

Appunti di
Istituzioni di Fisica Nucleare
A.A. 2022/2023

Marco Radocchia

16 maggio 2023

Indice

I	Cinematica relativistica - Prof. Salamida	1
II	Fisica Nucleare - Prof. Villante/Capozzi	2
1	2023-04-27	3
1.1	Serie (catene) radiattive	3
1.2	Rutherford scattering formula	3
1.2.1	Il modello	3
1.2.2	Raggio di collisione	4
2	2020-02-27	5
2.1	Grandezze atomiche caratteristiche	5
2.2	Esperimenti di diffusione	5
2.2.1	Diffusione elastica	5
2.2.2	Diffusione anelastica	6
2.3	Sezioni d'urto	6
2.3.1	Sezione d'urto differenziale	7
2.4	Grandezze Caratteristiche - Indeterminazione di Heisenberg	7
2.5	Esperimenti di Rutherford	8
2.5.1	Descrizione Classica	8
3	03-03-2020, 05-05-2020	12
3.1	Scattering Rutherford	12
3.1.1	Calcolo della sezione d'urto	12
3.1.2	Sezione d'urto differenziale	12
3.1.3	Calcolo Quantistico della sezione d'urto	14
4	Lezione 2020-05-07	20
4.1	Scattering Rutherford (reprise)	20
4.1.1	Sezione d'urto per nucleo <i>non</i> puntiforme	20
4.1.2	Deviazione dal comportamento puntiforme	21
4.2	Modelli per la distribuzione di carica nei nuclei	22
4.2.1	Sfera uniformemente carica	22
4.2.2	Modello Saxon-Woods	24
4.3	Teoria delle perturbazioni indipendenti dal tempo	25
4.4	Muonic atoms	26
4.5	Nuclei speculari	26
5	2022-05-03	27
5.1	Sezioni d'urto per nuclei non puntiformi	27
5.1.1	Fattori di forma	27
5.1.2	Scattering Mott	28
5.2	Proprietà dei Nuclei	28
5.2.1	Difetto di massa ed energia di legame	29
5.3	Radioattività - Decadimenti Nucleari	29
5.3.1	Legge di decadimento esponenziale	30

5.3.2	Decadimenti multimodali	30
5.3.3	Costruzione di Esperimenti	31
6	2022-05-05	32
6.1	Radioattività - Decadimenti Nucleari (reprise)	32
6.1.1	Decadimenti sequenziali	32
6.1.2	Condizioni energetiche per i vari decadimenti	33
6.2	Modello standard delle interazioni fondamentali	35
6.2.1	Leggi di conservazione	35
7	2022-05-10	36
7.1	Modello standard (reprise)	36
7.1.1	Cinematica del decadimento α	36
7.1.2	Cinematica del decadimento β	36
8	2022-05-17	38
8.1	Formula semi-empirica di massa (formula di Weizsäcker)	38
8.1.1	Nuclei stabili	38
8.1.2	Energia di legame dei nuclei	38
9	2022-05-19	42
9.1	Formula semi-empirica di massa (reprise)	42
9.1.1	Nuclei stabili	42
10	2022-05-24	45
10.1	Instabilità dei nuclei	45
10.1.1	Decadimenti β	45
10.1.2	Decadimenti α	45
11	2022-05-26	49
11.1	Instabilità dei nuclei (reprise)	49
11.1.1	Decadimenti α (reprise)	49
12	2022-05-31	53
12.1	Reazioni nucleari	53
12.1.2	Cineamtica di un processo di collisione (non-relativistica)	53
12.1.3	Fusione nucleare	55
12.1.4	Fissione nucleare	55
12.1.5	Considerazioni sulle reazioni nucleari	55
12.1.6	Fusione dell'idrogeno nel Sole	56
13	2022-06-07	57
13.1	Approssimazione di campo medio	57
14	2022-06-09	61

Parte I

**Cinematica relativistica - Prof.
Salamida**

Parte II

Fisica Nucleare - Prof. Villante/Capozzi

Lezione 1

2023-04-27

1.1 Serie (catene) radiattive

Furono individuate 3 *serie* (catene) *radiattive*:

Le catene radiattive sono originate da tre tipi di decadimento:

- $\alpha \rightarrow$ particelle cariche ${}^4\text{He}^{++}$;
- $\beta \rightarrow$ particelle negative;
- $\gamma \rightarrow$ particelle neutre (fotoni energetici).

I primi e maggiori sviluppi in fisica nucleare sono stati fatti utilizzando particelle α .

1.2 Rutherford scattering formula

Utilizzeremo particelle con carica ze .

1.2.1 Il modello

- L'atomo è costituito da un nucleo con carica positiva Ze che porta praticamente tutta la massa dell'atomo;
- l'atomo è elettricamente neutro e contiene Z elettroni che orbitano intorno al nucleo. Questi elettroni non possono dar luogo a deflessioni grandi. Sono trascurabili rispetto alla particella α , considerata come proiettile;
- il nucleo bersaglio è molto più massivo della particella incidente; questo permetterà in prima approssimazione di considerare il rinculo del target nullo, $m \ll M$;
- si utilizza solo meccanica classica per descrivere l'urto, quindi assumeremo la velocità del proiettile non relativistica, $v \ll c$;
- il nucleo bersaglio e la particella incidente hanno distribuzioni di carica puntiforme e interagiscono attraverso un potenziale coulombiano (interazione puramente elettromagnetica):

$$V(z) = \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad [1.1]$$

- si considera l'interazione elettromagnetica come unico tipo d'interazione;
- il bersaglio e il proiettile non subiscono alcuna eccitazione durante l'urto (scattering elastico).

La forza d'interazione del modello è la forza coulombiana:

$$\vec{F} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \quad [1.2]$$

L'impulso trasferito, se gli impulsi iniziale e finale della particella prima e dopo l'urto sono \vec{p}_i e \vec{p}_f rispettivamente:

$$\Delta\vec{p} = |\vec{p}_f - \vec{p}_i| = 2p \sin \frac{\theta}{2} \quad [1.3]$$

allora:

$$\Delta p = \int_{-\infty}^{\infty} F_T dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\beta}{r^2} dt \quad [1.4]$$

dove, con β l'angolo in figura 2.1:

$$\beta(t = -\infty) = -\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right); \quad \beta(t = \infty) = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \quad [1.5]$$

1.2.2 Raggio di collisione

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 b} \frac{m}{p^2} = \frac{R}{b} \quad [1.6]$$

con $R = \frac{zZe^2 m}{4\pi\epsilon_0 p^2}$. In particolare, per $R = b$ abbiamo:

$$\tan \frac{\theta}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\theta}{2} = 45^\circ \quad \Rightarrow \quad \theta = 90^\circ \quad [1.7]$$

Per il caso di impatto frontale, utilizziamo il *teorema delle forze vive*:

$$T + V = \text{const} \quad [1.8]$$

quindi:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + 0 = \text{const} = 0 + \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 r_{\min}} \quad [1.9]$$

allora abbiamo che:

$$r_{\min} = 2R \quad [1.10]$$

Questo vuol dire che l'ordine di grandezza di R rappresenta l'ordine di grandezza della minima distanza della particella α dal nucleo scatteratore.

Lezione 2

2020-02-27

2.1 Grandezze atomiche caratteristiche

Tabella 2.1: Caratteristiche degli elettroni

Raggio atomo	$R_A = 1\text{\AA} = 10^{-10}\text{ m} = 10^{-8}\text{ cm}$
Energie	$E \sim 1\text{ eV}$
Massa elettrone	$m_e \simeq 9 \times 10^{-31}\text{ kg}$
Energia riposo elettrone	$m_e c^2 \simeq 0.511\text{ MeV}$

Tabella 2.2: Caratteristiche dei nuclei

Raggio nucleo	$R_N = 10^{-15}\text{ m} = 10^{-13}\text{ cm} = 1\text{ fm}$
Massa protone	$m_p \simeq 1836m_e$
Energia riposo protone	$m_p c^2 \simeq 1\text{ GeV}$
Energia riposo neutrone	$m_n c^2 \simeq m_p c^2$
Energie	$E \sim 1\text{ keV} \div 1\text{ MeV}$

Poiché le masse di protone e neutrone risultano molto simili (la differenza fra le energie a riposo $m_n c^2 - m_p c^2 \simeq 1.29\text{ MeV}$), capiterà di lavorare con la **massa del nucleone** (che indicheremo con la N maiuscola) e la rispettiva energia a riposo: $m_N c^2 \simeq 1\text{ GeV}$.

La fisica nucleare si può studiare trascurando l'influenza degli elettroni.

2.2 Esperimenti di diffusione

Lo strumento principale nella fisica delle particelle e/o fisica nucleare per studiare/sondare la materia e i suoi costituenti fondamentali e le interazioni che fra di esse intercorrono.

Abbiamo tipicamente un bersaglio, che è l'oggetto di studio, e un fascio di particelle proiettile con caratteristiche ben definite.

2.2.1 Diffusione elastica

Per un processo di diffusione elastica abbiamo una reazione del tipo:

$$a + b \rightarrow a' + b' \quad [2.1]$$

dove:

- le particelle prima e dopo l'urto sono le stesse;
- l'energia cinetica totale è conservata.

Nota (Energia del proiettile e risoluzione). Tanto più grande è l'energia delle particelle proiettile, tanto maggiore sarà la risoluzione disponibile per la misura delle quantità cercate.

Lunghezza d'onda di De Broglie Consideriamo una particella con impulso \vec{p} . La *lunghezza d'onda di De Broglie* ridotta associata a una tale particella è la seguente:

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar c}{E}, \quad E_k \gg mc^2 \quad [2.2]$$

Per analizzare una struttura con ... dobbiamo utilizzare una particella con una lunghezza d'onda di De Broglie al più dello stesso ordine di grandezza di Δx : $\Delta x \gtrsim \bar{\lambda}$. Ad esempio, per i nuclei atomici, che hanno raggi tipici del fermi, abbiamo necessità di usare fasci di particelle di $\sim 10 \div 100 \text{ MeV}/c$. Per i nucleoni, con dimensioni tipiche $\sim 0.8 \text{ fm}$, allora abbiamo bisogno di particelle di impulso $p \gtrsim 100 \text{ MeV}/c$. Per i quark $p \gtrsim \text{GeV}/c$.

2.2.2 Diffusione anelastica

Nel caso di diffusione anelastica si tratta di processi del tipo:

$$a + b \rightarrow a' + b^* \quad [2.3]$$

con $b^* \rightarrow c + d$. Qualora si osservi a' , ma non gli altri prodotti, si parla di **misure inclusive**¹. Qualora si osservino *tutti* i prodotti, si parla invece di **misure esclusive**².

2.3 Sezioni d'urto

Consideriamo un fascio di particelle composto da N_i particelle che incide su un bersaglio costituito da N_b particelle. Indichiamo con \vec{v} la velocità relativa fra il fascio e il bersaglio. Scriviamo il *flusso di particelle del fascio*:

$$\phi = \frac{N_i}{\Delta S \Delta t} = \frac{N_i \Delta x}{\Delta S \Delta t \Delta x} = \frac{N_i v}{V} = n_i v \quad [2.4]$$

dove $n_i = \frac{N_i}{V}$ rappresenta la *densità di particelle nel fascio*. Per il bersaglio, invece:

$$\frac{N_b}{\Delta S} = \frac{N_b \Delta x}{\Delta S \Delta x} = \frac{N_b \Delta x}{V} = n_b \Delta x \quad [2.5]$$

dove $n_b = \frac{N_b}{V}$ è la *densità di particelle nel bersaglio*.

La *frequenza* con cui avviene la reazione:

$$\hat{N} \propto \Phi N_b \quad \Rightarrow \quad \hat{N} = \Phi N_b \sigma_b \quad [2.6]$$

dove σ_b è la **sezione d'urto**, che rappresenta l'area geometrica che ciascun diffusore espone al proiettile. Quindi:

Sezione d'urto

$$\sigma_b = \frac{\hat{N}}{\phi N_b}$$

[2.7]

con:

- \hat{N} : numero di reazioni per unità di tempo;
- ϕ : numero di particelle del fascio per unità di tempo ed area;
- N_b : numero di centri diffusori.

Le dimensioni della sezione d'urto sono quelle di un'area: $[L^2]$.

Barn Le unità caratteristiche relative alle sezioni d'urto sono quelle del *Barn*: $1 \text{ b} = 1 \times 10^{-28} \text{ m}^2$, $1 \text{ mb} = 1 \times 10^{-31} \text{ m}^2$.

¹Include tutte le possibilità (*canali*) di produzione in b^*

²Esclusive poiché considero uno specifico canale di produzione, escludendo tutti gli altri

Coefficiente di assorbimento e lunghezza di radiazione Il coefficiente di assorbimento:

$$\mu = ??? \quad [2.8]$$

e la *lunghezza di radiazione* il suo inverso:

$$\lambda = \frac{1}{\mu} = [\text{cm}] \quad [2.9]$$

Luminosità La *luminosità*:

$$L = \phi N_b = [\text{area} \cdot \text{tempo}]^{-1} \quad [2.10]$$

con $\phi = n_i v$, quindi:

$$L = n_i v N_b \quad [2.11]$$

2.3.1 Sezione d'urto differenziale

Immaginiamo di avere un rivelatore di area A_D a distanza r ed angolo θ rispetto alla direzione del fascio. L'angolo solido coperto dal rivelatore sarà:

$$\Delta\Omega = \frac{A_0}{r^2} \quad [2.12]$$

Il numero di reazioni osservate sarà in questo caso proporzionale alla *sezione d'urto differenziale*:

$$\frac{d\sigma(E, \theta)}{d\Omega} \quad [2.13]$$

dove E è l'energia del fascio e θ l'angolo di diffusione. quindi:

$$N(E, \theta, \Delta\Omega) = \phi N_b \frac{d\sigma(E, \theta)}{d\Omega} \Delta\Omega = L \frac{d\sigma(E, \theta)}{d\Omega} \Delta\Omega \quad [2.14]$$

con L la luminosità.

Qualore il rivelatore permetta di misurare anche l'energia delle particelle diffuse, allora possiamo ottenere una *sezione d'urto doppio-differenziale*:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} \Rightarrow \sigma_{\text{tot}} = \int_0^{E'_{\text{max}}} \int_{\Omega} \frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} d\Omega dE' \quad [2.15]$$

dove E' è l'energia delle particelle diffuse, con:

$$d\Omega = d\cos\theta d\phi = \sin\theta d\theta d\phi \quad [2.16]$$

dove ϕ è l'angolo azimutale.

2.4 Grandezze Caratteristiche - Indeterminazione di Heisenberg

A causa del *Principio di Indeterminazione di Heisenberg* lo studio di fenomeni che avvengono a distanze molto piccole è possibile solo se abbiamo a che fare con energie molto grandi.

$$\Delta x \Delta p_x \gtrsim \hbar \quad [2.17]$$

Immaginiamo il nucleo come un contenitore (consideriamo per ora la direzione \hat{x} , ma varranno le stesse considerazioni anche per le direzioni \hat{y} e \hat{z}) di dimensione caratteristica R_N . Se assumiamo una particella localizzata all'interno di tale contenitore, per il principio di Heisenberg si avrà $\Delta x = R_N$. Inoltre, poiché non c'è motivo di pensare che ci sia un verso privilegiato, possiamo dire per l'impulso p_x che $\langle p_x \rangle = \overline{p_x} = 0$.

Allora:

$$(\Delta p_x)^2 = \langle (p_x - \overline{p_x})^2 \rangle = \langle p_x^2 - 2p_x \overline{p_x} + \overline{p_x}^2 \rangle = \langle p_x^2 \rangle \quad [2.18]$$

Inoltre, Δp_x ammetterà un limite inferiore avendo definito Δx , ovvero:

$$\Delta p_x \gtrsim \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{\hbar}{R_N} \quad [2.19]$$

per cui, utilizzando l'equazione 2.18:

$$(\Delta p_x)^2 = \langle p_x^2 \rangle \gtrsim \left(\frac{\hbar}{R_N} \right)^2 \quad [2.20]$$

Analogamente si può ripetere il ragionamento anche per le altre direzioni:

$$\langle p_x^2 \rangle \gtrsim \left(\frac{\hbar}{R_N} \right)^2 \quad \langle p_y^2 \rangle \gtrsim \left(\frac{\hbar}{R_N} \right)^2 \quad \langle p_z^2 \rangle \gtrsim \left(\frac{\hbar}{R_N} \right)^2 \quad [2.21]$$

Considerando energie *NON-relativistiche*, definiamo l'energia cinetica come energia cinetica classica:

$$K = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} \quad [2.22]$$

e sfruttando il set di equazioni 2.21 possiamo stabilire un **limite inferiore per l'energia cinetica media** (sempre conseguenza del principio di Indeterminazione):

$$\langle K \rangle = \frac{\langle p_x^2 \rangle + \langle p_y^2 \rangle + \langle p_z^2 \rangle}{2m} \gtrsim \frac{3}{2m_N} \left(\frac{\hbar}{R_N} \right)^2 \quad [2.23]$$

Stime Per avere un'idea degli ordini di grandezza delle quantità con cui avremo a che fare possiamo moltiplicare e dividere per c^2 , per cui³, per un *nucleo*:

$$\langle K \rangle \gtrsim \frac{3}{2} \frac{(\hbar c)^2}{(m_N c)^2} \frac{1}{R_N^2} = \frac{3}{2} \frac{(200)^2}{1000} \frac{\text{MeV}}{(R_N/1\text{fm})^2} = \frac{60\text{MeV}}{(R_N/1\text{fm})^2} \quad [2.24]$$

Lo stesso conto, per un *atomo*:

$$\langle K \rangle = \frac{3}{2} \frac{1}{m_e c^2} \frac{(200\text{MeV} \cdot \text{fm})^2}{R_{\text{atomo}}^2} \simeq 10^{-5} \text{MeV} = 10 \text{eV} \quad [2.25]$$

Nota. Al bilancio energetico bisognerà aggiungere un **termine di repulsione coulombiana** ed uno di attrazione dell'**interazione forte fra nucleoni**.

Nota (Potenziale Coulombiano). Vediamo qualche dettaglio sulle dimensioni del potenziale di interazione coulombiana in modulo (quindi che sia attrattivo o repulsivo):

$$|V_{\text{coulomb}}| = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hbar c}{\hbar c} \frac{1}{R} = \alpha \frac{\hbar c}{R} \simeq \frac{200}{137} \frac{1}{R/\text{fm}} \text{MeV} \quad [2.26]$$

dato che $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0(\hbar c)} = \alpha \simeq \frac{1}{137}$.

2.5 Esperimenti di Rutherford

Gli esperimenti di Rutherford che illustriamo erano volti a scoprire alcune proprietà dei nuclei fra cui le dimensioni e consistevano in quelli che definiamo **scattering nucleari di particelle α** .

Particelle α (nuclei di elio doppiamente ionizzati, ${}^4\text{He}^{++}$) venivano collimate su una lamina molto sottile ⁴ di oro (per evitare scattering multipli) e venivano poi osservate da dei rilevatori che ne misuravano l'angolo di deflessione.

2.5.1 Descrizione Classica

Consideriamo un'interazione *particella α /nucleo*⁵ di tipo coulombiano e **trascuriamo il rinculo del nucleo**, ovvero fissiamo le ipotesi:

$$m_N \gg m_\alpha \quad m_N c^2 \gg K \quad [2.27]$$

³Una quantità molto utile per i conti sarà $\hbar c \simeq 197 \text{MeV} \cdot \text{fm}$

⁴Si trattava di circa $4 \mu\text{m}$ perché si sperava di osservare l'effetto di *singola interazione*

⁵Stiamo parlando quindi della propagazione di una particella carica in un campo elettrostatico fisso nello spazio e nel tempo: in questa configurazione la quantità di moto della particella non è una quantità conservata, poiché il campo elettrostatico fisso rompe l'invarianza per traslazione

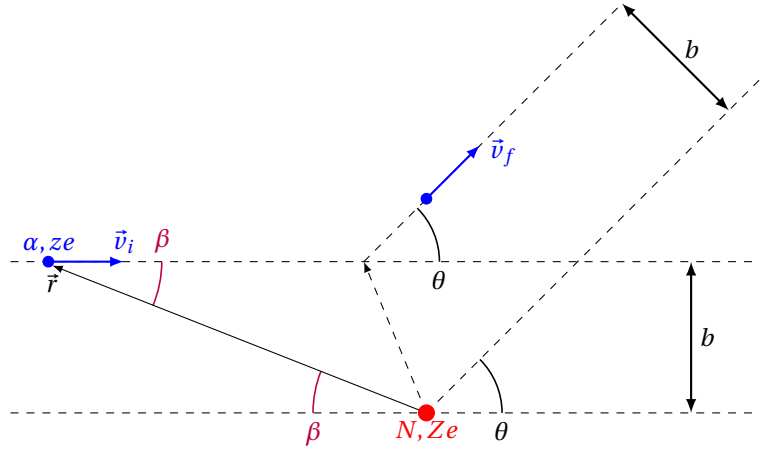


Figura 2.1: b : **parametro d'impatto**; \vec{v}_i : *velocità iniziale*; \vec{v}_f : *velocità finale*;
La traiettoria della particella α è una traiettoria aperta, in particolare una *traiettoria iperbolica*

Nell'ipotesi in cui il *nucleo non rinculi* avremo per i principi di conservazione che $|\vec{v}_f| = |\vec{v}_i|$, ossia che l'energia cinetica della particella incidente sia invariata dopo lo scattering. indicheremo con θ il cosiddetto **angolo di scattering**, ovvero l'angolo fra le direzioni associate a \vec{v}_i e \vec{v}_f . Analizziamo ora i due casi di scattering per parametro d'urto $b = 0$ e $b \neq 0$.

- Caso $b = 0 \Rightarrow \theta = 180^\circ$

Possiamo calcolare la **distanza di massimo avvicinamento** come: poiché siamo in descrizione classica scriviamo l'energia totale del sistema come l'energia cinetica classica della particella α , più il potenziale coulombiano di interazione fra particella e nucleo:

$$E_T = \frac{1}{2} m_\alpha |\vec{v}|^2 + \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|} = \text{const} \quad [2.28]$$

Tramite una semplice considerazione sulla **conservazione dell'energia totale** del sistema (ricorda che siamo in fisica classica) possiamo scrivere uguagliando l'energia totale iniziale (che supponendo la particella α a distanza infinita dal nucleo sarà composta del solo termine cinetico) e l'energia totale al punto di inversione del moto (che sarà composta del solo termine potenziale poiché al punto di inversione $|\vec{v}| = 0$), quindi:

$$\frac{1}{2} m_\alpha |\vec{v}_i|^2 = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \quad [2.29]$$

Dove abbiamo chiamato ρ la **distanza di massimo avvicinamento per urto frontale**.

Invertendo l'equazione 2.29 otteniamo:

$$\rho = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{m|\vec{v}_i|^2} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hbar c}{\hbar c} \frac{2}{m|\vec{v}_i|^2} \quad [2.30]$$

Dove l'ultimo passaggio ci permette di esprimere ρ in termini di costante di struttura fine:

$$\text{Costante di struttura fine} \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\hbar c} \simeq \frac{1}{137} \quad [2.31]$$

Quindi infine la **distanza di massimo avvicinamento per urto frontale** diventa:

$$\rho = zZ\alpha \frac{\hbar c}{\frac{m|\vec{v}_i|^2}{2}} = zZ\alpha \frac{\hbar c}{K} \quad [2.32]$$

Stime Ricordando che il raggio atomico è dell'ordine del fermi, possiamo osservare da una stima grossolana che (secondo la descrizione classica) per particelle α di energia cinetica $K < 200\text{MeV}$ non saremo in grado di sondare i nuclei, poiché:

$$\rho \simeq \frac{2 \cdot 79}{137} \frac{200\text{MeV} \cdot \text{fm}}{K} \simeq \frac{200\text{fm}}{K\text{MeV}^{-1}} \sim 2 \times 10^3 \text{fm} \quad [2.33]$$

L'ordine delle centinaia di *fermi* (che rappresenta una dimensione molto maggiore delle dimensioni dei nuclei, sebbene molto minore del raggio dell'atomo) ci permette di considerare i nuclei puntiformi. Quindi Rutherford non misura la dimensione del nucleo (tanto è che lo approssima come puntiforme), ma riesce a determinare un upper bound per le dimensioni del nucleo.

• Caso $b \neq 0$

Sfruttiamo il principio di **conservazione del momento angolare**:

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} \quad [2.34]$$

Calcoliamo il modulo del momento angolare iniziale:

$$|\vec{L}_i| = |\vec{r}| |\vec{p}| \sin \beta = |\vec{p}| |\vec{r}| \sin \beta = |\vec{p}| b = m |\vec{v}_i| b \quad [2.35]$$

Dove $|\vec{L}_i|$ è il modulo del momento angolare all'istante iniziale e $b = |\vec{r}| \sin \beta$ il parametro d'impatto.

Il modulo del momento angolare al generico istante t è invece dato da:

$$|\vec{L}(t)| = |\vec{r}(t) \wedge [m\vec{v}(t)]| \quad [2.36]$$

Possiamo scrivere $\vec{v}(t)$ come:

$$\vec{v} = \vec{v}_\tau + \vec{v}_\perp = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{r}) = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} \quad [2.37]$$

dove tutte le quantità sono chiaramente funzione del tempo anche se non esplicitamente dichiarato. Per cui avremo le seguenti uguaglianze vettoriali:

$$\begin{cases} \vec{v}_\tau = \frac{dr}{dt}\hat{r} \\ \vec{v}_\perp = r\frac{d\hat{r}}{dt} \end{cases} \quad [2.38]$$

Sostituendo questa espressione della velocità nell'equazione 2.36 otteniamo:

$$|\vec{L}(t)| = m|\vec{r}(t) \wedge \vec{v}(t)| = m|\vec{r}(t) \wedge [\vec{v}_\tau(t) + \vec{v}_\perp(t)]| \quad [2.39]$$

Poiché:

$$\vec{r}(t) // \vec{v}_\tau(t) \quad \forall t \quad [2.40]$$

allora l'equazione 2.39, sostituendo l'espressione di \vec{v}_\perp dall'equazione 2.38 si riduce a:

$$|\vec{L}(t)| = m|\vec{r}(t) \wedge \vec{v}_\perp(t)| = mr \left| \vec{r}(t) \wedge \frac{d\hat{r}}{dt} \right| \quad [2.41]$$

che utilizzando l'equazione 2.35, poiché il modulo del momento angolare è conservato, potremo dire che per ogni istante di tempo t si avrà:

$$\begin{aligned} mv_i b &= mr^2 \frac{d\beta}{dt} \\ \Rightarrow v_i b &= r^2 \frac{d\beta}{dt} \end{aligned} \quad [2.42]$$

Nello spazio a due dimensioni che stiamo considerando, riferendoci alla figura 2.1, i vettori velocità saranno:

$$\vec{v}_i = (v, 0); \quad \vec{v}_f = (v \cos \theta, v \sin \theta) \quad [2.43]$$

L'impulso degli istanti iniziale e finale saranno:

$$\vec{p}_i = m\vec{v}_i \quad \vec{p}_f = m\vec{v}_f \quad [2.44]$$

e scomponendo lungo le due direzioni \hat{x} e \hat{y} :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{dp_x}{dt} = F_x \\ \frac{dp_y}{dt} = F_y \end{cases} \quad [2.45]$$

e poiché l'unica forza in gioco è quella d'interazione coulombiana potremmo scrivere che lungo la direzione \hat{y} :

$$m \frac{dv_y}{dt} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \sin\beta \quad [2.46]$$

Moltiplicando e dividendo il secondo membro per bv_i e utilizzando la relazione 2.42:

$$\begin{aligned} \frac{dv_y}{dt} &= \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{bv_i} \right) \frac{\sin\beta}{m} \frac{bv_i}{r^2} \\ \Rightarrow \frac{dv_y}{dt} &= \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{bv_i} \right) \frac{\sin\beta}{m} \frac{d\beta}{dt} \\ \Rightarrow dv_y &= \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{bv_i} \right) \frac{1}{m} \sin\beta d\beta \end{aligned} \quad [2.47]$$

integrando per separazione di variabili:

$$(v_y)_f = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{bv} \right) \frac{1}{m} \int_0^{\pi-\theta} \sin\beta d\beta \quad [2.48]$$

L'integrale si risolve come:

$$\int_0^{\pi-\theta} \sin\beta d\beta = [-\cos\theta]_0^{\pi-\theta} = 1 - \cos(\pi - \theta) = 1 + \cos\theta \quad [2.49]$$

quindi sostituendo e indicando con K l'energia cinetica:

$$\begin{aligned} v \sin\theta &= \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{bv} \right) \frac{1}{m} [1 + \cos\theta] \\ \Rightarrow \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} &= \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{bv^2} \right) \frac{1}{m} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b \frac{mv^2}{2}} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2bK} = \frac{\rho}{2b} \end{aligned} \quad [2.50]$$

Quindi riarrangiando con le identità goniometriche il primo membro possiamo arrivare a scrivere le seguenti **relazioni fra parametro d'impatto e angolo di deflessione**:

$$\boxed{\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\rho}{2b}} \quad \boxed{\theta = 2 \arctan \frac{\rho}{2b}} \quad [2.51]$$

Nota. Questo ci dice che l'interazione dovrebbe essere presente anche a distanze molto grandi e questo effetto è definito **effetto a lungo raggio**, dovuto a **mediatori a massa nulla** (*fotoni*).

Lezione 3

03-03-2020, 05-05-2020

3.1 Scattering Rutherford

3.1.1 Calcolo della sezione d'urto

Definendo le seguenti quantità:

- ϕ : flusso di particelle α incidenti sul campione
- N_{eventi} : il numero di eventi di scattering
- N_{target} : il numero di atomi target sul campione
- σ : la **sezione d'urto** del processo considerato

A seguito di alcune considerazioni¹ possiamo ottenere la seguente relazione:

$$\frac{dN_{\text{eventi}}}{dt} = \phi N_{\text{target}} \sigma \quad [3.1]$$

Per analisi dimensionale σ dovrà avere le dimensioni di una superficie, quindi $[\sigma] = l^2$.

Con una *visione classica* potremmo associare quella che abbiamo definito come sezione d'urto alla superficie utile per ogni particella α del flusso incidente affinché il processo di scattering **possa** (quindi stiamo implicitamente definendo il processo come probabilistico) avvenire.

$\sigma(\theta \geq \tilde{\theta})$ Ci interessa ora calcolare la **sezione d'urto** necessaria affinché il processo di scattering causi una deflessione di un angolo $\theta \geq \tilde{\theta}$, dove $\tilde{\theta}$ è un angolo di riferimento².

$$\sigma(\theta \geq \tilde{\theta}) = \pi b^2(\theta = \tilde{\theta}) = \frac{\pi \rho^2}{\left[2 \tan \frac{\tilde{\theta}}{2}\right]^2} = \pi \left[\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 K} \right]^2 \frac{1}{4} \cot^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} \quad [3.2]$$

Volendo esprimere σ in termini della *costante di struttura fine*³ abbiamo:

$$\sigma(\theta \geq \tilde{\theta}) = \frac{\pi}{4} \left[\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hbar c}{\hbar c} \right]^2 \frac{1}{K^2} \cot^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} = \frac{\pi}{4} (zZ)^2 \alpha \left(\frac{\hbar c}{K} \right)^2 \cot^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} \quad [3.3]$$

3.1.2 Sezione d'urto differenziale

Poiché $\sigma = \pi b^2$, derivando rispetto a b e separando le quantità infinitesime abbiamo:

$$\frac{d\sigma}{db} = \frac{d}{db} (\pi b^2) = 2\pi b \quad [3.4]$$

Quindi:

$$d\sigma = 2\pi b db \quad [3.5]$$

¹Approfondire questo aspetto

²Ricorda l'angolo di deflessione è legato al parametro d'impatto tramite l'equazione 2.51

³Ricorda $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \simeq \frac{1}{137}$

Ma conoscere la sezione d'urto differenziale espressa in funzione del parametro d'urto b è poco utile, quindi tentiamo un **cambio di variabili** per riportare la *sezione d'urto differenziale in funzione dell'angolo di deflessione* θ . Sappiamo che:

$$\frac{db}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\rho}{2 \tan \frac{\theta}{2}} \right) = -\frac{\rho}{2 \tan^2 \frac{\theta}{2}} \frac{d}{d\theta} \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) = -\frac{\rho}{2 \tan^2 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\theta}{2} \quad [3.6]$$

Quindi abbiamo ottenuto la seguente relazione differenziale fra il parametro d'urto e l'angolo di deflessione:

$$db = -\frac{\rho}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta \quad [3.7]$$

Quindi possiamo concludere, sostituendo all'interno dell'equazione 3.5:

$$d\sigma = 2\pi b = 2\pi \frac{\rho}{2 \tan \frac{\theta}{2}} db = 2\pi \frac{\rho}{2 \tan \frac{\theta}{2}} \frac{\rho}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = \frac{\rho^2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}}{8 \sin^4 \frac{\theta}{2}} 2\pi d\theta \quad [3.8]$$

Ora tramite le formule di bisezione per seno e coseno possiamo riscrivere il numeratore come:

$$\cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{2} \quad [3.9]$$

e sostituendo in $d\sigma$ otteniamo:

$$d\sigma = \frac{\rho^2}{16 \sin^4 \frac{\theta}{2}} 2\pi \sin \theta d\theta \quad [3.10]$$

Osserviamo che $2\pi \sin \theta d\theta = d\Omega$ è l'**angolo solido di deflessione** infinitesimo, quindi:

$$d\sigma = \frac{\rho^2}{16 \sin^4 \frac{\theta}{2}} d\Omega \quad [3.11]$$

Da cui scriviamo:

Sezione d'urto differenziale su angolo solido

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\rho^2}{16 \sin^4 \frac{\theta}{2}}} \quad [3.12]$$

Scrivendo ρ in forma estesa (2.32) diventa:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16} (zZ)^2 \alpha^2 \left(\frac{\hbar c}{K} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{16} (zZ)^2 \alpha^2 \left[\frac{2m}{m^2 v^2} \right]^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad [3.13]$$

Nota (Divergenza della sezione d'urto). La sezione d'urto differenziale per scattering Rutherford, formulata considerando l'interazione coulombiana come unica forma d'interazione, in regime classico, e non considerando la carica del nucleo schermata dagli elettroni, presenta una divergenza per $\theta \rightarrow 0$.

Impulso trasferito L'impulso come grandezza vettoriale non è una quantità conservata, ma ne è conservato il modulo, ovvero $|\vec{p}_f| = |\vec{p}_i|$.

La quantità:

$$\vec{q} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = m(\vec{v}_f - \vec{v}_i) \quad [3.14a]$$

$$|\vec{q}| = 2mv \sin \frac{\theta}{2} \quad [3.14b]$$

mostrata in figura 3.1 è detta **impulso trasferito nel processo d'urto** e rappresenta la *variazione di impulso della particella scatterata, che è l'impulso assorbito dall'atomo scatterante*.

Con questa nuova definizione riprendiamo la sezione d'urto differenziale dall'equazione 3.13 e sostituiamo l'equazione 3.14b appena trovata:

Sezione d'urto differenziale di Rutherford

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = 4 (zZ)^2 \alpha^2 (\hbar c)^2 \frac{m^2}{q^4}} \quad [3.15]$$

Nota. Nell'ipotesi di atomo *non rinculante* c'è solo trasferimento di impulso, ma non c'è trasferimento di energia.

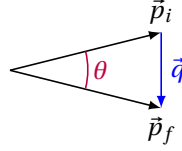


Figura 3.1: Impulso trasferito

3.1.3 Calcolo Quantistico della sezione d'urto

Il calcolo quantistico della sezione d'urto dello scattering Rutherford può essere effettuato utilizzando la *Regola d'oro di Fermi*, definita come segue:

Regola d'Oro di Fermi

$$d\omega_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} |T'_{if}|^2 \delta(E_i - E_f) dn_f \quad [3.16]$$

Dove $|i\rangle$ e $|f\rangle$ sono rispettivamente gli stati *iniziale* e *finale* del processo e $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}$ l'Hamiltoniana totale del sistema, definiamo le seguenti grandezze:

- $d\omega_{if}$: probabilità di transizione per unità di tempo (le dimensioni fisiche saranno $[s^{-1}]$);
- E_i, E_f : energie degli stati iniziale e finale;
- T'_{if} : elemento di matrice; $\langle f | \hat{H}_{\text{int}} | i \rangle$ dell'Hamiltoniana di interazione
- dn_f : # di stati finali accessibili per il sistema, ovvero⁴ $\rho(E_f) dE_f$;
- $\delta(E_f - E_i)$: delta di Dirac di **conservazione dell'energia**.

Definire stati iniziale e finale Supponiamo stati iniziale e finale *autostati dell'impulso* (stati ad impulso definito):

$$|i\rangle = |\vec{p}_i\rangle \quad [3.17a]$$

$$|f\rangle = |\vec{p}_f\rangle \quad [3.17b]$$

Inoltre sappiamo gli autostati dell'impulso essere rappresentati nella base degli *autostati della posizione* da **onde piane**, quindi abbiamo la forma seguente:

$$\langle \vec{x} | \vec{p}_i \rangle = A \exp \left\{ i \frac{\vec{p}_i \cdot \vec{x}}{\hbar} \right\} \quad [3.18a]$$

$$\langle \vec{x} | \vec{p}_f \rangle = A \exp \left\{ i \frac{\vec{p}_f \cdot \vec{x}}{\hbar} \right\} \quad [3.18b]$$

dove A rappresenta la *costante di normalizzazione delle onde piane*.

Presentiamo ora una procedura tipica in fisica delle particelle: fissiamo la normalizzazione della funzione d'onda introducendo un *volume di normalizzazione*.

Volume di normalizzazione La costante di normalizzazione può essere determinata in diversi modi. Uno di questi è introdurre il **volume di normalizzazione** V , ovvero il volume dello spazio tridimensionale all'interno del quale l'integrale del modulo quadro della funzione d'onda sia uguale a 1. Facciamo questo per semplificare i nostri calcoli, aspettandoci che il risultato finale sia indipendente dal volume di normalizzazione utilizzato⁵. Quindi affinché gli stati iniziale e finale siano normalizzati all'interno di tale volume di normalizzazione, ovvero che:

$$\langle \vec{p}_{i,f} | \vec{p}_{i,f} \rangle = 1 \rightarrow \int |\langle \vec{x} | \vec{p}_{i,f} \rangle|^2 d\vec{x} = 1 \quad [3.19]$$

⁴La grandezza $\rho(E_f)$ indica la densità di stati in funzione dell'energia e dE_f l'intervallo infinitesimo di energia

⁵Questo ci permette di determinare la normalizzazione degli stati, ma anche di calcolare il numero di stati finali accessibili dal sistema dn_f , poiché questa è una grandezza che dipende da come normalizziamo i nostri stati

Questo implica che il valore della costante A nelle equazioni 3.18 sia $A = \frac{1}{\sqrt{V}}$, per cui:

$$\langle \vec{x} | \vec{p}_i \rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp \left\{ i \frac{\vec{p}_i \cdot \vec{x}}{\hbar} \right\} \quad [3.20a]$$

$$\langle \vec{x} | \vec{p}_f \rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp \left\{ i \frac{\vec{p}_f \cdot \vec{x}}{\hbar} \right\} \quad [3.20b]$$

Nota. Dal punto di vista classico, una particella è identificata dalle 3 coordinate spaziali e dalle 3 coordinate di impulso (*spazio delle fasi classico*). Questo nel calcolo quantistico non vale, per cui diversi stati classici (nel limite del principio di indeterminazione) devono coincidere con un unico stato quantistico ($\Delta^3 x \Delta^3 p = h^3$). Quindi, avendo introdotto il *volume di normalizzazione*, possiamo dire che $\Delta^3 x = V$, quindi:

$$\Delta^3 p = \frac{h^3}{V} \quad [3.21]$$

La *densità dei possibili stati*:

$$\frac{dn_f}{dp} = \frac{V}{h^3} \quad [3.22a]$$

quindi in termini di \hbar :

$$\frac{dn_f}{dp} = \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} \quad [3.22b]$$

A questo punto possiamo andare a calcolare l'elemento di matrice T'_{if} , ricordando che \hat{H}_{int} è il *potenziale coulombiano* generato dal nucleo scatterante:

$$T'_{if} = \langle f | H_{\text{int}} | i \rangle = \int d^3 \vec{x} \int d^3 \vec{y} \langle f | \vec{x} \rangle \langle \vec{x} | H_{\text{int}} | \vec{y} \rangle \langle \vec{y} | i \rangle \quad [3.23]$$

poiché gli integrali sui proiettori $|\vec{x}\rangle \langle \vec{x}|$ e $|\vec{y}\rangle \langle \vec{y}|$ sono proprio l'identità. Poiché possiamo scrivere l'Hamiltoniana di interazione come (*interazione coulombiana*⁶ dipendente solo dalla posizione), scegliendo un sistema di riferimento in cui la particella che produce lo scattering è posta nell'origine:

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x}|} \quad [3.24]$$

dove chiaramente z è la carica della particella scatterata e Z la carica del nucleo che produce l'effetto di scattering. Quindi il termine $\langle \vec{x} | H_{\text{int}} | \vec{y} \rangle$ farà comparire una δ del tipo:

$$\langle \vec{x} | \hat{H}_{\text{int}} | \vec{y} \rangle = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x}|} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad [3.25]$$

La delta rimuoverà uno dei due integrali⁷, quindi continuiamo il calcolo dell'elemento di matrice riprendendo dall'equazione 3.23:

$$\begin{aligned} T'_{if} &= \frac{1}{V} \int d^3 \vec{x} \exp \left\{ -i \frac{\vec{p}_f \cdot \vec{x}}{\hbar} \right\} \hat{H}_{\text{int}}(\vec{x}) \exp \left\{ i \frac{\vec{p}_i \cdot \vec{x}}{\hbar} \right\} \\ &= \frac{1}{V} \int d^3 \vec{x} \exp \left\{ -i \frac{(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \cdot \vec{x}}{\hbar} \right\} \hat{H}_{\text{int}}(\vec{x}) \\ &= \frac{1}{V} \int d^3 \vec{x} \exp \left\{ -i \frac{(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \cdot \vec{x}}{\hbar} \right\} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x}|} \end{aligned} \quad [3.26]$$

ed esprimendo in termini della quantità vettoriale *impulso trasferito* definita dall'equazione 3.14a:

$$T'_{if} = \frac{1}{V} \int d^3 \vec{x} \exp \left\{ -i \frac{\vec{q} \cdot \vec{x}}{\hbar} \right\} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x}|} \quad [3.27]$$

⁶I potenziali di interazione che hanno andamento $\frac{1}{r}$ sono detti **potenziali a lungo raggio**

⁷Vedi proprietà della Delta di Dirac

Nota: possiamo osservare che questa quantità, a meno della costante di normalizzazione, è proporzionale alla **trasformata di Fourier** del potenziale di interazione con parametro della trasformazione definito dall'impulso trasferito. Questo ci dice che tanto maggiore è l'impulso trasferito, tanto più piccole saranno le strutture che si possono osservare dei potenziali che mediano una certa interazione (questo vale in generale, non solo per scattering Rutherford).

Per calcolare l'integrale dato dall'equazione 3.27 scegliamo un sistema di riferimento che vede il vettore \vec{q} diretto lungo l'asse \hat{z} e il nucleo scatterante posto nell'origine, come in figura:

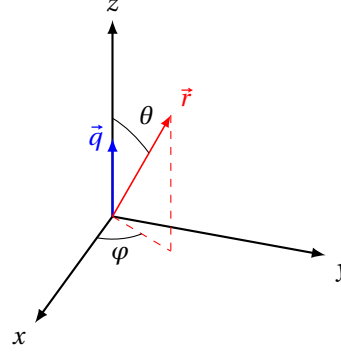


Figura 3.2: Scelta del sistema di riferimento

Per cui l'equazione 3.27 diventa (dove abbiamo utilizzato la notazione $r = |\vec{x}|$ e $q = |\vec{q}|$):

$$\begin{aligned} T'_{if} &= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^\infty dr r^2 \exp\left\{i \frac{qr \cos\theta}{\hbar}\right\} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \\ &= \frac{2\pi}{V} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^\infty dr r \exp\left\{i \frac{qr \cos\theta}{\hbar}\right\} \end{aligned} \quad [3.28a]$$

per semplificare la notazione introduciamo la variabile $k = \frac{q}{r}$, per cui integrando prima in $\cos\theta$:

$$\begin{aligned} T'_{if} &= \frac{2\pi}{V} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dr r \frac{1}{ikr} \{\exp[ikr] - \exp[-ikr]\} \\ &= \frac{2\pi}{V} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(ik)^2} \{\exp[ikr]_0^\infty + \exp[-ikr]_0^\infty\} \end{aligned} \quad [3.28b]$$

Ora, poiché $\exp[ikr]$ ed $\exp[-ikr]$ sono *soluzioni oscillanti non dumpate*, l'integrale non converge. Abbiamo il problema che non possiamo valutare esplicitamente l'integrale. Questo è legato al fatto che il modello considerato è poco realistico, nel senso che il potenziale di interazione considerato ha lo stesso comportamento in tutto lo spazio⁸. Nella realtà accade che ci sarà sempre una *lunghezza di taglio* oltre la quale il potenziale risulta schermato.

Taglio al potenziale di interazione Ripetiamo ora il calcolo dell'elemento introducendo un *taglio (dump)* esponenziale al potenziale di interazione coulombiano, che è un potenziale a corto raggio, per cui riscriviamo l'Hamiltoniana di interazione come:

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \exp[-\mu r] \quad [3.29]$$

dove μ può essere espresso in termini della lunghezza caratteristica r_t chiamata **raggio di taglio**:

$$\mu = \frac{1}{r_t} \quad [3.30]$$

Si utilizza il taglio esponenziale poiché:

⁸Non viene considerata, ad esempio, l'azione schermante degli elettroni atomici degli atomi scatteranti. Infatti, a distanze minori della dimensioni caratteristiche dell'atomo l'interazione si sente; a distanze maggiori, invece, gli elettroni atomici schermano la carica del nucleo e l'interazione è dumpata

- se $r \ll r_t$ l'Hamiltoniana di interazione descrive correttamente gli effetti coulombiani
- se $r \gg r_t$ il termine esponenziale sopprime l'interazione coulombiana

Torniamo al calcolo dell'integrale che descrive l'elemento di matrice T'_{if} , lasciato all'equazione 3.28a inserendo il termine aggiuntivo di taglio:

$$\begin{aligned}
 T'_{if} &= \frac{2\pi}{V} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^\infty dr r e^{-\mu r} e^{ikr \cos\theta} \\
 &= \frac{2\pi}{V} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dr \frac{r'}{ikr'} e^{-\mu r} \{e^{ikr} - e^{-ikr}\} \\
 &= \frac{2\pi}{V} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dr \frac{1}{ik} \{e^{-(\mu-ik)r} - e^{-(\mu+ik)r}\} \\
 &= \frac{2\pi}{V} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{ik} \left\{ \frac{1}{-(\mu-ik)} e^{-(\mu-ik)r} \Big|_0^\infty - \frac{1}{-(\mu+ik)} e^{-(\mu+ik)r} \Big|_0^\infty \right\}
 \end{aligned} \tag{3.31a}$$

e poiché gli esponenziali, dumpati dall'introduzione di μ , sono nulli se valutati all'infinito, l'espressione si riduce a:

$$\begin{aligned}
 T'_{if} &= -\frac{2\pi}{V} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{ik} \left\{ \frac{1}{-(\mu-ik)} - \frac{1}{-(\mu+ik)} \right\} \\
 &= \frac{2\pi}{V} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{ik} \left\{ \frac{\mu+ik-\mu+ik}{(\mu-ik)(\mu+ik)} \right\} \\
 &= \frac{2\pi}{V} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{\mu^2+k^2}
 \end{aligned} \tag{3.31b}$$

Quindi con il taglio esponenziale, e il parametro μ , siamo in grado di calcolare l'elemento di matrice:

$$\text{Potenziale di Yukawa } (r_t \text{ finita}) \quad \boxed{T'_{if} = \frac{4\pi}{V} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\mu^2+k^2}} \tag{3.32}$$

Nel caso *coulombiano* mandiamo all'infinito la lunghezza di taglio r_t e otteniamo:

$$T'_{if} \xrightarrow{r_t \rightarrow \infty \Rightarrow \mu \rightarrow 0} \frac{4\pi}{V} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{k^2} \tag{3.33}$$

Riprendendo la *Regola d'oro di Fermi* (equazione 3.16), l'espressione che si ottiene quando **rimuoviamo la lunghezza di taglio** r_t , ovvero quando $\mu \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
 d\omega_{if} &= \frac{2\pi}{\hbar} \left| T'_{if} \right|^2 \delta(E_i - E_f) dn_f \\
 &= \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{4\pi}{V} \right)^2 \left(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{k^4} \delta(E_i - E_f) dn_f
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Manipolando i termini per cercare un'espressione più compatta della formula, con α la *costante di struttura fine*:

$$\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hbar c}{\hbar c} = zZ\alpha\hbar c \tag{3.35}$$

in più, ricordando che $k = q/\hbar$, ritroviamo un risultato già ottenuto nel caso classico (equazione 3.15) nella dipendenza da potenziale coulombiano: in questo caso osserviamo che il tasso di transizione $d\omega_{if} \sim q^{-4}$. Riscriviamo la 3.34, ricordando che $k = \frac{q}{\hbar}$:

$$d\omega_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{4\pi}{V} \right)^2 (zZ)^2 \alpha^2 (\hbar c)^2 \frac{\hbar^4}{q^4} \delta(E_i - E_f) dn_f \tag{3.36}$$

Numero di stati finali accessibili dal sistema Ci rimane valutare il numero di stati finali accessibili dal sistema, ovvero la *conta degli stati* dn_f . Questo si può fare **imponendo le condizioni al bordo** oppure sfruttando il **principio di corrispondenza**. Definiamo il **volume dello spazio delle fasi classico occupato da uno stato quantistico**: uno stato quantistico, occupa nello spazio delle fasi classico, dato il *principio di indeterminazione di Heisenberg*, un volume dato da:

$$\Delta^3 p \Delta^3 x = h^3 \quad [3.37]$$

dove $\Delta^3 x = V$ è proprio il *volume di normalizzazione*, per cui fissando lo spazio fisico in questo modo:

$$\Delta^3 p = \frac{h^3}{V} \quad [3.38]$$

Per cui:

$$dn_f = \frac{d^3 p}{h^3} V \quad [3.39]$$

Quindi possiamo dire che il numero degli stati finali accessibili dal sistema ha una densità costante⁹ data da:

$$\frac{dn_f}{d^3 p} = \frac{V}{h^3} = \frac{V}{h^3 (2\pi)^3} \quad [3.40]$$

Tasso di transizione In conclusione, mettendo insieme tutti i risultati ricavati fino ad ora, possiamo dire che la *probabilità di transizione per unità di tempo* per il processo di *scattering Rutherford* è data da:

$$d\omega_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{4\pi}{V} \right)^2 \alpha^2 (\hbar c)^2 \frac{\hbar^4}{q^4} (zZ)^2 \delta(E_i - E_f) \frac{V}{\hbar^3 (2\pi)^3} d^3 p_f \quad [3.41]$$

osserviamo che la quantità $dd\omega_{if}$, ovvero la probabilità di transizione per unità di tempo, conserva la dipendenza dal volume di normalizzazione V . Questa quantità, però, non è l'osservabile fisico. Per questo motivo andiamo a calcolare la sezione d'urto.

Sezione d'urto quantistica per Scattering Rutherford La sezione d'urto di questo processo è legata alla probabilità di transizione per unità di tempo $d\omega_{if}$. La sezione d'urto ci dice quanto è probabile che un processo di interazione fra “proiettile” e “bersaglio” avvenga.

In particolare, in questo caso abbiamo che il numero di eventi per unità di tempo e per unità di tempo e unità di impulso dello stato finale:

$$\frac{dN_{\text{eventi}}}{dt d^3 p_f} = \frac{d\sigma}{d^3 p_f} \phi_p N_t \quad [3.42]$$

dove le quantità sono:

- ϕ_p il *flusso delle particelle (proiettili) incidenti*;
- N_t il *numero di bersagli illuminati dal fascio (numero di target)*;
- $\frac{d\sigma}{d^3 p_f}$ la *sezione d'urto differenziale* del processo definita in funzione dell'impulso della particella nello stato finale.

Ricordiamo che nel nostro caso particolare si considera un singolo processo (una particella su singolo bersaglio) all'interno di un volume di normalizzazione, per cui, all'interno di quest'ultimo possiamo dire che:

$$\begin{cases} N_t = 1 \\ \phi_p = nv = \frac{1}{V} v \\ \frac{dN_{\text{eventi}}}{dt d^3 p_f} = \frac{d\omega_{if}}{d^3 p_f} \end{cases} \quad [3.43]$$

⁹La densità degli stati finali è *uniforme* in p , poiché non c'è motivo che un impulso sia preferito rispetto ad un altro (*isotropia*)

Dove per il flusso ϕ_p : v indica la *velocità* della particella z incidente e n indica la “*number density*” di particelle z che collidono con il nucleo scatteratore e nel nostro caso risulta essere v/v perché consideriamo una particella all'interno del volume di normalizzazione.

Quindi possiamo scrivere che la sezione d'urto vale:

$$\frac{d\sigma}{d^3p_f} = \frac{dN_{\text{eventi}}}{dt d^3p_f} \frac{1}{\phi_{\text{proiettili}} N_t} = \frac{d\omega_{if}}{d^3p_f} \frac{V}{v} \quad [3.44]$$

e sfruttando l'equazione 3.41:

$$\frac{d\sigma}{d^3p_f} = \left[2\pi \left(\frac{4\pi}{\mathcal{V}} \right)^2 \alpha^2 (\hbar c)^2 \frac{1}{q^4} (zZ)^2 \delta(E_i - E_f) \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} \right] \frac{\mathcal{V}}{v} \quad [3.45]$$

quindi osserviamo che ora la sezione d'urto differenziale risulta del tutto indipendente dal volume di normalizzazione V e possiamo rielaborare e semplificare ulteriormente ottenendo:

$$\frac{d\sigma}{d^3p_f} = 4 (\hbar c)^2 \alpha^2 (zZ)^2 \delta(E_i - E_f) \frac{1}{v} \frac{1}{q^4} \quad [3.46]$$

In più, nel limite in cui il nucleo scatterante non rinculi, si avrebbe che l'impulso finale p_i coincide con l'impulso finale p_f e si può descrivere tutta la dinamica in termini dell'angolo solido Ω , poiché potendo scrivere:

$$d^3p_f = p_f^2 dp_f d\Omega \quad [3.47]$$

dove abbiamo integrato su tutto il range di impulsi, per ottenere un'espressione della sezione d'urto differenziale solo rispetto all'angolo solido. Segue che:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \int_0^\infty \frac{d\sigma}{d^3p_f} p_f^2 dp_f = \int_0^\infty 4 (\hbar c)^2 \alpha^2 (zZ)^2 \delta(E_i - E_f) \frac{1}{v} \frac{1}{q^4} p_f^2 dp_f \quad [3.48a]$$

Ora se stiamo parlando di una *particella incidente non relativistica*, possiamo riscrivere le quantità E_f e v in termini dell'impulso p_f , dove m è la massa della particella:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \int_0^\infty 4 (\hbar c)^2 \alpha^2 (zZ)^2 \delta\left(E_i - \frac{p_f^2}{2m}\right) \frac{m}{p_f} \frac{1}{q^4} p_f^2 dp_f \quad [3.48b]$$

Poiché la delta di Dirac di conservazione dell'energia è espressa in termini di p_f^2 , cambiamo variabile di integrazione con quest'ultima come segue:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \int_0^\infty \frac{2m^2}{2p_f} \frac{p_f^2}{p_f} 4 (\hbar c)^2 \alpha^2 (zZ)^2 \delta\left(E_i - \frac{p_f^2}{2m}\right) \frac{1}{q^4} d\left(\frac{p_f^2}{2m}\right) \quad [3.48c]$$

La Delta seleziona il modulo dell'impulso finale p_f in modo che sia uguale all'impulso iniziale p_i affinché l'energia rimanga conservata, per cui rimuove l'integrale e si ottiene il risultato finale:

Sezione d'urto differenziale di Rutherford

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = 4 (\hbar c)^2 \alpha^2 (zZ)^2 \frac{m^2}{q^4}} \quad [3.48d]$$

Possiamo osservare in più che, poiché la Delta di conservazione dell'energia fissa il modulo dell'impulso finale della particella scatterata, p_f , la quantità *impulso trasferito* q dipenderà esclusivamente dall'angolo di deflessione:

$$q = 2p \sin \frac{\theta}{2} \quad [3.49]$$

dove $p = |\vec{p}_i| = |\vec{p}_f|$.

Nota. Il risultato ottenuto dal calcolo quantistico corrisponde esattamente al risultato trovato dal calcolo classico!

Lezione 4

Lezione 2020-05-07

4.1 Scattering Rutherford (reprise)

Fino ad ora abbiamo lavorato in approssimazione di *nucleo puntiforme*. Questa approssimazione non è più adeguata se vogliamo andare a studiare gli effetti della dimensione finita del nucleo o studiare la dimensione del nucleo stesso. Quindi il quesito che ci poniamo è: *come varia l'espressione della sezione d'urto differenziale di Rutherford se rimuoviamo l'approssimazione di nucleo puntiforme?*

4.1.1 Sezione d'urto per nucleo *non* puntiforme

Consideriamo il nucleo atomico come una distribuzione estesa di carica per cui¹:

- $\rho(\vec{r})$: densità di carica $\longrightarrow \int \rho(\vec{r}) d^3r = Ze$
- $\rho_N(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{Ze}$: densità di carica normalizzata $\longrightarrow \int \rho_N(\vec{r}) d^3r = 1$

Questa modifica alle ipotesi di lavoro si ripercuote nell'espressione che descrive l'Hamiltoniana di interazione H_{int} .

Elemento di matrice per distribuzione estesa di carica In generale, l'elemento di matrice T_{if} si calcola come:

$$T_{if} = \langle f | H_{\text{int}} | i \rangle \quad [4.1]$$

che abbiamo già visto nel caso puntiforme nelle equazioni 3.24 e 3.27.

Nel caso *non* puntiforme avremo quindi che l'Hamiltoniana di interazione assume la seguente forma:

$$H_{\text{int}}(\vec{r}) = \frac{ze}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_N(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad [4.2]$$

dove l'integrale è valutato in *tutto lo spazio* e $|\vec{r} - \vec{r}'|$ indica la distanza fra il punto \vec{r} in cui vogliamo valutare l'interazione e il punto \vec{r}' dell'elemento infinitesimo di carica della distribuzione estesa che la genera. Quindi abbiamo l'espressione esplicita del *potenziale elettrostatico generato da una distribuzione arbitraria di carica*.

Quindi quando consideriamo la distribuzione estesa, otteniamo l'elemento di matrice T_{if} effettuando la trasformata di Fourier di 4.2. Per cui:

$$T_{if} = \frac{1}{V} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho_N(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \exp \left\{ i \frac{(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \cdot \vec{r}}{\hbar} \right\} \quad [4.3a]$$

Ma espressa in questo modo è di difficile risoluzione, quindi moltiplichiamo e dividiamo per $\exp \left\{ -i \frac{(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \cdot \vec{r}'}{\hbar} \right\}$ e otteniamo:

$$T_{if} = \frac{1}{V} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho_N(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \exp \left\{ i \frac{(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{\hbar} \right\} \exp \left\{ i \frac{(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \cdot \vec{r}'}{\hbar} \right\} \quad [4.3b]$$

¹ La notazione utilizzata prevede che \vec{r} sia il vettore e r il suo modulo

Osserviamo che ora la possiamo separare gli integrali nelle variabili \vec{r}' e $\vec{r}'' = \vec{r} - \vec{r}'$, come prodotto di due termini calcolabili in maniera indipendente, come segue:

$$T_{if} = \frac{1}{V} \frac{ZZe^2}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 r'' \frac{1}{r''} \exp \left\{ i \frac{(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \cdot \vec{r}''}{\hbar} \right\} \int d^3 r' \rho_N(\vec{r}') \exp \left\{ i \frac{(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \cdot \vec{r}'}{\hbar} \right\} \quad [4.3c]$$

In più il *primo dei due termini moltiplicativi*, inclusi i prefattori, costituiscono esattamente la trasformata di Fourier del potenziale puntiforme, per cui rappresenta l'elemento di matrice del potenziale puntiforme già calcolata in precedenza².

$$(T_{if})_{\text{punt}} = \frac{1}{V} \frac{ZZe^2}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 r'' \frac{1}{r''} \exp \left\{ i \frac{\vec{q} \cdot \vec{r}''}{\hbar} \right\} \quad [4.4]$$

Il *secondo termine moltiplicativo* rappresenta, invece, la trasformazione di Fourier della distribuzione normalizzata di carica, $\rho_N(\vec{r}')$, con parametro di trasformazione (quindi con vettore d'onda) $\frac{\vec{q}}{\hbar}$. Questo oggetto è una funzione complessa di \vec{q} ed assume il nome di *fattore di forma associato alla distribuzione di carica* considerata:

$$\textbf{Fattore di Forma} \quad F(\vec{q}) = \int d^3 r' \rho_N(\vec{r}') \exp \left\{ i \frac{\vec{q} \cdot \vec{r}'}{\hbar} \right\} \quad [4.5]$$

e rappresenta la modifica che si apporta all'elemento di matrice del caso puntiforme per passare alla distribuzione estesa di carica.

Nota. Il *fattore di forma* non è altro che la *trasformata di Fourier della distribuzione di carica* del nucleo scatteratore.

Nota. Qualora il sistema che si sta considerando fosse dotato di *simmetria sferica* la dipendenza di F da \vec{q} riguarderebbe solo il modulo, ovvero $F = F(\vec{q})$.

Alla luce di queste considerazioni possiamo scrivere l'elemento di matrice come segue:

$$T_{if} = (T_{if})_{\text{punt}} F(\vec{q}) \quad [4.6]$$

Sezione d'urto differenziale di Rutherford per distribuzione estesa di carica Tenendo conto di questa nuova espressione dell'elemento di matrice di interazione, omettendo tutti i passaggi che formalmente prevedono che si sostituisca quest'ultima nell'espressione della regola d'oro di Fermi (equazione 3.16) e che si proceda analogamente al caso puntiforme, scriviamo la *sezione d'urto differenziale per scattering Rutherford in ipotesi di nucleo come distribuzione estesa di carica*:

$$\textbf{Sezione d'urto differenziale per distribuzione estesa} \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{punt}} |F(\vec{q})|^2 \quad [4.7]$$

Nota. Attenzione, perché questo approccio non determina univocamente la funzione $F(\vec{q})$, ma ne determina solo il modulo; non abbiamo alcuna informazione sulla fase. Quindi, ad esempio, non possiamo utilizzare questo approccio per la ricostruzione del *fattore di forma* da dati sperimentali antitrasformando, perché di nuovo, abbiamo che i dati eventualmente ottenuti sarebbero legati solo al modulo di F .

4.1.2 Deviazione dal comportamento puntiforme

Studiando le deviazioni del *fattore di forma* dall'unità si possono valutare le dimensioni dei nuclei. Della definizione di *fattore di forma*, in ipotesi di simmetria sferica, distinguiamo i seguenti casi:

²Siamo passati ad utilizzare la quantità *impulso trasferito* \vec{q}

- $\left(\frac{q}{\hbar}\right) R_N \ll 1$ nelle regioni di spazio in cui la distribuzione normalizzata di carica è sensibilmente diversa da 0 si ha che:

$$F(q \simeq 0) = 1 \quad [4.8]$$

per cui gli urti che avvengono con un impulso trasferito piccolo si possono considerare urti fra particelle puntiformi. Quindi *non possiamo utilizzare urti con $q \simeq 0$ per studiare le dimensioni del nucleo.*

- $\left(\frac{q}{\hbar}\right) R_N \gtrsim 1$ nelle regioni di spazio in cui la distribuzione normalizzata di carica è sensibilmente diversa da 0 si ha che:

$$F(q) \neq 1 \quad [4.9]$$

Come già visto nell'equazione 3.14b che riportiamo nuovamente di seguito (in riferimento alla figura 3.1), se $p = |\vec{p}_i| = |\vec{p}_f|$:

$$|\vec{q}| = 2p \sin \frac{\theta}{2} \quad [4.10]$$

avremo che ad impulso fissato l'impulso trasferito dipenderà dall'angolo θ . Quindi al variare di tale angolo si registreranno diversi valori di q ; per cui avremo che, tramite il fattore di forma, l'angolo θ modula la sezione d'urto.

Ora, sapendo che i nuclei hanno dimensioni caratteristiche dell'ordine del fermi, possiamo chiederci quale sia la condizione sull'impulso trasferito q che causa le deviazioni che ci permettano di studiare le dimensioni del nucleo:

$$q \gtrsim \frac{\hbar c}{R_N c} \implies qc \gtrsim \frac{\hbar c}{R_N} \simeq \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{R_N [\text{fm}]} \quad [4.11]$$

quindi l'impulso trasferito per sondare strutture (nel nostro caso nuclei) dalle dimensioni dell'ordine di grandezza del *fermi* deve essere dell'ordine di centinaia di MeV/c.

4.2 Modelli per la distribuzione di carica nei nuclei

4.2.1 Sfera uniformemente carica

Definiamo una distribuzione di carica la cui densità (normalizzata) dipenda solo dalla distanza dal baricentro del nucleo come segue:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases} \quad [4.12]$$

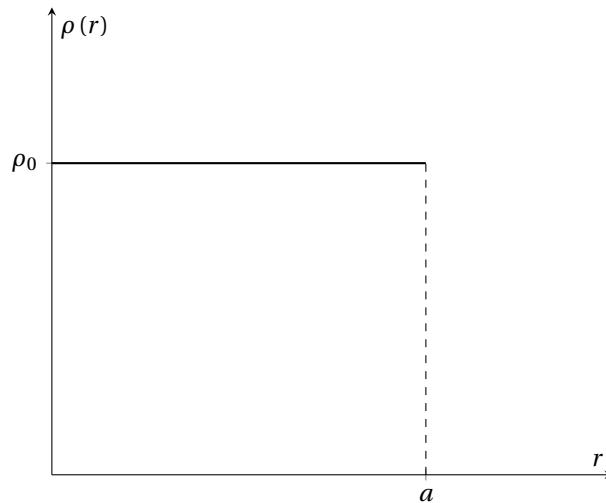


Figura 4.1: Modello di sfera uniformemente carica

questo modello dipende da un **unico parametro**, poiché:

$$\int \rho_N(r) d^3r = 1 \implies \rho_0 = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi a^3} \quad [4.13]$$

Quindi per questo semplice modello è possibile studiare analiticamente il *fattore di forma* e la dipendenza di quest'ultimo dal parametro che caratterizza il modello, che è il raggio a del nucleo.

Calcolo del fattore di forma Il calcolo del fattore di forma è possibile per via analitica e risulta relativamente semplice. Procediamo con il calcolo:

$$\begin{aligned} F(q) &= \int \rho_N(\vec{x}) \exp\left\{i \frac{\vec{q} \cdot \vec{x}}{\hbar}\right\} d^3x \\ &= \int_0^\infty dr r^2 \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi \rho(r) \exp\left\{i \frac{qr \cos\theta}{\hbar}\right\} \\ &= 2\pi \int_0^\infty dr r^2 \rho(r) \frac{\hbar}{iqr} \left\{ \exp\left[i \frac{qr}{\hbar}\right] - \exp\left[-i \frac{qr}{\hbar}\right] \right\} \end{aligned} \quad [4.14]$$

Fino ad ora il procedimento è generale perché non abbiamo fissato alcuna ipotesi, quindi varrà analogamente anche per il modello illustrato successivamente. Ora imponiamo dunque l'ipotesi di distribuzione sferica e uniforme di carica (equazione 4.12), ricordando il valore di ρ_0 (equazione 4.13):

$$\begin{aligned} F(q) &= 2\pi\rho_0 \int_0^a dr \frac{r^2 \hbar}{iqr} \left\{ \exp\left[i \frac{qr}{\hbar}\right] - \exp\left[-i \frac{qr}{\hbar}\right] \right\} \\ &= \frac{4\pi\rho_0 \hbar}{q} \int_0^a dr r \sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right) \\ &= \frac{4\pi\rho_0 \hbar}{q} \left(\frac{q}{\hbar}\right)^2 \int_0^a d\left(\frac{qr}{\hbar}\right) \frac{qr}{\hbar} \sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right) \end{aligned} \quad [4.15a]$$

Ed effettuando il cambio di variabile $y = \frac{qr}{\hbar}$, con il nuovo estremo d'integrazione $\tilde{y} = \frac{aq}{\hbar}$, e sostituendo il valore esplicito di ρ_0 :

$$F(q) = \frac{3\hbar^3}{a^3 q^3} \left(\frac{q}{\hbar}\right)^2 \int_0^{\tilde{y}} y \sin y dy \quad [4.15b]$$

Svolgendo l'integrale per parti³ otteniamo quanto segue:

$$F(q) = \frac{3\hbar^3}{a^3 q^3} \left(\frac{q}{\hbar}\right)^2 \left\{ [-y \cos y]_0^{\tilde{y}} + [\sin y]_0^{\tilde{y}} \right\} = \frac{3\hbar^3}{a^3 q^3} \left(\frac{q}{\hbar}\right)^2 [-\tilde{y} \cos \tilde{y} + \sin \tilde{y}] \quad [4.15c]$$

Quindi in conclusione possiamo riscrivere il **fattore di forma per il modello di sfera uniformemente carica** come segue⁴:

$$F(q^2) = \frac{3}{\tilde{y}} [\sin \tilde{y} - \tilde{y} \cos \tilde{y}] \quad [4.16]$$

Nota. Il fattore di forma così ottenuto si annulla per:

$$\sin \tilde{y} = \tilde{y} \cos \tilde{y} \quad [4.17]$$

Le soluzioni \tilde{y} di quest'equazione trascendente si possono trovare numericamente.

Studiamo il comportamento di questa funzione:

- $\tilde{y} \ll 1 \rightarrow q \ll \frac{\hbar}{a}$: sviluppiamo i termini di $F(q^2)$ in serie di Taylor:

$$\begin{cases} \sin \tilde{y} = \tilde{y} - \frac{\tilde{y}^3}{6} + \frac{\tilde{y}^5}{5!} + \dots \\ \cos \tilde{y} = 1 - \frac{\tilde{y}^2}{2} + \frac{\tilde{y}^4}{4!} + \dots \end{cases} \quad [4.18]$$

³ $\int y \sin y dy = -\int y \frac{d \cos y}{dy} dy = -y \cos y + \int \cos y dy = -y \cos y + \sin y$

⁴ In fisica delle particelle è più naturale esprimere le quantità in funzione di q^2 piuttosto che in funzione di q

per cui:

$$\begin{aligned}
 F(q^2) &= \frac{3}{\tilde{y}^3} \left[\left(\tilde{y} - \frac{\tilde{y}^3}{6} + \frac{\tilde{y}^5}{5!} + \dots \right) - \tilde{y} \left(1 - \frac{\tilde{y}^2}{2} + \frac{\tilde{y}^4}{4!} + \dots \right) \right] \\
 &= \frac{3}{\tilde{y}^3} \left[\tilde{y}^3 \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right) + \tilde{y}^5 \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{4!} \right) + \dots \right] \\
 &= \frac{3}{\tilde{y}^3} \tilde{y}^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{\tilde{y}^2}{5!} (5-1) + \dots \right] \\
 &= 1 - \frac{\tilde{y}^2}{10} + \dots
 \end{aligned} \tag{4.19a}$$

Quindi, in forma esplicita:

$$F(q^2) \simeq 1 - \frac{1}{10} \left(\frac{q}{a\hbar} \right)^2 \tag{4.19b}$$

Per cui nel momento in cui $q \ll \frac{\hbar}{a}$ il fattore di forma tende a 1 e possiamo assumere il nucleo come puntiforme.

Inoltre osserviamo che la derivata del fattore di forma rispetto alla variabile q^2 :

$$\frac{dF(q^2)}{dq^2} = -\frac{a^2}{10\hbar^2} \tag{4.20}$$

In **termini generali** si può dimostrare che esiste una relazione di proporzionalità fra il raggio di estensione di una distribuzione di carica (qualunque, purché dotata di simmetria sferica) e la derivata del suo fattore di forma rispetto a q^2 . Infatti, se definiamo il *raggio medio quadro della distribuzione*⁵⁶:

$$\langle r^2 \rangle = \int r^2 \rho_N(r) d^3r = \int r^2 \rho_N(r) 4\pi r^2 dr \tag{4.21}$$

per valori di $q \ll 1$ si ha:

$$F(q^2) \simeq 1 - \langle r^2 \rangle \frac{q^2}{6\hbar^2} \tag{4.22}$$

e la sua derivata:

$$\frac{dF(q^2)}{dq^2} = -\frac{\langle r^2 \rangle}{6\hbar^2} \tag{4.23}$$

Nota (Legge empirica per il raggio di un nucleo). Il raggio di un nucleo può essere stabilito tramite la legge empirica:

$$r \simeq 12 \text{ fm} \cdot A^{\frac{1}{3}}$$

dove $A = \#$ nucleoni del nucleo.

- $\tilde{y} \gtrsim 1$: dobbiamo studiare il comportamento della funzione completa. Rielaboriamo l'espressione del fattore di forma (equazione 4.16) come di seguito:

$$F(q^2) = \frac{3}{\tilde{y}^3} [\sin \tilde{y} - \tilde{y} \cos \tilde{y}] = \frac{3}{\tilde{y}} \cos \tilde{y} [\tan \tilde{y} - \tilde{y}] \tag{4.24}$$

4.2.2 Modello Saxon-Woods

La densità normalizzata di carica è descritta in questo modello, che risulta più elaborato del precedente, da una funzione del tipo:

$$\rho_N(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r-a}{d}\right)} \tag{4.25}$$

e anche in questo caso la costante ρ_0 non è un parametro libero, poiché è determinato dalla condizione di normalizzazione, mentre i **due parametri** a e d sono rispettivamente:

⁵Per la distribuzione sferica uniforme si riottiene il risultato espresso nell'equazione 4.19b, poiché $\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} a^2$

⁶Il prof. Capozzi espande il sin in serie di Taylor prima di integrare e poi scrive:

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{Ze} \int r^2 \rho_N(r) 4\pi r^2 dr$$

- *a* raggio nucleare ($a \propto A^{\frac{1}{3}}$);
- *d* thickness del nucleo, ovvero lo spessore della superficie del nucleo.

Nota (Nuclei leggeri). La distribuzione di Saxon-Woods è utilizzata, in quanto buona approssimazione, per nuclei piuttosto pesanti, mentre funziona poco bene per nuclei molto leggeri. In tal caso è più efficace una distribuzione di carica di tipo gaussiano.

4.3 Teoria delle perturbazioni indipendenti dal tempo

Consideriamo di nuovo la distribuzione di carica come una sfera uniformemente carica. Dalla teoria delle perturbazioni indipendenti dal tempo possiamo scrivere:

$$\Delta E_{1s} = \langle \psi_{1s} | V_{\text{cont.}}(r) - V_{\text{punt.}}(r) | \psi_{1s} \rangle \quad [4.26]$$

Dove il potenziale continuo è potenziale coulombiano della distribuzione sferica uniforme:

$$V_{\text{cont.}} = \begin{cases} -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R_N} \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R_N} \right) \right]^2, & r > R_N \\ -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} & \end{cases} \quad [4.27]$$

La funzione d'onda dello stato 1s per un atomo idrogenoide:

$$\psi_{1s} = \frac{Z}{\sqrt{4\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{Zr}{a_0}} \quad [4.28]$$

dove $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}$. Svolgendo l'integrale in 4.26:

$$\begin{aligned} \Delta E_{1s} &= \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R_N} \int_0^{R_N} dr r^2 \left(\frac{Z}{a_0} \right)^3 e^{-\frac{2Zr}{a_0}} \left[-\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R_N} \right)^2 + \frac{R_N}{r} \right] \\ &= \frac{Z^4 e^2 R_N^2}{\pi\epsilon_0} \int_0^1 dy e^{-\frac{2ZR_N}{a_0} y} \left[y - \frac{3}{2} y^2 + \frac{y^4}{2} \right] \\ &\simeq \left(\frac{2ZR_N}{a_0} \right)^2 \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} \frac{1}{10} \\ &= \left(\frac{2ZR_N}{a_0} \right)^2 \frac{Z^2 \alpha^2 m_e e^2}{10} \end{aligned} \quad [4.29]$$

dato che il rapporto $\frac{R_N}{a_0}$ fa sì che l'esponenziale sia approssimabile a 1. Notare che abbiamo sfruttato il cambio di variabile $y = \frac{r}{R_N}$. Abbiamo dunque che per lo stato 1s:

$$\frac{\Delta E_{1s}}{E_{1s}} \sim 10^{-4} \quad [4.30]$$

Si può far vedere che, dato che lo stato 2p non è in grado di distinguere fra il caso puntiforme e il caso continuo, allora:

$$\Delta E_{2p \rightarrow 1s} = \langle \psi_{2p} | \dots | \psi_{2p} \rangle - \langle \psi_{1s} | \dots | \psi_{1s} \rangle \simeq -\Delta E_{1s} \quad [4.31]$$

Consideriamo due isotopi A e A' di una stessa specie atomica:

$$\Delta E_{2p \rightarrow 1s}(A) - \Delta E_{2p \rightarrow 1s}(A') = \left(\frac{2ZR_0}{a_0} \right)^2 \frac{Z^2 \alpha^2 m_e e^2}{10} \left(A^{\frac{2}{3}} - A'^{\frac{2}{3}} \right) \quad [4.32]$$

possiamo quindi sfruttare questa quantità per approssimare la dimensione del nucleo effettuando una misura sperimentale delle differenze di energia e invertendo l'equazione rispetto a R_0 .

4.4 Muonic atoms

Illustriamo ora un metodo che considera atomi esotici, che al posto di elettroni presenta *muoni* ($m_\mu \simeq 106 \text{ MeV}/c^2$, $\tau_\mu \simeq 2 \times 10^{-6} \text{ sec}$). Ricordiamo:

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} \simeq 5.3 \times 10^{-11} \text{ cm} \quad [4.33]$$

dunque:

$$r_n = \frac{n^2}{Z} a_0, \quad E_n = -\frac{Z^2 \alpha^2 m c^2}{2n^2} \quad [4.34]$$

Per un atomo $Z = 82$, ad esempio:

$$r_1 = \frac{a_0 m_e}{Z m_\mu} \simeq 3.1 \text{ fm} < R_N \sim 7 \text{ fm} \quad [4.35]$$

Per $n = 2$:

$$\Delta E_{2s} = \langle \psi_{2s} | V_{\text{cont.}}(r) - V_{\text{cont.}}(r) | \psi_{2s} \rangle \quad [4.36]$$

dove in questo caso la funzione d'onda:

$$\psi_{2s}(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left(\frac{Z}{r_\mu} \right)^{\frac{3}{2}} \left(2 - \frac{Zr}{r_\mu} \right) e^{-\frac{Zr}{2r_\mu}} \quad [4.37]$$

con $r_\mu = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m e^2}$.

Nota. Per $Z = 6$ si ottiene $\Delta E_{2s} \simeq 40 \text{ eV}$.

$$E_{2s} = \frac{E_{1s}({}^1\text{H})}{4} \frac{m_\mu}{m_e} \simeq 251 \text{ keV} \quad [4.38]$$

4.5 Nuclei speculari

In questo metodo per stabilire le dimensioni dei nuclei si sfruttano *nuclei speculari*, ossia nuclei aventi *stesso numero di massa* (isotopi specifici) e *diverso numero atomico*, e.g. ${}^{39}_{20}\text{Ca}$ e ${}^{39}_{20}\text{K}$. L'energia coulombiana:

$$E_c = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 R_N} \quad [4.39]$$

La differenza di energia coulombiana, nel caso in cui i due atomi differiscano in numero atomico per un'unità:

$$\Delta E_c = \frac{3}{5} \frac{e^2 [Z^2 - (Z-1)^2]}{4\pi\epsilon_0 R_0 A^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{5} \frac{e^2 A^{\frac{2}{3}}}{4\pi\epsilon_0 R_0} \quad [4.40]$$

Lezione 5

2022-05-03

5.1 Sezioni d'urto per nuclei non puntiformi

5.1.1 Fattori di forma

Abbiamo visto che la *sezione d'urto differenziale* può essere scritta come:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{puntiforme}} |F(q^2)|^2 \quad [5.1]$$

dove q è il modulo dell'*impulso trasferito*¹ $\vec{q} = \vec{p}_i - \vec{p}_f$ e F il **fattore di forma**:

$$F(\vec{q}) = \int d^3r \rho_N(\vec{r}) \exp \left\{ i \frac{\vec{q} \cdot \vec{r}}{\hbar} \right\} \quad [5.2]$$

Ora, abbiamo che il *raggio del nucleo*:

$$R_N \simeq (1.2 \text{ fm}) A^{\frac{1}{3}} \quad [5.3]$$

quindi:

$$\frac{q R_N}{\hbar} \gtrsim 1 \quad [5.4]$$

allora:

$$q c \gtrsim \frac{\hbar c}{R_N} = \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{R_N} \quad [5.5]$$

e di conseguenza:

$$q \gtrsim \frac{200 \text{ MeV}/c}{R_N [\text{fm}]} \quad [5.6]$$

Quindi se vogliamo sondare oggetti della dimensione di un *fermi*, dobbiamo utilizzare sonde di impulso superiore a:

$$p \simeq q \gtrsim \frac{200 \text{ MeV}/c}{R_N [\text{fm}]} \quad [5.7]$$

Se consideriamo uno scattering di elettroni sui nuclei (se consideriamo invece uno scattering di *particelle alfa* su nuclei dovremmo tener conto anche delle interazioni forti), possiamo cominciare a vedere la dimensione finita del nucleo, per valori di impulso che fanno sì che gli *elettroni* siano **ultra-relativistici**:

$$p c \simeq 100 \text{ MeV} \gg m_e c^2 \simeq 0.5 \text{ MeV} \quad [5.8]$$

L'ipotesi che il nucleo non rinculi è ancora adeguata, perché l'energia cinetica della collisione, che è dell'ordine dei MeV, è inferiore rispetto all'energia a riposo della massa del centro scatteratore, che è dell'ordine dei GeV.

Questo vuol dire che la formula di Rutherford deve essere modificata per tener conto di effetti relativistici: *Scattering Rutherford* \rightarrow *Scattering Mott*.

¹Ricordiamo che in approssimazione di nucleo fisso, quindi *nucleo non rinculante*, $|\vec{q}| = 2p \sin \frac{\theta}{2}$ e $|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f| = p$

5.1.2 Scattering Mott

Ricordiamo la sezione d'urto differenziale dello *scattering Rutherford*:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} = \frac{Z^2 \alpha^2 \hbar^2 c^2}{4p^2 v^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad [5.9]$$

La sezione d'urto differenziale dello **scattering Mott** è ricavata a partire da quella dello *scattering Rutherford*, ma è adatta per il caso di **effetti ultra-relativistici**:

$$\text{Sezione d'urto diff. - Scattering Mott} \quad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} = \frac{Z^2 \alpha^2 \hbar^2 c^2}{4p^2 v^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \left\{ 1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\}$$

5.2 Proprietà dei Nuclei

Numero Atomico In un atomo neutro abbiamo che, indicando con Z il **numero atomico**, Z corrisponde alla *carica del nucleo*. In particolare Z indica il numero di protoni contenuti nel nucleo atomico e nel caso di atomi neutri questo numero corrisponde esattamente al numero di elettroni. Il numero atomico determina il comportamento chimico della sostanza.

Isotopi Studiando le masse atomiche si è scoperto che un determinato elemento chimico, quindi Z fissato, può presentarsi con masse atomiche differenti, quindi si parla di **isotopi**. Tali valori riscontrati sono sempre vicini ($\sim 0.1\%$) ad un multiplo intero di m_H . Tale massa è stata associata al diverso numero di neutroni nei nuclei.

Nella tavola periodica la massa atomica è indicata come la media delle masse atomiche dei vari isotopi.

Numero di Massa Atomica Il **numero di massa atomica**, indicato con A , è definito come l'intero più vicino al rapporto m_A/m_H , dove m_A rappresenta la *massa dell'atomo* considerato e m_H la *massa dell'idrogeno* (che quindi funge da riferimento).

In genere si utilizza la seguente notazione:

$${}^A_Z X \quad [5.10]$$

dove X rappresenta il *simbolo chimico* e come detto Z il *numero atomico* e A il *numero di massa atomica*. Il numero atomico e il numero di massa atomica determinano la struttura del nucleo:

- Z : *numero di protoni*;
- A : *numero di nucleoni*²
- $N = A - Z$: *numero di neutroni*

Nota. Notiamo che:

$$\begin{aligned} m_p c^2 &\simeq 1 \text{ GeV} \\ m_n c^2 &\simeq 1 \text{ GeV} \\ m_n c^2 - m_p c^2 &\simeq 1.29 \text{ MeV} \end{aligned}$$

in particolare:

$$\frac{m_n - m_p}{m_N} \simeq 10^{-3} \quad [5.11]$$

dove m_N è la *massa del nucleo*. In natura, il fatto che il neutrone sia più massivo del protone, permette il processo di decadimento, nel vuoto, del neutrone:

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad [5.12]$$

dove $\bar{\nu}_e$ è l'*antineutrino elettronico*. Il tempo caratteristico del decadimento del neutrone è $\tau \simeq 880 \text{ s}$.

Il processo inverso di decadimento del protone:

$$p \longrightarrow n + e^+ + \nu_e \quad [5.13]$$

non può avvenire spontaneamente per via della differenza di massa fra proton e neutrone.

²Termine utilizzato per indicare indifferentemente protoni e neutroni, costituenti il nucleo

5.2.1 Difetto di massa ed energia di legame

Consideriamo un nucleo (Z, A) :

$$m(Z, A) c^2 \neq Z m_p c^2 + (A - Z) m_n c^2 \quad [5.14]$$

Una particella libera (puntiforme o composta) ha una *relazione impulso-energia*:

$$E(\vec{p}) = \sqrt{c^2 |\vec{p}|^2 + m^2 c^4} \quad [5.15]$$

La massa di una particella equivale all'energia a riposo della particella nel sistema di riferimento in cui la particella ha impulso nullo:

$$m c^2 = E(\vec{p} = 0) \quad [5.16]$$

Questo è ovvio per sistemi puntiformi, ma non è ovvio per sistemi composti.

Esempio 5.2.2 (Nucleo di ${}^3\text{He}$). La massa dell'*elio* ${}^3\text{He}$ sarà:

$$m({}^3\text{He}) c^2 = E_{\text{tot}}(p_{\text{tot}} = 0) = m_p c^2 + m_p c^2 + m_n c^2 + T + V \neq m_p c^2 + m_p c^2 + m_n c^2 \quad [5.17]$$

dove T *energia cinetica* e V rappresenta l'*energia di interazione*. Tipicamente $T + V < 0 \sim \text{MeV}$ (la somma dei termini è negativa perché stiamo parlando di uno stato legato) e $m_p c^2 + m_p c^2 + m_n c^2 \sim \text{GeV}$.

L'energia cinetica del sistema si può scrivere come:

$$T = \frac{p_p^2}{2m_p} + \frac{p_p^2}{2m_p} + \frac{p_n^2}{2m_n} \quad [5.18]$$

Allora:

$$\Delta p_x \Delta x \gtrsim \hbar \quad [5.19]$$

dove:

$$\Delta p_x = \{\langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2\}^{1/2} = \langle p_x^2 \rangle^{1/2} \quad [5.20]$$

dato che $\langle p_x \rangle^2 = 0$. Considerando il fatto che le dimensioni fisiche del sistema (Δx) sono quelle delle dimensioni del nucleo, quindi dell'ordine del *fermi*:

$$\langle p_x^2 \rangle \gtrsim \frac{\hbar^2}{R_N^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\langle p_x^2 \rangle}{2m} \gtrsim \frac{\hbar^2 c^2}{2m c^2 R_N^2} \gtrsim \frac{20 \text{ MeV}}{(R_N [\text{fm}])^2} \quad [5.21]$$

Energia di legame del nucleo Tipicamente ci aspettiamo *difetti di massa dell'ordine del MeV* perché sono legati ai contributi associati da $T + V < 0 \simeq \text{MeV}$. Potremo scrivere che:

$$m(Z, A) c^2 = [Z m_p c^2 + (A - Z) m_n c^2] - B(Z, A) \quad [5.22]$$

dove $B(Z, A)$ rappresenta l'**energia di legame del nucleo**.

5.3 Radioattività - Decadimenti Nucleari

Fenomeno che riguarda esclusivamente i nuclei atomici. Un generico fenomeno di decadimento si indica con:

$$(Z, A) \rightarrow (Z + \Delta Z, A + \Delta A) + X \quad [5.23]$$

con $\Delta Z, \Delta A \in \mathbb{Z}$.

Storicamente i **decadimenti nucleari** sono raggruppati in tre classi principali, che riguardano tutti fenomeni di scala energetica del MeV (poiché stiamo considerando particelle di 1 MeV confinate in dimensioni spaziali della scala di 1 fm). Indichiamo con $(Z, A)^*$ uno stato eccitato di (Z, A) .

Nota (Conservazione del numero di nucleoni). In queste reazioni di decadimento il *numero di nucleoni* deve rimanere costante.

Tabella 5.1: Decadimenti di particelle

DEC.	TIPO DI INTERAZIONE	PARTICELLA PRODOTTA	REAZIONE
α	Interazioni forti + interazioni EM	α : fotoni	$(Z, A) \rightarrow (Z-2, A-4) + (2, 4)$
β^+	Interazioni deboli	β : nuclei di He^4	$(Z, A) \rightarrow (Z-1, A) + e^+ + \nu_e$
β^-	Interazioni deboli	β : nuclei di He^4	$(Z, A) \rightarrow (Z+1, A) + e^- + \bar{\nu}_e$
γ	Interazioni deboli	γ : elettrone/positrone	$(Z, A)^* \rightarrow (Z, A) + \gamma$

5.3.1 Legge di decadimento esponenziale

Indichiamo con ω la *probabilità di decadimento per unità di tempo*, ipotizzando che la *probabilità di decadimento sia costante nel tempo*. Quindi:

$$\frac{dP}{dt} = \omega = \frac{1}{\tau} \quad [5.24]$$

dove τ rappresenta il *tempo di vita medio*. Indicando con N il *numero di nuclei* della specie considerato:

$$dN = -\omega N dt \quad [5.25]$$

per cui:

$$\frac{dN}{dt} = -\omega N \quad [5.26]$$

Quindi otteniamo:

$$\text{Legge di decadimento esponenziale} \quad N(t) = N_0 e^{-\omega t} = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad [5.27]$$

dove $N_0 = N(t_0)$. Questa legge viene spesso espressa in termini del **tempo di dimezzamento** $t_{1/2}$, definito da:

$$\frac{N(t_{1/2})}{N_0} = \frac{1}{2} \quad [5.28]$$

quindi:

$$e^{-\omega t_{1/2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{t_{1/2}}{\tau}} = 2 \quad \Rightarrow \quad t_{1/2} = \tau \ln(2) \quad \Rightarrow \quad t_{1/2} \simeq 0.693\tau \quad [5.29]$$

Nota (Curie). ???

Nota (Becquerel). ???

Nota. La quantità misurata in un campione radioattivo non è N (*numero di nuclei*) ma l'attività del campione I (*numero di decadimenti al secondo nel campione*).

$$I = -\frac{dN}{dt} = \omega N \quad [5.30]$$

quindi la grandezza che viene effettivamente misurata:

$$I(t) = \omega N_0 e^{-\omega t} = I_0 e^{-\omega t} \quad [5.31]$$

Fino a ora abbiamo considerato il caso particolarmente semplice in cui il nucleo può avere *un unico modo di decadimento*. Realisticamente questo non accade, infatti un unico nucleo può avere diversi modi di decadimento.

5.3.2 Decadimenti multimodali

Consideriamo ora il caso in cui un unico atomo può avere *diversi modi di decadimento*:

$$\frac{dN}{dt} = -\omega_1 N - \omega_2 N = -\sum_{i=1}^2 \omega_i N \equiv -\omega N \quad [5.32]$$

dove $\omega = \omega_1 + \omega_2$. La *probabilità totale di decadimento* ω sarà chiaramente la somma delle probabilità di decadimento di ogni modo.

Questo implica che si sommino gli inversi delle vite medie per ogni modo di decadimento:

$$\frac{1}{\tau} = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\tau_i} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \quad [5.33]$$

dove $\tau = \frac{1}{\omega}$, $\tau_1 = \frac{1}{\omega_1}$ e $\tau_2 = \frac{1}{\omega_2}$.

In questo caso abbiamo che le **branching fraction**:

$$\begin{cases} f_1 = \frac{\omega_1}{\omega} \\ f_2 = \frac{\omega_2}{\omega} \end{cases} \Rightarrow \sum_i f_i = 1 \quad [5.34]$$

L'evoluzione temporale dei nuclei presenti nel campione:

$$N(t) = N(t=0) e^{(-\sum_{i=1}^2 \omega_i)t} = N(t=0) e^{-\omega t} \quad [5.35]$$

Allora le attività di decadimento 1 e 2 seguono le seguenti leggi esponenziali:

$$\begin{cases} I_1(t) = \omega_1 N(t) = \omega_1 N(t=0) e^{-\omega t} = (I_1)_0 e^{-\omega t} \\ I_2(t) = \omega_2 N(t) = \omega_2 N(t=0) e^{-\omega t} = (I_2)_0 e^{-\omega t} \end{cases} \quad [5.36]$$

5.3.3 Costruzione di Esperimenti

Supponiamo di voler trovare ω (quindi il tempo medio di decadimento) per una campione di una determinata specie atomica. Se il tempo di decadimento non è particolarmente lungo si può misurare:

$$N(t=t_1), \quad N(t=t_2), \quad \Rightarrow \quad \frac{N(t=t_1)}{N(t=t_2)} = e^{-\omega(t_1-t_2)} \quad \Rightarrow \quad \omega = -\frac{\ln \frac{N(t=t_1)}{N(t=t_2)}}{t_1 - t_2} \quad [5.37]$$

L'efficienza ϵ di un esperimento è data dal rapporto:

$$\epsilon = \frac{\# \text{ particelle rivelate}}{\# \text{ particelle emesse}} \quad [5.38]$$

Lezione 6

2022-05-05

6.1 Radioattività - Decadimenti Nucleari (reprise)

6.1.1 Decadimenti sequenziali

Si parla di *decadimenti sequenziali* quando un “nucleo padre” può produrre un “nucleo figlio” che è a sua volta instabile. Indicando con 1 il *nucleo padre* e con 2 il *nucleo figlio* e con ω_1 e ω_2 rispettivamente le *probabilità totali di decadimento per unità di tempo*:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\omega_1 N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} = -\frac{dN_1}{dt} - \omega_2 N_2 = \omega_1 N_1 - \omega_2 N_2 \end{cases} \quad [6.1]$$

Il nucleo figlio che decade, a sua volta produrrà un nucleo figlio che indichiamo con 3:

$$\begin{aligned} \frac{dN_3}{dt} &= - \left[\frac{dN_2}{dt} \right]_{2 \rightarrow 3} - \omega_3 N_3 = \omega_2 N_2 - \omega_3 N_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

e così via¹. Quindi:

$$N_2(t) = \frac{N_1(t=0)\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} (e^{-\omega_1 t} - e^{-\omega_2 t}) \quad [6.2]$$

e

$$N_3(t) = N_1(t=0)\omega_1\omega_2 \left[\frac{e^{-\omega_1 t}}{(\omega_2 - \omega_1)(\omega_3 - \omega_1)} + \frac{e^{-\omega_2 t}}{(\omega_3 - \omega_2)(\omega_1 - \omega_2)} + \frac{e^{-\omega_3 t}}{(\omega_1 - \omega_3)(\omega_2 - \omega_3)} \right] \quad [6.3]$$

La condizione di equilibrio del numero di particelle figlio N_2 è la condizione per cui la derivata temporale del numero di particelle diventa stazionaria:

$$\frac{dN_2}{dt} = -\omega_2 N_2 + \omega_1 N_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 N_2(t) = \omega_1 N_1(t) \quad [6.4]$$

da questo otteniamo la condizione:

Equilibrio secolare

$$N_2(t) = \frac{\omega_1}{\omega_2} N_1(t)$$

[6.5]

questa condizione di equilibrio è valida nel caso in cui:

$$t \gg t_2 = \frac{1}{\omega_2} \quad [6.6]$$

A sua volta vale anche per le particelle prodotte (eventualmente) dai decadimenti delle particelle figlio:

$$\frac{dN_3}{dt} = -\omega_3 N_3 + \omega_2 N_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_3(t) = \frac{\omega_2}{\omega_3} N_2(t) \quad [6.7]$$

¹ Potremmo avere anche altri decadimenti sequenziali!

6.1.2 Condizioni energetiche per i vari decadimenti

Decadimenti α

$$(Z, A) \rightarrow (Z-2, A-4) + (2, 4) \quad [6.8]$$

$$\begin{cases} (E_{\text{tot}})_{\text{ini}} = (E_{\text{tot}})_{\text{fin}} \\ (\vec{p}_{\text{tot}})_{\text{ini}} = (\vec{p}_{\text{tot}})_{\text{fin}} \end{cases} \quad [6.9]$$

invarianza per traslazioni spazio-temporali. Oltre a questo:

$$(\vec{J}_{\text{tot}})_{\text{ini}} = (\vec{J}_{\text{tot}})_{\text{fin}} \quad [6.10]$$

invarianza per rotazione.

Sistema di quiete della particella che decade Consideriamo il sistema di quiete delle particella che decade. In tale sistema di riferimento abbiamo:

$$\begin{cases} (E_{\text{tot}})_{\text{ini}} = m(Z, A) c^2 \\ (\vec{p}_{\text{tot}})_{\text{ini}} = 0 \end{cases} \quad [6.11]$$

L'energia totale e l'impulso finali delle particelle dovranno essere uguali alle quantità iniziali:

$$\begin{aligned} (E_{\text{tot}})_{\text{fin}} &= (E_{\text{tot}})_{\text{fin}} = m(Z-2, A-4) c^2 + m(2, 4) c^2 + T \\ (\vec{p}_{\text{tot}})_{\text{fin}} &= 0 \end{aligned}$$

Quindi:

$$m(Z, A) c^2 = m(Z-2, A-4) c^2 + m(2, 4) c^2 + T \quad [6.12]$$

dove $T \geq 0$ ha un valore minimo possibile che è 0. Affinché il decadimento α possa avvenire, si deve verificare la condizione:

$$m(Z, A) c^2 - [m(Z-2, A-4) c^2 + m(2, 4) c^2] \geq 0 \quad [6.13]$$

dove $m(Z, A) c^2$ è la massa iniziale ed il termine in parentesi quadre rappresenta la somma delle masse nello stato finale. Possiamo scrivere, dato il decadimento:

$$\begin{cases} m(Z, A) c^2 = z m_p c^2 + (A-Z) m_n c^2 - B(Z, A) \\ [\dots] = -(Z-2) m_p c^2 - (A-Z-2) m_n c^2 + B(Z-2, A-4) - 2 m_p c^2 - 2 m_n c^2 + B(2, 4) \end{cases} \quad [6.14]$$

quindi sostituendo nell'equazione precedente:

$$\begin{aligned} \cancel{z m_p c^2} + \cancel{(A-Z) m_n c^2} - B(Z, A) - (Z-2) m_p c^2 - (A-Z-2) m_n c^2 + \\ + B(Z-2, A-4) - 2 m_p c^2 - 2 m_n c^2 + B(2, 4) \geq 0 \end{aligned}$$

quindi:

$$-B(Z, A) + B(Z-2, A-4) + B(2, 4) \geq 0 \quad [6.15]$$

allora:

$$[B(Z-2, A-4) + B(2, 4)] - B(Z, A) \geq 0 \quad [6.16]$$

dove:

$$[B(Z-2, A-4) + B(2, 4)] \text{ Somma delle energie di legame dello stato finale } B(Z, A) \quad \text{Stato iniziale}$$

Quindi otteniamo dei decadimenti α solo se è soddisfatta questa condizione!

Nota. Questo è il motivo per cui non esistono in natura dei nuclei arbitrariamente grandi: ad un certo punto le dimensioni dei nuclei e il numero dei nucleoni diventa tale che è probabile il decadimento α e il nucleo è quindi instabile.

Decadimento β

Il decadimento β è un processo tale che $A = \text{const}$ e $Z \rightarrow Z \pm 1$:

$$\begin{cases} (Z, A) \rightarrow (Z+1, A) + e^- + \bar{\nu}_e & \text{decadimento } \beta^- \\ (Z, A) \rightarrow (Z-1, A) + e^+ + \nu_e & \text{decadimento } \beta^+ \\ e^- + (Z, A) \rightarrow (Z-1, A) + \nu_e & \text{electronic capture} \end{cases} \quad [6.17]$$

Nota (Conservazione del numero leptonico). Le particelle portano numero leptonico $+1$ e le antiparticelle portano numero leptonico -1 . Nei decadimenti deve valere la *conservazione del numero leptonico*.

Q-valore

$$\begin{cases} Q_{\beta^-} = [M(Z, A) - M(Z+1, A) - m_e] c^2 \\ Q_{\beta^+} = [M(Z, A) - M(Z-1, A) - m_e] c^2 \\ Q_{e.c.} = [M(Z, A) + m_e - M(Z-1, A)] c^2 \end{cases} \quad [6.18]$$

Nel sistema di riferimento del centro di massa, il *Q-valore* fornisce l'informazione dell'energia cinetica dello stato finale. Ad esempio, per il decadimento β^- :

$$M(Z, A) c^2 = M(Z+1, A) c^2 + m_e c^2 + T_N + T_e \quad [6.19]$$

Nel sistema del centro di massa, l'impulso:

$$0 = p_n + p_e \quad [6.20]$$

Quindi avremo che, data la differenza di massa fra il nucleo N e l'elettrone e :

$$T_e = \frac{p_e}{2m_e} \gg T_n = \frac{p_n}{2m_N} \quad [6.21]$$

Quindi potremmo trascurare T_N :

$$M(Z, A) c^2 = M(Z+1, A) c^2 + m_e c^2 + T_e \Rightarrow Q_{\beta^-} = T_e \quad [6.22]$$

Questo portò Pauli a ipotizzare la presenza dei *neutrini*, particelle neutre dalla massa estremamente piccola, che non conosciamo, ma che alla quale è stato posto un limite superiore: $m_\nu < 1 \text{ eV}$.

In termini di *masse atomiche* \mathcal{M} :

$$M(Z, A) = \mathcal{M}(Z, A) - m_e Z \quad [6.23]$$

il *Q-valore*:

$$\{Q_{\beta^-} = [\mathcal{M}(Z, A) - \mathcal{M}(Z+1, A)] Q_{\beta^+} = [\mathcal{M}(Z, A) - \mathcal{M}(Z-1, A)] Q_{e.c.} = [\mathcal{M}(Z, A) + m_e - \mathcal{M}(Z-1, A)]\} \quad [6.24]$$

Energia Per i decadimenti β otteniamo le seguenti *condizioni energetiche*:

$$\begin{cases} m(Z, A) c^2 - [m(Z+1, A) c^2 + m_e c^2 + \cancel{m_\nu c^2}] \geq 0 & \text{decadimento } \beta^+ \\ m(Z, A) c^2 - [m(Z-1, A) c^2 + m_e c^2 + \cancel{m_\nu c^2}] \geq 0 & \text{decadimento } \beta^- \\ [m_e c^2 + m(Z, A) c^2] - [m(Z-1, A) c^2 + \cancel{m_\nu c^2}] \geq 0 & e.c. \end{cases} \quad [6.25]$$

??

$$\begin{aligned} z m_p c^2 + (A-Z) m_n c^2 - B(Z, A) - (Z+1) m_p c^2 - (A-Z-1) m_n c^2 + B(Z+1, A) - m_e c^2 \\ = (m_n c^2 - m_p c^2 - m_e c^2) - B(Z, A) + B(Z+1, A) \geq 0 \end{aligned} \quad [6.26]$$

quindi per i tre processi:

- *decadimento β^+* , $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$:

$$B(Z+1, A) - B(Z, A) \geq m_p c^2 + m_e c^2 - m_n c^2 \simeq -1.3 + 0.5 \text{ MeV} \simeq -0.8 \text{ MeV} \quad [6.27]$$

- *decadimento β^-* , $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$:

$$B(Z-1, A) - B(Z, A) \geq m_p c^2 + m_e c^2 - m_n c^2 \simeq 1.3 + 0.8 \text{ MeV} \simeq 0.8 \text{ MeV} \quad [6.28]$$

- *electronic capture*, $e^- + p \rightarrow n + \nu_e$:

$$B(Z-1, A) - B(Z, A) \geq m_n c^2 - m_p c^2 - m_e c^2 = 1.3 - \text{MeV} \quad [6.29]$$

6.2 Modello standard delle interazioni fondamentali

Tutti i fenomeni fisici, secondo questo modello, sono riconducibili ad un certo numero di **particelle elementari**, che interagiscono fra di loro grazie ad un certo numero di **interazioni fondamentali**. Secondo il **modello standard delle interazioni fondamentali** le interazioni fondamentali sono:

- *interazione gravitazionale*;
- *interazione elettromagnetica*;
- *interazione forte*;
- *interazione debole*.

Nei processi microscopici possiamo considerare trascurabile l'interazione gravitazionale.

Interazioni deboli Le *interazioni deboli* sono mediate da ...

Interazioni forti Le *interazioni forti* sono mediate da **gluoni**...

I **mediatori delle interazioni** sono particelle con spin 1, mentre le **particelle fondamentali** sono particelle con spin $\frac{1}{2}$.

Particelle fondamentali Le particelle fondamentali sono particelle a spin $\frac{1}{2}$ si distinguono in:

- **Leptoni** (*interazioni elettromagnetiche + interazioni deboli*), divisi in 3 famiglie:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \quad (\nu_\mu) \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \theta^- \end{pmatrix} \quad + \text{antiparticelle} \quad [6.30]$$

I *leptoni* hanno carica intera: $Q = 0$, $Q = -1$;

- **Quarks** (*interazioni elettromagnetiche + interazioni deboli + interazioni forti*)

$$\begin{pmatrix} \mu \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \quad [6.31]$$

I *quarks* hanno carica frazionaria: $Q = \frac{2}{3}$, $Q = -\frac{1}{3}$: per questo motivo *in natura non si osservano quark liberi*.

$$\begin{cases} \text{Mesoni} - q\bar{q} \\ \text{Barioni (Anti-Barioni)} - qq\bar{q}(\bar{q}q\bar{q}) \end{cases} \quad [6.32]$$

dove abbiamo indicato con q i *quarks* e con \bar{q} gli *anti-quarks*. Ad esempio, i *barioni più leggeri* sono quelli che osserviamo in natura:

$$\begin{aligned} p &= (\mu\mu d) & n &= (\mu d d) \\ \pi^+ &= (\mu\bar{d}) & \pi^- &= (d\bar{\mu}) \end{aligned}$$

6.2.1 Leggi di conservazione

$Q = \text{carica}$

$$B = \frac{1}{3} \{N(q) - N(\bar{q})\} = \text{numero barionico}$$

$$L = \{N(l) - N(\bar{l})\} = \text{numero leptonico}$$

$$L_\alpha = \{N(l_\alpha) - N(\bar{l}_\alpha)\} = \text{numero leptonico di famiglia}$$

Lezione 7

2022-05-10

7.1 Modello standard (reprise)

7.1.1 Cinematica del decadimento α

Indichiamo con D la *particella figlia* (*daughter*). Dato che $\vec{p}_{\text{tot}} = 0$, dalla *conservazione dell'impulso*:

$$\vec{p}_D + \vec{p}_\alpha = 0 \quad [7.1]$$

dove quindi:

$$|\vec{p}_D| = |\vec{p}_\alpha| = p \quad [7.2]$$

Uniamo la conservazione dell'energia (siamo in un regime di particelle non relativistiche):

$$m(Z-2, A-4)c^2 + m(2, 4)c^2 + \frac{p^2}{2m_D} + \frac{p^2}{2m_\alpha} = m(A, Z)c^2 \quad [7.3]$$

dove il primo membro rappresenta l'*energia dello stato finale* e il secondo membro rappresenta l'*energia dello stato iniziale*.

Quindi:

$$Q_\alpha = \frac{p^2}{2m_D} + \frac{p^2}{2m_\alpha} = \frac{p^2}{2} \left\{ \frac{1}{m_D} + \frac{1}{m_\alpha} \right\} = \frac{p^2}{2} \left\{ \frac{m_D + m_\alpha}{m_D m_\alpha} \right\} = \frac{p^2}{2\mu} \quad [7.4]$$

dove μ rappresenta la *massa ridotta del sistema*. Quindi l'impulso finale delle due particelle sarà in modulo:

$$p^2 = 2\mu Q_\alpha \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt{2\mu Q_\alpha} \quad [7.5]$$

La ripartizione di energia fra le particelle D e α , invece:

$$\begin{cases} T_D = \frac{\mu}{m_D} Q_\alpha \\ T_\alpha = \frac{2\mu}{2m_\alpha} Q_\alpha \end{cases} \quad [7.6]$$

7.1.2 Cinematica del decadimento β

Esempio 7.1.3 (Esercizio per parziale). Consideriamo un fascio incidente di 5 \AA di elettroni ultrarelativistici (questo vuol dire che si è in regime di *scattering Mott*) di impulso $q_e = 700\text{ MeV}/c$, su una *targhetta di calcio* ^{40}Ca di densità $\rho = 0.12\text{ g/cm}^3$. ??? $S = 20\text{ cm}^2$, $R = 1\text{ m}$.

Formula empirica che fornisce il raggio di un nucleo, data la sua massa atomica:

$$R_N = (118A^{1/3} - 0.48)\text{ fm} \quad [7.7]$$

$$\frac{dN_e}{dt} = \frac{dN_e}{dt d\Omega} \Delta\Omega = \phi_e N_T \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{S}{R^2} = \frac{dN_i}{dt} \frac{N_T}{S'} \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{S}{R^2} \quad [7.8]$$

$$\Delta\Omega = \frac{S}{R^2} \quad [7.9]$$

ϕ_e rappresenta il *flusso di elettroni*, quindi indicando con N_i il numero di elettroni incidenti:

$$\phi_e = \frac{dN_i}{dt} \frac{1}{S'} \quad [7.10]$$

con m_a l'unità di massa atomica:

$$\rho = \frac{m_a N_T}{S'} = ??? \quad [7.11]$$

Quindi, con I la corrente incidente e e la carica dell'elettrone:

$$\frac{dN_e}{dt} = \frac{dN_e}{dt} \frac{\rho}{Am_a} \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{S}{R^2} = \frac{I}{e} \frac{\rho}{Am_a} \frac{S}{R^2} \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad [7.12]$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} |F(q)|^2 \quad [7.13]$$

dove la *sezione d'urto di Mott* vale:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} = \frac{Z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{4 (pc)^2 \sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)} \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad [7.14]$$

A questo punto resta da calcolare il *fattore di forma* per una distribuzione sferica uniforme:

$$F(q^2) = \frac{3}{x^3} (\sin x - x \cos x) \quad [7.15]$$

dove $x = \frac{qR_N}{\hbar}$, con $q = 2p \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)$. Questo perché possiamo considerare l'energia assorbita dal rinculo del nucleo trascurabile, quindi assumendo $|\vec{p}_{\text{in}}| = |\vec{p}_{\text{fin}}| = p$, l'*impulso trasferito*, che vettorialmente scriviamo $\vec{q} = \vec{p}_{\text{fin}} - \vec{p}_{\text{in}}$, vale in modulo:

$$|\vec{q}| = 2p \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad [7.16]$$

Lezione 8

2022-05-17

8.1 Formula semi-empirica di massa (formula di Weizsäcker)

8.1.1 Nuclei stabili

8.1.2 Energia di legame dei nuclei

L'energia di legame per nucleone è data da:

$$\epsilon = B \quad [8.1]$$

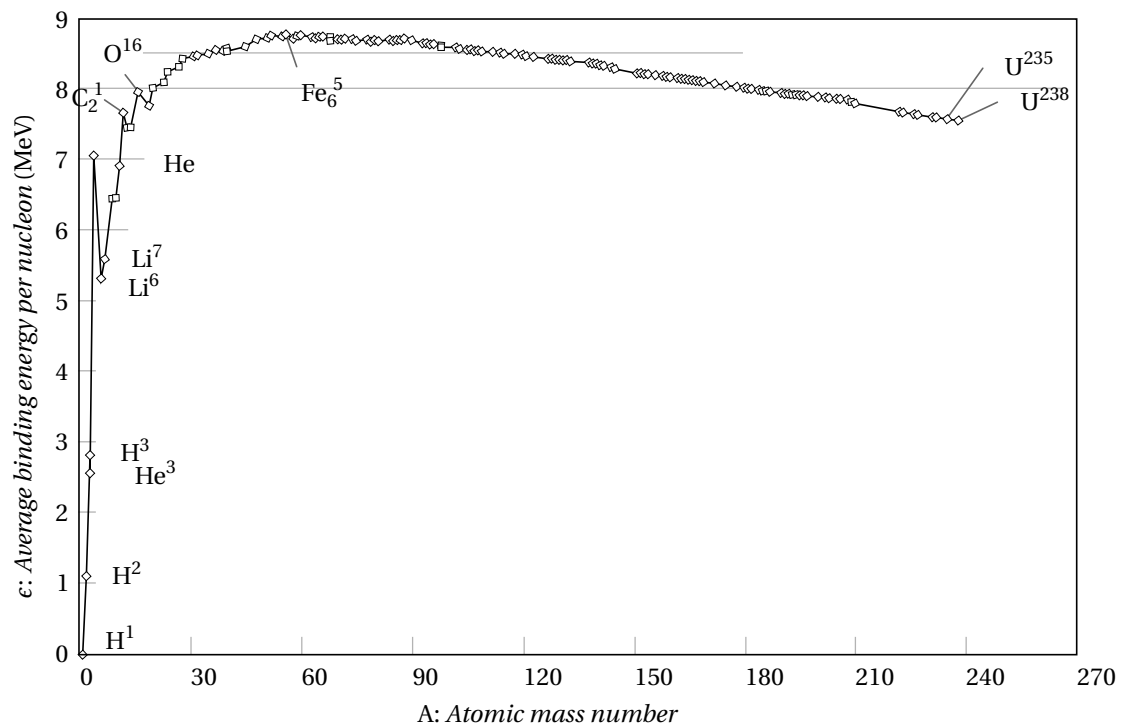


Figura 8.1: Energia di legame per nucleone

Nota. Questa formula si può pensare in analogia con una *goccia di liquido*. Infatti un liquido è un fluido con una *densità fissata*.

Ricordiamo che il *raggio* nucleare può essere approssimato da:

$$R_N \simeq 12 \text{ fm} A^{1/3} \quad [8.2]$$

Quindi il *volume* occupato da un nucleo è circa:

$$V_N \simeq \frac{4}{3} \pi R_N^3 = \frac{4}{3} \pi (12 \text{ fm} A) \quad [8.3]$$

Quindi abbiamo che:

$$\frac{dN}{dV} = \frac{A}{V_N} = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi(12\text{fm})^3 A} \quad [8.4]$$

Penseremo il potenziale d'interazione fra nucleoni all'interno di un nucleo come il potenziale d'interazione fra particelle che costituiscono un liquido¹.

$$V_{\text{coulomb}} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad [8.5]$$

$$\text{Potenziale di Yukawa} \quad V = \frac{g}{r} e^{-\frac{r}{r_T}} \quad [8.6]$$

g è la *costante di accoppiamento* dell'interazione e r_T rappresenta la *lunghezza di taglio* dell'interazione (μ il suo inverso).

Nota. Il pione π è il mediatore dell'interazione forte nucleare.

Nota. La costante μ ha le dimensioni di una lunghezza e si può scrivere come: $\mu = \frac{mc^2}{\hbar c}$.

Nota. La carica nelle *interazioni forti* si chiama **colore**. L'effetto delle interazioni forti si osserva quando le particelle sono portate a distanze paragonabili con le loro dimensioni lineari.

$$B \sim \left(\frac{dN}{dV} \frac{4}{3} \pi r_T^3 \right) \epsilon_{\text{in}} A \quad [8.7]$$

dove $\frac{dN}{dV} \frac{4}{3} \pi r_T^3 = N_{\text{???}}$ Quindi se dividiamo per A :

$$\epsilon \equiv \frac{B}{A} \sim \left(\frac{dN}{dV} \frac{4}{3} \pi r_T^3 \right) \epsilon_{\text{in}} \frac{A}{A} = \text{const} \quad [8.8]$$

Abbiamo il *termine di volume*:

$$B = a_V A \quad [8.9]$$

quindi:

$$\epsilon = \frac{B}{A} = a_V \quad [8.10]$$

Termine di superficie

Introduciamo ora una *correzione*. Fino ad ora abbiamo assunto che tutti i nucleoni interagiscono fra loro allo stesso modo. È facile capire però che un nucleone alla superficie del nucleo interagisce con un numero minore di altri nucleoni². Il raggio e la superficie del nucleo sono rispettivamente proporzionali ad A :

$$R_N \propto A^{1/3} \quad \Rightarrow \quad S_N \propto A^{2/3} \quad [8.11]$$

Il numero di nucleoni contenuti all'interno di un *guscio superficiale di raggio* r_T , quindi:

$$N_n^{\text{superf.}} \sim \frac{dN}{dV} S_N r_T \propto A^{2/3} \quad [8.12]$$

(ricorda che $\frac{dN}{dV}$ rappresenta la densità di nucleoni nel nucleo). Quindi:

$$\begin{aligned} B &= a_V A - a_S A^{2/3} \\ \Rightarrow \epsilon &= \frac{B}{A} = a_V - a_S A^{-1/3} \end{aligned}$$

¹Il prof. disegna il grafico del *potenziale di Lennard-Jones*

²Oltrepassata la superficie del nucleo non troviamo ulteriori nucleoni!

Termine Coulombiano Se fosse solo così, però, in natura dovrebbero essere privilegiati i nuclei ad A molto grande. L'interazione forte rispetterà quanto appena detto, per per l'interazione Coulombiana, che è un'interazione a lungo raggio, non possiamo dire che i protoni (che sono gli unici che risentono dell'effetto coulombiano) interagiscano solo con i primi vicini. Il *potenziale d'interazione coulombiana totale* fra le coppie di protoni in un nucleo sarà:

$$(V_{\text{coulomb}})_{\text{tot}} \simeq \frac{Z(Z-1)}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_N} \quad [8.13]$$

dove $Z(Z-1)/2$ è il numero di coppie di protoni all'interno del nucleo. In termini della costante di struttura fine α :

$$(V_{\text{coulomb}})_{\text{tot}} \simeq \frac{Z(Z-1)}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hbar c}{\hbar c} \frac{1}{R_N} = \frac{Z(Z-1)}{2} \frac{\alpha (\hbar c)}{R_N} \quad [8.14]$$

Chiaramente questa è una stima approssimata, poiché per avere una stima più accurata dovremmo almeno avere informazioni sulla distribuzione dei protoni all'interno del nucleo.

Detto questo, quindi, possiamo scrivere che l'energia di legame per nucleone diventa:

$$B = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad [8.15]$$

Quindi otteniamo:

$$\epsilon = \frac{B}{A} = a_V - a_S A^{-1/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{4/3}} \quad [8.16]$$

Quindi possiamo dire che ad alti valori di A , la decrescita dell'energia di legame per nucleone è dovuta dalla **repulsione coulombiana** che diventa prevalente. Per questo motivo *non possiamo avere nuclei con numero arbitrario di nucleoni* (oltre certe soglie, infatti, i nuclei cominciano a fare fissione).

Nota. Attenzione! Mancano delle considerazioni, perché così facendo avremmo che *i nuclei più fortemente legati sarebbero quelli privi di protoni!*

Termine di Asimmetria

La natura sceglie $Z = N$, perché *neutroni e protoni sono fermioni*, quindi non possiamo porli tutti nello stesso livello di energia! Nella disposizione nei livelli energetici dovremo soddisfare quindi il *principio di esclusione di Pauli*.

Descriviamo il nucleo come una buca di potenziale di volume V ; la **densità di stati nello spazio delle fasi**:

$$\frac{d^3 n_{\text{stati}}}{d^3 p} = \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} \quad [8.17]$$

Nota. Il volume minimo occupato da una particella quantistica nello spazio delle fasi si ottiene dal *principio d'indeterminazione*.

Lo stato di *minima energia* si ottiene occupando tutti gli stati di energia più bassa, *compatibilmente con il principio di esclusione di Pauli*.

$$Z = N_p = 2 \int_{|\vec{p}| \leq p_{F,p}} d^3 p \frac{d^3 n_{\text{stati}}}{d^3 p} = 2 \int_0^{p_{F,p}} 4\pi p^2 \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} dp = \frac{8\pi}{3} p_{F,p}^3 \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} \quad [8.18]$$

$$A - Z \equiv N_n = 2 \int_0^{p_{F,n}} 4\pi p^2 \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} dp = \frac{8\pi}{3} p_{F,n}^3 \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} = \frac{V p_{F,n}^3}{3\pi^2 \hbar^3} \quad [8.19]$$

dove $p_{F,p}$ e $p_{F,n}$ sono gli **impulsi di fermi** relativi a protoni e neutroni. Le energie saranno³:

$$E_p = 2 \int_{|\vec{p}| \leq p_{F,p}} d^3 p \frac{d^3 n_{\text{stati}}}{d^3 p} \frac{p^2}{2m_p} = 2 \int_0^{p_{F,p}} \frac{4\pi p^4}{2m_p} \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} dp = \frac{8\pi}{5} \frac{p_{F,p}^5}{2m_p} \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} \quad [8.20]$$

$$E_n = 2 \int_0^{p_{F,n}} \frac{4\pi p^4}{2m_n} \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} dp = \frac{8\pi}{5} \frac{p_{F,n}^5}{2m_n} \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} \quad [8.21]$$

³Nel calcolo abbiamo assunto la distribuzione degli impulsi isotropa, per cui si può sostituire $d^3 p = 4\pi p^2 dp$

L'energia cinetica totale è data da:

$$E_{\text{tot}} = E_p + E_n = \frac{8\pi}{5} \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} \frac{1}{2m_n} \left[p_{E,p}^5 + p_{E,n}^5 \right] \quad [8.22]$$

ricordando che $m_p \simeq m_n \simeq m_N \simeq 1 \text{ GeV}/c^2$.

Lezione 9

2022-05-19

9.1 Formula semi-empirica di massa (reprise)

9.1.1 Nuclei stabili

Consideriamo che l'*impulso di fermi* di protoni e neutroni è rispettivamente:

$$p_{F,p}^3 = Z \left\{ \frac{8}{3} \pi \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} \right\}^{-1} \quad [9.1]$$

$$p_{F,n}^3 = (A - Z) \left\{ \frac{8}{3} \pi \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} \right\}^{-1} \quad [9.2]$$

Nota. Per nuclei tali che $Z = N = \frac{A}{2}$ abbiamo che l'*impulso di fermi*:

$$p_F \equiv p_{F,n} \equiv p_{F,p} = \left(\frac{A}{2} \frac{3\pi^2 \hbar^3}{V} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{A}{2} \frac{3\pi^2 \hbar^3}{\frac{4}{3}\pi R_0^3 A} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{\hbar}{R_0} \simeq 250 \text{ MeV}/c \quad [9.3]$$

Otteniamo dunque che l'*energia totale*:

$$E_{\text{tot}} = \frac{8\pi}{5} \frac{V}{2m_N} \frac{1}{(2\pi)^3 \hbar^3} \left\{ \frac{8}{3} \pi \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} \right\}^{-5/3} [Z^{5/3} + (A - Z)^{5/3}] \quad [9.4]$$

dove abbiamo confuso le masse di protone e neutrone con la *massa del generico nucleone* m_N . Quindi:

$$E_{\text{tot}} = K \frac{(2\pi)^3 \hbar^2}{2m_N} \frac{1}{V^{2/3}} \{Z^{5/3} + (A - Z)^{5/3}\} \quad [9.5]$$

quindi, raccogliendo ulteriori costanti:

$$E_{\text{tot}} = \frac{C}{A^{2/3}} \{Z^{5/3} + (A - Z)^{5/3}\} \quad [9.6]$$

Calcoliamo la derivata di E_{tot} rispetto a Z , ottenendo il minimo (*estremale*) dell'energia cinetica in funzione di A :

$$\frac{\partial E_{\text{tot}}}{\partial Z} = \frac{5}{3} \frac{C}{A^{2/3}} \{Z^{2/3} + (A - Z)^{2/3}\} \quad [9.7]$$

quindi:

$$\frac{\partial E_{\text{tot}}}{\partial Z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z = \frac{A}{2}} \quad [9.8]$$

Sostituendo nell'espressione dell'energia totale, otteniamo l'energia *totale minima*:

$$(E_{\text{tot}})_{\text{min}} = E_{\text{tot}} \left(Z = \frac{A}{2}, A \right) = \frac{C}{A^{2/3}} \left\{ \left(\frac{A}{2} \right)^{5/3} + \left(\frac{A}{2} \right)^{5/3} \right\} \propto A \quad [9.9]$$

che *contribuisce al termine di volume*.

Calcoliamo la derivata seconda:

$$\frac{\partial^2 E_{\text{tot}}}{\partial Z^2} = \frac{10}{9} \frac{C}{A^{2/3}} \{Z^{-1/3} + (A - Z)^{-1/3}\} \quad [9.10]$$

quindi:

$$\frac{\partial^2 E_{\text{tot}}}{\partial Z^2} \left(Z = \frac{A}{2}, A \right) = \frac{10}{9} \frac{C}{A^{2/3}} \left\{ \left(\frac{A}{2} \right)^{-1/3} + \left(\frac{A}{2} \right)^{-1/3} \right\} \propto \frac{1}{A} \quad [9.11]$$

In conclusione, quindi:

$$E_{\text{tot}}(Z, A) \simeq KA + \frac{D}{A} \left(Z - \frac{A}{2} \right)^2 \quad [9.12]$$

dove KA viene riassorbito dal termine di volume e $\frac{D}{A} \left(Z - \frac{A}{2} \right)^2$ costituisce il *termine di asimmetria*.

Quindi dobbiamo aggiungere un ultimo termine correttivo, chiamato **termine di asimmetria**, dovuto alla *natura fermionica di protoni e neutroni*. Otteniamo così:

$$B = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_A \frac{(A - 2Z)^2}{A} \quad [9.13]$$

Quindi

$$\epsilon = a_V - a_S A^{-1/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{4/3}} - a_A \frac{(A - 2Z)^2}{A^2} \quad [9.14]$$

Nota. Il *termine di asimmetria favorisce configurazioni* con $Z \simeq N$.

Termine di Pairing

Il *termine di pairing* riflette l'osservazione sperimentale che 2 protoni o 2 neutroni possono formare un sistema particolarmente legato (*effetto di "shell"* non legato alle caratteristiche specifiche delle interazioni forti). Per tenere conto di ciò si introduce:

$$B = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_A \frac{(A - 2Z)^2}{A} + \delta_p(A, Z) \quad [9.15]$$

dove:

$$\delta_p(A, Z) = \begin{cases} -\frac{a_p}{A^{1/2}}, & N = \text{dispari}, Z = \text{dispari} \\ 0, & A = \text{dispari} \\ \frac{a_p}{A^{1/2}}, & N = \text{pari}, Z = \text{pari} \end{cases}$$

Nota. I nuclei $N = \text{dispari}$ e $Z = \text{dispari}$ sono molto rari in natura, infatti quelli noti sono solo quattro: ${}^2_1\text{H}$, ${}^6_3\text{Li}$, ${}^{10}_5\text{B}$, ${}^{14}_7\text{N}$.

Nota. Questo termine si può studiare sperimentalmente misurando la "*neutron separation energy*", ovvero l'energia necessaria per liberare un neutrone dal nucleo con energia cinetica nulla.

Formula semi-empirica di massa

Questa è dunque la *formula semi-empirica di massa*:

$$M(Z, A) c^2 = Z m_p c^2 + (A - Z) m_n c^2 - B(Z, A) \quad [9.16]$$

dove M è la *massa nucleare a riposo*, m_p la *massa del protone*, m_n la *massa del neutrone* e $B(Z, A)$:

$B(Z, A) = + a_V A$	<i>Termine di Volume</i>	
$- a_S A^{2/3}$	<i>Termine di Superficie</i>	
$- a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}}$	<i>Termine di Coulomb</i>	
$- a_A \frac{(A - 2Z)^2}{A}$	<i>Termine di Asimmetria</i>	
$\begin{cases} -\frac{a_p}{A^{1/2}} & N = \text{pari}, Z = \text{disp.} \\ 0 & A = \text{disp.} \\ \frac{a_p}{A^{1/2}} & N = \text{pari}, Z = \text{disp.} \end{cases}$	<i>Termine di Pairing</i>	[9.17]

La formula si può scrivere anche in termini della *massa atomica a riposo* (piuttosto che la massa del nucleo), quindi indicando con μ la *massa atomica*:

$$\mu(A, Z) c^2 = Z m_p c^2 + (A - Z) m_n c^2 + Z m_e c^2 - B(A, Z) - \overset{0}{B_{\text{atomic}}} \quad [9.18]$$

perché nell'atomo dobbiamo tener conto della massa degli elettroni e sottrarre la *binding energy atomica*, che tiene conto delle energie di legame degli elettroni, che però, essendo dell'ordine dell'eV, può essere trascurata. Quindi possiamo riscrivere la massa atomica, considerando che $m_p c^2 + m_e c^2 = m_H c^2$ è la *massa a riposo dell'atomo d'idrogeno*:

$$\mu(A, Z) c^2 \simeq Z m_H c^2 + (A - Z) m_n c^2 - B(A, Z) \quad [9.19]$$

Nota. La *formula semi-empirica di massa* (modello a goccia del nucleo) funziona piuttosto bene per $A > 20$, ma non riesce a riprodurre i picchi nell'energia di legame per nucleone che si osservano sperimentalmente in prossimità dei cosiddetti *numeri magici*. Una trattazione più accurata sarà il *modello a shell*.

Nota. I valori dei parametri che riproducono al meglio gli andamenti sperimentali dell'energia di legame per nucleone sono:

$$a_V \simeq 15.6 \text{ MeV}, \quad a_S \simeq 17.2 \text{ MeV}, \quad a_C \simeq 0.7 \text{ MeV}, \quad a_A \simeq 23.3 \text{ MeV} \quad [9.20]$$

Lezione 10

2022-05-24

10.1 Instabilità dei nuclei

10.1.1 Decadimenti β

Decadimenti β^+ :

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z-1) + e^+ + \nu_e$$

Il decadimento è possibile se:

$$m(A, Z) c^2 \geq m(A, Z-1) c^2 + m_e c^2$$

e moltiplicando entrambi i membri per $Z m_e c^2$:

$$\mu(A, Z) c^2 \geq \mu(A, Z-1) c^2 + 2 m_e c^2$$

Oppure, sempre per decadimenti β^+ :

$$e^+ + (A, Z) \rightarrow (A, Z-1) + \nu_e$$

che è possibile se:

$$m_e c^2 + m(A, Z) c^2 \geq m(A, Z-1) c^2$$

e moltiplicando entrambi i membri per $(Z-1) m_e c^2$:

$$\mu(A, Z) c^2 \geq \mu(A, Z-1) c^2$$

Decadimenti β^- :

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z+1) + e^- + \bar{\nu}_e$$

che è possibile se:

$$m(A, Z) c^2 \geq m(A, Z+1) c^2$$

e moltiplicando entrambi i membri per $Z m_e c^2$:

$$\mu(A, Z) c^2 \geq \mu(A, Z+1) c^2$$

Nota. Ci si aspetta un andamento *smooth* con un *unico isobaro stabile*.

10.1.2 Decadimenti α

Un decadimento α è un decadimento del tipo:

$$(Z, A) \rightarrow (Z-2, A-4) + (2, 4)$$

dove $(2, 4)$ rappresenta la *particella α* . Il processo è possibile se:

$$m(Z, A) c^2 - [m(Z-2, A-4) c^2 + m(2, 4) c^2] \geq 0$$

Il processo si può riscrivere in termini di *energie di legame*. Il processo di *decadimento α* è possibile se vale la seguente relazione fra le energie di legame:

$$B(Z-2, A-4) + B(2, 4) - B(Z, A) \geq 0$$

Quindi, muovendoci lungo la **valle di stabilità**:

$$B(2, 4) \geq B(Z, A) - B(Z-2, A-4) \simeq \frac{dB}{dA} 4$$

ϵ è l'energia di legame per nucleone:

$$\epsilon = \frac{B}{A}$$

allora:

$$\frac{d\epsilon}{dA} = \frac{d(B/A)}{dA} = \frac{1}{A} \frac{dB}{dA} - \frac{1}{A^2} B$$

quindi:

$$\frac{dB}{dA} = A \frac{d\epsilon}{dA} + \epsilon$$

Quindi sostituendo vediamo che il decadimento α diventa *energeticamente possibile quando*:

$$B(2, 4) \geq 4 \left\{ A \frac{d\epsilon}{dA} + \epsilon \right\}$$

dove $B(2, 4) \simeq 28.3 \text{ MeV}$ è l'energia di legame di ${}^4\text{He}$, dove $A \gtrsim 100$, $\frac{d\epsilon}{dA} \simeq -7.7 \times 10^{-3} \text{ MeV}$ e $B(2, 4)/4 = 7.075 \text{ MeV}$. Quindi possiamo dire che:

$$7.075 \text{ MeV} \geq -7.7 \times 10^{-3} \text{ MeV} \cdot A + \epsilon$$

allora:

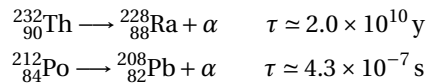
$$\boxed{\epsilon \leq 7.075 \text{ MeV} + 7.7 \times 10^{-3} \text{ MeV} \cdot A}$$

Nota. Al crescere del numero atomico l'interazione coulombiana rendono i nuclei instabili (vedi plot energia media di legame in funzione del numero atomico).

Vita media rispetto al decadimento α

La *vita media rispetto al decadimento α* è estremamente variabile, sebbene le interazioni alla base dei decadimenti sono le stesse (interazioni forti e interazioni elettromagnetiche). Quindi: *stessa fisica, ma risultati molto diversi fra loro*.

Esempio 10.1.3. Due esempi di decadimenti α con tempi di vita media di molti ordini di grandezza differenti fra loro:



Legge di Geiger-Nuttal

Legge di Geiger-Nuttal

$$\boxed{\log_{10}(\omega) = B \log_{10}(Ra) + C}$$

dove:

- $\omega = \frac{1}{\tau} = [\text{s}^{-1}]$ è il *rate di transizione*;
- $R_\alpha = [\text{cm}]$ è il “*range*”¹ della particella α .

Quindi abbiamo che $\omega \propto R_\alpha^B$. Il range della particella α dipende dalla sua energia cinetica:

$$R_\alpha \propto T_\alpha^{3/2} = \left\{ \frac{M_d}{M_d + M_\alpha} Q_\alpha \right\}^{3/2}$$

¹La distanza percorsa nel materiale in cui viene prodotta, prima che questa si fermi

Descrizione fenomenologica del decadimento α

Dato il decadimento α :

$$(Z, A) \rightarrow (Z-2, A-4) + \alpha$$

abbiamo che $T_\alpha \simeq Q_\alpha$ (dove Q_α è la differenza di energia di legame del nucleo padre rispetto al nucleo figlio). Assumiamo:

- particella α è “*pre-formatata*” all'interno del nucleo padre;
- transizione da uno stato legato ad uno stato libero ad energia Q_α (trascuriamo il *rinculo del nucleo figlio*, i.e. $T_d \ll T_\alpha \simeq Q_\alpha$).

$$V(r) = \frac{Z_0 Z_\alpha e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \simeq \frac{Z_0 Z_\alpha e^2 \hbar c}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \frac{1}{r} \simeq \frac{Z_0 Z_\alpha \alpha (\hbar c)}{r}$$

dove $\alpha \simeq 1/137$ è la *costante di struttura fine*.

Quindi la spiegazione dell'estrema variabilità della vita media rispetto al decadimento α è associabile all'*effetto tunnel quantistico*.

Effetto tunnel Abbiamo una particella ad energia E fissata con $E < U$. L'equazione di Schrodinger per questa particella:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |p\rangle = H|\psi\rangle$$

dove l'Hamiltoniana:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V$$

Gli autostati dell'Hamiltoniana sono gli stati che soddisfano l'equazione:

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

Nel caso monodimensionale diventa:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x) \psi(x) = E \psi(x)$$

Risolviamo l'equazione di Schrodinger separatamente nelle tre regioni spaziali I, II, III e successivamente imponiamo delle condizioni di raccordo (ossia imponendo che la funzione d'onda e la sua derivata siano continue):

- zona I ($x \leq 0$):

$$\psi(x) = A_R e^{ikx} + A_L e^{-ikx}$$

con:

$$\hbar k = \sqrt{2mE}$$

- zona II ($0 < x < L$):

$$\psi(x) = B_R e^{Kx} + B_L e^{-Kx}$$

con:

$$\hbar K = \sqrt{2m(U-E)}$$

- zona III:

$$\psi(x) = C_R e^{ik(x-L)} + C_L e^{-ik(x-L)}$$

con:

$$\hbar k = \sqrt{2mE}$$

Imponiamo *continuità in $x = 0$* :

$$A_R + A_L = B_R + B_L$$

Imponiamo la *derivata prima continua in $x = 0$* :

$$(A_R - A_L) ik = (B_R - B_L) K$$

Imponiamo la *continuità in $x = L$* :

$$B_R e^{KL} + B_L e^{-KL} = C_R + C_L$$

Imponiamo la *derivata prima continua in $x = L$* :

$$(B_R e^{KL} - B_L e^{-KL}) K = (C_R - C_L) ik$$

Cerchiamo soluzioni che abbiano le seguenti proprietà:

$$\begin{cases} A_R = 1 \\ A_L = ? = r \quad (\text{riflessione}) \\ B_R = ? \\ B_L = ? \\ C_R = ? = t \quad (\text{trasmissione}) \\ C_L = 0 \end{cases}$$

quindi abbiamo 4 coefficienti ignoti. Otteniamo:

$$\begin{cases} 1 + r = B_R + B_L \\ (1 - r) \frac{ik}{K} = B_R - B_L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_R = \frac{1}{2} \left[(1 + r) + \frac{ik}{K} (1 - r) \right] \\ B_L = \frac{1}{2} \left[(1 + r) - \frac{ik}{K} (1 - r) \right] \end{cases}$$

e:

$$\begin{cases} t = B'_R + B'_L \\ t \frac{ik}{K} = B'_R - B'_L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B'_R = \frac{1}{2} \left[t + \frac{ik}{K} t \right] \\ B'_L = \frac{1}{2} \left[t - \frac{ik}{K} t \right] \end{cases}$$

dove $B'_R \equiv B_R e^{KL}$ e $B'_L \equiv B_L e^{-KL}$. Dalle relazioni precedenti:

$$\begin{cases} [(1 + i\delta) + r(1 - i\delta)] = e^{-KL} t(1 + i\delta) \\ [(1 - i\delta) + r(1 + i\delta)] = e^{-KL} t(1 - i\delta) \end{cases}$$

dove $\delta \equiv k/K$. Da cui otteniamo:

$$\begin{cases} r = \frac{e^{-KL} t(1 + i\delta) - (1 + i\delta)}{(1 - i\delta)} \\ r = \frac{e^{-KL} t(1 - i\delta) - (1 - i\delta)}{(1 + i\delta)} \end{cases}$$

uguagliando le due espressioni di r , otteniamo un'espressione per t :

$$t = \frac{(1 + i\delta)^2 - (1 - i\delta)^2}{e^{-KL}(1 + i\delta)^2 - e^{KL}(1 - i\delta)^2} \simeq \frac{4i\delta}{(1 - i\delta)^2} e^{-KL}$$

quindi:

$$t \simeq -\frac{4i\delta}{(1 - i\delta)^2} e^{-KL}$$

dove k è il vettore d'onda della funzione d'onda nella zona dove *non* è presente il potenziale, mentre K è relativo alla zona *classicamente proibita*. Il *dump esponenziale* è tanto più influente quanto più ampia è la zona proibita ed intenso il potenziale.

Lezione 11

2022-05-26

11.1 Instabilità dei nuclei (reprise)

11.1.1 Decadimenti α (reprise)

Descrizione fenomenologica del decadimento α (reprise)

Effetto tunnel (reprise) La **probabilità di tunneling** sarà data da:

$$P = |t|^2 = \frac{16\delta^2}{(1+\delta^2)^2} e^{-2KL} = \frac{16\left(\frac{k}{K}\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{k}{K}\right)^2\right]^2} e^{-2KL} \simeq e^{-2KL}$$

se $k/K \simeq 1$.

Barriera di potenziale arbitraria

$$P_T = P_1 P_2 \dots P_N = e^{-2K_1 \Delta x} e^{-2K_2 \Delta x} \dots e^{-2K_N \Delta x} = e^{-\sum_i K_i \Delta x}$$

nel limite in cui mandiamo $\Delta x \rightarrow 0$, la somma diventa un integrale ed otteniamo così la probabilità di attraversare interamente la barriera di potenziale arbitraria:

$$P_T = e^{-2 \int_A^B K(x) dx}$$

Nota. Questo è un ragionamento approssimato. Stiamo componendo le probabilità (mentre dovremmo comporre le ampiezze di probabilità, causa interferenza), quindi stiamo implicitamente assumendo che il potenziale non vari molto rapidamente rispetto alla funzione d'onda.

Consideriamo che, come avevamo detto:

$$\hbar K = \sqrt{2mV(x) - E}$$

e otteniamo che la **probabilità di tunneling attraverso una barriera di potenziale arbitraria**:

$$P_T = \exp - \frac{2}{\hbar} \int_A^B \sqrt{2mV(x) - E} dx = e^{-G}$$

dove G è il **fattore di penetrazione di Gammon**.

Tunneling attraverso barriera coulombiana Indichiamo con R una **lunghezza di taglio** sotto la quale le **interazioni forti** sono dominanti ed al di sopra della quale sono invece **trascurabili**. La **probabilità di tunneling della particella α** può essere calcolata, dato il **fattore di penetrazione di Gammon**:

$$G = \frac{2}{\hbar} \int_R^b \sqrt{2m \left(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 r} - E \right)} dr$$

dove m è la **massa della particella α** , $z = 2$ il **numero atomico della particella α** , Z il **numero atomico della particella figlio** ed $E = T_\alpha \simeq Q_\alpha$. Otteniamo:

$$G = \frac{2}{\hbar} \sqrt{2m} \sqrt{\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0}} \int_R^b \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)^{1/2} dr$$

dove il seguente passaggio intermedio:

$$G = \frac{2}{\hbar} \sqrt{2m} \sqrt{\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0}} b^2 \frac{b}{\int_R^b \frac{1}{b} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)^{1/2} dr}$$

quindi:

$$G = \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{mzZe^2b}{2\pi\epsilon_0}} \left\{ \arccos \left(\sqrt{\frac{R}{b}} \right) - \sqrt{\frac{R}{b} \left(1 - \frac{R}{b} \right)} \right\}$$

In *approssimazione di barriera spessa*, i.e. $\frac{R}{b} \ll 1$, si ottiene:

$$G = \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{mzZe^2}{2\pi\epsilon_0}} \left\{ \frac{\pi}{2} - 2x^{1/2} \right\}$$

dove $x = R/b$, tenendo conto anche dell'espressione di $\arccos \sqrt{x}$.

Sappiamo che R fm, mentre b dipende dall'energia cinetica della particella, ovvero:

$$E = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b}$$

con:

$$b = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hbar c}{\hbar c} \frac{1}{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{zZ\alpha\hbar c}{\frac{1}{2}mv^2} \simeq \frac{1.4 \text{ MeV}}{\frac{1}{2}mv^2} zZ \text{ fm}$$

In conclusione otteniamo:

$$G = \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{mzZe^2b}{2\pi\epsilon_0}} \left\{ \frac{\pi}{2} - 2x^{1/2} \right\} = \frac{4(zZ\alpha)}{\frac{v}{c}} \left\{ \frac{\pi}{2} - 2x^{1/2} \right\}$$

dove nel primo termine del prodotto, $v/c \propto T_\alpha^{1/2}$. Il valore del *fattore di penetrazione di Gammon*:

$$G = \frac{2\pi zZ\alpha}{\frac{v}{c}} - 4 \sqrt{\frac{2(mc^2)zZ\alpha R}{\hbar c}}$$

Osserviamo che:

- $\frac{2\pi zZ\alpha}{\frac{v}{c}}$ *non dipende da R!* Quindi i dettagli della buca di potenziale non sono importanti per calcolare la probabilità di tunneling, nel limite di barriera spessa;
- $4 \sqrt{\frac{2(mc^2)zZ\alpha R}{\hbar c}}$ *dipende da R.*

Nota. È molto più facile far interagire, con *interazioni forti*, nuclei leggeri, rispetto a nuclei pesanti, a causa dell'altezza della barriera coulombiana.

Quindi, ricapitolando, per *barriera coulombiana* in limite di *barriera spessa*, l'effetto tunneling di particelle α è descritto, approssimativamente, da:

$\begin{cases} P_T = e^{-G} \\ G = \frac{2\pi zZ\alpha}{\frac{v}{c}} - 4 \sqrt{\frac{2(mc^2)zZ\alpha R}{\hbar c}} \end{cases}$	<p style="text-align: center;"><i>Probabilità di tunneling</i></p> <p style="text-align: center;"><i>Fattore di penetrazione di Gammon</i></p>
--	--

Rate di decadimento Per determinare il *rate di decadimento*:

$$\omega = FP_T$$

dove $[\omega] = t^{-1}$ e $[F] = t^{-1}$, con:

$$F \sim \frac{v_0}{2R}$$

dove v_0 è la *velocità della particella nella buca di potenziale*. Notiamo che:

$$\ln(\omega/s^{-1}) = \ln(F/s^{-1}) + \ln(P_T) = \ln(F/s^{-1}) - G = \ln(F/s^{-1}) + 4\sqrt{\frac{2(mc^2)zZ\alpha R}{(\hbar c)}} - \frac{2\pi zZ\alpha}{\frac{v}{c}}$$

indicando con:

$$f = \ln(F/s^{-1}) + 4\sqrt{\frac{2(mc^2)zZ\alpha R}{(\hbar c)}}$$

allora:

$$\ln(\omega/s^{-1}) = f - g \frac{Z}{\sqrt{T_\alpha}}$$

con $T_\alpha = \frac{1}{2}mv^2 \simeq Q_\alpha$. La costante g è data da:

$$g = 4\pi\alpha\sqrt{\frac{mc^2}{2}} \simeq 3.97 \text{ MeV}^{1/2}$$

Quindi:

$$\ln(\omega/s^{-1}) = f - 3.97 \text{ MeV}^{1/2} \frac{Z}{\sqrt{T_\alpha}}$$

Quindi vediamo che ω è una *funzione fortemente crescente di T_α* :

$$\omega \propto \exp \left\{ -3.97 Z \left(\frac{T_\alpha}{1 \text{ MeV}} \right)^{-\frac{1}{2}} \right\}$$

Quindi aumentando l'energia cinetica avremo che la probabilità di tunneling decresce esponenzialmente. Questo spiega un po' il significato della *legge di Geiger-Nuttall*.

Nota. Per fare queste considerazioni abbiamo considerato il **nucleo figlio non rinculante** (i.e. $M_D \gg m$).

Tunneling attraverso barriera coulombiana con rinculo del nucleo Vediamo ora il caso più generale di *nucleo rinculante*. Introducendo la *massa ridotta*:

$$\mu = \frac{m_D m_\alpha}{m_D + m_\alpha}$$

e trasformando v nella *velocità relativa*. Il *fattore di penetrazione di Gammon* diventa:

$$G = \frac{2\pi\alpha zZ}{\frac{v}{c}} - 4\sqrt{\frac{2(\mu c^2)zZ\alpha R}{\hbar c}}$$

In questo caso avremo che $T_\alpha \neq Q_\alpha$. Quindi:

$$Q_\alpha = \frac{1}{2}\mu v^2 \quad \Rightarrow \quad 2Q_\alpha = \mu v^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2Q_\alpha}{\mu}} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2Q_\alpha}{m} \frac{m}{\mu}}$$

Utilizzando queste relazioni otteniamo:

$$\ln(\omega/s^{-1}) = \ln(F/s^{-1}) - G = \ln(F/s^{-1}) + 4\sqrt{\frac{2(mc^2)zZ\alpha R}{\hbar c}} - \frac{2\pi zZ\alpha}{\frac{v}{c}}$$

dove, inndicando con f' :

$$f' = \ln(F/s^{-1}) + 4\sqrt{\frac{2(mc^2)zZ\alpha R}{\hbar c}}$$

Nota. Noi abbiamo considerato il problema come unidimensionale, ma il processo reale è in realtà tridimensionale.

Ruolo del momento angolare Dato il processo di *decadimento* α :

$$(Z, A) \rightarrow (Z - 2, A - 4) + {}^4\text{He}$$

abbiamo che necessariamente deve valere il *principio di conservazione del momento angolare*, quindi consideriamo:

- \vec{J}_P lo *spin* del nucleo padre;
- \vec{J}_D lo *spin* del nucleo figlio (*daughter*);
- $\vec{J}_\alpha = 0$ lo *spin* della particella α ;
- \vec{L} il *momento angolare orbitale* dello stato finale;

quindi dovrà essere:

$$\vec{J}_P = \vec{J}_D + \vec{J}_\alpha + \vec{L} = \vec{J}_D + \vec{L}$$

con:

$$|J_D - l| \leq J_{\text{TOT}} \leq J_D + l$$

La relazione precedente implica che se $J_P \neq J_D$, allora $l \neq 0$:

$$|J_P - J_D| \leq l \leq |J_P + J_D|$$

con $l = 0, 1, 2, \dots$. Se $l = 0$ dobbiamo modificare la trattazione fatta fino ad ora. La *funzione d'onda* che descrive il moto relativo soddisfa l'equazione di Schrodinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = Q_\alpha \psi(\vec{r})$$

dove $V(\vec{r})$ è un *potenziale* che tiene conto della *repulsione coulombiana* e delle *interazioni forti*. L'ipotesi è che questo sia un *potenziale centrale*:

$$V(\vec{r}) = V(|\vec{r}|)$$

La funzione d'onda può essere scomposta in *armoniche sferiche*:

$$\psi(\vec{r}) = R(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

con $l = 0, 1, 2, \dots$ e $-l \leq m \leq l$. Definendo $\rho(r) = rR(r)$, si ottiene la seguente equazione per $\rho(r)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} \rho(r) + \left\{ V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \right\} \rho(r) = Q_\alpha \rho(r)$$

dove $V(r)$ è il *potenziale effettivo centrifugo*.

$$\frac{l(l+1)\hbar^2 c^2}{2\mu r^2} = \frac{l(l+1)(200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}^2)}{8 \times 10^3 \text{ MeV} r^2} \sim \frac{l(l+1) 5 \text{ MeV}}{(r/1 \text{ fm})^2}$$

Per $l \neq 0$ otteniamo un *innalzamento della barriera di potenziale*, quindi un effetto tunneling meno probabile. In più:

- anche se sotto-dominante, il termine aggiuntivo può modificare sostanzialmente il valore di P_T ;
- “*effetto centrifugo*” presente anche in assenza di repulsione coulombiana (importante per reazioni nucleari).

Lezione 12

2022-05-31

12.1 Reazioni nucleari

Definizione 12.1.1 (Processo di scattering). Parliamo di un **processo di scattering** se la particella incidente è presente nei prodotti di reazione:

$$a + A \longrightarrow b + B \quad \text{se } a = b \Rightarrow \text{scattering}$$

Parliamo di *scattering elastico* se $a = b$ e $A = B$, mentre parliamo di *scattering inelastico* se $A \neq B$.

Nota. Ricordiamo che deve valere la *conservazione del numero barionico* (per quanto visto i nucleoni sono barioni).

Nota. Noi qui faremo l'ipotesi che l'interazione avvenga fra nuclei *non-relativistiche*.

12.1.2 Cinematica di un processo di collisione (non-relativistica)

$$a + A \longrightarrow b + B$$

Sistema del laboratorio Nel sistema del laboratorio $\vec{v}_A = 0$.

$$T_A = \frac{1}{2} m_a v_a^2 = 0$$
$$\vec{p}_A = m_a \vec{v}_a = 0$$

Energia cinetica ed impulso totali:

$$T_{\text{TOT}} = T_a + T_A = \frac{1}{2} m_a \vec{v}_a^2$$
$$\vec{p}_{\text{TOT}} = \vec{p}_a + \vec{p}_A = m \vec{v}_a$$

Nota. Il sistema del centro di massa è definito come il sistema di riferimento in cui l'impulso totale delle particelle risultanti è nullo.

La velocità del *CdM* nel sistema del laboratorio sarà:

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{m_a \vec{r}_a + m_A \vec{r}_A}{m_a + m_A} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{CM}} = \frac{m_a \vec{v}_a + m_A \vec{v}_A}{m_a + m_A} = \frac{m_a}{m_a + m_A} \vec{v}_a$$

Sistema del centro di massa Nel sistema del centro di massa:

$$\begin{cases} \vec{p}_{\text{TOT}} = \vec{p}_a + \vec{p}_A = \vec{0} \\ \vec{v}_{\text{CM}} = \vec{0} \end{cases}$$

e abbiamo che:

$$\vec{p}_a = -\vec{p}_A \quad \Rightarrow \quad |\vec{p}_a| = |\vec{p}_A| = \tilde{p}$$

Per le velocità:

$$m_a \vec{v}_a = -m_A \vec{v}_A \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_A = -\frac{m_a}{m_A} \vec{v}_a$$

Per l'energia cinetica:

$$\tilde{T}_a = \frac{1}{2} m_a \tilde{v}_a^2 = \frac{\tilde{p}^2}{2m_a}$$

$$\tilde{T}_A = \frac{1}{2} m_A \tilde{v}_A^2 = \frac{\tilde{p}^2}{2m_A}$$

Consideriamo che:

$$\vec{\tilde{v}}_a = \vec{v}_a - \vec{v}_{\text{CM}} = \left(1 - \frac{m_a}{m_a + m_A}\right) \vec{v}_a = \frac{m_A}{m_a + m_A} \vec{v}_a$$

ciò implica che:

$$\vec{\tilde{p}}_A = -\vec{\tilde{p}}_a = -\frac{m_a}{m_a + m_A} \vec{p}_A$$

quindi:

$$\vec{\tilde{p}}_A = -\vec{\tilde{p}}_a = -\frac{m_a}{m_a + m_A} \vec{p}_A$$

L'energia cinetica del moto relativo:

$$\tilde{T} = \tilde{T}_a + \tilde{T}_A = \frac{\tilde{p}^2}{2m_a} + \frac{\tilde{p}^2}{2m_A} = \frac{\tilde{p}^2}{2} \left\{ \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_A} \right\} = \frac{\tilde{p}^2}{2} \frac{1}{\mu}$$

dove μ è la massa ridotta:

$$\mu = \frac{m_a m_A}{m_a + m_A}$$

Quindi:

$$\tilde{T} = \frac{1}{2\mu} \tilde{p}^2 = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{m_a}{m_a + m_A} \right)^2 \left(\frac{p_a^2}{2m_a} \right) 2m_a = \frac{m_A}{m_a + m_A} T$$

In tutti i processi fisici dovranno essere conservati *energia e impulso*:

$$\begin{array}{ll} \text{Conservazione dell'energia} & (E_{\text{tot}})_{\text{ini}} = (E_{\text{tot}})_{\text{fin}} \\ \text{Conservazione impulso} & (\vec{p}_{\text{tot}})_{\text{ini}} = (\vec{p}_{\text{tot}})_{\text{fin}} \end{array}$$

Ricordando che stiamo considerando una reazione del tipo:



Nel sistema del centro di massa:

$$(\vec{p}_{\text{tot}})_{\text{ini}} = (\vec{p}_{\text{tot}})_{\text{fin}} = \vec{0}$$

quindi:

$$\left. \begin{array}{l} |\vec{\tilde{p}}_a| = |\vec{\tilde{p}}_A| = \tilde{p}_{\text{ini}} \\ |\vec{\tilde{p}}_b| = |\vec{\tilde{p}}_B| = \tilde{p}_{\text{fin}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{\tilde{p}}_a = -\vec{\tilde{p}}_A \\ \vec{\tilde{p}}_b = -\vec{\tilde{p}}_B \end{array} \right.$$

implementa la *conservazione dell'impulso*.

La *conservazione dell'energia* implica che:

$$m_a c^2 + \tilde{T}_a + m_A c^2 + \tilde{T}_A = m_b c^2 + \tilde{T}_b + m_B c^2 + \tilde{T}_B$$

quindi definiamo il *Q-value* della reazione:

$$Q = (m_a c^2 + m_A c^2) - (m_b c^2 + m_B c^2) = (\tilde{T}_b + \tilde{T}_B) - (\tilde{T}_a + \tilde{T}_A) \equiv \Delta \tilde{T}$$

dove:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_a c^2 + m_A c^2 \Rightarrow \text{Somma delle masse dello stato ini.} \\ m_b c^2 + m_B c^2 \Rightarrow \text{Somma delle masse dello stato fin.} \\ \tilde{T}_b + \tilde{T}_B \Rightarrow \text{Ener. cin. totale dello stato fin.} \\ \tilde{T}_a + \tilde{T}_A \Rightarrow \text{Ener. cin. totale dello stato ini.} \end{array} \right.$$

Il Q -value della reazione:

$$Q = \sum_{ini} m_i c^2 - \sum_{fin} m_f c^2 = \Delta \tilde{T} = (\tilde{T}_{tot})_{fin} - (\tilde{T}_{tot})_{ini}$$

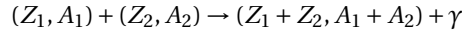
quindi:

$$Q < 0 \Rightarrow (\tilde{T}_{tot})_{fin} > (\tilde{T}_{tot})_{ini} \quad \text{Reazione esotermica}$$

con $(\tilde{T}_{tot})_{fin} = (\tilde{T}_{tot})_{ini} + Q$.

12.1.3 Fusione nucleare

Il processo di **fusione nucleare** è un processo in cui abbiamo la fusione di nuclei:



Il Q -value di tale reazione:

$$\begin{aligned} Q &= m(Z_1, A_1) c^2 + m(Z_2, A_2) c^2 - m(Z_1 + Z_2, A_1 + A_2) c^2 \\ &= Z_1 m_p c^2 + (A_1 - Z_1) m_n c^2 - B(Z_1, A_1) \\ &\quad + Z_2 m_p c^2 + (A_2 - Z_2) m_n c^2 - B(Z_2, A_2) \\ &\quad - (Z_1 + Z_2) m_p c^2 + (A_1 + A_2 - Z_1 - Z_2) m_n c^2 - B(Z_1 + Z_2, A_1 + A_2) \\ &= B(Z_1 + Z_2, A_1 + A_2) - B(Z_1, A_1) - B(Z_2, A_2) \\ &= \epsilon(A_1 + A_2)(A_1 + A_2) - \epsilon(A_1)A_1 - \epsilon(A_2)A_2 \\ &\geq \epsilon(A_1 + A_2)(A_1 + A_2) - \max(\epsilon(A_1), \epsilon(A_2))(A_1 + A_2) \end{aligned}$$

quindi:

$$Q \geq [\epsilon(A_1 + A_2) - \max(\epsilon(A_1), \epsilon(A_2))](A_1 + A_2) \geq 0$$

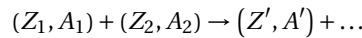
dove il termine in parentesi quadra è un termine positivo, poiché $\epsilon(A)$ è una funzione crescente di A per $A \leq 56$. Quindi: **la fusione nucleare di nuclei leggeri è un processo esotermico.**

Nota. Generalmente, in condizioni “normali” non avvengono fusioni spontanee fra nuclei (se non ad esempio nelle stelle), o meglio sono altamente improbabili, causa effetto tunnel nella barriera coulombiana. Per questo motivo, per farle avvenire abbiamo bisogno di collisioni ad alta energia.

12.1.4 Fissione nucleare

12.1.5 Considerazioni sulle reazioni nucleari

Affinché una reazione nucleare:



possa avvenire è necessario portare i due nuclei a distanze *piccole* ($\sim \text{fm}$). Se i nuclei sono carichi, ciò è ostacolato dalla repulsione coulombiana. La *sezione d'urto* di un processo di fusione fra due nuclei sarà:

$$\sigma = \tilde{\sigma} P_T$$

con $\tilde{\sigma} \sim \text{fm}^2$ (*stima geometrica*), dove P_T è la *probabilità di tunneling attraverso la barriera coulombiana*:

$$P_T = e^{-G}$$

dove G è il *fattore di penetrazione di Gammon*, che in questo caso:

$$G = \frac{2\pi(Z_1 Z_2 \alpha)}{\frac{v}{c}} - 4\sqrt{\frac{2(\mu c^2) Z_1 Z_2 \alpha R}{\hbar c}}$$

quindi P_T è il fattore che ci dice che un processo spontaneo di fusione nucleare è altamente improbabile.

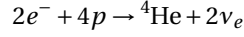
Nota. La barriera coulombiana, chiaramente, è assente per reazioni indotte da neutroni¹.

Nota. Se la collisione avviene con $l \neq 0$, dobbiamo tenere conto anche della *barriera centrifuga*:

$$V_C(r) = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}$$

12.1.6 Fusione dell'idrogeno nel Sole

Il processo di fusione dell'idrogeno nel sole è un processo del tipo:



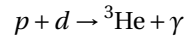
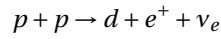
dove la presenza ν_e soddisfa la legge di conservazione fondamentale di *conservazione di numero leptonic*. Questo è il motivo per cui il sole è una *sorgente di neutrini di tipo e*.

$$Q = [2m_e + 4m_p - m({}^4\text{He})] \simeq 26 \text{ MeV}$$

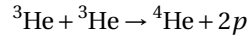
Il flusso di neutrini prodotto a terra (sulla terra):

$$\phi_\nu \sim 6 \times 10^{10} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

Catena pp Dati i primi due processi:



possiamo ottenere *Terminazione ppI* (90% della reazione):



o le *terminazioni ppII* (10%): o *ppIII*:

¹Neutroni liberi pronti a reagire sono poco probabili, perché i *neutroni liberi sono instabili*

Lezione 13

2022-06-07

13.1 Approssimazione di campo medio

In generale un nucleo è composto da A (*numero di massa atomica*) nucleoni. La funzione d'onda totale che diagonalizza l'Hamiltoniana:

$$\psi_{\text{tot}} = \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A)$$

quindi:

$$H_{\text{tot}} \psi_{\text{tot}} = E_{\text{tot}} \psi_{\text{tot}}$$

L'Hamiltoniana sarà:

$$H_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^A \frac{\hbar^2 \nabla_i^2}{2m_N} + \sum_j \sum_{i>j} V_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

possiamo scrivere, in termini di un *potenziale medio* \bar{V} , che descriva l'effetto medio delle interazioni:

$$H_{\text{tot}} \simeq \sum_{i=1}^A \frac{\hbar^2 \nabla_i^2}{2m_N} + \sum_i \bar{V}(\vec{r}_i - \vec{r}_{\text{CM}}) =$$

La funzione d'onda totale sarà la *funzione d'onda prodotto*:

$$\psi_{\text{tot}} = \prod_{i=1}^A \psi_i(\vec{r}_i)$$

con le corrette *proprietà di simmetria*. In tal caso:

$$H_i \psi_i = E_i \psi_i$$

dunque:

$$E_{\text{tot}} = \sum_i e_i$$

Momento angolare Il momento angolare è *quantizzato*:

$$\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$$

con Hamiltoniana *diagonalizzabile simultaneamente* a:

$$\begin{cases} L^2 \rightarrow l(l+1)\hbar^2 \\ L_z \rightarrow n\hbar \end{cases}$$

con $l = 0, 1, \dots$ e $-l \leq m \leq l$. La funzione d'onda è separabile in parte radiale e parte angolare:

$$\psi(\vec{r}) = R(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Affinché una funzione d'onda di questo tipo sia autofunzione dell'Hamiltoniana con potenziale di campo centrale, come abbiamo visto, sarà necessario che:

$$r R(\vec{r}) = \rho(r)$$

con la funzione $\rho(r)$ autofunzione di uno specifico operatore:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_N} + \frac{d^2 \rho(r)}{dr^2} + \left\{ \bar{V}(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2m_N r^2} \right\} \rho(r) = E_{nl} \rho(r)$$

da risolvere per $r \geq 0$. Vediamo che abbiamo la forma di un'equazione di Schrodinger monodimensionale (dobbiamo avere che $\rho(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$). Vediamo che non abbiamo dipendenza dal numero quantico m : questo è spiegabile riflettendo sul fatto che abbiamo un sistema invariante per rotazione.

Dovremmo considerare anche lo *spin* di ogni particella:

$$\begin{cases} S^2 \rightarrow s(s+1)\hbar^2 & \text{i.e. } s = \frac{1}{2} \\ S_z \rightarrow \text{i.e. } s_z = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \end{cases}$$

Nota. Stiamo considerando lo stesso tipo di interazione per tutti i nucleoni, senza distinguere quindi *neutroni e protoni*. Questo, in altre parole, vuol dire che stiamo trascurando i fenomeni di interazione elettromagnetica.

Nota (Potenziali di Saxon-Woods). La forma del potenziale di campo medio per nucleoni è il cosiddetto **potenziale di Saxon-Woods**. Noi, tuttavia, faremo i conti con un potenziale armonico.

D'ora in poi indicheremo la massa del nucleone con m . Effettuiamo un'approssimazione e consideriamo un potenziale che è quello dell'**oscillatore armonico tridimensionale**:

$$V(r) = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$$

Lo spettro dei *livelli energetici* dell'*oscillatore armonico unidimensionale*:

$$E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

la cui Hamiltoniana:

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

Per l'*oscillatore armonico tridimensionale* avremo un'Hamiltoniana che è:

$$\begin{aligned} H &= \frac{|\vec{p}|^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 |\vec{r}|^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \\ &= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 y^2 + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 z^2 \\ &= H_x + H_y + H_z \end{aligned}$$

quindi è la somma di 3 oscillatori armonici unidimensionali. Quindi la *funzione d'onda* sarà la *funzione d'onda prodotto dei 3 oscillatori armonici unidimensionali* e lo *spetto energetico* sarà la *somma delle singole energie*:

$$E_{\text{tot}} = \hbar \omega \left\{ \frac{3}{2} + (n_x + n_y + n_z) \right\}$$

Scriviamo quindi ora:

$$\rho(x) = v(x) \exp -\frac{1}{2} x^2$$

$$x = \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} r \equiv A^2 r$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dx} &= \frac{d\rho}{dx} \frac{dx}{dr} = \frac{d\rho}{dx} A^{1/2} = A^{1/2} [v'(x) - x v(x)] \exp \left\{ -\frac{1}{2} x^2 \right\} \\ \frac{d^2 \rho}{dx^2} &= A [v''(x) - 2x v'(x) - v(x) + x^2 v(x)] \exp \left\{ -\frac{1}{2} x^2 \right\} \end{aligned}$$

Quindi l'equazione:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \left\{ v''(x) - 2xv'(x) - v(x) + x^2 v(x) \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2}x^2 \right\} + \left\{ \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 - E \right\} v(x) \exp \left\{ -\frac{1}{2}x^2 \right\} = 0$$

Quindi l'equazione che andremo a studiare è:

$$v''(x) - 2xv'(x) + v(x) \left[\frac{2E}{\hbar\omega} - \frac{l(l+1)}{x^2} - 1 \right] = 0$$

Le soluzioni saranno della forma:

$$\begin{aligned} v(x) &= \sum_{j=M}^N c_j x^j \quad M \geq 1 \quad \rho(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ v'(x) &= \sum_{j=M}^N c_j j x^{j-1} \\ v''(x) &= \sum_{j=M}^N c_j j(j-1) x^{j-2} \quad \text{valida per } j \geq 2 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\sum_{j=M}^N c_j j(j-1) x^{j-2} - 2 \sum_{j=M}^N c_j j x^j + \sum_{j=M}^N c_j x^j \left[\frac{2E}{\hbar\omega} - 1 \right] - l(l+1) \sum_{j=M}^N c_j x^{j-2} = 0$$

Facciamo ora l'ipotesi **Hp**: $l = 0$:

$$\begin{aligned} \text{Ordine } 0 &\longrightarrow c_2 2(2-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0 \\ \text{Ordine } 1 &\longrightarrow c_3 3(3-1) - 2c_1 + c_1 \left[\frac{2E}{\hbar\omega} - 1 \right] = 0 \\ \text{Ordine } 2 &\longrightarrow c_4 4(4-1) - 4c_2 + c_2 \left[\frac{2E}{\hbar\omega} - 1 \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad c_4 = 0 \end{aligned}$$

Il nostro unico problema è capire cosa succede quando consideriamo i *coefficienti dispari*; infatti tutti i coefficienti c_k con $k = 2n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ sono *nulli*.

$$\text{Ordine } k \ (k = 2n-1; n = 1, 2, \dots) \longrightarrow c_{k+2} (k+2)(k+1) - c_k \left[2k+1 - \frac{2E}{\hbar\omega} \right] = 0$$

La serie si interrompe solo se:

$$2k+1 = \frac{2E}{\hbar\omega}$$

quindi:

$$E = \hbar\omega \left(k + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left(2n - \frac{1}{2} \right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

In definitiva:

$$E_{n\phi} = \hbar\omega \left\{ 2n - \frac{1}{2} \right\} \quad n = 1, 2, \dots$$

Nel caso in cui $l \neq 0$ il ragionamento precedente deve essere modificato e dobbiamo necessariamente assumere $M \geq 2$. Quindi:

$$\text{Ordine più basso } (M \geq 2) \longrightarrow c_M M(M-1) - l(l+1) c_M = 0$$

che implica $c_M \neq 0$ solo se $M = l+1$ (il valore di l determina il valore di M).

$$\text{Ordine successivo } (M-1) \longrightarrow c_{M+1} (M+1) M - l(l+1) c_{M+1} = 0$$

che essendo $M \neq l$, allora $c_{M+1} = 0$.

$$\text{Ordine } k \longrightarrow c_{k+2} [(k+2)(k+1) - l(l+1)] - c_k \left\{ 2k+1 - \frac{2E}{\hbar\omega} \right\} = 0$$

Quindi:

$$c_{M+1} = 0 \longrightarrow \begin{cases} c_{M+3} = 0 \\ c_{M+5} = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

e:

$$c_M \neq 0 \longrightarrow \text{Coefficienti } c_k \text{ con } k = (l+1) + 2(n-1) \text{ sono non nulli}$$

sempre con $n = 1, 2, 3, \dots$. La serie si interrompe se:

$$2k+1 - \frac{2E}{\hbar\omega} = 0$$

Da ciò segue:

$$E_{nl} = \hbar\omega \left\{ 2n + l - \frac{1}{2} \right\} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Il livello di minima energia:

$$\begin{cases} n = 1 \\ l = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{1,0} = \frac{3}{2}\hbar\omega \\ m_l = 0 \\ m_z = 2 \end{cases}$$

Il primo stato eccitato:

$$\begin{cases} n = 1 \\ l = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E = \frac{5}{2}\hbar\omega \\ m_l = -1, 0, 1 \\ m_z = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$$

Lezione 14

2022-06-09