesata su i lavori resistenti. Tale espressione, matematicamente diversa da quella sviluppata con i lavori motore, prende il nome di **media armonica pesata**.

È una media pesata sui lavori resistenti dei rendimenti delle varie macchine; anche in questo caso è evidente che il contributo di ciascuna macchina è pesato dal lavoro (resistente) che le compete, però il concetto che esprime è sempre lo stesso: una macchina che sia attraversata da un flusso di lavoro limitato all'utenza rende il termine i-esimo del lavoro resistente poco influente sulla somma presente al denominatore.

### 5.5.2 Moto diretto e retrogrado

Proviamo ora a ragionare su cosa succede invertendo il ruolo dell'organo motore della nostra macchina e dell'organo resistente. Eseguiamo questo esperimento ideale di invertire il ruolo di questi due membri della stessa macchina e proviamo a caratterizzare il fatto che tale macchina possa in qualche modo funzionare con un ruolo invertito tra movente e cedente una volta noto il rendimento,



Partiamo dalla macchina generica il cui schema a blocchi è rappresentato sulla sinistra che riceve il lavoro  $L_M$ , fornisce il lavoro  $L_R$  all'utenza e dissipa il lavoro  $L_P$  a causa di fenomeni di attrito, etc...

Il rendimento, per definizione, è espresso come  $\eta = \frac{\|L_R\|}{L_M}$  per quanto riguarda la macchina in **moto diretto**.

Idealmente invertiamo il ruolo di movente e cedente e quindi immaginiamo che sia l'organo cedente a promuovere il moto della nostra macchina e all'organo movente vi sia l'utenza della macchina stessa, come rappresentato dallo schema a blocchi a destra. In esso i sensi delle frecce sono invertiti e il lavoro motore del **moto retrogrado** sia idealmente uguale al lavoro resistente che la macchina aveva in condizioni di moto diretto.

In altre parole il lavoro che la macchina prima forniva all'utenza diventa invece il lavoro che la macchina riceve per muoversi in senso opposto a quello che aveva inizialmente nel moto diretto.

In questo regime di funzionamento retrogrado la macchina avrà un qualche funzionamento per il quale ci sarà una certa dissipazione ( $L_P$  retrogrado). Applichiamo ora la definizione di rendimento anche a questo caso:

$$\eta^← = \frac{\|L_R^←\|}{L_M^←} = \frac{\|L_P\|}{\|L_R\|}$$

Calcoliamo alcune grandezze della macchina in moto diretto e retrogrado, in particolare la **perdita di rendimento**, che definiamo come il complemento a 1 del rendimento stesso:

$$1 - \eta = 1 - \frac{\|L_R\|}{L_M} = \frac{\|L_P\|}{L_M} \quad ; \quad 1 - \eta^← = 1 - \frac{\|L_R^←\|}{L_M^←} = \frac{\|L_P^←\|}{L_M^←} = \frac{\|L_P\|}{\|L_R\|}$$

I lavori dissipati in moto diretto e retrogrado sono, in generale, diversi, però esprimiamo tramite in parametro K il loro rapporto:

$$K = \frac{\|L_P^\leftarrow\|}{\|L_P\|}$$

Proviamo sotto tale considerazioni a calcolare il rapporto tra le perdite di rendimento tra i due casi, ovvero studiamo qual è la prestazione della macchina in moto retrogrado rispetto alla prestazione in moto diretto, ricordando che la perdita di rendimento è un valore che, tanto più è piccolo, quanto meglio la macchina sta funzionando:

$$\frac{1 - \eta^\leftarrow}{1 - \eta} = \frac{\|L_P^\leftarrow\|}{\|L_R\|} \cdot \frac{L_M}{\|L_P\|} = \frac{K}{\eta}$$

Nell'equazione appena scritta possiamo pensare che l'incognita sia il rendimento del moto retrogrado:

$$\eta^\leftarrow = \frac{\eta(1 + K) - K}{\eta}$$

In genere tale rendimento nel moto retrogrado è inferiore al rendimento nel moto diretto: per come, infatti, è strutturata una macchina, invertire il ruolo tra cedente e movente significa avere un rendimento degradato della macchina stessa.

La cosa interessante è che osserviamo che il numeratore, a principio, può essere nullo o addirittura negativo: come possiamo interpretare tale risultato?

Qualora il rendimento di moto retrogrado fosse negativo, sfruttando la definizione che abbiamo dato del rendimento di una macchina, comporterebbe che il lavoro resistente sia positivo, ovvero il moto della nostra macchina/meccanismo è possibile solamente ricevendo lavoro anche dal lato cedente (Sia movente che cedente stanno promuovendo il moto del meccanismo anziché il cedente tenda a frenarlo).

Osserviamo inoltre che è la dissipazione all'interno del meccanismo che va ad influenzare l'equazione che abbiamo appena scritto e che quindi realizza le condizioni per le quali il numeratore è nullo o addirittura negativo.

Questa espressione del rendimento del moto retrogrado, può tuttavia aiutarci a trovare un'espressione limite per la reversibilità del moto del nostro sistema: quindi scrivendo che il numeratore del rendimento del moto retrogrado sia negativo o nullo (condizioni di irreversibilità del moto), otteniamo:

$$\eta \leq \frac{K}{K + 1}$$

Di conseguenza, conoscendo il rapporto tra i lavori dissipati (K) e il rendimento del moto diretto possiamo calcolare questa grandezza e sappiamo che se il rendimento è minore o uguale a questa soglia il moto invertito/retrogrado non è possibile.

Ad esempio, per K = 1, la soglia di rendimento  $\eta = 0.5$  (50%) è quella critica e qualsiasi valore di rendimento pari o inferiore porta il meccanismo a non essere invertibile.

Osservazioni:

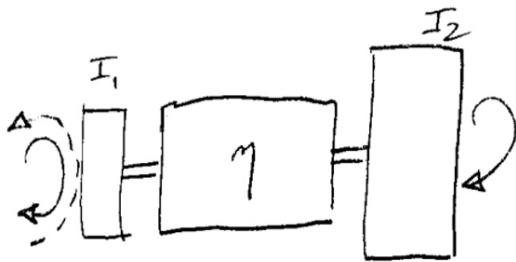
- L'invertibilità del moto, che è impedita quando il rendimento del moto retrogrado è nullo o negativo, implica che sia invertita solo quando si tenta di realizzarla solo dal lato cedente, ma non sul movente
- Il fatto che il moto retrogrado non sia possibile non significa che non sia possibile invertire il senso di funzionamento della macchina, ma significa che questo sia possibile solo agendo sul movente (ad esempio il cric dell'automobile)
- Un altro esempio di irreversibilità e di potenziale rischio per un sistema meccanico è il seguente:

Prendiamo un meccanismo non reversibile di rendimento ( $\eta$ ) e immaginiamo di avere un albero sul quale sono calettati due dischi d'inerzia  $I_1$  e  $I_2$ . Immaginiamo inoltre che il membro motore sia dal lato dell'inerzia 1 e che il cedente sia dal lato dell'inerzia 2.

Supponiamo ora di azionare il meccanismo in senso inverso, ovvero azionandolo dal lato motore ( $I_1$ ), [ciò è possibile in quanto stiamo sempre agendo dal lato motore del meccanismo] e ad un certo momento annulliamo il momento motore che stiamo applicando.

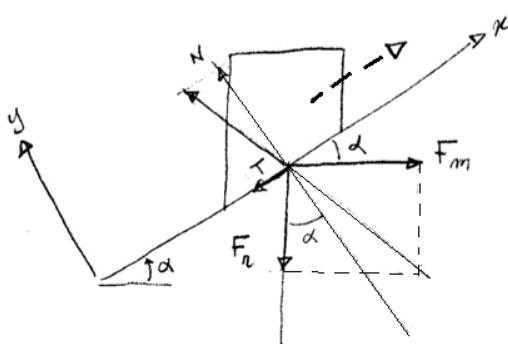
Quello che ci aspetteremmo è che grazie all'inerzia  $I_2$  il meccanismo sia mantenuto in movimento questa volta non più dal momento applicato al lato  $I_1$ , in quanto questo è stato annullato, ma dall'inerzia  $I_2$ , che tende a mantenere in moto il sistema fornendo l'energia al resto del meccanismo. Se il meccanismo non è reversibile non permette questa inversione di ruolo tra movente e cedente.

Il meccanismo, in questo caso, tenderebbe a impuntarsi e se l'inerzia  $I_2$  e la sua velocità angolare sono sufficientemente alte l'opposizione del meccanismo a questo ruolo invertito di movente e cedente potrebbe provocare la rottura del meccanismo stesso, perché, per l'appunto, avendo rendimento di moto retrogrado negativo significa che il meccanismo si oppone ad un'energia entrante dal lato  $I_2$ .



#### ESEMPIO N.1: IL PIANO INCLINATO

Proviamo ora a realizzare/studiare un esempio che ci permetta di comprendere meglio il concetto di moto diretto e retrogrado e reversibilità o meno del moto.



Prendiamo una semplice massa che si muove su un piano inclinato e che è quindi soggetta ad una forza verticale  $F_r$  e una forza motrice  $F_m$  per mezzo della quale sale il piano inclinato, diretta lungo il piano orizzontale.

Inoltre tra massa e piano inclinato è presente dell'attrito: la reazione vincolare del piano al contatto con la massa ha una componente normale al piano stesso ( $N$ ), ma anche una componente che giace sul piano ( $T$ ) che è la forza d'attrito. Questo porta alla risultante alla reazione vincolare a non essere normale al piano inclinato, ma ad opporsi al moto che supponiamo avvenire nella direzione di  $x$  positivo.

Proviamo a questo punto a scrivere la definizione di rendimento del sistema e a proiettare le equazioni in modo tale da trovare un'espressione che coinvolga anche il coefficiente di attrito nelle condizioni di movimento diretto e (se e come) nelle condizioni di moto retrogrado.

- Moto diretto: il lavoro resistente è calcolabile come il lavoro che la forza  $F_r$  compie man mano che il corpo sale di una quantità positiva  $\Delta x$ . Analogamente per il lavoro motore.

$$\eta = \frac{\|L_r\|}{L_m} = \frac{F_r \sin(\alpha) \Delta x}{F_m \cos(\alpha) \Delta x}$$

La relazione che esiste tra le varie forze presenti sul nostro sistema ipotizzando che il sistema sia in una condizione di funzionamento a regime, ovvero sta salendo il piano inclinato con velocità costante:

$$\begin{cases} x : & +F_m \cos(\alpha) - F_r \sin(\alpha) - T = 0 \\ y : & -F_m \sin(\alpha) - F_r \cos(\alpha) + N = 0 \end{cases}$$

Siamo in possesso anche della relazione fornita dal modello Coulombiano di attrito per la quale la componente tangenziale  $T$  è proporzionale alla componente normale  $N$ , tramite un coefficiente di attrito cinetico (in quanto il sistema è in movimento):

$$T = f N$$

Prendiamo ora le due equazioni di bilancio dell'energia e moltiplichiamo la prima per il  $\sin(\alpha)$  e la seconda per il  $\cos(\alpha)$ , ottenendo:

$$\begin{cases} F_m \sin(\alpha) \cos(\alpha) - F_r \sin^2(\alpha) - T \sin(\alpha) = 0 \\ -F_m \cos(\alpha) \sin(\alpha) - F_r \cos^2(\alpha) + N \cos(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Ne facciamo la somma membro a membro, ottenendo:

$$\begin{aligned} -F_r - T \sin(\alpha) + N \cos(\alpha) &= 0 \\ \begin{cases} F_r = N(\cos(\alpha) - f \sin(\alpha)) \\ F_m = N(\sin(\alpha) + f \cos(\alpha)) \end{cases} \end{aligned}$$

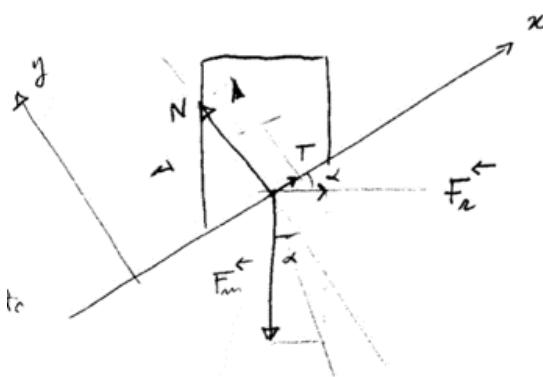
Calcoliamo il rapporto:

$$\frac{F_r}{F_m} = \frac{\cos(\alpha) - f \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) + f \cos(\alpha)}$$

Tale rapporto, se ricordiamo l'espressione trovata per il rendimento, è il rapporto che caratterizza il rendimento stesso.

$$\eta = \frac{\|L_r\|}{L_m} = \frac{F_r \sin(\alpha) \Delta x}{F_m \cos(\alpha) \Delta x} = \frac{\cos(\alpha) - f \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) + f \cos(\alpha)} \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

- Moto retrogrado:



Vediamo ora le condizioni del nostro sistema in moto retrogrado. Dal disegno del sistema possiamo osservare che la massa è posizionata sul piano inclinato, soggetto a forze orizzontali e verticali.

Il ruolo della forza verticale e della forza orizzontale ora è invertito rispetto al moto diretto: la forza verticale  $F_m^\leftarrow$  diventa la forza motrice in quanto è quella che promuove la discesa del corpo sul piano inclinato (movimento in direzione opposta all'asse x), la forza orizzontale che prima applicavamo per far salire la massa ora diventa la forza resistente  $F_r^\leftarrow$ , dalla quale possiamo trarre lavoro utile per l'utenza di questo sistema.

Osserviamo che si suppone che il corpo stia scendendo con velocità costante lungo il piano inclinato e di conseguenza la forza di attrito  $T$  è diretta in verso positivo rispetto all'asse x, in quanto si sta opponendo alla discesa del corpo lungo il piano inclinato.

Il rendimento in questo senso è pari a:

$$\eta^\leftarrow = \frac{\|L_r^\leftarrow\|}{L_m^\leftarrow} = \frac{F_r^\leftarrow \cos(\alpha) \Delta x}{F_m^\leftarrow \sin(\alpha) \Delta x}$$

Scriviamo le equazioni di equilibrio del sistema:

$$\begin{cases} x: & +F_r^\leftarrow \cos \alpha + T - F_m^\leftarrow \sin \alpha = 0 \\ y: & +N - F_m^\leftarrow \cos \alpha - F_r^\leftarrow \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

Analogamente al caso precedente possiamo scrivere  $T = f N$  e applicando considerazione analoghe ricavare il rapporto

$$\frac{F_r^\leftarrow}{F_m^\leftarrow} = \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\cos \alpha + f \sin \alpha}$$

che sostituita nell'espressione del rendimento retrogrado:

$$\eta^\leftarrow = \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\cos \alpha + f \sin \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

### 5.5.3 Equivalenza dinamica di membri rigidi

Sempre nell'ambito dell'analisi dinamica di sistemi ad 1 G.d.L. ci occupiamo dell'equivalenza dinamica di corpi rigidi.

Due corpi rigidi sono dinamicamente equivalenti se soggetti all'applicazione dello stesso sistema di forze si comportano in modo identico.

È utile in molte applicazioni poter scrivere le equazioni del moto di un sistema rigido in termini di sistema equivalente, quindi poter realizzare un sistema del tutto equivalente a quello di partenza per il quale però la scrittura delle equazioni del moto risultano semplificate (sta a noi trovare strategie di equivalenza più indicate per semplificare il sistema).

Dal punto di vista dinamico l'identità del comportamento tra due sistemi diversi è garantita dal fatto che quantità di moto e momento della quantità di moto siano del tutto uguali: solo in questo caso siamo assolutamente sicuri che il sistema equivalente lo sia veramente, nel senso che si comporti allo stesso modo del sistema di partenza sotto l'effetto di qualsiasi sistema di forze e momenti.

Ci occupiamo di sistemi piani, ovvero la cui dinamica è descritta dal moto in un piano: il problema si può formulare in due dimensioni.

Partiamo dalla formulazione più generale in 3 dimensioni e, in questo caso, la quantità di moto di un sistema piano (xy) proiettata nel S.d.R. fisso si può scrivere come:

$${}^f \{Q\} = m \begin{Bmatrix} \dot{x}_G \\ \dot{y}_G \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Scriviamo ora il momento della quantità di moto, una volta scelto come polo (per comodità) il centro di massa del corpo:

$${}^m \{K_G\} = {}^m [I_G] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{Bmatrix} = {}^m \begin{Bmatrix} -I_{Gxz} \omega_z \\ -I_{Gyz} \omega_z \\ I_{Gzz} \omega_z \end{Bmatrix}$$

Osserviamo che se l'asse z è un'asse principale d'inerzia le prime due componenti sono nulle e quindi l'unica equazione che rimane è la terza che chiama in causa la terza componente della quantità di moto.

Se i due momenti d'inerzia  $I_{Gxz}$  e  $I_{Gyz}$  non fossero nulli sono necessari due momenti lungo l'asse x e y della terna mobile per mantenere il sistema in moto piano (ad esempio un vincolo).

Possiamo quindi concludere che l'equivalenza dinamica di due sistemi è garantita da stessa massa, posizione del centro di massa e dal momento d'inerzia attorno all'asse ortogonale al piano del moto. Scriviamo ora le equazioni che ci garantiscono l'equivalenza dinamica di due sistemi: supponiamo di avere un sistema di massa m, di posizione del centro di massa  $(x_G, y_G)$  e momento d'inerzia attorno all'asse z baricentrico  $I_{Gzz}$ .

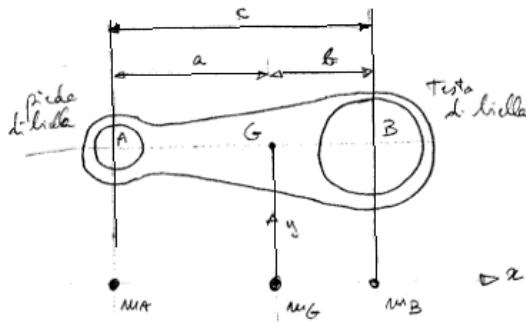
Possiamo pensare che la sua dinamica sia equivalente a quella di una distribuzione di masse che però soddisfi l'equivalenza delle grandezze appena elencate.

$$\begin{cases} \sum_i m_i = m \\ \sum_i m_i x_i = m x_G = 0 & \text{se terna è baricentrica (mobile)} \\ \sum_i m_i y_i = m y_G = 0 & \text{se terna è baricentrica (mobile)} \\ \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = I_{Gzz} \end{cases}$$

Osserviamo che abbiamo potuto scrivere un sistema di 4 equazioni: quindi volendo abbiamo la possibilità di trovare 4 incognite. Il primo esempio che possiamo fare è che, fissando le posizioni x,y di 4 masse, è possibile ricavare i valori delle masse che rendono tale distribuzione di corpi equivalente a quella di partenza.

In alternativa potremmo allineare tutte le masse lungo un'asse baricentrico (ad esempio x), in questo modo tutte le coordinate y delle masse sono nulle e, essendo la terza equazione identicamente soddisfatta, mi permette di trovare tre valori di massa che garantisca l'equivalenza del sistema.

#### ESEMPIO N.1: BIELLA



Prendiamo un corpo rigido esteso, ad esempio la biella di un motore a combustione interna, e ci chiediamo se possiamo scrivere un sistema dinamicamente equivalente che semplifichi la scrittura delle equazioni del moto della dinamica di questo sistema.

Ipotizziamo che il moto avvenga in un sistema piano e scegliamo tre masse localizzate nei punti A, B e G per descrivere un sistema dinamicamente equivalente, allineate lungo l'asse baricentrico.

Le uniche tre incognite che rimangono, avendo scelto la posizione delle tre masse, sono i valori stessi delle masse ( $m_A, m_B, m_G$ ).

Scriviamo le tre equazioni di equivalenza:

$$\begin{cases} m_A + m_B + m_G = m \\ -a m_A + b m_B = 0 \\ a^2 m_A + b^2 m_B = I_{Gzz} \end{cases}$$

Il sistema ottenuto è un sistema di tre equazioni in tre incognite che risolto permette di trovare i valori delle tre masse:

$$m_A = \frac{I_{Gzz}}{a c} \quad ; \quad m_B = \frac{I_{Gzz}}{b c} \quad ; \quad m_G = m - m_A - m_B$$

Ogni volta che in un qualunque meccanismo ci sia una biella in moto piano possiamo sostituirla con tre masse localizzate nei punti A, B e G. Tale semplificazione è particolarmente efficace in quanto le masse A e B sono posizionate nelle coppie rotoidali e quindi la descrizione del loro moto è particolarmente semplice, mentre il moto del punto G va per forza calcolato.

Per questo stesso sistema possiamo sceglierlo con un sistema dinamicamente equivalente che è formato da solo due masse ( $m_A$  e  $m_B$ ) che risulteranno diverse da quelle trovate precedentemente e da un momento di inerzia fittizio ( $I_0$ ), che è un momento d'inerzia fittizio la cui proprietà è quella di far tornare la dinamica complessiva del sistema equivalente con quella del sistema di partenza.

Sciviamo le equazioni di equivalenza dinamica:

$$\begin{cases} m_A + m_B = m \\ -a m_A + b m_B = 0 \\ a^2 m_A + b^2 m_B + I_0 = I_{Gzz} \end{cases}$$

Anche questo sistema ha tre equazioni in tre incognite:

$$m_A = m \frac{b}{c} \quad ; \quad m_B = m \frac{a}{c} \quad ; \quad I_0 = I_{Gzz} - m a b$$

Questo momento d'inerzia ha un significato matematico e fisico in quanto riequilibria la dinamica del sistema rispetto al sistema di partenza tant'è che tale momento d'inerzia può, in principio, anche essere negativo.

Ogni qualvolta scriveremo l'equazione di Eulero della distribuzione di masse equivalente dovremmo ricordarci di legare la dinamica rotazionale della biella descritta semplicemente dalle due masse con la presenza di un momento d'inerzia  $I_0$

## 5.6 Lezione 08-04 – Daniele Bortoluzzi

### 5.6.1 Irregolarità e stabilità del moto

Sempre nell'ambito dell'analisi dinamica di sistema ad 1 G.d.L. affrontiamo una problematica piuttosto comune nelle macchine e nei meccanismi che è la condizione di funzionamento di un sistema descritto da 1 G.d.L.

L'esempio che viene proposto è l'accoppiamento motore-utilizzatore.

Questo sistema è piuttosto semplice in termini di descrizione della sua dinamica in quanto avendo un unico grado di libertà è possibile scriverla con un'unica equazione differenziale però è un caso di studio particolarmente utile e frequente nell'ambito dei meccanismi.

Riprendiamo dunque l'equazione differenziale che genericamente descrive la dinamica di un sistema ad 1 G.d.L.

$$I^*(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \frac{dI^*}{dq} \dot{q}^2 = Q^*$$

Questa equazione differenziale richiede il calcolo del momento d'inerzia ridotto  $I^*$  e del momento esterno ridotto  $Q^*$  equivalente a tutte le azioni esterne al meccanismo proiettate lungo la coordinata generalizzata  $q$ .

Tale sistema può avere diverse condizioni di funzionamento che dipendono dalla sua natura che dalle condizioni di funzionamento (aka forze e momenti a lui applicati): il primo tipo di condizioni di funzionamento per un sistema di questo tipo sono quelle di *regime assoluto*.

Un sistema ad 1 G.d.L. è in regime assoluto se tutte le velocità dei diversi membri sono costanti nel tempo; questa definizione ci fa capire che è una condizione piuttosto particolare che non è detto si possa realizzare per tutti i meccanismi: ad esempio il meccanismo di spinta (per la descrizione di un compressore volumetrico), se anche la manovella in moto con velocità angolare costante non è vero che gli altri membri del meccanismo sono mantenuti con velocità costante.

Se noi utilizziamo l'equazione differenziale per capire quali sono possibili condizioni di funzionamento di un meccanismo in regime assoluto, ricordando che il momento d'inerzia generalizzato è un momento d'inerzia tale per cui produce un'energia cinetica equivalente del sistema ridotto rispetto al sistema reale e che il momento generalizzato è il momento equivalente che applicato al sistema semplificato esercita la stessa potenza delle azioni effettivamente presenti sul sistema reale, dovremmo imporre  $\ddot{q} = 0$ .

$$\frac{1}{2} \frac{dI^*}{dq} \dot{q}^2 = Q^*$$

Una possibile condizione che verifica tale equazione è che  $I^* = \text{cost.}$  e che  $Q^* = 0$ .

L'equazione sotto tale ipotesi è verificata sotto ogni configurazione e abbiamo una condizione di regime assoluto.

Cosa significa che  $I^*$  sia costante? Significa che, presa la sua espressione, dovremmo garantire che non vari nel tempo e non vari rispetto alla configurazione.

L'espressione di  $I^*$  è

$$I^* = \sum_{i=1}^n (m_i \tau_{xi}^2 + m_i \tau_{yi}^2 + I_i \tau_{\vartheta i}^2)$$

La sommatoria è la somma di termini che prevedono massa per il quadrato dei rapporti di velocità tra coordinata generalizzata e velocità del centro di massa del corpo  $i$ -esimo e il momento d'inerzia del corpo  $i$ -esimo che moltiplica il rapporto di velocità tra la sua rotazione e la coordinata generalizzata. È possibile che tale momento d'inerzia ridotto sia costante se, ad esempio, tutti i rapporti di velocità siano costanti. Questo, tuttavia, non è sempre possibile.

L'altra condizione necessaria è che  $Q^* = 0$ , ovvero che non ci siano forze nette che agiscono sul nostro sistema (o sono tutte nulle o tutte le forze attive compensano in ogni istante e in ogni configurazione quelle dissipative). Anche questa situazione non è detto che sia verificata per il generico meccanismo.

Premesso ciò per il regime assoluto, che risulta piuttosto restrittivo per il funzionamento di un meccanismo definiamo un nuovo tipo di regime: *il regime periodico*. In esso viene a cadere la richiesta che le velocità di tutti i membri siano costanti nel tempo e ciò che si richiede è che vi sia una certa regolarità, cioè che le velocità di tutti i membri, se non costanti, siano almeno periodiche con periodo pari a  $T$ .

Sotto queste ipotesi definiamo una grandezza utile per caratterizzare la natura di variabilità del regime nelle condizioni di periodicità, che risulta essere il valore medio della coordinata libera  $q$ :

$$\dot{q}_{med} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \dot{q}(t) dt$$

Questa definizione non dipende dalla scelta dell'istante  $t_0$ .

La grandezza derivata dalla definizione di  $\dot{q}_{med}$  è il **Grado di irregolarità periodica**, che quantifica quanto è irregolare il nostro moto prendendo come riferimento il regime assoluto che ha la regolarità più alta:

$$\delta = \frac{\dot{q}_{max} - \dot{q}_{min}}{\dot{q}_{med}}$$

Tanto maggiore è  $\delta$  quanto più è irregolare il moto.

L'irregolarità eccessiva del regime periodico può causare alcuni problemi, e sono riconducibili a tre principali problematiche:

- Un'elevata irregolarità è associata a elevate accelerazioni (lineari e angolari) dei membri del meccanismo, che comportano elevati carichi inerziali agenti sul meccanismo. In condizioni di funzionamento reali significa sollecitare eccessivamente le coppie cinematiche che assemblano il meccanismo.
- Innescò di oscillazioni dovute ad elevate irregolarità. I carichi inerziali che ne conseguono, in presenza, di flessibilità di organi e accoppiamenti (cedevolezze distribuite o localizzate nel meccanismo), possono innescare oscillazioni e vibrazioni dei membri, le quali possono costituire una non idealità di funzionamento (si discosta dal funzionamento previsto in fase di progettazione), ma anche mettere a repentaglio l'integrità.
- Un'elevata irregolarità del meccanismo può mettere a repentaglio la qualità stessa del compito che la macchina sta svolgendo.

Vengono proposti alcuni esempi di gradi di irregolarità ( $\delta$ ) che siano tollerati in diverse applicazioni:

• macchine sollevamento, pompe e ventilatore	1/20 — 1/30
• macchine per la tessitura o lavorazione carta	1/50 — 1/100
• moto di automobili	1/100 — 1/200
• alternatori	1/300

Se l'andamento della forma d'onda che descrive la velocità della coordinata generalizzata non è troppo assimetrico è spesso comodo scrivere il valore della velocità media come la media tra il massimo e il minimo della derivata:

$$\dot{q}_{med} \approx \frac{\dot{q}_{max} + \dot{q}_{min}}{2}$$

Possiamo ora studiare più a fondo il problema della regolarità di un meccanismo andando a studiare come un meccanismo si comporta in regime periodico.

Supponiamo che le leggi orarie della coordinata libera e delle sue derivate siano note (ad esempio perché abbiamo risolto le equazioni differenziali o perché abbiamo misurato l'andamento temporale di queste tre grandezze), supponiamo anche di conoscere il momento d'inerzia ridotto ( $I^*(q(t)) = I^*(t)$ ).

Una volta noto  $I^*(t)$  e la derivata temporale della coordinata libera possiamo calcolare l'andamento temporale dell'energia cinetica come:

$$E_c(t) = \frac{1}{2} I^*(q(t)) \dot{q}(t)^2$$

Possiamo a questo punto diagrammare l'andamento dell'energia cinetica e il momento d'inerzia ridotto in funzione del tempo: il loro andamento sarà ciclico del tipo rappresentato in figura di periodo uguale a quello della coordinata libera (o eventualmente un suo sottomultiplo).

Il motivo per cui sono stati rappresentati nel modo rappresentato è perché vogliamo intersecare le due curve in un luogo dei punti (diagramma parametrico nel tempo) in cui abbiamo in ascissa il momento d'inerzia ridotto e in ordinata l'energia cinetica.

In questo caso, gli andamento periodici generano una curva chiusa nel diagramma parametrico che può essere interpretata come una ellisse percorsa in senso orario.

Questo diagramma sintetizza in un unico grafico le due grandezze principali e tramite questo possiamo calcolare la grandezza  $\gamma$ , che altro non è che l'angolo sotteso dalla congiungente del generico punto del grafico con l'origine verso l'asse orizzontale.

$$\tan \gamma = \frac{E_c(t)}{I^*(t)} = \frac{\frac{1}{2} I^*(q(t)) \dot{q}(t)^2}{I^*(q(t))} = \frac{1}{2} \dot{q}(t)^2$$

Dato un generico punto  $(E_c(t), I^*(q(t)))$ , la tangente dell'angolo ( $\gamma$ ) è indicativa della metà della velocità al quadrato della coordinata libera, nell'istante che compete al punto considerato.

Richiamando la definizione di  $\delta = \frac{\dot{q}_{max} - \dot{q}_{min}}{\dot{q}_{med}}$ , essendo  $\dot{q}$  una grandezza legata alla pendenza della congiungente del punto con l'origine possiamo associare la pendenza di questa retta con la velocità.

Data un'orbita, come quella descritta nel diagramma in alto a destra, le velocità massima e minima saranno raggiunti nei punti in cui la pendenza della retta è massima o minima ( $\gamma_{max}, \gamma_{min}$ ).

La differenza delle due pendenza è un indicatore dell'escursione di velocità che si ha nel funzionamento della macchina per cui l'orbita è stata tracciata, di conseguenza possiamo già visualizzare il grado di regolarità di una macchina andando a osservare l'escursione di  $\gamma$  rispetto al  $\gamma_{med}$ , ovvero la pendenza della retta passante per l'origine e il centro dell'orbita che descrive il ciclo del meccanismo di riferimento.

Quale può essere una strategia per migliorare la regolarità di questa macchina osservando il suo comportamento nel diagramma di interesse?

La soluzione che è spesso adottata è quella di aggiungere un volano all'albero motore, mantenendo il meccanismo così com'è, in questo modo si aggiunge un momento d'inerzia che va ad alterare i due diagrammi di momento d'inerzia ridotto e energia cinetica.

Proviamo a osservare come sia possibile quantificare il beneficio dell'introduzione di un momento d'inerzia costante sul nostro sistema:

Calcoliamo in primo luogo l'andamento dell'energia cinetica del nostro meccanismo applicando il teorema delle forze vive: sappiamo, infatti, che la variazione di energia cinetica è pari al lavoro esercitato da tutte le azioni esterne al sistema (che sono descritte da  $Q^*$ ) tra due configurazioni generiche.

$$\int_{q_1}^{q_2} Q^*(q) dq = E_{C2} - E_{C1}$$

Possiamo sfruttare questa equazione, in cui l'energia cinetica è scritta in forma di funzione integrale, per trovare quando essa sia stazionaria:

$$\frac{d}{dq} \int_{q_1}^{q_2} Q^*(q) dq = Q^* = Q_m^* + Q_r^* + Q_P^* = 0$$

Si osserva infatti che la funzione integranda contiene i contributi delle forze/coppie motrici, resistenti e dissipative.

Quando tale equazione sarà pari a zero si potrà osservare un punto di massimo relativo o minimo relativo.

Chiamiamo queste configurazioni Q in cui l'energia cinetica assume valore massimo o minimo rispettivamente  $q_{max}$  e  $q_{min}$ .

Possiamo a questo punto riscrivere che:

$$\int_{q_{min}}^{q_{max}} Q^*(q) dq = E_{c\ max} - E_{c\ min} = \frac{1}{2} I^*(q_{max}) \dot{q}_{max}^2 - \frac{1}{2} I^*(q_{min}) \dot{q}_{min}^2$$

Supponiamo ora che la nostra espressione del momento d'inerzia ridotto contenga un termine costante aggiuntivo che abbiamo introdotto nel sistema aggiungendo un volano all'albero motore. Esprimeremo questo concetto nel seguente modo:

$$= \frac{1}{2} (I_{cost}^* + I_{var}^*(q_{max})) \dot{q}_{max}^2 - \frac{1}{2} (I_{cost}^* + I_{var}^*(q_{min})) \dot{q}_{min}^2$$

Osserviamo come da questa relazione sia possibile estrarre una equazione significativa del grado di regolarità del meccanismo in presenza del volano aggiuntivo.

Definiamo  $\Delta$  la quota di escursione di energia cinetica associato all'inerzia costante aggiunta al sistema, essa è possibile calcolarla come:

$$\Delta = \frac{1}{2} I_{cost}^* (\dot{q}_{max}^2 - \dot{q}_{min}^2) = \int_{q_{min}}^{q_{max}} Q^*(q) dq - \frac{1}{2} I_{var}^*(q_{max}) \dot{q}_{max}^2 - \frac{1}{2} I_{var}^*(q_{min}) \dot{q}_{min}^2$$

Ricordiamo che esiste l'espressione approssimata della  $\dot{q}_{med} \approx \frac{\dot{q}_{max} - \dot{q}_{min}}{2}$  e, noto ciò, possiamo scrivere il grado di regolarità del nostro sistema in presenza del momento d'inerzia aggiuntivo costante:

$$\delta = \frac{\dot{q}_{max} - \dot{q}_{min}}{\dot{q}_{med}} \approx \frac{(\dot{q}_{max} - \dot{q}_{min})}{\dot{q}_{med}} \cdot \frac{(\dot{q}_{max} + \dot{q}_{min})}{2 \dot{q}_{med}} = \frac{\dot{q}_{max}^2 - \dot{q}_{min}^2}{2 \dot{q}_{med}^2} = \frac{\Delta}{I_{cost}^* \dot{q}_{med}^2}$$

Questa relazione quantifica il grado di regolarità del sistema una volta che sia stato aggiunto l'inerzia costante e mostra come un'aumento di tale valore aggiuntivo porti ad una diminuzione del grado di irregolarità del nostro sistema.

La cosa può essere visualizzata nel diagramma  $(I^*, E_c)$ , osservando che aggiungendo un'inerzia costante, i grafici dell'energia cinetica nel tempo e del momento d'inerzia ridotto nel tempo vengono aumentati e, di conseguenza, la traiettoria chiusa generata nel piano si allontana dall'origine mantenendo il suo centro sulla stessa retta che passa per l'origine e il centro della traiettoria originale (poiché  $\dot{q}_{med}$  non viene alterato). Tuttavia la nuova orbita descritta vedrà le due pendenza ( $\gamma_{max}$  e  $\gamma_{min}$ ) si saranno avvicinate alla retta di pendenza  $\gamma_{med}$  il ché implica un aumento del grado di regolarità del nostro sistema.

Ovviamente le controindicazioni di questa scelta sono legate al fatto che il sistema soggetto alle stesse azioni motrici e resistenti impiegherà più tempo ad arrivare a regime e richiederà dei tempi transitori più lunghi per arrivare alla condizione di funzionamento presa a riferimento nel grafico.

Inoltre quello che è utile al fine di questo calcolo è l'inerzia del volano ridotta alla coordinata di riferimento q; in particolare in presenza di diversi alberi che hanno diverse velocità di rotazione è opportuno installare, se possibile, il volano sull'albero di velocità angolare maggiore dal momento che l'inerzia ridotta all'albero di riferimento è il momento del volano moltiplicato per il rapporto di velocità al quadrato:

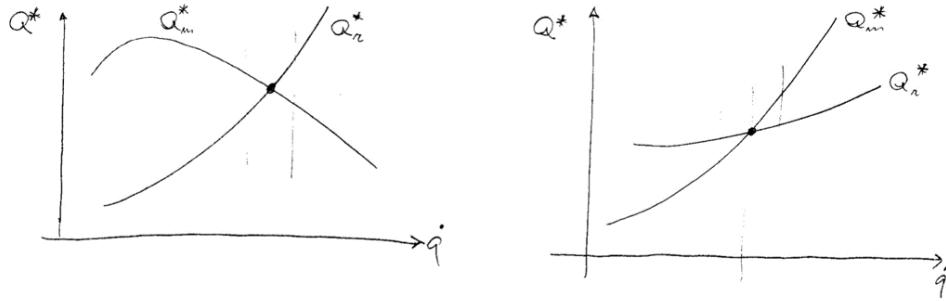
$$I_{vol}^* = I_{vol} \tau^2$$

In questo modo l'installazione del volano sull'albero con velocità angolare maggiore beneficia in termini quadratici del rapporto di velocità tra l'albero in cui è installato e l'albero la cui rotazione è la coordinata generalizzata di riferimento per il calcolo.

## 5.6.2 Stabilità del funzionamento delle macchine

C'è un altro aspetto interessante che caratterizza le condizioni di funzionamento di un sistema meccanico in cui accoppiamo un motore ad un sistema resistente: la stabilità del funzionamento del sistema accoppiato.

Supponiamo di avere un diagramma in cui è presente, in funzione della derivata della coordinata generalizzata ( $\dot{q}$ ), l'andamento del momento generalizzato motore  $\mathbf{Q}_m^*$ , messo a disposizione dal motore alla coordinata  $\dot{q}$ , e resistente  $\mathbf{Q}_r^*$ , che l'utenza richiede alla coordinata generalizzata q.



Si possono presentare diversi casi:

- Il momento motore è una funzione decrescente della coordinata  $\dot{q}$ , perché, ad esempio, è un motore elettrico o a combustione interna in regime di funzionamento normale, e che l'andamento del momento resistente sia una funzione crescente come quella diagrammata a sinistra.

Il punto di funzionamento in cui il sistema funzionerà con velocità angolare costante è individuato dall'intersezione delle due curve in cui il momento motore egualierà quello resistente.

Se le condizioni del nostro sistema sono quelle rappresentate in figura, ovvero in cui la pendenza della curva motrice è negativa e la pendenza della curva resistente è positiva, vale la diseguaglianza:

$$\frac{dQ_m^*}{d\dot{q}} < \frac{dQ_r^*}{d\dot{q}}$$

Si dice che questa configurazione di funzionamento è una configurazione stabile, e di conseguenza il punto di funzionamento è stabile, in quanto, immaginando di perturbarlo, osserviamo che il sistema reagisce cercando di portare il punto di funzionamento al punto di riferimento

Entro i limiti di mantenimento della precedente diseguaglianza il sistema tende ad opporsi a qualsiasi perturbazione che alteri il funzionamento dell'accoppiamento motore-carico caratterizzato da quel punto di equilibrio

- Un'altra situazione è descritta dalla diseguaglianza opposta:

$$\frac{dQ_m^*}{d\dot{q}} > \frac{dQ_r^*}{d\dot{q}}$$

Le due curve possono, ad esempio, essere entrambe crescenti, dove tuttavia la curva motrice ha una pendenza maggiore di quella resistente nell'intorno del punto di riferimento in cui il sistema è in equilibrio.

Immaginando di perturbare il sistema nell'intorno del punto di equilibrio, osserviamo una situazione opposta a quella che si verificava nel caso precedente, per questa ragione tale condizione/sistema è detto instabile.

L'allontanamento dal punto di equilibrio crea uno squilibrio di azioni che promuove l'allontanamento stesso dal punto di riferimento, questo finché si verificheranno le condizioni descritte dall'uguaglianza precedentemente presentata.

### 5.6.3 Componenti meccanici: le coppie cinematiche

Le coppie cinematiche costituiscono degli elementi particolarmente critici dei meccanismi, sono infatti quegli organi che garantiscono l'accoppiamento tra due organi meccanici in movimento relativo, e di conseguenza il loro comportamento deve avvicinarsi il più possibile a quello delle coppie ideali, ovvero garantire il vincolo relativo tra i membri che sono componenti del meccanismo assicurando che la cinematica e la dinamica dello stesso si svolgano secondo le prestazioni di progetto.

Abbiamo già visto che le coppie cinematiche si possono classificare secondo vari criteri:

- Classificazione sulla base del tipo di moto relativo che si realizza all'accoppiamento. Esistono, infatti:

1. **Coppie a strisciamento** quando le superfici relative dei due membri vincolati reciprocamente avviene per strisciamento, ovvero con parti direttamente a contatto e con velocità relative diverse da zero.

Questo può causare una serie di problematiche che vengono limitate dalla presenza di lubrificante: interponendo tra le superfici in moto relativo un fluido con opportune proprietà. Talvolta questo non si fa e si progettano le superfici in maniera tale che possano sostenere le condizioni di esercizio anche in assenza di lubrificante.

2. **Coppie a rotolamento:** il moto relativo tra gli elementi cinematici della coppia è mediato dalla presenza di corpi che rotolando permettono di mantenere in movimento le superfici relative in assenza (idealmente) di strisciamento.

Quindi, si frappongono tra gli elementi cinematici della coppia dei corpi volventi come, ad esempio, sfere, rulli, coni, etc... e questo comporta una serie di vantaggi, ma anche delle implicazioni costruttive e di prestazione della coppia cinematica.

3. **Coppie speciali:** realizzano il moto relativo tra i due organi che devono essere vincolati reciprocamente mediante corpi elastici.

Queste hanno una serie di vantaggi legati all'assenza di discontinuità di materiale (o comunque è presente unicità di comportamento) tra i due corpi vincolati, però permettono una mobilità limitata.

- Classificazione sulla base dei G.d.L. lasciati liberi nel moto relativo tra un corpo e l'altro. Per meccanismi piani esistono:
  1. **Coppie di classe inferiore** o di classe  $c_1$ , ad esempio la coppia rotoidale e la coppia prismatica, chiamate in questo modo in quanto permettono una mobilità relativa tra un corpo e l'altro di 1 G.d.L. (basta una coordinata per descrivere la posizione di un corpo rispetto all'altro).
  2. **Coppie di classe superiore** o di classe  $c_2$ , ad esempio la coppia a camma, che permettono una mobilità relativa dei due corpi vincolati di 2 G.d.L. (sono necessarie 2 coordinate per descrivere la configurazione relativa).
- Classificazione geometrica, che distingue se i contatti degli elementi cinematici della coppia sono lineari o puntiformi. Si focalizzano sul tipo a livello microscopico del contatto tra gli elementi cinematici. Pensiamo ad esempio il contatto tra un cilindro e un piano che è sostanzialmente un segmento, tra una sfera e un piano c'è un contatto che è idealmente un punto.
- Classificazione di natura fisico chimica che si focalizza sulla interposizione di un lubrificante di una natura fluida o solida
- Classificazione dal punto di vista cinematico individuando il tipo di moto relativo tra gli elementi cinematici (strisciamento, rotolamento o presenza di urti).

La meccanica del contatto è quella disciplina che si occupa di analizzare come nascono le interazioni reciproche al contatto con due corpi. Ci sono diverse teorie che si applicano a diversi tipi di contatto e in diverse condizioni al contorno, ma c'è una disciplina specifica che si occupa dei fenomeni che avvengono tra superfici in moto relativo e quindi studiano dei modelli che possano descrivere a diversi livelli (da macroscopico a microscopico) come si realizzano le interazioni al contatto tra due corpi.

Tra gli argomenti di interesse che vengono indagati all'interno della **tribologia** si hanno sia gli studi sull'attrito, ovvero su come nascono e come si comportano le componenti di sforzo di natura dissipativa al contatto tra due superfici in moto relativo, che gli studi sull'usura, ovvero come si generano le particelle di usura e di come le superfici vengano degradate dal proseguire del moto relativo in presenza di specifici carichi tra le superfici in contatto.

Ciò che succede al contatto tra due superfici è un effetto di moltissimi elementi/caratteristiche dei corpi e delle superfici, ad esempio: le proprietà dei materiali che caratterizzano la coppia cinematica sono di fondamentale importanza; si parla dell'effetto dell'elasticità, della plasticità, della curva sforzo-deformazione, dell'isteresi, della durezza, etc...

Tra queste richiamiamo una caratteristica del materiale che è la durezza Brinell, che è una grandezza che caratterizza la durezza del materiale mediante una prova specifica, la quale prevede di forzare una

superficie sferica al contatto con una superficie piana; dopo l'applicazione di un carico (forza  $F$ ) si va a misurare l'area dell'impronta che è rimasta sulla superficie in prova.

La superficie sferica che viene forzata contro la superficie in prova, di conseguenza, lascierà un'impronta che verrà misurata e la durezza Brinell è esattamente il rapporto tra la forza applicata ( $F$ ) e l'area della superficie dell'impronta che è stata generata. ( $HB = F/A$ )

Per vari materiali di interesse ingegneristico, per quanto riguarda le coppie cinematiche, una relazione che è piuttosto comune, anche se un po' approssimata, è che la durezza Brinell  $HB \approx 3\sigma_{ys}$ . Questa relazione ci permette di fare calcoli interessanti sui fenomeni che avvengono al contatto tra due superfici.

Ci sono molte altre proprietà fisico-chimiche che vengono coinvolte nel comportamento del contatto tra due superfici, ad esempio:

- Proprietà termiche: generazione e smaltimento di calore che viene sviluppato localmente al contatto;
- Proprietà chimiche: capacità di trattenere lubrificanti o alterare o garantire alcune proprietà chimiche superficiali coinvolte nel comportamento delle coppie cinematiche;
- Rugosità (finitura della superfici), etc...

Proviamo ad analizzare al livello microscopico, con un modello molto approssimato, quello che succede al contatto tra due superfici.

Supponendo di avere due superfici in contatto si può individuare un'area apparente di contatto, che è la superficie nominale interessata dal contatto; tuttavia queste due superfici, dal punto di vista microscopico, non sono superfici piane (nonostante lo possano apparire), ma quello che si realizza è un contatto tra asperità che caratterizzano entrambe le superfici.

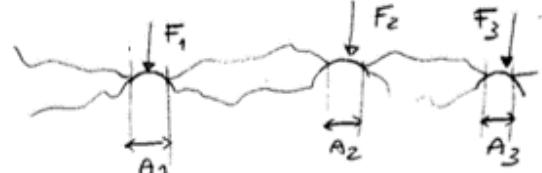


La vera interazione tra le due superfici poste a contatto dipende dalla natura microscopica della finitura delle due superfici coinvolte.

Se guardiamo nel grafico proposto, si osserva che, per loro natura, essendo le superfici reali di natura frattale, l'area reale di contatto è molto minore dell'area apparentemente coinvolta nel contatto: per questo motivo i contatti che sono realizzati a livello microscopico si possono trovare in condizioni locali di sforzo molto maggiore dello sforzo nominale che si può ricavare dal rapporto tra la forza/carico imposto sull'area apparente di contatto.

Quello che succede a livello microscopico può essere una condizione di plasticizzazione anche se la superficie apparente sembra più che sufficiente a garantire un funzionamento in regime elastico del contatto.

Possiamo provare a interpretare i contatti superficiali come una serie di prove Brinell, le quali portano per loro natura il materiale a condizioni di plasticità e quindi in condizioni di subire una deformazione permanente che viene quantificata con l'area  $A$  presente nella definizione della durezza stessa.



Se proviamo a ingrandire la superficie di contatto tra due corpi e interpretare i vari contatti come delle piccole prove Brinell, possiamo scrivere, per ciascuna di esse, che l'area del contatto locale ( $A_i$ ) è pari al rapporto tra la forza esercitata sul contatto locale ( $F_i$ ) e la durezza Brinell ( $HB$ ).

Le forze che si esercitano al contatto tra ciascuna asperità sono forze più piccole della risultante, tuttavia la loro somma è la forza che, dal punto di vista macroscopico, viene esercitata su un corpo contro l'altro.

Dunque, se scriviamo che l'area locale di contatto è approssimabile come:

$$A_i \approx \frac{F_i}{HB}$$

Nell'ipotesi che tutto il materiale sia uniforme e quindi tutte le asperità siano caratterizzate dalla stessa durezza HB, possiamo calcolare l'area reale di contatto come la somma delle singole aree di contatto:

$$A_r \approx \sum_i \frac{F_i}{HB} = \frac{F}{HB}$$

L'area reale si può approssimare come il rapporto tra la forza totale che viene esercitata tra le due superfici e la durezza Brinell; in questo modo si ha una stima dell'area reale di contatto che, secondo questo modello, risulta proporzionale alla forza applicata dall'esterno.

Si tratta chiaramente di un modello approssimato, ma studi più approfonditi confermano che l'area reale di contatto è notevolmente più piccola dell'area apparente fino, ad esempio, ad arrivare a valori di area reale pari a 1/1000 di quella apparente.

Possiamo anche scrivere, osservando la relazione, che l'area reale è il rapporto tra la forza complessivamente applicata e una pressione  $P_m$ , che altro non è che la pressione a cui corrisponde nel materiale più tenero dell'accoppiamento in esame lo stato triassiale al limite della plasticità.

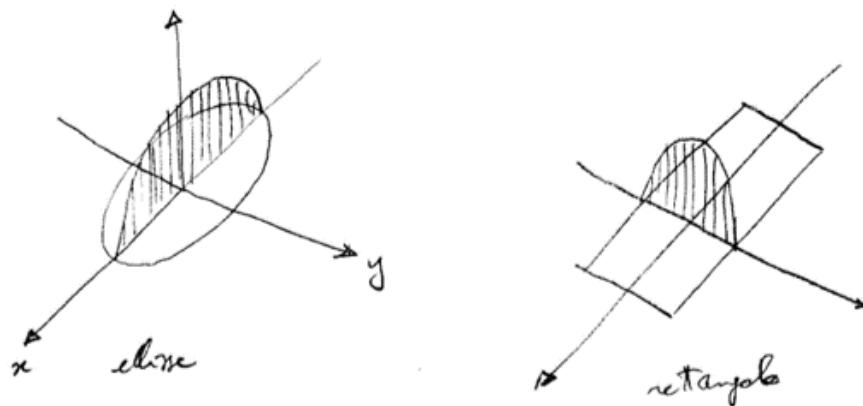
Tale pressione è grossomodo pari alla durezza Brinell.

Abbiamo visto che una possibile classificazione dei contatti è **di natura geometrica**, il che significa che possiamo caratterizzare i contatti tra due corpi sulla base della natura della superficie di contatto ideale e reale.

Ci sono vari modelli per studiare il contatto da questo punto di vista, ma quello più utilizzato è il **modello di Hertz** che si preoccupa di determinare stato tensionale e deformazioni dei solidi in prossimità del punto di contatto nell'ipotesi che tali solidi siano omogenei e isotropi, che le deformazioni siano elastiche (nel limite di elasticità lineare del materiale), che le dimensioni dei corpi siano piccole rispetto ai raggi di curvatura (ovvero che si abbia un'analisi localizzata al punto di contatto).

Tale teoria permette di:

1. Descrivere l'andamento delle pressioni (quindi l'andamento locale degli sforzi sulle superfici di contatto);
2. Trovare la geometria delle superfici di contatto;
3. Mettere in relazione tra loro caratteristiche macroscopiche (come la forza risultante al contatto e la deformazione elastica dei corpi).



Nell'immagine sono riportati due casi di riferimento: il contatto su una superficie ellittica e rettangolare con l'andamento qualitativo delle pressioni sull'area di contatto.

Ci sono per l'appunto i modelli che descrivono lo stato tensionale in termini di tensore degli sforzi; tuttavia ci basta sapere che alla fine è possibile trovare nelle grandezze di interesse, per quanto riguarda lo studio della coppia cinematica, la relazione tra la forza di contatto e gli assi principali dell'ellisse che descrive l'impronta di contatto in funzione della forza stessa di contatto, dei raggi di curvatura dei corpi posti a contatto, del modulo di elasticità e del modulo di Poisson.

Ad esempio nel caso di un contatto sfera-piano la relazione tra la forza ( $F$ ) e il cedimento ( $d$ ) è una relazione non lineare: si osserva che il comportamento tra forza e deformazione locale è descritto dalla legge

$$F = c \sqrt{d^3}$$

A questo corrisponde un comportamento caratteristico del contatto sfera-piano, che può essere utilizzato per descrivere la pressione di corpi volventi o cuscinetti, non lineare che richiede una serie di strategie per

limitarne gli effetti (come ad esempio im precarico dato ai cuscinetti con corpi volventi).

La classificazione dei contatti può avvenire anche sulla base della presenza o assenza di interposizioni di sostanze estranee a quelle dei due elementi cinematici della coppia (classificazione dal punto di vista chimico-fisico).

Distinguiamo dunque tra:

1. Il **contatto diretto**, che avviene nominalmente in assenza di interposizione di sostanze estranee. Nonostante questa assenza di sostanze si possa pensare che sia sempre presente a meno che non si introduca intenzionalmente lubrificante, in realtà non è vero: una superficie metallica è comunque caratterizzata da una serie di strati che separano le due superfici propriamente metalliche, quando esse vengono messe in contatto.

Analizzando dal punto di vista microscopico una superficie metallica partendo dal substrato metallico (dove sono presenti i grani metallici nella loro configurazione nominale) e avvicinandosi alla superficie si osserva uno strato di materiale metallico che è stato incrudito dalla lavorazione metallica che la superficie ha subito.

Le caratteristiche della superficie metalliche vengono alterate rispetto a quello del substrato (lo strato incrudito può essere di uno spesso dell'ordine del micron).

Al di sopra dello strato incrudito è presente, quasi sempre, uno strato di ossido: a causa dell'esposizione all'atmosfera, gran parte dei metalli sviluppa una superficie di ossido di spessore dell'ordine di grandezza del centesimo di micron.

Al di sopra dello strato di ossido molto spesso si osservano altri strati, che sono ad esempio il contaminante (uno strato dell'ordine di grandezza del nanometro, di sostanze contaminanti come grassi o sostanza provenienti dall'atmosfera e dalle manipolazioni subite dal materiale) e gas assorbiti dalla superficie stessa (ossigeno o vapor d'acqua).

2. **Contatti mediati**, in cui viene intenzionalmente interposto il lubrificante a limitare il contatto tra le due superfici. Il lubrificante ha l'effetto di limitare il più possibile l'interazione tra le due superfici in moto relativo.

Diverse possibilità sono disponibili per la lubrificazione delle superfici in moto relativo: la **lubrificazione limite**, che si realizza quando il movimento relativo tra le due superfici non riesce a impedire il contatto tra alcune asperità (nonostante questo l'uso del lubrificante riesce a ridurre l'attrito se confrontato con la situazione di contatto diretto); la **lubrificazione fluida**, che impedisce il contatto tra le superfici.

Per quanto riguarda la lubrificazione fluida esistono due possibilità:

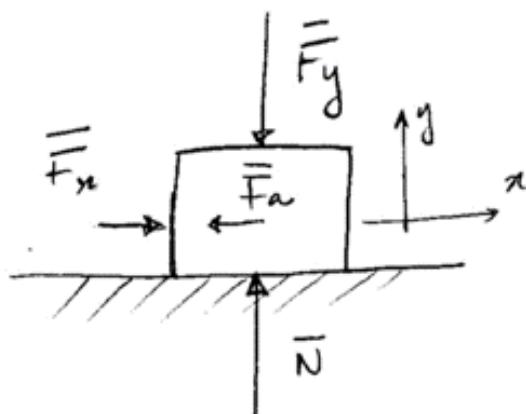
- a) La lubrificazione idrodinamica, in cui lo strato di lubrificante riesce a mantenere separate le due superfici in virtù del moto stesso delle due superfici (il moto relativo delle due superfici promuove la loro separazione grazie alla presenza del lubrificante);
- b) La lubrificazione idrostatica, in cui la separazione tra le due superfici è promossa dall'immissione forzata dell'olio o lubrificante. Il lubrificante viene immesso con una pressione tale da garantire la separazione delle due superfici, limitando (o annullando del tutto) le interazioni indesiderate tra le stesse.

## 5.7 Lezione 15-04 – Daniele Bortoluzzi

Proseguiamo a parlare delle coppie cinematiche nell'ambito dei componenti meccanici.

### 5.7.1 Richiamo sui vincoli

Un vincolo è un dispositivo che limita i G.d.L. di un corpo tramite l'esercizio di forze. Un vincolo ideale, tuttavia, esercita delle forze/azioni anche lungo i G.d.L. che si presuppone siano stati lasciati liberi e questo è legato ai fenomeni di attrito che cerchiamo di formalizzare di seguito:



Consideriamo due corpi a contatto le cui azioni saranno descritte prendendo un S.d.R. i cui assi corrispondono a:  $x$  la direzione in cui il corpo dovrebbe essere libero di muoversi,  $y$  la direzione vincolata dal vincolo.

Osserviamo che pur essendo il vincolo in grado di equilibrare, mediante la componente  $N$  di reazione vincolare, le forze esterne  $F_x$  e  $F_y$ , nella direzione in cui il corpo dovrebbe essere libero di muoversi, il vincolo esercita un'azione/forza non nulla.

Quello che si osserva sperimentalmente è che la componente  $F_y$  è equilibrata da  $N$ , mentre la presenza di una componente  $x$  ( $F_x$ ) non sempre è in grado di causare il movimento del corpo.

Questo è un fenomeno che si realizza a soglia: fintanto che questa componente di forza non supera una certa soglia, il corpo rimane fermo (il vincolo esercita una forza sufficiente a mantenere il corpo in quiete anche lungo la direzione  $x$ ).

La forza che il vincolo esercita per equilibrare l'azione esterna  $F_x$  è detta **forza d'attrito statico**.

Una volta superato un certo valore soglia, il corpo invece si muove.

Si dice che finché non si raggiunge la condizione di movimento la reazione vincolare che il vincolo esercita non è nota, ed è indeterminata all'interno di un cono, detto **cono di attrito**, la cui ampiezza è anche definita **angolo di attrito**.

Ricordiamo che la reazione vincolare finché non vi è movimento è indeterminata nel senso che non sappiamo quale sia la forza esercitata dal vincolo.

Questo fenomeno a soglia si rivela sperimentalmente proporzionale alla componente di reazione vincolare normale (ovvero nella direzione ideale che si sta realizzando), cioè la forza massima che il vincolo può esercitare nella direzione in cui non dovrebbe farlo è proporzionale alla forza che lo stesso vincolo sta esercitando nella direzione ideale di funzionamento del vincolo.

Ha senso dunque definire il **coefficiente di aderenza** (o attrito statico)  $f_a$ , che è calcolato come il rapporto:

$$f_a = \frac{F_{a,s}}{N}$$

dove:

- $F_{a,s}$  è la massima forza che il vincolo può esercitare nella direzione che dovrebbe lasciare libera
- $N$  è forza che il vincolo esercita nella direzione in cui si presuppone che reagisca

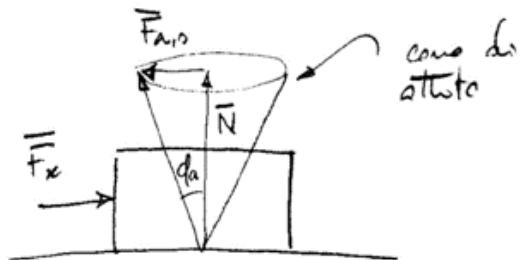
Il fenomeno di aderenza descrive il fatto che il corpo e il vincolo rimangono in equilibrio entro le condizioni descritte dal cono di attrito statico.

Un'altra grandezza di interesse è l'angolo di aderenza:

$$\varphi_a = \arctan \frac{F_{a,s}}{N} = \arctan f_a$$

Quando la soglia di forza è superata, sappiamo che il corpo comincia a muoversi e le condizioni che si realizzano al contatto cambiano: la resistenza che il corpo incontra nella direzione in cui avviene il moto non è più quella che si era realizzata in condizioni statiche. La soglia varcata per produrre il moto del corpo vincolato non è più valida come riferimento per la forza che si oppone al moto.

In particolare, la forza che ora si oppone al moto risulta più bassa della forza di soglia varcata per causare il moto: le condizioni che si hanno in moto relativo sono diverse e richiedono la definizione di un coefficiente di attrito (**radente o cinetico**) dedicato a questa situazione.



In movimento la  $F_a \neq F_{a,s}$ , ma è un nuovo valore  $F_{a,c} (< F_{a,s})$ . Il nuovo coefficiente di **attrito radente o cinetico** è calcolato come:

$$f_c = \frac{F_{a,c}}{N} \quad ; \quad f_c < f_a$$

Sempre relativamente alle condizioni cinematiche (ovvero di strisciamento relativo) definiamo un nuovo angolo di attrito:

$$\varphi_c = \arctan \frac{F_{a,c}}{N} = \arctan f_c$$

Possiamo identificare ora due coni che caratterizzano le condizioni di interazione tra corpo e vincolo che risultano essere coassiali (con asse la normale alla superficie di vincolo), e il cono di attrito cinetico è più stretto del cono di attrito statico.

Nelle condizioni cinematiche abbiamo la conoscenza dell'attrito perché sappiamo che questo è esercitato dal vincolo nella direzione opposta al moto, cosa che invece non sapevamo quando il sistema era in equilibrio in quanto non era nota a priori la forza che il vincolo sta esercitando.

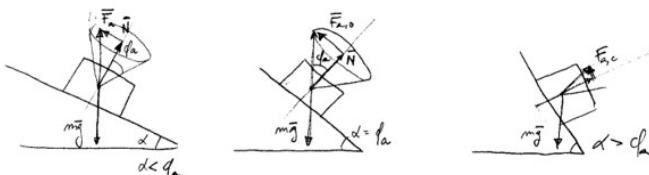
In sintesi:

In condizioni statiche :  $F_a \leq f_a N$

In condizioni limite :  $F_a = F_{a,s} = f_a N$

In condizioni cinematiche :  $F_a = F_{a,c} = f_c N \quad f_c < f_a$

Motivo per cui può essere utile definire l'angolo di attrito, e non solo il coefficiente di attrito, è mostrato nei tre casi presentati di seguito:



Supponendo di avere un corpo appoggiato su un piano inclinato e al contatto tra i due è presente un certo attrito:

- Quando l'angolo di inclinazione del piano inclinato è inferiore all'angolo di aderenza osserviamo che l'unica forza esterna presente (la forza peso), giace nel cono di attrito e di conseguenza la reazione vincolare che il vincolo può esercitare è descritta da un cono che contiene la forza peso del corpo.
- Aumentando l'inclinazione del piano inclinato si raggiungerà una condizione in cui l'angolo  $\alpha$  raggiunge l'angolo di aderenza e la forza peso del corpo viene equilibrata da una forza vincolare che giace esattamente sul cono di attrito statico. (Condizione limite in cui il vincolo può ancora garantire l'equilibrio, ma come condizione limite).
- Aumentando, anche di poco, l'inclinazione del piano inclinato osserviamo che la forza che il vincolo può esercitare non è più sufficiente a equilibrare la forza esterna, quindi si avrà moto incipiente. La nuova interazione al contatto sarà descritta dal cono di attrito dinamico.

Approfondiamo cosa succede nell'istante di transizione tra quiete e moto: sappiamo, infatti, che il sistema è in quiete fino a che la forza tangenziale applicata è all'interno del valore soglia dettato dalla condizione di aderenza tra i due corpi.

Se pensiamo di superare questo valore limite, raggiungendo le condizioni che promuovono il moto del sistema possiamo scrivere l'equazione differenziale che governa il moto del corpo vincolato in questa transizione:

$$m \ddot{x} = f_a P - f_c P = (f_a - f_c) P$$

dove:

- $f_a P$  è la forza che stiamo applicando nell'istante in cui varchiamo la soglia (quindi sarebbe questo valore più un infinitesimo che però trascuriamo)
- $f_c P$  è la forza che si oppone al superamento della soglia

Possiamo osservare la presenza di uno squilibrio netto di forza lungo la direzione del moto che è quello che fa varcare la condizione di aderenza e porta il sistema in movimento.

In conclusione all'istante in cui il sistema varca la condizione soglia di equilibrio, la forza che si oppone al moto istantaneamente cala al valore  $f_c P$  e quindi la forza che stiamo applicando ha un certo eccesso rispetto alla forza che si oppone al moto.

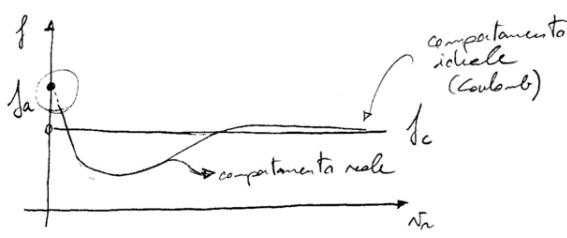
Se la forza che applichiamo è ancora  $f_a (P + \text{infinitesimo})$  il sistema si trova ad accelerare con un'accelerazione pari a :

$$\ddot{x} = (f_a - f_c) \frac{P}{m}$$

Quello che possiamo fare, se ci interessa mantenere il moto del sistema a velocità costante, è ridurre la forza che stiamo applicando dall'esterno al valore  $f_c P$  in quanto strettamente sufficiente a mantenere il sistema in moto senza accelerazione, quindi equilibrando la forza resistente dettata dall'attrito cinetico.

Riducendo ulteriormente la forza al di sotto di tale valore, si avrà un eccesso di forza frenante e la legge del moto prevederà un'accelerazione negativa che porterà il sistema a fermarsi nuovamente; a quel punto si ripartirà con una condizione di aderenza che deve essere nuovamente varcata per rimettere in moto il sistema.

Il modello che è stato descritto è un modello semplificato di Coulomb che consiste in un'approssimazione idealizzata di un comportamento molto più complesso:



Il coefficiente di attrito  $f$  definito come forza di attrito fratto la componente normale di reazione vincolare è una funzione della velocità di strisciamento che non si comporta esattamente come abbiamo modellato: il nostro modello prevede che fintanto che  $v_r = 0$  il coefficiente  $f = f_a$ ; nel momento in cui la velocità sia diversa da zero, tale coefficiente scatta istantaneamente  $f = f_c$  che rimane costante per ogni valore della velocità di strisciamento.

Nella realtà, invece, si ha che l'andamento di questo coefficiente  $f$  in funzione della velocità è inizialmente decrescente, può poi presentare una parte nuovamente crescente e avvicinarsi al valore  $f_c$ , che noi associamo in maniera univoca alle condizioni cinematiche.

Il modello che abbiamo seguito fino ad ora per descrivere l'interazione di due corpi a contatto (ovvero con aderenza o strisciamento relativo) è il modello di Coulomb, che è un modello fenomenologico: non si preoccupa di descrivere il fenomeno dal punto di vista microscopico, ma si focalizza sulla descrizione delle componenti risultanti di forza, che però nascono da dei fenomeni microscopici talvolta molto complessi.

Il modello Coulombiano arriva alla definizione di un coefficiente di attrito cinetico definito come il rapporto tra la componente di reazione vincolare tangenziale ( $T_c$ ) e la componente normale  $N$ . Alcune semplificazioni vengono proposte dal modello di Coulomb:

- Il coefficiente d'attrito  $f_c$  non dipende da:
  1. Il carico normale  $N$ : il rapporto  $f_c$  infatti è una costante;
  2. La velocità relativa tra i corpi (velocità di strisciamento);
  3. L'area apparente delle superfici a contatto;
- Il coefficiente d'attrito  $f_c$  dipende da:
  1. La natura dei materiali a contatto;
  2. Lo stato delle superfici (rugosità, finitura superficiale, pulizia e contaminazione);

La ricerca in questo campo ha portato delle conclusioni un po' diverse dal modello Coulombiano che estendono e rendono più efficace il modello di attrito. L'attrito infatti dipende da:

1. La natura e le caratteristiche delle superfici a contatto hanno una forte influenza sull'attrito
2. Lo stato delle superfici hanno una forte influenza sull'attrito
3. La temperatura
4. La pressione di contatto governata dall'area apparente (più che dall'area di contatto)

5. La velocità di strisciamento
6. Il tempo di contatto

che il modello Coulombiano non considera.

Secondo un'interpretazione più moderna dei fenomeni di attrito la componente tangenziale, che giace nel piano del vinolo, è somma di alcuni contributi che nascono a livello microscopico: più in particolare la componente **T** può essere scritta come somma di 4 contributi principali.

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

Vediamo brevemente il comportamento di ciascuno di questi contributo all'attrito totale che si verifica tra le due superfici.

1. **T<sub>1</sub>** è il contributo legato alla rottura delle microgiunzioni.

Se riprendiamo il modello di contatto tra due superfici a livello microscopico sappiamo che il contatto avviene tra delle asperità che costituiscono una frazione piuttosto piccola dell'area apparente di contatto. In queste asperità a contatto reciproco nascono delle microgiunzioni: il materiale ricrea la continuità e quindi crea delle saldature che si oppongono al movimento relativo di un corpo rispetto all'altro.

Se proviamo a proporre un modello semplificato di questo fenomeno possiamo scrivere che la forza di attrito che nasce dall'esigenza di rompere le microgiunzioni ( $T_1$ ) può essere espressa come la somma della resistenza a taglio delle microgiunzioni stesse.

$$T_{1,i} = \tau_s A_i$$

dove:

- $\tau_s$  è la sollecitazione a taglio che porta alla rottura della microgiunzione (Forza/superficie). Se pensiamo che il materiale sia uniforme sulla superficie di contatto la  $\tau_s$  è comune a tutti gli i-esimi contributi e può essere raccolta nella sommatoria.
- $A_i$  è la superficie i-esima che si realizza alla saldatura/giunzione tra due asperità

Il valore di sollecitazione complessivo:

$$T_1 = \sum_i T_{1,i} = \tau_s \sum_i A_i = \tau_s A_r$$

Sappiamo anche che l'area reale  $A_r$  è calcolabile come la forza normale alla superficie fratto la durezza Brinell ( $A_r = F/HB$ ), che risulta essere una discreta approssimazione dell'andamento dell'area reale.

Facendo tale espressione si trova che:

$$T_1 = \frac{\tau_s}{HB} F$$

Questa relazione, seppur in maniera approssimata ci propone la proporzionalità tra  $T_1$  (ovvero lo sforzo per la rottura delle microgiunzioni) e  $F$  (ovvero la forza normale complessivamente sopportata dal contatto a strisciamento).

Si può calcolare, a questo punto, il coefficiente di attrito cinetico come:

$$f_c = \frac{T_1}{F} = \frac{\tau_s}{HB}$$

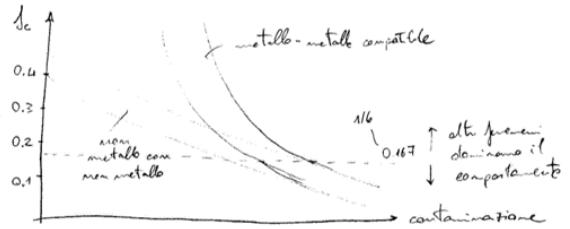
Per i metalli esistono delle relazioni approssimate che legano queste grandezze alla  $\sigma_{ys}$ :  $\tau_s \approx 0.5\sigma_{ys}$  e  $HB \approx 3\sigma_{ys}$ . Questo porterebbe il valore atteso di  $f_c$  ad essere pari a 1/6.

Si osserva sperimentalmente però che questo valore non è seguito nemmeno dai metalli da questo modello predittivo, in quanto ci sono alcune condizioni che il modello ha trascurato, ad esempio: al contatto tra due superfici si frappone una serie di contaminanti che sono quasi sempre presenti e dipendono quasi sempre dalla lavorazione o manipolazione delle superfici.

Ci sono una serie di proprietà locali del materiale che sono differenti rispetto alle proprietà del metallo prese a riferimento per il calcolo.

Quello che ci si attende è che all'aumentare del livello di contaminazione, l'area apparente di contatto rimane grosso modo la stessa, ma quello che cambia è la resistenza a taglio della giunzione ( $\tau_s$ ).

Dal punto di vista sperimentale osserviamo infatti che il coefficiente  $f_c$ , è fortemente dipendente dalla contaminazione: al diminuire della contaminazione in generale aumenta  $f_c$  sia per i materiali metallici che non; all'aumentare della contaminazione il comportamento dei materiali metallici e non metallici tende a convergere.



2.  $T_2$  è il contributo legato alla deformazione delle asperità.

Essa rappresenta la forza necessaria per provocare la deformazione anelastica delle asperità che localmente, singole coppie di asperità, si verifica: il materiale si distribuisce e nel fare ciò assorbe dell'energia.

3.  $T_3$  è il contributo legato al taglio e all'asportazione delle asperità. La differenza con  $T_2$  è che in questo caso ci si riferisce a quelle asperità che a causa del moto relativo vengono tagliate e asportate: il meccanismo non è più solo una ridistribuzione locale del materiale, ma anche la creazione di nuova superficie a cui è associata una forma di energia che deve essere fornita al sistema.
- Tale meccanismo inoltre può prevedere la formazione di corpi terzi rispetto ai due corpi nominalmente presenti al contatto strisciante.

4.  $T_4$  è il contributo legato al meccanismo di solcatura.

Esso è connesso alla deformazione elastica del materiale, ma in questo caso non più a livello microscopico, ma a livello macroscopico, con una scala di spostamenti che sia confrontabile con l'entità dello spostamento relativo tra le due superfici.

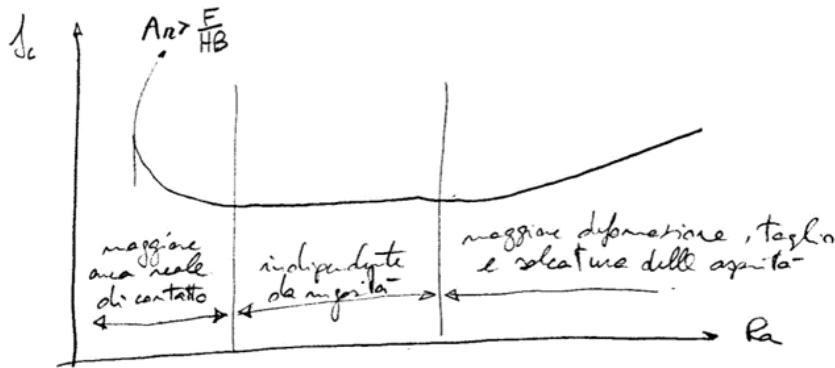
### 5.7.2 Principali fattori che influenzano l'attrito

Senza andare nel dettaglio a livello microscopico ci sono delle conclusioni abbastanza generali che si possono trarre e descrivere anche solo con dei grafici

#### 1. Rugosità superficiale:

Si verifica sperimentalmente che lo stato di finitura delle superfici ha una certa influenza sul coefficiente di attrito e, prendendo la rugosità come parametro che quantifica il livello di finitura superficiale, bassi valori di rugosità implicano superfici dalla finitura molto spinta mentre alte valori di rugosità indicano superfici molto grotte.

Quando la finitura è molto spinta si osserva che il coefficiente di attrito cinetico tende ad aumentare e questo è dovuto al fatto che livelli di finitura alti portano ad aumentare l'area reale di contatto rispetto al valore ipotetico quantificato come il rapporto tra la forza normale alla superficie di contatto e la durezza Brinell ( $A_r = F/HB$ ).



L'aumento dell'area reale di contatto promossa dal fatto che lo stato superficiale è molto rifinito porta ad aumentare il coefficiente di attrito rispetto a questo valore di riferimento.

È presente un range intermedio di rugosità per il quale il coefficiente di attrito cinetico è in grosso modo indipendente dalla rugosità: non sono presenti variazioni significative dei fenomeni che abbiamo elencato rispetto alla rugosità stessa.

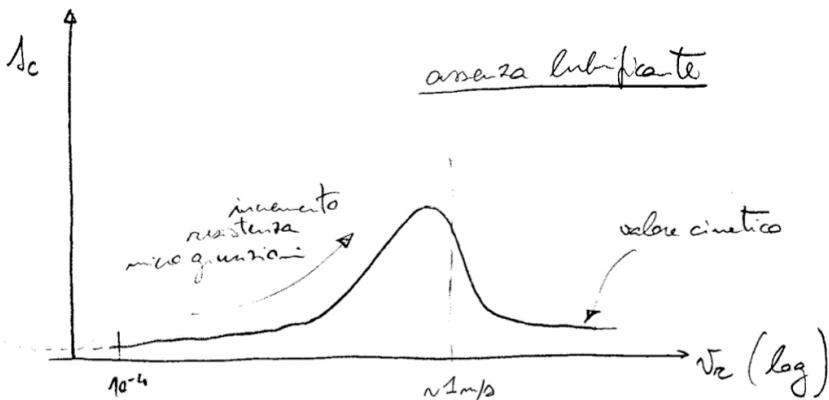
Tuttavia, superata una certa soglia, la rugosità torna ad influire sul coefficiente di attrito: in particolare aumentando la rugosità ciò che si ottiene è che si ha un aumento del coefficiente di attrito. Si fanno infatti a potenziare quei fenomeni di deformazione delle asperità, taglio delle asperità e solcatura.

Tanto più grezza la superficie tanto più si ha che si creano interazioni di tipo anelastico tra la superficie e corpi esterni alla sola coppia di superfici nominali: questo porta ad un potenziamento dell'interazione tra le due superfici secondo questi meccanismi e un conseguente aumento del coefficiente di attrito cinetico.

## 2. Velocità relativa:

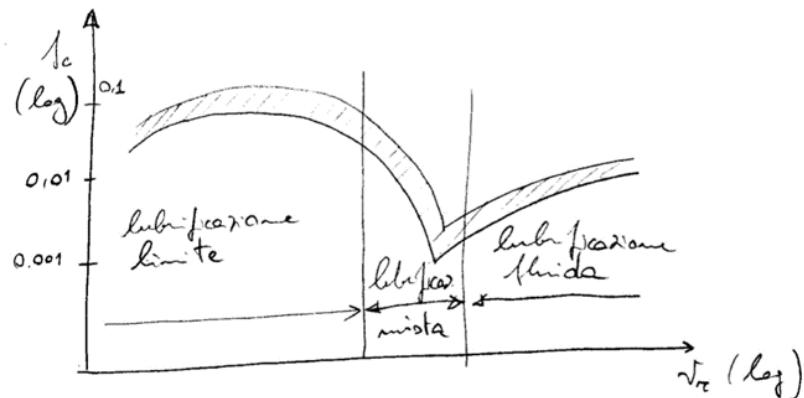
Sappiamo che nel modello semplificato, è presente un coefficiente di attrito statico che vale per strisciamento nullo e un passaggio a coefficiente di attrito cinetico che vale per velocità diverse da zero.

Nella realtà tale transizione avviene in un intervallo di velocità molto ristretto dopodiché si ha un comportamento del coefficiente di attrito cinetico che è più complesso di quanto si evidenzia nel modello di Coulomb: in particolare si ha che per velocità di trasciamento molto piccole il coefficiente di attrito tende ad aumentare (si pensa che questo sia legato al fatto che le microgiunzioni presentano una resistenza crescente in questo range di velocità con la velocità stessa); si raggiunge un valore di massimo del coefficiente di attrito cinetico e un calo del coefficiente stesso che porta il suo valore a quello assunto come riferimento attorno a velocità di trasciamento del metro al secondo.



Si è quindi realizzata la transizione tra attrito statico e cinetico e da questo punto in poi è più corrispondente alla realtà il modello semplificato di Coulomb (in condizioni di assenza di lubrificante).

Se invece la coppia cinematica è lubrificata (inserimento di lubrificante al contatto tra i due corpi), si parla di lubrificazione idrodinamica: il lubrificante in questa condizione è interposto in maniera passiva tra i due corpi e viene trascinato in movimento, dove si crea una pressione al meato fluido che promuove la separazione delle due superfici limitando il contatto diretto.



A seconda della velocità relativa tra i due corpi questa interposizione di lubrificante può essere più o meno efficace: nel grafico proposto viene rappresentato l'andamento del coefficiente di attrito cinetico in funzione della velocità di strisciamento in presenza di lubrificante.

Con valori di velocità di strisciamento basse si parla di **lubrificazione limite**: basse velocità non permettono la creazione di uno strato di lubrificante che separi completamente i due corpi per cui non si riesce a evitare il contatto tra i due materiali. Questo porta il coefficiente di attrito ad assumere valori relativamente elevati.

Quando la velocità di strisciamento aumenta viene promosso l'aumento di pressione dello strato di lubrificante, il che comporta l'aumento della separazione dei due corpi. Si passa da una lubrificazione limite ad una **lubrificazione mista**, in cui si riesce a separare i due corpi in una certa misura e il coefficiente di attrito diminuisce raggiungendo il suo valore minimo.

Aumentando ulteriormente la velocità, la pressione del fluido è sufficiente a mantenere la separazione tra le due superfici, però cominciano a entrare in gioco fenomeni di dissipazione all'interno del fluido: si osserva che il coefficiente di attrito in regime di **lubrificazione fluida**, tende ad aumentare non più per le caratteristiche di interazione tra i materiali, ma per le caratteristiche di viscosità del fluido lubrificante.

L'andamento decrescente del coefficiente di attrito provoca un comportamento dinamico dello **stick-slip**: il moto avviene per continuo passaggio dalla situazione di aderenza a quella di strisciamento; questo comportamento è caratteristico delle basse velocità di strisciamento. All'aumentare della velocità si entra in una regione in cui il coefficiente di attrito non è più decrescente, ma è crescente rispetto alla velocità e questo porta alla cancellazione di questo fenomeno tipico delle coppie cinematiche e degli accoppiamenti freno-pastiglia.

### 3. Tempo di contatto (in assenza di movimento)

Consiste nel tempo di assenza di movimento alla coppia cinematica. Supponiamo di avere un sistema composto da due corpi tra i quali è presente dell'attrito, e che sia mantenuto a velocità costante il movimento di un corpo rispetto all'altro. Sappiamo che in questa condizione la forza necessaria ad applicare è pari al coefficiente di attrito cinetico per la componente di normale (e quindi una forza tangenziale nota e costante).

Supponiamo a questo punto di arrestare il sistema e mantenersi in quiete per un certo intervallo di tempo: la forza tangenziale inizialmente diminuisce, si porta a zero quando il sistema raggiunge la quiete, per far ripartire il sistema (se l'intervallo di tempo/d'arresto è piuttosto basso) è sufficiente

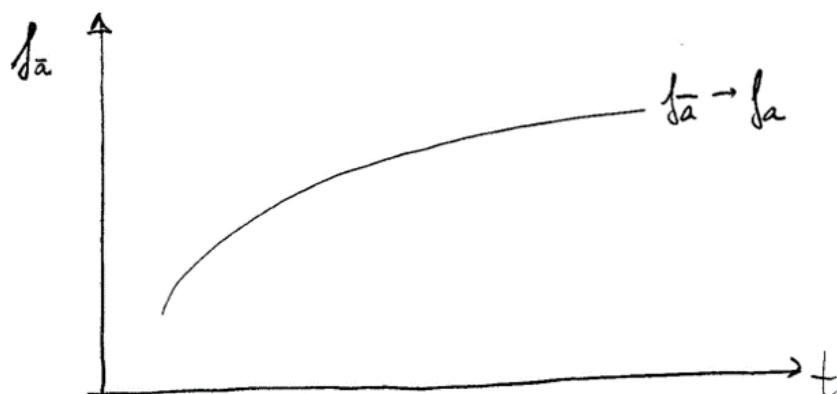
far risalire il valore di forza tangenziale al valore che manteneva il sistema in movimento in condizioni cinetiche.

Non è necessario quindi raggiungere il valore del coefficiente di aderenza per la componente normale di forza, ma è sufficiente raggiungere il valore del coefficiente di attrito cinetico per la componente normale di forza.

Supponiamo di ripetere l'esperienza fermandoci per valori dell'intervallo di tempo maggiori: per far ripartire il sistema, sarà necessario far aumentare la forza  $T$  tangenziale, fino ad un valore che non sarà più  $T = f_c N$ , ma superiore. Sarà, di conseguenza, necessario che il rapporto  $T/N$  raggiunga un valore  $f_{\bar{a}}$  leggermente superiore a  $f_c$  che caratterizzava il moto del sistema in condizioni stazionarie.

Maggiore è il tempo di arresto più il valore di soglia da varcare per riportare il sistema in movimento aumenta.

Il coefficiente di aderenza può essere interpretato come il limite di  $f_{\bar{a}}$  per un tempo di arresto infinitamente lungo: in un diagramma di  $f_{\bar{a}}$  con il tempo osserviamo che tale coefficiente ha un valore crescente che tende asintoticamente al valore del coefficiente di aderenza.



Si ritiene che questo sia causato dal fatto che una volta che il sistema si arresta le microgiunzioni non si creano immediatamente, ma è un processo che richiede del tempo; quando il tempo di arresto è inferiore al tempo caratteristico che governa la formazione di queste giunzioni la fermata non ha avuto nessuna influenza sulla situazione di contatto a livello microscopico e il sistema può ripartire senza l'esigenza di rompere microgiunzioni aggiuntive che si sono formate in più rispetto alla normale condizione cinetica.

Se invece il tempo di permanenza in quiete è sufficientemente più grande del tempo caratteristico di formazione delle microgiunzioni il sistema ha cambiato stato e ha raggiunto le condizioni di aderenza. Tra questi due casi limite sono presenti tempi di arresto intermedi che portano la condizione di funzionamento in regime intermedio.

#### 4. Pressione di contatto e area apparente di contatto:

Sappiamo che l'area apparente di contatto è poco significativa e ciò che effettivamente conta per il meccanismo di creazione e rottura delle microgiunzioni è l'area reale. Il modello che avevamo trovato ci suggeriva che l'area reale fosse proporzionale alla forza normale alla superficie di contatto (dove il fattore di proporzionalità era l'inverso della durezza Brinell) e questo rapporto moltiplicato per la  $\tau$  di rottura delle micro-giunzioni descriveva bene la proporzionalità della forza d'attrito nei confronti della forza normale.

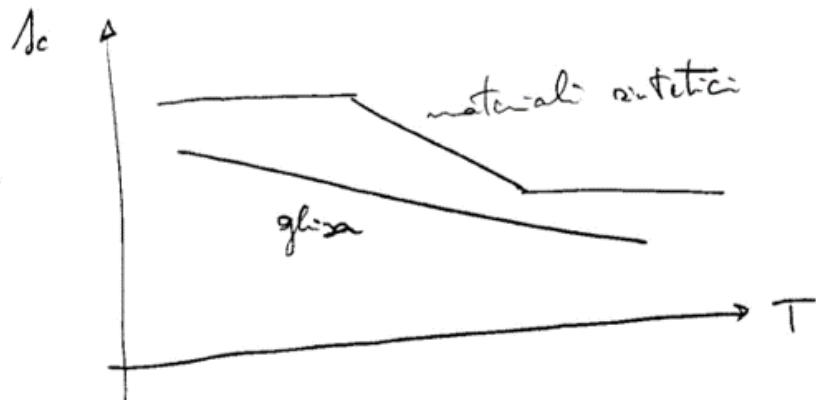
Questo modello, tuttavia, ha dei limiti e si riscontra che quando le superfici sono particolarmente lisce il coefficiente di attrito sembra dipendere dall'area apparente e quindi anche la forza d'attrito dipenderà da essa secondo una relazione crescente dell'area apparente di contatto.

Una questione analoga si rileva anche per la pressione: si osserva che nelle operazioni di laminazione il coefficiente di attrito risulta sensibile alla pressione di contatto nonostante il modello di Coulomb non prevede dipendenza da area e pressione, ma solo dalla forza normale di contatto.

### 5. Temperatura

Si osserva che la temperatura ambientale ha una certa influenza sul coefficiente di attrito: da un lato questo avviene perché la temperatura influenza le proprietà meccaniche dei materiali ed è quindi normale che l'attrito ne venga influenzato di conseguenza (cfr. localmente la temperatura può arrivare a valori elevati portando alla riduzione della  $\tau_s$  più di quanto aumenta l'area reale di contatto, con conseguente riduzione del coefficiente di attrito).

Diverse categorie di materiali si comportano in maniera diversa: nel grafico riportato ( $T$ ,  $f_c$ ) i materiali sintetici, in generale, hanno un andamento non univoco (ci possono essere dei regimi di temperatura in cui il coefficiente di attrito cinetico è pressoché costante ad altri intervalli di temperatura in cui tale coefficiente è decrescente).



Un caso particolare è quello della ghisa (materiale spesso utilizzato per fare i dischi freno): il comportamento della ghisa è caratterizzato da un calo del coefficiente di attrito cinetico rispetto alla temperatura; tanto più il materiale è caldo tanto più è basso l'attrito che riesce a provocare.

Se si pensa alla sua applicazione nei freni a disco, questa caratteristica risulta essere un limite tecnologico del sistema perché il surriscaldamento dei freni comporta una perdita di efficienza direttamente legata al calo del coefficiente di attrito cinetico.

#### 5.7.3 Usura

L'**usura** è un fenomeno di perdita di materiale da parte delle superfici che si trovano in moto relativo uno con l'altro e che è necessario tenere conto per eseguire la manutenzione della coppia cinematica e prevederne la durata o anche per poterla progettare in maniera corretta.

Ci sono diversi meccanismi che promuovono l'usura al contatto tra superfici strisciante:

- **Usura adesiva:** al contatto tra due superfici si creano delle microgiunzioni e quindi delle microsaldate che tendono a ricreare la continuità del materiale tra i due corpi. Mantenendo in movimento con una certa forza  $T$  le due superfici si crea una continua rottura e riformazione di queste microgiunzioni, in particolare alla rottura di esse si possono creare delle **particelle di usura**, ovvero dei corpi microscopici si staccano dalle superfici che possono essere reintegrati in una delle due superfici oppure eliminati dal lubrificante.

È tuttavia importante tenere a mente che le dimensioni caratteristiche delle particelle di usura dipendono dalle proprietà del materiale; tendenzialmente quando il materiale è molto duro (come un ossido) le dimensioni possono essere dell'ordine del micron, quando invece il materiale delle superfici è un metallo tenero (come il piombo) le dimensioni di queste particelle possono raggiungere anche il centinaio di micron.

Quando si progetta la coppia cinematica è fondamentale tenerne conto in quanto è opportuno dimensionare in maniera opportuna la lubrificazione di queste superfici, ma anche dimensionare l'accoppiamento / gioco che si lascia tra le superfici. Lasciare giochi troppo ristretti quando le particelle di usura sono troppo grandi può addirittura essere controproducente.

- **Usura abrasiva:** usura causata dalla presenza di particelle di caratteristiche diverse da quelle dei substrati in particolare si tratta di particelle più dure che possono essere sia endogene (ovvero intrinseche ai due corpi in moto relativo) o esogene (ovvero particelle terze rispetto alle due superfici a contatto).

Particelle dure possono essere ad esempio inclusioni di ossidi oppure anche materiale del substrato con caratteristiche meccaniche alterate dall'incrudimento oppure differenze sostanziose tra la durezza dei due materiali.

Questi due processi di usura a 2 o 3 corpi comunque si basano sulla presenza di caratteristiche del materiale coinvolto nel meccanismo particolarmente alterate e efficaci nel promuovere l'esportazione di materiale.

- **Usura erosiva o erosione:** legato al fatto che particelle estranee alle due superfici possono provocare l'esportazione di materiale in virtù della loro stessa velocità di impatto e quindi di erodere le due superfici per impatto con le superfici stesse

- **Usura corrosiva:** legata alla degradazione delle superfici per azione meccanica e chimica combinate. Il tipico esempio è quello che l'azione meccanica tende a rimuovere gli ossidi che normalmente tenderebbero a proteggere le superfici dall'usura (avendo caratteristiche meccaniche particolarmente elevate), l'azione protettiva viene a mancare quando l'ossido è rimosso e il materiale sottostante si ritrova esposto al meccanismo di usura.

- **Usura per fatica:** esistono spesso all'interno dei metalli dei danneggiamenti/cricche/cavità che tendono a propagarsi se sottoposti a carichi alterni. La propagazione di queste imperfezioni può arrivare a produrre un distacco di materiale per sfogliatura.

Questi danneggiamenti sono spesso promossi da inclusioni, precipitati e qualunque alterazione della continuità del materiale metallico. Anche questo meccanismo combinato con gli altri può promuovere la perdita del materiale da parte delle superfici.

C'è un'ipotesi che permette di fare un calcolo approssimato del volume complessivo delle particelle di usura generate a un certo accoppiamento strisciante: l'**Ipotesi di Raye**.

Essa consiste in un'ipotesi molto semplificativa che si trova a descrivere in maniera sufficientemente accurata per calcoli preliminari condizioni di usura dominate da fenomeni adesivi e abrasivi.

Se ci interessa avere una descrizione approssimata del volume complessivo delle particelle di usura quando ci siano fenomeni adesivi e abrasivi rilevanti al contatto, si esegue un calcolo del seguente tipo:

Sappiamo che il rapporto tra la forza normale (con cui forziamo il corpo in movimento sul corpo fisso) e la durezza Brinell è l'area reale di contatto.

Supponiamo che una frazione dell'area reale di contatto sia quella che associamo alla creazione di particelle di usura (ovvero non tutte le microgiunzioni generano particelle di usura, ma è un evento che si verifica con una certa probabilità statistica) e se pensiamo di portare in movimento un corpo rispetto all'altro questo fenomeno andrà a generarsi con una certa frequenza man mano che procede lo strisciamento.

In particolare, al fine di quantificare tale proprietà globalmente tramite un coefficiente  $K$ , si può enunciare l'espressione:

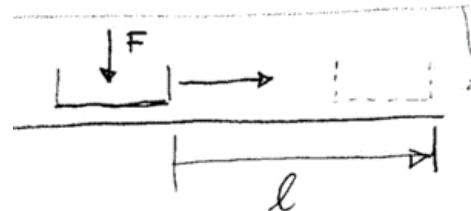
$$V = K \frac{F}{HB} l$$

dove:

- $K \frac{F}{HB}$  è il volume totale delle particelle di usura generate per unità di lunghezza di strisciamento, sempre se le condizioni di strisciamento rimangono sempre le stesse.

- $V$  è il volume totale delle particelle di usura
- $l$  è la distanza percorsa

Questa relazione semplificata chiama in causa un certo modello probabilistico di formazione di particelle di usura come una frazione dell'area reale di contatto e quindi della forza normale che si esercita.



Osserviamo che di fatto il volume è proporzionale al prodotto  $F \cdot l$ . Pensando che in condizioni di strisciamento la forza tangenziale è una frazione della forza normale (quindi la forza  $F$  è proporzionale a  $T$ , che è la forza d'attrito) il prodotto  $F \cdot l$  sarà proporzionale a  $T \cdot l$ .

Questa espressione, in cui al posto di usare  $F$  utilizziamo  $T$  è utile in quanto evidenzia che il volume complessivo delle particelle d'usura è proporzionale al lavoro di attrito

Possiamo riformulare l'ipotesi di Reye scrivendo che il volume complessivo delle particelle di usura è proporzionale mediante una nuova costante ( $K'$ ) al lavoro di attrito:

$$V = K' T l$$

Questo punto di vista sull'usura è di tipo energetico in quanto mette in relazione un lavoro fatto dalle forze d'attrito con un volume messo in relazione alla formazione di nuova superficie.

La creazione di nuova superficie infatti richiede energia, che in questo caso è fornita dall'attrito.

#### ESEMPIO APPLICATIVO:

Una possibile applicazione dell'ipotesi di Reye è quella del calcolo dell'andamento delle pressioni al contatto strisciante tra un albero che ruota e un supporto fisso.

Supponiamo di avere un albero ad asse verticale che poggia su un supporto a strisciamento: ci può interessare calcolare l'andamento delle pressioni al contatto tra i due corpi.

Possiamo partire dall'ipotesi di Reye per cui il volume complessivo delle particelle di usura è proporzionale al lavoro delle forze d'attrito secondo una costante di proporzionalità ( $K'$ ).

Dall'analisi della figura proposta possiamo immaginare di isolare un volume infinitesimo di materiale sull'albero (che è in rotazione con la velocità angolare  $\omega$ ) pensando che tale volume sia una corona circolare estrusa in direzione assiale.

Tale corona circolare presenta un raggio ( $r$ ), uno spessore infinitesimo ( $dr$ ) e un'altezza ( $\delta$ ) che corrisponde all'effetto di usura in un intervallo di tempo  $\Delta t$ .

Possiamo quindi riscrivere l'equazione dell'ipotesi di Reye in termini differenziali secondo la seguente equazione:

$$dV = K' dL$$

dove  $dL$  è il lavoro fatto dalle forze di attrito che agiscono sulla superficie dell'anello preso in esame.

Possiamo esprimere questo volume dal punto di vista geometrico come il prodotto della superficie circolare per l'altezza assiale di cui studiamo idealmente la corona circolare ( $\delta$ ):

$$dV = \delta \cdot 2\pi r dr$$

Proviamo a calcolare il lavoro delle forze d'attrito.

Calcoliamo innanzitutto il momento esercitato dalle forze di attrito che sono applicate alla corona circolare infinitesima: tale momento può essere calcolato come:

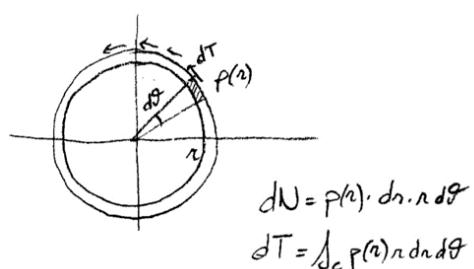
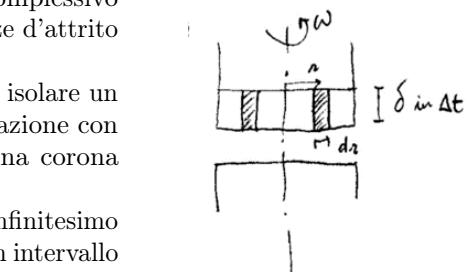
$$dM = r \int dT$$

dove  $dT$  è la forza d'attrito che agisce sull'elemento infinitesimo della corona circolare, che può essere espresso come il prodotto del coefficiente di attrito cinetico ( $f_c$ ) per la componente normale di forza ( $dN$ )

$$dN = p(r) dr r d\theta \quad ; \quad dT = f_c dN = f_c p(r) dr r d\theta$$

dove  $p(r)$  è l'andamento delle pressioni lungo la corona circolare. Sostituendo all'integrale del momento:

$$dM = r \int_0^{2\pi} f_c p(r) r dr d\theta = 2\pi f_c p(r) r^2 dr$$



$$dN = p(r) dr r d\theta$$

$$dT = f_c p(r) dr r d\theta$$

Il lavoro di questo momento si può semplicemente calcolare come:

$$dL = dM \omega \Delta t = \omega \Delta t 2\pi p(r) r^2 dr$$

dove  $\omega \Delta t$  è la rotazione relativa dell'albero rispetto al supporto

Eguagliando a questo punto le due espressioni si ottiene:

$$\begin{aligned} dV &= K' dL \\ \delta \cdot 2\pi r dr &= K' \omega \Delta t 2\pi p(r) r^2 dr \\ p(r) &= \frac{\delta/\Delta t}{K' f_c \omega} \cdot \frac{1}{r} = \frac{K''}{r} \end{aligned}$$

dove:

- $\delta/\Delta t$  è la velocità di usura in quanto è il rapporto tra l'altezza usurata e il tempo in cui tale usura si verifica
- $K' f_c \omega$  è una costante

Abbiamo dunque ottenuto che l'andamento della pressione tra le due superfici è inversamente proporzionale al raggio: quando siamo in prossimità dell'asse di rotazione dell'albero le pressioni raggiungono valori teoricamente infiniti e questo ci deve suggerire come progettare correttamente il cuscinetto.

Infatti possiamo progettare il cuscinetto evitando di mettere materiale d'usura in prossimità dell'asse altrimenti lavorerebbe a pressioni sicuramente superiori alla pressione tollerabile dal materiale in quel punto.

Possiamo inoltre trovare la costante  $K''$  eguagliando l'integrale delle pressioni alla forza assiale complessiva che deve essere sostenuta dal cuscinetto:

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} p(r) 2\pi r dr &= F \\ \int_{r_1}^{r_2} \frac{K''}{r'} 2\pi r' dr &= F \\ 2\pi (r_2 - r_1) K'' &= F \\ K'' &= \frac{F}{2\pi (r_2 - r_1)} \end{aligned}$$

Sostituendo tale costante di proporzionalità nella legge che dettava l'andamento delle pressioni:

$$p(r) = \frac{F}{2\pi r (r_2 - r_1)}$$

Secondo tale andamento si può osservare che in realtà sotto un certo valore di  $r_1$  al di sotto del quale non è opportuno che ci sia contatto in quanto le pressioni sarebbero superiori alla resistenza del materiale.

## 5.8 Lezione 22-04 – Daniele Bortoluzzi

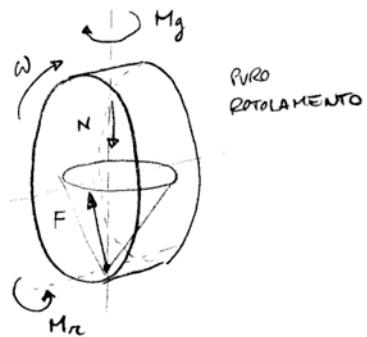
### 5.8.1 Attrito di rotolamento

Anche al rotolamento di un corpo volente sulla superficie nascono delle azioni che sostanzialmente si oppongono al rotolamento del corpo sulla superficie. Questo fenomeno è descritto dall'attrito di rotolamento o attrito volente che è un fenomeno comunque rilevante dal momento che molto spesso si realizza, dal punto di vista tecnologico, il puro rotolamento dei corpi rispetto a superfici.

Prendiamo il caso indicato in figura in cui si ha un corpo volvente (cilindro) posto in puro rotolamento su una superficie. Il corpo volvente rotola con una velocità angolare  $\omega$  ed è forzato contro la superficie tramite una componente normale  $N$ .

Quello che succede è che al contatto, che nominalmente è un punto fermo, si ha una condizione di staticità (non si ha strisciamento) e la reazione vincolare è una forza  $F$ , generalmente indeterminata all'interno del cono di attrito statico.

Oltre a questo nascono sulla superficie di contatto delle azioni che risultano in due componenti di momento:



- La coppia di attrito di rotolamento ( $M_r$ ) che si oppone al rotolamento stesso
- La coppia di attrito di giro ( $M_g$ ) che è un momento ad asse verticale

Mentre la prima componente si oppone al rotolamento, la seconda è una componente che promuoverebbe, se non bilanciata, un **moto di prillamento**, ovvero rotazione del corpo volvente attorno ad un asse verticale.

L'azione combinata delle due componenti di momento è detto **Momento di attrito volvente** ( $M$ ).

In condizioni statiche, le azioni che nascono al contatto tra i due corpi possono equilibrare dei momenti che applichiamo al corpo per farlo rotolare: applicando una coppia esterna che tenda a far rotolare il corpo sulla superficie, finché tale coppia non varca una certa soglia, il corpo volvente rimane fermo.

Esiste una relazione che esprime tale coppia limite come proporzionale alla forza con cui il corpo volvente è forzato contro la superficie ( $N$ ): vale dunque la diseguaglianza

$$\|M_r\| \leq u_r \|N\|$$

dove  $u_r$  è detto parametro di attrito di rotolamento ed è dimensionalmente una lunghezza

Allo stesso modo possiamo dire che prima che inizi il moto vale anche che la coppia di attrito di giro è inferiore ad una certa soglia, la quale è sempre proporzionale alla forza  $N$  con cui forziamo il corpo volvente contro la superficie

$$\|M_g\| \leq u_g \|N\|$$

dove  $u_g$  è detto parametro di attrito di giro ed è dimensionalmente una lunghezza.

Quando esiste rotolamento tra corpo volvente e superficie sia la coppia di attrito di rotolamento che la coppia di attrito di giro risultano uguali ai valori di soglia. In queste condizioni definiamo i fattori di attrito volvente, riscalando i valori dei parametri di attrito di rotolamento e di giro rispetto alla dimensione caratteristica del corpo volvente (ad esempio il raggio):

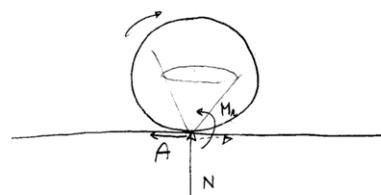
$$\begin{cases} f_v = \frac{u_r}{R} \\ f_{vp} = \frac{u_g}{R} \end{cases}$$

### 5.8.2 Resistenza al rotolamento (attrito volvente)

Vediamo in questo schema un avista laterale del corpo volvente e della superficie sulla quale questo rotola.

La coppia di attrito di rotolamento ha una componente ortogonale al foglio e si oppone alla velocità angolare  $\omega$ .

Le azioni che sono applicate al corpo volvente sono:



- l'azione normale  $N$  che è la componente normale alla reazione vincolare che si oppone alla forza con cui schiacciamo il corpo volvente contro la superficie;

- la componente di attrito tangenziale A

L'insieme delle interazioni che avvengono sulla superficie di contatto causa una coppia  $M_r$  che si oppone al rotolamento: in realtà vedremo che tale coppia nasce per una certa disuniformità di distribuzione delle pressioni sulla superficie di contatto (la quale non è puntiforme, ma ha una certa estensione).

Avendo precedentemente scritto che la coppia di attrito di rotolamento è esprimibile come un parametro  $u_r$  che moltiplica la componente normale N, stiamo già esprimendo in maniera implicita il fatto che la forza N nell'essere equilibrata dalle forze di contatto genera anche un certo braccio  $u_r$ .

Tale parametro è dunque una lunghezza, che difatti è chiamato anche parametro o braccio di attrito ed è espressa come un rapporto

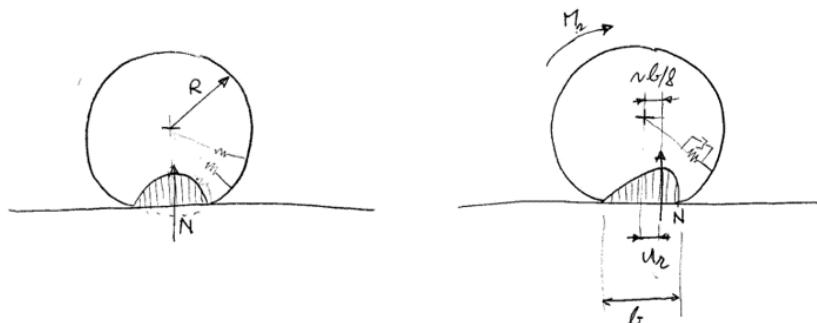
$$u_r = f_v R$$

dove:  $f_v$  è il fattore di attrito volvente e R è la dimensione caratteristica del corpo volvente.

Questo modello, per quanto semplificato, nasce dalla meccanica del contatto tra i due corpi anche nell'ipotesi che siano corpi a comportamento elastico lineare.

#### ROTOLAMENTO DI CORPI LISCI SU SUPERFICI LISCE

Prendiamo il caso in cui ci occupiamo solamente della distribuzione delle pressioni al contatto tra i due corpi. Osserviamo che secondo la teoria di Hertz, se noi forzassimo un cilindro contro una superficie piana nell'ipotesi di elasticità lineare di comportamento del materiale, si ha un andamento delle pressioni parabolico, in cui la risultante, per l'equilibrio del sistema, passa per il centro del corpo.



C'è un'impronta macroscopica la cui dimensione dipende dalla forza con cui forziamo il corpo contro la superficie (N).

Se supponiamo di porre in rotolamento il corpo volvente osserviamo che, nell'ipotesi che il materiale non abbia più solamente comportamento elastico, ma ci siano anche fenomeni dissipativi, nasce una certa dissimmetria.

Proviamo a dare un'interpretazione di ciò che succede: se pensiamo che radialmente il nostro corpo si comporti come una molla, esse quando entrano nella superficie di contatto vengono compresse dal momento che la sua estremità non si muove più su una circonferenza, ma su un segmento, e essendo compresse acquisiscono energia in forma elastica potenziale.

A partire dal momento in cui l'estremità di queste molle arriva sull'asse di simmetria del corpo, quelle stesse molle tendono a rilassarsi restituendo l'energia elastica che hanno accumulato.

In un caso in cui si hanno solo fenomeni che possono accumulare energia e accumularne nella stessa quantità (fenomeni conservativi), non c'è motivo di avere dissimmetria tra il comportamento in fase di compressione e quella di estensione della molla.

Se invece in parallelo a queste molle poniamo anche degli smorzatori (a indicare qualsiasi fenomeno dissipativo all'interno del materiale), ciò che succede è che nella fase di compressione la forza che la superficie piana deve esercitare sulla periferia del corpo volvente per comprimere il gruppo molla-smorzatore dovrà equilibrare sia la forza richiesta dalla molla che quella richiesta dallo smorzatore.

Nel momento in cui l'infinitesimo gruppo molla-smorzatore passa la mezzeria del corpo volvente dovrà estendersi per garantire il contatto della periferia del corpo volvente con la superficie piana. A tal fine la molla dovrà fornire la forza sia per estendere il gruppo, sia per garantire il contatto della periferia del corpo volvente con la superficie piana.

La forza utile che rimane per il contatto gruppo molla-smorzatore e la superficie piana è la forza che la molla esercita sottraendole la forza che richiede il gruppo smorzatore per essere esteso: la forza netta che rimane tra la periferia del corpo volvente e la superficie piana sarà minore della quantità richiesta dall'elemento infinitesimo smorzatore (che dovrà essere esteso a spese dell'energia elastica accumulata dal corpo volvente).

Il risultato è che le pressioni al contatto tra corpo volvente e superficie piana non sono simmetriche rispetto all'asse di simmetria del corpo, ma: in fase di compressione saranno pressioni superiori a quelle che rimangono in fase di estensione.

L'andamento delle pressioni non è più simmetrico, ma prevede un andamento distorto in cui le pressioni sono maggiori nella metà dell'impronta che corrisponde alla compressione del corpo volvente, mentre saranno inferiori nella metà dell'impronta che corrisponde all'estensione del corpo volvente.

Il risultato è che l'andamento delle pressioni genera un risultante che deve comunque essere pari alla forza esterna applicata al corpo volvente in direzione verticale, ma non più localizzata nell'asse di simmetria del corpo stesso, ma spostata in avanti (nella direzione di avanzamento del corpo volvente) di una quantità  $u_r$ .

Osserviamo che per mantenere in movimento il corpo volvente è necessario applicare all'esterno una coppia uguale e contraria a questa  $M_r = N u_r$ .

Il parametro  $u_r$  è un parametro che dipende dalle proprietà microscopiche del contatto tra il corpo volvente e la superficie: detta  $b$  la dimensione dell'impronta,  $u_r$  risulta una certa frazione di  $b$ . In generale per corpi metallici, l'ordine di grandezza di  $u_r = b/8$ .

Ricordiamo a questo punto che:

$$M_r = u_r N = R f_v N$$

Se utilizziamo la teoria di Hertz per il contatto elastico tra corpi osserviamo che nel caso di contatto cilindro piano la dimensione caratteristica dell'impronta, può essere calcolata come:

$$b = 1.52 \sqrt{\frac{N}{E \rho l}}$$

dove:

- $N$  è la forza normale
- $E$  è il modulo elastico del materiale
- $\rho$  è il raggio equivalente al contatto tra i due corpi

In generale tra due corpi con raggio di curvatura  $R_1$  (cilindro di raggio  $R$ ) e  $R_2$  (superficie piana di raggio di curvatura teoricamente infinito)

$$\rho = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\infty}$$

- $l$  è la profondità del cilindro

possiamo a questo punto calcolare

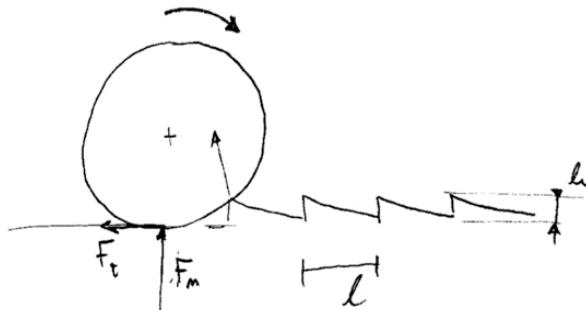
$$f_v = \frac{u_r}{R} \approx \frac{b/8}{R} \approx 0.2 \sqrt{\frac{N}{E R l}}$$

In generale questo coefficiente varia con la velocità di rotolamento del corpo e il suo andamento è, qualitativamente, simile al coefficiente di attrito che passa da statico a cinetico e quindi risente della velocità relativa tra corpo.

In questo caso il rotolamento incipiente richiede un coefficiente  $f_v$  leggermente più alto di quello dinamico.

#### ROTOLAMENTO DI CORPI LISCI SU SUPERFICI RUGOSE

Di fatto il rotolamento su una superficie che presenta asperità implica la presenza di urti e quindi interazioni impulsive tra il corpo e le asperità stesse. Il comportamento a questo livello è piuttosto complesso in quanto dipende da come è distribuita l'irregolarità superficiale della pista sul quale rotola il corpo volvente, tuttavia anche in questo caso è possibile utilizzare un modello approssimato:



Consideriamo un corpo volvente sottoposto ad un certo carico normale, sappiamo che al contatto nascono due componenti (normale e tangenziale) e in questo modello nasce anche un'interazione al punto di contatto tra il corpo volvente e le asperità.

Consideriamo un'asperità caratterizzata da un'unica spaziatura  $l$  tra le creste e una certa altezza  $h$ : è possibile scrivere un modello in cui si arriva a calcolare che il coefficiente di attrito volvente ( $f_v$ ) ha un andamento descritto dalla legge

$$f_v = c_1 v^2 + c_0$$

dove:

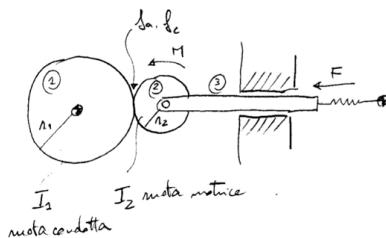
- La costante  $c_1$  risulta proporzionale al rapporto tra l'altezza delle asperità e il prodotto  $R l$  (R raggio del corpo volvente)

$$c_1 \propto \frac{h}{Rl}$$

Nei casi più comuni di applicazione ingegneristica ha valore compreso tra i  $6 : 8 \cdot 10^{-6}$ .

- La costante  $c_0$  ha un ordine di grandezza di  $1 : 2 \cdot 10^{-2}$

#### ESERCIZIO N.1: ADERENZA E STRISCIAVIMENTO



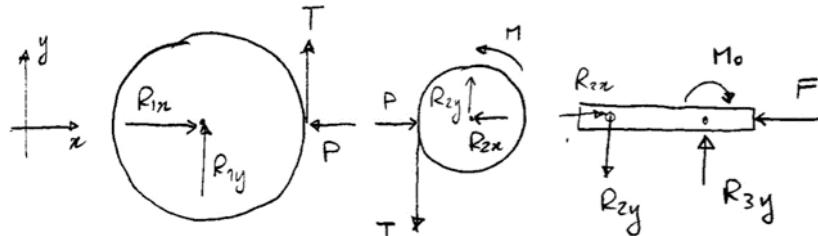
Proponiamo un sistema che presenta un accoppiamento tra due ruote di frizione sul quale possiamo applicare i concetti che sono stati affrontati precedentemente.

Il sistema è descritto da due ruote di frizione (una ruota motrice e una ruota condotta) che vengono mantenute a contatto da una molla precaricata, mediante un'asta che scorre senza attrito su una guida. Il momento motore applicato alla ruota motrice mantiene in movimento il sistema secondo una legge del moto ignota a priori.

Ci viene richieduto di:

1. Trovare l'accelerazione angolare massima al corpo 1 (ovvero alla ruota condotta) affinché non ci sia strisciamento e il corrispondente momento applicato alla ruota motrice;
2. Illustrare cosa succede se il momento motore è maggiore di quello massimo per evitare lo strisciamento

È necessario scrivere le equazioni del moto del sistema: per fare ciò lo disassembliamo evidenziando i momenti e le forze che agiscono su ciascun corpo rigido. Lo schema è proposto di seguito.



Procediamo alla scrittura delle equazioni del moto del sistema:

Selezioniamo le equazioni che sono realmente di interesse per la soluzione del problema, quindi:

1. **Equilibrio alla rotazione delle due ruote.** Ricordiamo che  $T$  è la componente tangenziale di reazione vincolare di attrito che ha una certa relazione con la componente normale  $P$  sulla base delle condizioni effettive (esse siano di aderenza o strisciamento).

- Rotazione corpo 1: (il centro di massa del corpo e il punto fisso coincidono)

$$I_1 \ddot{\vartheta}_1 = r_1 T$$

- Rotazione corpo 2: (verranno trascurate le due componenti di reazione vincolare in quanto non hanno braccio rispetto al centro)

$$I_2 \ddot{\vartheta}_2 = r_2 T + M$$

## 2. Equilibrio alla traslazione

- Traslazione lungo l'asse x del corpo 2:

$$m_2 \ddot{x}_2 = P - R_{2x}$$

Imponendo che  $\ddot{x}_2 = 0$  in quanto la ruota motrice non ha movimento orizzontale, possiamo esprimere

$$P = R_{2x}$$

- Traslazione lungo l'asse x del corpo 3:

$$m_3 \ddot{x}_3 = R_{2x} - F$$

Imponendo che  $\ddot{x}_3 = 0$  in quanto l'asta non ha movimento lungo l'asse x, otteniamo che

$$F = R_{2x}$$

Queste due equazioni ci permettono di dire che la componente normale di reazione vincolare tra le due ruote è esattamente uguale alla forza  $F$  con cui precarichiamo dall'esterno il sistema

$$P = F$$

Le equazioni di rotazione dei due corpi hanno 3 incognite:  $\vartheta_1, \vartheta_2$  e la forza d'attrito  $T$ ; mentre supponiamo di conoscere  $M$ .

A questo punto la forza  $T$  va messa in relazione con la forza  $P$  (ovvero la componente normale della forza di contatto) facendo delle ipotesi sulle condizioni che si hanno sul contatto stesso:

- **Nelle condizioni di strisciamento,** ovvero in cui ci sia moto relativo tra le due ruote al punto di contatto, è possibile scrivere immediatamente che:

$$T = f_c P$$

Questa è una condizione in cui la forza è determinata perché sappiamo che sta sulla generatrice del cono di attrito cinetico.

Sotto tali conclusioni rimangono due equazioni differenziali in due equazioni che possono essere risolte e da cui è possibile ottenere le leggi del moto del sistema.

- **Nelle condizioni di non strisciamento,** ovvero in cui la forza al contatto è indeterminata all'interno del cono di attrito statico; pur essendo  $T$  incognita, valgono le condizioni di moto rotolamento.

Quindi in assenza di strisciamento le rotazioni delle due ruote sono legate da un vincolo di tipo cinematico: ciò è vero fintanto che la forza tangenziale risulta all'interno del cono di attrito statico, essendo la condizione limite quella in cui la forza  $T$  e  $P$  si combinano per generare una risultante che sta sul cono di attrito statico.

Possiamo trovare la massima accelerazione angolare che corrisponde alle condizioni di strisciamento incipiente quindi le condizioni limite di aderenza che sono messe dal contatto tra queste due ruote:

$$T = f_a P = f_a F \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vartheta}_{1max} = \frac{r_1}{I_1} f_a F$$

In questa condizione di puro rotolamento è possibile scrivere un legame cinematico tra la rotazione delle due ruote:

$$r_1 \dot{\vartheta}_1 = - r_2 \dot{\vartheta}_2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\vartheta}_2 = - \frac{r_1}{r_2} \dot{\vartheta}_1 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vartheta}_2 = - \frac{r_1}{r_2} \ddot{\vartheta}_2$$

A questo punto nella equazione di rotazione della ruota motrice possiamo esplicitare il momento che, quando si raggiungerà il valore di massima accelerazione angolare, sarà pari al massimo valore di coppia che può essere applicato alla ruota motrice.

$$M_{max} = I_2 \ddot{\vartheta}_{2max} - r_2 T = - I_2 \frac{r_1}{r_2} \frac{r_1}{I_1} f_a F - r_2 f_a F$$

La formulazione appena enunciata esprime la massima coppia motrice che può essere applicata senza che si abbia strisciamento.

Varcando questa soglia si ha sicuramente strisciamento: da questo momento in poi si ha che

$$T = f_c P = f_c F$$

In sintesi abbiamo che le equazioni del moto risultano essere le seguenti in condizioni di strisciamento:

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\vartheta}_1 = r_1 T = r_1 f_c F & \text{l'accelerazione angolare è indipendente dal momento applicato alla ruota motrice} \\ I_2 \ddot{\vartheta}_2 = r_2 T + M = r_2 f_c F + M \end{cases}$$

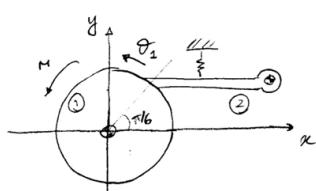
### ESERCIZIO N.2: MECCANISMO AD IMPUNTAMENTO

Un freno a tamburo è un elemento costitutivo delle macchine piuttosto frequente che composto da un tamburo ruotante solidale al corpo che deve essere frenato e un ceppo posto in contatto con il tamburo.

Tra freno a ceppo e tamburo è normalmente frapposto un materiale che si chiama **ferodo**, materiale d'usura preposto a realizzare l'accoppiamento strisciante e quindi a originare la forza frenante.

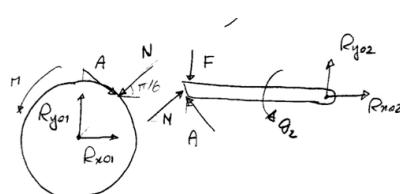
Osseviamo che in questo esempio raffigurato, il momento motore applicato al tamburo è azionato in senso antiorario e questo corrisponde a un ben preciso funzionamento della superficie di contatto: se il tamburo ruota nella direzione  $\dot{\vartheta}_1$  positiva siamo nella cosiddetta configurazione di ceppo teso.

Come al solito procediamo disassemblando il sistema nei due corpi rigidi che lo costituiscono (tamburo e ceppo) e procediamo a scrivere tutte le forze e i momenti che agiscono sui 2 corpi rigidi:



Corpo 1:

$$\begin{cases} m \ddot{\vartheta}_1 = R_{x01} - N \cos \frac{\pi}{6} + A \sin \frac{\pi}{6} \\ m \ddot{\vartheta}_1 = R_{y01} - N \sin \frac{\pi}{6} - A \cos \frac{\pi}{6} \\ I_1 \ddot{\vartheta}_1 = M - Ar \end{cases}$$



Corpo 2:

$$\begin{cases} m \ddot{\vartheta}_2 = N \cos \frac{\pi}{6} - A \sin \frac{\pi}{6} + R_{x02} \\ m \ddot{\vartheta}_2 = N \sin \frac{\pi}{6} + A \cos \frac{\pi}{6} + R_{y02} - F \\ I_2 \ddot{\vartheta}_2 = FL - N \sin \frac{\pi}{6} L - A \sin \frac{\pi}{6} L \end{cases}$$

Ci chiediamo in quali condizioni il freno possa mantenere fermo il tamburo: data la geometria del sistema e la forza F (che preme il ceppo contro il tamburo), ci sarà un momento oltre al quale il ceppo non riesce più a tenere fermo il tamburo e quindi quest'ultimo comincerà a muoversi.

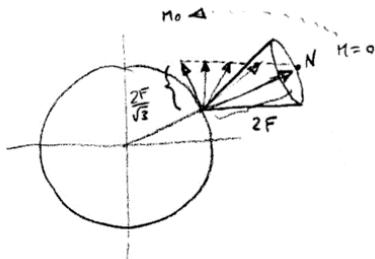
Le condizioni di aderenza sotto le quali il sistema rimane fermo sono  $\dot{\vartheta}_1 = \dot{\vartheta}_2 = 0$  e queste condizioni se sostituite nel sistema di equazioni di Newton-Eulero corrispondono alla soluzione statica, in cui tutto il sistema rimane fermo.

Per studiare questa condizione riprendiamo le equazioni di equilibrio alla rotazione del primo e del secondo corpo e imponiamo la condizione di staticità:

$$\begin{cases} 0 = M - Ar \\ 0 = F\cancel{L} - N \frac{1}{2}\cancel{L} - A \frac{\sqrt{3}}{2}\cancel{L} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{M}{r} \\ N = 2F - \sqrt{3}A = 2F - \sqrt{3}\frac{M}{r} \end{cases}$$

In condizioni statiche otteniamo queste due componenti A ed N e osserviamo che sono entrambe parametriche nel momento M: in particolare per il momento  $M=0$  ci sarà un certo valore di azione normale N e l'attrito A è nullo; aumentando il momento M la forza d'attrito A tende ad aumentare, mentre la forza normale N tende a diminuire.

Proviamo a diagrammare la forza che il tamburo esercita sul ceppo in maniera parametrica con il momento M:



All'aumentare del momento M si ha un aumento della componente tangenziale d'attrito A e una diminuzione della componente normale N, entrambe con un andamento di tipo lineare. Se diagrammassimo tutti i vettori risultanti dalle componenti N e A osserviamo che parametricamente con M vanno a descrivere un segmento. Osserviamo anche una condizione in cui la forza normale arriva ad essere nulla e la forza d'attrito avrà un ben preciso valore: al fine di trovare tale condizione basta impostare  $N = 0$ .

Risolvendo rispetto a M, si ottiene che:

$$M_0 = \frac{2Fr}{\sqrt{3}}$$

In queste condizioni il valore dell'attrito

$$A_0 = \frac{2F}{\sqrt{3}}$$

In questo diagramma abbiamo tutti i casi che matematicamente corrispondono all'equilibrio del sistema quindi all'aderenza delle superfici a contatto e abbiamo la descrizione di come varia la risultante al contatto al variare del momento motore che viene equilibrato.

Sappiamo tuttavia che al contatto tra due superfici non possono essere scambiate tutte le forze possibili, ma solamente quelle che stanno all'interno del cono di attrito statico hanno la possibilità di essere esercitate dal contatto; altrimenti si va a violare l'ipotesi di aderenza e si è in condizioni non più di staticità del sistema.

Sappiamo anche che il cono di attrito statico è descritto dall'equazione

$$\frac{A}{N} = f_a \quad \Rightarrow \quad \frac{M}{r} = f_a (2F - \sqrt{3}\frac{M}{r}) \quad \Rightarrow \quad M = \frac{2f_a Fr}{1 + f_a \sqrt{3}} = M_{max}$$

Ci chiediamo cosa succede in condizioni di strisciamento.

Abbiamo varcato la soglia  $M_{max}$  del momento motore e quindi il sistema non è più in condizioni statiche, ma in movimento.

La condizione che possiamo immediatamente scrivere è che il sistema, essendo in condizioni di strisciamento, la reazione vincolare non è più indeterminata all'interno del cono di attrito statico, ma giace sulla generatrice del cono di attrito dinamico. Quindi:

$$A = f_c N$$

Riscriviamo le equazioni di equilibrio alla rotazione dei due corpi, dove non possiamo più imporre che  $\ddot{\vartheta}_1 = 0$ .

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\vartheta}_1 = M - f_c N r \\ 0 = F L - N \frac{L}{2} - f_c N \frac{\sqrt{3}}{2} L \end{cases}$$

Ottenendo le componenti di reazione vincolare

$$N = \frac{2F}{1 + f_c \sqrt{3}} \quad ; \quad A = \frac{2f_c F}{1 + f_c \sqrt{3}}$$

A questo punto riprendiamo la prima equazione del moto, che è quella di interesse in quanto ci descrive l'accelerazione angolare del tamburo nelle condizioni in cui ci sia strisciamento:

$$I_1 \ddot{\vartheta}_1 = M - \frac{2f_c F r}{1 + f_c \sqrt{3}}$$

Osserviamo che in generale  $M$  può dipendere dalle condizioni che imponiamo esternamente al tamburo e che quindi in generale il moto è un moto uniformemente accelerato.

Inoltre il valore del momento massimo che può essere equilibrato dall'attrito statico:

$$M = \frac{2f_a F r}{1 + f_a \sqrt{3}}$$

Portando dunque il momento  $M$  al valore massimo ( $M_{max}$ ) e lo varchiamo anche di un infinitesimo, il sistema si metterà in movimento. Sarà valida l'equazione del moto in condizioni di strisciamento: se manteniamo ora il momento al valore massimo osserviamo che l'accelerazione è proporzionale alla differenza dei due momenti e questa differenza non è zero perché  $f_a > f_c$ .

Da questo momento in poi pur mantenendo il momento pari al momento  $M_{max}$ , che ha permesso di mettere in moto il sistema, il moto risulta uniformemente accelerato.

Ci occupiamo a questo punto di capire come funziona il freno all'inversione del verso del momento applicato al tamburo: ovvero quando esso opera nella configurazione di **ceppo compresso** e non più ceppo teso.

Riscriviamo le equazioni di equilibrio alla rotazione dei due corpi:

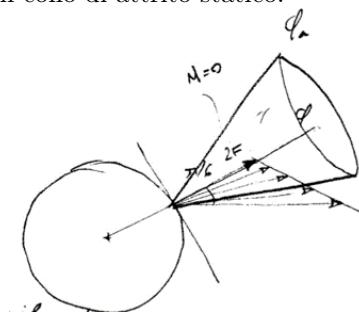
$$\begin{cases} I_1 \ddot{\vartheta}_1 = -M + Ar \\ I_2 \ddot{\vartheta}_2 = F L - N \sin \frac{\pi}{6} L + A \cos \frac{\pi}{6} L \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{M}{r} \\ N = 2F + \sqrt{3} \frac{M}{r} \end{cases}$$

Osserviamo che le componenti di attrito e la componente normale sono ancora una volta funzioni del momento  $M$ , tuttavia  $A$  è sempre una funzione crescente del momento esattamente come l'espressione di  $N$ .

Al fine di individuare la risultante di queste due forze all'interno del cono di attrito statico, calcoliamo il rapporto tra componente tangenziale e componente normale:

$$\frac{A}{N} = \frac{\frac{M}{r}}{2F + \sqrt{3} \frac{M}{r}} = \frac{1}{\sqrt{3} + \frac{2Fr}{M}} = \tan \varphi$$

Proviamo a vedere come al variare di  $M$  varia l'inclinazione di questa risultante e confrontiamo la risultante con il cono di attrito statico.



In questo grafico, similmente a quanto realizzato per la condizione di ceppo teso riportiamo l'andamento della reazione vincolare al contatto con i due corpi, in particolare la forza che il tamburo esercita sul ceppo, in maniera parametrica rispetto al momento  $M$  che deve essere equilibrato dal contatto.

Quando il momento è nullo ( $M = 0$ ), la componente di attrito  $A = 0$  e si ha solo la componente normale  $N = 2F$ .

Man mano che aumentiamo  $M$ , osserviamo che aumentano sia la componente normale che quella tangenziale in maniera lineare. La forza risultante quindi ha un andamento lineare.

Ci chiediamo cosa possa succedere a tale generica risultante della forza di contatto al variare del momento rispetto al cono di attrito statico diagrammato, che ha una semi-ampiezza pari all'angolo  $\varphi_a$  (angolo di attrito statico).

Osserviamo che all'aumentare del momento l'inclinazione della risultante al contatto tende ad un valore asintotico:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\|A\|}{\|N\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \varphi_{max}$$

Da cui è possibile ricavare l'angolo di massima inclinazione della risultante rispetto alla normale

$$\varphi_{max} = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

Sappiamo che l'ipotesi di aderenza vale fintanto che la reazione vincolare è interna al cono di attrito: a questo punto sapendo che l'inclinazione della risultante è un valore che passa da  $\varphi = 0$  quando  $M = 0$  e arriva a un valore  $\varphi = \varphi_{max} = \frac{\pi}{6}$  la condizione di aderenza dipende da come si pone l'angolo  $\varphi_a$  rispetto al valore  $\varphi_{max}$ .

Se la semiapertura del cono di attrito statico è maggiore o uguale a  $\pi/6$  abbiamo che il cono di attrito conterrà sempre la risultante delle forze al contatto: il cono è più aperto di quanto possa essere inclinata la risultante al contatto rispetto alla normale e quindi per qualunque valore di momento si troverà in una situazione di equilibrio alle forze di contatto. Tale situazione è detta di **impuntamento**.

In questo caso il ceppo compresso non permette la rotazione del tamburo per quanto grande sia il momento applicato al tamburo stesso.

Se invece la semiapertura del cono di attrito è inferiore a  $\pi/6$  ci sarà un valore di momento che porta l'inclinazione della risultante a stare sul cono di attrito statico e quindi aumentando ulteriormente il momento applicato al tamburo si passerà dalla condizione di aderenza alla condizione di strisciamento.

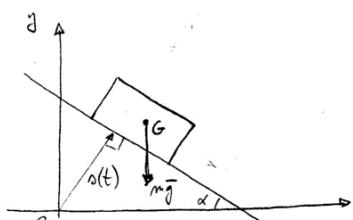
Per trovare tale condizione limite possiamo imporre che  $\tan \varphi_a = \tan \varphi$  e di conseguenza:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2Fr}{M_{max}} = \tan \varphi_a$$

## 5.9 Lezione 29 -04 – Daniele Bortoluzzi

In questa lezione proseguiamo con lo studio dei componenti meccanici e in particolare continuiamo l'approfondimento di questi sistemi meccanici soprattutto per quel che riguarda i fenomeni che avvengono all'interfaccia tra i due corpi.

### ESEMPIO SU ADERENZA E STRISCIAMENTO



Tale esercizio si avvale dell'attrito e in particolare del fatto che l'attrito, nella gran parte dei casi, è una funzione decrescente con la velocità di strisciamento per realizzare una sorta di sistema di movimentazione.

Immaginiamo di avere un piano inclinato sul quale appoggia un corpo sotto l'effetto della gravità e delle forze di contatto tra corpo e piano inclinato di un angolo  $\alpha$ .

Il piano inclinato è azionato lungo la direzione ad esso ortogonale: quindi osserviamo una coordinata  $s(t)$  tempo variante che viene comandata dall'esterno e osserviamo che c'è la possibilità di realizzare un sistema di trasporto e di movimentazione di questa massa regolando opportunamente questa legge del moto  $s(t)$  e approfittando del fatto che al contatto tra corpo e piano inclinato si sviluppa un attrito di tipo Coulombiano (quindi ideale), che presenta un coefficiente di attrito statico superiore a quello di attrito cinetico.

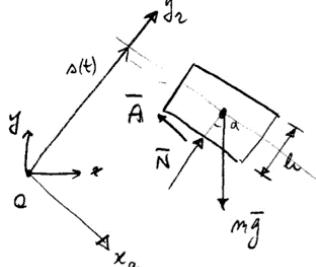
Questo aspetto può permettere in modo molto semplice la movimentazione di questo corpo grazie all'effetto della gravità.

Prendiamo come legge del moto  $s(t)$  di riferimento una legge armonica:  $s(t) = a \sin(\omega t)$ .

Cerchiamo il valore dell'ampiezza (a) oltre al quale il sistema non è più in condizione di aderenza e quindi inizia lo strisciamento relativo tra il corpo e il piano inclinato.

Per risolvere questo problema prendiamo un S.d.R. ruotato in cui l'asse delle ascisse è parallelo al piano inclinato e l'asse delle ordinate è ortogonale al piano inclinato, sempre centrato nell'origine del S.d.R. fisso.

In questo S.d.R. è particolarmente agevole scrivere le equazioni del moto perché siamo paralleli/perpendicolari alle componenti normali e di attrito che si sviluppano all'interfaccia tra i due corpi: il S.d.R. in questione ( $x_r, y_r$ ) è un sistema inerziale in quanto non è solidale al piano inclinato, ma è semplicemente orientato come il piano inclinato.



Il piano inclinato, a sua volta, ha un movimento sinusoidale lungo la direzione  $s(t)$  ortogonale al piano, però il S.d.R. ( $x_r, y_r$ ) rimane fisso. In tale S.d.R. è possibile scrivere le equazioni del moto di un corpo assunto come punto materiale:

$$\begin{cases} m \ddot{x}_r = m g \sin(\alpha) - A \\ m \ddot{y}_r = m g \cos(\alpha) + N \end{cases}$$

Imponiamo l'ipotesi di aderenza: ovvero che il sistema sia fermo rispetto al piano inclinato

$$\begin{cases} \dot{x}_r = 0 \\ y_r = s(t) + \frac{h}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} \ddot{x}_r = 0 \\ \ddot{y}_r = \ddot{s}(t) = -\omega^2 a \sin(\omega t) \end{cases}$$

In questo caso stiamo risolvendo un problema di dinamica inversa: sappiamo qual è il moto del sistema nell'ipotesi di aderenza e dobbiamo trovare le forze che agiscono sul corpo stesso

$$\begin{cases} 0 = m g \sin(\alpha) - A \\ -a \omega^2 m \sin(\omega t) = -m g \cos(\alpha) + N \end{cases} \implies \begin{cases} A = m g \sin(\alpha) \\ N = m(g \cos(\alpha) - a \omega^2 \sin(\omega t)) \end{cases}$$

A questo punto è necessario verificare che siano corrette tali soluzioni: bisogna trovare una relazione tra le grandezze in gioco che garantisca la validità dell'ipotesi di aderenza.

Sappiamo che il cono di attrito statico è definito dal coefficiente di aderenza  $f_a$  e sappiamo che qualsiasi reazione vincolare all'interno del cono di attrito statico è possibile. In termini quantitativi possiamo scrivere la compatibilità di queste componenti tangenziale e normale con il cono di aderenza sulla base del loro rapporto:

$$\frac{\|A\|}{\|N\|} \leq f_a \implies \frac{\sqrt{g^2 \sin^2(\alpha) + (g \cos(\alpha) - a \omega^2 \sin(\omega t))^2}}{\sqrt{(g \cos(\alpha) - a \omega^2 \sin(\omega t))^2}} \leq f_a$$

Si noti che al fine di prendere la norma delle due componenti sappiamo che: nel caso della componente di attrito A sappiamo che possiamo prendere direttamente la sua espressione in quanto è sempre positiva, per quanto riguarda N lo riportiamo con l'espressione trovata, ma sarà necessario discutere l'espressione che ne risulta per comprenderne il campo di validità.

Per quanto riguarda il denominatore sappiamo che il vincolo che si realizza al contatto tra i due corpi è unilaterale e quindi ha senso tale rapporto solo quando il denominatore è positivo.

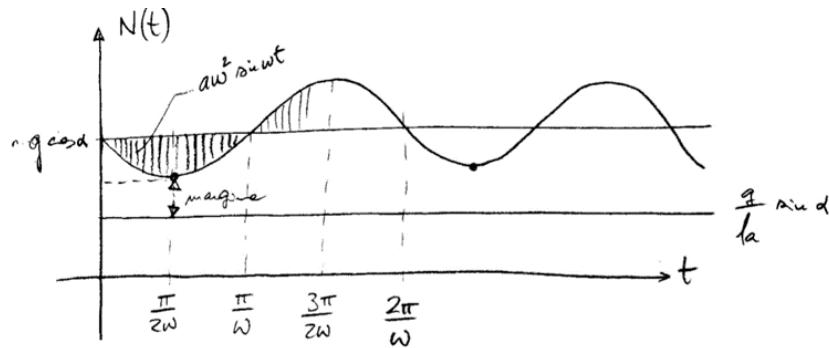
Se infatti sviluppiamo la diseguaglianza nell'ipotesi di aderenza sia positivo otteniamo

$$g \cos(\alpha) - a \omega^2 \sin(\omega t) \geq \frac{g}{f_a} \sin(\alpha)$$

Tale disequazione corrisponde alla validità dell'ipotesi di aderenza che abbiamo introdotto.

$$N(t) = m(g \cos(\alpha) - a \omega^2 \sin(\omega t)) \geq m \frac{g}{f_a} \sin(\alpha)$$

Proviamo a interpretare la condizione di aderenza tramite un grafico:



Osserviamo che è presente un termine costante ( $m g \cos \alpha$ ) al quale sottraiamo il valore ( $m a \omega^2 \sin(\omega t)$ ), che ha un andamento sinusoidale.

Il risultato è ancora una funzione armonica con valore medio non nullo che dipende direttamente dalla massa, la costante di gravità e l'inclinazione del piano inclinato.

Tanto maggiore è l'inclinazione tanto più piccolo è questo valore medio e di conseguenza tanto più si abbassa il valore medio attorno al quale oscilla la funzione.

D'altra parte il valore sinusoidale ha un'ampiezza che dipende proporzionalmente da  $a$  (moto imposto al piano inclinato) e quadraticamente dalla frequenza che imponiamo a movimento.

A questo punto confrontiamo l'andamento tempo variante con il valore soglia ( $m \frac{g}{f_a} \sin(\alpha)$ ) che è tracciato come una retta orizzontale alla quota che gli compete: osserviamo che le condizioni di aderenza rimangono valide fintanto che l'andamento armonico diagrammato non interseca il valore di soglia.

Osserviamo anche che all'aumentare dell'angolo  $\alpha$  diminuisce il valore medio e aumenta il valore di soglia: da un lato si alza il valore di soglia, dall'altro lato si abbassa il valore medio dell'oscillazione. In altri termini aumentando  $\alpha$  ci si avvicina sempre più alle condizioni in cui si ha strisciamento incipiente, essendo il margine la distanza tra il minimo della funzione armonica e la soglia che abbiamo tracciato.

Pensando invece di aver fissato l'angolo di inclinazione del piano inclinato, possiamo avvicinarci o allontanarci dalle condizioni di strisciamento incipiente regolando l'ampiezza del moto imposto al piano inclinato oppure la frequenza; avendo però la frequenza un effetto molto più marcato (quadratico) sulla possibilità di far avvicinare la curva armonica al valore di soglia.

La condizione limite in cui rimane valida la condizione di aderenza si verifica quando la funzione armonica assume nel suo punto di minimo esattamente il valore di soglia.

$$N(t) = m \frac{g}{f_a} \sin \alpha$$

$$m(g \cos(\alpha) - a_{max} \omega^2 \sin(\omega t)) = m \frac{g}{f_a} \sin(\alpha)$$

$$a_{max} = \frac{1}{\omega^2}(g \cos(\alpha) - \frac{g}{f_a} \sin(\alpha))$$

Questa applicazione ha senso quando si va a violare le condizioni di aderenza e quindi quando il sistema comincia a muoversi: pensando di aver fissato la frequenza da questa relazione si può trovare l'ampiezza oltre alla quale è opportuno far funzionare l'oscillatore affinché il movimento si abbia.

Lavorare sulla frequenza, tuttavia, è addirittura più efficace pensando che ha un effetto quadratico, ma aumentare in maniera indefinita la frequenza può non essere del tutto efficace perché benché l'attuatore possa essere in grado di produrre un moto alla frequenza desiderata, l'intero piano inclinato dovrebbe muoversi come un unico corpo rigido.

Questo non è detto che avvenga se si ha ripiani eccessivamente lunghi per cui la frequenza che andiamo a comandare può avvicinarsi ad una delle sue frequenze di risonanza: a quel punto la tavola vibrante non è più un corpo rigido e quindi tutta la trattazione fatta non è più valida.

### 5.9.1 Meccanismi con elementi dotati di puro rotolamento

Il problema di descrivere cosa succede tra corpi in movimento relativo si può porre anche all'interno di meccanismi e non solamente in corpi isolati come quello appena visto: non è infrequente il caso in cui

anche all'interno di meccanismi (insieme di più corpi rigidi vincolati reciprocamente) si ponga il problema di descrivere il moto di rotolamento o strisciamento tra corpi.

Prendiamo il caso di puro rotolamento, che è un caso di riferimento spesso molto utile per capire il funzionamento di un meccanismo in condizioni nominali.

Consideriamo un corpo piano che rotola e ci poniamo il problema di descriverne il moto rispetto ad un S.d.R. Abbiamo di fatto un corpo a contatto con strisciamento, di conseguenza, un sistema a camma.

Dal calcolo dei G.d.L. di tale sistema composto da una ruota che si muove mantenendosi in contatto con un piano di riferimento possiamo applicare l'equazione di Grubler secondo la quale:

$$n = 3(2 - 1) - 1 = 2 \text{ G.d.L.}$$

Che corrispondono alla traslazione orizzontale e alla rotazione.

Posto che il moto della ruota è completamente descritto dal vettore  $\omega$  e dalla velocità  $\dot{x}_c$ , andiamo a descrivere la distribuzione delle velocità sulla ruota stessa.

Mettiamoci innanzitutto in un S.d.R. centrato in C e che quindi si muove con la ruota, ma non ruota: possiamo quindi la formula della velocità di un punto che appartiene ad un corpo rigido:

$$\underline{\omega} = \dot{\vartheta} \cdot \mathbf{k} \quad \mathbf{v} = \underline{\omega} \wedge \underline{\rho}$$

dove  $\underline{\rho}$  è il raggio vettore tra il centro e il punto generico.

Ci interessiamo per semplicità della distribuzione delle velocità dei punti lungo un diametro della ruota orientato lungo l'asse y: il vettore  $\underline{\rho} = \rho \cdot \mathbf{j}$

$$\mathbf{v} = \dot{\vartheta} \cdot k \wedge \rho \mathbf{j} = -\rho \dot{\vartheta} \mathbf{i}$$

Abbiamo descritto la velocità di un punto generico di un corpo rigido (ruota) rispetto al S.d.R. centrato in C con assi paralleli a quelli fissi: la velocità in questione di conseguenza è una velocità relativa.

Possiamo sommare a questa velocità la velocità di trascinamento che per definizione è la velocità del punto generico del S.d.R. mobile che si sovrappone al punto di interesse, pensato invece solidale alla ruota.

Il moto di trascinamento è un moto di pura traslazione lungo l'asse x e quindi la velocità di trascinamento per tutti i punti della ruota è pari a

$$\mathbf{v} = (-\rho \dot{\vartheta} + \dot{x}_C) \mathbf{i}$$

A questo punto osserviamo che sommando i due profili di velocità diagrammato in figura (uno con andamento a farfalla, l'altro invece costante) otteniamo un andamento, in generale, a farfalla traslato a seconda di come sono le velocità angolari e la velocità di trascinamento.

La condizione di puro rotolamento si ha quando il punto di contatto tra la ruota e il terreno ha velocità nulla: imponendo che la velocità del punto di contatto P sia pari a zero, si ottiene una relazione che esprime il fatto di avere un moto di puro rotolamento del nostro corpo.

Per ottenere la velocità  $v_P$  del punto della ruota a contatto con il suolo, sostituendo a  $\rho$  il valore  $\rho_P = -r$  (ricordiamo che  $\rho$  è positivo verso la direzione positiva di y, mentre il punto P è identificato da una coordinata  $\rho$  negativa).

$$v_P = r \dot{\vartheta} + \dot{x}_C = 0$$

Da cui possiamo ricavare una relazione tra le grandezze  $\dot{\vartheta}$  e  $\dot{x}_C$ .

$$\int \dot{x}_C = \int -r \dot{\vartheta}$$

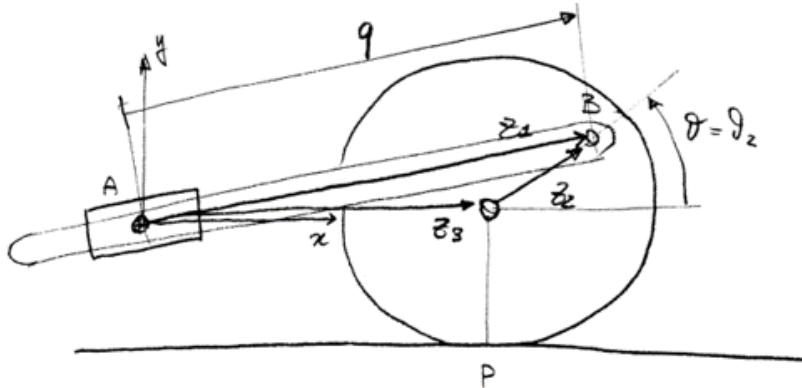
$$\dot{x}_C = -r \dot{\vartheta} + \text{cost.}$$

Questa relazione cinematica che esprime la condizione di puro rotolamento della ruota in un piano è rappresentata da una relazione di vincolo sulle velocità: ciò implica che il vincolo di puro rotolamento è un vincolo **non olonomo** o **anolonomo**, in quanto è espresso come una funzione delle derivate delle coordinate generalizzate e non delle coordinate generalizzate stesse.

Tuttavia in questo caso il vincolo matematico è facilmente integrabile: pur essendo espresso nelle velocità questo vincolo, per le condizioni di puro rotolamento nel piano, può essere integrato ed espresso sulle coordinate generalizzate.

### 5.9.2 Rotolamento puro oppure con strisciamento

Si ricorda che il fatto che si realizzi rotolamento puro oppure a strisciamento tra i corpi è un problema dinamico: è quindi necessario scrivere le equazioni del moto per capire se al contatto tra due corpi si realizza una condizione oppure l'altra.



Come cinematica possiamo solo scrivere condizioni per le quali esiste una relazione tra le velocità dei corpi quando ci sia il moto di puro rotolamento, ma per verificare se ci sia o meno la condizione di puro rotolamento bisogna coinvolgere la dinamica dei corpi a contatto.

Prendiamo come esempio un meccanismo che preveda la presenza di una ruota posta a contatto con un piano: scriviamo semplicemente la cinematica di questo sistema che prevede un corpo in rotolamento.

Partiamo dall'ipotesi che non sappiamo a priori se ci sia o meno strisciamento fra le superfici e scriviamo le equazioni della cinematica per questo sistema.

Il sistema presenta una ruota a cui è collegata una biella e questa scorre su un pattino che ha il centro vincolato da una coppia rotoidale a telaio.

Scriviamo l'equazione cinematica mediante il poligono di chiusura:

$$\begin{aligned} q \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 \end{Bmatrix} - a_2 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{Bmatrix} - a_3 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_3 \\ \sin \vartheta_3 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ q \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 \end{Bmatrix} - a_2 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_C \\ y_C \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

In cui le incognite sono  $\vartheta_1, \vartheta_2$  e  $x_C$ , una voltascelta come coordinata generalizzata  $q$ .

Possiamo osservare che questo sistema di 2 equazioni in 3 incognite non ammette soluzione in quanto si ha sovrabbondanza di incognite rispetto alle equazioni del sistema.

L'indeterminatezza del sistema di equazioni sta proprio nel fatto che non abbiamo fatto alcuna considerazione sulla natura del contatto tra ruota e terreno, in quanto non abbiamo ipotizzato le condizioni di puro rotolamento.

Sappiamo quindi che quando un vincolo può essere espresso in termini delle coordinate generalizzate e non delle sue derivate si dice **vincolo olonomo** ( $f(x_C, \vartheta)$ ), mentre quando ciò non è possibile si dice **vincolo non olonomo o anolonomo** ( $f(x_C, \dot{\vartheta})$ ).

Nel nostro caso pur avendo un'espressione del tipo  $f(x_C, \dot{\vartheta}) = 0$ , mediante semplice integrazione è possibile ricondurre il vincolo non olonomo ad un'espressione di vincolo olonomo.

La costante di integrazione dell'espressione equivalente olonomica si trova note le condizioni iniziali del meccanismo, che possono essere ad esempio: la coordinata  $x_C = x_{C0}$  quando  $\vartheta = 0$ .

Introduciamo ora l'ipotesi di puro rotolamento al meccanismo: che tale ipotesi sia o meno vera rimane una questione da verificare in base alla dinamica una volta trovata la soluzione trovata dal puro rotolamento. Sulla base di forze e momenti che agiscono sul sistema si trovano le reazioni vincolari

(componente normale e tangenziale) e si verifica che nelle condizioni di moto si mantiene vera l'ipotesi che la reazione vincolare rimane all'interno del cono di attrito statico.

Qualora ciò non valga più anche la cinematica del sistema viene a cambiare in quanto non vale più la relazione tra  $x_C$  e  $\vartheta$  derivante dal moto di puro rotolamento.

Di conseguenza, limitandoci esclusivamente al calcolo cinematico di questo sistema e introducendo l'ipotesi di puro rotolamento, per il quale:

$$x_C = -r\vartheta + x_{C0}$$

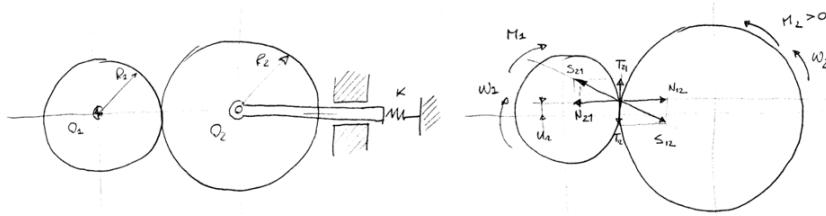
riscriviamo le equazioni della cinematica:

$$q \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 \end{Bmatrix} - a_2 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_C \\ y_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A questo punto le incognite che rimangono sono  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$  dal momento che fissato  $q$  come coordinata generalizzata è possibile risolvere il sistema perché l'incognita  $x_C$  è espressa in funzione di  $\vartheta_2$ .

### 5.9.3 Componenti meccanici: ruote di frizione

Passiamo ora a vedere alcune componenti meccanici, in particolare le **ruote di frizione**. In questa trattazione cercheremo di essere più generali e trovare una relazione che ci esprima la massima coppia che può essere espressa dalla ruota motrice alla ruota condotta.



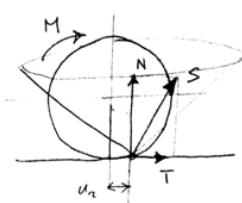
Consideriamo un sistema in cui è presente:

- una **ruota motrice** vincolata al telaio tramite una coppia rotoidale e di raggio  $R_1$
- una **ruota condotta** di raggio  $R_2$  e origine  $O_2$ , posta a contatto con la ruota motrice e mantenuta a contatto da una forza che è prodotta esternamente al sistema mediante una molla
- una **molla precaricata** che mantiene la ruota condotta a contatto con la ruota motrice.

Inoltre sono presenti un momento motore  $M_1$  applicato alla ruota motrice e un momento resistente  $M_2$  alla ruota condotta.

Ci interessa trovare l'espressione del massimo momento che può essere trasmesso dalla ruota motrice alla ruota condotta in assenza di strisciamento.

Lo schema proposto presenta componenti normali che non sono più localizzate al punto di intersezione del segmento che unisce i due centri, ma è spostato: questo perché ci aspettiamo che ci sia un certo attrito di rotolamento (che sarà espresso da un certo parametro di attrito che descriverà di quanto si sposta in avanti la reazione normale e quindi decribe in maniera implicita il momento di rotolamento che si oppone al moto di rotazione).



Ridisegnando una ruota che ha moto di rotolamento su una superficie andiamo a disegnare la componente tangenziale di attrito  $T$ , la componente normale di reazione vincolare  $N$  (la quale come abbiamo anticipato non è localizzato nel piano di simmetria della ruota, ma anticipa il movimento della ruota stessa), la reazione vincolare  $S$  (composizione delle due precedenti azioni) e il cono di attrito localizzato nel punto dove si ha la risultante delle pressioni.

L'assenza di strisciamento si imporrà come l'appartenenza della reazione vincolare S al più al cono o al suo interno. Sotto tali ipotesi vale la relazione cinematica di uguale velocità dei punti a contatto reciproco tra le due ruote, ovvero il rapporto di trasmissione:

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = - \frac{R_1}{R_2}$$

Dove il segno negativo sta a indicare che rispetto alle convenzioni le ruote hanno velocità angolari opposte.

Ci occupiamo ora di trovare la massima coppia trasmissibile: essendo la coppia legata alla componente tangenziale, cioè alla componente d'attrito, è intuitivo che la massima coppia si avrà quando la reazione vincolare S si trova sulla generatrice del cono. In altri termini quando:

$$T = f N$$

Studiamo il funzionamento delle due ruote di frizione nelle condizioni limite, ovvero quando la reazione vincolare giace sul cono di attrito statico e ci riferiamo alle condizioni in cui le due ruote hanno velocità angolari costanti (accelerazioni angolari nulle).

Ipotizziamo che non siano presenti strisciamenti anche a livello microscopico, cioè anche l'impronta nel contatto tra le due ruote non ha nessun fenomeno dissipativo rilevante: in queste condizioni possiamo scrivere un modello molto semplice, ma utile a capire l'efficacia di questo tipo di trasmissione.

Scriviamo quindi per la ruota motrice l'equazione di Eulero, per cui essendo l'accelerazione angolare nulla, tutti i momenti si compensano:

$$\begin{cases} M_1 = N_{21} u_r + f N_{21} R_1 = N_{21} (u_r + f R_1) \\ M_2 = N_{12} (u_r - f R_2) \end{cases}$$

Abbiamo ottenuto due espressioni per i due momenti; possiamo imporre che  $N_{12} = N_{21} = N$  in quanto sono semplici reazioni l'una rispetto all'altra e le due equazioni che ritornano  $M_1$  e  $M_2$  mettono in relazione i momenti motore e frenante al coefficiente di attrito, il parametro di attrito di rotolamento e la forza N (carico con cui noi forziamo le due ruote l'una contro l'altra).

Si possono utilizzare queste due equazioni per trovare la forza N, nota  $M_2$ :

$$N = \frac{M_2}{u_r - f R_2}$$

Oppure è possibile trovare la  $M_2$  massima trasmissibile avendo fissato un certo precarico N tra le due ruote.

Troviamo, in questo modo, anche la reazione S completa:

$$\|S\| = \sqrt{(f N)^2 + N^2} = N \sqrt{f^2 + 1} = M_2 \frac{\sqrt{f^2 + 1}}{u_r - f R_2}$$

Può essere utile calcolare il rendimento di questo sistema. Tale sistema è finalizzato a trasferire una certa coppia  $M_1$  dal motore alla ruota condotta secondo una certa relazione, che idealmente è legata solo ai raggi delle due ruote.

$$M_2 = N (u_r - f R_2) = M_1 \cdot \frac{u_r - f R_2}{u_r + f R_1}$$

E questo è il momento che troviamo alla ruota condotta in condizioni reali.

In condizioni ideali

$$M_2^* = - M_1 \frac{R_2}{R_1}$$

In assenza di qualsiasi altro fenomeno dissipativo il rendimento può essere calcolato come:

$$\eta = \frac{M_2}{M_2^*} = \frac{M_1 \cdot \frac{u_r - f R_2}{u_r + f R_1}}{- M_1 \frac{R_2}{R_1}} = \frac{- \frac{u_r}{R_2} + f}{\frac{u_r}{R_1} + f}$$

Fino ad ora abbiamo considerato condizioni di funzionamento al limite dell'aderenza in cui la forza che si scambiano le due ruote sta sul cono di attrito statico.

Adesso proviamo a considerare le condizioni in cui il momento che trasmettiamo viene ridotto rispetto alle condizioni limite di aderenza: la riduzione di momento sia a  $M_1$  che a  $M_2$  porta la reazione vincolare ad essere interna al cono di attrito statico in una condizione che dipende dai momenti motore e frenante applicati al sistema.

Consideriamo il sistema in funzionamento con stesso precarico  $N$  e riscriviamo le equazioni di equilibrio delle due ruote, avendo sempre condizioni di funzionamento di regime (accelerazioni angolari nulle):

$$\begin{cases} M_1 = N_{21}(u_r + f R_1) \\ M_2 = N_{12}(u_r - f R_2) \end{cases}$$

Qualora  $f$  corrisponda al coefficiente di aderenza o attrito statico, siamo nelle condizioni limite nelle quali  $T = f N$ .

Pensiamo invece a condizioni di funzionamento generiche di aderenza, ma non al limite: la componente tangenziale di forza  $T$  al contatto tra le due superfici è minore ( $T < f N$ ). Posto che possiamo sempre riferirci al rapporto tra  $T$  e  $N$  con un coefficiente, che appunto è legato all'angolo di cui la risultante si allontana dalla normale, possiamo scrivere che in generale:

$$T = f^* N$$

dove  $f^*$  è una generica condizione di attrito statico all'interno del relativo cono di attrito, tale che ( $f^* < f$ ), e dipenderà dai momenti  $M_1$  e  $M_2$  che stiamo applicando al sistema compatibilmente con il fatto che l'accelerazione angolare delle ruote sia pari a zero.

Detto questo possiamo ripercorrere lo stesso calcolo che abbiamo fatto precedentemente, riferito alle condizioni di aderenza, e arrivare ad un'espressione del rendimento (formalmente identica a quella di prima) in cui il coefficiente  $f$  non è più il coefficiente di aderenza, ma è il coefficiente generico  $f^*$  che si riferisce alle condizioni di funzionamento interne al cono di aderenza.

$$\eta^* = \frac{-\frac{u_r}{R_2} + f^*}{\frac{u_r}{R_1} + f^*}$$

Si osservi che  $u_r$  è rimasta invariata in quanto il parametro di attrito di rotolamento è sostanzialmente funzione del precarico  $N$ , avendo le stesse ruote con stesse caratteristiche di elasticità e di proprietà del materiale al contatto rispetto a quelle del caso precedente e avendo ottenuto l'espressione di  $N$  uguale al caso precedente.

Dallo studio delle espressione dei due rendimenti concludiamo che  $\eta^* < \eta$ . Pertanto il rendimento di una coppia di ruote di frizione diminuisce quando si lavora in condizioni diverse da quella di aderenza limite: l'utilità/efficacia di questo tipo di trasmissione si ha quando le coppie sono sufficientemente alte da far funzionare il sistema in condizione di aderenza limite.

Osseviamo inoltre che se trasmettiamo un coppia molto bassa, si può arrivare ad ottenere un rendimento  $\eta^* = 0$ .

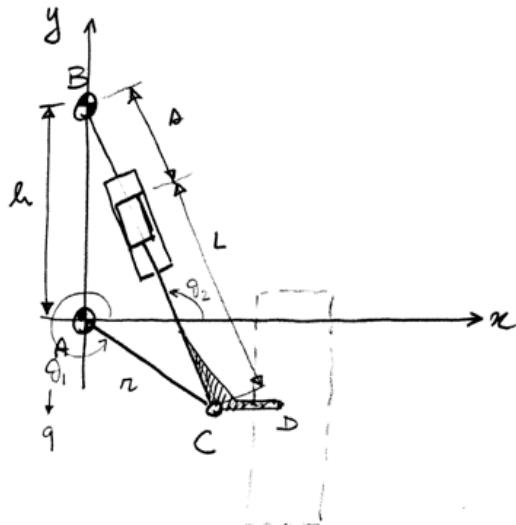
Mentre quando  $f^* < \frac{u_r}{R_2}$  il rendimento diventa negativo: il significato di questa condizione è che se applichiamo una coppia troppo piccola il sistema non riesce a muoversi. L'effetto della componente normale  $N$  combinato con il braccio (parametro di attrito di rotolamento)  $u_r$  è sufficiente ad equilibrare l'effetto della coppia che applichiamo.

La soluzione a questo problema è quella di adeguare il precarico  $N$  alla coppia da trasmettere, in particolare: se ci troviamo a trasmettere una coppia che va diminuendo è opportuno diminuire in maniera concorde anche il precarico  $N$ . La riduzione del precarico  $N$  porta ad una riduzione del parametro di attrito di rotolamento  $u_r$  e, di conseguenza, il fattore detimentale che abbiamo al numeratore e al denominatore.

In questo modo il rendimento non risente più di tanto della riduzione del momento in quanto si trova a lavorare sempre in prossimità della condizione di aderenza.

## 5.10 Lezione 06-05 – Daniele Bortoluzzi

### 5.10.1 Esercizio: sospensione McPherson



In questa lezione trattiamo un esercizio che è un meccanismo piano che costituisce il meccanismo alla base della sospensione McPherson, la quale è una delle più diffuse in campo automobilistico.

È un esercizio che si pone l'obiettivo di trattare la cinematica e la dinamica di un meccanismo e costituisce un utile momento di ripasso dei metodi già visti a lezione per risolvere meccanismi a catena chiusa.

Il meccanismo è costituito da tre corpi:

- il membro **AC** vincolato a telaio dalla cerniera **A**
- il membro **CD** collegato con una coppia prismatica al corpo rigido vincolato a telaio nella coppia **B** e con una coppia rotoidale al corpo **AC**.
- il telaio

Ci sono dunque tre coppie rotoidali (**A**, **B**, **C**) e una coppia prismatica che collega il corpo rigido **CD** al corpo vincolato a telaio in **B**.

In questa configurazione il meccanismo costituisce un meccanismo di sospensione di un autoveicolo in cui si pensa che la ruota sia vincolata in **D** e ruoti attorno ad un asse complanare al meccanismo e orientato secondo l'asse **x**: durante il movimento del veicolo, nel S.d.R. solidale al telaio del veicolo stesso, la ruota a causa dell'irregolarità del terreno si dovrà spostare lungo l'asse **y** e lo faccia secondo la risposta di questo meccanismo, pensato per questo scopo.

Si richiede di:

1. Trovare il rapporto di trasmissione tra lo spostamento verticale del punto **D** ( $y_D$ ) e la rotazione del mozzo (**CD**). Tale rapporto di trasmissione indica quanto il movimento verticale della sospensione provochi anche una rotazione dell'asse attorno al quale ruota lo pneumatico.

La direzione **CD**, che nello schema è parallela all'asse **x**, opportuno che lo rimanga il più possibile durante il funzionamento della sospensione.

2. Trovare l'accelerazione del braccetto (**CD**) quando sul pneumatico agisce una forza verticale **F** in condizione di velocità nulla, nell'ipotesi che sia una massa concentrata nel centro di massa **D**.

L'ipotesi dunque è che la ruota rappresenti una massa concentrata nel punto **D**, che il meccanismo sia inizialmente fermo e che ad un certo punto riceva una forza verticale (a rappresentare l'interazione del pneumatico con l'asfalto).

Cominciamo con la prima delle due domande:

Prendiamo come coordinate generalizzate la rotazione  $\vartheta_1$  del braccio **AC** e la rotazione  $\vartheta_2$  del braccio **CB**. Considereremo poi la rotazione  $\vartheta_1$  come movente del meccanismo e tutte le altre grandezze come cedenti.

Essendo un meccanismo piano a catena chiusa risolviamo questo problema mediante il poligono di chiusura:

$$\begin{aligned} \mathbf{AC} + \mathbf{CB} + \mathbf{BA} &= 0 \\ r \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 \end{Bmatrix} + (L + s) \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{Bmatrix} + h \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

dove  $s$  è una grandezza che varia a seconda della configurazione del meccanismo e costituisce anch'essa un'incognita della cinematica.

Riscrivendo le due equazioni in forma scalare:

$$\begin{cases} r \cos \vartheta_1 + (L+s) \cos \vartheta_2 = 0 \\ r \sin \vartheta_1 + (L+s) \sin \vartheta_2 - h = 0 \end{cases}$$

Procediamo ora al calcolo dei rapporti di velocità. Per far questo deriviamo le due equazioni rispetto al tempo e raccogliamo nella matrice Jacobiana i coefficienti delle derivate delle incognite  $\dot{\vartheta}_2, \dot{s}$  avendo portato a secondo membro i termini che contengono la coordinata movente  $\dot{\vartheta}_1$ .

$$\begin{bmatrix} \cos \vartheta_2 & -(L+s) \sin \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 & (L+s) \cos \vartheta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\vartheta}_2 \end{Bmatrix} = r \begin{Bmatrix} \sin \vartheta_1 \\ -\cos \vartheta_1 \end{Bmatrix} \dot{\vartheta}_1$$

D'ora in poi consideriamo  $q = \vartheta_1$ .

Calcoliamo il determinante della matrice jacobiana:

$$\text{Det}[J] = (L+s) \cos^2 \vartheta_2 + (L+s) \sin^2 \vartheta_2 = L+s$$

Quindi il vettore  $\tau$  contenente i due rapporti di velocità:

$$\{\tau\} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_2 & \sin \vartheta_2 \\ -\frac{\sin \vartheta_2}{L+s} & \frac{\cos \vartheta_2}{L+s} \end{bmatrix} r \begin{Bmatrix} \sin q \\ \cos q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r \sin(q - \vartheta_2) \\ -\frac{r}{L+s} \cos(q - \vartheta_2) \end{Bmatrix}$$

Per cui i rapporti di velocità risulteranno essere:

$$\begin{aligned} \tau_{q \vartheta_2} &= -\frac{r}{L+s} \cos(q - \vartheta_2) \\ \tau_{y_C \vartheta_2} &= \frac{\dot{\vartheta}_2 / \dot{q}}{\dot{y}_C / \dot{q}} = \frac{\tau_{q \vartheta_2}}{\tau_{q y_C}} \end{aligned}$$

Ricordo che il risultato del vettore dei rapporti di velocità dipende direttamente da come abbiamo definito il vettore delle velocità incognite quando abbiamo scritto le equazioni della cinematica.  $\begin{Bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\vartheta}_2 \end{Bmatrix}$ .

Dal rapporto di velocità sopra riportato, dunque, conosciamo solo il termine al numeratore. Possiamo tuttavia trovare il termine al denominatore dal momento che la coordinata  $q$  muove l'intero meccanismo:

$$\mathbf{AC} = r \begin{Bmatrix} \cos q \\ \sin q \end{Bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{v}_C = \frac{d\mathbf{AC}}{dt} = r \begin{Bmatrix} -\sin q \\ \cos q \end{Bmatrix} \dot{q}$$

Da cui

$$\dot{y}_C = r \cos q \dot{q} = \tau_{q y_C} \dot{q}$$

A questo punto sostituendo tale rapporto di velocità nell'espressione che abbiamo travato:

$$\tau_{y_C \vartheta_2} = -\frac{r}{L+s} \cos(q - \vartheta_2) \frac{1}{\dot{y}_C \cos q}$$

che rappresenta il rapporto tra la rotazione del mozzo e la velocità di spostamento verticale della ruota.

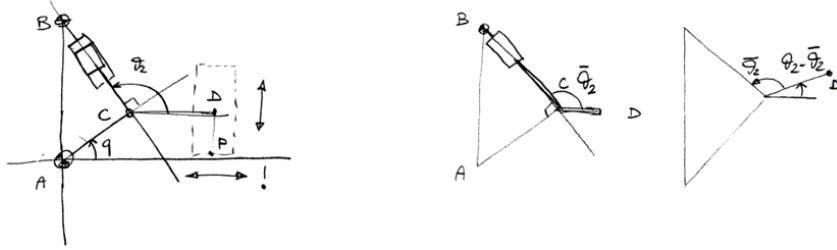
Possiamo osservare che le potenziali configurazioni singolari di questo meccanismo si ottengono per  $s = -L$ , ma affinché ciò avvenga il punto C dovrà arrivare a coincidere con il punto B. In questa realizzazione pratica la cosa è impossibile pertanto possiamo dire che nelle condizioni di funzionamento previste per questo cinematismo questo non raggiunge mai la configurazione singolare.

È opportuno tuttavia che il rapporto di velocità calcolato sia minimizzato in quanto solo in questo modo garantiamo che durante il funzionamento della sospensione, l'asse di rotazione della ruota non venga modificato in direzione, ma che trasli mantenendosi parallelo alla configurazione iniziale.

Una volta ottenuto il rapporto di velocità tra spostamento verticale del punto C e rotazione del mozzo è possibile chiedersi se esistono delle condizioni ideali di funzionamento di questo meccanismo.

Dal momento che sappiamo che la rotazione rispetto allo spostamento verticale sia nulla in un caso ideale:

$$\tau_{y_C \vartheta_2} = 0 \implies \cos(q - \vartheta_2) = 0 \implies q - \vartheta_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$$



Se osserviamo il significato geometrico di questa condizione si ottiene che tale condizione è verificata quando l'asta AC è ortogonale all'asta BC; tra le configurazioni matematicamente compatibili con l'annullamento del rapporto di velocità esiste quella in cui  $\vartheta_2 - q = \frac{\pi}{2}$  ( $k = -1$ ).

A cavallo di questa condizione un piccolo spostamento verticale della ruota non comporta alcuna rotazione essendo il rapporto di velocità nulla. Se impostiamo l'angolo tra l'asta CD e l'asta CB pari all'angolo  $\vartheta_2$  in questa configurazione, il braccetto CD si trova orizzontale e rimarrà tale anche per piccoli spostamenti verticali del punto D.

In questa configurazione abbiamo dunque un'idealità di funzionamento lungo l'asse verticale (y), ciò non toglie che pur ruotando la ruota possa muoversi lungo una traiettoria che preveda anche componenti orizzontali di spostamento; abbiamo sì annullato la rotazione dell'asta CD (asse di rotazione della ruota), però il punto D può combinare una componente verticale di spostamento con una componente orizzontale (che costituirà un funzionamento non ideale in quanto origina strisciamento dello pneumatico nella direzione dell'asse).

Il secondo punto a cui rispondere è di trovare l'accelerazione del braccetto supponendo che sullo pneumatico agisca una forza verticale  $\mathbf{F}$  con meccanismo inizialmente fermo e nell'ipotesi che l'unica inerzia agente sul sistema sia una massa agente sull'asse della ruota D.

In questo senso il meccanismo è particolarmente semplice in quanto è possibile trovarne l'accelerazione utilizzando il PLV:

Scriviamo il vettore AD come somma di vettori AC e CD di cui quest'ultimo visto come somma di un angolo fisso e di un angolo variabile nel suo intorno.

$$\mathbf{AD} = r \begin{Bmatrix} \cos q \\ \sin q \end{Bmatrix} + l \begin{Bmatrix} \cos(\vartheta_2 - \underline{\vartheta}_2) \\ \sin(\vartheta_2 - \underline{\vartheta}_2) \end{Bmatrix}$$

Differenziamo l'espressione trovata per trovare lo spostamento virtuale del punto D, noto che in questa configurazione il meccanismo non ha rotazioni dei corpi ( $\delta\vartheta_2 = 0$ ):

$$\delta\mathbf{D} = r \begin{Bmatrix} -\sin q \\ \cos q \end{Bmatrix} \delta q + l \begin{Bmatrix} -\sin(\vartheta_2 - \underline{\vartheta}_2) \\ \cos(\vartheta_2 - \underline{\vartheta}_2) \end{Bmatrix} \delta\vartheta_2^0 = r \begin{Bmatrix} -\sin q \\ \cos q \end{Bmatrix} \delta q$$

Come accennato in precedenza è necessario calcolare l'accelerazione del punto D dove è localizzata l'unica massa del sistema in modo da poter calcolare la forza d'inerzia e con questa bilanciare la forza esterna agente sullo pneumatico.

La forza d'inerzia risulterà proporzionale all'accelerazione del punto D, pertanto riprendiamo il calcolo dello spostamento virtuale del punto D dove abbiamo sviluppato il differenziale del vettore AD e aggiungiamo la derivata temporale:

$$\mathbf{a}_{\mathbf{D}} = r \begin{Bmatrix} -\cos q \\ -\sin q \end{Bmatrix} \dot{q}^2 + r \begin{Bmatrix} -\sin q \\ \cos q \end{Bmatrix} \ddot{q} + l \begin{Bmatrix} -\cos(\vartheta_2 - \underline{\vartheta}_2) \\ -\sin(\vartheta_2 - \underline{\vartheta}_2) \end{Bmatrix} \dot{\vartheta}_2^0 + l \begin{Bmatrix} -\sin(\vartheta_2 - \underline{\vartheta}_2) \\ \cos(\vartheta_2 - \underline{\vartheta}_2) \end{Bmatrix} \dot{\vartheta}_2^0$$

In questa formulazione generale dobbiamo inserire le ipotesi del calcolo che si riferiscono alla condizioni in cui consideriamo il meccanismo ovvero la condizione in cui la rotazione  $\vartheta_2$  è stazionaria e di conseguenza lo spostamento virtuale del meccanismo a cavallo di questa configurazione non provoca rotazione.

Possiamo ipotizzare dunque che  $\dot{\vartheta}_2 = \ddot{q} = 0$ .

Alla luce delle ipotesi appena enunciate possiamo calcolare il vettore tra AP, dove P è il punto di contatto tra pneumatico e asfalto, trattandolo come somma vettoriale:

$$\mathbf{AP} = \mathbf{AD} + \mathbf{DP} = \mathbf{AD} + R \begin{Bmatrix} \sin(\vartheta_2 + \underline{\vartheta}_1) \\ -\cos(\vartheta_2 - \underline{\vartheta}_2) \end{Bmatrix}$$

Noto il vettore  $\mathbf{AP}$  possiamo calcolare il suo spostamento virtuale al fine di calcolare il lavoro virtuale della forza di contatto:

$$\delta\mathbf{P} = \delta\mathbf{D} + R \begin{Bmatrix} \cos(\vartheta_2 - \underline{\vartheta}_2) \\ \sin(\vartheta_2 - \underline{\vartheta}_2) \end{Bmatrix} \delta\vartheta_2^0 = \delta\mathbf{D}$$

Calcoliamo ora il lavoro virtuale delle forze agenti sul sistema: il lavoro virtuale nel caso in esame risulta essere:

$$\delta L_{virt} = \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{P} + \mathbf{F}_{inerzia} \cdot \delta\mathbf{D} = 0$$

dove:

- $\mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix} \cdot r \begin{Bmatrix} -\sin q \\ \cos q \end{Bmatrix} \delta q = F r \cos q \delta q$
- $$\begin{aligned} \mathbf{F}_{inerzia} \cdot \delta\mathbf{D} &= -m \mathbf{a_D} \cdot \delta\mathbf{D} = (-m r \begin{Bmatrix} -\sin q \\ \cos q \end{Bmatrix} \ddot{q} + l \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \ddot{\vartheta}_2) \cdot r \begin{Bmatrix} -\sin q \\ \cos q \end{Bmatrix} \delta q \\ &= -m r^2 \sin q \ddot{q} \sin q \delta q + (-m r \cos q \ddot{q} + l \ddot{\vartheta}_2) r \cos q \delta q \end{aligned}$$

Ci interessa a questo punto mettere in relazione l'accelerazione  $\ddot{\vartheta}_2$  con la configurazione del meccanismo e le caratteristiche di velocità. Quindi riportare alla coordinata libera e alla configurazione del meccanismo tutte le variabili che compaiono nell'espressione.

Partendo dalla definizione di rapporto di velocità:

$$\dot{\vartheta}_2 = \tau_{q \vartheta_2} \dot{q} = -\frac{r}{L+s} \cos(q - \vartheta_2) \dot{q}$$

Derivando ulteriormente nel tempo:

$$\ddot{\vartheta}_2 = -r \frac{(-\sin(q - \vartheta_2)(\dot{q} - \dot{\vartheta}_2) \cancel{\dot{q}} + \cos(q - \vartheta_2)\ddot{q})(L+s) + \cos(q - \vartheta_2)\dot{q}\cancel{\dot{q}}}{(L+s)^2}$$

Applicando le condizioni di riferimento:  $\dot{q} = 0$ ,  $\dot{\vartheta}_2 = 0$ ,  $\dot{s} = 0$ , si ottiene l'espressione dell'accelerazione:

$$\ddot{\vartheta}_2 = -\frac{r}{(L+s)^2} \cos(q - \vartheta_2) \ddot{q} \cancel{(L+s)} = -\frac{r}{L+s} \cos(q - \vartheta_2) \ddot{q}^0 = 0$$

Sostituendo tutte le espressioni ottenute nell'espressione del lavoro virtuale:

$$\begin{aligned} \delta L_{virt} &= F r \cos q \delta q - m r^2 \sin^2 q \ddot{q} \delta q - m r^2 \cos^2 q \ddot{q} \delta q \\ &= F r \cos q \delta q - m r^2 \ddot{q} \delta q = 0 \end{aligned}$$

Da questo bilancio di lavori virtuali possiamo esplicitare l'accelerazione della coordinata libera:

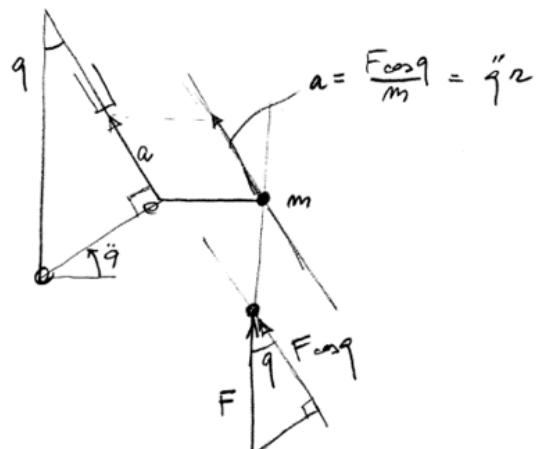
$$\ddot{q} = \frac{F}{m r} \cos q$$

Al di là del risultato matematico si può cercare di dare un'interpretazione fisica a questo risultato:

Vediamo che nella configurazione di riferimento la forza applicata al punto D può essere scomposta in due componenti (ortogonale e parallela alla direzione del braccio BC, lungo la quale il braccio CD si sta muovendo). Pertanto l'accelerazione del sistema può essere trovata come rapporto tra la forza e la massa:

$$a = \frac{F \cos q}{m} = \ddot{q} r$$

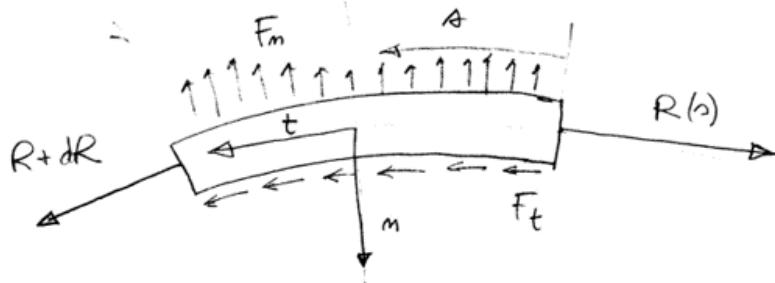
Ottenendo esattamente l'accelerazione del punto materiale D per effetto dell'accelerazione della coordinata libera  $q$ .



### 5.10.2 Componenti meccanici: Trasmissioni a cinghia

Le trasmissioni a cinghia sono molto frequenti nell'ambito dell'ingegneria meccanica per cui è utile trovare delle relazioni che descrivono il loro funzionamento, in particolare la coppia che possiamo trasmettere con una trasmissione a cinghia in funzione delle caratteristiche principali (coefficiente di attrito, elasticità della cinghia, velocità angolare della puleggia...).

Prendiamo un modello ideale di cinghia in cui quest'ultima si avvolge per un certo angolo sulla puleggia come indicato in figura e partiamo da un'analisi infinitesima dinamica della cinghia per arrivare poi ad un'espressione più generale che coinvolge l'intera cinghia nella sua interazione con la puleggia (ci permetterà di trovare il momento trasmesso da questo tipo di trasmissione).



Estraiamo un elemento infinitesimo di cinghia a cui è associato un certo angolo di curvatura (che è lo stesso della puleggia) e su questo elemento infinitesimo definiamo una coordinata curvilinea  $s$  lungo la circonferenza media nello spessore della cinghia, definiamo anche un S.d.R. centrato nell'elemento infinitesimo di cinghia composto da un asse normale che punta verso il centro della puleggia e un asse tangenziale che punta verso sinistra.

Vengono riportate anche le forze che agiscono su questo elemento infinitesimo di cinghia in modo da evidenziarne la loro differente natura:

- Forze normali  $\mathbf{F}_n$  che sono forze per unità di lunghezza della cinghia e sono le pressioni che si sviluppano al contatto tra cinghia e puleggia e che quindi tendono a spingere l'elemento infinitesimo di cinghia verso l'esterno.
- Azioni tangenziali al contatto tra puleggia e cinghia legate all'attrito  $\mathbf{F}_t$ , e sono sostanzialmente delle pressioni (forze per unità di lunghezza) anche se si riferiscono a componenti di forza che stanno sulla superficie di contatto invece che perpendicolari. Sono orientate nello stesso verso dell'asse  $t$ .
- Forze che l'elemento infinitesimo di cinghia riceve lungo le superfici che lo collegano alla parte restante di cinghia  $\mathbf{R}$ . Esse sono funzioni della posizione della coordinata  $s$  e sono in generale diverse tra una superficie e l'altra dell'elemento infinitesimo di cinghia di lunghezza  $ds$ .

Scriviamo le equazioni del moto di questo elemento infinitesimo di cinghia in modo vettoriale, ovvero scriviamo che la somma di tutte le forze che agiscono su questo elemento infinitesimo di cinghia sono uguali alla massa (sia  $\mu$  la densità lineare di massa [Kg/m]) per la sua accelerazione:

$$\mu ds \mathbf{a} = \mathbf{F} ds + (\mathbf{R} + d\mathbf{R}) - \mathbf{R}$$

Sviluppando la funzione  $R(s)$  e esprimendone il differenziale

$$d\mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} ds$$

e sostituendo tale espressione al bilancio di forze:

$$\begin{aligned} \mu ds \mathbf{a} &= \mathbf{F} ds + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} ds \\ \mu \mathbf{a} &= \mathbf{F} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} \end{aligned}$$

L'equazione così ottenuta è indefinita in quanto non si riferisce ad un ben definito elemento di cinghia, ma è generica dell'elemento infinitesimo che può essere posizionato ovunque lungo l'arco di contatto tra cinghia e puleggia.

Scriviamo ora le componenti  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{R}(s) = T \mathbf{t} \quad ; \quad \mathbf{F}(s) = -F_n \mathbf{n} + F_t \mathbf{t}$$

Scriviamo ora la velocità della cinghia  $\mathbf{v} = v \mathbf{t}$ , e al fine di calcolare l'accelerazione che è presente nell'equazioni indefinita dell'equilibrio calcoliamo la derivata di questo vettore velocità:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{dv}{dt} \mathbf{t} + v \frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{dv}{dt} \mathbf{t} + v (\underline{\omega}_C \wedge \mathbf{t}) \quad (\text{il prodotto esterno è } \parallel \mathbf{n}) \\ &= \frac{dv}{dt} \mathbf{t} + v \omega_C \mathbf{n} = \frac{dv}{dt} \mathbf{t} + \frac{v^2}{r} \mathbf{n} \quad (\omega = \frac{v}{r}) \end{aligned}$$

Introdurremo in seguito l'ipotesi che la cinghia in moto stazionario è inestensibile pertanto la derivata della velocità nel tempo sarà pari a zero.

Torniamo ora all'equazione indefinita di equilibrio dell'elemento infinitesimo di cinghia e osserviamo che oltre all'accelerazione compare un termine legato alla derivata della tensione rispetto a  $s$ .

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}(T \mathbf{t}) = \frac{\partial T}{\partial s} \mathbf{t} + T \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s}$$

dove:

$$\mathbf{t} = \cos \vartheta \mathbf{i} - \sin \vartheta \mathbf{j}$$

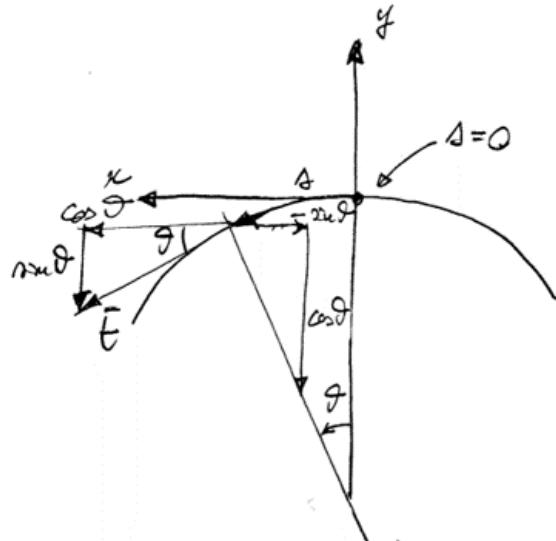
noto dalla figura a finaco che  $\vartheta = s/r$

$$\mathbf{t} = \cos \frac{s}{r} \mathbf{i} - \sin \frac{s}{r} \mathbf{j}$$

In questo modo sarà possibile eseguire la derivata rispetto alla coordinata curvilinea del vettore tangente

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} = -\sin \frac{s}{r} \frac{1}{r} \mathbf{i} - \cos \frac{s}{r} \frac{1}{r} \mathbf{j} = -\frac{1}{r} (\sin \vartheta \mathbf{i} + \cos \vartheta \mathbf{j})$$

Dove l'argomento tra parentesi non è altro che il versore  $-\mathbf{n}$ .



Così facendo è finalmente possibile esprimere la derivata parziale di  $\mathbf{R}$  rispetto alla coordinata curvilinea  $s$ .

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} = \frac{\partial T}{\partial s} \mathbf{t} + \frac{T}{R} \mathbf{n}$$

Così facendo, sostituiamo i termini calcolati precedentemente nell'equazioni indefinita di equilibrio:

$$\mu \frac{d\phi}{dt} \mathbf{t} + \mu \frac{v^2}{r} \mathbf{n} = -F_n \mathbf{n} + F_t \mathbf{t} + \frac{\partial T}{\partial s} \mathbf{t} + \frac{T}{r} \mathbf{n}$$

Per ogni versore della terna fissata possiamo scrivere un'equazione di equilibrio:

$$\mu \frac{v^2}{r} = -F_n + \frac{T}{r} \quad ; \quad F_t + \frac{\partial T}{\partial s} = 0$$

dove le incognite risultano essere  $T, F_n, F_t$  (3 incognite in 2 equazioni).

Non è ancora possibile trovare una soluzione in forma chiusa in quanto mancano informazioni: non abbiamo la possibilità di risolvere il sistema.

L'informazione che manca è la presenza di un legame tra le forze tangenziali e le forze normali, ovvero la presenza di una legge di attrito tra la componente tangenziale di forza e quella normale.

Introduciamo questo legame sapendo che esistono due possibilità:

1. L'elemento infinitesimo di cinghia non stia scorrendo sulla puleggia e che quindi sia in condizioni di aderenza/attrito statico, nel qual caso vale una relazione di disuguaglianza del tipo:

$$\|F_t\| \leq f_s F_n$$

con  $f_s$  attrito statico

L'uguaglianza è valida solo in condizioni di moto incipiente.

2. L'elemento infinitesimo di cinghia è soggetto a scivolamento:

$$\|F_t\| = f F_n$$

Il sistema è quindi definito.

Quale di queste due condizioni si verifichi al momento non è ancora definito: ci accorgeremo tuttavia che a causa della deformabilità della cinghia sarà inevitabile concludere che l'elemento infinitesimo di cinghia scivoli rispetto alla puleggia e, di conseguenza, sarà opportuno introdurre la seconda equazione:

$$F_t = \pm f F_m$$

La distinzione di segno risiede nei casi in cui la puleggia sia motrice (+) o condotta (-).

## 5.11 Lezione 13-05 – Daniele Bortoluzzi

Proseguiamo alla trattazione delle cinghie di trasmissione e all'espressione della massima coppia trasmissibile, quindi la coppia che porta la cinghia a lavorare alle condizioni limite dell'aderenza.

Ci focalizziamo dunque sulle condizioni di massima coppia trasmessa: all'interno del cono di attrito statico sappiamo di essere localizzati sulla generatrice del cono, per cui vale l'uguaglianza stretta

$$F_t = \pm f_s F_n$$

Il fatto che ci sia la dualità di segno dipende da come si proietta la risultante  $F_t$  rispetto al S.d.R. preso ( $\mathbf{t}, \mathbf{n}$ ): in particolare se la  $F_t$  è equiversa a  $\mathbf{t}$  le forze di attrito tra la puleggia e la cinghia stanno promuovendo il moto della cinghia nella direzione positiva (antioraria) e quindi la ruota che abbiamo in esame è una ruota motrice.

Se invece la forza tangenziale che la puleggia sta esercitando sulla cinghia è opposta a  $\mathbf{t}$ , e quindi si oppone al senso antiorario preso come positivo per la rotazione e il momento, implica che la ruota è una ruota condotta.

Portiamo di conseguenza avanti il calcolo con entrambi i segni ricordando tale differenza.

Riportiamo le due equazioni di interesse (normale e tangenziale):

$$\mu \frac{v^2}{r} = -F_n + \frac{T}{r} \quad ; \quad F_t + \frac{\partial T}{\partial s} = 0$$

Facciamo l'ipotesi semplificativa che la forza centrifuga  $\mu \frac{v^2}{r}$  sia trascurabile. Questo permette di scrivere il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} F_n = \frac{T}{r} \\ F_t + \frac{\partial T}{\partial s} = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione possiamo esplicitare la derivata della tensione rispetto a  $s$  e introduciamo la condizione di massima coppia trasmissibile (interazione puleggia-cinghia al limite dell'aderenza):

$$\frac{\partial T}{\partial s} = -F_t = \mp f_s F_n = \mp f_s \frac{T}{r}$$

Riorganizzando gli estremi dell'equazione differenziale:

$$\frac{\partial T}{\partial s} \pm f_s \frac{T}{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad T = c e^{\mp \frac{f_s}{r} s}$$

Per ottenere il valore di  $c$  è necessario imposta le condizioni al contorno di questo problema differenziale:

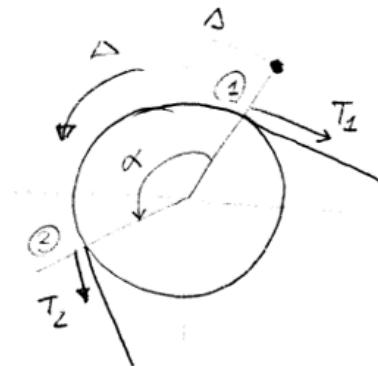
$$s = 0 \quad T = T_1$$

- Motrice:

$$T_2 = T_1 e^{-f_s \frac{s_2}{r}} = T_1 e^{-f_s \alpha}$$

- Condotta:

$$T_2 = T_1 e^{f_s \frac{s_2}{r}} = T_1 e^{f_s \alpha}$$



Dal punto di vista applicativo è utile arrivare ad un'espressione della coppia trasmissibile nelle condizioni che abbiamo identificato (ovvero di strisciamento incipiente): sappiamo infatti che in condizioni in cui avvenisse lo scivolamento la forza tangenziale è ottenibile mediante il coefficiente di attrito cinetico, che tuttavia è inferiore a quello di aderenza e quindi possiamo aspettarci che la coppia trasmessa sia inferiore.

Per trovare la coppia integriamo lungo l'angolo  $\alpha$ , lungo il quale si ha il contatto tra puleggia e cinghia, i contributi infinitesimi di momento che sono  $F_t ds r$ :

$$\begin{aligned} M &= \int_{\alpha} F_t r ds \quad \text{ma } F_t = -\frac{\partial T}{\partial s} \\ &= \int_{\alpha} -\frac{\partial T}{\partial s} r ds = r (T_1 - T_2) \end{aligned}$$

In questa espressione si osservano due elementi di tensione simbolici che in realtà sono legati dalla legge esponenziale ricavata in precedenza:

$$M = r (T_1 - T_2) = r (T_2 e^{f_s \alpha} - T_2) = r T_2 (e^{f_s \alpha} - 1)$$

In questo caso stiamo considerando la condizione di puleggia motrice.

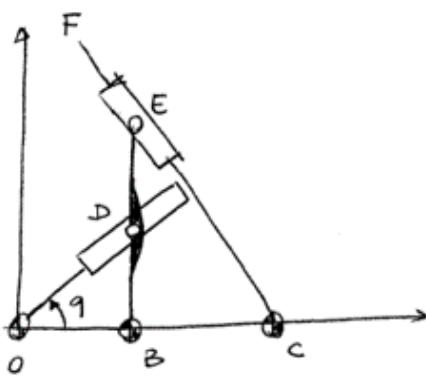
Si possono fare alcune considerazioni molto utili mediante la formulazione appena trovata:

1. Per aumentare la coppia trasmessa da puleggia motrice a cinghia è necessario avere elevati di  $f$  e  $\alpha$
2. Per aumentare il momento trasmesso si può aumentare l'angolo di avvolgimento  $\alpha$  che ovviamente è legato ai raggi delle due puleggi e all'eventuale presenza di dispositivi che permettano di aumentarlo: un galoppino, ovvero una puleggia folle che è utilizzato per aumentare l'angolo tra cinghia e puleggia, forzando il ramo lento/meno tesio ad avvolgersi di più lungo la puleggia stessa.
3. Il momento è proporzionale alla tensione  $T_2$  sul ramo lento/meno tesio: questo ci dice che non possiamo mai avere una trasmissione in cui la tensione sul ramo lento è nulla perché questo porterebbe immancabilmente ad avere nullo anche la coppia trasmissibile.

### 5.11.1 Esercizio

Vediamo ora un esercizio su un meccanismo piano a più catene cinematiche che ci permette di ripassare la cinematica e la dinamica dei meccanismi piani.

Il meccanismo mostrato in figura è composto da:



- un primo corpo rigido (guida prismatica) vincolata a telaio nell'origine del S.d.R. **OD**, e ruota attorno alla coppia rotoidale O di un angolo pari a  $q$ .  
È presente anche un corsoio/pattino localizzato nel punto D.
- una seconda guida prismatica vincolata a telaio da una cerniera in C, **CF**.  
È presente un corsoio che si muove localizzato nel punto E.
- un terzo corpo rigido vincolato a telaio nel punto B sul quale sono presenti due coppie cinematiche rotoidali nei punti D e E che sono connesse ai pattini che scorrono nelle due guide prismatiche

Il sistema è costituito da più catene cinematiche e quindi richiede di essere studiato con i metodi già visti in precedenza.

Partiamo dall'analisi del numero di G.d.L. del sistema: la formula di Grubler ci dice che

$$n = 3(m - 1) - 2c_1 - c_2$$

Abbiamo due modi per calcolare il numero di G.d.L. di questo meccanismo:

1. Un primo approccio prevede di trattare le coppie cinematiche in D e in E, dove coincidono coppie prismatiche e rotoidali, come una coppia a camma.

Prendiamo ad esempio il corsoio in E: osserviamo che il pattino si muove lungo la guida CF, sul quale è localizzata una coppia rotoidale.

Allo stesso modo nel punto D coincidono la guida prismatica e la coppia rotoidale.

Seguendo questo approccio:

$$n = 3(4 - 1) - 2 \cdot 3 - 2 = 1 \text{ G.d.L.}$$

2. Possiamo risolvere questo calcolo utilizzando un altro approccio in cui separiamo le coppie cinematiche che geometricamente coincidono.

In D e in E coincidono due coppie (un pattino e una cerniera); idealmente separando tutte le coppie cinematiche in questione permette di osservare che tra le coppie separate persiste un corpo di dimensione (teoricamente) nulla.

$$n = 3(6 - 1) - 2 \cdot 7 = 1 \text{ G.d.L.}$$

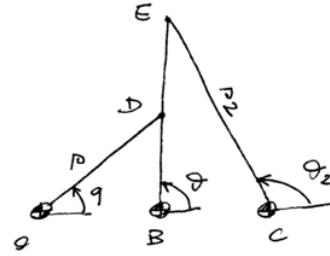
Procediamo al calcolo cinematico del meccanismo: essendo un meccanismo piano a più catene chiuse ci orientiamo verso la scrittura dei poligoni di chiusura delle varie catene cinematiche che possiamo identificare.

È utile per scrivere tali equazioni individuare i percorsi più semplici che descrivono il legame cinematico (quindi geometrico) tra i vari membri del meccanismo; ad esempio osserviamo che sono presenti le catene cinematiche:

$$\mathbf{OB} + \mathbf{BD} - \mathbf{OD} = 0 \quad ; \quad \mathbf{BC} + \mathbf{CE} - \mathbf{BE} = 0$$

A questo punto scriviamo in maniera simbolica le due equazioni vettoriali di chiusura delle due catene cinematiche, osservando che tutte le lunghezze fisse sono tra le coppie rotoidali a telaio è pari a **L**:

$$\begin{aligned} L \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + L \begin{Bmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{Bmatrix} - s \begin{Bmatrix} \cos q \\ \sin q \end{Bmatrix} &= 0 \\ L \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + s_2 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{Bmatrix} - 2L \begin{Bmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{Bmatrix} &= 0 \end{aligned}$$



Osserviamo a questo punto che le due catene cinematiche sono **debolmente accoppiate**, cioè possiamo risolvere la prima catena cinematica senza coinvolgere la seconda nel calcolo perché se osserviamo la prima equazione vettoriale, data la coordinata generalizzata  $q$  è possibile calcolare immediatamente le due grandezze cinematiche incognite della prima catena cinematica ( $s$  e  $\dot{\vartheta}$ ).

In particolare la coordinata  $\vartheta$  sarà quella da sostituire alla seconda catena cinematica per risolvere rispetto alle ultime due incognite cinematiche ( $s_2$  e  $\vartheta_2$ ).

Come seconda richiesta è stato imposto di trovare le velocità del meccanismo in funzione della velocità di  $q$  in una configurazione assegnata ( $q = \pi/4$ ).

In questo caso dobbiamo procedere derivando le equazioni di chiusura a cascata:

1. Prima catena cinematica

$$\begin{cases} -L \sin \vartheta \dot{\vartheta} + s \sin q \dot{q} - \cos q \dot{s} = 0 \\ L \cos \vartheta \dot{\vartheta} - s \cos q \dot{q} - \sin q \dot{s} = 0 \end{cases}$$

L'espressione è lineare nelle derivate delle coordinate ed è quindi possibile scriverla sotto forma di prodotto tra matrici:

$$\begin{bmatrix} -L \sin \vartheta & -\cos \vartheta \\ L \cos \vartheta & \sin q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{s} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -s \sin q \\ s \cos q \end{Bmatrix} \dot{q}$$

2. Seconda catena cinematica

$$\begin{cases} -s_2 \sin \vartheta_2 \dot{\vartheta}_2 + \cos \vartheta_2 \dot{s}_2 + 2L \sin \vartheta \dot{\vartheta} = 0 \\ s_2 \cos \vartheta_2 \dot{\vartheta}_2 + \sin \vartheta_2 \dot{s}_2 - 2L \cos \vartheta \dot{\vartheta} = 0 \end{cases}$$

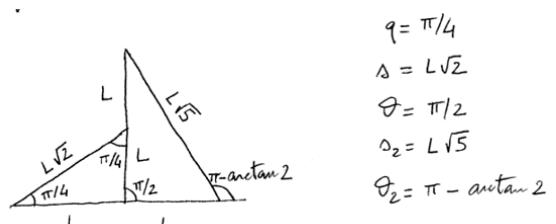
In questo secondo sistema di equazioni procediamo in maniera analoga a prima, individuiamo la coordinata libera e la portiamo a secondo membro: in questo caso abbiamo visto che, grazie al fatto che il meccanismo è debolmente accoppiato, possiamo risolvere la prima catena cinematica rispetto a  $\vartheta$  e quindi, in questo secondo meccanismo i termini in  $\vartheta$  e  $\dot{\vartheta}$  possono essere portati a secondo membro e considerati moventi della seconda catena cinematica.

$$\begin{bmatrix} -s_2 \sin \vartheta_2 & \cos \vartheta_2 \\ s_2 \cos \vartheta_2 & \sin \vartheta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_2 \\ \dot{s}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2L \sin \vartheta \\ 2L \cos \vartheta \end{Bmatrix} \dot{\vartheta}$$

A questo punto abbiamo espresso il problema cinematico in due problemi risolvibili a cascata in cui: la velocità della coordinata libera  $q$  produce le velocità  $\dot{s}$  e  $\dot{\vartheta}$ , tra le quali quest'ultima può essere sostituita nella seconda catena cinematica per trovarne le rispettive velocità.

Per risolvere il problema si possono invertire le due matrici Jacobiane oppure sostituire la configurazione assegnata, sostituirli negli Jacobiani e invertire gli Jacobiani una volta fatta la sostituzione.

In questo caso la configurazione assegnata ( $q = \pi/4$ ) ha una cinematica particolarmente semplice da risolvere: si può risolvere infatti mediante semplici considerazioni geometriche sullo schema del meccanismo: osserviamo che in corrispondenza di questa coordinata del movente, grazie la fatto che **OB** e **BD** sono uguali, il triangolo è un triangolo rettangolo e isoscele per cui la lunghezza **OD** (che è la coordinata  $s$ ) si calcola facilmente come  $L\sqrt{2}$ .



$$\begin{aligned} q &= \pi/4 \\ \Delta &= L\sqrt{2} \\ \Theta &= \pi/2 \\ \Delta_2 &= L\sqrt{5} \\ \Theta_2 &= \pi - \arctan 2 \end{aligned}$$

La prima catena cinematica è dunque risolta osservando la configurazione assegnata. Per quanto riguarda la seconda catena cinematica osserviamo che, essendo l'angolo  $\angle OBD$  pari a  $\pi/2$  il membro **BE**, quindi si è ottenuto il triangolo BCE rettangolo per cui il calcolo dell'ipotenusa ( $L\sqrt{5}$ ) che l'angolo  $\angle BCE$  ( $\arctan 2$ ) è immediato.

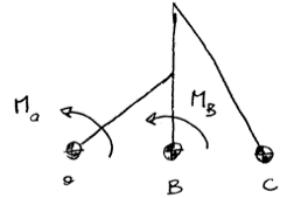
Sostituiamo dunque nei due sistemi di equazioni la configurazione che abbiamo trovato per risolverli rispetto alle velocità del meccanismo:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -L \sin \vartheta & -\cos \vartheta \\ L \cos \vartheta & \sin q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{s} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -s \sin q \\ s \cos q \end{Bmatrix} \dot{q} \quad ; \quad \begin{bmatrix} -s_2 \sin \vartheta_2 & \cos \vartheta_2 \\ s_2 \cos \vartheta_2 & \sin \vartheta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_2 \\ \dot{s}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2L \sin \vartheta \\ 2L \cos \vartheta \end{Bmatrix} \dot{\vartheta} \\ \begin{bmatrix} -L & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{s} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -L \\ L \end{Bmatrix} \dot{q} \quad ; \quad \begin{bmatrix} -2L & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -L & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_2 \\ \dot{s}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2L \dot{\vartheta} \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{s} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 2\dot{q} \\ -\sqrt{2}L\dot{q} \end{Bmatrix} \quad ; \quad \begin{Bmatrix} \dot{\vartheta}_2 \\ \dot{s}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{4}{5}\dot{\vartheta} \\ \frac{2L}{\sqrt{5}}\dot{\vartheta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{8}{5}\dot{q} \\ \frac{4L}{\sqrt{5}}\dot{q} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

La terza richiesta coinvolge le azioni agenti sul meccanismo, in particolare viene richiesto di trovare, nella configurazione assegnata, il momento  $M_0$  per equilibrare un momento  $M_B$ .

L'ipotesi che vengono date è di meccanismo in presenza di vincoli lisci e meccanismo fermo che significa velocità e accelerazioni nulle.

Possiamo risolvere molto facilmente il problema applicando il principio dei lavori virtuali per il quale i lavori virtuali di tutte le azioni presenti sul sistema è pari a 0.



A cavallo della configurazione assegnata gli spostamenti virtuali del sistema portano tutte le azioni a svolgere un lavoro complessivamente nulo:

$$\delta L = M_0 \delta q + M_B \delta \vartheta = 0$$

In questa espressione troviamo l'incognita  $M_0$  che è pari a:

$$M_0 = -M_B \frac{\delta \vartheta}{\delta q} = -M_B \tau_{q \vartheta}$$

Il rapporto di velocità è stato ricavato nell'analisi cinematica tramite poligono di chiusura nel punto precedente:

$$\tau_{q \vartheta} = \frac{\dot{\vartheta}}{\dot{q}} = \frac{2\dot{q}}{\dot{q}} = 2$$

Di conseguenza:

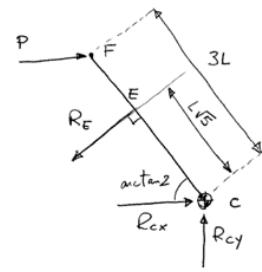
$$M_0 = -2M_B$$

Il punto seguente richiede di trovare la reazione vincolare esercitata in E in condizione di equilibrio quando una forza **P** è esercitata in direzione orizzontale al punto F nella configurazione assegnata.

Per trovare la risposta a questa domanda osserviamo che per trovare l'equilibrio di questo sistema complessivo garantendo l'equilibrio dell'asta **CF** sulla quale sono applicate le forze in oggetto quindi: prendendo la forza **P** e osserviamo che viene equilibrata dalla sola reazione presente nella coppia prismatica in E e C, disassemblando il meccanismo, otteniamo la possibilità di mettere in equilibrio un sottosistema del meccanismo che ci permette di trovare le incognite in forma chiusa.

Sull'asta **CF**, disassemblata dal meccanismo, sono applicate:

- la forza **P** applicata al punto F;
- la reazione vincolare **R<sub>E</sub>** applicata al punto E
- le reazioni vincolari **R<sub>Cx</sub>** e **R<sub>Cy</sub>** applicata alla coppia rotoidale a telaio in C



Osserviamo che la direzione della reazione interna, essendo il vincolo ideale (la coppia prismatica è priva di attrito), è possibile assumerla ortogonale all'asta **CF**.

Per mettere in equilibrio l'asta in esame possiamo scrivere 3 equazioni (equilibrio alla traslazione orizzontale, verticale e alla rotazione), inoltre possiamo osservare che può essere particolarmente agevole scrivere le equazioni di equilibrio alla rotazione scegliendo opportunamente il polo in maniera tale da minimizzare le incognite che abbiamo nel calcolo.

Se infatti scriviamo tale equilibrio rispetto al polo C, otteniamo che le incognite di forza (**R<sub>Cx</sub>**, **R<sub>Cy</sub>**) hanno braccio nullo per cui il loro effetto non compare nell'equazione; rimane tuttavia l'effetto della forza **P** (nota) e l'effetto della reazione incognite **R<sub>E</sub>**.

Essendo che la configurazione del meccanismo è nota, sappiamo anche come sono orientate tutte le forze ed è possibile scrivere l'equazione di equilibrio alla rotazione:

$$\begin{aligned} P \cdot 3L \sin(\arctan 2) &= R_E \cdot L \sqrt{5} \\ \sin(\arctan 2) &= \frac{2L}{L\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ R_E &= \frac{3P}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{6}{5}P \end{aligned}$$

Possiamo trovare anche le rimanenti due componenti di reazione vincolare incognite (**R<sub>Cx</sub>**, **R<sub>Cy</sub>**): infatti prendendo l'asta **CF** osserviamo che abbiamo già garantito l'equilibrio dell'asta rispetto alla rotazione attorno a C, possiamo dunque imporre l'equilibrio alla traslazione lungo gli assi x e y:

$$\begin{cases} R_{Cx} + P - R_E \sin(\arctan 2) = 0 \\ R_{Cy} - R_E \cos(\arctan 2) = 0 \end{cases}$$

Noto ora che

$$R_E = \frac{6}{5}P \quad ; \quad \sin(\arctan 2) = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad ; \quad \cos(\arctan 2) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Sostituendo le grandezze sopra riportate all'equazione dell'equilibrio alla traslazione:

$$\begin{cases} R_{Cx} + P - \frac{6}{5}P \frac{2}{\sqrt{5}} = 0 \\ R_{Cy} - \frac{6}{5}P \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} R_{Cx} = P \left( \frac{12}{5\sqrt{5}} - 1 \right) \\ R_{Cy} = \frac{6}{5}P \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Al punto 5 si richiede che nel meccanismo vi sia una sola massa concentrata nel punto D e, data questa informazione si richiede di trovare l'energia cinetica in funzione di  $\dot{q}$  nella configurazione di riferimento.

In questa domanda il punto D può essere pensato sia come il pattino che si muove nella guida prismatica **OD** sia come un punto che invece appartiene all'asta **BDE**.

Considerando il punto materiale come pattino il problema sembra particolarmente complesso in quanto il pattino ha sia un movimento lungo la guida prismatica (quindi una componente  $\dot{s}$ ) che una componente angolare ortogonale al pattino (dettata da  $\dot{\theta}$ ).

Se però consideriamo lo stesso punto come vincolato ad appartenere all'asta **BDE** il problema diventa molto più semplice in quanto si tratta di un punto materiale localizzato su un corpo rigido che per sua natura, essendo vincolato a telaio da una coppia rotoidale, può avere un moto circolare: cioè il punto D se

pensato appartenente all'asta **BDE** è caratterizzato da una velocità  $\mathbf{v}_D$  che è semplicemente calcolabile come la velocità di un punto materiale in moto circolare attorno al punto B.

$$\mathbf{v}_D = \dot{\vartheta} L = 2L\dot{q}$$

Così facendo il calcolo dell'energia cinetica è estremamente semplice in quanto possiamo applicare la formula del punto materiale:

$$E_K = \frac{1}{2}m v_D^2 = \frac{1}{2}m (2L\dot{q})^2 = 2mL^2\dot{q}^2$$

# 6 Equazioni fondamentali della dinamica

Lo studio dinamico dei sistemi meccanici può essere effettuato con approcci diversi a seconda delle caratteristiche del sistema e anche in base alle finalità dello studio stesso.

L'approccio energetico (*equazione dell'energia*) consente di calcolare facilmente l'equazione del moto di una macchina ad 1 G.d.L. e quindi di effettuarne la simulazione dinamica: cioè date le forze agenti analizzare il movimento in funzione del tempo.

La sua particolarità ed efficacia risiede proprio nel fatto che nella formulazione del problema dinamico non entrano le forze reattive esterne e le forze reattive interne (*eccetto quelle elastiche*).

Nel caso di sistemi a due o più G.d.L. un approccio sostanzialmente simile a quello energetico è quello Lagrangiano che si basa sulla nota equazione di Lagrange. Anche in questo caso le forze reattive non vengono richiamate dalle equazioni.

Lo studio della dinamica di una macchina può essere effettuato anche con un altro approccio, chiamato Newtoniano perché fa uso della seconda legge di Newton e del teorema del momento della quantità di moto (*equazioni cardinali della dinamica*).

In questo caso nella formulazione del problema dinamico entrano sia le forze reattive che si scambiano i vari membri della macchina tra di loro, che le forze reattive tra macchina e telaio.

Anche per una macchina ad un solo G.d.L. si ottiene un sistema di equazioni composto da una equazione differenziale e da una serie di equazioni algebriche.

Un altro strumento molto potente (*utilizzato in modo particolare per problemi statici*) per lo studio dei meccanismi è il **principio dei lavori virtuali** applicabile ai sistemi ideali privi di attrito. Il fatto che nella relazione che esprime il principio dei lavori virtuali (PLV) non entrino le forze reattive è uno dei principali vantaggi del metodo.

L'analisi dinamica può essere di tipo diretto (*dinamica diretta*) o di tipo inverso (*cinetostatico*).

Nel problema della *dinamica diretta*, dato il sistema meccanico, le masse e le inerzie dei vari membri, le forze esterne applicate e le condizioni iniziali, lo scopo è la determinazione della legge del moto.

È un problema differenziale perché richiede l'interazione delle equazioni del moto. Il modello matematico è quindi rappresentato da un sistema di equazioni differenziali.

Nel problema di *dinamica inversa* è assegnata la legge del moto del sistema, le masse e le inerzie dei vari membri, le forze esterne applicate, le condizioni iniziali; scopo dell'analisi è la determinazione dei valori della forza motrice che permette che si realizzzi quel tipo di moto.

È un problema di tipo algebrico, perché essendo assegnato il moto, lo spostamento e le sue derivate prima e seconda sono note.

## 6.1 Equazioni di Newton-Eulero nel piano

Il movimento del sistema meccanico è noto, si vogliono trovare le forze agenti (ovvero la legge del moto).

Per un singolo corpo si possono, dunque, scrivere tre equazioni:

$$M \ddot{x}_G = R_x^{(e)} \quad ; \quad M \ddot{y}_G = R_y^{(e)} \quad ; \quad I_{zG} \ddot{\vartheta} = M_G^e$$

L'approccio/strategia che si usa è di conseguenza dividere un sistema meccanico nei diversi corpi che lo compongono e studiarne uno alla volta, applicando le equazioni sopra riportate.

### 6.1.1 Equazioni di Newton



La prima legge della meccanica newtoniana afferma che un corpo di massa  $m$  soggetto ad accelerazione  $\mathbf{a}$  risente di una forza  $\mathbf{F}$  parallela e proporzionale all'accelerazione stessa per mezzo della massa (inerziale) del corpo.

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

In altri termini la massa inerziale rappresenta la resistenza del corpo ad accelerare.

Lo schema appena esposto tuttavia è incompleto, per il terzo principio della dinamica Newtoniana. Infatti il concetto di forza non è altro che un'interazione tra particelle:

Le due particelle prese in esame formano infatti una coppia di forze a braccio nullo e stesso modulo.

Penso a questo punto enunciare la nozione di quantità di moto delle due particelle nell'istante iniziale e finale:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 &= m_1 \mathbf{v}_1 & ; \quad \mathbf{Q}_2 &= m_2 \mathbf{v}_2 & \Leftarrow \text{iniziale} \\ \mathbf{Q}_1' &= m_1 \mathbf{v}_1' & ; \quad \mathbf{Q}_2' &= m_2 \mathbf{v}_2' & \Leftarrow \text{finale} \end{aligned}$$

Due membri rigidi (o particelle nel nostro caso) sono dinamicamente equivalenti quando si comportano in modo identico se soggetti all'applicazione di uno stesso sistema di forze.

Dovranno, in primo luogo, avere perciò in ogni istante valori uguali della quantità di moto:

$$\begin{aligned} m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 &= m_1 \mathbf{v}_1' + m_2 \mathbf{v}_2' \\ m_1 \mathbf{v}_1 - m_1 \mathbf{v}_1' &= m_2 \mathbf{v}_2' - m_2 \mathbf{v}_2 \\ -\Delta Q_1 &= \Delta Q_2 \end{aligned}$$

Si osservi che è stata imposta l'uguaglianza tra due particelle in quanto siamo partiti dall'ipotesi che le forze siano uguali in modulo e opposte in verso: se tale ipotesi è verificata le loro quantità di moto dovranno per forza essere uguali.

Eseguendone a questo punto la derivata:

$$\begin{aligned} \frac{m_1 \mathbf{v}_1 - m_1 \mathbf{v}_1'}{\Delta t} &= \frac{m_2 \mathbf{v}_2' - m_2 \mathbf{v}_2}{\Delta t} \\ m_1 (-a_1) &= m_2 (a_2) \end{aligned}$$

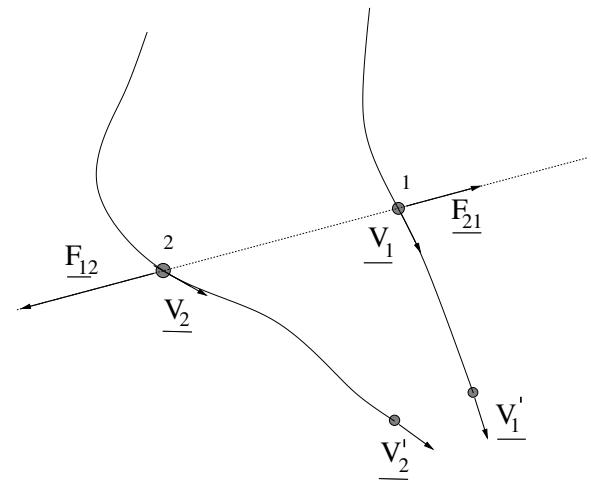
Si può dunque notare che la derivata della quantità di moto nonché  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \mathbf{F}$  e di conseguenza possiamo ammettere che:

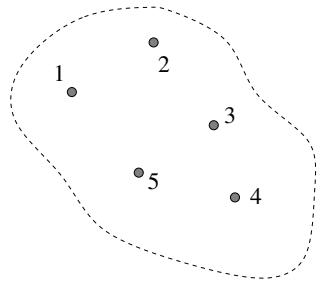
$$F_{12} = \frac{d}{dt}(m_2 \mathbf{v}_2) \quad ; \quad F_{21} = \frac{d}{dt}(m_1 \mathbf{v}_1)$$

Termina dunque la verifica che la forza esercitata dalla particella generica 1 sulla particella generica 2 è uguale in modulo e contraria in verso alla forza che la particella 2 esercita sulla particella 1:  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$

Possiamo sfruttare le interazioni che avvengono tra particelle di uno o più corpi estesi per compiere lo studio della dinamica di un meccanismo:

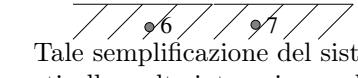
Un sistema meccanico può essere interpretato come composto da un certo numero di particelle:



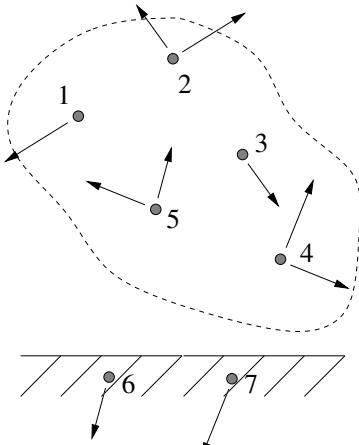


L'insieme di particelle rappresentato a fianco è rappresentativo delle parti in cui si è deciso di dividere il sistema meccanico. Tale scelta è puramente arbitraria e dipende dalle forze scambiate che ci interessa valutare.

La scelta di quali particelle includere nell'insieme che si vuole analizzare può essere appoggiata nel rispondere alla domanda: "Qual è l'insieme di corpi di cui si vuole studiare la dinamica?"



Tale semplificazione del sistema meccanico permette di descrivere abbastanza efficacemente come le particelle scelte interagiscono l'una con l'altra e con particelle esterne al sistema tracciato.



$$\begin{array}{lll}
 1) \quad m_1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{21} & + \\
 2) \quad m_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{32} & \mathbf{F}_{12} \quad \mathbf{F}_{32} & + \\
 3) \quad m_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{F}_{23} & \mathbf{F}_{23} & + \\
 4) \quad m_4 \mathbf{a}_4 = \mathbf{F}_{54} + \mathbf{F}_{74} & \mathbf{F}_{54} \quad \mathbf{F}_{74} & + \\
 5) \quad m_5 \mathbf{a}_5 = \mathbf{F}_{45} + \mathbf{F}_{65} & \mathbf{F}_{45} \quad \mathbf{F}_{65} & = \\
 \\ 
 \sum_i m_i \mathbf{a}_i & = & 0 \quad 0 \quad 0 \quad \mathbf{F}_{74} + \mathbf{F}_{65}
 \end{array}$$

Come di può osservare dalla generalizzazione dello studio della dinamica di un meccanismo, tutte le forze interne che si sviluppano tra le particelle dell'insieme in esame si elidono, facendo rimanere solamente le forze esterne.

Per mezzo di tale esempio possiamo enunciare la **prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi meccanici**:

$$\boxed{\sum_{i=1}^N (m_i \mathbf{a}_i) = \mathbf{R}^{(e)} \quad ; \quad \mathbf{R}^{(i)} = 0}$$

ovvero, la somma delle forze agenti su un sistema è pari alla risultante delle forze esterne.

Dalla sua interpretazione in termini macroscopici, si ha:

$$\begin{aligned}
 m_i \mathbf{a}_i &= \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i) \\
 \sum_{i=1}^n \left( \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i) \right) &= \mathbf{R}^{(e)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{v}_i) \right) = \mathbf{R}^{(e)}
 \end{aligned}$$

Noto che:  $m_i \mathbf{v}_i$  è la quantità di moto di una singola particella;

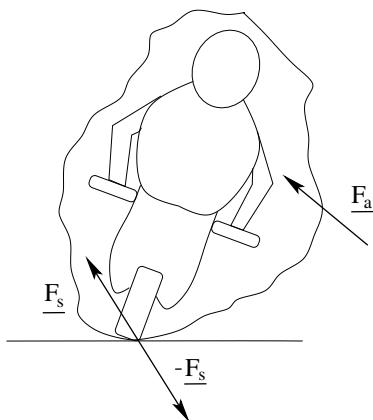
$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i$  è la quantità di moto dell'intero sistema di particelle

$$\boxed{\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{R}^{(e)}}$$

### ESEMPI APPLICATIVI

#### 1. Motocicletta

Consideriamo di dover analizzare il sistema motocicletta, secondo le modalità e le semplificazioni proposte in figura. Per questo primo esempio, immaginiamo che le forze esterne che subisce il sistema/insieme di particelle si riduca a:



- $\mathbf{F}_a$  forze di natura areodinamica;

- $\mathbf{F}_s$  forza che l'asfalto esercita sul sistema;

Poiché, infatti, la ruota non può scivolare sull'asfalto, nasceranno forze di contatto tra l'asfalto e la ruota.

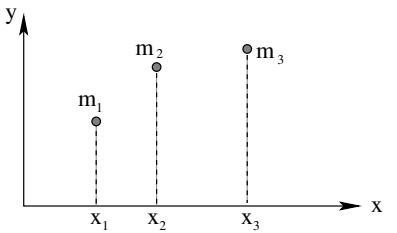
Siamo dunque nelle condizioni di applicare il primo principio/equazione della dinamica dei sistemi meccanici:

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_s$$

Al fine di proseguire i calcoli relativi alla dinamica dei meccanismi risulta necessario introdurre il concetto di **centro di massa o baricentro**.

Consideriamo un insieme di punti materiali, di cui è nota la posizione nello spazio e la singola massa: il baricentro sarà la media pesata delle masse, che nell'esempio proposto a fianco si esprime come:

$$x_B = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$



Dato un insieme discreto di punti materiali, dunque, le coordinate del baricentro rispetto all'origine del S.d.r. fissato, si possono ricavare tramite la relazione:

$$\mathbf{OG} = \frac{\sum m_i \mathbf{OP}_i}{\sum m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{OP}_i$$

Dove:

- $\mathbf{OG}$  è la posizione del baricentro rispetto al S.d.R.
- $M$  è la massa del sistema di punti materiali presi in esame
- $m_i$  è l'i-esima massa del sistema di particelle
- $\mathbf{OP}_i$  è la posizione dell'i-esima massa del sistema di particelle

Rielaborando le equazioni appena ottenute si ottiene che:

$$M \mathbf{OG} = \sum_i m_i \mathbf{OP}_i$$

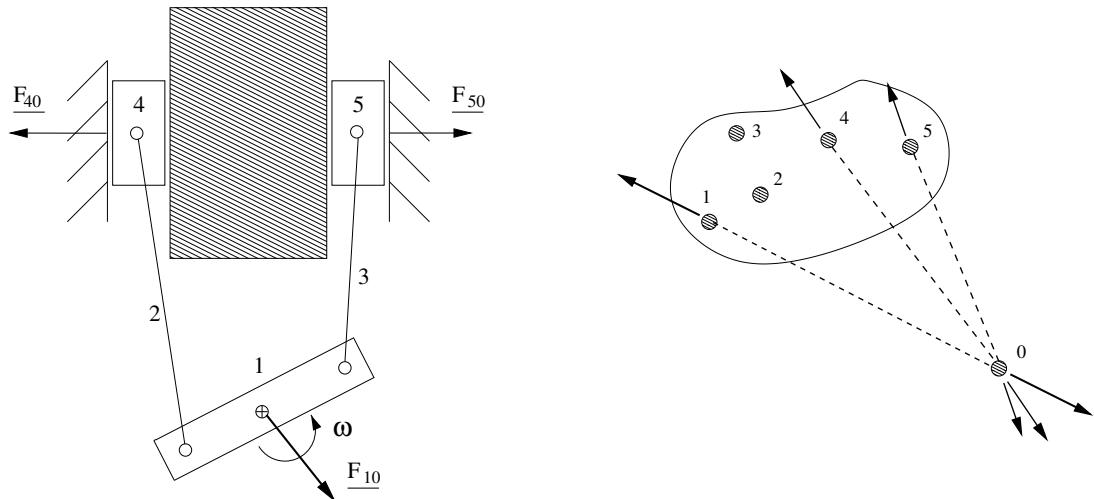
eseguendone a questo punto la derivata temporale

$$M \mathbf{v}_G = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{OP}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{Q}_i$$

Da tale relazione si può evincere che il sistema di punti può essere considerato come un punto nel baricentro con massa dell'intero corpo in cui sono concentrate le forze esterne

$$M \frac{d\mathbf{v}_G}{dt} = M \mathbf{a}_G = \mathbf{R}^{(e)} = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_s$$

## 2. Motore a doppio cilindro (?)



Considerando il meccanismo proposto (figura a destra) e il relativo schema semplificato, si richiede di valutare le azioni che il sistema di corpi esercita sul telaio, ovvero di valutare:  $\mathbf{F}_{40}$ ,  $\mathbf{F}_{50}$  e  $\mathbf{F}_{10}$  in funzione del moto del corpo 1, data la velocità angolare dello stesso ( $\omega$ ).

Le stesse conclusioni che sono state formulate per la motocletta possono essere applicate anche per il meccanismo sotto esame:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{(e)} &= M \mathbf{a}_G \\ \mathbf{F}_{01} + \mathbf{F}_{02} + \mathbf{F}_{03} &= M \mathbf{a}_G \\ \mathbf{F}_{01} + \mathbf{F}_{02} + \mathbf{F}_{03} &= M_1 \mathbf{a}_{G1} + M_2 \mathbf{a}_{G2} + M_3 \mathbf{a}_{G3} + M_4 \mathbf{a}_{G4} + M_5 \mathbf{a}_{G5}\end{aligned}$$

Il problema che ci viene posto rientra nella categoria di **Problema di dinamica inversa**.

È necessario conoscere masse e accelerazioni dei baricentri dei singoli corpi per valutare le forze esterne che agiscono tra sistema e telaio.

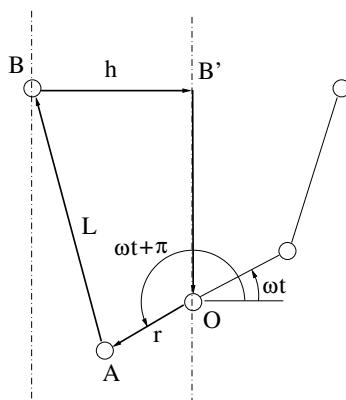
Ipotizzando che le masse  $M_2 = M_3 \approx 0$ , la relazione può essere semplificata, nel seguente modo:

$$\mathbf{R}^{(3)} = M_1 \mathbf{a}_{G2} + M_4 \mathbf{a}_{G4} + M_5 \mathbf{a}_{G5}$$

Noto che l'accelerazione  $a_{G1}$  è nulla e sciegliendo l'origine del S.d.R. a cui riferire le posizioni dei baricentri degli altri corpi con il baricentro del membro 1 ( $G_1 = \{0, 0\}$ ) è possibile in primo luogo valutare le accelerazioni inognite tramite l'analisi cinematica e in secondo luogo sostituirle alla relazione riportata sopra per conoscere le forze che il sistema meccanico esercita sul telaio.

A tal fine, data la simmetria del meccanismo, conviene analizzarne la sua dinamica, considerandone solo una delle due metà che vengono individuate dall'asse di simmetria.

Per mezzo delle considerazioni appena esposte possiamo procedere con l'analisi cinematica del ben noto poligono di chiusura:



$$\mathbf{OA} + \mathbf{AB} + \mathbf{BB}' + \mathbf{B}'\mathbf{O} = 0$$

$$\mathbf{OA} = r \begin{Bmatrix} \cos(\omega t + \pi) \\ \sin(\omega t + \pi) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\cos q \\ \sin q \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = L \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{BB}' = h \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{B}'\mathbf{O} = y \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

La chiusura del poligono tracciato permette di ottenere un sistema di due equazioni:

$$\begin{cases} -r \cos q + L \cos \vartheta_2 + h = 0 \\ +r \sin q + L \sin \vartheta_2 - y = 0 \end{cases}$$

Dal calcolo del Jacobiano e della velocità dei cedenti in funzione del movente, e noto che il sistema così posto ha 1 G.d.L., possiamo esplicitare la velocità e l'accelerazione del del pattino (corpo 4) che è qui rappresentato dalla lettera B.

$$\mathbf{v}_{\mathbf{OB}} = \frac{d\mathbf{OB}}{dt} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{y} \end{Bmatrix} ; \quad \mathbf{a}_{\mathbf{OB}} = \frac{d^2\mathbf{OB}}{dt^2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{y} \end{Bmatrix}$$

Come anticipato dall'analisi cinematica del meccanismo a 1 G.d.L. possiamo relazionare la velocità del cedente ( $\dot{y}$ ) con quella del movente ( $\dot{q}$ ) tramite il relativo rapporto di velocità.

ordine di derivazione	movente ( $q$ )	cedente ( $y$ )	Per mezzo dei risultati appena ottenuti possiamo ammettere che le forze esterne agenti sul sistema hanno componente x nulla e componente y, pari a:
0	$q = \omega t$	$y$	
1	$\dot{q} = \omega$	$\tau_y \dot{q}$	$R_y^{(0)} = M_1 \overline{a_{G1}} + M_4 \tau_{yG4} \omega^2 + M_5 \tau_{yG5} \omega^2$
2	$\ddot{q} = 0$	$\ddot{y} = \tau_y \dot{q}^2 = \tau_y \omega^2$	$= M_{Pistone} (\tau_{yG4} + \tau_{yG5}) \omega^2$

### 6.1.2 Le equazioni di Eulero

Per quanto utili a descrivere la traslazione di un corpo inteso come sistema di particelle, le equazioni di Newton non permettono di determinare la rotazione del sistema meccanico in esame.

A tal fine si introducono, di conseguenza, le equazioni di Eulero: queste permettono, partendo dalla conservazione del momento della quantità di moto di trovare un'espressione per i momenti, rispetto ad una terna di riferimento, agenti sul sistema e di conseguenza un'espressione quantitativa della rotazione del corpo in questione sotto l'azione di momenti e forze esterne.

Procediamo ora a introdurre un fondamentale strumento per l'analisi della dinamica di un corpo: La conservazione del momento.

Dato un sistema meccanico generico nel piano in cui persistono forze interne al sistema ed esterne, come rappresentato in maniera semplificata dalla figura a fianco, è possibile scrivere le relative equazioni di Newton:

$$m_1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{12} ; \quad m_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{12}$$

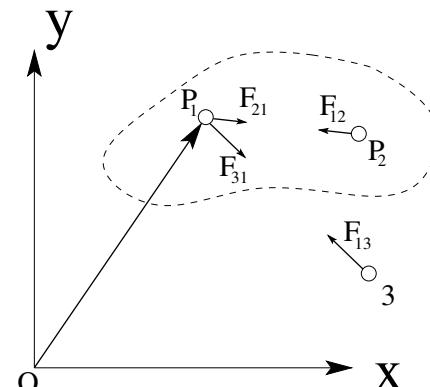
Eseguendo a questo punto il prodotto esterno membro a membro rispetto all'origine di un S.d.R fisso e sommando le due espressioni si ottiene:

$$\mathbf{OP}_1 \wedge m_1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{OP}_1 \wedge \mathbf{F}_{21} + \mathbf{OP}_1 \wedge \mathbf{F}_{31} \quad \dagger$$

$$\mathbf{OP}_2 \wedge m_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{OP}_2 \wedge \mathbf{F}_{12}$$

$$\sum_i = 0 + \mathbf{OP}_1 \wedge \mathbf{F}_{31}$$

Siamo giunti dunque a dimostrare che:



Si osserva che anche in questo caso le forze  $F_{12}$  e  $F_{21}$  si elidono in quanto aventi stessa retta d'azione e di conseguenza medesimo momento (sono cioè due forze uguali in modulo, di verso opposto e con medesima retta d'azione).

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{OP}_i \wedge m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{M}_0^{(e)} \quad \Leftarrow \text{Momento delle forze esterne}$$

Al fine di procedere alla dimostrazione della conservazione della quantità di moto ricordiamo le principali relazioni che verranno utilizzate nel decorso della dimostrazione stessa:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{Q} \quad ; \quad \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{R}^{(e)} \quad ; \quad m \mathbf{a}_G = \mathbf{R}^{(e)}$$

Il momento della quantità di moto rispetto all'origine di un S.d.R. ( $O$ , non necessariamente fisso) è definito come:

$$\mathbf{K}_O = \sum_{i=1}^N \mathbf{OP}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i$$

Deriviamo ora tale relazione al fine di trarre alcune conclusioni sul suo risultato:

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (\mathbf{OP}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^N \left[ \mathbf{OP}_i \wedge m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} + \frac{d\mathbf{OP}_i}{dt} \wedge m_i \mathbf{v}_i \right]$$

La derivata  $\frac{d\mathbf{OP}_i}{dt}$  non è altro che la differenza tra la velocità del punto  $P_i$  rispetto alla velocità dell'origine del S.d.R. scelto.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{K}_O}{dt} &= \sum_{i=1}^N \left[ \mathbf{OP}_i \wedge m_i \mathbf{a}_i + (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_O) \wedge m_i \mathbf{v}_i \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \left[ \mathbf{OP}_i \wedge m_i \mathbf{a}_i + \cancel{\mathbf{v}_i \Delta m_i \mathbf{v}_i} - \mathbf{v}_O \wedge m_i \mathbf{v}_i \right] \quad (\mathbf{v}_i \parallel \mathbf{v}_i \Rightarrow \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{v}_i = 0) \\ &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{OP}_i \wedge m_i \mathbf{a}_i) + \sum_{i=1}^N (-\mathbf{v}_O \wedge m_i \mathbf{v}_i) \quad \mathbf{v}_O \text{ è indipendente da "i"} \\ &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{OP}_i \wedge m_i \mathbf{a}_i) - \mathbf{v}_O \wedge \sum_{i=1}^N (m_i \mathbf{v}_i) \\ &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{OP}_i \wedge m_i \mathbf{a}_i) - \mathbf{v}_O \wedge \mathbf{Q}_O \\ &= M_O - \mathbf{v}_O \wedge \mathbf{Q}_O \end{aligned}$$

Invertendo la relazione appena ricavata possiamo ottenere una nuova definizione di momento:

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^N \mathbf{OP}_i \wedge m_i \mathbf{a}_i = \frac{d\mathbf{K}_O}{dt} + \mathbf{v}_O \wedge \mathbf{Q}_O$$

Dalla formula appena ricavata possono essere compiute alcune semplificazioni dalla scelta opportuna del S.d.R. scelto per il relativo calcolo:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O^{(e)} & \text{se } \mathbf{v}_O = 0 \\ \frac{d\mathbf{K}_G}{dt} = \mathbf{M}_G^{(e)} & \text{se } O = G \end{cases}$$

Le equazioni appena riportate prendono il nome di **Equazioni di Eulero**

In conclusione: nel caso piano le equazioni di Newton-Eulero sono:

$$\begin{aligned} M \ddot{x}_G &= R_x^{(e)} \\ M \ddot{y}_G &= R_y^{(e)} \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_O = \sum_{i=1}^N (x_{P_i} \mathbf{i} + y_{P_i} \mathbf{j}) \wedge m_i (\mathbf{v}_G + \underline{\omega} \wedge \mathbf{GP}_i)$$

dove

- 

$$\mathbf{OP}_i = x_{P_i} \mathbf{i} + y_{P_i} \mathbf{j}$$

- per un corpo rigido la velocità di un generico punto P è pari a

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_G + \underline{\omega} \wedge \mathbf{GP}_i$$

Se, dunque, si sceglie il punto O coincidente con il baricentro (O=G)

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_G &= \sum_{i=1}^N \mathbf{GP}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{GP}_i \wedge (\mathbf{v}_G + \underline{\omega} \wedge \mathbf{GP}_i) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \cancel{\mathbf{GP}_i} \wedge \mathbf{v}_G + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{GP}_i \wedge (\underline{\omega} \wedge \mathbf{GP}_i) \end{aligned}$$

Si noti che il primo termine si elide in quanto la definizione di baricentro è:

$$\sum_i m_i \mathbf{OP}_i = M \mathbf{OG} \quad \text{ma } O=G \text{ per ipotesi}$$

svolgendo i prodotti interni del secondo termine si ottiene:

$$\begin{aligned} \underline{\omega} \wedge \mathbf{GP}_i &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ x_i & y_i & 0 \end{vmatrix} = (-\omega y_i, \omega x_i, 0) \\ \mathbf{GP}_i \wedge [\dots] &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_i & y_i & 0 \\ -\omega y_i & \omega x_i & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, \omega(x_i^2 + y_i^2)) \end{aligned}$$

di conseguenza la formula ricavata precedentemente si può esprimere nel seguente modo:

$$\mathbf{K}_G = \sum_{i=1}^N m_i \omega (x_i^2 + y_i^2) \mathbf{k} = \omega I_z \mathbf{k}$$

dove  $I_z = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2)$  è il momento d'inerzia rispetto all'asse z  
In conclusione:

- se l'origine del S.d.R. scelto coincide con il baricentro, vale che:

$$\mathbf{K}_G = \omega I_{zG} \mathbf{k} \quad ; \quad \frac{d\mathbf{K}_G}{dt} = \dot{\omega} I_{zG} \mathbf{k} = \mathbf{M}_G^{(e)}$$

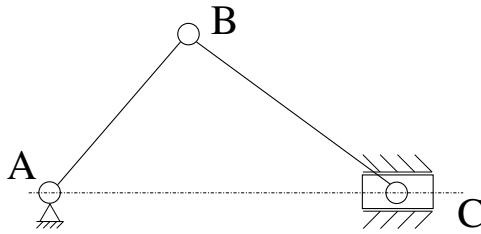
- se l'origine del S.d.R scelto è fisso vale che;

$$\mathbf{K}_O = \omega I_{zO} \mathbf{k}$$

- altrimenti se l'origine del S.d.R. scelto non è fisso e non coincide con il baricentro bisogna utilizzare la formula completa

### 6.1.3 Esempi di applicazione delle equazioni di Newton-Eulero nel piano

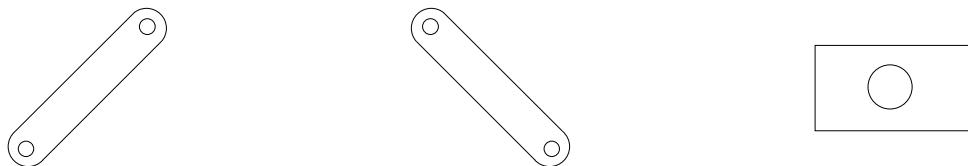
Vediamo come condurne lo studio tramite un esempio, in cui consideriamo il manovellismo di spinta.



Del meccanismo di spinta proposto a fianco sono note: le lunghezze dei membri che lo compongono, i baricentri dei diversi corpi e le rispettive masse. Il fine dell'analisi dinamica del meccanismo è quella di trovare le reazioni che il telaio esercita sul meccanismo.

A tal fine si utilizzeranno le equazioni di Newton-Eulero, che prevedono lo studio individuale dei diversi corpi, nonché le forze e i momenti a cui ognuno di essi è soggetto.

Si procede dunque a individuare i tre corpi di cui il meccanismo di spinta è composto e immaginare di separarli, nel seguente modo:



Prima di procedere con l'analisi dinamica dei corpi alcune osservazioni e precisazioni devono essere compiute:

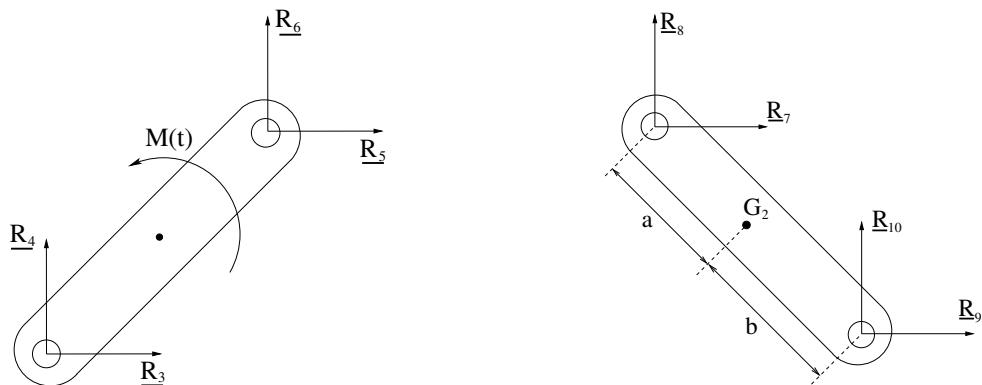
- Generalmente nelle macchine veloci l'inerzia dei corpi come la forza peso possono essere trascurate;
- I perni e le cerniere dovranno applicare, generalmente, 2 forze grandi abbastanza per ritenere la relativa manovella ferma; se ciò è verificato la cerniera in questione è a tutti gli effetti un **vincolo liscio**: ovvero vincoli che introducono forze per lo stretto necessario;

Si può dunque procedere con lo studio della dinamica dei corpi in esame:

#### 1. Corpo 1 & 2: Manovella e Biella

Procediamo a introdurre una forza per ogni G.d.L. che cancelliamo:

Se il vincolo è liscio non impedisce la rotazione della manovella e non applica momento (in realtà molti vincoli non sono lisci)



$$m_1 \ddot{x}_{G1} = R_x^e = R_3 + R_5$$

$$m_1 \ddot{y}_{G1} = R_y^e = R_4 + R_6$$

$$I_{1A} \ddot{\vartheta}_1 = M(t) + M_A^{(R_5)} + M_A^{(R_6)}$$

$$m_2 \ddot{x}_{G2} = R_9 + R_7$$

$$m_2 \ddot{y}_{G2} = R_8 + R_{10}$$

$$I_{2G_2} \ddot{\vartheta}_2 = M_{G_2}^{(R_9)} + M_{G_2}^{(R_{10})} + M_{G_2}^{(R_8)} + M_{G_2}^{(R_7)}$$

#### 2. Corpo 3: Pattino



$$\begin{aligned} m_3 \ddot{x}_{G3} &= F + R_{11} \\ m_3 \ddot{y}_{G3} &= R_{14} + R_{12} \\ I_{3G_3} \ddot{\vartheta}_3 &= M_{13} \end{aligned}$$

esplicitiamo ora la somma dei momenti con riferimento alle reazioni vincolari introdotte:

- \$M\_A^{(R\_5)}\$ e \$M\_A^{(R\_6)}\$:

$$M_A^{(R_5, R_6)} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r \cos \vartheta_1 & r \sin \vartheta_1 & 0 \\ R_5 & R_6 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, R_6 \cos \vartheta_1 - R_5 r \sin \vartheta_1)$$

$$I_{G1} \ddot{\vartheta}_1 = M(t) - R_5 r \sin \vartheta_1 + R_6 \cos \vartheta_1$$

- \$M\_{G2}^B\$ e \$M\_{G2}^C\$

$$M_{G2}^B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a \cos \vartheta_2 & -a \sin \vartheta_2 & 0 \\ R_7 & R_8 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -aR_8 \cos \vartheta_2 + aR_7 \sin \vartheta_2)$$

$$M_{G2}^C = \begin{vmatrix} i & j & k \\ b \cos \vartheta_2 & b \sin \vartheta_2 & 0 \\ R_9 & R_{10} & 0 \end{vmatrix} = R_{10} b \cos \vartheta_2 - R_9 b \sin \vartheta_2$$

Il problema posto è un problema di dinamica inversa, ovvero: nota  $q(t)$  e di conseguenza le accelerazioni dei baricentri, che ricordiamo possono essere ricavate dall'analisi cinematica, si richiede di valutare le reazioni vincolari a telaio.

Il sistema di  $3^*n$  equazioni in  $3^*n$  incognite, dove  $n$  è il numero di corpi in cui si è separato il sistema meccanico, porta ad una rappresentazione analitica delle reazioni vincolari in funzione del movente  $q(t)$ .

Il problema di dinamica inversa proposto, si limita a risolvere, di conseguenza, il seguente sistema di equazioni, a cui sono state applicate le sostituzioni  $R_7 = -R_5$  e  $R_8 = -R_6$  in virtù del terzo principio della dinamica (azione e reazione).

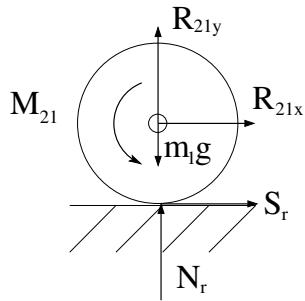
$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_{G1} = R_3 + R_5 \\ m_1 \ddot{y}_{G1} = R_4 + R_6 \\ I_{1A} \ddot{\vartheta}_1 = M(t) - R_5 r \sin \vartheta_1 + R_6 r \cos \vartheta_1 \\ m_2 \ddot{x}_{G2} = R_9 - R_5 \\ m_2 \ddot{y}_{G2} = R_{10} - R_6 \\ I_{2G_2} \ddot{\vartheta}_2 = a R_6 \cos \vartheta_2 - a R_5 \sin \vartheta_2 + b R_{10} \cos \vartheta_2 - b R_9 \sin \vartheta_2 \\ m_3 \ddot{x}_{G3} = F - R_9 \\ 0 = R_{14} - R_{10} \\ 0 = M_{13} \end{cases}$$

Proponiamo un ulteriore esempio sulle modalità di trattazione dell'analisi dinamica di una motocicletta.

Il sistema meccanico in questione può essere separato in tre corpi distinti che rappresentano rispettivamente la ruota anteriore e posteriore e il telaio.

Procediamo a condurre l'analisi cinematica dei corpi sopra elencati:

### 1. Corpo 1: Ruota posteriore



La ruota è a contatto con il suolo, dunque, o si comporterà come una coppia a camma e scivolerà a contatto con l'asfalto, oppure rotolerà senza strisciare.

Inoltre essa non può traslare verticalmente ed deve avere una velocità puramente orizzontale (condizione per cui la ruota non si solleva dal suolo).

Formulate tali premesse possiamo introdurre le seguenti forze:

- la **Forza peso** del corpo in questione;
- le due reazioni vincolari esercitate dalla coppia cinematica con il telaio (corpo 2);
- le forze esterne agenti sulla ruota in questione ( $M_{21}$  è il momento motore);

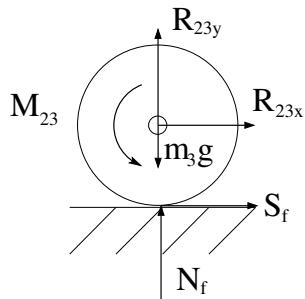
Per semplicità consideriamo che il baricentro sia posizionato esattamente nel centro della ruota, possiamo, dunque, scrivere le tre equazioni del moto rispetto al baricentro:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= R_{21x} + S \\ m_2 \ddot{y}_1 &= N_r + R_{21y} - m_1 g \\ I_1 \ddot{\vartheta}_1 &= M_{21} + S r_1 \end{aligned}$$

Qualora si volesse trovare le condizioni per cui la ruota non si stacchi da terra, basterebbe porre  $\ddot{y}_1 = 0$  e le rimanenti  $\ddot{x}_1$  e  $\ddot{\vartheta}_1$  sono legate dal vincolo di rotolamento:

$$\ddot{x}_1 = -\dot{\vartheta}_1 r$$

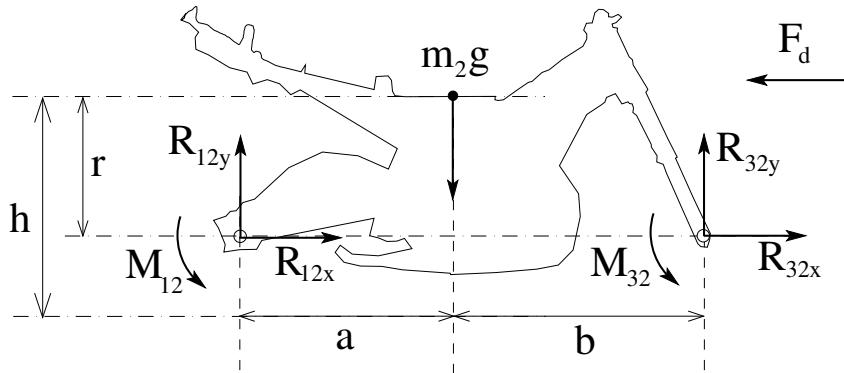
## 2. Corpo 3: Ruota anteriore



Situazione identica, vi è la presenza di un momento esercitato dal telaio per la presenza del freno  $M_{23}$ .

$$\begin{aligned} m_3 \ddot{x}_3 &= R_{23x} + S_f \\ m_3 \ddot{y}_3 &= N_f + R_{23y} - m_3 g \\ -I_3 \frac{\ddot{x}_3}{r} &= M_{23} + S_f r_1 \end{aligned}$$

## 3. Corpo 3: Telaio della motocicletta



Il telaio presenta oltre alle forze tra ruota e telaio stesso, anche la forza peso del pilota ( $m_2 g$ ) e una componente di forza consierata orizzontale relativa alla resistenza aerodinamica ( $F_d$ )

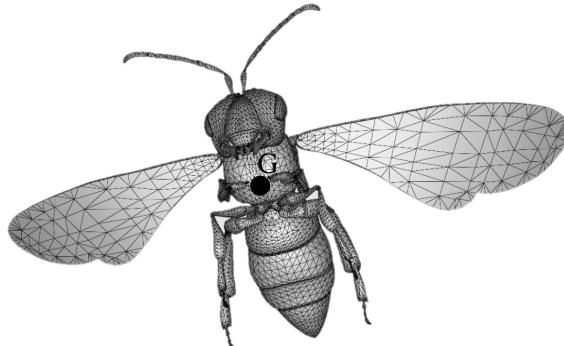
$$\begin{aligned} m_2 \ddot{x}_2 &= R_{12x} + R_{32x} - F_d \\ m_2 \ddot{y}_2 &= -m_2 g + R_{12y} + R_{32y} \\ I_2 \ddot{\theta}_2 &= R_{12x}(h - r) + R_{32x}(h - r) + R_{32y}b - R_{12y}a + M_{12} + M_{32} \end{aligned}$$

Come è già noto le accelerazioni e le accelerazioni angolari considerate non nulle possono essere ricavate tramite l'analisi cinematica.

Tramite il terzo principio della dinamica è possibile ridurre il numero di incognite presenti nelle equazioni proposte e ottenere un sistema di 9 equazioni in 9 incognite.

## 6.2 Equazioni di Newton-Eulero nello spazio

### 6.2.1 Equazioni di Newton



Le equazioni di Newton sono già state ricavate nei precedenti paragrafi.

Queste, dato un generico corpo, complesso a piacere, di cui è nota la massa e il centro di gravità (a.k.a baricentro), permettevano di scrivere un sistema di tre equazioni che ne descrivono le relazioni tra l'accelerazione del corpo stesso con le forze agenti su di esso.

Nello spazio questo sistema di 2 equazioni (di Newton) si estenderà a 3, ovvero:

$$m \ddot{x}_G = R_x^{(e)} ; \quad m \ddot{y}_G = R_y^{(e)} ; \quad m \ddot{z}_G = R_z^{(e)}$$

Si noti che in realtà, tramite tali equazioni siamo in grado solo di prevedere la traslazione del corpo in esame, non la rotazione: è necessario dunque introdurre, a tal fine, le equazioni di Eulero nello spazio, la cui dimostrazione, simile a quella compiuta nel bidimensionale, è proposta di seguito.

A tal fine sceglieremo l'origine del nostro S.d.R. a cui riferire il momento della quantità di moto coincidente con il baricentro del sistema meccanico generico ( $O=G$ ), inoltre assumiamo come ipotesi che i membri che compongono il sistema siano approssimabili come corpi rigidi

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_G &= \sum_i \mathbf{GP}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i \\ &= \sum_i \mathbf{GP}_i \wedge \mathbf{v}_G + \sum_i \mathbf{GP}_i \wedge (\underline{\omega} \wedge \mathbf{GP}_i) \\ &= \sum_i m_i \mathbf{GP}_i \wedge \mathbf{v}_G + \sum_i m_i \mathbf{GP}_i \wedge (\underline{\omega} \wedge \mathbf{GP}_i) \end{aligned}$$

Procediamo come fatto per ricavare le equazioni di Eulero nel bidimensionale a svolgere i prodotti interni:

$$\begin{aligned} \underline{\omega} \wedge \mathbf{GP}_i &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = \begin{matrix} \mathbf{i} & (\omega_y z_i - \omega_z y_i) \\ \mathbf{j} & (\omega_z x_i - \omega_x z_i) \\ \mathbf{k} & (\omega_x y_i - \omega_y x_i) \end{matrix} \\ \mathbf{GP}_i \wedge (\underline{\omega} \wedge \mathbf{GP}_i) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_i & y_i & z_i \\ (\omega_y z_i - \omega_z y_i) & (\omega_z x_i - \omega_x z_i) & (\omega_x y_i - \omega_y x_i) \end{vmatrix} = \begin{matrix} \mathbf{i} & (y_i (\omega_x y_i - \omega_y x_i) - z_i (\omega_z x_i - \omega_x z_i)) \\ \mathbf{j} & (z_i (\omega_y z_i - \omega_z y_i) - x_i (\omega_x y_i - \omega_y x_i)) \\ \mathbf{k} & (x_i (\omega_z x_i - \omega_x z_i) - y_i (\omega_y z_i - \omega_z y_i)) \end{matrix} \\ &= \begin{matrix} \mathbf{i} & \omega_x (y_i^2 + z_i^2) & -\omega_y x_i y_i & -\omega_z x_i z_i \\ \mathbf{j} & -\omega_x x_i y_i & \omega_y (z_i^2 + x_i^2) & -\omega_z y_i z_i \\ \mathbf{k} & -\omega_x z_i x_i & -\omega_y y_i z_i & \omega_z (x_i^2 + y_i^2) \end{matrix} \end{aligned}$$

Che nell'originale definizione di momento della quantità di moto rispetto al baricentro del sistema meccanico, assume la forma di:

$$\mathbf{K}_G = \begin{matrix} \mathbf{i} & \omega_x \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\omega_y \sum_i m_i x_i y_i & -\omega_z \sum_i m_i x_i z_i \\ \mathbf{j} & \omega_x \sum_i m_i x_i y_i & \omega_y \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\omega_z \sum_i m_i y_i z_i \\ \mathbf{k} & -\omega_x \sum_i m_i z_i x_i & -\omega_y \sum_i m_i y_i z_i & \omega_z \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{matrix}$$

Esattamente come abbiamo osservato nella dimostrazione dell'Equazione di Eulero nel piano notiamo la presenza dei momenti d'inerzia che verranno indicati secondo la notazione:

$$I_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) ; \quad I_{xy} = \sum_i m_i x_i y_i$$

Possiamo in questo modo scrivere in forma matriciale la relazione dell'equazione di Eulero che lega i momenti delle quantità di moto alle velocità angolari:

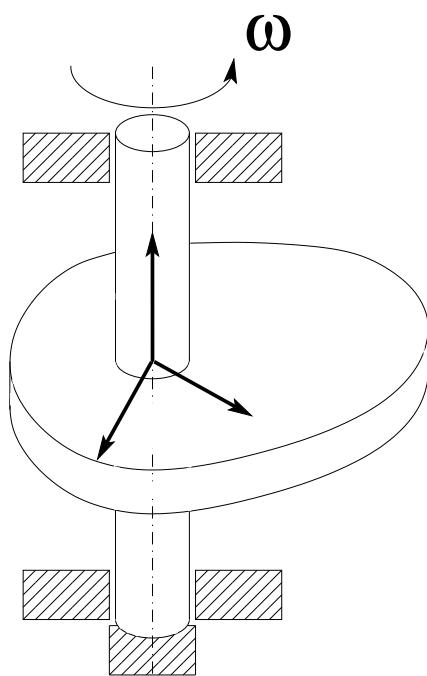
$$\mathbf{K}_G = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}$$

### 6.2.2 Esempi applicativi

L'utilizzo delle equazioni di Newton-Eulero nello spazio trovano grande impiego soprattutto in:

- Macchine generatrici di energia
- Organi in rotazione ad alta velocità
- Giroscopi
- Ruote di automobili

Vediamo applicate tali equazioni nella modellazione di un organo in rotazione:



Il sistema rotativo preso in considerazione presenta un asse di rotazione in corrispondenza dell'albero passante, il quale è vincolato in un punto ideale A da due coppie prismatiche e in un punto ideale B da 3 coppie prismatiche che ne limitano la traslazione.

L'albero gira con velocità angolare  $\omega$  e il piatto ha sezione circolare (la prospettiva inganna ; ) ; )

Si supponga anche che per un errore di lavorazione il baricentro non sia in corrispondenza dell'asse di rotazione bensì si trovi nel centro della sezione del piatto rotante.

L'obiettivo finale dell'analisi dinamica di tale sistema è quello di determinare la posizione di una massa che equilibri l'eccentricità del meccanismo.

Fissato il S.d.R. in corrispondenza dell'intersezione tra l'asse di rotazione e il piano del piatto rotante, si è proceduto con i ben noti calcoli

Osservazione: se il baricentro non è sull'asse di rotazione gli eventuali cuscinetti risulteranno sollecitati per compensare l'eccentricità, il che comporta vibrazioni, rumore, usura dei componenti e dei cuscinetti e una perdita di prestazione.

In virtù della simmetria cilindrica del componente facciamo uso di una vista dall'alto per valutare la distanza del baricentro dall'origine del S.d.R. scelto, che verrà sfruttata per valutare le accelerazioni del baricentro presenti nelle equazioni di Newton(-Eulero):

$$\mathbf{OG} = \begin{Bmatrix} x_G \\ y_G \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e \cos \vartheta(t) \\ e \sin \vartheta(t) \end{Bmatrix}$$

Una volta ricavate le accelerazioni, infatti, sarà possibile risolvere le seguenti equazioni (premessa: forza peso trascurabile):

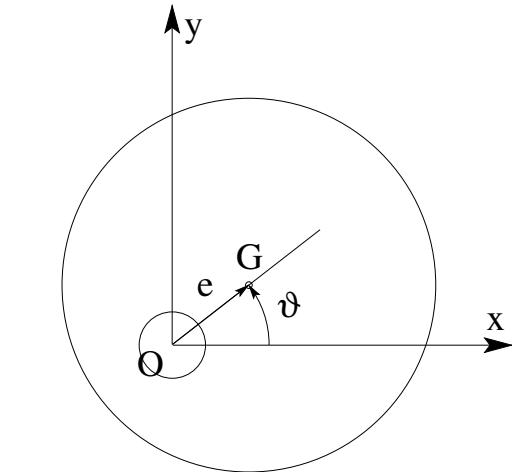
$$m a_x = R_{Ax} + R_{Bx}$$

$$m a_y = R_{Ay} + R_{By}$$

$$m a_z = R_{Bz}$$

Velocità :

$$\begin{aligned} \dot{x}_G &= -\dot{\vartheta}(t) e \sin \vartheta(t) \\ \dot{y}_G &= \dot{\vartheta}(t) e \cos \vartheta(t) \end{aligned}$$



Accelerazioni :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_G &= -\ddot{\vartheta}(t) e \sin \vartheta(t) - \dot{\vartheta}(t)^2 e \cos \vartheta(t) \\ \ddot{y}_G &= \ddot{\vartheta}(t) e \cos \vartheta(t) - \dot{\vartheta}(t)^2 e \sin \vartheta(t) \end{aligned}$$

che permette di scrivere:

$$\begin{Bmatrix} R_{Ax} + R_{Bx} \\ R_{Ay} + R_{By} \end{Bmatrix} = -m e \omega^2 \begin{Bmatrix} \cos \vartheta(t) \\ \sin \vartheta(t) \end{Bmatrix} + m e \ddot{\vartheta}(t) \begin{Bmatrix} -\sin \vartheta(t) \\ \cos \vartheta(t) \end{Bmatrix}$$

Dalla rappresentazione delle forze sopra ricavate possiamo concludere che la forza centrifuga di modulo  $-m e \omega^2$  è parallela al vettore eccentricità ( $OG$ ) e di verso opposto, mentre la forza di modulo  $m e \ddot{\vartheta}$  è perpendicolare.

La condizione in cui ci troviamo è detta di **sbilanciamento statico**: qualora, infatti, eseguissimo un test di statica, il baricentro si orienterebbe sul punto più basso.

Per bilanciare il rotore si può aggiungere una massa sulla retta congiungente  $OG$  al fine di riportare il baricentro del sistema meccanico sull'asse di rotazione.

Il nuovo baricentro sarà dunque posto ad una distanza:

$$G' = \frac{em - m'r}{m + m'}$$

Ponendo  $G'=O$  è possibile calcolare la massa necessaria posta ad una distanza "r" dall'asse di rotazione a bilanciare la presenza dell'eccentricità

### 6.3 Considerazioni aggiuntive sulle equazioni di Eulero

Tramite l'introduzione del tensore dei momenti d'inerzia  $\mathbf{I}$  abbiamo potuto esprimere una relazione che leggi la velocità angolare di un corpo rigido con il rispettivo momento della quantità di moto rispetto al baricentro del sistema meccanico in esame. Ovvero:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_G &= [\mathbf{I}] \boldsymbol{\omega} \\ \begin{Bmatrix} K_{Gx} \\ K_{Gy} \\ K_{Gz} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

dove le componenti del tensore dei momenti d'inerzia si trovano nelle forme:

$$I_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) \quad ; \quad I_{xy} = \sum_i m_i x_i y_i$$

Alcune osservazioni possono essere formulate riguardo a tale relazione:

- L'analoga formula dell'equazione di Newton a cui generalmente si paragona l'equazione vettoriale sopra riportata è

$$\mathbf{Q} = M \mathbf{v}_G$$

in cui la massa  $M$  funge da quantità scalare di proporzionalità tra le due grandezze vettoriali in gioco.

Ciò implica che la velocità del baricentro ( $\mathbf{v}_G$ ) e la quantità di moto del sistema meccanico ( $\mathbf{Q}$ ) siano due vettori paralleli.

- La stessa proprietà di parallelismo non è sempre verificata nel caso dell'equazioni di Eulero: infatti, il tensore d'inerzia non è una grandezza scalare (come era la massa  $M$ ) o vettoriale, bensì un operatore.

In generale, dunque, non varrà che il vettore momento della quantità di moto ( $\mathbf{K}_G$ ) sia parallelo alla velocità angolare ( $\underline{\omega}$ ).

Rinforziamo questo concetto considerando il caso in cui la velocità angolare comprenda solo una componente lungo z:

$$\begin{Bmatrix} K_{Gx} \\ K_{Gy} \\ K_{Gz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -I_{xz} \omega_z \\ -I_{yz} \omega_z \\ I_{zz} \omega_z \end{Bmatrix}$$

Come si può infatti evincere, nonostante  $\underline{\omega}$  abbia solo componenti lungo z, lo stesso non può essere detto di  $\mathbf{K}_G$ . Affinché effettivamente i due vettori in gioco siano paralleli, i momenti d'inerzia ( $I_{xz}$  e  $I_{yz}$ ) si devono annullare.

Cerchiamo dunque per quali condizioni i vettori  $\underline{\omega}$  e  $\mathbf{K}_G$  siano paralleli.

Più in particolare, vorremmo trovare una condizione sulla velocità angolare, che permetta di ottenere la relazione di parallelismo. Tale condizione può essere ottenuta risolvendo la seguente equazione matriciale:

$$[I] \{ \omega \} = \lambda \{ \omega \}$$

Poiché il tensore dei momenti d'inerzia è di ordine 3 ed è simmetrico, esistono 3 autovalori ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ) e 3 corrispettivi autovettori ( $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3$ ) tali per cui  $\mathbf{K}_G \parallel \underline{\omega}$ .

Inoltre i tre autovalori formano una base ortogonale e definiscono i tre assi principali d'inerzia.

Lungo tali assi il tensore d'inerzia è diagonale:

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

Dalla formulazione del tensore d'inerzia lungo gli assi principali d'inerzia possiamo distinguere tre casi:

1. I 3 momenti d'inerzia principali sono diversi ( $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ )
2. 2 momenti principali d'inerzia sono uguali: condizione tipica dei giroscopi dove si osserva la presenza di un asse polare diverso da qualsiasi asse d'inerzia ortogonale allo stesso (cfr. tutti i corpi a simmetria assiale)
3. I 3 momenti principali d'inerzia sono uguali ( $I_1 = I_2 = I_3$ )  $\iff$  **momento d'inerzia sferico**

In generale tuttavia, come precedentemente evinto dalle considerazioni fatte per l'equazione  $\mathbf{K}_G = \mathbf{I} \underline{\omega}$ , il tensore d'inerzia è generalmente pieno, ma ha sempre 3 autovalori reali e 3 autovettori mutualmente ortogonali. Una volta diagonalizzata, tuttavia, i momenti d'inerzia principali presenti sulla diagonale del tensore sono sempre positivi (**matrice definita positiva**) e tale proprietà comporta che tutti gli autovalori saranno positivi.

### 6.3.1 Momenti d'inerzia principale su una terna mobile

Con riferimento ad una terna mobile, i tensori d'inerzia sono calcolati rispetto ad un S.d.R. solidale al corpo e di conseguenza risulteranno costanti in quanto i punti del corpo (rigido) hanno tutti coordinate costanti (cfr. definizione momento d'inerzia).

Dalla seconda equazione cardinale della dinamica:

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} + \mathbf{v}_O \wedge \mathbf{Q} = \mathbf{M}_O$$

Qualora l'origine del S.d.R scelto sia fisso ( $\mathbf{v}_O = 0$ ) o l'origine del S.d.R. sia coincidente con il baricentro ( $O = G$ ) l'equazione appena esposta si semplifica in quanto il prodotto esterno si azzera ( $\mathbf{v}_O \wedge Q = 0$ ).

Sfruttiamo dunque questa caratteristica e l'equazione di Eulero per valutare i momenti rispetto ad un S.d.R. mobile e solidale al corpo in esame con origine nel baricentro del sistema meccanico (più in particolare sfrutteremo l'equazione di Eulero per ricavare la derivata dei momenti della quantità di moto rispetto al S.d.R. scelto).

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{I}\underline{\omega}$$

Procediamo dunque a scrivere l'equazione di Eulero rispetto ad un S.d.R. solidale al corpo (non necessariamente coincidente con gli assi principali d'inerzia):

Il primo termine dell'equazione (lhs) può essere, sotto tali ipotesi, espresso come:

$$\mathbf{K}_G = K_{Gx} \mathbf{i} + K_{Gy} \mathbf{j} + K_{Gz} \mathbf{k}$$

Tramite l'uguaglianza di Eulero è noto che alla luce delle ipotesi fatte a priori le componenti del tensore d'inerzia sono costanti:

$$K_{Gx} = I_{xx} \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z$$

Eseguendone dunque la derivata per una singola componente di ( $\mathbf{K}_G$ ), si ottiene:

$$\frac{dK_{Gx}}{dt} = I_{xx} \dot{\omega}_x - I_{xy} \dot{\omega}_y - I_{xz} \dot{\omega}_z$$

ripetendo lo stesso processo per gli altri elementi del vettore in esame:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{K}_G}{dt} &= \dot{K}_{Gx} \mathbf{i} + \dot{K}_{Gy} \mathbf{j} + \dot{K}_{Gz} \mathbf{k} \\ &= K_{Gx} \dot{\mathbf{i}} + K_{Gy} \dot{\mathbf{j}} + K_{Gz} \dot{\mathbf{k}} \\ &= K_{Gx} \mathbf{i} + K_{Gy} \mathbf{j} + K_{Gz} \mathbf{k} \\ &= K_{Gx} \underline{\omega} \wedge \mathbf{i} + K_{Gy} \underline{\omega} \wedge \mathbf{j} + K_{Gz} \underline{\omega} \wedge \mathbf{k} \quad \leftarrow \text{cfr. Formule di Poisson} \end{aligned}$$

che in forma matriciale può essere scritta:

$$\begin{Bmatrix} \dot{K}_x \\ \dot{K}_y \\ \dot{K}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{Bmatrix} = \mathbf{I} \dot{\underline{\omega}}$$

In conclusione, dunque, si ha che:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{K}_G}{dt} &= \mathbf{M}_G^{(e)} \\ &= I \dot{\underline{\omega}} + \underline{\omega} \wedge \mathbf{K}_G \\ &= I \dot{\underline{\omega}} + \underline{\omega} \wedge I \underline{\omega} \end{aligned}$$

In questa espressione si possono riconoscere:

- Il tensore d'inerzia per l'accelerazione angolare ( $I \dot{\underline{\omega}}$ )
- L'effetto di trascinamento del S.d.R. scelto ( $\underline{\omega} \wedge I \underline{\omega}$ )

Il prodotto esterno non è molto operativo: possiamo cercare una matrice  $\mathbf{P}$  che premoltiplicata per il secondo termine del prodotto esterno ritorni lo stesso risultato.

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{matrix} \mathbf{i} & a_y b_z - a_z b_y \\ \mathbf{j} & a_z b_x - a_x b_z \\ \mathbf{k} & a_x b_y - a_y b_x \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix}$$

Da tale osservazione possiamo, di conseguenza, riscrivere l'espressione per il momento rispetto al baricentro in un S.d.R. solidale al corpo:

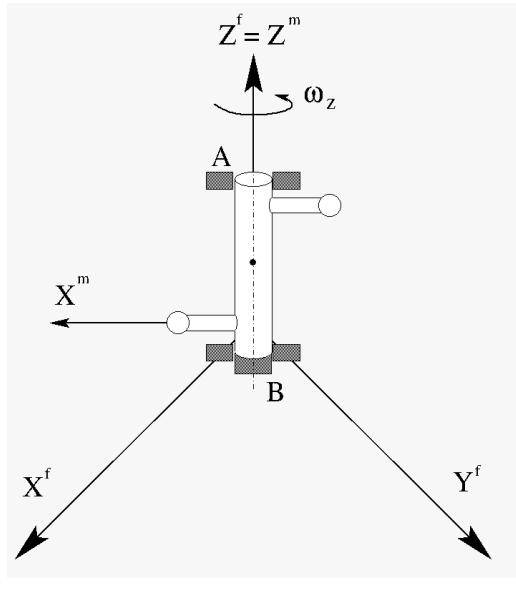
$$\mathbf{M}_O^{(e)} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}_G^{(e)} = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}_G + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}_G$$

## 6.4 Applicazione: Rotori con sbilanciamento dinamico

Consideriamo il sistema meccanico rappresentato in figura in cui il moto rotatorio è localizzato attorno ad un asse fisso baricentrico, ma non principale d'inerzia.

Esso si compone di 3 elementi:

- un corpo a simmetria cilindrica/assiale a cui è applicato una velocità angolare lungo l'asse di simmetria;
- due pessetti che si estendono lungo la direzione radiale del cilindro in modo tale da mantenere il baricentro del sistema nel medesimo punto, ma facendo perdere la simmetria al sistema.



La perdita di simmetria del sistema, fa sì che la direzione del vettore velocità angolare non coincida con un asse principale d'inerzia.

Definiamo due sistemi di riferimento con medesima origine, uno fisso e uno mobile (ovvero solidale al sistema meccanico in esame).

Si richiede di valutare le reazioni vincolari di momento che i vincoli posti agli estremi (A e B) devono sopportare in virtù del fatto che la rotazione non avviene lungo un asse principale d'inerzia.

Procediamo alla scrittura della legge del moto per mezzo della seconda equazione cardinale della dinamica:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}_G = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\omega}_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & 0 \\ \omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -I_{xz} \\ -I_{yz} \\ I_{zz} \end{Bmatrix} \dot{\omega}_z + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z^2 & 0 \\ \omega_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -I_{xz} \\ -I_{yz} \\ I_{zz} \end{Bmatrix}$$

che in forma scalare prendono la seguente forma:

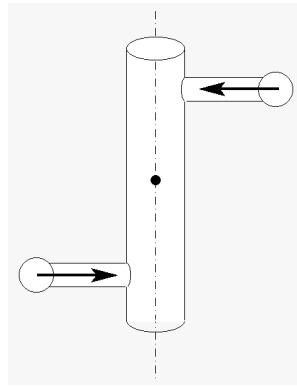
$$\begin{aligned} M_x &= -I_{xz} \dot{\omega}_z + I_{yz} \omega_z^2 \\ M_y &= -I_{yz} \dot{\omega}_z - I_{xz} \omega_z^2 \\ M_z &= I_{zz} \dot{\omega}_z \end{aligned}$$

Da un'osservazione qualitativa del sistema di equazioni sopra riportate si può notare una dipendenza delle reazioni vincolari dall'accelerazione agolare del sistema ( $\omega_z$ ) e dal quadrato della velocità angolare ( $\omega_z^2$ ).

Se i prodotti d'inerzia  $I_{yz}$  e  $I_{xz}$  sono nulli (ovvero se gli assi sono principali d'inerzia) le relazioni vincolari dipendono esclusivamente dall'accelerazione angolare del sistema proposto.

Le coppie di forze che vengono ad originarsi sono riconducibili al momento  $M_y$ , e sono sovute al fatto che sto costringendo il corpo a ruotare lungo un asse che non è asse principale d'inerzia.

Analogamente allo sbilanciamento statico, il bilanciamento dinamico si applica introducendo due pesetti in modo da ristabilire la simmetria assiale.



## 6.5 Applicazione: Moto rotatorio con effetti giroscopici

Gli effetti giroscopici nella vita di tutti i giorni si verificano generalmente quando un corpo a simmetria assiale e in rotazione rispetto all'asse di simmetria è posto in rotazione attorno ad un asse ortogonale come schematizzato nel disegno proposto

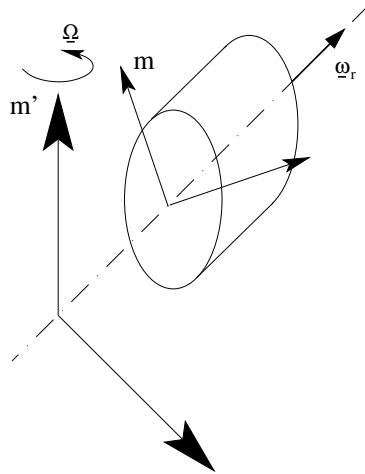
Consideriamo dunque il moto rotatorio di un corpo a simmetria assiale intorno all'asse di simmetria a sua volta rotante intorno ad un asse ortogonale; il sistema è a 2 G.d.L.

Un tipico caso è rappresentato da una ruota di un veicolo in curva.

Supponiamo per semplicità che gli assi di rotazione siano ortogonali. Fissiamo due sistemi di riferimento, il sistema fisso ha origine nel punto di intersezione degli assi di rotazione O mentre quello solidale ha origine nel baricentro della ruota.

Dato che il corpo è a simmetria assiale l'asse di rotazione è baricentrico e principale d'inerzia, inoltre i due momenti d'inerzia relativi agli assi  $x_m$  e  $y_m$  sono uguali.

Affrontiamo il problema cinetostatico, supponiamo che il moto sia noto e sia formato da una rotazione velocità costante  $\underline{\omega}_z$  della ruota attorno al proprio asse e da una rotazione dell'asse della ruota con velocità costante  $\underline{\omega}$ .



È possibile scrivere l'equazione di Eulero per i S.d.R.  $m$  e  $m'$  che ruotano, rispettivamente, alla velocità della ruota e del supporto.

- Se scritto rispetto ad un S.d.R. solidale alla ruota

$${}^m \mathbf{K}_G = {}^m \mathbf{I} \cdot {}^m \underline{\omega}_z \quad \Rightarrow \quad \frac{d {}^m \mathbf{K}_G}{dt} = {}^m \mathbf{M}_O^{(e)} \\ \frac{d {}^m \mathbf{K}_G}{dt} = {}^m \dot{\mathbf{K}}_G + {}^m \underline{\omega}_z \wedge {}^m \mathbf{K}_G$$

Sono presenti un termine di derivata prima del momento della quantità di moto ( $\dot{\mathbf{K}}_G$ ) e un prodotto esterno rappresentativo della velocità di trascinamento della terna (non del corpo)

- La medesima relazione se scritta rispetto alla terna  $m'$  solidale al supporto:

$$\frac{d {}^{m'} \mathbf{K}_G}{dt} = {}^{m'} \mathbf{M}_G^{(e)} = {}^{m'} \dot{\mathbf{K}}_G + \underline{\Omega} \wedge {}^{m'} \mathbf{K}_G$$

Anche in questa circostanza riconosciamo un termine legato alla derivata prima del momento della quantità di moto e un termine, individuato dal prodotto interno, relativo alla velocità di trascinamento della terna solidale al supporto/mozzo.

Nel caso in cui il tensore d'inerzia abbia componenti costanti possiamo sviluppare ulteriormente la derivata del momento della quantità di moto sia nel caso del S.d.R. del supporto che della ruota:

$$\begin{aligned} {}^m \dot{\mathbf{K}}_G &= {}^m \mathbf{I} \dot{\underline{\omega}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d {}^m \mathbf{K}_G}{dt} = {}^m \mathbf{I} \dot{\underline{\omega}} + \underline{\omega}_z \wedge {}^m \mathbf{I} \underline{\omega} = {}^m \mathbf{M}_G^{(e)} \\ {}^{m'} \dot{\mathbf{K}}_G &= {}^{m'} \mathbf{I} \dot{\underline{\omega}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d {}^{m'} \mathbf{K}_G}{dt} = {}^{m'} \mathbf{I} \dot{\underline{\omega}} + \underline{\Omega} \wedge {}^{m'} \mathbf{I} \underline{\omega} = {}^{m'} \mathbf{M}_G^{(e)} \end{aligned}$$

che in forma scalare possono essere, rispettivamente, rappresentate come:

$$\begin{aligned} [I] \{\dot{\omega}\} + P_{\omega_z} [I] \{\omega\} &= \{M\} \\ [I] \{\dot{\omega}\} + P_{\Omega} [I] \{\omega\} &= \{M\} \end{aligned}$$

Le prime applicazioni degli effetti giroscopi si sono potute osservare nella progettazione dei satelliti per le missioni spaziali dello scorso secolo.

In generale è consigliabile utilizzare un S.d.R. baricentrico e orientato lungo gli assi principali d'inerzia in moto tale che la seconda equazione cardinale della dinamica sia:

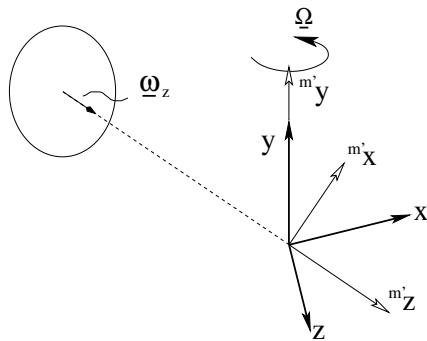
$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & & \\ & I_y & \\ & & I_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x & & \\ & I_y & \\ & & I_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}$$

In forma scalare:

$$\begin{aligned} M_x &= I_x \dot{\omega}_x - I_y \omega_y \omega_z + I_z \omega_y \omega_z &= I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z \\ M_y &= I_y \dot{\omega}_y + I_x \omega_x \omega_z - I_z \omega_x \omega_z &= I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z \\ M_z &= I_z \dot{\omega}_z - I_x \omega_y \omega_x + I_y \omega_x \omega_y &= I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_y \omega_x \end{aligned}$$

Qualora  $I_z \neq I_x = I_y$  l'equazione si semplifica e si ottiene la dinamica del giroscopio.

Vediamo dunque in azione ciò che abbiamo appena affrontato:



- Sia  $\underline{\Omega}$  la velocità angolare del S.d.R. m' (es. supporto/mozzo/albero);
- Sia  $\underline{\omega}_z$  la velocità angolare del S.d.R. m (es. ruota)
- la velocità angolare complessiva sarà data dalla somma vettoriale delle due componenti sopra elencate:

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}_z + \underline{\Omega} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \Omega \\ \omega_z \end{Bmatrix}$$

Possiamo dunque valutare le componenti del momento in un S.d.R. solidale al mozzo (m') dovute alla rotazione della ruota.

$$\begin{aligned} {}^{m'} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_x & & \\ & I_y & \\ & & I_z \end{bmatrix} {}^{m'} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x & & \\ & I_y & \\ & & I_z \end{bmatrix} {}^{m'} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_x & & \\ & I_y & \\ & & I_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x & & \\ & I_y & \\ & & I_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \Omega \\ \omega_z \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ I_y \Omega \\ I_z \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_z \omega_z \Omega \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Possiamo notare che il momento che esercita il telaio sul mozzo per compensare l'effetto giroscopico della ruota agisce solamente lungo l'asse  $x$  del S.d.R.  $m'$  ed è pari a  ${}^{m'}M_x = I_z \omega_z \Omega$

Lo stesso problema poteva essere affrontato considerando la velocità angolare  $\underline{\omega}$  complessiva rispetto al S.d.R. solidale alla ruota: tuttavia i passaggi algebrici risultano più complessi:

- Sia  $\underline{\omega}$  la velocità angolare del S.d.R.  $m'$  (es. supporto/mozzo/albero);
- Sia  $\omega_z$  la velocità angolare del S.d.R.  $m$  (es. ruota)
- Poiché nel S.d.R. scelto  $\underline{\omega}$  sarà allineata con uno degli assi (\* come avveniva per l'esempio precedente), dovranno essere considerate le sue proiezioni; la velocità angolare complessiva sarà data dalla somma vettoriale delle due componenti sopra elencate:

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}_z + \underline{\Omega} = \begin{cases} \Omega \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) \\ \Omega \sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) \\ \omega_z \end{cases} = \begin{cases} \Omega \sin \vartheta \\ \Omega \cos \vartheta \\ \omega_z \end{cases}$$

Possiamo dunque valutare le componenti del momento in un S.d.R. solidale alla ruota ( $m$ ) dovute alla rotazione della ruota.

$$\begin{aligned} {}^m \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_x & & \\ & I_y & \\ & & I_z \end{bmatrix} {}^m \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x & & \\ & I_y & \\ & & I_z \end{bmatrix} {}^m \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_x & & \\ & I_y & \\ & & I_z \end{bmatrix} \begin{cases} \Omega \omega_z \cos \vartheta \\ -\Omega \omega_z \sin \vartheta \\ 0 \end{cases} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \Omega \cos \vartheta \\ \omega_z & 0 & -\Omega \sin \vartheta \\ -\Omega \cos \vartheta & \Omega \sin \vartheta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x & & \\ & I_y & \\ & & I_z \end{bmatrix} \begin{cases} \Omega \sin \vartheta \\ \Omega \cos \vartheta \\ \omega_z \end{cases} \\ &= \begin{cases} I_x \Omega \omega_z \cos \vartheta \\ -I_y \Omega \omega_z \sin \vartheta \\ 0 \end{cases} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \Omega \cos \vartheta \\ \omega_z & 0 & -\Omega \sin \vartheta \\ -\Omega \cos \vartheta & \Omega \sin \vartheta & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} I_x \Omega \sin \vartheta \\ I_y \Omega \cos \vartheta \\ I_z \omega_z \end{cases} \\ &= \begin{cases} I_x \Omega \omega_z \cos \vartheta \\ -I_y \Omega \omega_z \sin \vartheta \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} -I_y \omega_z \Omega \cos \vartheta + I_z \omega_z \Omega \cos \vartheta \\ I_x \omega_z \Omega \sin \vartheta - I_z \omega_z \Omega \sin \vartheta \\ -I_x \Omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + I_y \Omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \end{cases} \end{aligned}$$

Nell'ipotesi che  $I_x = I_y$  l'espressione appena scritta si semplifica e si ottiene la dinamica del giroscopio.

$${}^m \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{cases} I_z \omega_z \Omega \cos \vartheta \\ -I_z \omega_z \Omega \sin \vartheta \\ 0 \end{cases}$$

Le componenti del momento così ottenuto corrispondono alle proiezione nel S.d.R. in esame di un vettore di modulo  $I_z \omega_z \Omega$  che corrisponde al risultato ottenuto precedentemente eseguendo il calcolo nel S.d.R.  $m'$  solidale al mozzo.

## 6.6 Principio dei Lavori Virtuali (PLV)

Il principio dei lavori virtuali (PLV) è il più antico tra i principi energetici della Meccanica; nella risoluzione dei problemi di equilibrio delle macchine è spesso più efficace delle equazioni cardinali della statica.

Vediamo perché il PLV è particolarmente utile nella soluzione dei problemi di statica delle macchine.

In primo luogo i problemi di statica possono essere suddivisi in due tipi:

1. Abbiamo problemi a **geometria costante** quando, una volta applicato il carico, il sistema non subisce spostamenti macroscopici ma solo piccole deformazioni; pertanto la configurazione di equilibrio del sistema caricato è uguale a quella del sistema scarico e quindi le condizioni di equilibrio possono essere scritte con riferimento alla geometria indeformata (*la maggior parte delle strutture civili, ponti, torri, dighe, danno luogo a problemi statici a geometria costante*).
2. Abbiamo problemi a **geometria variabile** quando, in seguito all'applicazione del carico il sistema subisce degli spostamenti macroscopici e pertanto la configurazione di equilibrio del sistema caricato differisce in maniera apprezzabile da quella originaria del sistema scarico.

Problemi a geometria variabile si trovano soprattutto nel settore delle macchine, si pensi ad esempio al meccanismo di spinta rotativo sotto l'azione di una forza ed equilibrato da una forza esercitata da una molla di rigidezza  $k$ .

Problemi a geometria variabile possono essere risolti anche con le equazioni di equilibrio però con maggiori difficoltà in quanto si introducono anche come incognite le reazioni vincolari.

L'enunciato del PLV è il seguente:

*Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un sistema ideale di corpi rigidi è che sia nullo il lavoro delle forze esterne su di esso agenti, comprese quelle di inerzia, a seguito di spostamenti virtuali*

Tuttavia tale definizione/enunciato tiene in considerazione delle nozioni di meccanica razionale che non sono state affrontate.

Si può dunque dare una definizione alternativa:

*Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un sistema materiale è che sia nullo il lavoro delle forze attive per ogni spostamento virtuale oppure minore o uguale a zero per ogni spostamento virtuale irreversibile*

Analizziamo le diverse sezioni della frase appena esposta per comprendere a pieno il significato:

- **Equilibrio** := un sistema meccanico (che possiamo sempre immaginare come un insieme di punti materiali vincolati in vario modo) è in equilibrio se, posto in quiete, permane in quiete. In termini di equazioni del moto:

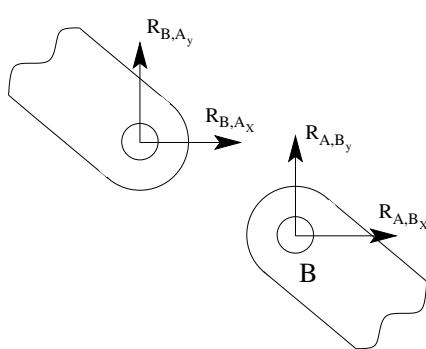
$$m \mathbf{a} = \mathbf{R}$$

significa che la risultante  $\mathbf{R}$  delle forze agenti su ogni punto materiale è zero, in modo che l'accelerazione di tutti i punti sia zero e, se la velocità iniziale è zero (il sistema è posto in quiete) allora la velocità rimane zero (resta in quiete).

- **Forze attive e Forze vincolari** := possiamo distinguere le forze in due categorie: quelle che sono causate da vincoli  $\mathbf{F}^{(v)}$ , (reazioni vincolari) e quelle che non sono causate dai vincoli  $\mathbf{F}^{(a)}$  (forze attive).

A tal proposito vengono proposti alcuni esempi per consolidare il concetto di forze vincolari e attive:

- Coppia rotoidale



Affinché i punti A e B coincidano il vincolo deve esercitare due forze uguali e opposte.

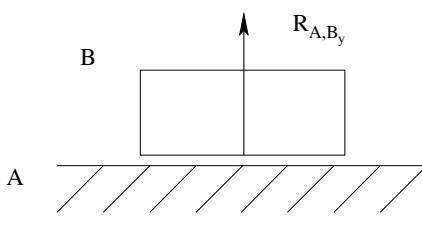
In questo esempio, poiché la coppia rotoidale deve impedire la traslazione relativa deve produrre due forze.

Se effettivamente il vincolo esercita solo forze per la cancellazione dei G.d.L. prende il nome di **Vincolo ideale o liscio**.

Nella figura proposta le due forze che A esercita su B e viceversa devono essere uguali e contrarie perciò

$$R_{A,B,x} = -R_{B,A,x} \quad ; \quad R_{A,B,y} = -R_{B,A,y}$$

- Coppia prismatica



Se il vincolo è ideale impedirà solo lo spostamento lungo  $y$ . Le coppie che non possono essere considerate liscie sono quelle che presentano una componente di attrito, ovvero una forza lungo la direzione del moto. Nel PLV si assume che i vincoli siano lisci ovvero non sia presente attrito.

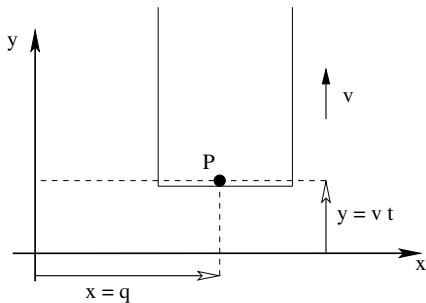
D'altra parte se un sistema meccanico è in equilibrio con vincoli lisci a maggior ragione sarà in equilibrio con vincoli dotati di attrito perché quest'ultimo si oppone sempre al movimento.

- **Spostamento virtuale** := Uno spostamento virtuale va pensato come una configurazione alternativa nello stesso istante del sistema meccanico compatibile con i vincoli.

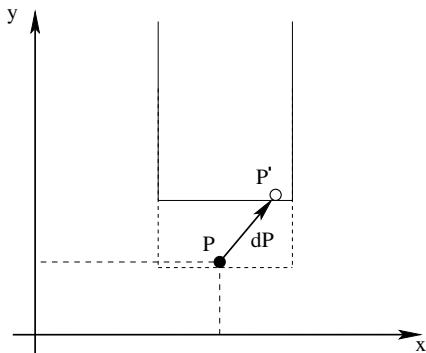
La parola "spostamento" è un po' fuorviante, poiché fa pensare a un movimento che avviene nel tempo. Invece si tratta di una posizione diversa, ma sempre congruente con i vincoli, che il sistema potrebbe avere nello stesso istante.

Gli "spostamenti" dei punti sono i vettori che uniscono la configurazione di riferimento con la configurazione immaginaria (virtuale) e, in genere, gli spostamenti sono considerati infinitesimi.

Il concetto di spostamento virtuale può essere affrontato considerando l'esempio dell'ascensore:



Consideriamo un ascensore in moto verticale con velocità  $v$  al cui interno è presente una sfera  $P$  che ha coordinate rispetto ad un S.d.R. fisso pari a  $\mathbf{OP} = (q, v \cdot t)$ .

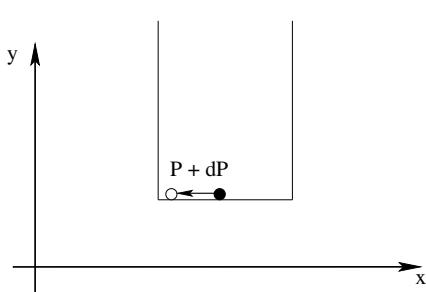


Il punto materiale così rappresentato è vincolato a stare nel piano, ma non a muoversi lungo la coordinata  $x$ , che, di fatto, rappresenta l'unico G.d.L. del sistema meccanico ed è quindi rappresentato dalla coordinata generalizzata "x=q".

A questo punto per sottolineare la differenza tra spostamento infinitesimo e spostamento virtuale immaginiamo di rappresentare l'ascensore ad un istante infinitesimo successivo  $t' = t + dt$ .

Di conseguenza anche la coordinata libera  $x=q$ , può trovarsi in una nuova posizione  $\mathbf{q}' = \mathbf{q} + d\mathbf{q}$ .

Si è così ottenuto lo **spostamento infinitesimo** ( $d\mathbf{P}$ ) del punto materiale.

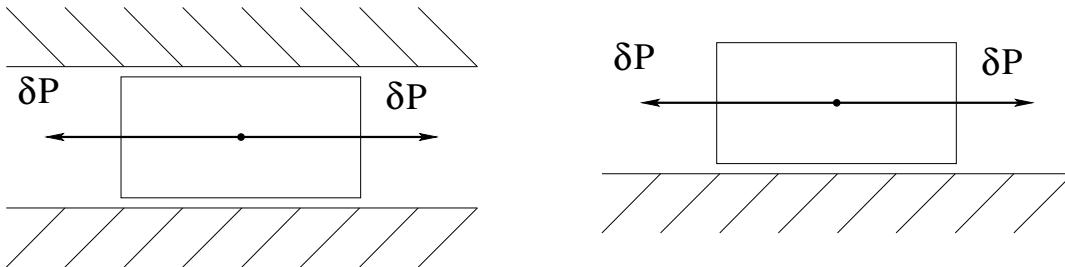


Lo **spostamento virtuale**, invece, è un concetto che è indipendente dal tempo: in altri termini è un presente alternativo, che rappresenta una delle posizioni possibili del punto materiale in esame.

Nello spostamento virtuale, di conseguenza,  $dt = 0$ . Il punto materiale occupa una posizione immaginaria nello stesso istante, e lo spostamento che ne deriva rimane comunque compatibile con il vincolo imposto, che, nel nostro caso, è rappresentato dalla base dell'ascensore.

- **Spostamento virtuale reversibile e irreversibile** := si può ulteriormente distinguere gli spostamenti virtuali tra reversibili e irreversibili.

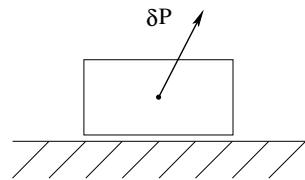
Il concetto di reversibilità è strettamente legato ai vincoli unilaterali e bilaterali:



Gli esempi sopra riportati rappresentano rispettivamente un vincolo unilaterale e bilaterale a cui è applicato uno spostamento reversibile.

Uno spostamento è reversibile se esiste anche uno spostamento opposto ancora compatibile con i vincoli

Di lato viene rappresentato uno spostamento che è compatibile con il vincolo imposto dalla coppia prismatica imposta, ma irreversibile in quanto lo spostamento opposto viola il vincolo stesso.



Per un **sistema olonomo**, cioè un sistema nel quale i vincoli possono essere espressi con equazioni algebriche (si ricorda che alcuni vincoli come quello di rotolamento in tre dimensioni si esprimono con equazioni differenziali che non possono essere integrate) la posizione dei punti può essere espressa in funzione delle coordinate generalizzate.

Per esempio per un sistema a due gradi di libertà la posizione di un punto generico P potrà essere pensata come funzione delle due coordinate generalizzate.

$$\mathbf{OP} = \mathbf{f}(q_1, q_2, t)$$

Nella espressione  $\mathbf{f}(q_1, q_2, t)$  compare il tempo  $t$  in maniera esplicita perché, nel caso più generale alcuni vincoli potrebbero essere dipendenti dal tempo. Lo spostamento virtuale si calcola immaginando variazioni infinitesime virtuali delle coordinate generalizzate a tempo  $t$  costante:

$$\delta\mathbf{P} = (\partial_{q_1} \mathbf{f}) \delta q_1 + (\partial_{q_2} \mathbf{f}) \delta q_2$$

Per contro, va osservato che uno spostamento che avvenga in un tempo infinitesimo (spostamento infinitesimo) sarebbe:

$$d\mathbf{P} = (\partial_{q_1} \mathbf{f}) dq_1 + (\partial_{q_2} \mathbf{f}) dq_2 + (\partial_t \mathbf{f}) dt$$

Le derivate parziali ( $\partial_{qi} f$ ) sono i rapporti di velocità, che ci consentono quindi di esprimere gli spostamenti virtuali dei vari punti del sistema, in funzione delle variazioni virtuali  $\delta q_i$  delle coordinate generalizzate.

### OSSERVAZIONI

Il lavoro virtuale  $\delta L$  può essere scomposto nel lavoro delle forze attive e in quello delle forze vincolari.

$$\delta\mathbf{L} = \delta\mathbf{L}^a + \delta\mathbf{L}^v$$

In un sistema equilibrato la risultante  $\mathbf{R} = \mathbf{F}^{(a)} + \mathbf{F}^{(v)}$  è zero su tutti i punti materiali. Quindi il lavoro virtuale totale è  $\delta L = 0$ .

D'altra parte nel caso di vincoli lisci (senza attrito) sappiamo che la reazione vincolare agisce nella direzione dei gradi di libertà soppressi.

1. Nel caso di vincoli bilaterali la reazione vincolare può avere un verso qualsiasi nella direzione del vincolo ma il movimento avviene nella direzione ortogonale (dei gradi di libertà superstiti) e non ha componenti nella direzione vincolata. Quindi il lavoro delle reazioni vincolari (nei vincoli lisci) è zero:  $\delta L^v = 0$ . Ne consegue che la condizione di equilibrio (vincoli lisci e bilaterali) è data da:

$$\delta\mathbf{L}^a = \mathbf{0}$$

Il vantaggio di questa formulazione sta nel fatto che non è necessario considerare le forze vincolari nei calcoli. D'altra parte trascurare l'attrito significa trascurare forze che si oppongono al movimento (e quindi un sistema in equilibrio con vincoli lisci è a maggior ragione equilibrato con vincoli dotati di attrito).

- Nel caso di vincoli unilaterali la reazione vincolare ha verso opposto al vincolo. In un vincolo unilaterale sono possibili spostamenti virtuali (non reversibili) nella direzione di apertura del vincolo. Gli spostamenti virtuali non reversibili hanno quindi una componente nella direzione di apertura del vincolo (la stessa della reazione vincolare) e il lavoro virtuale in questo caso è  $\delta L^v > 0$ . Ne consegue che la condizione di equilibrio (vincoli lisci e unilaterali) è data da:

$$\delta \mathbf{L}^a \leq \mathbf{0}$$

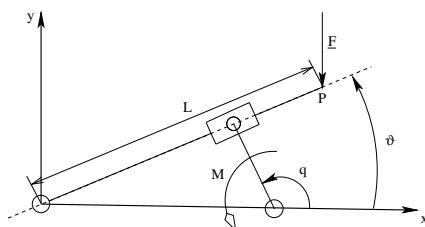
- Vale la pena osservare che il lavoro virtuale va calcolato per ogni spostamento virtuale (reversibile o no). Cioè si deve annullare qualsiasi sia lo spostamento virtuale immaginato e questa condizione permette di ricavare tante equazioni quanti sono i gradi di libertà dato che i moltiplicatori di  $\delta q_i$  devono essere tutti zero (come risulterà dagli esempi ed esercizi).

### 6.6.1 Applicazione del PLV ad un sistema ad 1 G.d.L.: il glifo oscillante

Consideriamo il sistema meccanico del glifo oscillante. Su tale sistema meccanico sono presenti : il telaio, una manovella motrice e un pistone (a comporre il glifo oscillante).

Per l'applicazione dell'equilibrio supponiamo che i vincoli siano lisci (in questo modo anche se fosse presente attrito andrebbe a favore dell'equilibrio).

Su questo sistema meccanico agiscono le reazioni vincolari alle cerniere e una reazione vincolare normale alla guida prismatica, etc.. tutte queste forze non è necessario considerarle in quanto nell'ipotesi di vincoli lisci le reazioni vincolari non fanno lavoro.



Le uniche forze attive che agiscono sul sistema sono la forza  $F$  applicata all'estremo del glifo e il momento motore ( $M$ ) applicata alla manovella.  
Il principio dei lavori virtuali dice che tale sistema meccanico è in equilibrio se il lavoro virtuale delle sole forze attive è uguale a zero per ogni spostamento virtuale reversibile (in questo caso sono tutti reversibili in quanto i vincoli sono bilaterali).

Il lavoro virtuale delle due forze sarà dato dalla somma dei prodotti scalari tra le forze stesse e gli spostamenti virtuali:

→ Lavoro della forza  $F$  applicata sul punto  $P$ .

Per il S.d.R. scelto vale che:

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -F \end{Bmatrix} \quad ; \quad OP = \begin{Bmatrix} L \cos \vartheta \\ L \sin \vartheta \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \delta \mathbf{P} = \delta OP = \begin{Bmatrix} -L \sin \vartheta \\ L \cos \vartheta \end{Bmatrix} \delta \vartheta$$

$$\delta L^{(F)} = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{P} = -F L \cos \vartheta \delta \vartheta.$$

→ Lavoro del momento  $M$  applicata alla manovella:

$$\delta L^{(M)} = M \delta q$$

Ricordando la formulazione del PLV, otteniamo che:

$$\begin{aligned} \delta L &= \delta L^{(a)} = \delta L^{(F)} + \delta L^{(M)} \\ &= M \delta q - F L \cos \vartheta \delta \vartheta = 0 \quad \forall \delta q \end{aligned}$$

Il problema è che  $q$  e  $\delta \vartheta$  non sono indipendenti in quanto il meccanismo presenta una catena cinematica.

Compiendo l'analisi cinematica del meccanismo, risolvendo il relativo poligono di chiusura, possiamo ottenere un'espressione di  $\delta \vartheta$  in funzione di  $\delta q$  tramite il rapporto di velocità, ovvero  $\delta \vartheta = \tau_{\vartheta q} \delta q$ .

$$\begin{aligned}\delta L &= M \delta q - F L \cos \vartheta \tau_{\vartheta q} \delta q = 0 \\ &= (M - F L \cos \vartheta \tau_{\vartheta q}) \delta q = 0\end{aligned}$$

Ricordando che tale espressione deve essere zero qualsiasi sia  $\delta q$ , giungo alla conclusione che il moltiplicatore deve essere nullo, e di conseguenza è possibile trovare il valore del momento che mantiene in equilibrio il sistema in presenza della forza  $F$

$$M = F L \cos \vartheta \tau_{\vartheta q}$$

Il vantaggio del PLV dunque è quello di dare in maniera immediata la relazione tra una forza attiva e l'altra senza scomodare le reazioni vincolari. Inoltre si osservi che il rapporto tra gli spostamenti virtuali è anche il rapporto di velocità.

### 6.6.2 Applicazione del PLV a sistemi a più G.d.L.

Il principio PLV può essere convenientemente usato anche per risolvere problemi di sistemi a più G.d.L.

Consideriamo ad esempio un pentagono e supponiamo che sia assegnata la configurazione geometrica di equilibrio ossia siano noti i valori delle coordinate libere  $q_1$  e  $q_2$ .

Data la forza applicata al pentagono nel punto di estremità C si vogliono determinare i momenti  $M_1$  e  $M_2$  che equilibrano il sistema.

L'applicazione del PLV fornisce:

$$\delta L = M_1 \delta q_1 + M_2 \delta q_2 + F_x \delta x_c + F_y \delta y_c = 0$$

ed esprimendo gli spostamenti virtuali in funzione di quelli delle coordinate libere:

$$\begin{aligned}\delta L &= M_1 \delta q_1 + M_2 \delta q_2 + F_x \left( \frac{\partial x_c}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x_c}{\partial q_2} \delta q_2 \right) + F_y \left( \frac{\partial y_c}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y_c}{\partial q_2} \delta q_2 \right) \\ &= M_1 \delta q_1 + M_2 \delta q_2 + F_x (\tau_{x C 1} \delta q_1 + \tau_{x C 2} \delta q_2) + F_y (\tau_{y C 1} \delta q_1 + \tau_{y C 2} \delta q_2) \\ &= \delta q_1 (M_1 + F_x \tau_{x C 1} + F_y \tau_{y C 1}) + \delta q_2 (M_2 + F_x \tau_{x C 2} + F_y \tau_{y C 2}) = 0\end{aligned}$$

Noto a questo punto che tale formulazione dei lavori virtuali deve valere per ogni spostamento virtuale ( $\forall \delta q_1, \delta q_2$ ) possiamo ammettere che per essere vero i moltiplicatori degli spostamenti virtuali stessi devono essere nulli, ovvero:

$$\begin{cases} M_1 = -F_x \tau_{x C 1} - F_y \tau_{y C 1} \\ M_2 = -F_x \tau_{x C 2} - F_y \tau_{y C 2} \end{cases}$$

Il problema di tipo statico è quindi ricondotto ad un problema cinematico di determinazione dei rapporti di velocità del punto di applicazione della forza esterna.

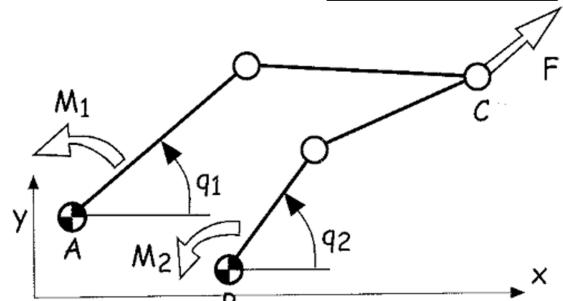
Concludendo vale la pena di osservare che il PLV è uno strumento molto potente che consente di calcolare la forza motrice, o le forze motrici, necessarie per equilibrare una macchina o la configurazione di equilibrio stessa.

La sua semplicità e potenza nasce proprio dal fatto che nella sua formulazione non entrano le forze reattive interne e le forze reattive esterne (eccetto quelle derivanti da organi elastici).

Esistono tuttavia alcuni problemi ingegneristici per i quali è necessario calcolare le forze reattive esterne che la macchina esercita sul telaio (*uguali ed opposte a quelle che esercita il telaio sulla macchina*) e le forze reattive interne.

Ad esempio per il calcolo della resistenza dei supporti e degli elementi cinematici che costituiscono le coppie cinematiche è indispensabile conoscere rispettivamente le forze reattive esterne ed interne.

Per risolvere questi problemi è indispensabile fare ricorso alle equazioni cardianali di equilibrio.



### 6.6.3 Applicazione: sospensione di una motocicletta

Nell'applicazione del PLV abbiamo fatto la fondamentale ipotesi che nelle interconnessioni (*coppie cinematiche*) tra i corpi rigidi e tra i corpi rigidi e il telaio non vi fosse attrito, e quindi dissipazione di lavoro; inoltre abbiamo fatto l'ipotesi addizionale che nelle interconnessioni non vi fosse nessun assorbimento di energia elastica.

Ora rimuoviamo la seconda ipotesi e consideriamo sistemi di corpi rigidi con interconnessioni prive di attrito ma in grado di assorbire energia elastica e di restituirla completamente.

In altri termini significa ammettere che tra i vari membri e il telaio possano scambiarsi delle forze rispettivamente reattive interne e esterne di tipo conservativo in grado di compiere lavoro.

Per semplicità supponiamo che queste forze conservative siano esclusivamente di tipo elastico.

Si può dimostrare che se un sistema di corpi rigidi, connessi tra loro e al telaio *tramite coppie cinematiche private di attrito e tramite molle perfettamente elastiche*, è in equilibrio, la somma del lavoro virtuale delle forze esterne è uguale alla somma delle variazioni virtuali dell'energia potenziale delle molle:

$$\delta L = \sum \delta E_P$$

L'energia potenziale di una molla è data da:

$$E_P = \frac{1}{2}k(\Delta s)^2$$

dove  $k$  è la costante elastica e  $\Delta s$  è la deformazione.

Consideriamo a tal fine l'esempio della sospensione di una motocicletta.

La coordinata generalizzata è la rotazione  $q$  del forcellone. Non c'è attrito. All'estremità del forcellone è applicata una forza  $F$  diretta verso l'alto. La molla è lineare con costante  $k$  e le coppie rotoidali alle estremità le consentono di allungarsi senza piegarsi. Calcolare il valore di  $q$  per cui il sistema è in equilibrio.

Poiché il forcellone è un unico corpo rigido, connesso al telaio da un vincolo liscio e da una molla elastica lineare possiamo applicare il PLV nella forma:

$$\sum \delta L_{\text{forze attive esterne}} = \sum \delta E_{\text{potenziale molle}}$$

Per quanto concerne il primo membro abbiamo una sola forza esterna (*non elastica*) che è  $F$  applicata nel punto avente coordinata verticale  $y = l \sin q$ .

Il suo lavoro virtuale è:

$$\sum \delta L_{\text{forze attive esterne}} = F \delta y = F \frac{\partial y}{\partial q} \delta q = F l \cos q \delta q$$

Sia  $s_0$  la lunghezza della molla indeformata. La sua lunghezza deformata è data da:

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$$

dove  $s_x = b \cos q$  e  $s_y = h - b \sin q$ .

Perciò:

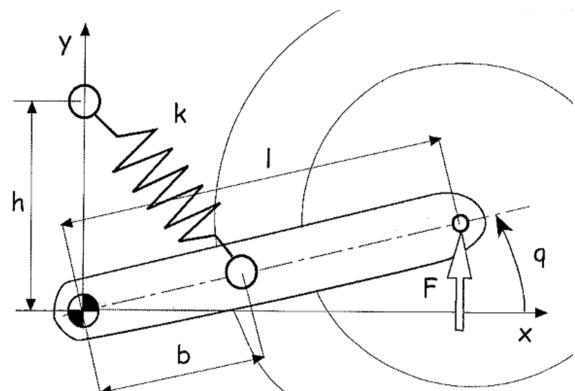
$$s = \sqrt{b^2 - 2bh \sin q + h^2}$$

Ricordando la formula dell'energia potenziale di una molla si ottiene:

$$\begin{aligned} E_P &= \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}k(s - s_0)^2 \\ \delta E_P &= k(s - s_0) \delta s \end{aligned}$$

È possibile esprimere  $\delta s$  in funzione di  $q$

$$\delta s = \frac{ds}{dq} \delta q = \frac{-hb \cos q}{\sqrt{b^2 - 2hb \sin q + h^2}} \delta q$$



Introducendo questo risultato che esprime il PLV si ottiene:

$$F l \cos q \delta q = -k h b \cos q \left(1 - \frac{s_0}{\sqrt{b^2 - 2hb \sin q + h^2}}\right) \delta q$$

Da cui:

$$F l \cos q + k h b \cos q \left(1 - \frac{s_0}{\sqrt{b^2 - 2hb \sin q + h^2}}\right) = 0$$

Tale relazione ci consente di calcolare il valore di  $q$ , nella configurazione di equilibrio poiché  $F$  è nota e  $s_0$ ,  $k$ ,  $h$ ,  $b$  sono costanti note.

Da osservare che sarebbe stato difficile risolvere il problema con le equazioni di equilibrio proprio perché la configurazione di equilibrio era l'incognita del problema.

#### 6.6.4 Principio di d'Alembert

Premesso che la quantità  $-m_k \mathbf{a}_k$  prende il nome di **forza d'inerzia**, allora:

**Principio di d'Alembert:** *si passa dalle equazioni della statica a quelle della dinamica aggiungendo alle forze attive le forze d'inerzia*

Così si passa dalle equazioni cardinali della statica a quelle della dinamica:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N (\mathbf{F}_k + \Phi_k) = 0 \\ \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \wedge (\mathbf{F}_k + \Phi_k) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^N (\mathbf{F}_k + \Phi_k - m_k \mathbf{a}_k) = 0 \\ \sum_{k=1}^N \mathbf{r}_k \wedge (\mathbf{F}_k + \Phi_k - m_k \mathbf{a}_k) = 0 \end{cases}$$

dove:

- $\mathbf{F}_k$  sono le forze attive agenti sul sistema di punti materiali;
- $\Phi_k$  sono le forze reattive agenti sul sistema di punti materiali;
- $m_k \mathbf{a}_k$  sono le forze d'inerzia;

e dal principio dei lavori virtuali alla relazione simbolica della dinamica:

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k \leq 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{k=1}^N (\mathbf{F}_k - m_k \mathbf{a}_k) \cdot \delta \mathbf{r}_k \leq 0$$

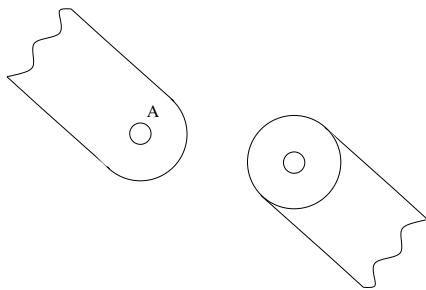
Il principio di d'Alembert permette di ridurre l'impostazione di un problema di dinamica alla impostazione di un corrispondente problema di statica tenendo conto delle forze d'inerzia.

Il procedimento risulta particolarmente utile quando il moto del sistema è assegnato (e quindi le forze d'inerzia sono note), mentre risultano incognite le forze attive che mantengono il movimento. In questo senso il principio di d'Alembert è particolarmente usato nella meccanica applicata.

!! In Appendice A è presente un confronto tra la Formulazione PLV e le equazioni di Newton-Eulero per la determinazione delle forze agenti su un medesimo meccanismo

## 6.7 Vincoli olonomi e vincoli anolonomi

- Coppia cinematica rotoidale

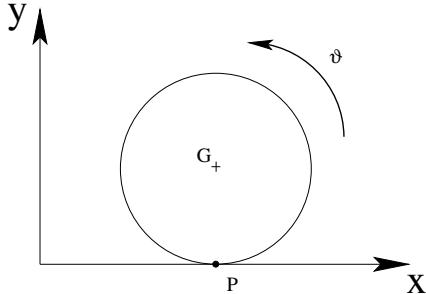


L'esistenza di un vincolo può essere formalizzata tramite l'equazione di congruenza:

$$\begin{cases} x_A = x'_A \\ y_A = y'_A \end{cases}$$

Questo vincolo impone che i punti A e A' siano coincidenti: questa condizione di vincolo consiste dunque di due equazioni scalari espresse tramite equazioni algebriche.

- Ruota che rotola senza strisciare sul piano



Una ruota che rotola senza strisciare ammette che il punto P abbia velocità nulla, ovvero  $\mathbf{v}_P = 0$ . Scrivendo, dunque, l'espressione vettoriale che descrive la velocità del punto P nell'ipotesi che la ruota possa essere trattata come corpo rigido, otteniamo che:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_G + \underline{\omega} \wedge \mathbf{G}\mathbf{P}$$

La velocità del punto P ha due componenti nel piano.

Poiché la velocità del punto P lungo y è già nulla per la coppia prismatica che si viene a creare con il suolo, rimaniamo con la componente orizzontale della velocità:

$$\dot{x}_P = \dot{x}_G + \dot{\vartheta} r$$

ovvero la velocità del punto P è dipendente dalla velocità del baricentro della ruota e  $r \dot{\vartheta}$ .

La condizione di rotolamento puro impone che  $\dot{x}_P = 0$ , che permette di esprimere il vincolo di rotolamento sulla velocità (non sugli spostamenti) tramite un'equazione differenziale:

$$\dot{x}_G + \dot{\vartheta} r = 0$$

Tuttavia, l'espressione differenziale in questione ammette una forma primitiva:

$$\int \dot{x}_G dt = - \int \dot{\vartheta} r dt$$

$$x_G = -\dot{\vartheta} r + \text{cost.}$$

Ho così trasformato un'equazione differenziale in una equazione algebrica del tutto analoga al vincolo di coppia rotoidale visto precedentemente.

In altri termini posso descrivere la posizione della ruota in funzione del solo G.d.L. (esso sia la posizione del baricentro  $\mathbf{x}_G$  o l'angolo di rotazione della ruota  $\vartheta$ ).

Un vincolo differenziale che ammetta una forma integrale mi permette di ridurre i G.d.L. e di utilizzare un numero di variabili pari al numero di G.d.L. del sistema in esame.

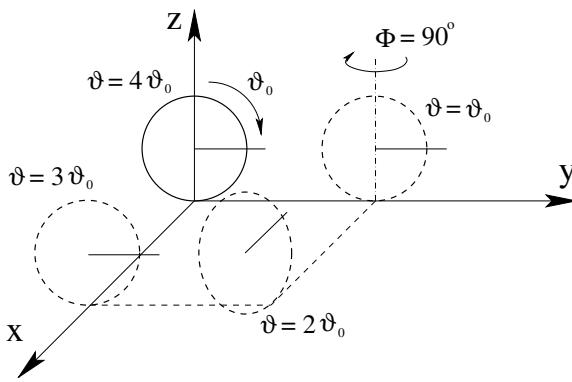
Se ciò avviene il vincolo si dice **olonomo**.

In ultima analisi in un vincolo olonomo la posizione di un punto generico del sistema è esprimibile come una funzione di un certo numero di G.d.L. ed eventualmente del tempo:

$$\boxed{\mathbf{OP} = f(q_1, \dots, q_N, t)}$$

Per contro un **vincolo non olonomo** (o anolonomo) è un vincolo che non ammette una forma integrale algebrica per le equazioni differenziali.

Un tipico esempio è la ruota nello spazio tridimensionale con vincolo di rotolamento:



Dopo il percorso chiuso il raggio della ruota ha ruotato di un angolo pari a  $\vartheta = 4\vartheta_0$ .

Ciò a dimostrazione che posso ritornare alla posizione iniziale, ma con un angolo  $\vartheta$  diverso dall'angolo alla condizione iniziale. questo implica che non esiste un integrale primo per la condizione di vincolo in esame.

Sono riuscito dunque a cambiare la posizione della ruota senza strisciare, ma controllando la traslazione lungo gli assi  $x$  e  $y$  tramite le sole variabili  $\vartheta$  (rotazione attorno all'asse della ruota) e  $\Phi$  (rotazione attorno a  $z$ ).

I vincoli non olonomi sono di grande utilità in quanto permettono di controllare la posizione di un oggetto con (come nel nostro esempio) 4 G.d.L. controllando solamente solo 2 variabili.

## 6.8 Equazioni di Lagrange

Le equazioni di Lagrange sono sostanzialmente derivate dal PLV e dall'approccio di d'Alembert. In altri termini le equazioni di Lagrange vengono derivate sotto le stesse condizioni per le quali si può applicare il PLV.

Le ipotesi per cui valgono le equazioni di Lagrange sono:

- Vincoli lisci
- Vincoli bilaterali  $\Rightarrow \delta L = 0$  ( $\delta L < 0$ )
- Vincoli olonomi  $\Rightarrow OP_i = f(q_1, \dots, q_N, t)$

Per semplicità ma anche per generalizzare il risultato che otterremo dalla trattazione possiamo immaginare che un sistema meccanico in ultima analisi sia un sistema di punti materiali.

Di conseguenza, dato un sistema di punti materiali, le condizioni di equilibrio, secondo il principio di d'Alembert, assumono la seguente formulazione:

$$\mathbf{F}_i + \Phi_i - m_i \mathbf{a}_i = 0$$

Noto ora che dall'ipotesi di vincolo liscio il lavoro virtuale delle forze vincolari ( $\Phi_i$ ) è ignorabile in quanto perpendicolare allo spostamento, è possibile applicare il PLV:

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \cdot \delta \mathbf{P}_i = 0$$

Dall'ipotesi di vincoli olonomo è possibile esprimere la posizione del punto i-esimo come una funzione del tempo ( $t$ ) e delle coordinate generalizzate ( $q_i$ ), infatti vale che:

$$OP_i = OP_i(q_1, \dots, q_N, t)$$

questo mi permette di calcolare le derivate in funzione delle coordinate generalizzate. Quando verrà calcolato il differenziale, tuttavia, non sarà presente la derivata parziale rispetto al tempo in quanto lo spostamento virtuale è calcolato a tempo stazionario:

$$\delta P_i = \sum_K \left( \frac{\partial \mathbf{OP}_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) = \sum_{k=1}^N \tau_{i,k} \delta q_k$$

sostituendo l'espressione con i rapporti di velocità ( $\tau_{i,k}$ ) all'espressione del PLV, ottengo una nuova formulazione la quale suggerisce che qualsiasi sia lo spostamento virtuale delle coordinate generalizzate ( $\delta q_k$ ) deve essere nullo il lavoro virtuale.

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m \mathbf{a}_i) \cdot \sum_{k=1}^N \tau_{i,k} \delta q_k = 0$$

Riarrangiando l'espressione, raccogliendo gli spostamenti  $\delta q_k$  si ottengono N equazioni in quanto i moltiplicatori degli spostamenti devono essere nulli perché valga il PLV.

$$\sum_{k=1}^N \left( \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m \mathbf{a}_i) \cdot \tau_{i,k} \right) \delta q_k = 0$$

ho così ottenuto una equazione per ogni G.d.L. del sistema, che possono essere rappresentate dall'espressione sintetica:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \tau_{i,k} - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \cdot \tau_{i,k} = 0 \quad k = 1, \dots, N$$

Definisco:

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \tau_{i,k} \quad \rightarrow \text{Forza generalizzata della coordinata } k\text{-esima}$$

$$\hat{\tau}_k = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \cdot \tau_{i,k} \quad \rightarrow \text{inerzia generalizzata}$$

$$Q_k - \hat{\tau}_k = 0 \quad k = 1, \dots, N$$

Da un punto di vista algebrico le due nuove componenti ottenute possono essere interpretate come:

- $Q_k$ : la proiezione delle forze attive agenti sul sistema sul k-esimo G.d.L. ( $q_k$ );
- $\hat{\tau}_k$ : la proiezione delle forze d'inerzia sul k-esimo G.d.L. ( $q_k$ );

Il vantaggio delle equazioni di Lagrange è che posso calcolare l'inerzia generalizzata dall'energia cinetica del sistema. Procediamo alla dimostrazione:

La formulazione generale dell'energia cinetica è:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^2$$

dove la velocità può essere ottenuta derivando rispetto al tempo l'espressione della posizione dell'i-esimo punto materiale secondo la formulazione del vincolo olonomo:

$$\mathbf{v}_i = \sum_{k=i}^N \tau_{i,k} \dot{q}_k + \frac{\partial P_i}{\partial t}$$

Ovviamente se il vincolo non fosse dipendente dal tempo il termine di derivata parziale rispetto al tempo non sarebbe presente.

L'espressione così ottenuta della velocità è in funzione dei rapporti di velocità e della velocità dei movimenti.

Voglio dimostrare che:

$$\hat{\tau}_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}$$

1.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \tau_{i,k}$$

2.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \cdot \tau_{i,k} + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt}(\tau_{i,k})$$

3.

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial}{\partial q_k}(\mathbf{v}_i)$$

Possiamo notare a questo punto che l'ultimo termine della formula (2) e la formula 3 uguali, infatti:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial}{\partial q_k}(\mathbf{v}_i) &= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt}(\tau_{i,k}) \\ \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{d}{dt}(\mathbf{OP}_i) \right) &= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial q_k}(\mathbf{OP}_i) \right) \end{aligned}$$

Dalla somma delle due espressioni si ottiene dunque:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \cdot \tau_{i,k} = \hat{\tau}_k$$

A questo punto è possibile enunciare le equazioni di Lagrange nella prima forma:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad k = 1, \dots, N}$$

In alternativa alla formula appena esposta esiste **seconda forma delle equazioni di Lagrange**.

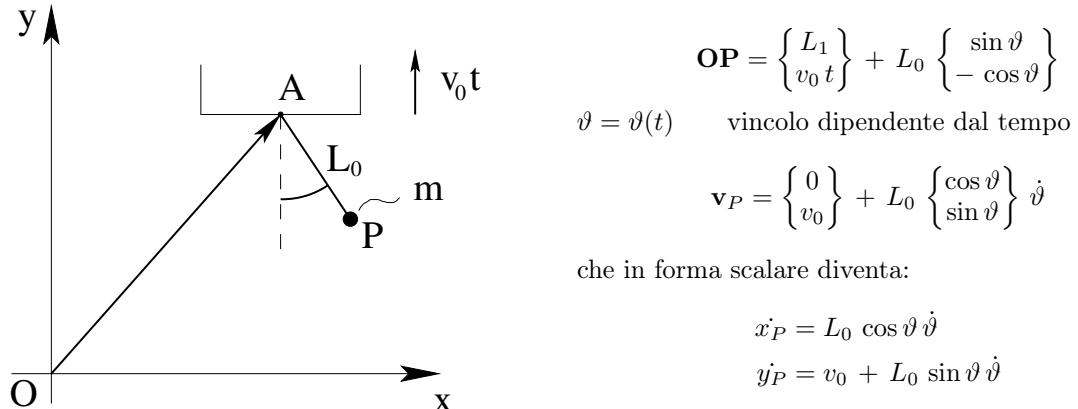
È possibile infatti dividere le forze generalizzate in forze conservative e non conservative: questa suddivisione ci permette, noto che le forze conservative ammettono la presenza di un potenziale, di trovare una via alternativa e generalmente più semplice per valutare l'espressione delle forze generalizzate

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} &= Q_k^{(C)} + Q_k^{(NC)} = Q_K \\ &= - \frac{\partial V}{\partial q_k} + Q_k^{(NC)} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} &= Q_k^{(NC)} \end{aligned}$$

Siccome l'energia potenziale è funzione delle coordinate generalizzate, ma non delle loro velocità ( $V = V(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N)$ ) posso riscrivere il lhs introducendo una funzione, detta di Lagrange:  $L = T - V = T(q, \dot{q}, t) - V(q)$ . In questo modo sono finalmente in grado di scrivere le equazioni di Lagrange nella seconda forma

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k^{(NC)} \quad k = 1, \dots, N}$$

### 6.8.1 Applicazione: Pendolo su vincolo mobile



Procediamo al calcolo dell'energia cinetica e potenziale del sistema sotto esame:

$$T = \frac{1}{2} m (L_0^2 \cos^2 \vartheta \dot{\vartheta}^2 + L_0^2 \sin^2 \vartheta \dot{\vartheta}^2 + 2 v_0 L_0 \sin \vartheta \dot{\vartheta} + v_0^2)$$

$$= \frac{1}{2} m (L_0^2 \dot{\vartheta}^2 + 2 v_0 L_0 \sin \vartheta \dot{\vartheta} + v_0^2)$$

$$V = m g (v_0 t - L_0 \cos \vartheta)$$

Utilizziamo le espressioni di energia cinetica e potenziale per determinare i termini dell'equazione di Lagrange nella seconda forma, noto che non sono presenti forze non conservative agenti sul sistema.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = m L_0^2 \dot{\vartheta} + m v_0 L_0 \sin \vartheta$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} \right) = m L_0^2 \ddot{\vartheta} + m v_0 L_0 \cos \vartheta \dot{\vartheta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \vartheta} = m v_0 L_0 \cos \vartheta \dot{\vartheta}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = m g L_0 \sin \vartheta$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{\vartheta}} = 0$$

Possiamo a questo punto scrivere che:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial T}{\partial \vartheta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{\vartheta}} + \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = 0$$

e ottenere l'equazione del moto:

$$m L_0^2 \ddot{\vartheta} + m g L_0 \sin \vartheta = 0$$

**In generale l'energia cinetica di un corpo si compone di due termini:**

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \mathbf{m} \mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2} \mathbf{I}_G \omega^2$$

Abbiamo dunque studiato tre diversi strumenti per scrivere le equazioni del moto di un sistema meccanico.

La disponibilità di un modello matematico consente di compiere un certo numero di analisi: disegnare un sistema di controllo, trovare i parametri migliori di un sistema, ricercare le configurazioni di equilibrio e ricercare delle semplificazioni delle equazioni del moto che rendono più facilmente interpretabili le equazioni stesse in intervalli di operatività del sistema (es. attorno alla configurazione dell'equilibrio).

Dall'osservazione delle equazioni del moto di un pendolo su ruota, osserviamo che la struttura delle equazioni di un sistema meccanico si presenta tramite una combinazione lineare delle accelerazioni e delle velocità al quadrato dei moventi

Possiamo dunque generalizzare il modello delle equazioni del moto di un sistema meccanico a un G.d.L. osservando che si presentano nella forma:

$$A(q, t) \ddot{q} + B(q, \dot{q}, t) = 0$$

dove:

- A è un coefficiente funzione di q e del tempo, i coefficienti dei termini di accelerazione (che possono essere considerate a tutti gli effetti delle masse generalizzate), possono essere funzione della posizione;
- B è un coefficiente che raccoglie i termini che dipendono dalla posizione e dalla velocità e sono in genere non lineari.

Le equazioni differenziali compaiono, cioè, lineari nelle accelerazioni tramite il coefficiente A.

Siccome le equazioni sono non lineari nel parametro B(q,  $\dot{q}$ , t), nella stragrande maggioranza dei casi siamo incapacitati a trovare una soluzione analitica alle equazioni differenziali.

Possiamo tuttavia risolvere un sistema di equazioni differenziali numericamente, ma la soluzione numerica mi dà l'evoluzione del sistema meccanico in un caso particolare e non mi permette di trarre delle conclusioni di carattere generale che il sistema potrebbe o non potrebbe avere (es. configurazioni di equilibrio, ovvero esistenza di soluzioni costanti).

Sostituendo di conseguenza una costante alle equazioni del moto, posso vedere se esistono delle soluzioni che le verificano. In altri termini sto cercando le N configurazioni (di equilibrio), che risolvono l'equazione:

$$A(q, t) \ddot{q} + B(q, 0, t) = 0$$

È possibile determinare le configurazioni di equilibrio del sistema anche cercando gli estremi della funzione energia potenziale ( $\mathbf{V}(q_1, \dots, q_N, t)$ ) cercandone i massimi e i minimi.

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = 0 \quad k = 1, \dots, N$$

Tuttavia noi sappiamo che possiamo distinguere le configurazioni di equilibrio in **configurazioni stabili** (punto di minimo dell'energia potenziale) e **configurazioni instabili** (punto di massimo dell'energia potenziale).

Per studiare se una configurazione di equilibrio è stabile o instabile si ricorre allo studio di funzione che risulta più utile e efficace della risoluzione delle equazioni del moto.

Dato che la funzione energia potenziale può essere funzione di N G.d.L. e, eventualmente del tempo, è necessario calcolare la matrice Hessiana per eseguire lo studio di funzione:

$$\mathbf{H} = \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right]$$

Qualora la forma quadratica associata alla matrice Hessiana è definita positiva implica che allontanandosi dal punto stazionario la funzione aumenta in tutte le direzioni (il punto stazionario è un punto di minimo), se è definita negativa il punto stazionario è un punto di massimo, se è semidefinita vuol dire che ci sono delle direzioni in cui l'energia potenziale resta stazionaria ed quindi è una configurazione di equilibrio indifferente.

Tramite il teorema di Sylvester sappiamo che considerando tutti i minori principali della matrice Hessiana e se tutti sono positivi allora la matrice Hessiana è definita positiva.

Un metodo alternativo è calcolare gli autovalori e diagonalizzare la matrice Hessiana:

- tutti gli autovalori positivi, implica che la matrice Hessiana è definita positiva;
- tutti gli autovalori positivi e alcuni zero, implica che la matrice Hessiana è semidefinita positiva;
- tutti gli autovalori negativi, implica che la matrice Hessiana è definita negativa;
- tutti gli autovalori negativi e alcuni zero, implica che la matrice Hessiana è semidefinita negativa;

Per semplicità consideriamo un sistema ad 1 G.d.L., la struttura delle equazioni di un sistema meccanico con vincoli olonomi indipendenti dal tempo si compone di:

$$A(q) \ddot{q} + B(q, \dot{q}) = 0$$

Per trovare le configurazioni di equilibrio devo trovare i valori delle coordinate generalizzate  $q_i$  che soddisfano tale equazione. Ovvero dato  $(q(t) = q_0)$ , devo trovare i valori di  $q_0$  che soddisfano:

$$B(q_0, 0) = 0$$

Immaginiamo ora che vogliamo trovare le equazioni del moto nell'intorno della posizione di equilibrio, ovvero quando  $q(t) = q_0 + dq(t)$ :

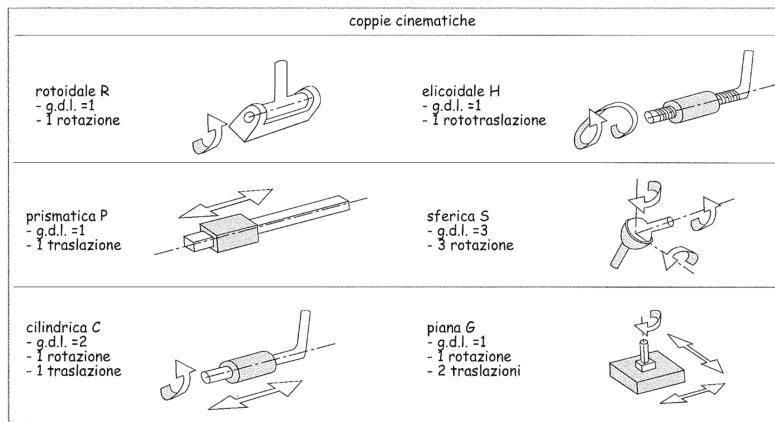
$$A(q) \ddot{q} + B(q, \dot{q}) = 0$$

Facendo l'ipotesi che  $dq(t)$  sia infinitesimo posso sviluppare in serie l'espressione con riferimento alla soluzione costante  $q_0$

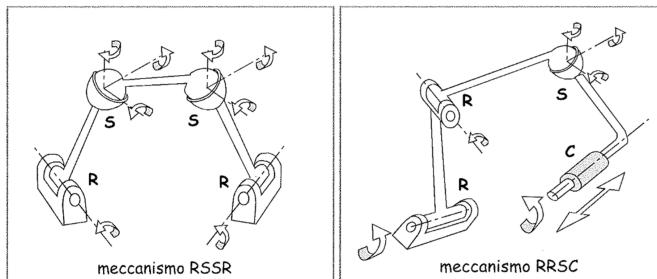
# 7 Meccanismi nello spazio

## 7.1 Meccanismi in catena chiusa

I meccanismi spaziali in catena chiusa sono la naturale estensione dei tradizionali meccanismi piani, che ne costituiscono quindi una classe particolare ottenuta imponendo ai vari membri del meccanismo di giacere su un piano. Una classificazione dei meccanismi può essere fatta in base al numero e al tipo di coppie cinematiche.



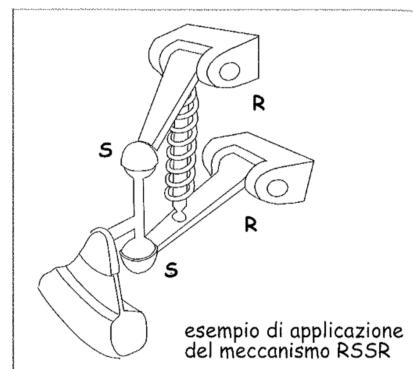
In base a tale classificazione il meccanismo rappresentato nella figura seguente, derivato dal quadrilatero articolato piano con la sostituzione delle coppie rotoidali degli estremi della biella con coppie sferiche, viene denominato meccanismo RSSR dalla sequenza delle coppie cinematiche che in esso compaiono. A titolo di esempio sono riportati i meccanismi RSSR e RRSC.



Dal punto di vista della loro utilizzazione i meccanismi spaziali (*come i meccanismi piani*) possono essere progettati per realizzare tre finalità diverse:

- generazione di una certa funzione;
- generazione di un certo percorso;
- guida di un corpo rigido;

Come esempio applicativo di un meccanismo spaziale è rappresentata la sospensione anteriore di un autoveicolo realizzata mediante un meccanismo RSSR.



## 7.2 Meccanismi in catena aperta

I meccanismi in catena aperta hanno avuto recentemente un notevole sviluppo in concomitanza con l'automazione dei processi industriali mediante l'introduzione di **robots**: manipolatore multifunzione riprogrammabile progettato per muovere materiali, parti meccaniche, utensili o dispositivi particolari per mezzo di movimenti programmati variabili per soddisfare una varietà di scopi.

Più semplicemente un robot è un meccanismo spaziale, generalmente a catena aperta, predisposto per compiere alcune attività produttive, secondo un programma memorizzato che può essere variato a seconda del ciclo di operazioni desiderato.

Il robot è quindi caratterizzato da:

- *una struttura meccanica* che ne definisce le possibilità di movimento in funzione dei G.d.L. delle coppie cinematiche;
- *un sistema di azionamento*, pneumatico, oleodinamico o elettrico;
- *un sistema di controllo* dotato di sensori e di trasduttori;
- *una unità di governo* che in base al programma memorizzato e alle informazioni provenienti dal sistema di sensori comanda il sistema di azionamento.

A seconda dei primi tre G.d.L. della catena cinematica la struttura dei robots si può classificare come:

- *struttura cartesiana* con i primi 3 G.d.L. di tipo traslazionale;
- *struttura cilindrica* con un G.d.L. rotazionale e due traslazionali;
- *struttura polare* con un G.d.L. traslazionali e due rotazionali;
- *struttura articolata antropomorfa* caratterizzata da 3 G.d.L. di libertà rotazionali;

A tal fine è bene accennare che il braccio umano ha 7 G.d.L.. Tale particolare potrebbe destare confusione in quanto è noto che sono sufficienti 6 G.d.L. per posizionare nello spazio il braccio: il G.d.L. aggiuntivo permette di posizionare la mano ferma nello spazio e cambiare la posizione del gomito: così facendo è possibile raggiungere la stessa posizione e orientazione della mano nello spazio con diverse posture del braccio.

Questo aspetto è utile in quanto aumenta la possibilità di intervenire in diverse zone, ma anche perché cambiando la posizione del braccio è possibile realizzare forze maggiori-minori.

## 7.3 Analisi di mobilità

### 7.3.1 Catene spaziali chiuse

Le catene spaziali chiuse possono essere mobili, permettendo il moto relativo tra i membri che le costituiscono con uno o più G.d.L., oppure possono essere delle strutture isostatiche o iperstatiche.

Una serie di  $m$  membri rigidi nello spazio, ognuno dei quali può essere assunto come membro fisso (*telaio*), possiede, essendo 6 i G.d.L. di un corpo rigido nello spazio  $6(m-1)$  G.d.L. relativi.

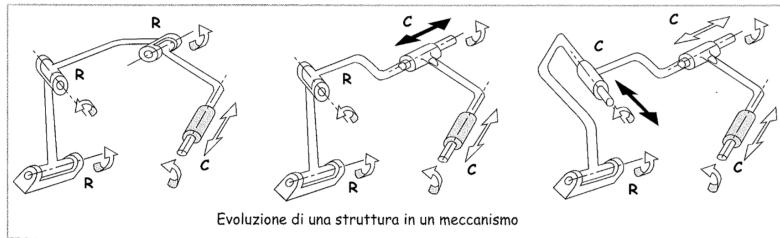
I G.d.L. relativi di due qualsiasi membri collegati tra loro da una coppia cinematica sono ridotti di sei meno il numero di G.d.L. lasciati liberi dall'accoppiamento, ad esempio un giunto sferico toglie 3 G.d.L. ai due membri accoppiati. Ne segue che i G.d.L. di un sistema di  $m$  membri accoppiati sono:

$$n = 6(m - 1) - 5c_1 - 4c_2 - 3c_3 - 2c_4 - c_5$$

- Se  $n=0$  la catena è una struttura *isostatica*,
- Se  $n<0$  la catena è una struttura *iperstatica*,
- Se  $n=1$  la catena è un meccanismo *ad un G.d.L.*,
- Se  $n>1$  la catena è un meccanismo *a più G.d.L.*

Un quadrilatero nello spazio è in generale iperstatico, ma se gli assi delle coppie rotoidali sono paralleli allora alcune delle rotazioni impedisce dall'asse sono già state impedisce dall'altro asse/vincolo.

Di fatto con la formula di Grubler non tengo in considerazione che sto eliminando lo stesso G.d.L.



La figura mostra come una struttura del tipo RRRC con  $n = -1$  possa, tramite lo sbloccaggio progressivo di alcuni G.d.L., trasformarsi in un meccanismo.

La formula precedente, non facendo alcun riferimento alla geometria, non è applicabile ai cosiddetti meccanismi sovravincolati i quali si possono muovere solo in virtù della presenza di particolari piani di simmetria o di assi paralleli.

Un'altra particolarità dei meccanismi spaziali è che tra i G.d.L. ve ne sono alcuni, detti passivi, poiché riguardano la mobilità di un solo membro e non del cinematismo nel suo insieme.

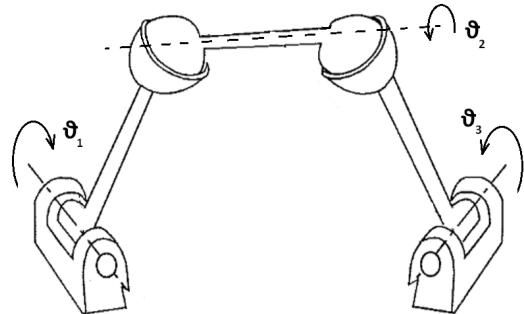
Ad esempio, nel meccanismo RSSR, la biella ha la possibilità di ruotare attorno al proprio asse indipendentemente dal moto del resto della struttura; tale proprietà viene sfruttata nell'operazione di sterzatura. Dal calcolo dei G.d.L. con la formula di Grubler, si ottiene:

$$n = 6(4 - 1) - 5 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 2\text{G.d.L.}$$

I 2 G.d.L. sono il movimento del quadrilatero ( $\vartheta_1$ ) e la rotazione dell'asse della biella attorno al suo asse ( $\vartheta_2$ ).

Può essere che se il G.d.L. di  $\vartheta_2$  non venga sfruttato, immaginando di voler utilizzare la biella semplicemente per trasmettere il movimento tra gli assi delle coppie rotoidali, l'asta funge solamente da tirante o puntone e il G.d.L. in questione è detto passivo o interno (ovvero quando la relazione tra  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_3$  non è funzione della rotazione attorno all'asse dell'asta intermedia):

$$\vartheta_3 = \vartheta_3(\vartheta_1) \quad ; \quad \vartheta(q_1, q_2, \dots, q_n)$$



### 7.3.2 Catene spaziali aperte

Le catene cinematiche aperte sono sempre dotate della capacità di movimento con un numero di G.d.L. pari a:

$$n = c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 4c_4 + 5c_5$$

ovvero il G.d.L. dell'insieme è uguale alla somma dei G.d.L. lasciati liberi dalle coppie cinematiche presenti.

Poiché un corpo rigido nello spazio ha 6 G.d.L., questo è il valore minimo del grado di mobilità necessario per specificare in maniera completa la posizione dell'estremo del manipolatore, cioè della mano.

I manipolatori con  $n < 6$  sono capaci solo di moti particolari e di particolari posizionamenti e orientazioni della mano.

Se  $n > 6$  il manipolatore è invece capace di moti complessi e i G.d.L. aggiuntivi ( $n-6$ ) sono definiti gradi di manovrabilità.

Tali gradi supplementari possono essere utilizzati ad esempio per guidare la mano in modo tale che la catena cinematica possa evitare determinati ostacoli nel campo di lavoro. L'azione di presa della mano rappresenta un ulteriore G.d.L. che chiaramente non influenza la mobilità dell'intera catena.

## 7.4 Matrice di rotazione nello spazio

### 7.4.1 Angoli di Cardano

Possiamo estendere il concetto di matrice di rotazione, precedentemente visto per il caso piano, anche per lo spazio. Immaginiamo di avere un S.d.R. ( $c_1, c_2, c_3$ ) e di compiere una rotazione attorno all'asse zeta pari a  $\vartheta$ : otteniamo gli assi  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$ , mentre l'asse  $\mathbf{k}$  coincide con l'asse  $c_3$ .

Di conseguenza, si può scrivere:

$$\begin{aligned}\mathbf{i} &= \cos \vartheta \mathbf{c}_1 + \sin \vartheta \mathbf{c}_2 + 0 \mathbf{c}_3 \\ \mathbf{j} &= -\sin \vartheta \mathbf{c}_1 + \cos \vartheta \mathbf{c}_2 + 0 \mathbf{c}_3 \\ \mathbf{k} &= 0 \mathbf{c}_1 + 0 \mathbf{c}_2 + 1 \mathbf{c}_3\end{aligned}$$

Dunque il generico vettore OP:

$$\begin{aligned}\mathbf{OP} &= x_P^m \mathbf{i} + y_P^m \mathbf{j} + z_P^m \mathbf{k} \\ &= x_P^m (\cos \vartheta \mathbf{c}_1 + \sin \vartheta \mathbf{c}_2) + y_P^m (-\sin \vartheta \mathbf{c}_1 + \cos \vartheta \mathbf{c}_2) + z_P^m \mathbf{c}_3 \\ &= (x_P^m \cos \vartheta - y_P^m \sin \vartheta) \mathbf{c}_1 + (x_P^m \sin \vartheta + y_P^m \cos \vartheta) \mathbf{c}_2 + z_P^m \mathbf{c}_3\end{aligned}$$

Separando le componenti x, y e z posso pensare all'espressione sopra ricavate come il prodotto tra matrici:

$$\begin{Bmatrix} x_P^f \\ y_P^f \\ z_P^f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_P^m \\ y_P^m \\ z_P^m \end{Bmatrix}$$

Dove la matrice è detta matrice di rotazione attorno all'asse z dell'angolo  $\vartheta$ .

Analogamente per le rotazioni attorno agli assi y e x nei piani zx e yz rispettivamente, si ottiene una matrice di rotazione per:

- la rotazione attorno all'asse y

$$R_y(\vartheta) = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & 0 & \sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

- la rotazione attorno all'asse x

$$R_x(\vartheta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

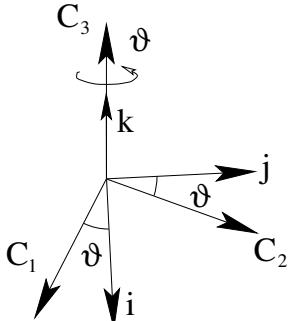
Abbiamo ottenuto tre formule e tre matrici che rappresentano le rotazioni attorno all'asse x,y e z; una rotazione sferica generica può essere descritta tramite le tre successive rotazioni piane: per far ciò introduco la nozione di **angoli di Cardano**: ovvero gli angoli delle tre rotazioni per passare da un S.d.R. fisso ad uno mobile di orientazione generica.

Le tre rotazioni corrispondono a 3 G.d.L. della sequenza di 3 rotazioni  $R_x(\gamma) R_y(\beta) R_z(\alpha)$ . Sono particolarmente utili per rotazioni attorno agli assi particolarmente piccole.

Generalmente nella descrizione della dinamica dei veicoli si distingue tra:

- La rotazione attorno all'asse z (asse verticale) è detta **imbardata**;
- La rotazione attorno all'asse ortogonale alla direzione di avanzamento è detta **beccheggio**;
- La rotazione attorno alla direzione di avanzamento è detta **rollio**;

Generalmente rollio e beccheggio sono angoli piccoli e quindi le linearizzazioni rispetto alle loro rotazioni sono semplici.



Possiamo vedere come si compongono più rotazioni: consideriamo il caso in cui abbiamo un S.d.R.  $\mathbf{n}$  e un S.d.R.  $\mathbf{n} + 1$  ottenuto dalla rotazione attorno all'asse  $z$  di un angolo  $\vartheta$ . Definisco la matrice di rotazioni dal S.d.R.  $\mathbf{n}$  al S.d.R.  $\mathbf{n} + 1$  quella matrice che contiene nelle sue colonne i coseni direttori degli assi  $\mathbf{i}_{n+1}$ ,  $\mathbf{j}_{n+1}$  e  $\mathbf{k}_{n+1}$  (coseni degli assi del sistema  $n+1$  proiettati nel sistema  $n$ ).

Immaginando ora di avere più di un S.d.R. e di conseguenza più di una matrice di rotazione: posso dire che la matrice di rotazione dal generico sistema  $n+1$  al sistema  $n$  è la matrice che mi dà i coseni direttori del sistema  $n+1$  nel sistema  $n$ , quindi avendo un vettore  $v$  nel sistema  $n+1$  posso calcolare il vettore  $v$  nel sistema  $n$  nel seguente modo:

$${}^n \{v\} = {}_{n+1}^n [R] {}^{n+1} \{v\}$$

Mettendo insieme tutte le trasformazioni per portare un S.d.R.  $\mathbf{N}$  ad un S.d.R.  $\mathbf{0}$  la matrice di rotazione associata alla rotazione complessiva risulterà essere pari al prodotto delle matrici di rotazioni di tutte le rotazioni intermedie/elementari:

$${}_0^N [R] = {}_0^1 [R] {}_1^2 [R] {}_2^3 [R] \cdots {}_{N-1}^N [R]$$

Possiamo costruire matrici di rotazioni complesse a piacere moltiplicando matrici di rotazione corrispondenti alle rotazioni elementari che noi eseguiamo in sequenza per allineare la terna di riferimento assoluto con quella mobile.

### 7.4.2 Angoli di Eulero e varianti

Ci sono varianti alternative per definire la posizione nello spazio: posso cioè decidere sequenze diverse di rotazioni. Ciò nonostante quando la rotazione avviene attorno agli assi della terna di riferimento assoluto gli angoli in questione sono detti di Cardano.

In astronomia esistono altri angoli, in alternativa a quelli di Cardano, per descrivere l'orientazione di un corpo nello spazio: gli **Angoli di Eulero**.

Si presenta il concetto tramite un esempio applicativo:

Consideriamo un S.d.R. solidale alla Terra con asse  $z$  coincidente con l'asse polare e con asse  $x$  nella retta congiungente la Terra al Sole.

Immaginiamo di rappresentare l'orbita della Luna appartenente ad un piano inclinato rispetto all'orbita terrestre rappresentata da una semicirconferenza. Viene anche rappresentata, con una retta, la linea dei nodi, ovvero la linea di intersezione tra i piani contenenti le orbite di Terra e Luna.

Possiamo dunque ammettere l'esistenza di un secondo S.d.R. orientato in maniera del tutto arbitraria solidale all'orbita lunare.

Qual è la sequenza di rotazioni che devo eseguire per orientare il S.d.R.  $(x_0, y_0, z_0)$  solidale all'orbita terrestre con il S.d.R.  $(x_1, y_1, z_1)$  solidale all'orbita lunare?

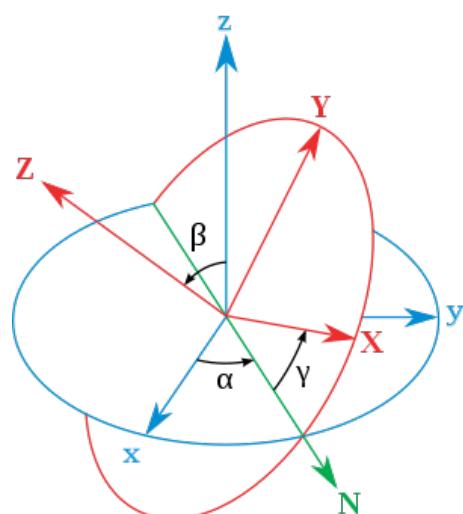
Un modo per far ciò è il seguente: consideriamo i piani  $x_0y_0$  e  $x_1y_1$ . Siccome i due S.d.R. hanno medesima origine i due piani si intersecheranno in corrispondenza di una linea detta **linea dei nodi** ( $N$ ).

Una volta individuata la linea dei nodi posso orientare il sistema 0 con il sistema 1 in quanto basta compiere: una rotazione  $R_z(\alpha)$  che porta l'asse  $x_0$  a coincidere con l'asse dei nodi e una rotazione  $R_x(\beta)$  dove  $\beta$  è l'angolo formato tra i piani  $x_0y_0$  e  $x_1y_1$ . (in questo modo gli assi  $z_0$  e  $z_1$  coincideranno)

Infine bisogna ruotare attorno all'asse  $z$  di un angolo  $\gamma$  ( $R_z(\gamma)$ ).

$$R = R_z(\gamma) R_x(\beta) R_z(\alpha)$$

I tre angoli rappresentati dalle rotazioni in questa successione sono detti angoli di Eulero.



Sia gli angoli di Eulero che quelli di Cardano possono essere non definiti come nel caso in cui i due S.d.R. coincidono: qualsiasi sia la sequenza di trasformazioni che si vuole eseguire (Cardano o Eulero) esiste una condizione di singolarità.

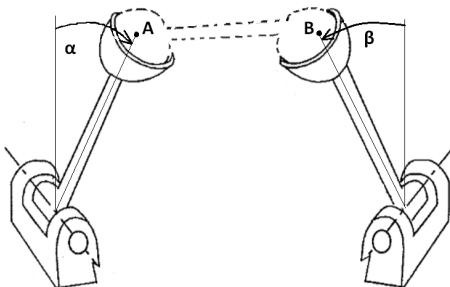
### 7.4.3 Metodo di Gupta

Il metodo di Gupta è un metodo per l'analisi cinematica dei meccanismi in catena chiusa, si potrebbe applicare anche nel piano, ma nello spazio è più facile utilizzarlo.

Il metodo consiste nel prendere una catena cinematica, separarla (aprendo una coppia della catena cinematica o togliendo un corpo) ottenendo di conseguenza due rami aperti; così facendo si può eseguire l'analisi cinematica dei singoli rami aperti (ovvero come singole catene cinematiche aperte) e si impone una condizione di congruenza che corrisponde al fatto che la geometria del corpo intermedio deve essere rispettata.

Formalmente: *Il metodo di Gupta serve ad effettuare l'analisi cinematica dei meccanismi in catena chiusa. In vista della possibilità di applicarlo ad un generico meccanismo spaziale chiuso è utile per fare alcune considerazioni sulla rappresentazione di moti relativi tramite la rotazione matriciale.*

#### ESEMPIO N.1: MECCANISMO RSSR



Dato un quadrilatero articolato nello spazio RSSR posso immaginare di togliere la biella intermedia. In questo modo si ottengono due catene cinematiche aperte indipendenti ciascuna con 1 G.d.L.:

- La rotazione della prima manovella sarà definita da un angolo  $\alpha$ . Data questa catena cinematica è possibile calcolare la posizione del punto A
- La rotazione della seconda manovella sarà definita da un angolo  $\beta$ . Siccome ho aperto la catena cinematica eliminando la biella intermedia, posso immaginare che tale manovella sia indipendente dalla prima e tramite la rotazione  $\beta$  calcolare la posizione del punto B

Così facendo: dato  $\alpha$  posso calcolare la posizione del punto A, dato  $\beta$  calcolare la posizione del punto B; a questo punto è possibile scrivere un'equazione di congruenza in quanto la distanza dei punti A e B deve essere costante e pari alla lunghezza del corpo che era stato sottratto.

Sotto altri termini tale metodo consiste nell'eseguire l'analisi cinematica di due catene cinematiche aperte e scrivere un'equazione di congruenza che leggi  $\alpha$  a  $\beta$

#### ESEMPIO N.2: GIUNTO DI CARDANO

I giunti sono dei meccanismi che consentono di trasmettere il moto tra due alberi quando questi presentano dei *disallineamenti angolari o radiali o assiali*, in genere variabili nel tempo.

Un requisito dei giunti è la *omocineticità*; un giunto si dice omocinetico quando il suo rapporto di trasmissione è costante.

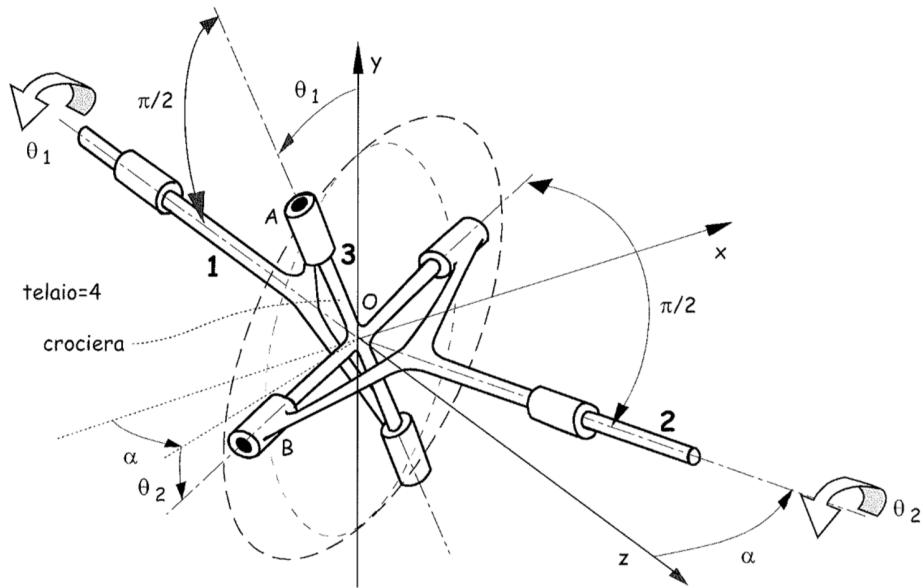
Consideriamo i giunti per disallineamenti angolari. Vale la pena osservare che se il disallineamento fosse costante si potrebbe usare per trasmettere il moto una coppia di ruote dentate coniche.

Consideriamo il giunto di Cardano, che è il più diffuso giunto per la trasmissione del moto tra alberi concorrenti in un punto, i cui assi formano tra loro un certo angolo variabile durante il funzionamento. Il massimo angolo consentito è di circa 15deg alle alte velocità.

Esso è un meccanismo spaziale; è formato da una crociera i cui bracci a due a due si impegnano entro due forcille che sono solidali ai due alberi da collegare, che a loro volta sono solidali al telaio.

Questo meccanismo possiede 1 G.d.L. grazie alla particolare geometria, infatti gli assi delle coppie rotoidali sono ortogonali tra di loro.

Ci proponiamo di calcolare il rapporto di trasmissione, lo studio cinematico può essere effettuato imponendo la condizione di rigidità della crociera.



Sia  $x, y, z$  un S.d.R. assoluto solidale al telaio e sia la coppia cinematica rotoidale appartenente al corpo 1 solidale al telaio. Il corpo numero 1 è vincolato da un coppia rotoidale a ruotare attorno all'asse 1 di un angolo  $\vartheta_1$ .

Sempre solidale al telaio, ma in una direzione  $\alpha$  variabile (che mentre il meccanismo si può muovere può essere immaginato fisso), è presente una coppia rotoidale appartenente al corpo 2; in questo modo il corpo numero 2 ruota rispetto a tale coppia rotoidale dell'angolo  $\vartheta_2$ .

Lo scopo del giunto di Cardano è quello di trasmettere il moto rotatorio attorno all'asse 1 su un asse 2 che sia incidente con l'asse 1, ma di direzione leggermente diversa.

Il meccanismo è un meccanismo spaziale a 4 R: abbiamo visto che un meccanismo spaziale avrebbe in teoria -2 G.d.L. (conti eseguiti con la formula di Grubler), tuttavia il giunto di Cardano non è iperstatico, infatti è uno di quei casi particolari in cui il meccanismo ha mobilità nonostante la formula di Grubler dica il contrario, e questo è possibile perché gli assi delle forcille 1 e 2 sono incidenti nel punto O.

Procediamo, dunque ad eseguire l'analisi cinematica del giunto in esame con il metodo di Gupta: procederemo a rimuovere la crociera e immagino di calcolare la direzione del vettore OA dato  $\vartheta_1$ , immaginando di conoscere l'angolo  $\alpha$  si procederà al calcolo della direzione del vettore OB dato  $\vartheta_2$ .

Una volta espressi i vettori OA e OB in funzione di  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_2$  e  $\alpha$  impongo la condizione di Gupta, ovvero che i due vettori siano ortogonali.

Il punto A si muove nel piano xy e  $\vartheta_1$  è la rotazione della forcella a partire dalla configurazione nella quale il punto A è sull'asse y. Le sue componenti saranno:

$$\mathbf{OA} = \begin{Bmatrix} -\sin \vartheta_1 \\ \cos \vartheta_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Il punto B si muove su un piano ortogonale all'asse 2: nella configurazione di riferimento il vettore OB appartiene al piano xz (in quanto ortogonale ad OA), spostato di un angolo  $\alpha$  dall'asse x.

Dalla proiezione del vettore OB sulla terna di riferimento si ricava:

- la componente y, immediata da calcolare, è pari a  $-\sin \vartheta_2$
- la componente sull piano xz invece si ottiene con il  $\cos \vartheta_2$

Sarà a questo punto opportuno proiettare nuovamente il vettore OB sugli assi x e z: ciò possibile moltiplicando per il sin/cos dell'angolo  $\alpha$ . Così facendo le componenti del vettore OB sul S.d.R. fisso risultano essere:

$$\mathbf{OB} = \begin{Bmatrix} -\cos(\vartheta_2) \cos(\alpha) \\ -\sin \vartheta_2 \\ \cos(\vartheta_2) \sin(\alpha) \end{Bmatrix}$$

Una volta trovata l'espressione per i vettori **OA** e **OB** a catena cinematica interrotta imponiamo la condizione di Gupta, ovvero imponiamo che i due vettori siano ortogonali:

$$\sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \cos \alpha - \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 = 0$$

Posso, a questo punto, trovare una relazione tra  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$  dividendo per  $\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2$ :

$$\tan \vartheta_2 = \tan \vartheta_1 \cdot \cos \alpha$$

Continuando l'analisi cinematica del giunto di Cardano, risulta di interesse il calcolo del rapporto di velocità: si procede dunque a derivare rispetto al tempo l'espressione appena ottenuta, la quale assume a tutti gli effetti il risultato dell'analisi di posizione (dato l'angolo  $\vartheta_1$  posso calcolare direttamente l'angolo  $\vartheta_2$ ):

$$\tau_{21} = \frac{\dot{\vartheta}_2}{\dot{\vartheta}_1} = \frac{\cos^2 \vartheta_2}{\cos^2 \vartheta_1} \cdot \cos \alpha$$

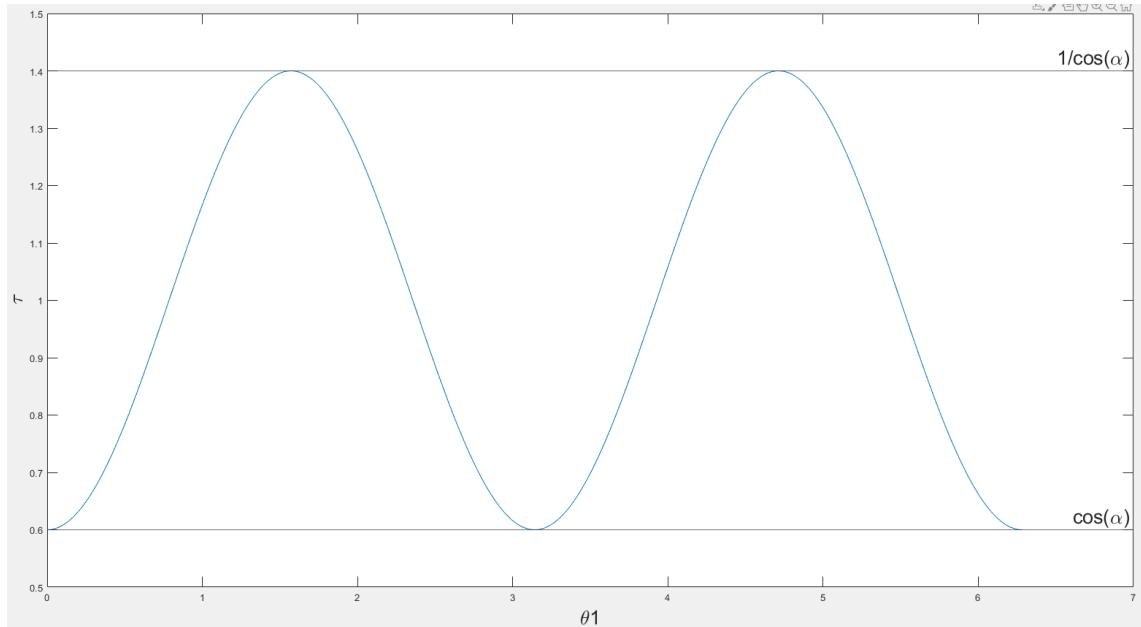
Per esprimere il rapporto di velocità in funzione della sola rotazione dell'albero motore si eleva al quadrato la relazione ricavata dall'analisi di posizione, ottenendo:

$$\cos^2 \vartheta_2 = \frac{1}{(1 + \tan^2 \vartheta_1 \cos^2 \alpha)}$$

A questo punto, sostituendo tale relazione all'espressione del rapporto di velocità:

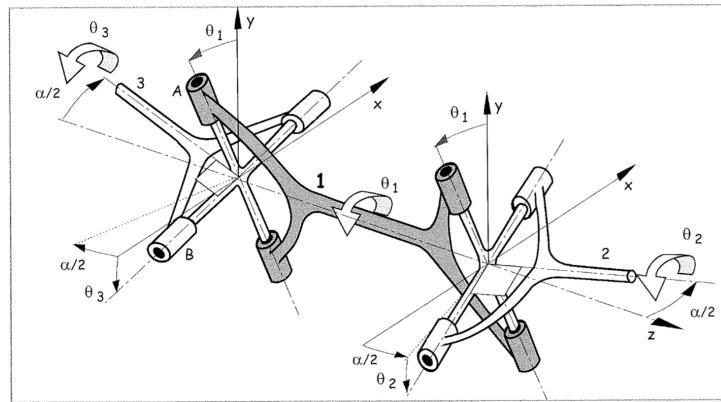
$$\tau_{21} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \vartheta_1}$$

Osserviamo che il rapporto di trasmissione non è costante ma varia con la configurazione, quindi il giunto di Cardano è non omocinetico. Il rapporto di trasmissione ha valore medio unitario ed oscilla tra un valore minimo pari a  $\cos \alpha$  che si ottiene per  $\vartheta_1 = k\pi$  e un valore massimo  $1/\cos \alpha$  che si ottiene per  $\vartheta_1 = (2k+1)\pi/2$



La differenza tra valore massimo e minimo vale  $\Delta\tau = \frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha$ .

Un giunto si dice omocinetico quando il rapporto di velocità è costante. 2 giunti di Cardano con deviazione  $\alpha/2$ , sempre se il corpo intermedio sia complanare, ovvero  $\vartheta_1 = \vartheta_1^*$  è un giunto omocinetico.



Si può infatti ottenere una trasmissione omocinetica avente  $\tau = 1$  adoperando due giunti cardanici in serie con le forcelle dell'albero intermedio poste nello stesso piano e con inclinazioni uguali.

Se le forcelle intermedie non fossero state poste nello stesso piano il giunto risulterebbe non omocinetico.

## 7.5 Velocità angolare di un S.d.R

Abbiamo visto come sia possibile descrivere la posizione di un S.d.R. mobile attraverso la matrice di rotazione: sia  $f$  un S.d.R. assoluto e  $m$  una terna mobile, la matrice di rotazione  $R$  è quella matrice che raccoglie nelle sue colonne i coseni direttori della terna mobile.

Le espressioni di questi termini possono essere ricavate tramite una trasformazione per successive trasformazioni elementari atte a riportare il S.d.R. mobile a coincidere con quello fisso: in particolare, gli angoli di Eulero e gli angoli di Cardano. Tali espressioni che compongono la matrice di rotazione ci consentono attraverso una semplice derivata temporale di risalire alla velocità angolare  $\omega$  della terna mobile.

Per fare ciò sviluppiamo il nostro ragionamento partendo dalle formule di Poisson, infatti è noto che:

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \underline{\omega} \wedge \mathbf{i} \quad ; \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \underline{\omega} \wedge \mathbf{j} \quad ; \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \underline{\omega} \wedge \mathbf{k}$$

Ricordiamo che in notazione matriciale, l'operatore prodotto esterno può essere rappresentato premoltiplicando il vettore al secondo membro per una matrice:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix}$$

Di conseguenza: i tre prodotti esterni possono essere riscritti nel seguente modo:

$$\{\dot{\mathbf{i}}\} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \{\mathbf{i}\}$$

Un ragionamento analogo può essere compiuto per i rimanenti due vettori  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$

È possibile a questo punto raccogliere i vettori colonna delle derivate dei coseni direttori in una matrice:

$$[\{\dot{\mathbf{i}}\} \{\dot{\mathbf{j}}\} \{\dot{\mathbf{k}}\}] = [P_\omega] [\mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k}]$$

Osserviamo che:

- $P_\omega$  è l'operatore velocità angolare
- $[\mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k}]$  è la matrice di rotazione
- $[\{\dot{\mathbf{i}}\} \{\dot{\mathbf{j}}\} \{\dot{\mathbf{k}}\}]$  è la matrice di rotazione derivata rispetto al tempo in quanto tutti i suoi elementi sono derivati rispetto al tempo

In sintesi  $[\dot{R}] = [P_\omega] [R]$ . Questa relazione mi permette di calcolare la velocità angolare di una terna mobile: per convincerci di ciò procediamo a descrivere il metodo iterativo che dovrà essere seguito.

### 7.5.1 Velocità angolare in un S.d.R. fisso

Qualora fossi interessato ad eseguire il calcolo nel S.d.R. fisso, osserverei che la matrice  $[R]$  è, in realtà, la matrice di rotazione del sistema mobile vista nel sistema fisso infatti le colonne di tale matrice sono proprio le componenti  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  proiettate nel sistema assoluto.

Poiché abbiamo deciso di eseguire i calcoli nel S.d.R. fisso,  $[P_\omega]$  conterrà le componenti del vettore velocità angolare nel S.d.R. assoluto e di conseguenza il risultato sarà la matrice che mi ritorna le derivate rispetto al tempo di  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  calcolate nel S.d.R. assoluto.

Conoscendo le componenti della matrice di rotazione o le sue espressioni, è possibile eseguirne le derivate temporali: al fine di ricavare la matrice  $[P_\omega]$  sarà sufficiente moltiplicare per la matrice inversa (che coincide con la traposta) della matrice di rotazione:

$${}_f [\dot{R}] \quad {}_f {}^m [R]^T = [P_\omega]$$

### 7.5.2 Velocità angolare in un S.d.R. mobile

Qualora fossi interessato ad eseguire il medesimo calcolo nel S.d.R. mobile, perché in esso il tensore di inerzia è costante (è quindi più utile conoscere le componenti della velocità angolare nella terna mobile per calcolare il momento della quantità di moto o per calcolare l'energia cinetica), è preferibile riscrivere le formule di Poisson nel S.d.R. mobile:

$${}_m [\dot{R}] = {}_m [P_\omega] \quad {}_m {}^m [R]$$

dove:

- la matrice di rotazione dalla terna mobile alla terna mobile non è altro che la matrice identità
- avrei bisogno di determinare la matrice delle derivate dei coseni direttori nella terna mobile: il problema giace nel fatto che io dispongo delle espressioni  ${}_f {}^m [R]$ , ovvero dei coseni direttori della terna mobile proiettati nella terna fissa.

Posso dunque calcolare la matrice  ${}_f {}^m [R]$  e premoltiplicare per la matrice di trasformazione da fisso a mobile (matrice di rotazione)  ${}_m {}^m [R]$

Si ottiene dunque che:

$${}_m {}^m [R] \quad {}_f {}^m [\dot{R}] = {}_m [P_\omega]$$

In ultima analisi ottengo che:

$${}_m [P_\omega] = [R^T] [\dot{R}] \quad ; \quad {}_f [P_\omega] = [\dot{R}] [R^T]$$

## 7.6 Energia cinetica di corpi rigidi nello spazio

Nelle equazioni cardinali della dinamica è presente un termine legato alla velocità angolare: in particolare, la velocità angolare è fondamentale per scrivere la seconda equazione cardinale della dinamica nello spazio (anche conosciuta come equazione di Eulero).

Abbiamo visto anche che è possibile scrivere le equazioni del moto con altri due metodi: il PLV e le equazioni di Lagrange. In quest'ultime è richiesto che venga calcolata l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema.

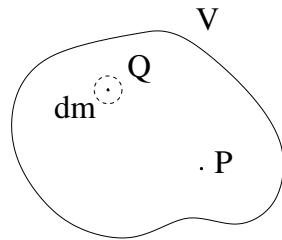
L'energia potenziale nello spazio è facilmente calcolabile: infatti, l'energia potenziale gravitazionale è sempre  $\mathbf{m} \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{h}$ , mentre l'energia potenziale elastica è legata all'allungamento di eventuali molle.

Procediamo, dunque, ad esprimere l'energia cinetica di un sistema meccanico nello spazio.

Immaginiamo di avere un corpo rigido di volume  $\mathbf{V}$  e consideriamo un punto generico appartenente al corpo stesso  $\mathbf{Q}$ . Al fine di calcolare l'energia cinetica di questo punto, sia  $dm$  una particella intorno a  $\mathbf{Q}$ , ovvero sia  $dm = \mu dV$  (dove  $\mu$  è la densità del continuo).

L'energia cinetica del corpo può essere calcolata nel seguente modo:

$$T = \int_V \frac{1}{2} v_Q^2 dm$$



Si è particolarmente interessati all'energia cinetica di un corpo rigido in quanto se un corpo non fosse rigido l'integrale non sarebbe risolvibile poiché è richiesto che sia nota la velocità di tutti i punti del corpo per poterne eseguire il calcolo.

Nel corpo rigido, inoltre, sappiamo che esiste la formula fondamentale della cinematica dei moti rigidi la quale afferma che: preso un polo  $\mathbf{P}$  qualsiasi, possiamo scrivere che:

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_P + \underline{\omega} \wedge \mathbf{P}\mathbf{Q}$$

Il vettore  $\mathbf{P}\mathbf{Q}$  sarà successivamente identificato con la notazione  $\mathbf{r}$ .

È possibile di conseguenza sviluppare l'espressione dell'energia cinetica, ricordando che:

$$\begin{aligned} v_Q^2 &= (\mathbf{v}_P + \underline{\omega} \wedge \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{v}_P + \underline{\omega} \wedge \mathbf{r}) \\ &= \mathbf{v}_P \cdot \mathbf{v}_P + 2 \mathbf{v}_P \cdot (\underline{\omega} \wedge \mathbf{r}) + (\underline{\omega} \wedge \mathbf{r}) \cdot (\underline{\omega} \wedge \mathbf{r}) \end{aligned}$$

Sfruttando a questo punto le proprietà di linearità degli integrali è possibile sviluppare l'espressione dell'energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2} \int_V v_P^2 dm + \int_V \mathbf{v}_P \cdot (\underline{\omega} \wedge \mathbf{r}) dm + \frac{1}{2} \int_V (\underline{\omega} \wedge \mathbf{r})^2 dm$$

Osservazioni:

1. La velocità del punto  $\mathbf{P}$  è costante e di conseguenza può essere estratta dal segno di integrale
2. Se il punto  $\mathbf{P}$  è un punto fisso, ovvero tale che la sua velocità è nulla, allora i primi due termini non contribuiscono al calcolo dell'energia cinetica
3. Se il punto  $\mathbf{P}$  coincide con il baricentro/centro di gravità del corpo (o del sistema di corpi in esame) l'espressione si semplifica in quanto il secondo termine non dà alcun contributo.

Da adesso in poi, al fine di semplificare i calcoli analitici, imponiamo la condizione che il polo  $\mathbf{P}$  coincida con il baricentro  $\mathbf{G}$ :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{v}_G^2 dm + \int_V \mathbf{v}_G \cdot (\underline{\omega} \wedge \mathbf{r}) dm + \frac{1}{2} \int_V (\underline{\omega} \wedge \mathbf{r})^2 dm \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{v}_G^2 M + \mathbf{v}_G \cdot (\underline{\omega} \wedge \int_V \mathbf{r} dm) + \frac{1}{2} \int_V (\underline{\omega} \wedge \mathbf{r})^2 dm \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{v}_G^2 M + \mathbf{v}_G \cdot (\underline{\omega} \wedge (M \mathbf{r}_G)) + \frac{1}{2} \int_V (\underline{\omega} \wedge \mathbf{r})^2 dm \end{aligned}$$

osserviamo che  $\mathbf{P}$  coincide con il baricentro e di conseguenza  $\mathbf{r}_G = 0$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} M \mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2} \int_V (\underline{\omega} \wedge \mathbf{r})^2 dm \\ &= \frac{1}{2} M \mathbf{v}_G^2 + \cancel{(-1)} \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{r} \wedge \underline{\omega}) \cdot (\mathbf{r} \wedge \underline{\omega}) dm \end{aligned}$$

Ricordiamo ora le seguenti proprietà del prodotto vettoriale e del prodotto scalare:

1. Il prodotto vettoriale può essere espresso in forma matriciale, perciò:

$$\{\mathbf{r} \wedge \underline{\omega}\} = [P_r] \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}$$

2. Il prodotto scalare tra due vettori può essere espresso come prodotto tra vettori: siano  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  due vettori, allora:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b}$$

di conseguenza:

$$(\mathbf{r} \wedge \underline{\omega}) \cdot (\mathbf{r} \wedge \underline{\omega}) = \{\omega\}^T [P_r]^T [P_r] \{\omega\}$$

L'espressione dell'energia cinetica può dunque essere sviluppata:

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2} \int_V \{\omega\}^T [P_r]^T [P_r] \{\omega\} dm$$

Poiché la velocità angolare è costante, il vettore  $\omega$  può essere estratto dal segno dell'integrale

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2} \{\omega\}^T \left( \int_V [P_r]^T [P_r] dm \right) \{\omega\}$$

In conclusione eseguiamo il prodotto tra matrici  $[P_r]^T [P_r]$  e osserviamo che essa coincide con il tensore d'inerzia. Infatti:

$$[P_r]^T [P_r] = \begin{bmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^2 + y^2 & -xy & -xz \\ -xy & z^2 + x^2 & -zy \\ -xz & -yz & y^2 + x^2 \end{bmatrix}$$

L'integrale diventa dunque:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M \mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2} \underline{\omega}^T \int_V \begin{bmatrix} z^2 + y^2 & -xy & -xz \\ -xy & z^2 + x^2 & -zy \\ -xz & -yz & y^2 + x^2 \end{bmatrix} dm \underline{\omega} \\ &= \frac{1}{2} M \mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2} \underline{\omega}^T \begin{bmatrix} \int_V z^2 + y^2 dm & \int_V -xy dm & \int_V -xz dm \\ \int_V -xy dm & \int_V z^2 + x^2 dm & \int_V -zy dm \\ \int_V -xz dm & \int_V -yz dm & \int_V y^2 + x^2 dm \end{bmatrix} \underline{\omega} \\ &= \frac{1}{2} M \mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2} \underline{\omega}^T \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \underline{\omega} \\ &= \frac{1}{2} M \mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2} \underline{\omega}^T [I] \underline{\omega} \end{aligned}$$

dove:

- $\frac{1}{2} M \mathbf{v}_G^2$  è l'energia cinetica di traslazione
- $\frac{1}{2} \underline{\omega}^T [I] \underline{\omega}$  è l'energia cinetica di rotazione.

Osservazioni:

1. Se io calcolassi la velocità angolare di una terna mobile e conoscessi il tensore d'inerzia di un corpo sarei in grado di calcolare l'energia cinetica di rotazione: in altri termini sono nella condizione di calcolare la funzione di Lagrange ( $L = T - V$ ) e scrivere le equazioni di Lagrange.
2. L'energia cinetica di rotazione è uguale indipendentemente dal S.d.R. in cui le calcolo, ovvero:

$$T = \frac{1}{2} {}_f \{\omega\}^T {}_f [I] {}_f \{\omega\} = \frac{1}{2} {}_m \{\omega\}^T {}_m [I] {}_m \{\omega\}$$

Questa relazione mi permette di determinare come cambia il tensore d'inerzia cambiando S.d.R., infatti è possibile esprimere la velocità angolare calcolata nel S.d.R. fisso nel S.d.R. mobile tramite la matrice di rotazione  $R$ , sostituendola all'uguaglianza tra le due energie cinetiche, ottenere:

$${}_f \{\omega\}^T {}_f [I] {}_f \{\omega\} = {}_m \{\omega\}^T {}_f^m [R]^T {}_f [I] {}_f^m [R]^T {}_m \{\omega\}$$

Il tensore d'inerzia in un S.d.R. è pari ad un tensore d'inerzia in un altro S.d.R. pre e post moltiplicato per le matrici di rotazione.

## 7.7 Matrici di trasformazione

Fino ad ora abbiamo affrontato il seguente problema:

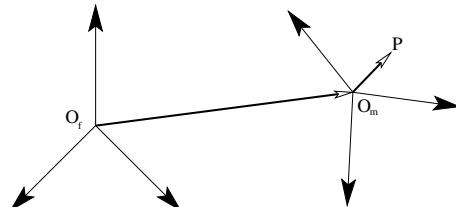
Consideriamo un S.d.R. fisso ( $f$ ) ed uno mobile ( $m$ ) ruotati l'uno rispetto all'altro, ma con le origini coincidenti ( $O_f \equiv O_m$ ). Dato quindi un punto  $P$  generico nello spazio:

$${}^f\{OP\} = {}_m^f[R] {}^m\{OP\}$$

Studiamo ora come affrontare il problema in cui il S.d.R.  $m$  e  $f$  hanno origini diverse.

Consideriamo un S.d.R. fisso con origine  $O_f$  e un S.d.R. mobile con origine  $O_m$  non coincidente con  $O_f$ . Le due terne in esame siano ruotate in maniera generica.

Supponiamo di voler determinare la posizione di un punto  $P$  appartenente alla terna mobile. Sotto tali ipotesi, vale che:



$$\mathbf{O}_f P = \mathbf{O}_f \mathbf{O}_m + \mathbf{O}_m P$$

Tale relazione in forma scalare/matriciale è interpretabile come:

$${}^f\{OP\} = {}^f\{O_f O_m\} + {}_m^f[R] {}^m\{O_m P\}$$

L'espressione appena ricavata è scomoda da utilizzare: supponiamo infatti di avere una catena cinematica aperta che preveda un numero arbitrario di S.d.R. ( $0, 1, 2, \dots, N$ ) solidali ai membri/corpi che compongono il sistema meccanico. Allora il generico punto  $P$  appartenente all' $N$ -esimo corpo (e di conseguenza S.d.R.) può essere determinato come:

$${}^0\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = {}^0\begin{Bmatrix} x_{O1} \\ y_{O1} \\ z_{O1} \end{Bmatrix} + {}_1^0[R] {}^1\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

dove a sua volta:

$${}^1\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = {}^1\begin{Bmatrix} x_{O2} \\ y_{O2} \\ z_{O2} \end{Bmatrix} + {}_2^1[R] {}^2\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

Possiamo osservare, infatti, che aumentando i S.d.R. il numero di operazioni tra matrici e vettori aumenta, rendendo i calcoli analitici più complessi e scomodi per operazioni di analisi di sistemi meccanici:

$${}^0\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = {}^0\begin{Bmatrix} x_{O1} \\ y_{O1} \\ z_{O1} \end{Bmatrix} + {}_1^0[R] {}^1\begin{Bmatrix} x_{O2} \\ y_{O2} \\ z_{O2} \end{Bmatrix} + {}_1^0[R] {}_2^1[R] {}^2\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

Per sopperire alla complessità di tale espressione all'aumentare dei membri della catena cinematica è possibile sviluppare l'espressione iniziale in modo tale da avere solo un semplice prodotto tra matrici. A tal fine indichiamo con  $a$  e  $b$  due generici S.d.R. a cui applicare la trasformazione.

$${}^a\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = {}^a\begin{Bmatrix} x_{Ob} \\ y_{Ob} \\ z_{Ob} \end{Bmatrix} + {}_b^a[R] {}^b\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

Introduciamo una nuova coordinata fittizia unitaria

$${}^a\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \frac{a}{b}[R] & \cdot & {}^a x_{Ob} \\ | & \frac{a}{b}[R] & | & {}^a y_{Ob} \\ \cdot & \frac{a}{b}[R] & \cdot & {}^a z_{Ob} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^b\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Così facendo le prime tre righe del prodotto matrice per vettore sono esattamente uguale alla trasformazione precedentemente esposta.

La matrice  $4 \times 4$  è detta **matrice di trasformazione** ed è indicata come:  ${}_b^a[T]$ , e presenta:

- la sottomatrice 3x3 in alto a sinistra è la matrice di rotazione da  $b$  ad  $a$
- i primi tre elementi della quarta riga sono 0
- l'elemento in posizione (4,4) è 1
- i primi tre elementi della 4 colonna è il vettore  $\mathbf{O}_a \mathbf{O}_b$  nel sistema di riferimento  $a$

In ultima analisi possiamo descrivere la posizione del S.d.R. 1 rispetto a 0 dando la matrice di trasformazione  ${}^0_1 [T]$  e così facendo possiamo descrivere la posizione del S.d.R. 2 rispetto a 1 dando la matrice di trasformazione  ${}^1_2 [T]$ ,...

$$\begin{aligned} {}^0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} &= {}^0_1 [T] {}^1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \\ {}^1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} &= {}^1_2 [T] {}^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \\ {}^0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} &= {}^0_1 [T] {}^1_2 [T] {}^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Possiamo a questo punto notare che il prodotto tra la matrice di trasformazione  $0 \rightarrow 1$  e  $1 \rightarrow 2$  non è altro che la matrice di trasformazione  $0 \rightarrow 2$ .

In questo modo nel caso si avesse una catena cinematica da 0 a N:

$${}^0_N [T] = {}^0_1 [T] {}^1_2 [T] \dots {}^{N-1}_N [T]$$

Il metodo appena descritto mi consente di scrivere le matrici di trasformazione elementari e calcolare le matrici di trasformazione che mi danno la posizione di qualsiasi corpo lungo la catena cinematica semplicemente moltiplicando matrici di trasformazione elementari.

Le **Trasformazioni elementari** saranno dunque le rotazioni attorno agli assi x,y,z ( $R_{x,y,z}$ ) oppure le traslazioni ( $T_{(x,y,z)}$ ).

Siccome le rotazioni non sono commutative si dovrà avere una matrice di trasformazione elementari corrispondenti alle rotazioni attorno agli assi x, y e z. Le traslazioni, invece, sono commutative, di conseguenza non serve che costruisca tre matrici di trasformazione elementari per le singole traslazioni lungo x, y e z, ma sarà sufficiente scrivere un'unica matrice di trasformazione elementare corrispondente alla traslazione.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{Om} \\ 0 & 1 & 0 & y_{Om} \\ 0 & 0 & 1 & z_{Om} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Una matrice di rotazione elementare è una matrice in cui le terne f e m hanno la medesima origine, ma sono ruotate. Sarà opportuno scrivere una matrice di trasformazione per ogni rotazione lungo ciascun asse, ad esempio:

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In conclusione: sarà necessario costruire 4 funzioni che permettano di scrivere le matrici di trasformazione corrispondenti a **3 rotazioni elementari** e ad **1 traslazione**. Fatto questo saremo in grado di scrivere la cinematica diretta di una catena cinematica aperta.

Inoltre facendo la derivata della matrice di trasformazione si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} R & | & O_m \\ \hline 0 & | & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{R} & | & v_{O_m} \\ \hline 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Ricordando, ora che la matrice di trasformazione tra 0 e N, può essere ricavata come prodotto di matrici di trasformazione tra i singoli S.d.R., eseguendone la derivata si otterrà la somma di una matrice derivata per le altre invariate: il calcolo, dunque, è piuttosto complicato.

$$\begin{aligned} {}_N^0 [\dot{T}] &= {}_1^0 [\dot{T}] {}_2^1 [T] \dots {}_N^{N-1} [T] \\ &+ {}_1^0 [T] {}_2^1 [\dot{T}] \dots {}_N^{N-1} [T] \\ &\dots\dots\dots \\ &+ {}_1^0 [T] {}_2^1 [T] \dots {}_N^{N-1} [\dot{T}] \end{aligned}$$

Una volta determinata la derivata della matrice di rotazione ( $\dot{R}$ ) è possibile ricavare la velocità angolare del S.d.R. N-esimo rispetto al S.d.R. 0 tramite la relazione  $P_\omega = \dot{R} R^T$ ; in altre parole la derivata della matrice di trasformazione permette di ricavare le informazioni necessarie per calcolare l'energia cinetica di traslazione e l'energia cinetica di rotazione di ciascuno dei corpi.