Marco Bardazzi

Università degli Studi di Firenze
Computer Vision and Intelligent Media Recognition

27 febbraio 2026

Agenda della Presentazione

1. Introduzione Teorica
2. Setup Sperimentale
3. Analisi dei Risultati (Exp 1, 2, 3)
4. Analisi delle Rappresentazioni (CKA)
5. Conclusioni

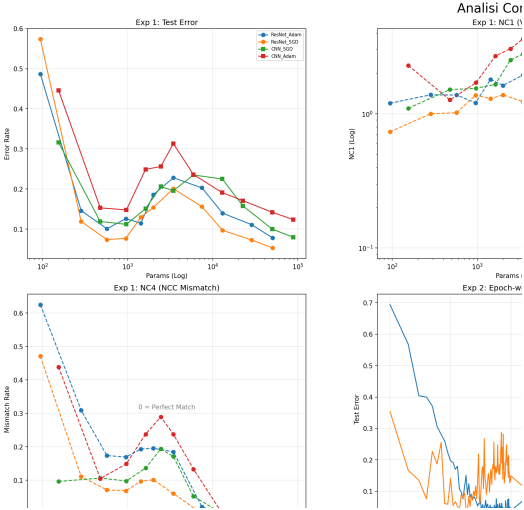
Il Paradigma Moderno: Deep Double Descent

La Teoria Classica:

- Trade-off Bias-Varianza a forma di "U".
- Modelli troppo complessi (*overparameterized*) memorizzano il rumore e falliscono sul test set (*overfitting*).

La Realtà del Deep Learning:

- Superata la **soglia di interpolazione** (capacità limite), l'errore di test torna a scendere.
- Modelli massivamente sovra-parametrizzati generalizzano in modo eccellente.



(Fig: Errore di Test al variare dei parametri)

Cos'è il Neural Collapse (NC)?

Nelle fasi terminali dell'addestramento, le rappresentazioni nell'ultimo strato nascosto mostrano 4 proprietà geometriche sorprendenti (Papyan et al., 2020):

1. **NC1 (Variability Collapse):** Le attivazioni della stessa classe convergono verso il loro centro medio (varianza intra-classe $\to 0$).
2. **NC2 (Simplex ETF):** Le medie delle classi si dispongono simmetricamente nello spazio, massimizzando la distanza tra loro (Equiangular Tight Frame).
3. **NC3 (Self-Duality):** I pesi del classificatore lineare si allineano perfettamente ai centri di classe.
4. **NC4 (NCC):** Le previsioni della rete sono identiche a quelle basate sulla distanza dal centro di classe più vicino.

Setup Sperimentale

Obiettivo: Unire empiricamente Double Descent, Neural Collapse e analisi delle similarità tra strati (CKA).

- **Dataset:** MNIST-1D. Dati a bassa dimensionalità ma con proprietà morfologiche simili a quelle delle immagini.
- **Rumore introdotto:** **20% Label Noise**. Fondamentale per esacerbare il picco di interpolazione (forza la rete a memorizzare etichette errate).
- **Architetture:** `ResNet1D` e `StandardCNN1D`.
- **Scaling:** Larghezza (*width*) variabile da $W = 2$ a $W = 64$, portando il modello da 10^2 a 10^5 parametri.
- **Ottimizzatori:** Confronto tra SGD (con momento e Cosine Annealing) e Adam.

Risultati: Double Descent e Rottura del Collapse

- Attorno ai $10^3 - 10^4$ parametri, l'Errore di Test presenta il **picco critico**. Il modello usa tutta la sua capacità per memorizzare il 20% di rumore.
- **Scoperta chiave:** L'errore di generalizzazione correla perfettamente con la metrica **NC1**. Nel regime critico, la varianza intra-classe esplode.
- Nel regime sovra-parametrizzato ($> 10^4$ param), il Neural Collapse si ripristina: lo spazio latente si riorganizza geometricamente.

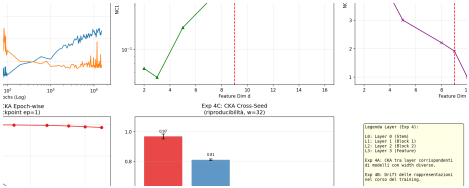
L'Impatto dell'Ottimizzatore: SGD domina

- Dai grafici si nota una netta distinzione tra ottimizzatori nel regime "overparameterized".
- **SGD:** Mostra un Double Descent più morbido e raggiunge metriche di Neural Collapse (NC2, NC3) nettamente migliori (valori prossimi allo zero).
- **Adam:** Spesso si ferma in minimi locali "peggiori" geometricamente.
- **Spiegazione:** SGD possiede un *bias induttivo implicito* che penalizza la norma dei pesi e favorisce confini decisionali ampi e simmetrici (massimo margine).

I Limiti Dimensionali del Neural Collapse

La matematica ci dice che, per ospitare un Simplex ETF perfetto con K classi, lo spazio deve avere dimensione $d \geq K - 1$.

- In MNIST-1D abbiamo $K = 10$ classi.
- Ci aspettiamo il collasso solo per dimensioni latenti $d \geq 9$.
- Variando la dimensione finale d di una ResNet, la metrica **NC2 crolla verticalmente esattamente a** $d = 9$, confermando la teoria in modo magistrale.



Come evolve la Rete all'interno? Il CKA

CKA (Centered Kernel Alignment) è una metrica $(0 \to 1)$ che misura la similarità tra due spazi di attivazioni, essendo invariante a rotazioni ortogonali e allo scaling.

Abbiamo usato il CKA per rispondere a 3 domande:

1. Reti "piccole" e "grandi" imparano le stesse cose? (*Cross-Architettura*)
2. Come cambiano le rappresentazioni nel tempo? (*Epoch-wise Drift*)
3. Se cambio il seed casuale iniziale, ottengo la stessa geometria? (*Cross-Seed Reproducibility*)

CKA: Differenze Strutturali (Small vs Large)

Confrontando una rete critica ($W = 8$) e una sovra-parametrizzata ($W = 64$):

- **Primi Strati (L0, L1):** CKA moderato/alto ($\approx 0.9 - 0.6$). Entrambi i modelli estraggono feature a basso livello simili (frequenze, bordi base del segnale 1D).
- **Strati Profondi (L3):** CKA crolla (≈ 0.34).
- **Perché?** Il modello piccolo fallisce nel separare le classi (manca di gradi di libertà per collassare), mentre il grande riesce a formare un Simplex ETF. Le topologie prima del classificatore sono quindi diametralmente opposte.

CKA: La Deriva delle Rappresentazioni (Epoch Drift)

Confrontando le attivazioni durante il training rispetto alla prima epoca:

- **Lo Stem (L0)** converge quasi subito. I filtri di convoluzione primari non necessitano di grandi aggiornamenti.
- **Gli strati profondi (L2, L3)** subiscono una deriva costante e massiccia (*drift*).
- Anche quando la loss di classificazione è quasi zero, lo spazio latente in L3 continua a modificarsi per migliaia di epoche, guidato dalla compressione della varianza tipica del Neural Collapse.

CKA: Riproducibilità e Degenerazione Geometrica

Addestrando lo stesso modello identico, cambiando solo il Seed iniziale:

- L0 è quasi deterministico (CKA ≈ 0.97).
- **L3 ha un CKA di appena 0.59.**
- **Il motivo:** Degenerazione dello spazio latente. Ci sono infiniti modi per ruotare uno spazio a N dimensioni mantenendo un Simplex perfetto. Modelli con seed diversi convergono a "rotazioni isomorfiche" differenti: risolvono il problema allo stesso modo, ma le coordinate assolute dei neuroni non corrispondono.

Conclusioni

1. **Il legame Empirico:** Il fenomeno del Double Descent è intimamente legato alla distruzione e successiva ricostruzione del Neural Collapse nel regime sovra-parametrizzato.
2. **Ottimizzazione:** SGD, grazie al suo bias implicito di regolarizzazione, risulta decisivo per la convergenza verso un Simplex ETF perfetto rispetto ad Adam.
3. **Geometria Profonda:** L'analisi CKA rivela che la rete non apprende uniformemente. Gli strati iniziali fungono da estrattori statici, mentre l'ultimo strato compie una complessa e continua danza per comprimere lo spazio e massimizzare i margini geometrici.

Grazie per l'attenzione!

Domande?