APLICACIONES DE LA TEORÍA DE RESIDUOS AL CÁLCULO DE INTEGRALES REALES

1. Integrales trigonométricas

La integral
$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} R(\cos t, \operatorname{sen} t)\, dt$$
donde R indica una función racional de modo que $R(\cos t, \operatorname{sen} t)$ es integrable en $[\alpha, \alpha+2\pi]$ se transforma en una integral de una función racional compleja sobre la circunferencia unidad C_1:
$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} R(\cos t, \operatorname{sen} t)\, dt = \int_{C_1} R\left(\frac{z+1/z}{2}, \frac{z-1/z}{2i}\right)\frac{1}{iz}dz,$$
que se calcula aplicando el teorema de Cauchy de los residuos.

2. Integrales impropias de primera especie

2.1. Valor principal de Cauchy de una integral impropia de 1ª especie

Definición. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua (o bien integrable Riemann en todo intervalo cerrado de $\mathbb{R}$), se define el **valor principal de Cauchy** de la integral impropia de 1ª especie $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ como el siguiente límite siempre que exista y sea finito:
$$vp\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(x)dx$$

Resultado. Si $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ es convergente, es decir, si existen los dos límites
$$\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{x_0} f(x)dx \qquad \text{y} \qquad \lim_{r\to\infty}\int_{x_0}^{r} f(x)dx,$$
entonces el valor de la integral impropia coincide con su valor principal de Cauchy.

Observación. Puede existir el valor principal de una integral impropia de 1ª especie y ésta no ser convergente. Por ejemplo, $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$ no converge y $vp\int_{-\infty}^{\infty} xdx = 0$.

2.2. Lema 1º de Jordan

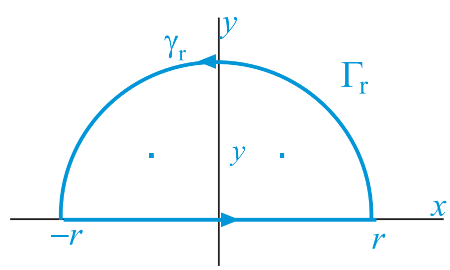
Sea el sector circular $S = \{re^{it} : r > r_0,\ \theta_1 \le t \le \theta_2\}$, donde $r_0, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ tales que $r_0 > 0$ y $0 \le \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$. Si f es una función compleja continua en S y tal que $\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in S}} zf(z) = w_0 \in \mathbb{C}$ entonces
$$\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r} f(z)dz = iw_0(\theta_2-\theta_1)$$
siendo γ_r el arco de la circunferencia positivamente orientada de centro 0 y radio r contenido en S.

2.3. Aplicación: cálculo de $\int_{-\infty}^{\infty} (p(x)/q(x))dx$ con $q(x) \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

Si $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde p y q son funciones polinómicas reales tales que $gr(p(x)) \leq gr(q(x)) + 2$ (gr indica el grado del polinomio) y $q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces la integral impropia de f en $\mathbb{R}$ es convergente, por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = vp \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx,$$

y este valor principal se puede calcular por medio de técnicas de análisis complejo: se considera la función compleja $f(z) = p(z)/q(z)$ y se integra en el contorno simple positivamente orientado $\Gamma_r = [-r, r] + \gamma_r$, donde γ_r es el arco de la circunferencia de centro 0 y radio r contenida en $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$, siendo r tal que Γ_r contenga todas las singularidades de f situadas en el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. Entonces



$$\int_{\Gamma_r} f(z)dz = \int_{-r}^{r} f(x)dx + \int_{\gamma_r} f(z)dz,$$

y tomando límites cuando $r \to \infty$ se obtiene el valor principal buscado en función de la integral de f sobre Γ_r y de $\lim\limits_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)dz$. El teorema de Cauchy de los residuos permite calcular la integral y el lema 1º de Jordan el límite.

3. Valores principales de integrales impropias de tercera especie

3.1. Valor principal de Cauchy de una integral impropia de 3ª especie

Definición. Se $f : \mathbb{R} \setminus \{c\}$ continua (o bien integrable en todo intervalo cerrado de $\mathbb{R} \setminus \{c\}$) y no acotada en un entorno de c. Se define el **valor principal de Cauchy** de la integral impropia de tercera especie $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ como el siguiente límite si existe y es finito:

$$vp \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{r\to\infty \\ \varepsilon\to 0^+}} \left(\int_{-r}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{r} f(x)dx \right)$$

Caso general. Si $f : \mathbb{R} \setminus \{c_1, c_2, \ldots, c_n\} \to \mathbb{R}$ es continua y no acotada en un entorno de c_k para cada $k = 1, 2, \ldots, n$ el valor principal de la integral impropia de tercera especie $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ es el siguiente límite si existe y es finito:

$$vp \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{r\to\infty \\ \varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\to 0^+}} \left(\int_{-r}^{c_1-\varepsilon_1} f(x)dx + \int_{c_1+\varepsilon_1}^{c_2-\varepsilon_2} f(x)dx + \cdots + \int_{c_n+\varepsilon_n}^{r} f(x)dx \right)$$

Resultado. Si una integral impropia de tercera especie es convergente entonces coincide con su valor principal.

Observación. Puede existir el valor principal de una integral de 3ª especie y no ser convergente la integral. Por ejemplo, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x}dx$ no converge y $vp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x}dx = 0$.

3.2. Lema 2º de Jordan

Sean $z_0 \in \mathbb{C}$ y el sector circular $S = \{z_0 + \varepsilon e^{it} : 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,\ \theta_1 \leq t \leq \theta_2\}$, donde $\varepsilon_0, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\varepsilon_0 > 0$ y $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$. Si f es una función compleja continua en S y tal que $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in S}} (z - z_0) f(z) = w_0 \in \mathbb{C}$ entonces

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = i w_0 (\theta_2 - \theta_1)$$

siendo γ_ε el arco de la circunferencia positivamente orientada de centro 0 y radio ε contenido en S.

Nótese que $w_0 = \operatorname{Res}(f; z_0)$.

3.3. Aplicación: cálculo de $vp \int_{-\infty}^{\infty} (p(x)/q(x))dx$ donde q tiene ceros en $\mathbb{R}$

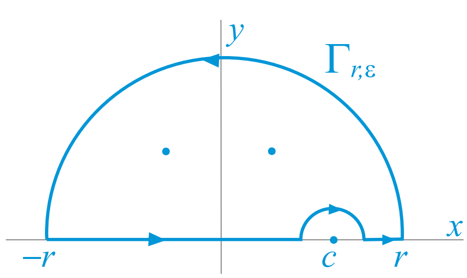
Sea $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde p y q son funciones polinómicas reales de modo que q tiene ceros reales.

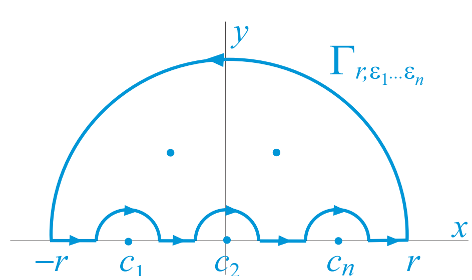
Para una mejor comprensión del método vemos el caso particular en el que q tiene únicamente un cero real, sea éste c. Se puede calcular el valor principal de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ considerando la extensión al campo complejo $f(z) = p(z)/q(z)$ e integrando sobre el contorno simple positivamente orientado $\Gamma_{r,\varepsilon} = [-r, c - \varepsilon] + (-\gamma_\varepsilon) + [c + \varepsilon, r] + \gamma_r$, donde γ_r y γ_ε son arcos de circunferencias positivamente orientadas contenidos en $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$, en el primer caso de centro el origen y radio r, y en el segundo de centro c y radio ε siendo estos radios tales que $\Gamma_{r,\varepsilon}$ contenga las singularidades de f situadas en $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. Entonces

$$\int_{\Gamma_{r,\varepsilon}} f(z)dz = \int_{-r}^{c-\varepsilon} f(x)dx - \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz + \int_{c+\varepsilon}^{r} f(x)dx + \int_{\gamma_r} f(z)dz$$

Tomando límites cuando $r \to \infty$ y $\varepsilon \to 0$ se obtiene el valor principal buscado en función de la integral de f sobre $\Gamma_{r,\varepsilon}$, de $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz$ y de $\lim\limits_{r \to \infty} \int_{\gamma_r} f(z)dz$. El teorema de Cauchy de los residuos permite calcular la integral, el lema 2º de Jordan el límite $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz$, y el lema 1º de Jordan el límite $\lim\limits_{r \to \infty} \int_{\gamma_r} f(z)dz$.

Nótese que el contorno sobre el que se integra tiene una "muesca" en torno a la singularidad c para "sortearla" (parte izquierda del dibujo). Si en lugar de una singularidad hay n singularidades reales (n ceros de q reales), el contorno debe llevar n "muescas" semicirculares (parte derecha del dibujo) y en el cálculo de la integral aparecerán n límites, independientes, correspondientes a las n "muescas".





4. $vp\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(ax)dx$ y $vp\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{sen}(ax)dx$ con $a>0$

4.1. Reducción al cálculo de $vp\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}dx$

Para calcular, si existen, $vp\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(ax)dx$ ó $vp\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{sen}(ax)dx$ extender las funciones integrando al plano complejo presenta un problema, pues las funciones seno y coseno no están acotadas en módulo en el semiplano superior ni en el inferior. Una estrategia a seguir es tener en cuenta que sí lo está, en el semiplano superior, la función $e^{iax} = \cos(ax) + i\operatorname{sen}(x)$, y que atendiendo a las propiedades de integración y límites de las funciones complejas, se tiene

$$\boxed{\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(ax)dx &= \operatorname{Re}\left(vp\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}dx\right) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{sen}(ax)dx &= \operatorname{Im}\left(vp\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}dx\right) \end{aligned}}$$

Nótese que I es el valor principal de una función de variable real pero con valores complejos, su definición es igual que en el caso real.

4.2. Lema 3º de Jordan (lema de Jordan)

Sea el sector circular $S = \{re^{it} : r > r_0,\ \theta_1 \le t \le \theta_2\}$, donde $r_0, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ tales que $r_0 > 0$ y $0 \le \theta_1 < \theta_2 \le \pi$. Si f es una función compleja continua en S y tal que $\lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ z\in S}} f(z) = 0$ entonces

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)e^{iaz}dz = 0,$$

siendo γ_r el arco de la circunferencia positivamente orientada de centro 0 y radio r contenido en S.

4.3. Cálculo de $vp\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}dx$ siendo $f = p/q$

4.3.1. Caso: q no tiene ceros reales

Para calcular, si existe, $vp\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}dx$ se considera la función compleja $g(z) = f(z)e^{iaz}$, y se integra sobre un contorno Γ_r como el de la sección 2.3 procediendo de la misma forma con la única variación de utilizar el lema 3º de Jordan) en lugar del 1º al calcular $\lim\limits_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)e^{iaz}dz$.

4.3.2. Caso: q tiene ceros reales

Para calcular, si existe, $vp\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}dx$ se considera la función compleja $g(z) = f(z)e^{iaz}$, y se procede como en la sección 3.4 con la única variación de utilizar el el lema 3º de Jordan en lugar del 1º al calcular $\lim\limits_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)e^{iaz}dz$.

Observación. Es interesante el siguiente resultado elemental sobre convergencia de integrales impropias: si f es una función par y existe $vp\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ entonces la integral impropia es convergente.