28 Marzo 2023

Istituzioni di Fisica Nucleare

Marco Radocchia
marco.radocchia@outlook.com
Università degli Studi dell'Aqauila

Indice

1. Interazione radiazione materia

Trattiamo ora l'*interazione elettromagnetica di particelle con la materia*. Esistono diversi tipi di trattazione:

- **classica**: utilizza la forza di volume e le equazioni di Maxwell;
- **quantomeccanica**: basata sull'interazione onda-corpuscolo con il campo elettromagnetica;
- **QED**: attraveso l'emissione/assorbimento di fotoni.

Quella che affronteremo in questo corso è la cosiddetta trattazione classica.

Indicheremo con **parametro d'impatto** (b) la *distanza fra la traiettoria della particella incidente ed il "target"*. Distinguiamo i seguenti casi:

- $b >$ raggio atomico: l'interazione avviene fra la particella e l'atomo nel suo complesso; in questo caso avvengono:
  - perdita di energia per ionizzazione;
  - eccitazione dell'atomo;
- $b \sim$ raggio atomico: interazione fra particella ed elettroni dell'atomo:
  - produzione di *raggi delta* (*elettroni di knock-on*);
- $b <$ raggio atomico: scattering coulombiano fra la particella incidente ed il potenziale del nucleo atomico:
- $b \sim$ raggio nucleare: fenomeno del *Bremsstrahlung*.

Per quanto riguarda i **fotoni**, tratteremo:

- *effetto fotoelettrico* (elettroni legati all'atomo);
- *effetto compton* (elettroni considerati liberi);
- *produzione di coppie*;
- *effetto Čerenkov*.

Alcune grandezze caratteristiche:

- **raggio atomico** $\sim$ Å $= 10^{-8}$ cm
- **raggio nucleare** ~ 1 fm $= 10^{-13}$ cm

2. Perdita di energia per ionizzazione

Vediamo il fenomeno della *perdita di energia per ionizzazione* secondo la trattazione di Bohr.

Consideriamo un nucleo di carica Ze e Z elettroni. Consideriamo una particella di carica Ze e di massa $M \gg m_e$ e velocità $\vec{\boldsymbol{v}}$. Consideriamo tale velocità sufficientemente grande, al fine di poter assumere gli elettroni atomici fermi durante l'urto. Facciamo l'ulteriore ipotesi che l'impulso trasferito durante la collisione si piccolo, ovvero che la particella non venga deflessa.

La forza che sente la particella incidente è la forza di Coulomb:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = e\vec{\boldsymbol{E}} \tag{1}$$

dove $\vec{\boldsymbol{E}}$ è il campo elettrico generato degli elettroni. Quindi l'*impulso trasferito*, che è per simmetria lungo la direzione del moto, è dato dalla componente trasversa del campo elettrico:

$$\Delta\vec{\boldsymbol{p}} = \int \vec{\boldsymbol{F}}\mathrm{d}t = \int (-e)\vec{\boldsymbol{E}}\mathrm{d}t = e\int E_\perp \underbrace{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z}}_{v^{-1}}\mathrm{d}z = \frac{e}{v}\int E_\perp \mathrm{d}z \tag{2}$$

Il *flusso del campo elettrico* $\Phi(E)$ attraveso il cilindo:

$$\Phi(E) = \int \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \underbrace{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}}_{2\pi b \mathrm{d}z} = 2\pi b \int E_\perp \mathrm{d}z \qquad [3]$$

Quindi:

$$\Phi(E) = 2\pi b \int_{-\infty}^{\infty} E_\perp \mathrm{d}z = \frac{Ze}{\varepsilon_0} \qquad [4]$$

Quindi il *modulo dell'impulso trasferito*:

$$\Delta p = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{vb} = \underbrace{\left(\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 b^2} \right)}_{\substack{\text{Forza} \\ \text{coulombiana}}} \overbrace{\left(\frac{2b}{v} \right)}^{\substack{\text{Tempo} \\ \text{dell'urto}}} \qquad [5]$$

Introducendo ora la *costante di struttura fine*:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} \simeq \frac{1}{137} \qquad [6]$$

allora il modulo dell'impulso trasferito:

$$\Delta p = 2\alpha Z \frac{\hbar c}{vb} = 2\alpha Z \frac{\hbar}{\beta b} \qquad [7]$$

dove con β abbiamo indicato il *beta di Lorentz della particella*.

Conoscendo l'impulso trasferito, vogliamo ora vedere cosa accade all'**energia** della particella. L'energia cinetica (classica) trasferita della particella:

$$\Delta E = \frac{\Delta p^2}{2m_e} = \frac{2Z^2\alpha^2\hbar^2}{m_e \beta^2 b^2} \qquad [8]$$

2.1. Deflessione della particella

L'angolo di deflessione della particella, che supponiamo di massa M:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta p}{M\beta c} \qquad [9]$$

dove:

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{Mv^2 b} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 b} \frac{1}{0.5\ Mv^2} \ll 1 \qquad [10]$$

Quindi per masse molto grandi della particella o per grandi energie la deflessione è trascurabile.

2.2. Urti multipli

Considerando che la particella subisce *più urti*, cioé attraversa un materiale di spessore $\mathrm{d}x$. Considerando di avere un numero di elettroni per unità di volume

$$n_e = Z \frac{N_A}{N} \rho \qquad [11]$$

e considerando uno spazio nel materiale paria dl e possibili parametri di impatto compresi fra b e $b + \mathrm{d}b$, allora la perdita di energia per unità di lunghezza percorsa dalla particella all'interno del materiale:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}l} &= \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} 2\pi b \mathrm{d}b \; n_e 2Z^2\alpha^2 \frac{\hbar^2}{m_e\beta^2 b^2} \\ &= \frac{4\pi Z^2\alpha^2\hbar^2 n_e}{m_e\beta^2} \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{\mathrm{d}b}{b} \\ &= \frac{4\pi Z^2\alpha^2\hbar^2}{m_e\beta^2} \frac{ZN_a\rho}{A} \ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right) \end{aligned} \quad [12]$$

dove con A abbiamo indicato il *numero atomico* dell'atomo scatterante.

Al crescere di b il tempo di interazione $\Delta t \sim \frac{b}{\gamma v}$ cresce. Se questo tempo diventa maggiore dell'inverso del *tempo di rivoluzione dell'elettrone* $\frac{1}{\omega_e}$:

$$\Delta t < \frac{1}{\omega_e} \Rightarrow \frac{b_{\max}}{\gamma v} = \frac{1}{\omega_e} \quad [13]$$

quindi abbiamo un'espressione che descrive il *parametro d'impatto massimo*:

$$b_{\max} = \frac{\gamma v}{\omega_e} = \frac{\gamma\beta c}{\omega_e} \quad [14]$$

Per quanto riguarda il *parametro d'impatta massimo*, considerando la *lunghezza d'onda di De Broglie della particella* $\lambda = \frac{\hbar}{p}$ e l'espressione per l'impulso $p = n_e c\beta\gamma$:

$$b_{\min} = \frac{\hbar}{m_E\beta\gamma c} \quad [15]$$

Quindi sostituendo $b_{\max}$ e $b_{\min}$ in Equazione 12:

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}l}\bigg|_{\text{ion}} = \frac{4\pi Z^2\alpha^2\hbar^2}{m_e\beta^2} \frac{ZN_a\rho}{A} \ln\left(\frac{m_e c^2\beta^2\gamma^2}{\hbar\langle\omega_e\rangle}\right) \quad [16]$$

con $\langle\omega_e\rangle$ il tempo di rivoluzione medio dell'elettrone.

2.3. Perdita di energia dovuta al campo del nucleo

La perdita di energia dovuta al campo del nucleo, considerando il nucleo come target, ovvero considerando $me \to Am_n$, $n_e \to \frac{n_e}{Z}$, $e^2 \to Z^2e^2$:

$$\frac{-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}l}}{-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}l}} = \frac{n_e}{Z^2} e^2 \frac{1}{Am_n} \frac{1}{n_e e^2} m_e = \frac{Z}{A} ??? \quad [17]$$

Tipicamente si utilizza il *grammage* del materiale: $\Delta x = \rho\Delta l = []$

2.3.1. Bethe-Block

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = 4\pi\tau_e^2 m_e c^2 \frac{z^2 ZN_A\rho}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} \ln\left(\frac{2\gamma^2\beta^2 m_e c^2 T_{\max}}{\langle I\rangle^2}\right) - \beta^2 \frac{\delta(\gamma\beta)}{2}\right] \quad [18]$$

Dove:

$$T_{\max} = \frac{2\gamma^2\beta^2 m_e c^2}{1 + 2\gamma\frac{m_e}{M} + \left(\frac{m_e}{M}\right)^2} \tag{19}$$

è la *massima energia trasferita in un singolo urto all'elettrone*. Con $\langle I \rangle$ abbiamo indicato il *potenziale ???*. Il parametro δ si chiama **fattore di densità**:

$$\frac{\delta}{2} = \ln\frac{\hbar\omega_p}{I} + \ln\beta\gamma - \frac{1}{2} \tag{20}$$

dove abbiamo $\hbar\omega_p$ l'**energia di plasma**:

$$\hbar\omega_p = \sqrt{4\pi n_e Z_e^3}\frac{m_e c^2}{\alpha} \tag{21}$$

Vedi sito web di *Particle Data Group* per formule tabulate. Da notare che tipicamente, per i casi più comuni, $\frac{Z}{A} = \frac{1}{2}$, ad eccezzione ad esempio dell'*idrogeno liquido*.

2.4. Percorso residuo o range di una particella

Il **range** della particella R è definito come segue:

$$R = \int_0^E \frac{\mathrm{d}E}{-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\Big|_{\text{ion}}} \tag{22}$$

Ad esempio per $\beta \sim 1$, con E l'*energia iniziale* della particella, ρ la *densità* del materiale:

$$R = \frac{E}{\rho\left(-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)} \tag{23}$$

Se ad esempio avessimo $E = 1\ \text{TeV}$, $\rho = 3\text{g/cm}^3$ e $-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = 1.5\ \frac{\text{Mev}}{\text{g/cm}^2}$, allora:

$$R = \frac{10^6\ \text{MeV}}{3\text{g/cm}^3 \cdot 1.5\ \frac{\text{Mev}}{\text{g/cm}^2}} = 2 \cdot 10^5\ \text{cm} \simeq 2\ \text{km} \tag{24}$$

3. Diffusione coulombiana multipla

Nelle collisioni elastiche con i nuclei, la particella incidente viene deflessa senza perdere energia in maniera apprezzabile. Il materiale deve essere sufficientemente sottile affinché la particella non perda molta energia per ionizzazione.

Introduciamo la **sezione d'urto di Rutherford**, indicando con z il valore della particella incidente e con Z il valore del nucleo:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} &= r_e^2(zZ)^2\left(\frac{\left(m_e c^2\right)^2}{4p^2v^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\right)\\ &= \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2}\right)^2(zZ)^2\left(\frac{m_e c^2}{4p^2v^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\right)\\ &= \left(\frac{zZe^2M}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{1}{4p^4\sin^4\frac{\theta}{2}}\end{aligned} \tag{25}$$

Questa formula è valida in limite *non-relativistico*, ovvero per $M \gg m_e$ e/o $v \ll c$.

È molto piccola la probabilità di avere *back-scattering*. Per piccoli angoli $\sin\theta \sim \theta$.

$$n_N = N_A \frac{\rho}{A} \qquad [26]$$

dove A è la massa (*nucleo atomico*) dei nuclei scatteratori e ρ la *densità del materiale*.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2 n &= n_N \,\mathrm{d}\sigma \,\mathrm{d}l \\ &= \frac{N_A \rho}{A} r_e (zZ)^2 \frac{\left(m_e c^2\right)^2}{4p^2 v^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}l \\ &= \frac{N_A}{A} r_e^2 (zZ)^2 \frac{\left(m_e c^2\right)^2}{4p^2 v^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} 2\pi\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}x \end{aligned} \qquad [27]$$

Ora, per piccoli angoli θ, possiamo condondere $\sin^4 \frac{\theta}{2} \simeq \frac{\theta^4}{16}$, quindi:

$$\mathrm{d}^2 n = 8\pi r_e^2 \frac{N_A}{A} (zZ)^2 \frac{\left(m_e c^2\right)^2}{p^2 v^2} \frac{\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}x}{\theta^3} \qquad [28]$$

Inoltre, nell'ipotesi che gli urti possano essere considerati tutti indipendenti, allora gli angli di diffusione seguiranno una *distribuzione gaussiana*. Possiamo così calcolare l'angolo di diffusione quadratico medio:

$$\begin{aligned} \theta_s^2 &= \int \theta^2 \frac{\mathrm{d}^2 n}{\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}x} \,\mathrm{d}\theta \\ &= 8\pi r_e^2 \frac{N_A}{N} (zZ)^2 \frac{\left(m_e c^2\right)^2}{p^2 v^2} \int \frac{\theta^2 \,\mathrm{d}\theta}{\theta^3} \\ &= 8\pi r_e^2 \frac{N_A}{N} (zZ)^2 \frac{\left(m_e c^2\right)^2}{p^2 v^2} \ln \frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}} \end{aligned} \qquad [29]$$

Nello scattering Rutherford vale l'approssimazione $\tan \frac{\theta}{2} \sim \frac{\theta}{2} \sim \frac{1}{b}$, dove b è il *parametro d'impatto*. Quindi abbiamo che ad angolo di scattering minimo $\theta_{\min} \Rightarrow b_{\max}$ abbiamo parametro d'impatto massimo. Quindi:

- $b_{\max}$:

$$b_{\max} \simeq \langle r_{\text{atomo}} \rangle = \left(\frac{r_e}{\alpha^2}\right) Z^{-\frac{1}{3}} \qquad [30]$$

seoncdo il *modello atomico di Thomas-Fermi*;

- $b_{\min}$

$$b_{\min} \simeq \langle r_{\text{nucleo}} \rangle = ??? \qquad [31]$$

Il rapporto $\frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}}$:

$$\frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}} = \frac{r_e}{\alpha^2} Z^{-\frac{1}{3}} A^{-\frac{1}{3}} \frac{2}{r_e} = \ldots = \left(183 Z^{-\frac{1}{3}}\right)^2 \qquad [32]$$

Quindi:

$$\theta_s^2 = 16\pi r_e^2 \frac{N_A}{A} (zZ)^2 \frac{\left(m_e c^2\right)^2}{p^2 v^2} \ln\left(183 Z^{-\frac{1}{3}}\right) \qquad [33]$$

Raggruppiamo i termini:

$$\theta_s^2 = \left[\frac{\left(4\pi(m_e c^2)\right)^2}{\alpha}\right]\left(\frac{z}{pv}\right)^2\left[4r_e^2\alpha\frac{N_a Z^2}{A}\ln\left(183Z^{-\frac{1}{3}}\right)\right] \qquad [34]$$

dove $E_s = \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}}m_e c^2 \simeq 21$ MeV. Così abbiamo l'inverso della **lunghezza di radiazione** x_0:

$$\frac{1}{x_0} = 4r_e^2\alpha\frac{N_a Z^2}{A}\ln\left(183Z^{-\frac{1}{3}}\right) \qquad [35]$$

Così possiamo calcolare:

$$\left\langle\theta_s^2\right\rangle = \int\theta_s^2\,\mathrm{d}x = \int E_s^2\left(\frac{z}{pv}\right)^2\frac{1}{x_0}\,\mathrm{d}x = E_s^2\left(\frac{z}{pv}\right)^2\frac{x}{x_0} \qquad [36]$$

Quindi l'**angolo medio di diffusione coulombiana multipla**:

$$\sqrt{\left\langle\theta_s^2\right\rangle} = E_s\frac{z}{pv}\sqrt{\frac{x}{x_0}} \qquad [37]$$

Per angoli piccoli si può scomporre l'angolo in:

$$\left\langle\theta^2\right\rangle = \left\langle\theta_x^2\right\rangle + \left\langle\theta_y^2\right\rangle \qquad [38]$$

Infatti $\sin\theta = \sin\theta\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$, quindi per angoli piccoli $\theta \simeq \sin\theta$:

$$\theta \simeq \theta\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta} = \sqrt{\theta^2\sin^2\theta+\theta^2\cos^2\theta} = \sqrt{\theta_x^2+\theta_y^2} \qquad [39]$$

Gli angoli *proiettati* (????):

$$\left\langle\theta^2_{\text{proiettati}}\right\rangle = \sqrt{\frac{\left\langle\theta_s^2\right\rangle}{2}} = z??? \qquad [40]$$

4. Bremsstrahlung (irraggiamento)

Particelle cariche interagiscono con i nuclei atomici secondo collisioni elastiche, venendo accelerate ed emettendo quindi radiazione. La *potenza emessa è proporzionale al quadrato dell'accelerazione della particella*. Inoltre, poiché la forza coulombiana non dipende dalla massa, l'accelerazione in questo tipo di fenomeno è sempre proporzionale all'inverso della massa.

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow |\vec{a}| \propto \frac{1}{m} \qquad [41]$$

Quindi la potenza emessa è inversamente proporzionale al quadrato della massa:

$$P \propto |\vec{a}|^2 \Rightarrow P \propto \frac{1}{m^2} \qquad [42]$$

Ad esempio, per la massa dei muoni la potenza di Bremsstrahlung è $\sim (200)^2$ volte più piccola rispetto a quella degli elettroni; per i protoni è $\sim (2000)^2$ più piccola riespetto a quella degli elettroni.

Supponiamo per *ipotesi* di avere $\beta \simeq 1$ e che la velocità della particella non cambi apprezzabilmente nel processo di collisione. Consideriamo inoltre una particella di massa M e carica ze, velocità v e parametro d'urto b rispetto alla posizione del nucleo; quest'ultimo di carica Ze . Considerato un tale sistema, proviamo a calcolare la *potenza emessa per Bremsstrahlung* nel sistema di riferimento solidale alla particella O'. In tale sistema di riferimento la *componente trasversa del campo del nucelo è espansa di un fattore* γ.

$$a = \gamma \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0 b^2}\frac{1}{M} \tag{43}$$

Sfruttando l'**equazione di Larmor** ($P = \frac{2}{3}\frac{Z^2e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a^2}{c^2}$), calcoliamo la potenza emessa:

$$P = \frac{2}{3}\frac{z^4Z^2e^6}{(4\pi\varepsilon_0)^3}\frac{1}{b^4M^2c^3} \tag{44}$$

Vogliamo calcolare ora l'energia emessa ΔE durante il *tempo dell'urto*. Per fare questo dobbiamo conoscere il tempo dell'urto, che risulta essere (vedi *Perdita di Energia per Ionizzazione*, Sezione 2) $\Delta t = \frac{2b}{\gamma v}$. Integrando la potenza nel tempo otteniamo la perdita di energia:

$$\Delta E = \int P\,\mathrm{d}t \simeq P\Delta t = \frac{4}{3}\gamma\frac{z^4Z^2e^6}{(4\pi\varepsilon_0)^3}\frac{1}{b^3M^2c^2v} \tag{45}$$

Lo **spettro di emissione** per Bremsstrahlung, che è un *fenomeno impulsivo*, è circa costante fino ad una certa *frequenza di taglio*:

$$\omega_c = \frac{\gamma v}{2b} \tag{46}$$

Quindi lo **spettro di emissione**:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\omega} \simeq \frac{\Delta E}{\omega_c} = \frac{8}{3}\frac{z^4Z^2e^6}{(4\pi\varepsilon_0)^3}\frac{1}{b^2}M^2c^3v^2 \tag{47}$$

È da notare che $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\omega}$ è un *invariante relativistico*, mentre la frequenza *omega* non è invariante:

$$\omega_{\mathrm{Lab}} = \gamma\omega'(1-\beta\cos\theta) \tag{48}$$

dove θ è l'*angolo di emissione* e ω_{Lab} è il risultato dell'*effetto Doppler*.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta-\beta)} \Rightarrow \theta \sim \frac{1}{\gamma} \tag{49}$$

dove θ è l'angolo che vediamo nel sistema del laboratorio. Utilizzando il *raggio classico dell'elettrone*:

$$r_e = \frac{e^2}{r\pi\varepsilon_0 m_e c^2} \tag{50}$$

all'interno della formula precendente:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\omega} &= \frac{8}{3}z^4Z^2\frac{e^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{m_e^2c}{m_e^2c^4}\frac{1}{b^2M^2v^2}\\ &= \frac{8}{3}z^4Z^2r_e^2\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{m_e^2}{M^2}\frac{1}{\beta^2c}\frac{1}{b^2}\end{aligned} \tag{51}$$

L'energia è irraggiata sotto forma di quanti di energia; in altri termini l'energia è irraggiata sotto forma di fotoni. Considerato che l'energia di un fotone vale $E_\gamma = \hbar\omega$, il numero di fotoni emessi:

$$n_N = \frac{N_A \rho}{A} \tag{52}$$

Valutiamo la perdita di energia per Bremsstrahlung nell'attraversamento di un materiale di spessore $\mathrm{d}x$. Il *numero di fotoni* (n) per *unità di energia* ($\mathrm{d}E_\gamma$) e per *unità di spessore* ($\mathrm{d}x$) del materiale:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 n}{\mathrm{d}E_\gamma \,\mathrm{d}x} &= \int \frac{1}{E_\gamma} \frac{\mathrm{d}E}{d\hbar\omega} 2\pi \frac{N_A}{A} b \,\mathrm{d}b \\
&= \frac{2\pi N_A}{?\, E_\gamma A} \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\omega} b \,\mathrm{d}b \\
&= \frac{8}{3} z^4 Z^2 r_e^2 \frac{m_e^2}{M^2} \underbrace{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c}}_{\alpha} \frac{2\pi N_A}{\beta^2 A} \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{\mathrm{d}b}{b} \\
&= \frac{16\pi}{3E_\gamma} r_e^2 \frac{z^4}{\beta^2} \alpha \frac{m_e^2}{M^2} \frac{N_A Z^2}{A} \ln \frac{b_{\max}}{b_{\min}}
\end{aligned} \tag{53}$$

Quindi:

$$\frac{\mathrm{d}^2 n}{\mathrm{d}E_\gamma \,\mathrm{d}x} = \frac{z^4}{\beta^2} \frac{m_e^2}{M^2} 4 r_e^2 \alpha \frac{N_A Z^2}{A} \frac{F(E, E_\gamma)}{E_\gamma} \tag{54}$$

Allora:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = ??? \tag{55}$$

Consideriamo due diversi casi, considerando il caso $M = m_e$, $z = 1$, $\beta = 1$:

- *carica del nucleo non schermata* (la particella vede tutta la carica del nucleo), ovvero range di energia $m_e c^2 \ll E \ll m_e c^2 Z^{-\frac{1}{3}}???$:

$$\int_0^E F(E, E_\gamma) \,\mathrm{d}E_\gamma = \left(\ln \frac{2E}{m_e c^2} - \frac{1}{3} \right) E \tag{56}$$

- *carica del nucelo parzialmente schermata*, ovvero $E \gg \frac{m_e c^2 Z^{-\frac{1}{3}}}{\alpha}$:

$$\int_0^E F(E, E_\gamma) \,\mathrm{d}E_\gamma = (\ln???) \tag{57}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right|_{\text{Brems}} = 4 r_e^2 \alpha \frac{N_A Z^2}{A} \left(\ln\left(183 Z^{-\frac{1}{3}}\right) + 1 / 18 \right) E \simeq \frac{E}{x_0} \tag{58}$$

Quindi *per Bremsstrahlung abbiamo un andamento esponenziale dell'energia dissipata*:

$$E = E_0 e^{-\frac{x}{x_0}} \tag{59}$$

x_0 rappresenta lo spessore in g/cm^2 in cui l'energia dell'elettrone si riduce di un fattore $\frac{1}{e}$ per i soli effetti radiativi.

5. Effetto Čerenkov

L'*effetto Čerenkov* è un fenomeno che coinvolge particelle cariche (e massive) ultrarelativistiche ed è legato alle proprietà dielettriche del mezzo attraversato. Si presenta quando la velocità di una tale particella che attraversa il mezzo è maggiore della velocità della luce nel mezzo stesso (può essere visto come l'analogo del *bang sonico*).

Consideriamo un materiale con costante dielettrica relativa ε e indice di rifrazione n. La particella carica ultrarelativistica, che emette onde elettromagnetiche, si muove nel mezzo più velocemente della velocità di propagazione di tali onde nel mezzo, che è data da:

$$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}} = \frac{c}{n(\omega)} \tag{60}$$

$$l_c = \frac{c}{n}t \tag{61}$$

$$l_p = \beta ct \tag{62}$$

La relazione che lega l_c ed l_p:

$$l_c = l_p \cos\theta_c \tag{63}$$

quindi l'*angolo di emissione*:

$$\frac{c}{n}t = \beta ct\cos\theta_c \Rightarrow \cos\theta_c = \frac{1}{\beta n} \tag{64}$$

Dalla dipendenza di $n = n(\omega)$ dalla *frequenza* ω abbiamo che l'angolo di emissione θ_c dipende anch'esso dalla lungezza d'onda o frequenza della luce emessa.

Una delle possibili applicazioni dell'effetto Čerenkov è quella di separare particelle a seconda della velocità β.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\omega} &= \frac{Z^2e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega}{c^2}\left[1 - \frac{1}{\beta^2n^2(\omega)}\right] \\ &= Z^2\frac{\alpha\hbar\omega}{c}\left[1 - \cos^2\theta_c\right] \\ &= Z^2\frac{\alpha\hbar\omega}{c}\sin^2\theta_c\end{aligned} \tag{65}$$

dove Z è la carica della particella e $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \simeq \frac{1}{137}$ è la costante di struttura fine. Quindi il numero di fotoni per radiazione Čerenkov per unità di percorso e unità di frequenza:

$$\frac{\mathrm{d}^2N}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\omega} = \frac{Z^2\alpha}{c}\sin^2\theta_c \tag{66}$$

Integrando in frequenza otteniamo:

$$I = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} = \int\frac{\mathrm{d}^2N}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\omega}\mathrm{d}\omega = \frac{Z^2\alpha}{c}\int_{\Delta\omega}\sin^2\theta_c\,\mathrm{d}\omega \tag{67}$$

Considerando $\sin^2\theta_c$ circa costante e uguale al suo valor medio nel range di frequenza pssiamo approssimare I con:

$$I \simeq \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} = \frac{Z^2\alpha}{c}\left\langle \sin^2\theta_c \right\rangle \, \Delta\omega \qquad [68]$$

Esempio

Consideriamo un $\Delta\omega$ nel range del visibile:

$$\Delta\omega = 2\pi\left(\frac{c}{\lambda_1} - \frac{c}{\lambda_2}\right) \qquad [69]$$

dove $\lambda_1 = 3000\text{Å} = 3 \cdot 10^3 \cdot 10^{-8}$ cm e $\lambda_2 = 6000\text{Å} = 6 \cdot 10^3 \cdot 10^{-8}$ cm. Quindi:

$$\Delta\omega = 2\pi 3 \cdot 10^{10}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^{14}\ \text{Hz} \qquad [70]$$

Considerando la costante $\hbar c = 200\ \text{MeV} \cdot \text{fm}$ (di cui è utile ricordare il valore):

$$\frac{\alpha\Delta\omega}{c} = \frac{\alpha\hbar\Delta\omega}{\hbar c} \qquad [71]$$

$$\hbar\Delta\omega = 6.6 \cdot 10^{-18}\ \text{eV} \cdot s 2\pi \cdot 5 \cdot 10^{14}\frac{1}{s} \simeq 2\ \text{eV} \qquad [72]$$

Quindi sostituendo nell'espressione di I:

$$I = Z^2\left\langle \sin^2\theta_c \right\rangle \cdot 730\frac{\text{fotoni}}{\text{cm}} \qquad [73]$$

Esempio

Consideriamo un fascio di pioni π^+ che contiene una frazione di protoni. Sia l'impulso del fascio (misto):

$$p_{\pi,p} = 5\frac{\text{GeV}}{c} \qquad [74]$$

Siano le masse delle due particelle $m_\pi = 0.130\ \frac{\text{GeV}}{c^2}$ e $m_p = 0.938\ \frac{\text{GeV}}{c^2}$. Il fascio attraversa due materiali di indici di rifrazione rispettivamente $n_1 = 1.05$ e n_2.

Il β delle due particelle: $\beta_p = 0.982$ e $\beta_\pi = 0.9996$. Quindi nel mezzo n_1 entrambe le particelle producono luce Čerenkov, infatti:

$$\beta_\pi > \beta_p > \frac{1}{n_1} = 0.952 \qquad [75]$$

È da notare che sebbene entrambe le particelle producano luce Čerenkov, l'emissione dei *"ring Čerenkov"* avviene ad angoli diversi.

Vogliamo scegliere il secondo materiale in maniera tale da separare i protoni dai pioni, quindi con indice di rifrazione n_2 tale che solo una delle due particelle produce luce Čerenkov:

$$\beta_\pi > \frac{1}{n_2} > \beta_p \qquad [76]$$

Esercizio

Consideriamo dei muoni di alta energia prodotti da raggi cosmici in alta atmosfera. Per semplicità assumiamo che tutti i muoni prodotti abbiano un'energia di 10 GeV e assumiamo inoltre che vengano prodotti a circa 10 km sul livello del mare (*a.s.l.*). Sapendo che l'indice di rifrazione dell'aria è $n = 1.00029$, dire se i μ producono *luce Čerenkov*. Nel caso di risposta affermativa, determinare l'angolo di apertura dei fotoni prodotti θ_c. Quanti fotoni raggiungono il livello del mare?

La massa del muone è $m_\mu = 106 \frac{\text{MeV}}{c^2}$ ed il tempo di decadimento è $\tau_\mu = 2.2\ \mu s$.

$$\beta_\mu = \frac{p}{E} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}} = \frac{10}{\sqrt{10^2 + 0.106^2}} = 0.999944 \qquad [77]$$

Ora, dato che:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{1.00029} = 0.99971 \qquad [78]$$

allora possiamo dire che il muone produce luce Čerenkov, infatti $\beta_\mu > \frac{1}{n}$.

L'angolo θ_c:

$$\theta_c = \frac{1}{n\beta_\mu} = \frac{1}{1.00029 \cdot 0.999944} = 0.99977 \simeq 1.2\ ^\circ \qquad [79]$$

Abbiamo che il numero di fotoni Čerenkov prodotti per unità di lunghezza vale:

$$\frac{N_{\text{fot}}}{L} = \frac{Z^2\alpha}{c}\Delta\omega \sin^2\theta_c \simeq Z^2 \sin^2\theta_c \cdot 730\text{cm}^{-1} \qquad [80]$$

La distanza percorsa da un muone di energia $E_\mu = 10$ GeV nel suo tempo di vita:

$$l_\mu = \beta_\mu \gamma c \tau_\mu = \frac{p_\mu}{m_\mu} c\tau_\mu \simeq 62 \text{ km} \qquad [81]$$

quindi l'energia dei muoni è sufficiente a permettere ai muoni di arrivare al livello del mare. Nel percorso fino al livello del mare, dunque, un muone produce un numero di fotoni Čerenkov (facendo una serie di assunzioni, quali che il muone non perda energia per ionizzazione, etc.) pari a:

$$N_{\text{fot}} = 730 \cdot \left(1 - \cos^2\theta_c\right) \cdot L = 730 \cdot \left(1 - 0.99977^2\right) \cdot 10^4 \simeq ?? \qquad [82]$$

6. Interazione di fotoni con la materia

Vediamo ora una serie di processi nei quali vediamo l'interazione di fotoni con la materia, quali:

- **effetto fotoelettrico** (*assorbimento*);
- **effetto Compton** (*diffusione*);
- **produzione di coppie** e^+e^- (*assorbito?*)

6.1. Effetto Fotoelettrico

L'effetto fotoelettrico è un processo del tipo:

$$\gamma + \text{atomo} \to \text{atomo}^+ + e^- \tag{83}$$

L'energia estratta per effetto fotoelettrico:

$$E = E_\gamma - W = h\nu - W \tag{84}$$

dove W è il *potenziale di estrazione* (energia di legame). Il processo è un *processo a soglia*, quindi esiste una lunghezza d'onda minima per effetto fotoelettrico:

$$\nu_{\min} = \frac{W}{h} \tag{85}$$

Abbiamo diverse soglie a seconda delle diverse *shell* elettroniche considerate: $\nu_K, \nu_L, \nu_M, \ldots$

6.1.1. Sezione d'urto

La sezione d'urto per effetto fotoelettrico è data da:

$$\sigma_{\text{p.e.}} = \sigma_T 4\alpha^4 Z^5 \left(\frac{m_e c^2}{E_\gamma}\right)^3 \tag{86}$$

dove σ_T è la *sezione d'urto di Thomson*:

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \tag{87}$$

con r_e il raggio di Thomson per l'elettrone.

6.1.2. Coefficiente di assorbimento

L'intensità di un fascio di fotoni ad una certa profondità x all'interno di un materiale può essere espressa come (*legge di Lambert-Beer*):

$$I(x) = I_0 e^{-\mu x} \tag{88}$$

dove $I_0 = I(x = 0)$ e il coefficiente μ:

$$\mu_{\text{p.e.}} = n_A \sigma_{\text{p.e.}} = \frac{N_0 \rho}{A} \sigma_{\text{p.e.}} \sim \frac{Z^4}{?} ? \tag{89}$$

6.2. Effetto Compton

L'*effetto Compton* descrive una diffusione elastica di fotoni su elettroni liberi, ovvero elettroni tali che $E_\gamma \gg$ enegia di legame e^-:

$$\gamma e^- \to \gamma e^- \tag{90}$$

I quadrimpulsi:

$$P_1 = (E, \vec{\boldsymbol{p}}), \qquad P_2 = (M, 0), \qquad P_1{}' = (E', \vec{\boldsymbol{p}}'), \qquad P_2{}' = (E_x, \vec{\boldsymbol{p}}') \tag{91}$$

$$E + M = E' + E_x \tag{92}$$

con $E_x^2 = M^2 + |\vec{\boldsymbol{p}}_x|^2$

$$\vec{\boldsymbol{p}} = \vec{\boldsymbol{p}}' + \vec{\boldsymbol{p}}_x \tag{93}$$

Quindi, dato $E_x = E + M - E'$:

$$E_x^2 = E^2 + M^2 + E'^2 + 2EM - 2EE' - 2E'M \tag{94}$$

$$\Rightarrow M^2 + \left|\vec{\boldsymbol{p}}_x\right|^2 ?? \qquad [95]$$

Allora.

$$M^2 2m \qquad [96]$$

$$\left|\vec{\boldsymbol{p}}\right|_x^2 = \left|\vec{\boldsymbol{p}} - \vec{\boldsymbol{p}}'\right|^2 = \left|\vec{\boldsymbol{p}}\right|^2 + \left|\vec{\boldsymbol{p}}'\right|^2 - 2pp' \cos\theta \qquad [97]$$

Sostituendo nella relazione precendente:

$$M^2 = 2m^2 + M^2 + 2EM - 2E'M - 2EE' + \left|\vec{\boldsymbol{p}}\right|^2 + \left|\vec{\boldsymbol{p}}'\right|^2 - \left|\vec{\boldsymbol{p}}\right|^2 + \left|\vec{\boldsymbol{p}}'\right|^2 + 2pp' \cos\theta \qquad [98]$$

allora:

$$m^2 + EM - E'M - EE' + pp' \cos\theta = 0 \qquad [99]$$

Nell'ipotesi che la particella proiettile sia un γ, allora $E \gg m$, $E' \gg m$, dunque $p = E$, $p = E'$
.

$$\Rightarrow E??? \qquad [100]$$

da cui:

$$E'[E(1 - \cos\theta) + M] = EM \qquad [101]$$

e in definitiva:

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{M}(1 - \cos\theta)} \qquad [102]$$

Dove, nel caso la particella incidente sia un fotone, abbiamo $E = h\nu$ e $E' = h\nu'$:

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)} \qquad [103]$$

e in termini della lunghezza d'onda $\lambda' = \frac{c}{\nu}'$:

$$\lambda' = \frac{c}{\nu}\left[1 + \frac{h\nu}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)\right] = \lambda + \frac{h\nu c}{m_e c^2 \nu}(1 - \cos\theta) = \lambda + \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta) \qquad [104]$$

Quindi:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta) \qquad [105]$$

dove il fattore davanti alla parentesi è la lunghezza d'onda compton:

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c}\ 2.4 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{cm} \qquad [106]$$

Abbiamo quindi che $E'_{\max} = E$ si ottiene per $\theta = 0$, mentre $E'_{\min}$ si ha per $\theta = \pi$. È da notare che:

$$E'_{\min} = E(\theta = \pi) = \frac{1}{2} m_e c^2 \qquad [107]$$

che corrisponde all'energia massima dell'elettrone.

6.2.1. Sezione d'urto Compton (Klein-Nishina)

La sezione d'urto differenziale per un fenomeno di effetto Compton ad *alte energie* (ovvero energie molto maggiori della massa dell'elettrone, che è la particella target):

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{r_e^2}{2}\left(\frac{E'}{E}\right)^2\left(\frac{E'}{E} + \frac{E}{E'} - \sin^2\theta\right) \qquad [108]$$

integrando per ottenere la sezione d'urto totale, definendo e sostituendo $\varepsilon = \frac{E}{m_e}c^2$ nella sezione d'urto differenziale:

$$\sigma_c = 2\pi r_e^2\left\{\frac{2}{\varepsilon^2}\left[1 - \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}\ln(1+2\varepsilon)\right] + \frac{1}{2\varepsilon}\ln(1+2\varepsilon) + \frac{1-\varepsilon}{(1+2\varepsilon)^2}\right\} \qquad [109]$$

Nel caso $E \gg m_e c^2$, allra abbiamo $\varepsilon \gg 1$ e:

$$\sigma_c \simeq \pi r_e^2 \frac{\ln(2\varepsilon)}{\varepsilon} \qquad [110]$$

Si può notare (si ottiene rigorosamente dall'elettrodinamica quantistica) che:

$$\sigma_c \propto r_e^2 \propto e^4 \propto \alpha^2 \qquad [111]$$

Nel caso di *bassa energia*, ovvero nel regime $E \ll m_e c^2$ ($E \to E'$), si utilizza la *sezione d'urto Thomson*:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{r_e^2}{2}\left(2 - \sin^2\theta\right) \qquad [112]$$

dove al solito r_e rappresenta il *raggio classico dell'elettrone*. La sezione d'urto totale di Thomson si ottiene integrando in angolo solido Ω:

$$\sigma_T = \int \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\,\mathrm{d}\Omega = \frac{8}{3}\pi r_e^2 \qquad [113]$$

6.2.2. Coefficiente di assorbimento

Il coefficiente di assorbimento per effetto Compton:

$$\mu_c = n_e\sigma_c = \frac{N_A Z}{A}\rho\sigma_c \propto \frac{\ln E}{E} \qquad [114]$$

dove N_A è il *numero di Avogadro*.

6.3. Produzione di coppie e^+e^-

La *produzione di coppie* e^+e^- è un processo a soglia del tipo:

$$\gamma + N \to N + e^+ + e^- \qquad [115]$$

Questo è un fenomeno analogo alla Bremsstrahlung (ed è evidente nella trattazione formale di elettrodinamica quantistica).

La soglia del processo di produzione di coppie elettrone-positrone è $E_\gamma^{(s)} = 2m_e c^2$.

6.3.1. Sezione d'urto differenziale

La sezione d'urto differenziale del processo di produzione di coppie elettrone-positrone:

$$\frac{d\sigma}{dE} = 4\alpha r_e^2 Z^2 \frac{F(E,E')}{E'} \tag{116}$$

dove $F(E,E')$ è una funzione delle energie del positrone e dell'elettrone. Analogamente a quanto visto per il processo di Bremsstrahlung, nella condizione di energia $2m_e c^2 \ll E \ll m_e c^2 \frac{Z^{-\frac{1}{3}}}{\alpha}$ (*carica del nucleo non schermata*):

$$\int_0^{E-2m_e c^2} \frac{F(E,E')}{E'} dE' = \frac{7}{9} \ln \frac{2E}{m_e c^2} - \frac{109}{54} \tag{117}$$

Nel regime $E \gg m_e c^2 \frac{Z^{-\frac{1}{3}}}{\alpha}$ (*carica del nucleo parzialmente schermata*):

$$\int_0^{E-2m_e c^2} \frac{F(E,E')}{E'} dE' = \frac{7}{9} \ln\left[183 Z^{-\frac{1}{3}}\right] - \frac{1}{54} \tag{118}$$

6.3.2. Coefficiente di assorbimento

Il coefficiente di assorbimento per produzione di coppie elettrone-positrone:

$$\mu_{\text{p.c.}} = \frac{N_A \rho}{A} \sigma_{\text{p.c.}} = 4\alpha r_e^2 Z^2 \frac{N_A \rho}{A} \cdot \frac{7}{9} \ln\left[183 Z^{-\frac{1}{3}}\right] \tag{119}$$

Utilizzando la *lunghezza di radiazione* (caratteristica del materiale, Equazione 35):

$$\mu_{\text{p.c.}} = \frac{7}{9 x_0} \tag{120}$$

L'intensità elettromagnetica segue la *legge di Lambert-Beer*:

$$I = I_0 e^{-\mu x} \tag{121}$$

dove μ è il coefficiente di assorbimento e x lo spessore percorso all'intero del materiale.

7. Sciami elettrofotonici

Nel regime $E \gg m_e c^2$, i processi di produzione di coppie e di Bremsstrahlung:

$$\begin{gathered} e^{+,-} N \to N e^{+,-} \gamma \\ \gamma N \to e^+ e^- N \end{gathered} \tag{122}$$

sono dominanti e avvengono produzione di particelle che causano i cosiddetti *sciami elettrofotonici*.

Questo avviene entro un certo limite, l'*energia critica*, oltre la quale i processi di produzione di coppie e Bremsstrahlung non sono più dominanti, mentre lo diventano effetti come quello della perdita di energia per ionizzazione.

$$\begin{gathered} \left(\frac{dE}{dx}\right)_? = 4\alpha r_e^2 \frac{N_a Z^2}{A} E \ln\left[183 Z^{-\frac{1}{3}}\right] \\ \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ion}} = 4\pi r_e^2 m_e c^2 \frac{N_A Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left(\ln \frac{2 m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{\langle I \rangle} - \beta^2\right) \end{gathered} \tag{123}$$

$$\frac{?}{\left.\frac{dE}{dx}\right|_{\text{ion}}} \simeq \frac{?}{1600 m_e c^2} = 1 \tag{124}$$

$$???\qquad[125]$$

L'energia critica assume valore minore per materiali "più densi".

7.1. Modello di Heitler

Per illustrare il *modello di Heitler* poniamo le seguenti ipotesi:

- la particella primaria ha un'energia E molto maggiore dell'energia critica del materiale, $E \gg E_c$;
- μ è lo stesso per $e^{+,-}$ e γ, quindi possiamo considerare un'unico cammino medio di radiazione x_0 per le tre;
- dopo ogni lunghezza di radiazione x_0, una particella produce due secondarie con certezza (trascuriamo tutti gli effetti stocastici):

$$\begin{gathered} e^{+,-} \to e^{+,-} + \gamma \\ \gamma \to e^+ + e^- \\ E_\gamma \to E_{e^{+,-}} = \frac{E_\gamma}{2} \end{gathered} \qquad [126]$$

- i secondari sono emessi in avanti, quindi ad angoli molto piccoli;
- i secondari non cedono energia al mezzo in cui si propagano se la loro energia è maggiore dell'energia critica;
- la moltiplicazione di particelle si arresta quando l'energia del secondario è pari all'energia critica $E < E_c$.

Supponiamo ora di avere un elettrone primario di energia E_0. Dopo una lunghezza di radiazione x_0:

$$\begin{gathered} \underbrace{e}_{E_0} \to \underbrace{e}_{\frac{E_0}{2}} + \underbrace{\gamma}_{\frac{E_0}{2}} \\ \Rightarrow \underbrace{\gamma}_{\frac{E_0}{2}} \to \underbrace{e^+}_{\frac{E_0}{4}} + \underbrace{e^-}_{\frac{E_0}{4}} \end{gathered} \qquad [127]$$

Dopo t lunghezze di radiazione:

$$N_t = 2^t \text{ particelle} \Rightarrow E = \frac{E_0}{2^t} \qquad [128]$$

Iterando fino all'*energia critica* abbiamo:

$$\begin{gathered} N_{\max} = \frac{E_0}{E_c} = 2^{T_{\max}} \\ \Rightarrow \log N_{\max} = \log\frac{E_0}{E_c} = T_{\max}\log 2 \\ \Rightarrow T_{\max} = \frac{\log\frac{E_0}{E_c}}{\log}2 \simeq \frac{10}{3}\log\frac{E_0}{E_c} \end{gathered} \qquad [129]$$

oppure in termini di ln:

$$T_{\max} = 1.5\ln\frac{E_0}{E_c} \qquad [130]$$

7.1.1. Raggio di Moliere

Il fenomeno dello sciame elettrofotonico è un fenomeno tridimensionale che diffuso grazie allo *scattering coulombiano multiplo*. In questo contesto, **raggio di Moliere**:

$$\langle R_m \rangle = \frac{21 \text{ MeV}}{E_c} x_0 \qquad [131]$$

è il raggio che contiene il 95% dell'energia dello sciame.