

Appunti di
Istituzioni di Fisica Nucleare
A.A. 2022/2023

Marco Radocchia

18 maggio 2023

Indice

| | | |
|----------|--|-----------|
| I | Cinematica relativistica - Prof. Salamida | 1 |
| 1 | 2022-03-03 | 2 |
| 1.1 | Relatività | 2 |
| 1.1.1 | Relatività Galileiana | 2 |
| 1.1.2 | Relatività ristretta di Einstein | 2 |
| 2 | 2020-03-17 | 6 |
| 2.1 | Quadrivettori e Invarianti Relativistici | 6 |
| 3 | 2020-03-20 | 8 |
| 3.1 | Implicazioni Invarianza della Norma di un Quadrivettore | 8 |
| 3.2 | Ulteriori Quadrivettori | 9 |
| 3.3 | Energia | 10 |
| 3.3.1 | Energia a Riposo | 10 |
| 3.3.2 | Energia Relativistica | 10 |
| 3.3.3 | Energia Cinetica Relativistica | 10 |
| 3.4 | Sistemi di due particelle | 10 |
| 3.4.1 | Grandezze relative alla particella virtuale "Centro di Massa" (CM) | 12 |
| 3.4.2 | Energia, impulso e velocità di una particella nel sistema di riposo dell'altra | 13 |
| 4 | 2020-03-24 | 14 |
| 4.1 | Sistemi di due particelle (reprise) | 14 |
| 4.1.1 | Energia, Impulso e Velocità di una particella nel sistema CM | 14 |
| 4.2 | Decadimento in due corpi | 17 |
| 5 | Lezione 26/03/2020 | 19 |
| 5.1 | Soglia di una reazione | 19 |
| 5.1.3 | Esperimenti a bersaglio fisso | 20 |
| 5.2 | Angolo di apertura di un decadimento in due corpi | 21 |
| 5.3 | Decadimento in tre corpi | 23 |
| 5.3.1 | Energia minima | 23 |
| 5.3.2 | Energia massima | 24 |
| 6 | Lezione 31/03/2020 | 26 |
| 6.1 | Metodo delle ellissi - Cambiamento dello spettro di impulsi dal CM al Lab | 26 |
| 7 | Lezione 02/04/2020 | 29 |
| 7.1 | Metodo delle Ellissi (reprise) | 29 |
| 7.1.1 | Angolo limite nel sistema del Laboratorio | 29 |
| 7.1.2 | Angolo limite nel sistema del Centro di Massa | 30 |
| 8 | Esercitazione 2022-03-31 | 33 |
| 9 | Esercitazione 2022-04-05 | 35 |

| | |
|---|-----------|
| II Fisica Nucleare - Prof. Villante/Capozzi | 38 |
| 10 2023-04-27 | 39 |
| 10.1 Serie (catene) radiattive | 39 |
| 10.2 Rutherford scattering formula | 39 |
| 10.2.1 Il modello | 39 |
| 10.2.2 Raggio di collisione | 40 |
| 11 2020-02-27 | 41 |
| 11.1 Grandezze atomiche caratteristiche | 41 |
| 11.2 Esperimenti di diffusione | 41 |
| 11.2.1 Diffusione elastica | 41 |
| 11.2.2 Diffusione anelastica | 42 |
| 11.3 Sezioni d'urto | 42 |
| 11.3.1 Sezione d'urto differenziale | 43 |
| 11.4 Grandezze Caratteristiche - Indeterminazione di Heisenberg | 43 |
| 11.5 Esperimenti di Rutherford | 44 |
| 11.5.1 Descrizione Classica | 44 |
| 12 03-03-2020, 05-05-2020 | 48 |
| 12.1 Scattering Rutherford | 48 |
| 12.1.1 Calcolo della sezione d'urto | 48 |
| 12.1.2 Sezione d'urto differenziale | 48 |
| 12.1.3 Calcolo Quantistico della sezione d'urto | 50 |
| 13 Lezione 2020-05-07 | 56 |
| 13.1 Scattering Rutherford (reprise) | 56 |
| 13.1.1 Sezione d'urto per nucleo <i>non</i> puntiforme | 56 |
| 13.1.2 Deviazione dal comportamento puntiforme | 57 |
| 13.2 Modelli per la distribuzione di carica nei nuclei | 58 |
| 13.2.1 Sfera uniformemente carica | 58 |
| 13.2.2 Modello Saxon-Woods | 60 |
| 13.3 Teoria delle perturbazioni indipendenti dal tempo | 61 |
| 13.4 Muonic atoms | 62 |
| 13.5 Nuclei speculari | 62 |
| 14 2022-05-03 | 63 |
| 14.1 Sezioni d'urto per nuclei non puntiformi | 63 |
| 14.1.1 Fattori di forma | 63 |
| 14.1.2 Scattering Mott | 64 |
| 14.2 Proprietà dei Nuclei | 64 |
| 14.2.1 Difetto di massa ed energia di legame | 65 |
| 14.3 Radioattività - Decadimenti Nucleari | 65 |
| 14.3.1 Legge di decadimento esponenziale | 66 |
| 14.3.2 Decadimenti multimodali | 67 |
| 14.3.3 Costruzione di Esperimenti | 67 |
| 15 2022-05-05 | 68 |
| 15.1 Radioattività - Decadimenti Nucleari (reprise) | 68 |
| 15.1.1 Decadimenti sequenziali | 68 |
| 15.1.2 Condizioni energetiche per i vari decadimenti | 69 |
| 15.2 Modello standard delle interazioni fondamentali | 71 |
| 15.2.1 Leggi di conservazione | 71 |
| 16 2022-05-10 | 72 |
| 16.1 Modello standard (reprise) | 72 |
| 16.1.1 Cinematica del decadimento α | 72 |
| 16.1.2 Cinematica del decadimento β | 72 |

| | |
|--|-----------|
| 17 2022-05-17 | 74 |
| 17.1 Formula semi-empirica di massa (formula di Weizsäcker) | 74 |
| 17.1.1 Nuclei stabili | 74 |
| 17.1.2 Energia di legame dei nuclei | 74 |
| 18 2022-05-19 | 78 |
| 18.1 Formula semi-empirica di massa (reprise) | 78 |
| 18.1.1 Nuclei stabili | 78 |
| 19 2022-05-24 | 81 |
| 19.1 Instabilità dei nuclei | 81 |
| 19.1.1 Decadimenti β | 81 |
| 19.1.2 Decadimenti α | 81 |
| 20 2022-05-26 | 85 |
| 20.1 Instabilità dei nuclei (reprise) | 85 |
| 20.1.1 Decadimenti α (reprise) | 85 |
| 21 2022-05-31 | 89 |
| 21.1 Reazioni nucleari | 89 |
| 21.1.2 Cinematica di un processo di collisione (non-relativistica) | 89 |
| 21.1.3 Fusione nucleare | 91 |
| 21.1.4 Fissione nucleare | 91 |
| 21.1.5 Considerazioni sulle reazioni nucleari | 91 |
| 21.1.6 Fusione dell'idrogeno nel Sole | 92 |
| 22 2022-06-07 | 93 |
| 22.1 Approssimazione di campo medio | 93 |
| 23 2022-06-09 | 97 |

Parte I

**Cinematica relativistica - Prof.
Salamida**

Lezione 1

2022-03-03

1.1 Relatività

1.1.1 Relatività Galileiana

La *relatività galileiana* si basa sui principi di *spazio e tempo assoluti*. Possiamo definire quindi infiniti sistemi di riferimento, tutti equivalenti. Non possiamo definire, tuttavia, in *modo assoluto*, lo stato di moto di un corpo, ma solo il suo stato di moto in relazione al sistema di riferimento scelto.

Una caratteristica importante della *relatività galileiana* è proprio il principio di **tempo assoluto**: il tempo scorre allo stesso modo in *tutti* i sistemi di riferimento.

1.1.2 Relatività ristretta di Einstein

La *relatività ristretta* di Einstein si basa su due *postulati*.

1. **Postulato di relatività**: le leggi della natura e i risultati di tutti gli esperimenti eseguiti in un dato sistema di riferimento sono indipendenti dal moto di traslazione dell'intero sistema;
2. **Postulato di costanza della velocità della luce nel vuoto**: la velocità della luce nel vuoto è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali, indipendentemente dal modo della sorgente e del suo osservatore;

Nota (Simultaneità). Con la relatività ristretta e questi postulati nasce il problema della simultaneità degli eventi.

Trasformazioni di Lorentz

Le **Trasformazioni di Lorentz** sono una revisione compatibile con la relatività speciale delle trasformazioni di Galileo.

Le *trasformazioni di Lorentz* sono state ricavate sulla base dei 3 requisiti (*vincoli di Einstein*):

1. **invertibilità**;
2. **linearità** (al fine di soddisfare la condizione di relatività).
3. **velocità relativa diretta lungo un asse** (si può sempre scegliere un orientamento del SR tale che sia soddisfatta questa condizione).

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t \\ t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t \end{cases} \quad [1.1]$$

Trasformazione lungo l'asse x Per una trasformazione lungo l'asse x avremo che:

$$\begin{cases} a_{22} = a_{33} = 1 \\ a_{21} = a_{23} = a_{24} = 0 \\ a_{31} = a_{32} = a_{34} = 0 \\ a_{12} = a_{13} = a_{42} = a_{43} = 0 \end{cases} \quad [1.2]$$

Quindi le trasformazioni di coordinate diventano:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{14}t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = a_{41}x + a_{44}t \end{cases} \quad [1.3]$$

$$x' = 0 \quad \Rightarrow \quad x = vt \quad \Rightarrow \quad a_{14} = -va_{11} \quad [1.4]$$

Utilizzando il secondo postulato ($c = \text{const}$):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \end{cases} \quad [1.5]$$

Rappresentano la distanza percorsa da un fotone in t o t' .

Consideriamo il sistema di riferimento primato e sostituiamo le 1.3:

$$(a_{11}x + a_{14}t)^2 + y^2 + z^2 = c^2 (a_{41}x + a_{44}t)^2 \quad [1.6]$$

dunque sostituendo $a_{14} = -va_{11}$:

$$(a_{11}x - va_{11}t)^2 + y^2 + z^2 = c^2 (a_{41}x + a_{44}t)^2 \quad [1.7]$$

Svolgendo i quadrati:

$$a_{11}^2 x^2 + v^2 a_{11}^2 t^2 - 2a_{11}^2 vxt + y^2 + z^2 = c^2 a_{41}^2 x^2 + c^2 a_{44}^2 t^2 + 2a_{41}a_{44}c^2 xt \quad [1.8]$$

quindi:

$$t^2 (-v^2 a_{11}^2 + c^2 a_{44}^2) = x^2 (a_{11}^2 - c^2 a_{41}^2) + y^2 + z^2 + 2xt (a_{41}a_{44}c^2 + a_{11}^2 v) \quad [1.9]$$

Ora, poiché dovrà valere la relazione $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$, imponiamo:

$$\begin{cases} -v^2 a_{11}^2 + c^2 a_{44}^2 = c^2 \\ a_{11}^2 - c^2 a_{41}^2 = 1 \\ a_{11}^2 v + a_{41}a_{44}c^2 = 0 \end{cases} \quad [1.10]$$

Dal sistema otteniamo un'espressione esplicita per coefficienti a_{11} , a_{44} , a_{41} :

$$\begin{cases} a_{11} = a_{44} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \\ a_{41} = \pm \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \end{cases} \quad [1.11]$$

Definiamo i coefficienti β e γ di *Lorentz*:

$$\beta = \frac{v}{c} \quad (\text{velocità del SR in unità di } c); \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad [1.12]$$

Quadrivettori Un quadrivettore è (semplicisticamente) un oggetto matematico della forma:

$$\mathbf{X} \equiv \{ct, x, y, z\} = \{ct, \vec{x}\} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ ct \end{pmatrix} \quad [1.13]$$

Le trasformazioni di Lorentz possono essere rappresentate in forma matriciale tramite la matrice $L(\beta)$ che è una matrice a **determinante unitario**¹ e rappresenta dunque una *rotazione* nello spaziotempo.

$$\mathbf{X}' = L(\beta) \mathbf{X} \quad [1.14]$$

¹ $\det L(\beta) = \gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = 1$

In rappresentazione matriciale:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma x - \beta\gamma ct \\ y \\ z \\ -\beta\gamma x + \gamma ct \end{pmatrix} \quad [1.15]$$

La trasformazione inversa:

$$\mathbf{X} = \mathbf{L}^{-1}(\beta) \mathbf{X}' \quad [1.16]$$

dove $\mathbf{L}^{-1}(\beta) = \mathbf{L}(-\beta)$. Quindi in forma esplicita:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma x' + \beta\gamma ct' \\ y' \\ z' \\ \beta\gamma x' + \gamma ct' \end{pmatrix} \quad [1.17]$$

Approssimazione non relativistica, limite classico L'approssimazione non relativistica si ottiene nel caso in cui la velocità relativa v sia molto minore della velocità della luce nel vuoto c , che è la velocità di riferimento. In particolare quando $v \ll c$, quindi in termini di β , quando $\beta \ll 1$. Sviluppando in serie al primo ordine in β :

$$\gamma = 1 + \frac{\beta^2}{2} + \dots \quad [1.18]$$

quindi sostituendo γ otteniamo:

$$x' = \left(1 + \frac{\beta^2}{2} + \dots\right)x - \beta \left(1 + \frac{\beta^2}{2} + \dots\right)ct = x + \frac{x\beta^2}{2} - \beta ct - \frac{\beta^3 ct}{2} + \dots \simeq x - \beta ct \quad [1.19]$$

e dalla definizione di β possiamo scrivere:

$$x' \simeq x - vt \quad [1.20]$$

per $v \ll c$. Quindi abbiamo riottenuto la trasformazione di Galileo, come volevamo.

Analogamente:

$$ct' = \left(1 + \frac{\beta^2}{2} + \dots\right)ct - \left(1 + \frac{\beta^2}{2} + \dots\right)\beta x = ct + \frac{\beta^2 ct}{2} - \beta x - \frac{\beta^3 x}{2} + \dots \simeq ct - \beta x \quad [1.21]$$

Ora, dato che $\frac{\beta}{c} = \frac{v}{c^2}$, considerata l'approssimazione $v \ll c$, possiamo trascurare il termine nella somma e otteniamo:

$$t' \simeq t \quad [1.22]$$

come da trasformata di Galileo.

Forma vettoriale generale delle trasformazioni di Lorentz Consideriamo ora il caso con $\vec{\beta}$ del sistema in moto relativo non parallelo a uno degli assi (in precedenza abbiamo supposto parallela a x). Scomponiamo \vec{x} in direzione parallela e perpendicolare a $\vec{\beta}$.

$$\begin{cases} \vec{x}'_{\parallel} = \vec{\beta} \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{x}}{\beta^2} \\ \vec{x}'_{\perp} = \vec{x}' - \vec{\beta} \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{x}}{\beta^2} \end{cases} \quad [1.23]$$

con $\beta^2 = |\vec{\beta}|^2$. Quindi:

$$\begin{cases} \vec{x}'_{\parallel} = \gamma (\vec{x}_{\parallel} + c\vec{\beta}t') \\ \vec{x}'_{\perp} = \vec{x}_{\perp} \end{cases} \quad [1.24]$$

con $ct = \gamma (ct' + \vec{\beta} \cdot \vec{x})$. Allora abbiamo:

$$\vec{x} = \vec{x}_{\parallel} + \vec{x}_{\perp} = \gamma \left(\vec{\beta} \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{x}}{\beta^2} - c\vec{\beta}t' \right) + \vec{x}' - \vec{\beta} \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{x}'}{\beta^2} = \vec{x}' + \vec{\beta} \left(\vec{\beta} \cdot \vec{x}' \frac{\gamma - 1}{\beta^2} + \gamma ct' \right) \quad [1.25]$$

Utilizzando $\beta' = \frac{(\gamma^2-1)}{\gamma^2}$ otteniamo la *forma vettoriale **generale** delle trasformate di Lorentz*:

$$\begin{cases} \vec{x} = \vec{x}' + \vec{\beta} \gamma \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \vec{\beta} \cdot \vec{x}' + c t' \right) \\ c t = \gamma \left(c t' + \vec{\beta} \cdot \vec{x}' \right) \end{cases} \quad [1.26]$$

Lezione 2

2020-03-17

2.1 Quadrivettori e Invarianti Relativistici

Oggetto quadrimensionale che trasforma secondo le trasformazioni di Lorentz¹. Abbiamo già definito il quadrivettore posizione dello spazio-tempo:

$$X = \{ct, \vec{x}\} = \{ct, x, y, z\} \quad [2.1]$$

Proprietà dei quadrivettori Elenchiamo alcune delle proprietà dei quadrivettori:

- **Prodotto per uno scalare:** sia P un quadrivettore e a uno scalare, allora aP è ancora quadrivettore;
- **Somma di quadrivettori:** siano P, Q due quadrivettori, allora $P + Q$ è ancora quadrivettore;
- le trasformazioni di Lorentz lasciano invariata la norma dei quadrivettori.

Norma di un quadrivettore Definiamo:

- **quadrivettore controvariante**

$$V^\mu = \{V_0, V_x, V_y, V_z\} \quad [2.2]$$

- **quadrivettore covariante**

$$V_\mu = \{V_0, -V_x, -V_y, -V_z\} \quad [2.3]$$

- **tensore metrico** (*metrica di Minkowski*)

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad [2.4]$$

Quindi definiamo la norma di un quadrivettore come segue²:

$$V^2 = g(V, V) = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 V^\mu g_{\mu\nu} V^\nu = \sum_{\mu=0}^3 V_\mu V^\mu = V_0^2 - V_x^2 - V_y^2 - V_z^2 \quad [2.5]$$

Utilizzando la convenzione di Einstein della somma sugli indici ripetuti:

$$\text{Norma di un quadrivettore} \quad \boxed{V^2 = g(V, V) = g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = V^\mu g_{\mu\nu} V^\nu = V_\mu V^\mu} \quad [2.6]$$

Una trasformazione di Lorentz lascia invariata la norma di un quadrivettore.

¹Vedi definizione corretta di quadrivettore - Corso di Introduzione alla fisica moderna

²Stiamo facendo un prodotto scalare nella metrica di Minkowski, quindi nel penultimo passaggio c'è un abbassamento dell'indice tramite la metrica

Invarianza della norma di un quadri-vettore sotto trasformazioni di Lorentz Vogliamo dimostrare ora che le trasformazioni di Lorentz lasciano invariata la norma di un quadri-vettore e che quindi che valga l'uguaglianza:

$$X'^2 = X^2 \quad [2.7]$$

Dunque definendo $X' = \{ct', x', y', z'\}$ e applicando³ un *boost di Lorentz lungo la direzione x* all'espressione esplicita della sua norma, poiché $(\gamma^2)^{-1} = (1 - \beta^2)$, abbiamo:

$$\begin{aligned} X'^2 &= c^2 t'^2 - x'^2 - y^2 - z^2 \\ &= (-\beta\gamma x + \gamma ct)^2 - (\gamma x - \beta\gamma ct)^2 - y^2 - z^2 \\ &= \beta^2 \gamma^2 x^2 + \gamma^2 c^2 t^2 - 2\beta\gamma^2 xct - \gamma^2 x^2 - \beta^2 \gamma^2 c^2 t^2 + 2\beta\gamma^2 xct - y^2 - z^2 \\ &= c^2 t^2 \gamma^2 (1 - \beta^2) - x^2 \gamma^2 (1 - \beta^2) - y^2 - z^2 \\ &= c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \\ &= X^2 \end{aligned} \quad [2.8]$$

e questo dimostra l'invarianza della norma di un quadri-vettore sotto trasformazioni di Lorentz.

Nota. Abbiamo sfruttato:

$$\gamma^2 (1 - \beta^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right] = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1 \quad [2.9]$$

Esercizio (Da svolgere). Dimostrare che il prodotto scalare tra 2 quadri-vettrici non dipende dal sistema di riferimento.

³Consideriamo un caso specifico per semplicità, ma il ragionamento ha valenza generale, potendo sempre scegliere l'asse x del SR parallelo alla direzione del boost di Lorentz

Lezione 3

2020-03-20

3.1 Implicazioni Invarianza della Norma di un Quadrivettore

Definiamo con **evento** l'insieme delle coordinate dello spazio a quattro dimensioni, *spazio di Minkowski*, che identificano un particolare fenomeno fisico localizzato.

$$\text{Evento} \quad \boxed{P = \{ct, \vec{r}\}} \quad [3.1]$$

Quindi supponiamo P_1 e P_2 due eventi dello spazio-tempo. La distanza fra i due eventi sarà anch'essa un quadrivettore definito come segue:

$$\Delta S = \{c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z\} \quad [3.2]$$

L'invariante di tale quadrivettore, con K e K' due sistemi di riferimento in moto relativo, poiché ΔS^2 è invariante relativistico:

$$K \longrightarrow \Delta S^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad [3.3]$$

$$K' \longrightarrow \Delta S^2 = (c\Delta t')^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 \quad [3.4]$$

Classificazione del concetto di Distanza nello spazio di Minkowski Facendo riferimento agli eventi P_1, P_2 , si definisce:

- **distanza di tipo spazio (space-like)** → esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi sono **simultanei** solo se:

$$\boxed{\Delta S^2 < 0} \quad [3.5]$$

e si dice che l'intervallo ΔS è una distanza di tipo spazio ($c\Delta t' = 0$);

- **distanza di tipo tempo (time-like)** → esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi sono **contigui** solo se:

$$\boxed{\Delta S^2 > 0} \quad [3.6]$$

e si dice che l'intervallo ΔS è una distanza di tipo tempo ($\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 = 0$);

- **distanza di tipo luce** → la propagazione della luce è descritta da:

$$\boxed{\Delta S^2 = 0} \quad [3.7]$$

e si dice che l'intervallo ΔS è una distanza di tipo luce ($c\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 = 0$).

Le linee raffigurate rappresentano quelle che in una dimensione vengono chiamate *linee di luce* (in due dimensioni *coni di luce* ed in tre dimensioni *iperconi di luce*). Le regioni dello spazio-tempo interne alle linee di luce definiscono l'insieme degli eventi separati dall'evento origine da distanze di tipo tempo. Le regioni esterne alle linee di luce, invece, definiscono l'insieme degli eventi separati dall'evento origine da distanze di tipo spazio.

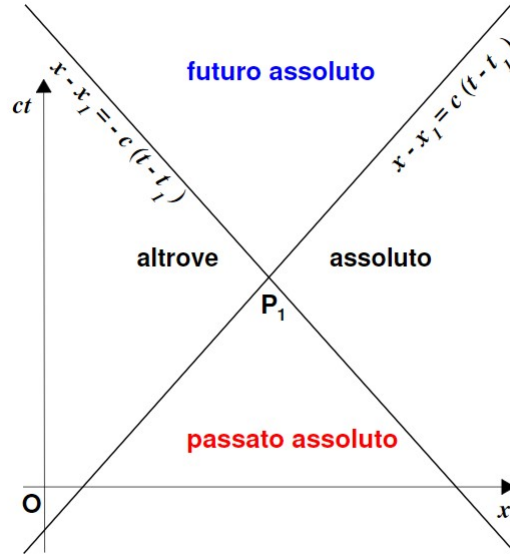


Figura 3.1: Spazio-Tempo di Minkowski unidimensionale relativo all'evento P_1 (origine)

3.2 Ulteriori Quadrivettori

In aggiunta al quadrivettore posizione possiamo definire i seguenti quadrivettori. Definiamo t_0 il **tempo proprio della particella**, ossia quello misurato nel sistema di riferimento che vede la particella in quiete. Questo significa che¹:

$$dx_0 = dy_0 = dz_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad ds^2 = c^2 dt_0^2 \quad [3.8]$$

Dalla dilatazione temporale abbiamo:

$$dt_0 = \frac{dt}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{dt}{dt_0} \quad [3.9]$$

Quindi definiamo i seguenti quadrivettori:

- **quadrivelocità**

$$V = \frac{d\mathbf{X}}{dt_0} = \frac{d\mathbf{X}}{dt} \frac{dt}{dt_0} = \gamma \frac{d\mathbf{X}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = \gamma \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \gamma \{c, \vec{v}\} \equiv \{\gamma c, \gamma \vec{v}\}} \quad [3.10]$$

L'invariante della quadrivelocità:

$$V^2 = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 \beta^2 c^2 = c^2 \gamma^2 (1 - \beta^2) = c^2 \quad [3.11]$$

- **quadrimpulso**²

$$\boxed{\mathbf{P} = m\mathbf{V} = m\gamma \{c, \vec{v}\}} \quad [3.12]$$

con m la *massa a riposo* della particella.

L'invariante del quadrimpulso:

$$\mathbf{P}^2 = m^2 \gamma^2 c^2 - m^2 \gamma^2 v^2 = m^2 \gamma^2 c^2 - m^2 \gamma^2 \beta^2 c^2 = m^2 c^2 \gamma^2 (1 - \beta^2) = m^2 c^2 \quad [3.13]$$

¹Tutte le variabili non apicate fanno riferimento al sistema di riferimento K in moto relativo rispetto a K'

²**Limite Classico:** per $\beta \rightarrow 0 \Rightarrow \gamma \rightarrow 1$ si riottiene $\vec{p} = m\vec{v}$

3.3 Energia

3.3.1 Energia a Riposo

Definiamo l'energia a riposo di una particella come:

$$\text{Energia a riposo} \quad E_0 = m_0 c^2 \quad [3.14]$$

dove m_0 è la massa a riposo della particella.

3.3.2 Energia Relativistica

Possiamo riscrivere il quadrimpulso come segue:

$$\mathbf{P} = \left\{ \frac{E}{c}, \gamma \vec{p} \right\} \quad [3.15]$$

dove E è l'energia relativistica della particella e dove, per poter scrivere la prima componente abbiamo sfruttato le seguenti identità:

$$m_0 \gamma c = \frac{m_0 \gamma c^2}{c} = \frac{E_0 \gamma}{c} = \frac{E}{c} \quad [3.16]$$

$$\text{Energia Relativistica} \quad E = E_0 \gamma = m_0 \gamma c^2 \quad [3.17]$$

3.3.3 Energia Cinetica Relativistica

Un altro modo per esprimere l'energia relativistica è come somma dell'energia a riposo e dell'energia cinetica della particella, ovvero:

$$E = E_0 + T \quad [3.18]$$

Quindi segue che l'espressione esplicita dell'energia cinetica relativistica³:

$$T = E - E_0 = m_0 c^2 \gamma - m_0 c^2 = m_0 c^2 (\gamma - 1) \quad [3.19]$$

Limite classico dell'energia cinetica

Anche in questo caso, per riottenere l'espressione classica dell'energia cinetica dobbiamo effettuare uno sviluppo al primo ordine del fattore γ di Lorentz ($\gamma = 1 + \frac{1}{2}\beta^2$), quindi (ricordando la definizione $\beta = \frac{v}{c}$):

$$T_{cl} = m c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 - 1 \right) = \frac{1}{2} m c^2 \beta^2 = \frac{1}{2} m v^2 \quad [3.20]$$

3.4 Sistemi di due particelle

Laddove possibile cercheremo di sfruttare gli invarianti relativistici (*invarianza della norma di un quadrivettore*), evitando il calcolo delle trasformazioni di Lorentz per ottenere variabili cinematiche al passaggio fra sistemi di riferimento.

Sfrutteremo in particolare:

- utilizzo del *principio di conservazione del quadrimpulso*:

$$\sum_{j=1}^{N_{ini}} P_j^{ini} = \sum_{k=1}^{N_{fin}} P_k^{fin} \quad [3.21]$$

- l'*invariante relativistico associato* al quadrimpulso per passare da un sistema di riferimento a un altro.

³Attenzione: l'espressione dell'energia cinetica si può ricavare formalmente dal teorema delle forze vive utilizzando un'espressione relativisticamente corretta della forza (vedi Intro. Fisica Moderna)

Negli esempi che seguono:

- ricaveremo velocità e fattore di Lorentz, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, che ci portano dal *sistema di riferimento del laboratorio* al *sistema di riferimento del centro di massa* di due particelle;
- ricaveremo l'impulso e l'energia di una particella nel *sistema di riposo di un'altra*;
- calcoleremo gli impulsi e le energie di due particelle *nel sistema del centro di massa* delle due particelle.

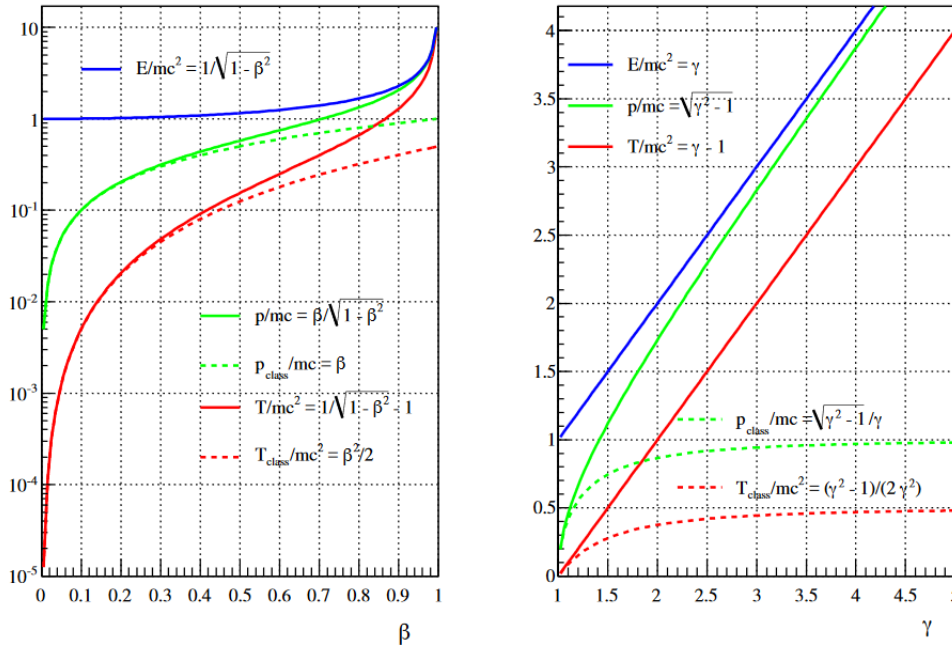


Figura 3.2: Energia totale, energia cinetica e impulso come funzioni di β e γ e rispettivi limiti classici ($\beta \rightarrow 0$)

Sistema di Unità Naturali D'ora in poi utilizzeremo il cosiddetto **sistema di unità naturali**, per cui si fissano le costanti indicate di seguito pari all'unità:

$$\boxed{\hbar = c = 1} \quad [3.22]$$

e potremo scrivere *uguaglianze fra grandezze fisiche non omogenee* ricordandoci, però, di esprimere correttamente le unità di misura dei risultati⁴.

Scriveremo il quadrimpulso come:

$$\mathbf{P} = \{E, \vec{p}\} \quad [3.23]$$

e potremmo dire quindi:

$$\mathbf{P}^2 = E^2 - |\vec{p}|^2 = M^2 \quad [3.24]$$

Relazione di dispersione

$$\boxed{E^2 = |\vec{p}|^2 + M^2} \quad [3.25]$$

dove M è detta **massa invariante** del sistema.

⁴Ad esempio, se un risultato di energia è $E = 1 \text{ GeV}$, allora esprimeremo le grandezze M, \vec{p} rispettivamente come $1 \frac{\text{GeV}}{c^2}$ e $1 \frac{\text{GeV}}{c}$

3.4.1 Grandezze relative alla particella virtuale “Centro di Massa” (CM)

Le grandezze relative alle due particelle nel *sistema del laboratorio*:

- particella uno: m_1, \mathbf{P}_1 ;
- particella due: m_2, \mathbf{P}_2 .

Nel sistema del laboratorio i due quadrimpulsi e i rispettivi invarianti saranno:

$$\mathbf{P}_1 = \{\epsilon_1, \vec{p}_1\} \Rightarrow \mathbf{P}_1^2 = m_1^2 \quad [3.26]$$

$$\mathbf{P}_2 = \{\epsilon_2, \vec{p}_2\} \Rightarrow \mathbf{P}_2^2 = m_2^2 \quad [3.27]$$

Nota. D'ora in poi le quantità relative al sistema del centro di massa saranno espresse con un asterisco all'apice.

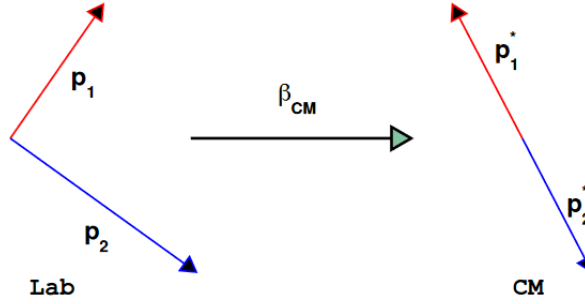


Figura 3.3: Passaggio dal sistema del laboratorio al sistema del centro di massa CM

Il quadrivettore impulso totale, rispetto al *sistema CM*:

$$\mathbf{P}^* = \mathbf{P}_1^* + \mathbf{P}_2^* = \{\epsilon_1^* + \epsilon_2^*, 0\} \quad [3.28]$$

dato che nel sistema del centro di massa:

$$\vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = 0 \quad [3.29]$$

Tramite una trasformazione di Lorentz del quadripulso si può riottenere il quadripulso totale nel *sistema del laboratorio*:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \{\epsilon_1 + \epsilon_2, \vec{p}_1 + \vec{p}_2\} \quad [3.30]$$

Inoltre, per invarianza della norma, possiamo scrivere le seguenti identità:

$$\mathbf{P}^2 = E^{*2} = (\epsilon_1^* + \epsilon_2^*)^2 = (\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 \quad [3.31]$$

dove con E^* indichiamo l'**energia disponibile nel CM**. Con M la **massa invariante** totale del sistema, sfruttando l'equazione precedente possiamo scrivere:

$$\mathbf{P}^2 = (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^2 = M^2 = E^{*2} = (\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 \quad [3.32]$$

Vediamo che massa invariante del sistema ed energia nel centro di massa coincidono.

In questo modo abbiamo ridotto il problema di due particelle a un sistema di **una sola particella virtuale “centro di massa”** di quadripulso \mathbf{P} ed massa $M = E^*$:

$$\vec{p} = M\gamma\vec{\beta}_{CM} \quad [3.33]$$

$$E = M\gamma_{CM} \quad [3.34]$$

dove $\vec{\beta}$ e γ sono le velocità ed il fattore di Lorentz della particella *centro di massa* nel sistema del laboratorio:

$$\vec{\beta}_{CM} = \frac{\vec{p}}{E} = \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \quad [3.35]$$

$$\gamma_{CM} = \frac{E}{M} = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\sqrt{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2}} \quad [3.36]$$

3.4.2 Energia, impulso e velocità di una particella nel sistema di riposo dell'altra

Nel sistema di riferimento \mathbf{RF}_1 , ovvero nel sistema di riferimento solidale alla particella uno, i quadri-vettori $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$:

$$\mathbf{P}_1 = \{m_1, 0\} \quad [3.37]$$

$$\mathbf{P}_2 = \{E_{2,1}, \vec{p}_{2,1}\} \quad [3.38]$$

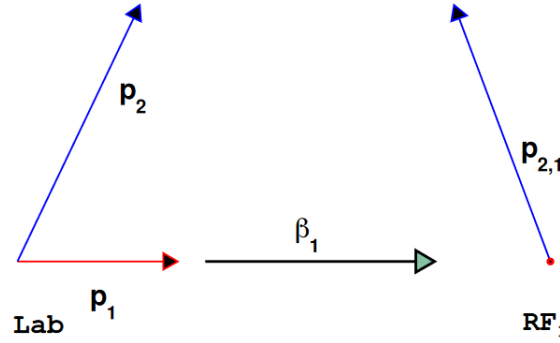


Figura 3.4: Passaggio dal sistema del laboratorio al sistema di riferimento solidale alla particella uno, \mathbf{RF}_1 .

Esercizio. Dimostrare che il prodotto scalare fra quadrimpulsi è invariante relativistico.

Il prodotto scalare dei due quadrimpulsi è un invariante relativistico, che vale:

$$\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 = m_1 E_{2,1} \quad \Rightarrow \quad E_{2,1} = \frac{\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2}{m_1} \quad [3.39]$$

inoltre, poiché possiamo scrivere:

$$|\vec{p}_{2,1}|^2 = E_{2,1}^2 - m_2^2 \quad [3.40]$$

sostituendo l'espressione di $E_{2,1}$:

$$|\vec{p}_{2,1}|^2 = \frac{\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2}{m_1} - m_2^2 \quad [3.41]$$

Per $\vec{\beta}_{2,1}$ possiamo scrivere:

$$|\vec{\beta}_{2,1}|^2 = \frac{|\vec{p}_{2,1}|^2}{E_{2,1}^2} \quad [3.42]$$

Allora esprimiamo l'**energia**, l'**impulso** e la **velocità** di una particella nel sistema di riposo dell'altra come, ovvero le grandezze relative alla particella 2 nel sistema in cui la particella uno si trova in quiete:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{2,1} = \frac{\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2}{m_1} \\ |\vec{p}_{2,1}|^2 = \frac{(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2)^2}{m_1^2} - m_2^2 = \frac{(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2)^2 - m_1^2 m_2^2}{m_1^2} \\ |\vec{\beta}_{2,1}|^2 = \frac{|\vec{p}_{2,1}|^2}{E_{2,1}^2} = \frac{(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2)^2 - m_1^2 m_2^2}{(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2)^2} \frac{m_1^2}{m_1^2} = \frac{(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2)^2 - m_1^2 m_2^2}{(\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2)^2} \end{array} \right. \quad [3.43]$$

$\vec{\beta}_{2,1}$ rappresenta la *velocità della particella due nel sistema di riferimento che vede la particella uno in quiete*.

Lezione 4

2020-03-24

4.1 Sistemi di due particelle (reprise)

4.1.1 Energia, Impulso e Velocità di una particella nel sistema CM

È nostro scopo ora calcolare le grandezze energia, impulso e velocità delle due particelle nel sistema di riferimento del centro di massa (CM).

Nel sistema del centro di massa consideriamo come particella a riposo la particella fittizia *centro di massa* ed utilizziamo le equazioni 3.43 considerando appunto come particella di riferimento la particella *centro di massa*. Rispetto alle equazioni 3.43 avremo quindi che ¹:

$$\begin{cases} \mathbf{P}_1 \rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_2 \rightarrow \mathbf{P}_i \quad (i = 1, 2) \end{cases} \quad [4.1]$$

Quindi riscriviamo il set di equazioni 3.43:

$$\begin{cases} \epsilon_i^* = \frac{\mathbf{P}\mathbf{P}_i}{M} \\ |\vec{p}_i^*|^2 = \frac{(\mathbf{P}\mathbf{P}_i)^2 - M^2 m_i^2}{M^2} \\ |\vec{\beta}_i^*|^2 = \frac{(\mathbf{P}\mathbf{P}_i)^2 - M^2 m_i^2}{(\mathbf{P}\mathbf{P}_i)^2} \end{cases} \quad [4.2]$$

Ricordiamoci che $\mathbf{P}_i = \{m_i, \vec{p}_i\}$. Ci interessa ora sapere l'espressione esplicita di $\mathbf{P}\mathbf{P}_i$, quindi:

$$\mathbf{P}\mathbf{P}_i = (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_i \quad [4.3]$$

e poiché $i = 1, 2$, dunque:

$$\mathbf{P}\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_i^2 = \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 + m_i^2 = \frac{1}{2} [M^2 - m_1^2 - m_2^2] + m_i^2 \quad [4.4]$$

dove M è la *massa invariante della particella (fittizia) CM* e $m_{i=1,2}$ le *masse invarianti delle due particelle* 1, 2. Il primo termine della somma:

$$\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 = \frac{1}{2} [(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^2 - \mathbf{P}_1^2 - \mathbf{P}_2^2] = \frac{1}{2} [M^2 - m_1^2 - m_2^2] \quad [4.5]$$

dove abbiamo sfruttato le relazioni fra la norma del quadrimpulso e la massa delle particelle. Sostituendo nell'equazione precedente si ottiene:

$$\boxed{\mathbf{P}\mathbf{P}_i = \frac{1}{2} (M^2 + m_i^2 - m_j^2) \quad i, j = 1, 2, \quad \text{e} \quad i \neq j} \quad [4.6]$$

Per le **energie** viste dal sistema del centro di massa:

$$\begin{cases} \epsilon_1^* = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} \\ \epsilon_2^* = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M} \end{cases} \quad [4.7]$$

¹ \vec{p} è riferito alla particella CM

vediamo che, nonostante nel sistema del centro di massa le due particelle abbiano lo stesso impulso (in modulo), le energie sono diverse, causa le diverse masse.

Osserviamo che la loro somma dovrebbe fornire la massa invariante M , infatti:

$$\epsilon_1^* + \epsilon_2^* = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2 + M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M} = \frac{2M^2}{2M} = M \quad [4.8]$$

Per gli **impulsi** (*trivettori*) visti dal sistema del centro di massa:

$$|\vec{p}_1^*|^2 = \frac{(M^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - 4M^2 m_1^2}{4M^2} \quad [4.9]$$

e analogamente per $|\vec{p}_2^*|^2$, quindi svolgendo i calcoli:

$$|\vec{p}^*|^2 = |\vec{p}_1^*|^2 = |\vec{p}_2^*|^2 = \frac{[M^2 - (m_1 + m_2)^2][M^2 - (m_1 - m_2)^2]}{4M^2} \quad [4.10]$$

Esempio 4.1.2. Dimostrare che effettuando una trasformazione di Lorentz al CM si ottiene:

$$\vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = 0 \quad [4.11]$$

Nota. Ricordiamo che le quantità relative al SR del centro di massa sono indicate con il simbolo $*$.

Dimostriamo questa relazione utilizzando le trasformazioni di Lorentz nella forma vettoriale (equazione 1.26) e trasformiamo l'impulso come segue:

$$\vec{p}^* = \vec{p} - \vec{\beta}\gamma \left[\frac{\gamma}{\gamma+1} (-\vec{\beta} \cdot \vec{p}) + \epsilon \right] = \vec{p} + \vec{\beta}\gamma \left[\frac{\gamma}{\gamma+1} (\vec{\beta} \cdot \vec{p}) - \epsilon \right] \quad [4.12]$$

Quindi scriviamo la trasformazione dell'impulso somma:

$$\vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{\beta}\gamma \left[\frac{\gamma}{\gamma+1} \vec{\beta} \cdot (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) - (\epsilon_1 + \epsilon_2) \right] \quad [4.13]$$

Sfruttando il risultato dell'equazione 3.35, sostituendo:

$$\vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = \vec{\beta}(\epsilon_1 + \epsilon_2) + |\vec{\beta}|^2 \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \vec{\beta}(\epsilon_1 + \epsilon_2) - \gamma \vec{\beta}(\epsilon_1 + \epsilon_2) \quad [4.14]$$

mettiamo in evidenza $\vec{\beta}(\epsilon_1 + \epsilon_2)$:

$$\vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = \vec{\beta}(\epsilon_1 + \epsilon_2) \left[1 + |\vec{\beta}|^2 \frac{\gamma^2}{\gamma+1} - \gamma \right] \quad [4.15]$$

Sfruttando la relazione:

$$|\vec{\beta}|^2 = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} = \frac{(\gamma - 1)(\gamma + 1)}{\gamma^2} \quad [4.16]$$

possiamo concludere quanto segue:

$$\begin{aligned} \vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* &= \vec{\beta}(\epsilon_1 + \epsilon_2) \left[1 + \frac{(\gamma - 1)(\gamma + 1)}{\gamma^2} \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} - \gamma \right] \\ &= \vec{\beta}(\epsilon_1 + \epsilon_2) [\cancel{\gamma} + \cancel{\gamma} - \gamma] \\ &= 0 \end{aligned} \quad [4.17]$$

Quindi abbiamo dimostrato quanto era richiesto.

Esercizio. All'interno del nucleo, i nucleoni si muovono con energie cinetica dell'ordine di 20 MeV. Studiare gli effetti cinematici di questo movimento quando protoni di energia cinetica di 200 GeV urtano i nucleoni nei casi in cui questi si muovano in direzione *parallela* e *antiparallela* ai protoni del fascio. Consideriamo per semplicità la massa dei nucleoni $1 \frac{\text{GeV}}{c^2}$.

1. Calcolare la differenza di energia nel centro di massa nei casi *parallelo* e *antiparallelo*.
2. Quale energia dovrebbero avere i protoni incidenti per trovare la stessa energia nel centro di massa se urtassero nucleoni a riposo?

Il quadrimpulso totale nel caso *parallelo*:

$$\mathbf{P} = \{E_p + E_n, p_p + p_n, 0, 0\} \quad [4.18]$$

e nel caso *antiparallelo*:

$$\mathbf{P} = \{E_p + E_n, p_p - p_n, 0, 0\} \quad [4.19]$$

L'energia disponibile nel centro di massa (invariante):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^2 &= E^{*2} \\ &= (E_n + E_p)^2 - (p_p \pm p_n)^2 \\ &= E_n^2 + E_p^2 + 2E_p E_n - p_p^2 - p_n^2 \mp 2p_p p_n \\ &= \cancel{p_n^2} + m_n^2 + \cancel{p_p^2} + m_p^2 + 2E_p E_n - \cancel{p_p^2} - \cancel{p_n^2} \mp 2p_p p_n \\ &= 2m_n^2 + 2E_p E_n \mp 2\sqrt{(E_p^2 - m_p^2)(E_n^2 - m_n^2)} \end{aligned} \quad [4.20]$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo considerato le masse dei nucleoni uguali in approssimazione $m_p = m_n$ e abbiamo sfruttato l'equazione $p_p p_n = \sqrt{(E_p^2 - m_p^2)(E_n^2 - m_n^2)}$. Indicando con T_x l'energia cinetica:

$$T_p: \quad E_p = T_p + m_n = 200 \text{ GeV} + 1 \text{ GeV} = 201 \text{ GeV} \quad [4.21]$$

$$T_n: \quad E_n = T_n + m_n = 20 \text{ MeV} + 1 \text{ GeV} = 1.02 \text{ GeV} \quad [4.22]$$

Quindi:

$$E^{*2} = 2(1^2 + 201 \cdot 1.02 \mp 40.4) \text{ GeV}^2 = \begin{cases} 331.24 \text{ GeV}^2, & \text{Parallelo} \\ 492.92 \text{ GeV}^2, & \text{Antiparallelo} \end{cases} \quad [4.23]$$

allora:

$$E^* = \begin{cases} 18.2 \text{ GeV}, & \text{Parallelo} \\ 22.2 \text{ GeV}, & \text{Antiparallelo} \end{cases} \quad [4.24]$$

Rispondendo alla seconda domanda:

$$\mathbf{P}_n = \{E_n, 0, 0, 0\} \quad [4.25]$$

quindi:

$$E_n = \sqrt{\cancel{p_n^2} + m_n^2} = m_n \quad [4.26]$$

Dunque:

$$E_p \rightarrow E'_p: \quad E^{*2} = 2m_n^2 + 2E'_p E_n \mp 2\sqrt{(E_p^2 - m_p^2)(\cancel{m_n^2} - \cancel{m_n^2})} = 2m_n^2 + 2E'_p E_n \quad [4.27]$$

Allora scriviamo:

$$2E'_p E_n = E^{*2} - 2m_n^2 \quad \Rightarrow \quad E'_p = \frac{1}{2m_n} [E^{*2} - 2m_n^2] = \frac{E^{*2}}{2m_n} - m_n \quad [4.28]$$

Infine:

$$E'_p = \begin{cases} 164.92 \text{ GeV} & \text{Antiparallelo} \\ 245.42 \text{ GeV}, & \text{Parallelo} \end{cases} \quad [4.29]$$

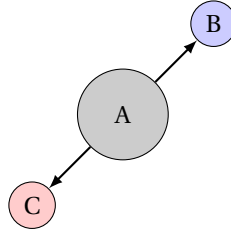


Figura 4.1: Schema del decadimento in due corpi nel sistema del centro di massa

4.2 Decadimento in due corpi

Trattiamo ora il caso di una particella **A** che decade in due particelle **B** e **C** (figura 4.1) nel sistema del centro di massa (CM). L'energia disponibile nel centro di massa è proprio l'energia a riposo della particella iniziale **A** ed è la quantità $E^* = M$. Dopo il decadimento, chiaramente: $M \rightarrow m_1 + m_2$.

Per il sistema vale:

$$\begin{cases} \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \\ \epsilon_1^* + \epsilon_2^* = E^* = M \end{cases} \quad [4.30]$$

dove:

$$\epsilon_1^* = \frac{M^2 + m_1^2 + m_2^2}{2M}; \quad \epsilon_2^* = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} \quad [4.31]$$

$$|\vec{p}^*|^2 = |\vec{p}_1^*|^2 = |\vec{p}_2^*|^2 = \frac{[M^2 - (m_1 + m_2)^2][M^2 - (m_1 - m_2)^2]}{4M^2} \quad [4.32]$$

Nota. In questo schema di decadimento abbiamo considerato una distribuzione *isotropa* degli impulsi risultanti dal decadimento. Questa condizione d'isotropia, tuttavia, può essere fortemente alterata dalla dinamica interna del sistema, che noi in questo caso stiamo trascurando. Questo vuol dire che non è detto che la direzione degli impulsi risultanti sia soggetta a una condizione d'isotropia.

Esempio 4.2.1. Consideriamo il caso di un decadimento di un *pione positivo* π^+ in un *muone positivo* μ^+ e in un *neutrino muonico* ν_μ :

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad [4.33]$$

Le masse delle particelle:

$$m_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2; \quad m_\mu = 106 \text{ MeV}/c^2; \quad m_\nu = 0 \text{ MeV}/c^2 \quad [4.34]$$

Sfruttando i risultati che abbiamo ricavato fino a ora, nel sistema del centro di massa abbiamo:

$$|\vec{p}_\mu^*|^2 = |\vec{p}_\nu^*|^2 = \frac{[m_\pi^2 - (m_\mu^2 + m_\nu^2)][m_\pi^2 - (m_\mu^2 - m_\nu^2)]}{4m_\pi^2} = \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)(m_\pi^2 - m_\mu^2)}{4m_\pi^2} = \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2}{4m_\pi^2} \quad [4.35a]$$

$$\Rightarrow |\vec{p}_\mu^*| = |\vec{p}_\nu^*| = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\mu} = \frac{140^2 - 106^2}{2 \cdot 140} \text{ MeV}/c \simeq 30 \text{ MeV}/c \quad [4.35b]$$

Per le energie abbiamo:

$$\epsilon_\mu = \sqrt{|\vec{p}_\mu^*|^2 + m_\mu^2} \simeq 110 \text{ MeV}; \quad \epsilon_\nu = \sqrt{|\vec{p}_\nu^*|^2 + m_\nu^2} \simeq 30 \text{ MeV} \quad [4.36]$$

Esempio 4.2.2. Consideriamo il caso del decadimento della particella Λ^2 :

$$\Lambda \longrightarrow p + \pi^- \quad [4.37]$$

² Λ è una particella neutra; In tutte le reazioni valgono:

- principio di conservazione della carica
- principio di conservazione del numero leptonico
- principio di conservazione del numero barionico

Date le masse:

$$m_{\Lambda} = 1116 \text{ MeV}/c^2; \quad m_p = 938 \text{ MeV}/c^2; \quad m_{\pi^-} = 140 \text{ MeV}/c^2 \quad [4.38]$$

Abbiamo, nel sistema di riposo della particella Λ che decade, che coincide con il sistema del centro di massa:

$$|\vec{p}_p^*|^2 = |\vec{p}_{\pi^-}^*|^2 = \frac{[m_{\Lambda}^2 - (m_p + m_{\pi})^2][m_{\Lambda}^2 - (m_p - m_{\pi})^2]}{4M_{\Lambda}^2} \simeq 101 \text{ MeV}/c \quad [4.39]$$

Lezione 5

Lezione 26/03/2020

5.1 Soglia di una reazione

Discutiamo ora le reazioni che possono avvenire solo superando la cosiddetta **soglia di reazione**.

Dall'equazione 4.32, poiché $|\vec{p}^*|^2$ è una quantità positiva, allora dovrà necessariamente valere:

$$M \geq m_1 + m_2 \quad [5.1]$$

Affinché un decadimento possa avvenire, le masse (invarianti) delle due particelle prodotte devono essere al più (sommate) pari alla massa della particella che decade (se emesse a riposo) o minori, e in tal caso l'energia associata alla "massa in eccesso" si traduce in impulso delle due particelle prodotte.

La relazione appena indicata definisce la **soglia di reazione** e in modo generale si può scrivere:

$$\text{Soglia di Reazione} \quad \boxed{P^2 = (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^2 \geq \left(\sum_{f=1}^{N_{\text{fin}}} m_f \right)^2} \quad [5.2]$$

Esempio 5.1.1 (Soglia della fotoproduzione del pione neutro). La reazione di *fotoproduzione del pione neutro*, con targhetta di protoni a riposo $\vec{p}_p = 0$, è la seguente:

$$\gamma + p \longrightarrow p + \pi^0 \quad [5.3]$$

dove con γ si indica il fotone incidente sul protone bersaglio p e π^0 il pione neutro. Le masse:

$$m_p = 938 \text{ MeV}/c^2; m_{\pi^0} = 135 \text{ MeV}/c^2; \quad [5.4]$$

Nota. La massa del pione neutro è inferiore rispetto a quella del pione carico

I relativi quadrimpulsi iniziali:

$$\mathbf{P}_\gamma = \{E_\gamma, E_\gamma\}; \quad \mathbf{P}_p = \{m_p, 0\} \quad [5.5]$$

L'impulso iniziale del protone è nullo supponendo il protone bersaglio inizialmente fermo (questa è ovviamente un'approssimazione). L'equazione 5.2 che descrive la soglia della reazione diventa in questo caso:

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}_\gamma + \mathbf{P}_p)^2 &= (E_\gamma + m_p)^2 - E_\gamma^2 \\ &= \cancel{E_\gamma^2} + m_p^2 + 2E_\gamma m_p - \cancel{E_\gamma^2} \\ &= m_p (2E_\gamma + m_p) \\ &\geq (m_p + m_{\pi^0})^2 \end{aligned} \quad [5.6]$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che il fotone abbia massa nulla¹. Quindi definendo $E_\gamma^{(s)}$ l'*energia di soglia* della reazione, possiamo dire che la reazione avviene se l'energia del fotone γ è tale che:

$$E_\gamma \geq E_\gamma^{(s)} = \frac{(m_p + m_{\pi^0})^2 - m_p^2}{2m_p} \simeq 145 \text{ MeV} \quad [5.7]$$

¹ Infatti esprimendo esplicitamente l'impulso del fotone $\vec{p}_\gamma = \sqrt{E_\gamma^2 - m_\gamma^2} = E_\gamma$ il quadrimpulso si riduce a $\mathbf{P} = \{E_\gamma, \vec{p}_\gamma\} = \{E_\gamma, E_\gamma\}$

Esempio 5.1.2 (Soglia al collider). A differenza degli esperimenti a targhetta fissa, se i fasci di particelle hanno la stessa massa e impulsi uguali e contrari. Al collider il sistema del centro di massa coincide con il sistema del laboratorio.

Consideriamo la collisione di un fascio di elettroni ed un fascio di positroni:

$$e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^- \quad [5.8]$$

I quadrimpulsi:

$$\mathbf{P}_{e^-} = \{E_{e^-}, \vec{p}_{e^-}\}; \quad \mathbf{P}_{e^+} = \{E_{e^+}, \vec{p}_{e^+}\} \quad [5.9]$$

Quindi, considerando che $\vec{p}_{e^+} = -\vec{p}_{e^-}$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}_{e^+} + \mathbf{P}_{e^-})^2 &= (E_{e^+} + E_{e^-})^2 - (\vec{p}_{e^+} + \vec{p}_{e^-})^2 \\ &= E_{e^+}^2 + E_{e^-}^2 + 2E_{e^+}E_{e^-} \\ &= (2E_e)^2 \geq (2m_\mu)^2 \end{aligned} \quad [5.10]$$

Quindi l'energia di soglia:

$$E_e^{(S)} = m_\mu = 106 \text{ MeV} \quad [5.11]$$

5.1.3 Esperimenti a bersaglio fisso

Nel caso di esperimenti a bersaglio fisso, dove consideriamo l'impulso della particella bersaglio nullo (*bersaglio fermo*), l'espressione di soglia assume una forma utile se espressa in termini di **energia cinetica**². Definendo p la particella *proiettile* e B la particella *bersaglio*, consideriamo la reazione:

$$p + B \longrightarrow 1 + 2 + \dots + N_{\text{fin}} \quad [5.12]$$

allora abbiamo³:

- **stato iniziale**, *prima dell'urto* (poiché il bersaglio è supposto fermo la sua energia sarà l'energia a riposo, quindi $E_B \equiv m_B$ è l'impulso nullo $p_B = 0$):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^2 &= (E_p^2 + E_B^2) - |\vec{p}_p + \vec{p}_B|^2 \\ &= (E_p^2 + m_B^2) - |\vec{p}_p|^2 \\ &= E_p^2 + m_B^2 + 2E_p m_B - E_p^2 + m_p^2 \\ &= m_p^2 + m_B^2 + 2m_B E_p \\ &= m_p^2 + m_B^2 + 2m_B (T_p + m_p) \\ &= m_p^2 + m_B^2 + 2m_B m_p + 2m_B T_p \\ &= (m_p + m_B)^2 + 2m_B T_p \end{aligned} \quad [5.13]$$

- **stato finale**, *dopo l'urto*:

$$\mathbf{P}^2 = \left(\sum_{f=1}^{N_{\text{fin}}} E_f^* \right)^2 = \left(\sum_{f=1}^{N_{\text{fin}}} [T_f^* + m_f] \right)^2 \geq \left(\sum_{f=1}^{N_{\text{fin}}} m_f \right)^2 \quad [5.14]$$

Poiché la **condizione di soglia** è data dall'uguaglianza, allora abbiamo che per tale condizione tutte le energie cinetiche sono nulle⁴.

Poiché \mathbf{P}^2 è un *invariante relativistico*, uguagliando gli ultimi termini delle equazioni 5.13 e 5.14 e imponendo che T_p sia proprio l'energia cinetica di soglia:

$$(m_p + m_B)^2 + 2m_B T_p = \left(\sum_{f=1}^{N_{\text{fin}}} m_f \right)^2 \quad [5.15]$$

²In unità naturali l'espressione relativistica dell'energia cinetica è $T = E - m$

³Stiamo considerando la particella bersaglio ferma, quindi $E_B = m_p$

⁴Particelle create ferme nel centro di massa CM del sistema

con $T_p \equiv T_p^{(s)}$. Fatte queste considerazioni possiamo quindi scrivere che per la condizione di soglia varrà:

$$\text{Energia Cinetica di Soglia} \quad T_p^{(s)} = \frac{(\sum_f m_f)^2 - (m_p + m_B)^2}{2m_B} \quad [5.16]$$

Nota. Per ottenere l'energia cinetica di soglia abbiamo sfruttato l'*invariante* relativistico \mathbf{P}^2 e la *conservazione del quadrimpulso*.

Esempio 5.1.4 (Produzione di coppie). Soglia per la produzione di coppie (indicando con N i nuclei):

$$\gamma + N \rightarrow N + e^+ + e^- \quad [5.17]$$

è una reazione che *non può avvenire in vuoto*⁵ La soglia della reazione è la seguente:

$$T_\gamma^{(s)} = E_\gamma^{(s)} = \frac{(M + 2m_{e^-})^2 - M^2}{2M} \quad [5.18]$$

Un'altra cosa che possiamo notare è la seguente. La massa dell'elettrone è $m_{e^-} = 0.511 \text{ MeV}/c^2$; indicando con A il numero di nucleoni e m_n la massa del nucleone, la massa del nucleo sarà $M = Am_n = A \cdot 1000 \text{ MeV}/c^2$. Quindi abbiamo che $M \gg m_{e^-}$, ma non possiamo dire che la soglia della reazione è nulla! Dobbiamo sviluppare:

$$E_\gamma^{(s)} = \frac{M^2 + 4m_{e^-}^2 + 4Mm_{e^-} - M^2}{2M} \simeq \frac{4Mm_{e^-}}{2M} = 2m_{e^-} \simeq 1 \text{ MeV} \quad [5.19]$$

Esempio 5.1.5 (Produzione di antiprotoni). Vediamo ora la soglia per la produzione di antiprotoni⁶.

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p} \quad [5.20]$$

Ammessi che questa reazione sia permessa dalla dinamica della produzione di antiprotoni, vogliamo calcolare quale sia la soglia minima per la produzione di antiprotoni⁷ (la massa del protone/antiprotone è $m_p = m_{\bar{p}} \simeq 0.940 \text{ GeV}/c^2$):

$$T_p^{(s)} = \frac{(4m_p)^2 - (2m_p)^2}{2m_p} = 6m_p \simeq 5.9 \text{ GeV} \quad [5.21]$$

5.2 Angolo di apertura di un decadimento in due corpi

Supponiamo di essere in presenza di un fenomeno di decadimento in due corpi visto dal sistema di riferimento del laboratorio (**Lab**) di una particella iniziale di massa M in due particelle a, b :

$$M \rightarrow a + b \quad [5.22]$$

Sia θ l'angolo di apertura fra gli impulsi \vec{p}_a e \vec{p}_b delle particelle prodotte dalla reazione e $\mathbf{P}_a = \{E_a, \vec{p}_a\}$ e $\mathbf{P}_b = \{E_b, \vec{p}_b\}$ i quadrimpulsi delle due particelle risultanti dalla reazione:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^2 &= M^2 \\ &= (\mathbf{P}_a + \mathbf{P}_b)^2 \\ &= (E_a + E_b)^2 - |\vec{p}_a + \vec{p}_b|^2 \\ &= E_a^2 + E_b^2 + 2E_aE_b - |\vec{p}_a|^2 - |\vec{p}_b|^2 - 2|\vec{p}_a||\vec{p}_b|\cos\theta \\ &= m_a^2 + m_b^2 + 2E_aE_b - 2|\vec{p}_a||\vec{p}_b|\cos\theta \end{aligned} \quad [5.23a]$$

⁵La reazione

$$\gamma \rightarrow e^+ + e^-$$

non può avvenire. Infatti dato che $\mathbf{P}_\gamma = \{E_\gamma, \vec{p}_\gamma\}$:

$$\mathbf{P}_{\text{ini}}^2 = 0 \neq \mathbf{P}_{\text{fin}}^2 = (E_{e^-}^* + E_{e^+}^*)^2 \geq (2m_e)^2$$

⁶Deve valere la *conservazione del numero barionico*

⁷Le masse delle antiparticelle sono le medesime di quelle delle corrispondenti particelle

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{m_a^2 + m_b^2 - M^2 + 2E_a E_b}{2|\vec{p}_a||\vec{p}_b|} \quad [5.23b]$$

Nell'ipotesi che le particelle a, b prodotte siano particelle **ultrarelativistiche**, ovvero particelle per cui $E_a \gg m_a$ e $E_b \gg m_b$, la precedente espressione si semplifica in⁸:

$$\cos \theta = \frac{m_a^2 + m_b^2 - M^2}{2E_a E_b} + 1 \quad [5.24a]$$

$$\Rightarrow 1 - \cos \theta = \frac{M^2 - m_a^2 - m_b^2}{2E_a E_b} \quad [5.24b]$$

che, essendo $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$, diventa:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{M^2 - m_a^2 - m_b^2}{4E_a E_b}} \quad [5.25]$$

Ora se E è l'energia della particella che decade nel sistema del laboratorio; ridefinendo E' l'energia della particella a ($E' = E_a$), allora possiamo scrivere l'energia della particella b come $E_b = E - E'$ ed esprimere l'angolo di apertura fra le particelle solo come funzione di E ed E' :

$$\boxed{\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{M^2 - m_a^2 - m_b^2}{4E'(E - E')}}} \quad [5.26]$$

Nota (Angolo di apertura in funzione dell'energia E'). Come varia l'angolo di apertura θ in funzione dell'energia E' , fissata l'energia E della particella che decade nel centro di massa?

In particolare tale funzione ammetterà un **minimo**:

$$\frac{\partial \sin(\frac{\theta}{2})}{\partial E'} = \sqrt{\frac{M^2 - m_a^2 - m_b^2}{4}} \frac{\partial}{\partial E'} \sqrt{\frac{1}{E'(E - E')}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial E'} \sqrt{\frac{1}{E'(E - E')}} = 0 \quad [5.27a]$$

$$\frac{\partial}{\partial E'} \sqrt{\frac{1}{E'(E - E')}} = -\frac{2E' - E}{2[E'(E - E')]^{3/2}} = 0 \Leftrightarrow 2E' - E = 0 \quad [5.27b]$$

$$\boxed{E' = \frac{E}{2}} \quad [5.27c]$$

e si può verificare facilmente che sia un minimo (e.g. calcolando la derivata seconda). Questo vuol dire che le particelle risultanti dividono esattamente a metà l'energia iniziale della particella che decade, in tal caso l'angolo di apertura sarà minimo. Quindi per il minimo della funzione $\sin \frac{\theta}{2}$ vale la relazione:

$$\boxed{\left(\sin \frac{\theta}{2}\right)_{\min} = \sqrt{\frac{M^2 - m_a^2 - m_b^2}{E}}} \quad [5.28]$$

Esempio 5.2.1. Calcoliamo l'angolo minimo per la reazione:

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$$

dove sono note le quantità $m_{\pi^0} = 135 \text{ MeV}/c^2$ e $E_{\pi^0} = 1 \text{ GeV}$. L'angolo minimo sarà:

$$\left(\sin \frac{\theta}{2}\right)_{\min} = \frac{\sqrt{m_{\pi^0}^2}}{E} = \frac{m_{\pi^0}}{E} = 0.135 \quad [5.29a]$$

$$\Rightarrow \theta_{\min} \simeq 15.52^\circ \quad [5.29b]$$

Nota. Questo **non** è un processo a soglia, perché i pioni sono massivi, mentre i fotoni γ non lo sono. La reazione, dunque, avviene sempre, anche in quiete.

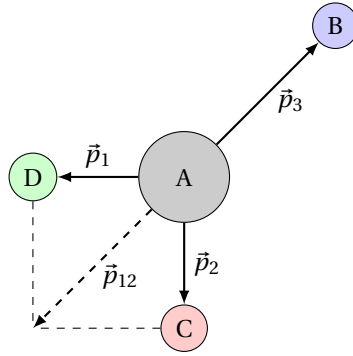


Figura 5.1: Schema del decadimento in tre corpi nel sistema del centro di massa

5.3 Decadimento in tre corpi

Nel sistema del centro di massa (**CM**) schematizziamo il decadimento in tre corpi come in figura 5.1.

Nel sistema del centro di massa valgono le seguenti relazioni (la particella che decade nel sistema del centro di massa ha impulso nullo):

$$\begin{cases} \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0 \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = E^* = M \end{cases} \quad [5.30]$$

Per risolvere il problema lo riduciamo in un decadimento in due corpi introducendo la *particella virtuale*⁹ **DC** di massa $M_{12} = m_1 + m_2$, tale che $M = M_{12} + m_3$, e d'impulso $\vec{p}_{12} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$. Il quadrimpulso della particella **DC** sarà la somma dei quadrimpulsi delle singole particelle:

$$\mathbf{P}_{12} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \{\epsilon_1 + \epsilon_2, \vec{p}_1 + \vec{p}_2\} \quad [5.31]$$

L'invariante relativistico associato:

$$M_{12}^2 = \mathbf{P}_{12}^2 = (\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 \quad [5.32]$$

Osserviamo che M_{12} non è costante, ma varia nei limiti cinematici imposti dalla conservazione del quadrimpulso. Risolvendo le equazioni 5.30 per la particella **B** otteniamo:

$$M_{12}^2 = (M - \epsilon_3)^2 - |\vec{p}_3|^2 = M^2 + m_3^2 - 2M\epsilon_3 \quad [5.33]$$

$$\Rightarrow \boxed{\epsilon_3 = \frac{M^2 + m_3^2 - M_{12}^2}{2M}} \quad [5.34]$$

Dall'ultima equazione è evidente come ϵ_3 dipenda dal valore di M_{12} . Quindi possiamo trovare gli estremi di ϵ_3 , ovvero $(\epsilon_3)_{\min}$ e $(\epsilon_3)_{\max}$.

Nota. Possiamo ripetere il ragionamento per trovare $(\epsilon_i)_{\min, \max}$, $\forall i = 1, 2, 3$.

5.3.1 Energia minima

La condizione per cui $\epsilon_3 = (\epsilon_3)_{\min}$ è che la particella **B** sia emessa a riposo rispetto al sistema del centro di massa¹⁰. Infatti in tale condizione:

$$\begin{cases} (\vec{p}_3)_{\min} = 0 \\ (\epsilon_3)_{\min} = m_3 \end{cases} \quad [5.35]$$

l'energia corrisponde alla massa a riposo (che è l'energia minima che una particella possa assumere). Dall'equazione 5.34 otteniamo un valore per M_{12} in condizione di energia minima per la particella **B**:

$$\epsilon_3 = \frac{M^2 + m_3^2 - M_{12}^2}{2M} = m_3 \quad [5.36]$$

⁸Poiché in tale approssimazione $|\vec{p}_\alpha| = \sqrt{E_\alpha^2 - m_\alpha^2} \sim E_\alpha$ con $\alpha = a, b$

⁹Il ragionamento può essere applicato a ognuna delle particelle per permutazione delle coppie

¹⁰Questa condizione è *cinematicamente ammissibile*

Quindi:

$$M_{12}^2 = M^2 + m_3^2 - 2Mm_3 = (M - m_3)^2 \quad [5.37]$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{12} = M - m_3} \quad [5.38]$$

Calcoliamo anche $|\vec{p}| = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$ relativo a questa configurazione del sistema:

$$\begin{cases} \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 = M - m_3 \end{cases} \quad [5.39]$$

quindi si ricava:

$$\boxed{|\vec{p}| = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = \frac{[(M - m_3)^2 - (m_1 + m_2)^2][(M - m_3)^2 - (m_1 - m_2)^2]}{4(M - m_3)^2}} \quad [5.40]$$

5.3.2 Energia massima

Come si può osservare dall'equazione 5.34, il valore massimo di energia ϵ_3 si ottiene in corrispondenza del valore minimo della massa invariante M_{12} della particella fittizia \mathbf{DC}^{11} .

$$(M_{12})_{\min} \longrightarrow (\epsilon_3)_{\max} \quad [5.41]$$

Quindi, scrivendo esplicitamente M_{12} :

$$\begin{aligned} M_{12}^2 &= (\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 \\ &= \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + 2\epsilon_1\epsilon_2 - |\vec{p}_1|^2 - |\vec{p}_2|^2 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2(\epsilon_1\epsilon_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) \end{aligned} \quad [5.42]$$

quindi, poiché m_1 ed m_2 sono costanti, M_{12} è minimo quando è minima la quantità in parentesi. E al minimo la quantità in parentesi vale proprio $m_1 m_2$. Questa condizione coincide con la configurazione in cui le due particelle \mathbf{C} e \mathbf{D} vengono emesse a riposo. La precedente equazione diventa:

$$M_{12}^2 \geq (m_1 + m_2)^2 \quad [5.43]$$

e l'uguaglianza *stretta* è rispettata se le due particelle \mathbf{C} e \mathbf{D} si muovono nella stessa direzione e con la stessa velocità, ovvero quando valgono le seguenti condizioni:

$$\frac{\vec{p}_1}{\epsilon_1} = \frac{\vec{p}_2}{\epsilon_2} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\beta}_1 = \vec{\beta}_2 = \vec{\beta} \quad [5.44]$$

Si verifica, infatti, che sostituendo nell'espressione di M_{12}^2 (utilizziamo la relazione $\gamma = \frac{E}{m}$):

$$\begin{aligned} M_{12}^2 &= m_1^2 + m_2^2 + 2(\epsilon_1\epsilon_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2(\epsilon_1\epsilon_2 - \beta_1\epsilon_1\beta_2\epsilon_2) \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2\epsilon_1\epsilon_2(1 - \beta_1\beta_2) \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2\epsilon_1\epsilon_2(1 - \beta^2) \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2\epsilon_1\epsilon_2 \frac{1}{\gamma^2} \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2m_1\gamma m_2\gamma \frac{1}{\gamma^2} \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2 \\ &= (m_1 + m_2)^2 \end{aligned} \quad [5.45]$$

Possiamo quindi concludere che:

$$\boxed{(\epsilon_3)_{\max} = \frac{M^2 + m_3^2 - (m_1 + m_2)^2}{2M}} \quad [5.46]$$

¹¹ Sempre in riferimento alla figura 5.1

Esempio 5.3.3 (Decadimento β^-). Vogliamo calcolare l'intervallo di energia permesso all'elettrone nel decadimento β^- (reazione frequente all'interno dei nuclei atomici):

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad [5.47]$$

Essendo un decadimento a tre corpi, non esiste un'energia ben definita per l'elettrone. Le masse delle particelle sono:

$$m_n = 939.56 \text{ MeV}/c^2; \quad m_p = 938.27 \text{ MeV}/c^2; \quad m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2; \quad m_{\bar{\nu}} \simeq 0 \text{ MeV}/c^2 \quad [5.48]$$

Quindi le energie per l'elettrone, a reazione avvenuta:

$$\begin{cases} (\epsilon_{e^-})_{\min} = m_e = 0.511 \text{ MeV} \\ (\epsilon_{e^-})_{\max} = \frac{m_n^2 + m_e^2 - m_p^2}{2m_n} \simeq 1.3 \text{ MeV} \end{cases} \quad [5.49]$$

Esempio 5.3.4 (Decadimento del muone). Vediamo ora la reazione di decadimento del muone μ^+ :

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \quad [5.50]$$

dove e^+ è un positrone, ν_e è un neutrino elettronico e $\bar{\nu}_\mu$ un antineutrino muonico. Le masse sono:

$$m_{\mu^+} = 105.7 \text{ MeV}/c^2; \quad m_{\bar{\nu}_\mu} = m_{\nu_e} = 0; \quad m_{e^+} = 0.511 \text{ MeV}/c^2 \quad [5.51]$$

Quindi le energie:

$$\begin{cases} (\epsilon_{e^+})_{\min} = m_{e^+} = 0.511 \text{ MeV} \\ (\epsilon_{e^+})_{\max} = \frac{m_\mu^2 + m_{\nu_e}^2 - m_{\bar{\nu}_\mu}^2}{2m_{\mu^+}} \simeq \frac{m_{\mu^+}}{2} = 52.8 \text{ MeV} \end{cases} \quad [5.52]$$

Esempio 5.3.5. Vediamo un ultimo esempio¹²:

$$\omega \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0 \quad [5.53]$$

Le masse sono:

$$m_\omega = 782 \text{ MeV}/c^2; \quad m_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2 \quad [5.54]$$

Le energie:

$$\begin{cases} (\epsilon_\pi)_{\min} = m_\pi = 140 \text{ MeV} \\ (\epsilon_\pi)_{\max} = \frac{m_\omega^2 + m_\pi^2 - 4m_\pi^2}{2m_\omega} = \frac{m_\omega^2 - 3m_\pi^2}{2m_\omega} = 353 \text{ MeV} \end{cases} \quad [5.55]$$

¹²La particella ω è un **mesone**

Lezione 6

Lezione 31/03/2020

6.1 Metodo delle ellissi - Cambiamento dello spettro di impulsi dal CM al Lab

Trattiamo il problema di una reazione in cui una *particella incide su un bersaglio fisso* nel sistema del laboratorio (**Lab**) note le masse delle particelle e l'energia della particella incidente.

Nota. D'ora in avanti indicheremo con p_x, p_y, p_z e p_x^*, p_y^*, p_z^* rispettivamente le componenti dei vettori \vec{p} e \vec{p}^* .

Sistema del Centro di Massa Nel sistema del centro di massa (**CM**) sappiamo tutto quello che accade, perché le particelle finali saranno emesse con impulsi uguali e contrari e le quantità associate dipenderanno solo dalle masse finali e dalla massa invariante (ovvero l'energia del centro di massa).

$$|\vec{p}^*|^2 = \frac{[M^2 - (m_1 + m_2)^2][M^2 - (m_1 - m_2)^2]}{4M^2} \quad [6.1]$$

$$\varepsilon_1^* = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}; \quad \varepsilon_2^* = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M} \quad [6.2]$$

Nello spazio degli impulsi possiamo rappresentare i possibili stati della particella come luogo dei vettori che si muovono su una superficie sferica, poiché, *in assenza di effetti dinamici*, non c'è motivo di pensare che ci sia una direzione privilegiata, per cui abbiamo quella che si dice **distribuzione angolare isotropa**¹. Questo vuol dire che l'equazione di tale *superficie sferica* sarà data da:

$$\boxed{\frac{p_x^{*2}}{p^{*2}} + \frac{p_y^{*2}}{p^{*2}} + \frac{p_z^{*2}}{p^{*2}} = 1} \quad [6.3]$$

Sistema del Laboratorio Nel sistema del centro di massa, come detto, tutto è determinato, ma delle eventuali misure sperimentali saranno effettuate nel *sistema del laboratorio*!

Nel passaggio dal sistema del centro di massa a quello del laboratorio, supponiamo che la trasformazione di Lorentz avvenga lungo la direzione \hat{x}^2 . Definiamo $\vec{\beta}$ e γ rispettivamente la velocità e il fattore di Lorentz di tale trasformazione. L'*impulso* trasforma nel seguente modo:

$$\begin{cases} p_x = \gamma(p_x^* + \beta E^*) \\ p_y = p_y^* \\ p_z = p_z^* \end{cases} \quad [6.4]$$

dove E^* è l'energia della particella in oggetto, nel sistema del centro di massa.

Consideriamo ora un valore generico $p_x^* = a$ tale che $0 < a < p^*$; data la condizione di isotropia, allora possiamo dire che esiste anche un valore uguale e opposto $p_x^* = -a$. La differenza fra questi due valori sarà $\Delta p_x^* = 2a$. Quindi nella trasformazione per passare al sistema del laboratorio avremo un *boost di Lorentz* nella direzione \hat{x} , per cui:

$$\begin{cases} \Delta p_x = \gamma \Delta p_x^* = \gamma 2a \\ \Delta p_y = \Delta p_y^* \\ \Delta p_z = \Delta p_z^* \end{cases} \quad [6.5]$$

¹ Questo per via delle considerazioni puramente cinematiche che stiamo effettuando

² È sempre possibile orientare il sistema di riferimento in modo tale che il boost di Lorentz avvenga lungo tale direzione

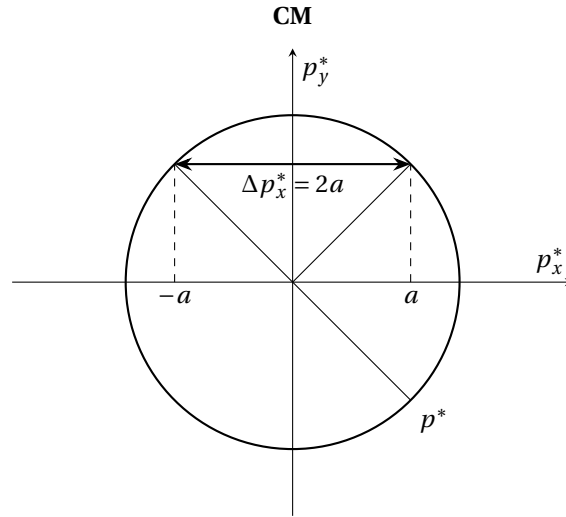


Figura 6.1

quindi le altre direzioni, ovviamente, non subiranno boost di Lorentz.

A seguito di tale boost lungo una singola direzione avremo che quella che prima era una superficie sferica si trasforma in un **ellissoide** nello spazio tridimensionale, dove l'asse x è dilatato dal fattore di Lorentz. Tale ellissoide avrà semiassi:

$$\begin{cases} a_x = \gamma p^* \\ a_y = p^* \\ a_z = p^* \end{cases} \quad [6.6]$$

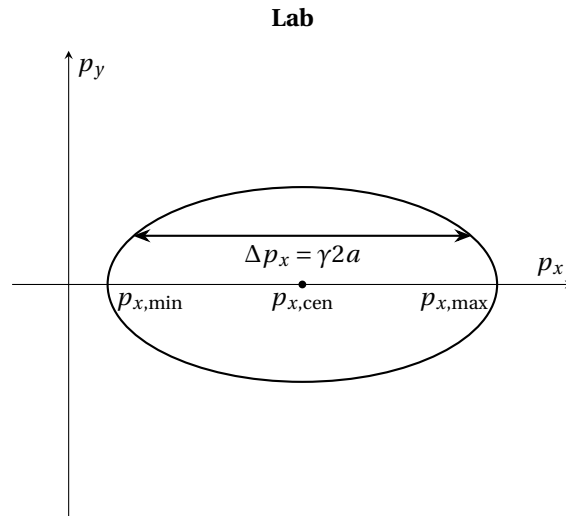


Figura 6.2

Nello spazio degli impulsi del **Lab**, il centro dell'ellissoide coincide al caso $p_x^* = 0$, quindi abbiamo:

$$p_x^{\text{cen}} = \beta\gamma E^*; \quad p_x^{\text{min}} = \gamma(-p^* + \beta E^*); \quad p_x^{\text{max}} = \gamma(p^* + \beta E^*) \quad [6.7]$$

L'equazione di tale ellissoide³:

$$\text{Lab} \quad \frac{(p_x - \beta\gamma E^*)^2}{\gamma^2 p^{*2}} + \frac{p_y^2}{p^{*2}} + \frac{p_z^2}{p^{*2}} = 1 \quad [6.8]$$

³La dipendenza da E^* fa sì che l'ellissoide sia diverso per le particelle ottenute come prodotto di una certa reazione

La dipendenza dell'ellissoide è dai parametri della trasformazione di Lorentz e dai parametri della particella particolare presa in considerazione.

Osserviamo che l'ellissoide tocca il piano $p_x = 0$ se:

$$p_x^{\min} = \gamma(-p^* + \beta E^*) = 0 \quad [6.9]$$

$$\gamma p^* \left(-1 + \frac{\beta E^*}{p^*} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma p^* \left(\frac{\beta}{\beta^*} - 1 \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \beta^* \quad [6.10]$$

ovvero se la velocità della trasformazione β è uguale alla velocità della particella nel centro di massa $\beta^* = \frac{p^*}{E^*}$. Della relazione fra β e β^* possiamo distinguere i tre seguenti casi:

- $\beta < \beta^*$: l'ellissoide taglia il piano p_x , per cui sono ammessi impulsi tali che $p_x < 0$;
- $\beta = \beta^*$: l'ellissoide è tangente al piano p_x , per cui sono ammessi solo impulsi tali che $p_x \geq 0$;
- $\beta > \beta^*$: l'ellissoide è tutto a destra del piano p_x per cui sono ammessi solo impulsi tali che $p_x > 0$.

Lezione 7

Lezione 02/04/2020

7.1 Metodo delle Ellissi (reprise)

7.1.1 Angolo limite nel sistema del Laboratorio

Per semplicità ma senza perdita di generalità ci poniamo nella condizione $p_z = 0$ (con una rotazione attorno all'asse x), ovvero riduciamo il problema a un problema bidimensionale nel piano (p_x, p_y) nel sistema del laboratorio e nel corrispondente (p_x^*, p_y^*) nel sistema del centro di massa.

Per il sistema del Laboratorio (**Lab**) possiamo scrivere:

$$p_y = p_x \tan \theta \quad [7.1]$$

quindi l'equazione dell'ellisse diventa (nel piano):

$$\frac{(p_x - \beta \gamma E^*)^2}{\gamma^2 p^{*2}} + \frac{p_x^2 \tan^2 \theta}{p^{*2}} = 1 \quad [7.2]$$

che, risolvendo rispetto a p_x ha soluzione:

$$\frac{p_x^2 + \beta^2 \gamma^2 E^{*2} - 2 p_x \beta \gamma E^*}{\gamma^2 p^{*2}} + p_x^2 \frac{\tan^2 \theta}{p^{*2}} - 1 = 0 \quad [7.3]$$

quindi:

$$p_x^2 (1 + \gamma^2 \tan^2 \theta) + p_x (-2 \beta \gamma E^*) + (\beta^2 \gamma^2 E^{*2} - \gamma^2 p^{*2}) = 0 \quad [7.4]$$

Le soluzioni:

$$p_x^\pm = \frac{\beta \gamma E^* \pm \sqrt{(\beta \gamma E^*)^2 - (1 + \gamma^2 \tan^2 \theta) (\beta^2 \gamma^2 E^{*2} - \gamma^2 p^{*2})}}{1 + \gamma^2 \tan^2 \theta} \quad [7.5]$$

Il discriminante dell'equazione:

$$\Delta = (\beta \gamma E^*)^2 - (1 + \gamma^2 \tan^2 \theta) (\beta^2 \gamma^2 E^{*2} - \gamma^2 p^{*2}) = \gamma^2 E^{*2} [\beta^* - \gamma^2 \tan^2 \theta (\beta^2 - \beta^{*2})] \quad [7.6]$$

e, poiché $\beta^{*2} > 0$:

- se $\beta < \beta^*$, ovvero $\beta^2 - \beta^{*2} < 0$, allora il discriminante Δ sarà positivo e l'equazione ammetterà *due soluzioni* p_x^\pm reali e distinte, per qualunque angolo θ ;
- se $\beta^* < \beta$, allora si avrà discriminante positivo, quindi due soluzioni, se e solo se:

$$\gamma^2 \tan^2 \theta (\beta^2 - \beta^{*2}) \leq \beta^{*2} \quad [7.7]$$

ovvero:

$$\Rightarrow \tan^2 \theta \leq \frac{\beta^{*2}}{\gamma^2 (\beta^2 - \beta^{*2})} \quad [7.8]$$

Avremo dunque una condizione di *angolo limite* θ_{max} nel sistema del **Lab**:

$$\boxed{\tan^2 \theta_{max} = \frac{\beta^{*2}}{\gamma^2 (\beta^2 - \beta^{*2})}} \quad [7.9]$$

e avremo due soluzioni p_x^\pm solo se $\theta < \theta_{max}$. In corrispondenza dell'angolo limite le soluzioni saranno coincidenti e l'impulso considerato è *tangente* all'ellisse.

7.1.2 Angolo limite nel sistema del Centro di Massa

Possiamo valutare l'angolo θ^* (θ_{max}) corrispondente all'*angolo limite nel sistema del centro di massa CM*. Effettuando una trasformazione di Lorentz dell'impulso dal sistema del laboratorio a quello del centro di massa (**Lab** \rightarrow **CM**):

$$\begin{cases} p_x = \gamma(p_x^* + \beta E^*) \\ p_y = p_y^* \end{cases} \quad [7.10]$$

quindi:

$$\tan \theta = \frac{p_y}{p_x} = \frac{p_y^*}{\gamma(p_x^* + \beta E^*)} = \frac{\beta^* \sin \theta^*}{\gamma(\beta^* \cos \theta^* + \beta)} \quad [7.11]$$

Imponendo l'angolo limite:

$$\begin{aligned} \frac{\beta^* \sin \theta^* (\theta_{max})}{\gamma[\beta^* \cos \theta^* (\theta_{max}) + \beta]} &= \sqrt{\frac{\beta^{*2}}{\gamma^2(\beta^2 - \beta^{*2})}} \\ \Rightarrow \frac{\beta^{*2} \sin^2 \theta^* (\theta_{max})}{\gamma^2 [\beta^* \cos \theta^* (\theta_{max}) + \beta]^2} &= \frac{\beta^{*2}}{\gamma^2 (\beta^2 - \beta^{*2})} \\ \Rightarrow \beta^2 \sin^2 \theta^* (\theta_{max}) - \beta^{*2} \sin^2 \theta^* (\theta_{max}) &= \beta^{*2} \cos^2 \theta^* (\theta_{max}) + \beta^2 + 2\beta\beta^* \cos \theta^* (\theta_{max}) \\ \Rightarrow \beta^2 \sin^2 \theta^* (\theta_{max}) - \beta^{*2} - \beta^2 - 2\beta\beta^* \cos \theta^* (\theta_{max}) &= 0 \\ \Rightarrow \beta^2 [1 - \cos^2 \theta^* (\theta_{max})] - \beta^{*2} - \beta^2 - 2\beta\beta^* \cos \theta^* (\theta_{max}) &= 0 \\ \Rightarrow \beta^2 - \beta^2 \cos^2 \theta^* (\theta_{max}) - \beta^{*2} - \beta^2 - 2\beta\beta^* \cos \theta^* (\theta_{max}) &= 0 \\ \Rightarrow [\beta \cos \theta^* (\theta_{max}) + \beta^*]^2 &= 0 \end{aligned} \quad [7.12]$$

abbiamo così ottenuto una relazione per l'angolo θ^* visto dal sistema del centro di massa, che corrisponde all'angolo θ_{max} limite visto dal sistema del laboratorio:

$$\boxed{\cos \theta^* (\theta_{max}) = -\frac{\beta^*}{\beta}} \quad [7.13]$$

Nota. È importante che l'angolo θ è sempre nell'emisfero sinistro, infatti $\cos \theta \leq 0$ ed esiste solo per $\beta > \beta^*$.

Esempio 7.1.3 (Angolo limite). Vogliamo studiare il decadimento della particella Σ^+ con un *tracciatore*:

$$\pi^+ + p \rightarrow \Sigma^+ + k^+ \quad [7.14]$$

Le masse delle particelle sono:

$$m_\pi = 0.1396 \text{ GeV}/c^2; \quad m_p = 0.9383 \text{ GeV}/c^2; \quad m_\Sigma = 1.189 \text{ GeV}/c^2; \quad m_k = 0.4937 \text{ GeV}/c^2 \quad [7.15]$$

Mentre l'impulso iniziale dei pioni è $p_{\pi^+} = 20 \text{ GeV}/c$. Vediamo in figura ?? uno schema del rivelatore.

Rispondere ai seguenti quesiti:

1. il rivelatore è in grado di vedere tutte le Σ^+ prodotte? (in altri termini: esiste un angolo massimo? e se sì, qual è?);
2. le particelle Σ^+ sono instabili e decadono con un tempo di vita media (a riposo) $\tau_\Sigma = 0.799 \times 10^{-10} \text{ s}$. Assumiamo che tutte le particelle Σ^+ siano decadute dopo un tempo 3τ ; quale deve essere la dimensione L affinché il punto di decadimento sia contenuto nel rivelatore?;
3. calcolare il raggio minimo del rivelatore affinché esso contenga tutti i vertici di decadimento delle Σ^+ ;
4. possiamo vedere tutte le particelle k^+ ?;
5. se così non dovesse essere, quale frazione del numero di particelle k^+ che vediamo?

Soluzione

1. Possiamo vedere tutte le particelle prodotte dalla reazione se l'angolo massimo è $\leq 90^\circ$, considerato come è realizzato il rivelatore. L'energia dei pioni incidenti:

$$\epsilon_\pi = \sqrt{|\vec{p}_{\pi^+}|^2 + m_{\pi^+}^2} \simeq 20 \text{ GeV} \quad [7.16]$$

Quindi:

$$\mathbf{P} = \{\epsilon_{\pi^+} + m_p, \vec{p}_{\pi^+}\} \quad [7.17]$$

Calcoliamo l'energia disponibile nel centro di massa, che corrisponde alla massa invariante del sistema e che ci sarà utile per passare le quantità cinematiche da un sistema di riferimento all'altro in quanto invariante relativistico:

$$E^{*2} = (\epsilon_{\pi^+} + m_p)^2 - |\vec{p}_{\pi^+}|^2 = \epsilon_{\pi^+}^2 + m_p^2 + 2m_p\epsilon_{\pi^+} - |\vec{p}_{\pi^+}|^2 = m_p^2 + m_{\pi^+}^2 + 2m_p\epsilon_{\pi^+} \quad [7.18]$$

quindi:

$$E^* = \sqrt{m_p^2 + m_{\pi^+}^2 + 2m_p\epsilon_{\pi^+}} = 6.199 \text{ GeV} \quad [7.19]$$

Il beta del centro di massa:

$$\beta_{\text{CM}} = \frac{|\vec{p}_{\pi^+}|}{\epsilon_{\pi^+} + m_p} \simeq 0.955187 \quad [7.20]$$

Il gamma del centro di massa:

$$\gamma_{\text{CM}} = \frac{\epsilon_{\pi^+} + m_p}{E^*} \simeq 3.3777 \quad [7.21]$$

L'impulso della particelle che prodotto (Σ^+, k^+) nel sistema del centro di massa:

$$p^* = \frac{\sqrt{[E^{*2} - (m_{\Sigma^+} + m_{k^+})^2][E^{*2} - (m_{\Sigma^+} - m_{k^+})^2]}}{2E^*} = 2.965 \text{ GeV}/c \quad [7.22]$$

Quindi l'energia nel centro di massa della particella Σ^+ :

$$\epsilon_{\Sigma^+}^* = \sqrt{p^{*2} + m_{\Sigma^+}^2} \simeq 3.194 \text{ GeV} \quad [7.23]$$

allora $\beta_{\Sigma^+}^*$:

$$\beta_{\Sigma^+}^* = \frac{p^*}{\epsilon_{\Sigma^+}^*} = 0.9283 < \beta_{\text{CM}} \quad [7.24]$$

Questo vuol dire che, per le Σ^+ esiste un angolo limite nel sistema del laboratorio e saremo in grado, dunque, di rilevare **tutte** le particelle Σ^+ prodotte. Appurato che esiste un angolo massimo, calcoliamo qual è:

$$\tan \theta_{\text{max}} = \frac{\beta_{\Sigma^+}^*}{\gamma_{\text{CM}} \sqrt{\beta_{\text{CM}}^2 - \beta_{\Sigma^+}^{*2}}} = 1.217 \quad [7.25]$$

quindi:

$$\theta_{\text{max}} = \arctan \left[\frac{\beta_{\Sigma^+}^*}{\gamma_{\text{CM}} \sqrt{\beta_{\text{CM}}^2 - \beta_{\Sigma^+}^{*2}}} \right] = 50.6^\circ \quad [7.26]$$

questo vuol dire che:

$$\cos \theta^*(\theta_{\text{max}}) = -\frac{\beta_{\Sigma^+}^*}{\beta_{\text{CM}}} = -0.9717 \quad \Rightarrow \quad \theta^*(\theta_{\text{max}}) = 166^\circ \quad [7.27]$$

All'angolo massimo, l'impulso longitudinale o componente longitudinale dell'impulso della particella:

$$(p_{\Sigma^+})_L = \gamma_{\text{CM}}(p^* \cos \theta^*(\theta_{\text{max}}) + \beta_{\text{CM}} \epsilon_{\Sigma^+}^*) = 0.573 \text{ GeV}/c \quad [7.28]$$

mentre l'impulso trasverso o componente trasversa dell'impulso della particella:

$$(p_{\Sigma^+})_T = (p_{\Sigma^+}^*)_T = p^* \sin \theta^*(\theta_{\text{max}}) = 0.7 \text{ GeV}/c \quad [7.29]$$

2. Rispondiamo alla seconda domanda.

Nota (Tempi di vita). Il tempo di vita indicato nel quesito è il tempo di vita a riposo!

$$D_{\Sigma^+} = 3\tau_{\Sigma^+} \gamma_{\Sigma^+} \beta_{\Sigma^+} c = 3c\tau_{\Sigma^+} \frac{p_{\Sigma^+}}{m_{\Sigma^+}} = 6.05 \frac{p_{\Sigma^+}}{\text{GeV}/c} \text{ cm} \quad [7.30]$$

Il caso peggiore si ha quando otteniamo l'impulso longitudinale massimo, ovvero l'emissione della Σ^+ avviene collineare con il beta del centro di massa. L'*impulso massimo longitudinale* nel sistema del laboratorio, quindi:

$$(p_{\Sigma^+})_{L,\max} = \gamma_{\text{CM}} (p^* + \beta_{\text{CM}} + \epsilon_{\Sigma^+}^*) = 20.3 \text{ GeV}/c \quad [7.31]$$

La *lunghezza minima per il rivelatore*, affinché tutte le particelle Σ^+ decadano all'interno del rivelatore:

$$L_{\min} = D_{\Sigma^+} (p_{\Sigma^+})_{L,\max} = 122.8 \text{ cm} \quad [7.32]$$

3. Rispondiamo al terzo quesito. L'*impulso trasverso massimo*:

$$(p_{\Sigma^+})_{T,\max} = (p_{\Sigma^+}^*)_T = p^* \quad [7.33]$$

quindi il *raggio minimo per la sezione del rivelatore* affinché tutti i decadimenti siano contenuti nel rivelatore:

$$R_{\min} = 6.05 \frac{(p_{\Sigma^+})_{T,\max}}{\text{GeV}/c} \text{ cm} = 17.9 \text{ cm} \quad [7.34]$$

4. Rispondiamo alla quarta domanda. Dobbiamo vedere se esiste un angolo massimo e di conseguenza se possiamo vedere tutte le k^+ emesse. Sia m_{k^+} la massa della particella k^+ , con $p_{k^+}^*$:

$$\epsilon_{k^+} = \sqrt{p^{*2} + m_{k^+}^2} = 3.006 \text{ GeV} \quad [7.35]$$

allora:

$$\beta_{k^+}^* = \frac{p^*}{\epsilon_{k^+}^*} = 0.9864 \quad [7.36]$$

quindi $\beta_{k^+}^* > \beta_{\text{CM}}$. Questo vuol dire che non esiste un angolo massimo per le particelle k^+ (ragionevolmente perché sono particelle più leggere e quindi possono essere back-scatterate) e di conseguenza alcune particelle verranno emesse all'indietro (*back-scattering*), quindi non vedremo tutte le particelle emesse.

5. Rispondiamo alla quinta domanda, quindi calcoliamo qual è la frazione di particelle k^+ vediamo nel rivelatore. Le particelle rilevate saranno quelle che nel sistema del laboratorio sono emesse con un angolo di al più 90° . Calcoliamo la componente longitudinale di $p_{k^+}^*$ in questa configurazione. Il boost di Lorentz per l'impulso longitudinale della particella k_+ :

$$(p_{k^+})_L = \gamma_{\text{CM}} [(p_{k^+}^*) + \beta_{\text{CM}} \epsilon_{k^+}^*] \quad [7.37]$$

Quindi imponendo $(p_{k^+})_L = 0$, che equivale a dire che la particella nel sistema del laboratorio è emessa con impulso longitudinale nullo, che vuol dire che la particella è emessa con angolo di 90° :

$$\gamma_{\text{CM}} [(p_{k^+}^*) + \beta_{\text{CM}} \epsilon_{k^+}^*] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (p_{k^+}^*)_L = p^* \cos \theta^* (90^\circ) = -\beta_{\text{CM}} \epsilon_{k^+}^* \quad [7.38]$$

quindi:

$$\cos \theta^* (90^\circ) = -\beta_{\text{CM}} \frac{\epsilon_{k^+}^*}{p^*} \quad [7.39]$$

ricordando che p^* è diretto lungo l'asse y . Quindi:

$$\theta^* (90^\circ) = \arccos \left[-\beta_{\text{CM}} \frac{\epsilon_{k^+}^*}{p^*} \right] = 165.5^\circ \quad [7.40]$$

La porzione visibile di particelle prodotte:

$$\tau = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_f^1 d\cos \theta^* = \frac{1}{2} (1 - f) = \frac{1.98687}{2} \equiv 98.4\% \quad [7.41]$$

Lezione 8

Esercitazione 2022-03-31

Esempio 8.0.1. Fascio di pioni π con energia totale E_π su un bersaglio di ^2H . Viene prodotta una risonanza:

$$M \rightarrow m_1 + m_2 \quad [8.1]$$

Sapendo che $M = 2.58m_1$ e che m_2 è trascurabile rispetto a m_1 ($m_2 \gg m_1$):

1. Qual è E_π minima per avere un angolo massimo (**Lab**) per la particella 1 (m_1).
2. La particella M sarà una particella $\Delta(2420)$ di massa $2420 \text{ MeV}/c^2$.

$$\Delta(2420) \rightarrow \Sigma + k \quad [8.2]$$

Le masse sono: $m_\Sigma = 1.189 \text{ GeV}/c^2$ e $m_k = 0.494 \text{ GeV}/c^2$. Se la Σ viene emessa ad un angolo di 120° nel sistema del CM (data l'energia del fascio trovata nel punto 1) $E_T = 2.65 \text{ GeV}$:

- (a) qual è l'angolo θ (sistema del laboratorio) che corrisponde all'angolo $\theta^* = 120^\circ$ nel sistema del centro di massa?
 - (b) a quale impulso p (sistema del laboratorio) corrisponde?
3. se un rivelatore lungo 26 cm vede il 99 % dei punti di decadimento della particella Σ , allora qual è il tempo di vita medio della Σ ?

Soluzione

1. La condizione da soddisfare sarà:

$$\beta_{\text{CM}} \geq \beta_1^* \quad [8.3]$$

L'impulso delle due particelle:

$$|\vec{p}_1^*| = |\vec{p}_2^*| = |\vec{p}^*| = \frac{\sqrt{[M^2 - (m_1 + m_2)^2][M^2 - (m_1 - m_2)^2]}}{2M} \quad [8.4]$$

L'energia della particella 1:

$$\epsilon_1^* = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} \quad [8.5]$$

quindi:

$$p_1^* = \frac{p^*}{\epsilon_1^*} = \frac{\sqrt{(M^2 - m_1^2)(M^2 - m_2^2)}}{M^2 + m_1^2} = \frac{M^2 - m_1^2}{M^2 + m_1^2} = \frac{2.58^2 - 1}{2.58^2 + 1} = 0.7388 \quad [8.6]$$

Il beta del centro di massa:

$$\beta_{\text{CM}} = \frac{|\vec{p}_\pi|}{E_\pi + m_p} = \frac{\sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2}}{E_\pi + m_p} = \beta_1^* \quad [8.7]$$

quindi E_π :

$$E_\pi = \frac{\beta_1^* m_p + \sqrt{(\beta_1^* m_p)^2 + (1 - \beta_1^{*2})(m_\pi^2 + \beta_1^* m_p)}}{1 - \beta_1^{*2}} = 2.65 \text{ GeV} \quad [8.8]$$

2. Dato che $\theta^* = 120^\circ$:

$$\beta_{\text{CM}} = \beta_1^* = 0.7388 \quad [8.9]$$

$$\epsilon_\Sigma^* = \sqrt{p^{*2} + m_\Sigma^2} = 1.452 \text{ GeV} \quad [8.10]$$

L'impulso p^* :

$$p^* = 0.833 \text{ GeV}/c \quad [8.11]$$

$$\begin{cases} (p_\Sigma)_L = \gamma_{\text{CM}} (p^* \cos \theta^* + \beta_{\text{CM}} \epsilon_\Sigma^*) = 0.974 \text{ GeV}/c \\ (p_\Sigma)_T = p^* \sin \theta^* = 0.721 \text{ GeV}/c \end{cases} \quad [8.12]$$

Quindi p_Σ :

$$p_\Sigma = \sqrt{(p_\Sigma)_L^2 + (p_\Sigma)_T^2} = 1.21 \text{ GeV}/c \quad [8.13]$$

L'angolo θ_Σ relativo al sistema del laboratorio che stavamo cercando:

$$\theta_\Sigma = \arccos \left[\frac{(p_\Sigma)_T}{p_\Sigma} \right] = 36.5^\circ \quad [8.14]$$

3. La distanza media percorsa dalle particelle Σ prima del decadimento può essere espresso come:

$$\langle L \rangle = c \tau_\Sigma \beta_\Sigma \gamma_\Sigma = c \tau_\Sigma \frac{p_\Sigma}{m_\Sigma} \quad [8.15]$$

A questo punto, consideriamo:

$$p_\Sigma^{\text{max}} = \gamma_{\text{CM}} (p^* + \beta_{\text{CM}} \epsilon_\Sigma^*) = 2.83 \text{ GeV} \quad [8.16]$$

Il 99 % degli eventi di decadimento corrisponde a:

$$\frac{N}{N_{\text{tot}}} = 0.99 \quad [8.17]$$

e ricordando che il decadimento di particelle è associato a legge esponenziale:

$$\int_0^\infty N(t) dt = N_0 \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\tau_\Sigma}} dt = N_0 \tau_\Sigma \quad [8.18]$$

per cui:

$$0.99 = \frac{1}{N_0 \tau_\Sigma} \int_0^T N(t) dt = \frac{1}{N_0 \tau_\Sigma} N_0 \int_0^T e^{-\frac{t}{\tau_\Sigma}} dt = 1 - \int_T^\infty \frac{1}{\tau_\Sigma} e^{-\frac{t}{\tau_\Sigma}} dt \quad [8.19]$$

Quindi:

$$0.99 = 1 - e^{-\frac{T}{\tau_\Sigma}} \quad \Rightarrow \quad T = -\ln(0.01) \tau_\Sigma = 4.6 \tau_\Sigma \quad [8.20]$$

Ora conosciamo la vita media della particella Σ , quindi sostituendo nella lunghezza percorsa prima del decadimento:

$$L = c T \frac{p_\Sigma^{\text{max}}}{m_\Sigma} = 4.6 \tau_\Sigma \frac{p_\Sigma^{\text{max}}}{m_\Sigma} \quad [8.21]$$

e dunque:

$$\tau_\Sigma = \frac{L m_\Sigma}{4.6 c p_\Sigma^{\text{max}}} = \frac{0.26 \cdot 1.189}{4.6 \cdot 3 \times 10^8 \cdot 2.83} \text{ s} = 0.79 \times 10^{-10} \text{ s} \quad [8.22]$$

Lezione 9

Esercitazione 2022-04-05

Esempio 9.0.1. Consideriamo un fascio di pioni negativi su una targhetta di protoni:

$$\pi^- + p \rightarrow \Lambda + k^0 \quad [9.1]$$

1. Qual è l'energia minima affinché la reazione sia permessa?
2. assumendo di avere dei pioni di energia $E_\pi = 2.0 \text{ GeV}$, stabilire se esiste un angolo massimo (nel sistema del **Lab**) per le particelle Λ ;

Soluzione

1. Le masse delle particelle sono: Il quadrimpulso del pione:

| | |
|----------------------|-------------------------|
| PIONI | 140 MeV/c ² |
| PROTONI | 938 MeV/c ² |
| PARTICELLA k | 498 MeV/c ² |
| PARTICELLA Λ | 1116 MeV/c ² |

$$\mathbf{P}_\pi = \{E_\pi, \vec{p}_\pi\} \quad [9.2]$$

mentre il quadrimpulso del protone:

$$\mathbf{P}_p = \{m_p, 0\} \quad [9.3]$$

dato che il protone è la targhetta di reazione, che è fissa. Il quadrimpulso totale prima della reazione, che fornisce l'informazione sull'energia disponibile nel centro di massa:

$$(\mathbf{P}_\pi + \mathbf{P}_p)^2 = E_\pi^2 + m_p^2 + 2m_p E_\pi - |\vec{p}_\pi|^2 = m_\pi^2 + m_p^2 + 2m_p E_\pi \quad [9.4]$$

Quindi avremo:

$$m_\pi^2 + m_p^2 + 2m_p E_\pi = (m_\Lambda + m_k)^2 \quad [9.5]$$

Dobbiamo determinare l'energia minima dei pioni incidenti, per cui invertiamo la relazione:

$$E_\pi = \frac{(m_\Lambda + m_k)^2 - m_\pi^2 - m_p^2}{2m_p} = 0.91 \text{ GeV} \quad [9.6]$$

2. Dobbiamo determinare se vale la seguente relazione: $\beta_\Lambda^* < \beta_{\text{CM}}$.

$$\beta_{\text{CM}} = \frac{|\vec{p}|}{E} = 0.68 \quad [9.7]$$

L'energia disponibile del centro di massa:

$$E^* = \sqrt{(\mathbf{P}_\pi + \mathbf{P}_p)^2} = \sqrt{m_\pi^2 + m_p^2 + 2E_\pi m_p} = 2.16 \text{ GeV} \quad [9.8]$$

A questo punto possiamo calcolare:

$$|\vec{p}_k^*| = |\vec{p}_\Lambda^*| = |\vec{p}^*| = \frac{\sqrt{[E^{*2} - (m_\Lambda + m_k)^2][E^{*2} - (m_\Lambda - m_k)^2]}}{2E^*} \quad [9.9]$$

Quindi:

$$\beta_{\Lambda}^* = \frac{p^*}{\sqrt{p^{*2} + m_{\Lambda}^2}} = 0.52 \quad [9.10]$$

Quindi *esiste* un angolo massimo e dunque $\beta_L^* < \beta_{\text{CM}}$ e tale angolo vale:

$$\theta_{\text{max}} = \arctan \left\{ \left[\gamma_{\text{CM}} \sqrt{\left(\frac{\beta_{\text{CM}}}{\beta_{\Lambda}^*} \right)^2 - 1} \right]^{-1} \right\} = 0.73 \text{ rad} \simeq 42^\circ \quad [9.11]$$

Esempio 9.0.2. Consideriamo due fasci di particelle che collidono in un *collider*. Sia il primo fascio di particelle un fascio di e^- e sia la rispettiva energia $E_1 = 12 \text{ GeV}$; sia il secondo fascio di particelle un fascio di e^+ e sia la rispettiva energia $E_2 = 5 \text{ GeV}$. Determinare:

1. l'energia totale nel centro di massa;
2. l'impulso degli elettroni nel sistema del centro di massa;
3. β_{CM} e γ_{CM} .

Soluzione

1. L'energia disponibile nel centro di massa sarà:

$$\begin{aligned} E^{*2} &= (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 \\ &= E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 - |\vec{p}_1|^2 - |\vec{p}_2|^2 + 2|\vec{p}_1||\vec{p}_2| \\ &= \sqrt{2m_e^2 + 2E_1E_2 + 2|\vec{p}_1||\vec{p}_2|} \end{aligned}$$

Ora, considerando che le energie $E_{1,2}$ sono molto maggiori delle masse degli elettroni, possiamo considerare la seguente approssimazione (confonendo impulsi ed energie):

$$E^* \simeq \sqrt{2E_1E_2 + 2E_1E_2} = \sqrt{4E_1E_2} = 2\sqrt{E_1E_2} = 15.5 \text{ GeV} \quad [9.12]$$

2. Nel sistema del centro di massa possiamo considerare che i due fasci abbiano lo stesso impulso e quindi che si spartiscano l'energia disponibile nel centro di massa:

$$p^* = \frac{E^*}{2} \quad [9.13]$$

3. Calcoliamo i valori richiesti.

$$\beta_{\text{CM}} = \frac{|\vec{p}_1 + \vec{p}_2|}{E_1 + E_2} = \frac{\sqrt{E_1^2 - m_e^2} - \sqrt{E_2^2 - m_e^2}}{E_1 + E_2} \quad [9.14]$$

a questo punto possiamo fare l'approssimazione di trascurare le masse rispetto alle energie:

$$\beta_{\text{CM}} = \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} = 0.4 \quad [9.15]$$

Il γ_{CM} , invece:

$$\gamma_{\text{CM}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{\text{CM}}^2}} = 1.1 \quad [9.16]$$

Esempio 9.0.3 (Ultra High Cosmic Rays). Consideriamo il processo di *Photo-Pion production*:

$$p + \gamma_{\text{CMB}} \rightarrow p + \pi^0 \quad [9.17]$$

dove γ_{CMB} rappresenta un fotone delle COSMIC MICROWAVE BACKGROUND (o *Radiazione Cosmica di Fondo*). I dati del problema sono:

1. Studiare la dipendenza della soglia in energia in funzione dell'angolo di scattering;
2. calcolare l'energia minima.

| | |
|-------------------------------------|--|
| Massa dei Protoni | $M_p = 0.94 \text{ GeV}/c^2$ |
| Massa dei Pioni | $M_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2$ |
| Energia dei fotoni della radiazione | $E_{\gamma_{\text{CMB}}} = 10^{-3} \text{ eV}$ |
| Energia dei raggi cosmici (protoni) | $E_{\text{CR}} > 10^{18} \text{ eV}$ |

Soluzione

1. Calcoliamo i quadrimpulsi:

$$\mathbf{P}_p = \{E_p, \vec{p}_p\} \quad \mathbf{P}_{\gamma_{\text{CMB}}} = \{E_{\gamma_{\text{CMB}}}, \vec{p}_{\gamma_{\text{CMB}}}\} \quad [9.18]$$

Per semplificare indichiamo con γ le particelle γ_{CMB} , quindi, ricordando che γ sono fotoni e sono quindi *massless*:

$$E_p^2 + E_\gamma^2 + 2E_p E_\gamma - p_p^2 - p_\gamma^2 - 2\vec{p}_p \cdot \vec{p}_\gamma = (M_p + M_\pi)^2 \quad [9.19]$$

Considerato che $E_p \sim 10^{18} \text{ eV}$, possiamo procedere con l'approssimazione $E_p \simeq p_p$, inoltre possiamo sostituire $\vec{p}_p \cdot \vec{p}_\gamma = E_p E_\gamma \cos\theta$, dove θ è l'*angolo di scattering*. Dunque:

$$2E_p E_\gamma + M_p^2 - E_p E_\gamma \cos\theta = (M_p + M_\pi)^2 \quad [9.20]$$

L'energia di soglia (*threshold*):

$$E_p^{\text{th}} = \frac{(M_p + M_\pi)^2 - M_p^2}{2E_\gamma (1 - \cos\theta)} \quad [9.21]$$

2. Il minimo sull'energia si ottiene quando $\theta = \pi$, ovvero per urto frontale. Quindi l'energia minima di soglia sarà:

$$E_{\text{min}}^{\text{th}} = \frac{(M_p + M_\pi)^2 - M_p^2}{4E_\gamma} = 6.8 \times 10^{19} \text{ eV} \quad [9.22]$$

Esempio 9.0.4 (UHECR). Consideriamo di nuovo un processo che coinvolge ULTRA HIGH ENERGY COSMIC RAYS.

$$p + \gamma_{\text{CMB}} \rightarrow p + e^+ + e^- \quad [9.23]$$

$$\mathbf{P}_p = \{E_p, \vec{p}_p\} \quad \mathbf{P}_\gamma = \{E_\gamma, \vec{p}_\gamma\} \quad [9.24]$$

quindi:

$$E_p^2 + E_\gamma^2 + 2E_p E_\gamma - p_p^2 - p_\gamma^2 - 2\vec{p}_p \cdot \vec{p}_\gamma = (M_p + 2m_e)^2 \quad [9.25]$$

Sfruttando l'approssimazione $m_e \ll M_p$:

$$\Rightarrow 2E_p E_\gamma (1 - \cos\theta) = (M_p + 2m_e)^2 - M_p^2 = M_p^2 + 4m_e^2 + 4M_p m_e - M_p^2 \simeq 4M_p m_e \quad [9.26]$$

quindi:

$$E^{\text{th}}(\theta) = \frac{2m_e M_p}{E_{\gamma_{\text{CMB}}} (1 - \cos\theta)} \quad [9.27]$$

Quindi il minimo dell'energia di soglia, che si ha per $\theta = \pi$:

$$E_{\text{min}}^{\text{th}} = \frac{m_e M_p}{E_{\gamma_{\text{CMB}}}} = 0.5 \times 10^{18} \text{ eV} \quad [9.28]$$

Nota. Sulle dispense del professore ci sono ulteriori 2 esercizi svolti.

Parte II

Fisica Nucleare - Prof. Villante/Capozzi

Lezione 10

2023-04-27

10.1 Serie (catene) radiattive

Furono individuate 3 *serie* (catene) *radiattive*:

Le catene radiattive sono originate da tre tipi di decadimento:

- $\alpha \rightarrow$ *particelle cariche* ${}^4\text{He}^{++}$;
- $\beta \rightarrow$ *particelle negative*;
- $\gamma \rightarrow$ *particelle neutre* (fotoni energetici).

I primi e maggiori sviluppi in fisica nucleare sono stati fatti utilizzando particelle α .

10.2 Rutherford scattering formula

Utilizzeremo particelle con carica ze .

10.2.1 Il modello

- L'atomo è costituito da un nucleo con carica positiva Ze che porta praticamente tutta la massa dell'atomo;
- l'atomo è elettricamente neutro e contiene Z elettroni che orbitano intorno al nucleo. Questi elettroni non possono dar luogo a deflessioni grandi. Sono trascurabili rispetto alla particella α , considerata come proiettile;
- il nucleo bersaglio è molto più massivo della particella incidente; questo permetterà in prima approssimazione di considerare il rinculo del target nullo, $m \ll M$;
- si utilizza solo meccanica classica per descrivere l'urto, quindi assumeremo la velocità del proiettile non relativistica, $v \ll c$;
- il nucleo bersaglio e la particella incidente hanno distribuzioni di carica puntiformi e interagiscono attraverso un potenziale coulombiano (interazione puramente elettromagnetica):

$$V(z) = \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad [10.1]$$

- si considera l'interazione elettromagnetica come unico tipo d'interazione;
- il bersaglio e il proiettile non subiscono alcuna eccitazione durante l'urto (scattering elastico).

La forza d'interazione del modello è la forza coulombiana:

$$\vec{F} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \quad [10.2]$$

L'impulso trasferito, se gli impulsi iniziale e finale della particella prima e dopo l'urto sono \vec{p}_i e \vec{p}_f rispettivamente:

$$\Delta\vec{p} = |\vec{p}_f - \vec{p}_i| = 2p \sin \frac{\theta}{2} \quad [10.3]$$

allora:

$$\Delta p = \int_{-\infty}^{\infty} F_T dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\beta}{r^2} dt \quad [10.4]$$

dove, con β l'angolo in figura 11.1:

$$\beta(t = -\infty) = -\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right); \quad \beta(t = \infty) = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \quad [10.5]$$

10.2.2 Raggio di collisione

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 b} \frac{m}{p^2} = \frac{R}{b} \quad [10.6]$$

con $R = \frac{zZe^2 m}{4\pi\epsilon_0 p^2}$. In particolare, per $R = b$ abbiamo:

$$\tan \frac{\theta}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\theta}{2} = 45^\circ \quad \Rightarrow \quad \theta = 90^\circ \quad [10.7]$$

Per il caso di impatto frontale, utilizziamo il *teorema delle forze vive*:

$$T + V = \text{const} \quad [10.8]$$

quindi:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + 0 = \text{const} = 0 + \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 r_{\min}} \quad [10.9]$$

allora abbiamo che:

$$r_{\min} = 2R \quad [10.10]$$

Questo vuol dire che L'ordine di grandezza di R rappresenta l'ordine di grandezza della minima distanza della particella α dal nucleo scatteratore.

Lezione 11

2020-02-27

11.1 Grandezze atomiche caratteristiche

Tabella 11.1: Caratteristiche degli elettroni

| | |
|---------------------------------|---|
| Raggio atomo | $R_A = 1\text{\AA} = 10^{-10}\text{ m} = 10^{-8}\text{ cm}$ |
| Energie | $E \sim 1\text{ eV}$ |
| Massa elettrone | $m_e \simeq 9 \times 10^{-31}\text{ kg}$ |
| Energia riposo elettrone | $m_e c^2 \simeq 0.511\text{ MeV}$ |

Tabella 11.2: Caratteristiche dei nuclei

| | |
|--------------------------------|--|
| Raggio nucleo | $R_N = 10^{-15}\text{ m} = 10^{-13}\text{ cm} = 1\text{ fm}$ |
| Massa protone | $m_p \simeq 1836m_e$ |
| Energia riposo protone | $m_p c^2 \simeq 1\text{ GeV}$ |
| Energia riposo neutrone | $m_n c^2 \simeq m_p c^2$ |
| Energie | $E \sim 1\text{ keV} \div 1\text{ MeV}$ |

Poiché le masse di protone e neutrone risultano molto simili (la differenza fra le energie a riposo $m_n c^2 - m_p c^2 \simeq 1.29\text{ MeV}$), capiterà di lavorare con la **massa del nucleone** (che indicheremo con la N maiuscola) e la rispettiva energia a riposo: $m_N c^2 \simeq 1\text{ GeV}$.

La fisica nucleare si può studiare trascurando l'influenza degli elettroni.

11.2 Esperimenti di diffusione

Lo strumento principale nella fisica delle particelle e/o fisica nucleare per studiare/sondare la materia e i suoi costituenti fondamentali e le interazioni che fra di esse intercorrono.

Abbiamo tipicamente un bersaglio, che è l'oggetto di studio, e un fascio di particelle proiettile con caratteristiche ben definite.

11.2.1 Diffusione elastica

Per un processo di diffusione elastica abbiamo una reazione del tipo:

$$a + b \rightarrow a' + b' \quad [11.1]$$

dove:

- le particelle prima e dopo l'urto sono le stesse;
- l'energia cinetica totale è conservata.

Nota (Energia del proiettile e risoluzione). Tanto più grande è l'energia delle particelle proiettile, tanto maggiore sarà la risoluzione disponibile per la misura delle quantità cercate.

Lunghezza d'onda di De Broglie Consideriamo una particella con impulso \vec{p} . La *lunghezza d'onda di De Broglie* ridotta associata a una tale particella è la seguente:

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar c}{E}, \quad E_k \gg mc^2 \quad [11.2]$$

Per analizzare una struttura con ... dobbiamo utilizzare una particella con una lunghezza d'onda di De Broglie al più dello stesso ordine di grandezza di Δx : $\Delta x \gtrsim \bar{\lambda}$. Ad esempio, per i nuclei atomici, che hanno raggi tipici del fermi, abbiamo necessità di usare fasci di particelle di $\sim 10 \div 100 \text{ MeV/c}$. Per i nucleoni, con dimensioni tipiche $\sim 0.8 \text{ fm}$, allora abbiamo bisogno di particelle di impulso $p \gtrsim 100 \text{ MeV/c}$. Per i quark $p \gtrsim \text{GeV/c}$.

11.2.2 Diffusione anelastica

Nel caso di diffusione anelastica si tratta di processi del tipo:

$$a + b \rightarrow a' + b^* \quad [11.3]$$

con $b^* \rightarrow c + d$. Qualora si osservi a' , ma non gli altri prodotti, si parla di **misure inclusive**¹. Qualora si osservino *tutti* i prodotti, si parla invece di **misure esclusive**².

11.3 Sezioni d'urto

Consideriamo un fascio di particelle composto da N_i particelle che incide su un bersaglio costituito da N_b particelle. Indichiamo con \vec{v} la velocità relativa fra il fascio e il bersaglio. Scriviamo il *flusso di particelle del fascio*:

$$\phi = \frac{N_i}{\Delta S \Delta t} = \frac{N_i \Delta x}{\Delta S \Delta t \Delta x} = \frac{N_i v}{V} = n_i v \quad [11.4]$$

dove $n_i = \frac{N_i}{V}$ rappresenta la *densità di particelle nel fascio*. Per il bersaglio, invece:

$$\frac{N_b}{\Delta S} = \frac{N_b \Delta x}{\Delta S \Delta x} = \frac{N_b \Delta x}{V} = n_b \Delta x \quad [11.5]$$

dove $n_b = \frac{N_b}{V}$ è la *densità di particelle nel bersaglio*.

La *frequenza* con cui avviene la reazione:

$$\hat{N} \propto \Phi N_b \quad \Rightarrow \quad \hat{N} = \Phi N_b \sigma_b \quad [11.6]$$

dove σ_b è la **sezione d'urto**, che rappresenta l'area geometrica che ciascun diffusore espone al proiettile. Quindi:

$$\text{Sezione d'urto} \quad \sigma_b = \frac{\hat{N}}{\phi N_b} \quad [11.7]$$

con:

- \hat{N} : numero di reazioni per unità di tempo;
- ϕ : numero di particelle del fascio per unità di tempo ed area;
- N_b : numero di centri diffusori.

Le dimensioni della sezione d'urto sono quelle di un'area: $[L^2]$.

Barn Le unità caratteristiche relative alle sezioni d'urto sono quelle del *Barn*: $1 \text{ b} = 1 \times 10^{-28} \text{ m}^2$, $1 \text{ mb} = 1 \times 10^{-31} \text{ m}^2$.

¹Include tutte le possibilità (*canali*) di produzione in b^*

²Esclusive poiché considero uno specifico canale di produzione, escludendo tutti gli altri

Coefficiente di assorbimento e lunghezza di radiazione Il coefficiente di assorbimento:

$$\mu = ??? \quad [11.8]$$

e la *lunghezza di radiazione* il suo inverso:

$$\lambda = \frac{1}{\mu} = [\text{cm}] \quad [11.9]$$

Luminosità La *luminosità*:

$$L = \phi N_b = [\text{area} \cdot \text{tempo}]^{-1} \quad [11.10]$$

con $\phi = n_i v$, quindi:

$$L = n_i v N_b \quad [11.11]$$

11.3.1 Sezione d'urto differenziale

Immaginiamo di avere un rivelatore di area A_D a distanza r ed angolo θ rispetto alla direzione del fascio. L'angolo solido coperto dal rivelatore sarà:

$$\Delta\Omega = \frac{A_0}{r^2} \quad [11.12]$$

Il numero di reazioni osservate sarà in questo caso proporzionale alla *sezione d'urto differenziale*:

$$\frac{d\sigma(E, \theta)}{d\Omega} \quad [11.13]$$

dove E è l'energia del fascio e θ l'angolo di diffusione. quindi:

$$N(E, \theta, \Delta\Omega) = \phi N_b \frac{d\sigma(E, \theta)}{d\Omega} \Delta\Omega = L \frac{d\sigma(E, \theta)}{d\Omega} \Delta\Omega \quad [11.14]$$

con L la luminosità.

Qualore il rivelatore permetta di misurare anche l'energia delle particelle diffuse, allora possiamo ottenere una *sezione d'urto doppio-differenziale*:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} \Rightarrow \sigma_{\text{tot}} = \int_0^{E'_{\text{max}}} \int_{\Omega} \frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} d\Omega dE' \quad [11.15]$$

dove E' è l'energia delle particelle diffuse, con:

$$d\Omega = d\cos\theta d\phi = \sin\theta d\theta d\phi \quad [11.16]$$

dove ϕ è l'angolo azimutale.

11.4 Grandezze Caratteristiche - Indeterminazione di Heisenberg

A causa del *Principio di Indeterminazione di Heisenberg* lo studio di fenomeni che avvengono a distanze molto piccole è possibile solo se abbiamo a che fare con energie molto grandi.

$$\Delta x \Delta p_x \gtrsim \hbar \quad [11.17]$$

Immaginiamo il nucleo come un contenitore (consideriamo per ora la direzione \hat{x} , ma varranno le stesse considerazioni anche per le direzioni \hat{y} e \hat{z}) di dimensione caratteristica R_N . Se assumiamo una particella localizzata all'interno di tale contenitore, per il principio di Heisenberg si avrà $\Delta x = R_N$. Inoltre, poiché non c'è motivo di pensare che ci sia un verso privilegiato, possiamo dire per l'impulso p_x che $\langle p_x \rangle = \overline{p_x} = 0$.

Allora:

$$(\Delta p_x)^2 = \langle (p_x - \overline{p_x})^2 \rangle = \langle p_x^2 - 2p_x \overline{p_x} + \overline{p_x}^2 \rangle = \langle p_x^2 \rangle \quad [11.18]$$

Inoltre, Δp_x ammetterà un limite inferiore avendo definito Δx , ovvero:

$$\Delta p_x \gtrsim \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{\hbar}{R_N} \quad [11.19]$$

per cui, utilizzando l'equazione 11.18:

$$(\Delta p_x)^2 = \langle p_x^2 \rangle \gtrsim \left(\frac{\hbar}{R_N} \right)^2 \quad [11.20]$$

Analogamente si può ripetere il ragionamento anche per le altre direzioni:

$$\langle p_x^2 \rangle \gtrsim \left(\frac{\hbar}{R_N} \right)^2 \quad \langle p_y^2 \rangle \gtrsim \left(\frac{\hbar}{R_N} \right)^2 \quad \langle p_z^2 \rangle \gtrsim \left(\frac{\hbar}{R_N} \right)^2 \quad [11.21]$$

Considerando energie *NON-relativistiche*, definiamo l'energia cinetica come energia cinetica classica:

$$K = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} \quad [11.22]$$

e sfruttando il set di equazioni 11.21 possiamo stabilire un **limite inferiore per l'energia cinetica media** (sempre conseguenza del principio di Indeterminazione):

$$\langle K \rangle = \frac{\langle p_x^2 \rangle + \langle p_y^2 \rangle + \langle p_z^2 \rangle}{2m} \gtrsim \frac{3}{2m_N} \left(\frac{\hbar}{R_N} \right)^2 \quad [11.23]$$

Stime Per avere un'idea degli ordini di grandezza delle quantità con cui avremo a che fare possiamo moltiplicare e dividere per c^2 , per cui³, per un *nucleo*:

$$\langle K \rangle \gtrsim \frac{3}{2} \frac{(\hbar c)^2}{(m_N c)^2} \frac{1}{R_N^2} = \frac{3}{2} \frac{(200)^2}{1000} \frac{\text{MeV}}{(R_N/1\text{fm})^2} = \frac{60\text{MeV}}{(R_N/1\text{fm})^2} \quad [11.24]$$

Lo stesso conto, per un *atomo*:

$$\langle K \rangle = \frac{3}{2} \frac{1}{m_e c^2} \frac{(200\text{MeV} \cdot \text{fm})^2}{R_{\text{atomo}}^2} \simeq 10^{-5} \text{MeV} = 10\text{eV} \quad [11.25]$$

Nota. Al bilancio energetico bisognerà aggiungere un **termine di repulsione coulombiana** ed uno di attrazione dell'**interazione forte fra nucleoni**.

Nota (Potenziale Coulombiano). Vediamo qualche dettaglio sulle dimensioni del potenziale di interazione coulombiana in modulo (quindi che sia attrattivo o repulsivo):

$$|V_{\text{coulomb}}| = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hbar c}{\hbar c} \frac{1}{R} = \alpha \frac{\hbar c}{R} \simeq \frac{200}{137} \frac{1}{R/\text{fm}} \text{MeV} \quad [11.26]$$

dato che $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0(\hbar c)} = \alpha \simeq \frac{1}{137}$.

11.5 Esperimenti di Rutherford

Gli esperimenti di Rutherford che illustriamo erano volti a scoprire alcune proprietà dei nuclei fra cui le dimensioni e consistevano in quelli che definiamo **scattering nucleari di particelle α** .

Particelle α (nuclei di elio doppiamente ionizzati, $^4\text{He}^{++}$) venivano collimate su una lamina molto sottile ⁴ di oro (per evitare scattering multipli) e venivano poi osservate da dei rilevatori che ne misuravano l'angolo di deflessione.

11.5.1 Descrizione Classica

Consideriamo un'interazione *particella α /nucleo*⁵ di tipo coulombiano e **trascuriamo il rinculo del nucleo**, ovvero fissiamo le ipotesi:

$$m_N \gg m_\alpha \quad m_N c^2 \gg K \quad [11.27]$$

³Una quantità molto utile per i conti sarà $\hbar c \simeq 197\text{MeV} \cdot \text{fm}$

⁴Si trattava di circa $4\mu\text{m}$ perché si sperava di osservare l'effetto di *singola interazione*

⁵Stiamo parlando quindi della propagazione di una particella carica in un campo elettrostatico fisso nello spazio e nel tempo: in questa configurazione la quantità di moto della particella non è una quantità conservata, poiché il campo elettrostatico fisso rompe l'invarianza per traslazione

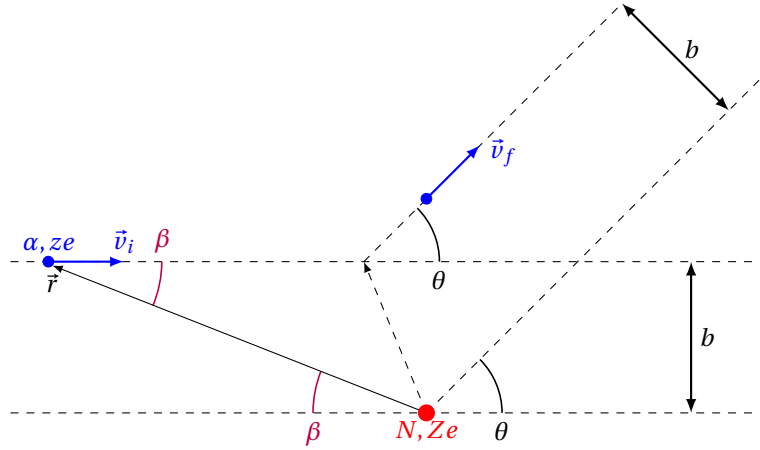


Figura 11.1: b : **parametro d'impatto**; \vec{v}_i : **velocità iniziale**; \vec{v}_f : **velocità finale**;
La traiettoria della particella α è una traiettoria aperta, in particolare una *traiettoria iperbolica*

Nell'ipotesi in cui il *nucleo non rinculi* avremo per i principi di conservazione che $|\vec{v}_f| = |\vec{v}_i|$, ossia che l'energia cinetica della particella incidente sia invariata dopo lo scattering. indicheremo con θ il cosiddetto **angolo di scattering**, ovvero l'angolo fra le direzioni associate a \vec{v}_i e \vec{v}_f . Analizziamo ora i due casi di scattering per parametro d'urto $b = 0$ e $b \neq 0$.

- Caso $b = 0 \Rightarrow \theta = 180^\circ$

Possiamo calcolare la **distanza di massimo avvicinamento** come: poiché siamo in descrizione classica scriviamo l'energia totale del sistema come l'energia cinetica classica della particella α , più il potenziale coulombiano di interazione fra particella e nucleo:

$$E_T = \frac{1}{2} m_\alpha |\vec{v}|^2 + \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|} = \text{const} \quad [11.28]$$

Tramite una semplice considerazione sulla **conservazione dell'energia totale** del sistema (ricorda che siamo in fisica classica) possiamo scrivere uguagliando l'energia totale iniziale (che supponendo la particella α a distanza infinita dal nucleo sarà composta del solo termine cinetico) e l'energia totale al punto di inversione del moto (che sarà composta del solo termine potenziale poiché al punto di inversione $|\vec{v}| = 0$), quindi:

$$\frac{1}{2} m_\alpha |\vec{v}_i|^2 = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \quad [11.29]$$

Dove abbiamo chiamato ρ la **distanza di massimo avvicinamento per urto frontale**.

Invertendo l'equazione 11.29 otteniamo:

$$\rho = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{m|\vec{v}_i|^2} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hbar c}{\hbar c} \frac{2}{m|\vec{v}_i|^2} \quad [11.30]$$

Dove l'ultimo passaggio ci permette di esprimere ρ in termini di costante di struttura fine:

$$\text{Costante di struttura fine} \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\hbar c} \simeq \frac{1}{137} \quad [11.31]$$

Quindi infine la **distanza di massimo avvicinamento per urto frontale** diventa:

$$\rho = zZ\alpha \frac{\hbar c}{\frac{m|\vec{v}_i|^2}{2}} = zZ\alpha \frac{\hbar c}{K} \quad [11.32]$$

Stime Ricordando che il raggio atomico è dell'ordine del fermi, possiamo osservare da una stima grossolana che (secondo la descrizione classica) per particelle α di energia cinetica $K < 200\text{MeV}$ non saremo in grado di sondare i nuclei, poiché:

$$\rho \simeq \frac{2 \cdot 79}{137} \frac{200\text{MeV} \cdot \text{fm}}{K} \simeq \frac{200\text{fm}}{K\text{MeV}^{-1}} \sim 2 \times 10^3 \text{fm} \quad [11.33]$$

L'ordine delle centinaia di *fermi* (che rappresenta una dimensione molto maggiore delle dimensioni dei nuclei, sebbene molto minore del raggio dell'atomo) ci permette di considerare i nuclei puntiformi. Quindi Rutherford non misura la dimensione del nucleo (tanto è che lo approssima come puntiforme), ma riesce a determinare un upper bound per le dimensioni del nucleo.

• Caso $b \neq 0$

Sfruttiamo il principio di **conservazione del momento angolare**:

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} \quad [11.34]$$

Calcoliamo il modulo del momento angolare iniziale:

$$|\vec{L}_i| = |\vec{r}| |\vec{p}| \sin \beta = |\vec{p}| |\vec{r}| \sin \beta = |\vec{p}| b = m |\vec{v}_i| b \quad [11.35]$$

Dove $|\vec{L}_i|$ è il modulo del momento angolare all'istante iniziale e $b = |\vec{r}| \sin \beta$ il parametro d'impatto.

Il modulo del momento angolare al generico istante t è invece dato da:

$$|\vec{L}(t)| = |\vec{r}(t) \wedge [m\vec{v}(t)]| \quad [11.36]$$

Possiamo scrivere $\vec{v}(t)$ come:

$$\vec{v} = \vec{v}_\tau + \vec{v}_\perp = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{r}) = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} \quad [11.37]$$

dove tutte le quantità sono chiaramente funzione del tempo anche se non esplicitamente dichiarato. Per cui avremo le seguenti uguaglianze vettoriali:

$$\begin{cases} \vec{v}_\tau = \frac{dr}{dt}\hat{r} \\ \vec{v}_\perp = r\frac{d\hat{r}}{dt} \end{cases} \quad [11.38]$$

Sostituendo questa espressione della velocità nell'equazione 11.36 otteniamo:

$$|\vec{L}(t)| = m|\vec{r}(t) \wedge \vec{v}(t)| = m|\vec{r}(t) \wedge [\vec{v}_\tau(t) + \vec{v}_\perp(t)]| \quad [11.39]$$

Poiché:

$$\vec{r}(t) // \vec{v}_\tau(t) \quad \forall t \quad [11.40]$$

allora l'equazione 11.39, sostituendo l'espressione di \vec{v}_\perp dall'equazione 11.38 si riduce a:

$$|\vec{L}(t)| = m|\vec{r}(t) \wedge \vec{v}_\perp(t)| = mr \left| \vec{r}(t) \wedge \frac{d\hat{r}}{dt} \right| \quad [11.41]$$

che utilizzando l'equazione 11.35, poiché il modulo del momento angolare è conservato, potremo dire che per ogni istante di tempo t si avrà:

$$\begin{aligned} mv_i b &= mr^2 \frac{d\beta}{dt} \\ \Rightarrow v_i b &= r^2 \frac{d\beta}{dt} \end{aligned} \quad [11.42]$$

Nello spazio a due dimensioni che stiamo considerando, riferendoci alla figura 11.1, i vettori velocità saranno:

$$\vec{v}_i = (v, 0); \quad \vec{v}_f = (v \cos \theta, v \sin \theta) \quad [11.43]$$

L'impulso degli istanti iniziale e finale saranno:

$$\vec{p}_i = m\vec{v}_i \quad \vec{p}_f = m\vec{v}_f \quad [11.44]$$

e scomponendo lungo le due direzioni \hat{x} e \hat{y} :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{dp_x}{dt} = F_x \\ \frac{dp_y}{dt} = F_y \end{cases} \quad [11.45]$$

e poiché l'unica forza in gioco è quella d'interazione coulombiana potremmo scrivere che lungo la direzione \hat{y} :

$$m \frac{dv_y}{dt} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \sin\beta \quad [11.46]$$

Moltiplicando e dividendo il secondo membro per bv_i e utilizzando la relazione 11.42:

$$\begin{aligned} \frac{dv_y}{dt} &= \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{bv_i} \right) \frac{\sin\beta}{m} \frac{bv_i}{r^2} \\ \Rightarrow \frac{dv_y}{dt} &= \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{bv_i} \right) \frac{\sin\beta}{m} \frac{d\beta}{dt} \\ \Rightarrow dv_y &= \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{bv_i} \right) \frac{1}{m} \sin\beta d\beta \end{aligned} \quad [11.47]$$

integrando per separazione di variabili:

$$(v_y)_f = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{bv} \right) \frac{1}{m} \int_0^{\pi-\theta} \sin\beta d\beta \quad [11.48]$$

L'integrale si risolve come:

$$\int_0^{\pi-\theta} \sin\beta d\beta = [-\cos\theta]_0^{\pi-\theta} = 1 - \cos(\pi - \theta) = 1 + \cos\theta \quad [11.49]$$

quindi sostituendo e indicando con K l'energia cinetica:

$$\begin{aligned} v \sin\theta &= \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{bv} \right) \frac{1}{m} [1 + \cos\theta] \\ \Rightarrow \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} &= \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{bv^2} \right) \frac{1}{m} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b \frac{mv^2}{2}} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2bK} = \frac{\rho}{2b} \end{aligned} \quad [11.50]$$

Quindi riarrangiando con le identità goniometriche il primo membro possiamo arrivare a scrivere le seguenti **relazioni fra parametro d'impatto e angolo di deflessione**:

$$\boxed{\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\rho}{2b}} \quad \boxed{\theta = 2 \arctan \frac{\rho}{2b}} \quad [11.51]$$

Nota. Questo ci dice che l'interazione dovrebbe essere presente anche a distanze molto grandi e questo effetto è definito **effetto a lungo raggio**, dovuto a **mediatori a massa nulla** (*fotoni*).

Lezione 12

03-03-2020, 05-05-2020

12.1 Scattering Rutherford

12.1.1 Calcolo della sezione d'urto

Definendo le seguenti quantità:

- ϕ : flusso di particelle α incidenti sul campione
- N_{eventi} : il numero di eventi di scattering
- N_{target} : il numero di atomi target sul campione
- σ : la **sezione d'urto** del processo considerato

A seguito di alcune considerazioni¹ possiamo ottenere la seguente relazione:

$$\frac{dN_{\text{eventi}}}{dt} = \phi N_{\text{target}} \sigma \quad [12.1]$$

Per analisi dimensionale σ dovrà avere le dimensioni di una superficie, quindi $[\sigma] = l^2$.

Con una *visione classica* potremmo associare quella che abbiamo definito come sezione d'urto alla superficie utile per ogni particella α del flusso incidente affinché il processo di scattering **possa** (quindi stiamo implicitamente definendo il processo come probabilistico) avvenire.

$\sigma(\theta \geq \tilde{\theta})$ Ci interessa ora calcolare la **sezione d'urto** necessaria affinché il processo di scattering causi una deflessione di un angolo $\theta \geq \tilde{\theta}$, dove $\tilde{\theta}$ è un angolo di riferimento².

$$\sigma(\theta \geq \tilde{\theta}) = \pi b^2(\theta = \tilde{\theta}) = \frac{\pi \rho^2}{\left[2 \tan \frac{\tilde{\theta}}{2}\right]^2} = \pi \left[\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 K} \right]^2 \frac{1}{4} \cot^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} \quad [12.2]$$

Volendo esprimere σ in termini della *costante di struttura fine*³ abbiamo:

$$\sigma(\theta \geq \tilde{\theta}) = \frac{\pi}{4} \left[\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hbar c}{\hbar c} \right]^2 \frac{1}{K^2} \cot^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} = \frac{\pi}{4} (zZ)^2 \alpha \left(\frac{\hbar c}{K} \right)^2 \cot^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} \quad [12.3]$$

12.1.2 Sezione d'urto differenziale

Poiché $\sigma = \pi b^2$, derivando rispetto a b e separando le quantità infinitesime abbiamo:

$$\frac{d\sigma}{db} = \frac{d}{db} (\pi b^2) = 2\pi b \quad [12.4]$$

Quindi:

$$d\sigma = 2\pi b db \quad [12.5]$$

¹Approfondire questo aspetto

²Ricorda l'angolo di deflessione è legato al parametro d'impatto tramite l'equazione 11.51

³Ricorda $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \simeq \frac{1}{137}$

Ma conoscere la sezione d'urto differenziale espressa in funzione del parametro d'urto b è poco utile, quindi tentiamo un **cambio di variabili** per riportare la *sezione d'urto differenziale in funzione dell'angolo di deflessione* θ . Sappiamo che:

$$\frac{db}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\rho}{2 \tan \frac{\theta}{2}} \right) = -\frac{\rho}{2 \tan^2 \frac{\theta}{2}} \frac{d}{d\theta} \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) = -\frac{\rho}{2 \tan^2 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\theta}{2} \quad [12.6]$$

Quindi abbiamo ottenuto la seguente relazione differenziale fra il parametro d'impatto e l'angolo di deflessione:

$$db = -\frac{\rho}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta \quad [12.7]$$

Quindi possiamo concludere, sostituendo all'interno dell'equazione 12.5:

$$d\sigma = 2\pi b = 2\pi \frac{\rho}{2 \tan \frac{\theta}{2}} db = 2\pi \frac{\rho}{2 \tan \frac{\theta}{2}} \frac{\rho}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = \frac{\rho^2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}}{8 \sin^4 \frac{\theta}{2}} 2\pi d\theta \quad [12.8]$$

Ora tramite le formule di bisezione per seno e coseno possiamo riscrivere il numeratore come:

$$\cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{2} \quad [12.9]$$

e sostituendo in $d\sigma$ otteniamo:

$$d\sigma = \frac{\rho^2}{16 \sin^4 \frac{\theta}{2}} 2\pi \sin \theta d\theta \quad [12.10]$$

Osserviamo che $2\pi \sin \theta d\theta = d\Omega$ è l'**angolo solido di deflessione** infinitesimo, quindi:

$$d\sigma = \frac{\rho^2}{16 \sin^4 \frac{\theta}{2}} d\Omega \quad [12.11]$$

Da cui scriviamo:

Sezione d'urto differenziale su angolo solido

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\rho^2}{16 \sin^4 \frac{\theta}{2}}} \quad [12.12]$$

Scrivendo ρ in forma estesa (11.32) diventa:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16} (zZ)^2 \alpha^2 \left(\frac{\hbar c}{K} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{16} (zZ)^2 \alpha^2 \left[\frac{2m}{m^2 v^2} \right]^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad [12.13]$$

Nota (Divergenza della sezione d'urto). La sezione d'urto differenziale per scattering Rutherford, formulata considerando l'interazione coulombiana come unica forma d'interazione, in regime classico, e non considerando la carica del nucleo schermata dagli elettroni, presenta una divergenza per $\theta \rightarrow 0$.

Impulso trasferito L'impulso come grandezza vettoriale non è una quantità conservata, ma ne è conservato il modulo, ovvero $|\vec{p}_f| = |\vec{p}_i|$.

La quantità:

$$\vec{q} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = m(\vec{v}_f - \vec{v}_i) \quad [12.14a]$$

$$|\vec{q}| = 2mv \sin \frac{\theta}{2} \quad [12.14b]$$

mostrata in figura 12.1 è detta **impulso trasferito nel processo d'urto** e rappresenta la *variazione di impulso della particella scatterata, che è l'impulso assorbito dall'atomo scatterante*.

Con questa nuova definizione riprendiamo la sezione d'urto differenziale dall'equazione 12.13 e sostituiamo l'equazione 12.14b appena trovata:

Sezione d'urto differenziale di Rutherford

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = 4 (zZ)^2 \alpha^2 (\hbar c)^2 \frac{m^2}{q^4}} \quad [12.15]$$

Nota. Nell'ipotesi di atomo *non rinculante* c'è solo trasferimento di impulso, ma non c'è trasferimento di energia.

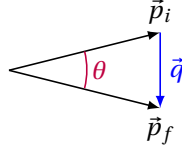


Figura 12.1: Impulso trasferito

12.1.3 Calcolo Quantistico della sezione d'urto

Il calcolo quantistico della sezione d'urto dello scattering Rutherford può essere effettuato utilizzando la *Regola d'oro di Fermi*, definita come segue:

Regola d'Oro di Fermi

$$d\omega_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} |T'_{if}|^2 \delta(E_i - E_f) dn_f \quad [12.16]$$

Dove $|i\rangle$ e $|f\rangle$ sono rispettivamente gli stati *iniziale* e *finale* del processo e $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}$ l'Hamiltoniana totale del sistema, definiamo le seguenti grandezze:

- $d\omega_{if}$: probabilità di transizione per unità di tempo (le dimensioni fisiche saranno $[s^{-1}]$);
- E_i, E_f : energie degli stati iniziale e finale;
- T'_{if} : elemento di matrice; $\langle f | \hat{H}_{\text{int}} | i \rangle$ dell'Hamiltoniana di interazione
- dn_f : # di stati finali accessibili per il sistema, ovvero⁴ $\rho(E_f) dE_f$;
- $\delta(E_f - E_i)$: delta di Dirac di **conservazione dell'energia**.

Definire stati iniziale e finale Supponiamo stati iniziale e finale *autostati dell'impulso* (stati ad impulso definito):

$$|i\rangle = |\vec{p}_i\rangle \quad [12.17a]$$

$$|f\rangle = |\vec{p}_f\rangle \quad [12.17b]$$

Inoltre sappiamo gli autostati dell'impulso essere rappresentati nella base degli *autostati della posizione* da **onde piane**, quindi abbiamo la forma seguente:

$$\langle \vec{x} | \vec{p}_i \rangle = A \exp \left\{ i \frac{\vec{p}_i \cdot \vec{x}}{\hbar} \right\} \quad [12.18a]$$

$$\langle \vec{x} | \vec{p}_f \rangle = A \exp \left\{ i \frac{\vec{p}_f \cdot \vec{x}}{\hbar} \right\} \quad [12.18b]$$

dove A rappresenta la *costante di normalizzazione delle onde piane*.

Presentiamo ora una procedura tipica in fisica delle particelle: fissiamo la normalizzazione della funzione d'onda introducendo un *volume di normalizzazione*.

Volume di normalizzazione La costante di normalizzazione può essere determinata in diversi modi. Uno di questi è introdurre il **volume di normalizzazione** V , ovvero il volume dello spazio tridimensionale all'interno del quale l'integrale del modulo quadro della funzione d'onda sia uguale a 1. Facciamo questo per semplificare i nostri calcoli, aspettandoci che il risultato finale sia indipendente dal volume di normalizzazione utilizzato⁵. Quindi affinché gli stati iniziale e finale siano normalizzati all'interno di tale volume di normalizzazione, ovvero che:

$$\langle \vec{p}_{i,f} | \vec{p}_{i,f} \rangle = 1 \rightarrow \int |\langle \vec{x} | \vec{p}_{i,f} \rangle|^2 d\vec{x} = 1 \quad [12.19]$$

⁴La grandezza $\rho(E_f)$ indica la densità di stati in funzione dell'energia e dE_f l'intervallo infinitesimo di energia

⁵Questo ci permette di determinare la normalizzazione degli stati, ma anche di calcolare il numero di stati finali accessibili dal sistema dn_f , poiché questa è una grandezza che dipende da come normalizziamo i nostri stati

Questo implica che il valore della costante A nelle equazioni 12.18 sia $A = \frac{1}{\sqrt{V}}$, per cui:

$$\langle \vec{x} | \vec{p}_i \rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp \left\{ i \frac{\vec{p}_i \cdot \vec{x}}{\hbar} \right\} \quad [12.20a]$$

$$\langle \vec{x} | \vec{p}_f \rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp \left\{ i \frac{\vec{p}_f \cdot \vec{x}}{\hbar} \right\} \quad [12.20b]$$

Nota. Dal punto di vista classico, una particella è identificata dalle 3 coordinate spaziali e dalle 3 coordinate di impulso (*spazio delle fasi classico*). Questo nel calcolo quantistico non vale, per cui diversi stati classici (nel limite del principio di indeterminazione) devono coincidere con un unico stato quantistico ($\Delta^3 x \Delta^3 p = h^3$). Quindi, avendo introdotto il *volume di normalizzazione*, possiamo dire che $\Delta^3 x = V$, quindi:

$$\Delta^3 p = \frac{h^3}{V} \quad [12.21]$$

La *densità dei possibili stati*:

$$\frac{dn_f}{dp} = \frac{V}{h^3} \quad [12.22a]$$

quindi in termini di \hbar :

$$\frac{dn_f}{dp} = \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} \quad [12.22b]$$

A questo punto possiamo andare a calcolare l'elemento di matrice T'_{if} , ricordando che \hat{H}_{int} è il *potenziale coulombiano* generato dal nucleo scatterante:

$$T'_{if} = \langle f | H_{\text{int}} | i \rangle = \int d^3 \vec{x} \int d^3 \vec{y} \langle f | \vec{x} \rangle \langle \vec{x} | H_{\text{int}} | \vec{y} \rangle \langle \vec{y} | i \rangle \quad [12.23]$$

poiché gli integrali sui proiettori $|\vec{x}\rangle \langle \vec{x}|$ e $|\vec{y}\rangle \langle \vec{y}|$ sono proprio l'identità. Poiché possiamo scrivere l'Hamiltoniana di interazione come (*interazione coulombiana*⁶ dipendente solo dalla posizione), scegliendo un sistema di riferimento in cui la particella che produce lo scattering è posta nell'origine:

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x}|} \quad [12.24]$$

dove chiaramente z è la carica della particella scatterata e Z la carica del nucleo che produce l'effetto di scattering. Quindi il termine $\langle \vec{x} | H_{\text{int}} | \vec{y} \rangle$ farà comparire una δ del tipo:

$$\langle \vec{x} | \hat{H}_{\text{int}} | \vec{y} \rangle = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x}|} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad [12.25]$$

La delta rimuoverà uno dei due integrali⁷, quindi continuiamo il calcolo dell'elemento di matrice riprendendo dall'equazione 12.23:

$$\begin{aligned} T'_{if} &= \frac{1}{V} \int d^3 \vec{x} \exp \left\{ -i \frac{\vec{p}_f \cdot \vec{x}}{\hbar} \right\} \hat{H}_{\text{int}}(\vec{x}) \exp \left\{ i \frac{\vec{p}_i \cdot \vec{x}}{\hbar} \right\} \\ &= \frac{1}{V} \int d^3 \vec{x} \exp \left\{ -i \frac{(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \cdot \vec{x}}{\hbar} \right\} \hat{H}_{\text{int}}(\vec{x}) \\ &= \frac{1}{V} \int d^3 \vec{x} \exp \left\{ -i \frac{(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \cdot \vec{x}}{\hbar} \right\} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x}|} \end{aligned} \quad [12.26]$$

ed esprimendo in termini della quantità vettoriale *impulso trasferito* definita dall'equazione 12.14a:

$$T'_{if} = \frac{1}{V} \int d^3 \vec{x} \exp \left\{ -i \frac{\vec{q} \cdot \vec{x}}{\hbar} \right\} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x}|} \quad [12.27]$$

⁶I potenziali di interazione che hanno andamento $\frac{1}{r}$ sono detti **potenziali a lungo raggio**

⁷Vedi proprietà della Delta di Dirac

Nota: possiamo osservare che questa quantità, a meno della costante di normalizzazione, è proporzionale alla **trasformata di Fourier** del potenziale di interazione con parametro della trasformazione definito dall'impulso trasferito. Questo ci dice che tanto maggiore è l'impulso trasferito, tanto più piccole saranno le strutture che si possono osservare dei potenziali che mediano una certa interazione (questo vale in generale, non solo per scattering Rutherford).

Per calcolare l'integrale dato dall'equazione 12.27 scegliamo un sistema di riferimento che vede il vettore \vec{q} diretto lungo l'asse \hat{z} e il nucleo scatterante posto nell'origine, come in figura:

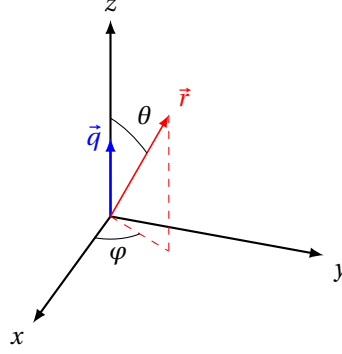


Figura 12.2: Scelta del sistema di riferimento

Per cui l'equazione 12.27 diventa (dove abbiamo utilizzato la notazione $r = |\vec{x}|$ e $q = |\vec{q}|$):

$$\begin{aligned} T'_{if} &= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^\infty dr r^2 \exp\left\{i \frac{qr \cos\theta}{\hbar}\right\} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \\ &= \frac{2\pi}{V} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^\infty dr r \exp\left\{i \frac{qr \cos\theta}{\hbar}\right\} \end{aligned} \quad [12.28a]$$

per semplificare la notazione introduciamo la variabile $k = \frac{q}{r}$, per cui integrando prima in $\cos\theta$:

$$\begin{aligned} T'_{if} &= \frac{2\pi}{V} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dr r \frac{1}{ikr} \{\exp[ikr] - \exp[-ikr]\} \\ &= \frac{2\pi}{V} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(ik)^2} \{\exp[ikr]_0^\infty + \exp[-ikr]_0^\infty\} \end{aligned} \quad [12.28b]$$

Ora, poiché $\exp[ikr]$ ed $\exp[-ikr]$ sono *soluzioni oscillanti non dumpate*, l'integrale non converge. Abbiamo il problema che non possiamo valutare esplicitamente l'integrale. Questo è legato al fatto che il modello considerato è poco realistico, nel senso che il potenziale di interazione considerato ha lo stesso comportamento in tutto lo spazio⁸. Nella realtà accade che ci sarà sempre una *lunghezza di taglio* oltre la quale il potenziale risulta schermato.

Taglio al potenziale di interazione Ripetiamo ora il calcolo dell'elemento introducendo un *taglio (dump)* esponenziale al potenziale di interazione coulombiano, che è un potenziale a corto raggio, per cui riscriviamo l'Hamiltoniana di interazione come:

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \exp[-\mu r] \quad [12.29]$$

dove μ può essere espresso in termini della lunghezza caratteristica r_t chiamata **raggio di taglio**:

$$\mu = \frac{1}{r_t} \quad [12.30]$$

Si utilizza il taglio esponenziale poiché:

⁸Non viene considerata, ad esempio, l'azione schermante degli elettroni atomici degli atomi scatteranti. Infatti, a distanze minori della dimensioni caratteristiche dell'atomo l'interazione si sente; a distanze maggiori, invece, gli elettroni atomici schermano la carica del nucleo e l'interazione è dumpata

- se $r \ll r_t$ l'Hamiltoniana di interazione descrive correttamente gli effetti coulombiani
- se $r \gg r_t$ il termine esponenziale sopprime l'interazione coulombiana

Torniamo al calcolo dell'integrale che descrive l'elemento di matrice T'_{if} , lasciato all'equazione 12.28a inserendo il termine aggiuntivo di taglio:

$$\begin{aligned}
 T'_{if} &= \frac{2\pi}{V} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^\infty dr r e^{-\mu r} e^{ikr \cos\theta} \\
 &= \frac{2\pi}{V} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dr \frac{r'}{ikr'} e^{-\mu r} \{e^{ikr} - e^{-ikr}\} \\
 &= \frac{2\pi}{V} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dr \frac{1}{ik} \{e^{-(\mu-ik)r} - e^{-(\mu+ik)r}\} \\
 &= \frac{2\pi}{V} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{ik} \left\{ \frac{1}{-(\mu-ik)} e^{-(\mu-ik)r} \Big|_0^\infty - \frac{1}{-(\mu+ik)} e^{-(\mu+ik)r} \Big|_0^\infty \right\}
 \end{aligned} \tag{12.31a}$$

e poiché gli esponenziali, dumpati dall'introduzione di μ , sono nulli se valutati all'infinito, l'espressione si riduce a:

$$\begin{aligned}
 T'_{if} &= -\frac{2\pi}{V} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{ik} \left\{ \frac{1}{-(\mu-ik)} - \frac{1}{-(\mu+ik)} \right\} \\
 &= \frac{2\pi}{V} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{ik} \left\{ \frac{\mu+ik-\mu+ik}{(\mu-ik)(\mu+ik)} \right\} \\
 &= \frac{2\pi}{V} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{\mu^2+k^2}
 \end{aligned} \tag{12.31b}$$

Quindi con il taglio esponenziale, e il parametro μ , siamo in grado di calcolare l'elemento di matrice:

$$\text{Potenziale di Yukawa } (r_t \text{ finita}) \quad \boxed{T'_{if} = \frac{4\pi}{V} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\mu^2+k^2}} \tag{12.32}$$

Nel caso *coulombiano* mandiamo all'infinito la lunghezza di taglio r_t e otteniamo:

$$T'_{if} \xrightarrow{r_t \rightarrow \infty \Rightarrow \mu \rightarrow 0} \frac{4\pi}{V} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{k^2} \tag{12.33}$$

Riprendendo la *Regola d'oro di Fermi* (equazione 12.16), l'espressione che si ottiene quando **rimuoviamo la lunghezza di taglio** r_t , ovvero quando $\mu \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
 d\omega_{if} &= \frac{2\pi}{\hbar} \left| T'_{if} \right|^2 \delta(E_i - E_f) dn_f \\
 &= \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{4\pi}{V} \right)^2 \left(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{k^4} \delta(E_i - E_f) dn_f
 \end{aligned} \tag{12.34}$$

Manipolando i termini per cercare un'espressione più compatta della formula, con α la *costante di struttura fine*:

$$\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hbar c}{\hbar c} = zZ\alpha\hbar c \tag{12.35}$$

in più, ricordando che $k = q/\hbar$, ritroviamo un risultato già ottenuto nel caso classico (equazione 12.15) nella dipendenza da potenziale coulombiano: in questo caso osserviamo che il tasso di transizione $d\omega_{if} \sim q^{-4}$. Riscriviamo la 12.34, ricordando che $k = \frac{q}{\hbar}$:

$$d\omega_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{4\pi}{V} \right)^2 (zZ)^2 \alpha^2 (\hbar c)^2 \frac{\hbar^4}{q^4} \delta(E_i - E_f) dn_f \tag{12.36}$$

Numero di stati finali accessibili dal sistema Ci rimane valutare il numero di stati finali accessibili dal sistema, ovvero la *conta degli stati* dn_f . Questo si può fare **imponendo le condizioni al bordo** oppure sfruttando il **principio di corrispondenza**. Definiamo il **volume dello spazio delle fasi classico occupato da uno stato quantistico**: uno stato quantistico, occupa nello spazio delle fasi classico, dato il *principio di indeterminazione di Heisenberg*, un volume dato da:

$$\Delta^3 p \Delta^3 x = h^3 \quad [12.37]$$

dove $\Delta^3 x = V$ è proprio il *volume di normalizzazione*, per cui fissando lo spazio fisico in questo modo:

$$\Delta^3 p = \frac{h^3}{V} \quad [12.38]$$

Per cui:

$$dn_f = \frac{d^3 p}{h^3} V \quad [12.39]$$

Quindi possiamo dire che il numero degli stati finali accessibili dal sistema ha una densità costante⁹ data da:

$$\frac{dn_f}{d^3 p} = \frac{V}{h^3} = \frac{V}{h^3 (2\pi)^3} \quad [12.40]$$

Tasso di transizione In conclusione, mettendo insieme tutti i risultati ricavati fino ad ora, possiamo dire che la *probabilità di transizione per unità di tempo* per il processo di *scattering Rutherford* è data da:

$$d\omega_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{4\pi}{V} \right)^2 \alpha^2 (\hbar c)^2 \frac{\hbar^4}{q^4} (zZ)^2 \delta(E_i - E_f) \frac{V}{\hbar^3 (2\pi)^3} d^3 p_f \quad [12.41]$$

osserviamo che la quantità $d\omega_{if}$, ovvero la probabilità di transizione per unità di tempo, conserva la dipendenza dal volume di normalizzazione V . Questa quantità, però, non è l'osservabile fisico. Per questo motivo andiamo a calcolare la sezione d'urto.

Sezione d'urto quantistica per Scattering Rutherford La sezione d'urto di questo processo è legata alla probabilità di transizione per unità di tempo $d\omega_{if}$. La sezione d'urto ci dice quanto è probabile che un processo di interazione fra “proiettile” e “bersaglio” avvenga.

In particolare, in questo caso abbiamo che il numero di eventi per unità di tempo e per unità di tempo e unità di impulso dello stato finale:

$$\frac{dN_{\text{eventi}}}{dt d^3 p_f} = \frac{d\sigma}{d^3 p_f} \phi_p N_t \quad [12.42]$$

dove le quantità sono:

- ϕ_p il *flusso delle particelle (proiettili) incidenti*;
- N_t il *numero di bersagli illuminati dal fascio (numero di target)*;
- $\frac{d\sigma}{d^3 p_f}$ la *sezione d'urto differenziale* del processo definita in funzione dell'impulso della particella nello stato finale.

Ricordiamo che nel nostro caso particolare si considera un singolo processo (una particella su singolo bersaglio) all'interno di un volume di normalizzazione, per cui, all'interno di quest'ultimo possiamo dire che:

$$\begin{cases} N_t = 1 \\ \phi_p = nv = \frac{1}{V} v \\ \frac{dN_{\text{eventi}}}{dt d^3 p_f} = \frac{d\omega_{if}}{d^3 p_f} \end{cases} \quad [12.43]$$

⁹La densità degli stati finali è *uniforme* in p , poiché non c'è motivo che un impulso sia preferito rispetto ad un altro (*isotropia*)

Dove per il flusso ϕ_p : v indica la *velocità* della particella z incidente e n indica la “*number density*” di particelle z che collidono con il nucleo scatteratore e nel nostro caso risulta essere v/v perché consideriamo una particella all'interno del volume di normalizzazione.

Quindi possiamo scrivere che la sezione d'urto vale:

$$\frac{d\sigma}{d^3p_f} = \frac{dN_{\text{eventi}}}{dt d^3p_f} \frac{1}{\phi_{\text{proiettili}} N_t} = \frac{d\omega_{if}}{d^3p_f} \frac{V}{v} \quad [12.44]$$

e sfruttando l'equazione 12.41:

$$\frac{d\sigma}{d^3p_f} = \left[2\pi \left(\frac{4\pi}{\mathcal{V}} \right)^2 \alpha^2 (\hbar c)^2 \frac{1}{q^4} (zZ)^2 \delta(E_i - E_f) \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} \right] \frac{\mathcal{V}}{v} \quad [12.45]$$

quindi osserviamo che ora la sezione d'urto differenziale risulta del tutto indipendente dal volume di normalizzazione V e possiamo rielaborare e semplificare ulteriormente ottenendo:

$$\frac{d\sigma}{d^3p_f} = 4 (\hbar c)^2 \alpha^2 (zZ)^2 \delta(E_i - E_f) \frac{1}{v} \frac{1}{q^4} \quad [12.46]$$

In più, nel limite in cui il nucleo scatterante non rinculi, si avrebbe che l'impulso finale p_i coincide con l'impulso finale p_f e si può descrivere tutta la dinamica in termini dell'angolo solido Ω , poiché potendo scrivere:

$$d^3p_f = p_f^2 dp_f d\Omega \quad [12.47]$$

dove abbiamo integrato su tutto il range di impulsi, per ottenere un'espressione della sezione d'urto differenziale solo rispetto all'angolo solido. Segue che:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \int_0^\infty \frac{d\sigma}{d^3p_f} p_f^2 dp_f = \int_0^\infty 4 (\hbar c)^2 \alpha^2 (zZ)^2 \delta(E_i - E_f) \frac{1}{v} \frac{1}{q^4} p_f^2 dp_f \quad [12.48a]$$

Ora se stiamo parlando di una *particella incidente non relativistica*, possiamo riscrivere le quantità E_f e v in termini dell'impulso p_f , dove m è la massa della particella:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \int_0^\infty 4 (\hbar c)^2 \alpha^2 (zZ)^2 \delta\left(E_i - \frac{p_f^2}{2m}\right) \frac{m}{p_f} \frac{1}{q^4} p_f^2 dp_f \quad [12.48b]$$

Poiché la delta di Dirac di conservazione dell'energia è espressa in termini di p_f^2 , cambiamo variabile di integrazione con quest'ultima come segue:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \int_0^\infty \frac{2m^2}{2p_f} \frac{p_f^2}{p_f} 4 (\hbar c)^2 \alpha^2 (zZ)^2 \delta\left(E_i - \frac{p_f^2}{2m}\right) \frac{1}{q^4} d\left(\frac{p_f^2}{2m}\right) \quad [12.48c]$$

La Delta seleziona il modulo dell'impulso finale p_f in modo che sia uguale all'impulso iniziale p_i affinché l'energia rimanga conservata, per cui rimuove l'integrale e si ottiene il risultato finale:

Sezione d'urto differenziale di Rutherford

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = 4 (\hbar c)^2 \alpha^2 (zZ)^2 \frac{m^2}{q^4}} \quad [12.48d]$$

Possiamo osservare in più che, poiché la Delta di conservazione dell'energia fissa il modulo dell'impulso finale della particella scatterata, p_f , la quantità *impulso trasferito* q dipenderà esclusivamente dall'angolo di deflessione:

$$q = 2p \sin \frac{\theta}{2} \quad [12.49]$$

dove $p = |\vec{p}_i| = |\vec{p}_f|$.

Nota. Il risultato ottenuto dal calcolo quantistico corrisponde esattamente al risultato trovato dal calcolo classico!

Lezione 13

Lezione 2020-05-07

13.1 Scattering Rutherford (reprise)

Fino ad ora abbiamo lavorato in approssimazione di *nucleo puntiforme*. Questa approssimazione non è più adeguata se vogliamo andare a studiare gli effetti della dimensione finita del nucleo o studiare la dimensione del nucleo stesso. Quindi il quesito che ci poniamo è: *come varia l'espressione della sezione d'urto differenziale di Rutherford se rimuoviamo l'approssimazione di nucleo puntiforme?*

13.1.1 Sezione d'urto per nucleo *non* puntiforme

Consideriamo il nucleo atomico come una distribuzione estesa di carica per cui¹:

- $\rho(\vec{r})$: densità di carica $\longrightarrow \int \rho(\vec{r}) d^3r = Ze$
- $\rho_N(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{Ze}$: densità di carica normalizzata $\longrightarrow \int \rho_N(\vec{r}) d^3r = 1$

Questa modifica alle ipotesi di lavoro si ripercuote nell'espressione che descrive l'Hamiltoniana di interazione H_{int} .

Elemento di matrice per distribuzione estesa di carica In generale, l'elemento di matrice T_{if} si calcola come:

$$T_{if} = \langle f | H_{\text{int}} | i \rangle \quad [13.1]$$

che abbiamo già visto nel caso puntiforme nelle equazioni 12.24 e 12.27.

Nel caso *non* puntiforme avremo quindi che l'Hamiltoniana di interazione assume la seguente forma:

$$H_{\text{int}}(\vec{r}) = \frac{ze}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_N(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad [13.2]$$

dove l'integrale è valutato in *tutto lo spazio* e $|\vec{r} - \vec{r}'|$ indica la distanza fra il punto \vec{r} in cui vogliamo valutare l'interazione e il punto \vec{r}' dell'elemento infinitesimo di carica della distribuzione estesa che la genera. Quindi abbiamo l'espressione esplicita del *potenziale elettrostatico generato da una distribuzione arbitraria di carica*.

Quindi quando consideriamo la distribuzione estesa, otteniamo l'elemento di matrice T_{if} effettuando la trasformata di Fourier di 13.2. Per cui:

$$T_{if} = \frac{1}{V} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho_N(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \exp \left\{ i \frac{(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \cdot \vec{r}}{\hbar} \right\} \quad [13.3a]$$

Ma espressa in questo modo è di difficile risoluzione, quindi moltiplichiamo e dividiamo per $\exp \left\{ -i \frac{(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \cdot \vec{r}'}{\hbar} \right\}$ e otteniamo:

$$T_{if} = \frac{1}{V} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho_N(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \exp \left\{ i \frac{(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{\hbar} \right\} \exp \left\{ i \frac{(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \cdot \vec{r}'}{\hbar} \right\} \quad [13.3b]$$

¹La notazione utilizzata prevede che \vec{r} sia il vettore e r il suo modulo

Osserviamo che ora la possiamo separare gli integrali nelle variabili \vec{r}' e $\vec{r}'' = \vec{r} - \vec{r}'$, come prodotto di due termini calcolabili in maniera indipendente, come segue:

$$T_{if} = \frac{1}{V} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r'' \frac{1}{r''} \exp \left\{ i \frac{(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \cdot \vec{r}''}{\hbar} \right\} \int d^3r' \rho_N(\vec{r}') \exp \left\{ i \frac{(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \cdot \vec{r}'}{\hbar} \right\} \quad [13.3c]$$

In più il *primo dei due termini moltiplicativi*, inclusi i prefattori, costituiscono esattamente la trasformata di Fourier del potenziale puntiforme, per cui rappresenta l'elemento di matrice del potenziale puntiforme già calcolata in precedenza².

$$(T_{if})_{\text{punt}} = \frac{1}{V} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r'' \frac{1}{r''} \exp \left\{ i \frac{\vec{q} \cdot \vec{r}''}{\hbar} \right\} \quad [13.4]$$

Il *secondo termine moltiplicativo* rappresenta, invece, la trasformazione di Fourier della distribuzione normalizzata di carica, $\rho_N(\vec{r}')$, con parametro di trasformazione (quindi con vettore d'onda) $\frac{\vec{q}}{\hbar}$. Questo oggetto è una funzione complessa di \vec{q} ed assume il nome di *fattore di forma associato alla distribuzione di carica* considerata:

$$\text{Fattore di Forma} \quad F(\vec{q}) = \int d^3r' \rho_N(\vec{r}') \exp \left\{ i \frac{\vec{q} \cdot \vec{r}'}{\hbar} \right\} \quad [13.5]$$

e rappresenta la modifica che si apporta all'elemento di matrice del caso puntiforme per passare alla distribuzione estesa di carica.

Nota. Il *fattore di forma* non è altro che la *trasformata di Fourier della distribuzione di carica* del nucleo scatteratore.

Nota. Qualora il sistema che si sta considerando fosse dotato di *simmetria sferica* la dipendenza di F da \vec{q} riguarderebbe solo il modulo, ovvero $F = F(\vec{q})$.

Alla luce di queste considerazioni possiamo scrivere l'elemento di matrice come segue:

$$T_{if} = (T_{if})_{\text{punt}} F(\vec{q}) \quad [13.6]$$

Sezione d'urto differenziale di Rutherford per distribuzione estesa di carica Tenendo conto di questa nuova espressione dell'elemento di matrice di interazione, omettendo tutti i passaggi che formalmente prevedono che si sostituisca quest'ultima nell'espressione della regola d'oro di Fermi (equazione 12.16) e che si proceda analogamente al caso puntiforme, scriviamo la *sezione d'urto differenziale per scattering Rutherford in ipotesi di nucleo come distribuzione estesa di carica*:

$$\text{Sezione d'urto differenziale per distribuzione estesa} \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{punt}} |F(\vec{q})|^2 \quad [13.7]$$

Nota. Attenzione, perché questo approccio non determina univocamente la funzione $F(\vec{q})$, ma ne determina solo il modulo; non abbiamo alcuna informazione sulla fase. Quindi, ad esempio, non possiamo utilizzare questo approccio per la ricostruzione del *fattore di forma* da dati sperimentali antitrasformando, perché di nuovo, abbiamo che i dati eventualmente ottenuti sarebbero legati solo al modulo di F .

13.1.2 Deviazione dal comportamento puntiforme

Studiando le deviazioni del *fattore di forma* dall'unità si possono valutare le dimensioni dei nuclei. Della definizione di *fattore di forma*, in ipotesi di simmetria sferica, distinguiamo i seguenti casi:

²Siamo passati ad utilizzare la quantità *impulso trasferito* \vec{q}

- $\left(\frac{q}{\hbar}\right) R_N \ll 1$ nelle regioni di spazio in cui la distribuzione normalizzata di carica è sensibilmente diversa da 0 si ha che:

$$F(q \simeq 0) = 1 \quad [13.8]$$

per cui gli urti che avvengono con un impulso trasferito piccolo si possono considerare urti fra particelle puntiformi. Quindi *non possiamo utilizzare urti con $q \simeq 0$ per studiare le dimensioni del nucleo.*

- $\left(\frac{q}{\hbar}\right) R_N \gtrsim 1$ nelle regioni di spazio in cui la distribuzione normalizzata di carica è sensibilmente diversa da 0 si ha che:

$$F(q) \neq 1 \quad [13.9]$$

Come già visto nell'equazione 12.14b che riportiamo nuovamente di seguito (in riferimento alla figura 12.1), se $p = |\vec{p}_i| = |\vec{p}_f|$:

$$|\vec{q}| = 2p \sin \frac{\theta}{2} \quad [13.10]$$

avremo che ad impulso fissato l'impulso trasferito dipenderà dall'angolo θ . Quindi al variare di tale angolo si registreranno diversi valori di q ; per cui avremo che, tramite il fattore di forma, l'angolo θ modula la sezione d'urto.

Ora, sapendo che i nuclei hanno dimensioni caratteristiche dell'ordine del fermi, possiamo chiederci quale sia la condizione sull'impulso trasferito q che causa le deviazioni che ci permettano di studiare le dimensioni del nucleo:

$$q \gtrsim \frac{\hbar c}{R_N c} \implies qc \gtrsim \frac{\hbar c}{R_N} \simeq \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{R_N [\text{fm}]} \quad [13.11]$$

quindi l'impulso trasferito per sondare strutture (nel nostro caso nuclei) dalle dimensioni dell'ordine di grandezza del *fermi* deve essere dell'ordine di centinaia di MeV/c.

13.2 Modelli per la distribuzione di carica nei nuclei

13.2.1 Sfera uniformemente carica

Definiamo una distribuzione di carica la cui densità (normalizzata) dipenda solo dalla distanza dal baricentro del nucleo come segue:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases} \quad [13.12]$$

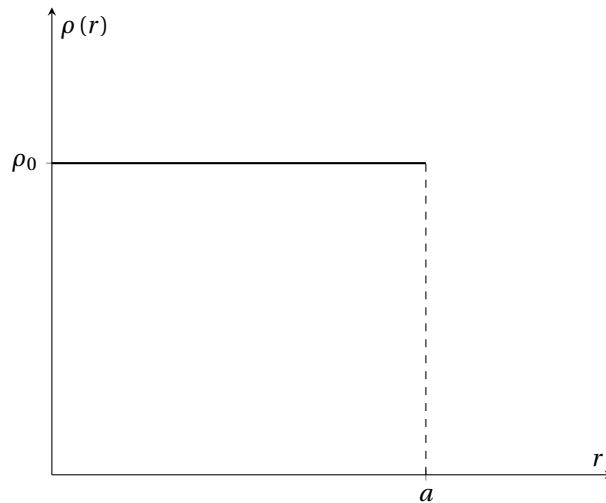


Figura 13.1: Modello di sfera uniformemente carica

questo modello dipende da un **unico parametro**, poiché:

$$\int \rho_N(r) d^3r = 1 \implies \rho_0 = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi a^3} \quad [13.13]$$

Quindi per questo semplice modello è possibile studiare analiticamente il *fattore di forma* e la dipendenza di quest'ultimo dal parametro che caratterizza il modello, che è il raggio a del nucleo.

Calcolo del fattore di forma Il calcolo del fattore di forma è possibile per via analitica e risulta relativamente semplice. Procediamo con il calcolo:

$$\begin{aligned} F(q) &= \int \rho_N(\vec{x}) \exp\left\{i \frac{\vec{q} \cdot \vec{x}}{\hbar}\right\} d^3x \\ &= \int_0^\infty dr r^2 \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi \rho(r) \exp\left\{i \frac{qr \cos\theta}{\hbar}\right\} \\ &= 2\pi \int_0^\infty dr r^2 \rho(r) \frac{\hbar}{iqr} \left\{ \exp\left[i \frac{qr}{\hbar}\right] - \exp\left[-i \frac{qr}{\hbar}\right] \right\} \end{aligned} \quad [13.14]$$

Fino ad ora il procedimento è generale perché non abbiamo fissato alcuna ipotesi, quindi varrà analogamente anche per il modello illustrato successivamente. Ora imponiamo dunque l'ipotesi di distribuzione sferica e uniforme di carica (equazione 13.12), ricordando il valore di ρ_0 (equazione 13.13):

$$\begin{aligned} F(q) &= 2\pi\rho_0 \int_0^a dr \frac{r^2 \hbar}{iqr} \left\{ \exp\left[i \frac{qr}{\hbar}\right] - \exp\left[-i \frac{qr}{\hbar}\right] \right\} \\ &= \frac{4\pi\rho_0 \hbar}{q} \int_0^a dr r \sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right) \\ &= \frac{4\pi\rho_0 \hbar}{q} \left(\frac{q}{\hbar}\right)^2 \int_0^a d\left(\frac{qr}{\hbar}\right) \frac{qr}{\hbar} \sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right) \end{aligned} \quad [13.15a]$$

Ed effettuando il cambio di variabile $y = \frac{qr}{\hbar}$, con il nuovo estremo d'integrazione $\tilde{y} = \frac{aq}{\hbar}$, e sostituendo il valore esplicito di ρ_0 :

$$F(q) = \frac{3\hbar^3}{a^3 q^3} \left(\frac{q}{\hbar}\right)^2 \int_0^{\tilde{y}} y \sin y dy \quad [13.15b]$$

Svolgendo l'integrale per parti³ otteniamo quanto segue:

$$F(q) = \frac{3\hbar^3}{a^3 q^3} \left(\frac{q}{\hbar}\right)^2 \left\{ [-y \cos y]_0^{\tilde{y}} + [\sin y]_0^{\tilde{y}} \right\} = \frac{3\hbar^3}{a^3 q^3} \left(\frac{q}{\hbar}\right)^2 [-\tilde{y} \cos \tilde{y} + \sin \tilde{y}] \quad [13.15c]$$

Quindi in conclusione possiamo riscrivere il **fattore di forma per il modello di sfera uniformemente carica** come segue⁴:

$$F(q^2) = \frac{3}{\tilde{y}} [\sin \tilde{y} - \tilde{y} \cos \tilde{y}] \quad [13.16]$$

Nota. Il fattore di forma così ottenuto si annulla per:

$$\sin \tilde{y} = \tilde{y} \cos \tilde{y} \quad [13.17]$$

Le soluzioni \tilde{y} di quest'equazione trascendente si possono trovare numericamente.

Studiamo il comportamento di questa funzione:

- $\tilde{y} \ll 1 \rightarrow q \ll \frac{\hbar}{a}$: sviluppiamo i termini di $F(q^2)$ in serie di Taylor:

$$\begin{cases} \sin \tilde{y} = \tilde{y} - \frac{\tilde{y}^3}{6} + \frac{\tilde{y}^5}{5!} + \dots \\ \cos \tilde{y} = 1 - \frac{\tilde{y}^2}{2} + \frac{\tilde{y}^4}{4!} + \dots \end{cases} \quad [13.18]$$

³ $\int y \sin y dy = -\int y \frac{d \cos y}{dy} dy = -y \cos y + \int \cos y dy = -y \cos y + \sin y$

⁴ In fisica delle particelle è più naturale esprimere le quantità in funzione di q^2 piuttosto che in funzione di q

per cui:

$$\begin{aligned}
 F(q^2) &= \frac{3}{\tilde{y}^3} \left[\left(\tilde{y} - \frac{\tilde{y}^3}{6} + \frac{\tilde{y}^5}{5!} + \dots \right) - \tilde{y} \left(1 - \frac{\tilde{y}^2}{2} + \frac{\tilde{y}^4}{4!} + \dots \right) \right] \\
 &= \frac{3}{\tilde{y}^3} \left[\tilde{y}^3 \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right) + \tilde{y}^5 \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{4!} \right) + \dots \right] \\
 &= \frac{3}{\tilde{y}^3} \tilde{y}^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{\tilde{y}^2}{5!} (5-1) + \dots \right] \\
 &= 1 - \frac{\tilde{y}^2}{10} + \dots
 \end{aligned} \tag{13.19a}$$

Quindi, in forma esplicita:

$$F(q^2) \simeq 1 - \frac{1}{10} \left(\frac{q}{a\hbar} \right)^2 \tag{13.19b}$$

Per cui nel momento in cui $q \ll \frac{\hbar}{a}$ il fattore di forma tende a 1 e possiamo assumere il nucleo come puntiforme.

Inoltre osserviamo che la derivata del fattore di forma rispetto alla variabile q^2 :

$$\frac{dF(q^2)}{dq^2} = -\frac{a^2}{10\hbar^2} \tag{13.20}$$

In **termini generali** si può dimostrare che esiste una relazione di proporzionalità fra il raggio di estensione di una distribuzione di carica (qualunque, purché dotata di simmetria sferica) e la derivata del suo fattore di forma rispetto a q^2 . Infatti, se definiamo il *raggio medio quadro della distribuzione*⁵⁶:

$$\langle r^2 \rangle = \int r^2 \rho_N(r) d^3r = \int r^2 \rho_N(r) 4\pi r^2 dr \tag{13.21}$$

per valori di $q \ll 1$ si ha:

$$F(q^2) \simeq 1 - \langle r^2 \rangle \frac{q^2}{6\hbar^2} \tag{13.22}$$

e la sua derivata:

$$\frac{dF(q^2)}{dq^2} = -\frac{\langle r^2 \rangle}{6\hbar^2} \tag{13.23}$$

Nota (Legge empirica per il raggio di un nucleo). Il raggio di un nucleo può essere stabilito tramite la legge empirica:

$$r \simeq 12 \text{ fm} \cdot A^{\frac{1}{3}}$$

dove $A = \#$ nucleoni del nucleo.

- $\tilde{y} \gtrsim 1$: dobbiamo studiare il comportamento della funzione completa. Rielaboriamo l'espressione del fattore di forma (equazione 13.16) come di seguito:

$$F(q^2) = \frac{3}{\tilde{y}^3} [\sin \tilde{y} - \tilde{y} \cos \tilde{y}] = \frac{3}{\tilde{y}} \cos \tilde{y} [\tan \tilde{y} - \tilde{y}] \tag{13.24}$$

13.2.2 Modello Saxon-Woods

La densità normalizzata di carica è descritta in questo modello, che risulta più elaborato del precedente, da una funzione del tipo:

$$\rho_N(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r-a}{d}\right)} \tag{13.25}$$

e anche in questo caso la costante ρ_0 non è un parametro libero, poiché è determinato dalla condizione di normalizzazione, mentre i **due parametri** a e d sono rispettivamente:

⁵Per la distribuzione sferica uniforme si riottiene il risultato espresso nell'equazione 13.19b, poiché $\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} a^2$

⁶Il prof. capozzi espande il sin in serie di Taylor prima di integrare e poi scrive:

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{Ze} \int r^2 \rho_N(r) 4\pi r^2 dr$$

- *a* raggio nucleare ($a \propto A^{\frac{1}{3}}$);
- *d* thickness del nucleo, ovvero lo spessore della superficie del nucleo.

Nota (Nuclei leggeri). La distribuzione di Saxon-Woods è utilizzata, in quanto buona approssimazione, per nuclei piuttosto pesanti, mentre funziona poco bene per nuclei molto leggeri. In tal caso è più efficace una distribuzione di carica di tipo gaussiano.

13.3 Teoria delle perturbazioni indipendenti dal tempo

Consideriamo di nuovo la distribuzione di carica come una sfera uniformemente carica. Dalla teoria delle perturbazioni indipendenti dal tempo possiamo scrivere:

$$\Delta E_{1s} = \langle \psi_{1s} | V_{\text{cont.}}(r) - V_{\text{punt.}}(r) | \psi_{1s} \rangle \quad [13.26]$$

Dove il potenziale continuo è potenziale coulombiano della distribuzione sferica uniforme:

$$V_{\text{cont.}} = \begin{cases} -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R_N} \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R_N} \right) \right]^2, & r > R_N \\ -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} & \end{cases} \quad [13.27]$$

La funzione d'onda dello stato 1s per un atomo idrogenoide:

$$\psi_{1s} = \frac{Z}{\sqrt{4\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{Zr}{a_0}} \quad [13.28]$$

dove $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}$. Svolgendo l'integrale in 13.26:

$$\begin{aligned} \Delta E_{1s} &= \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R_N} \int_0^{R_N} dr r^2 \left(\frac{Z}{a_0} \right)^3 e^{-\frac{2Zr}{a_0}} \left[-\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R_N} \right)^2 + \frac{R_N}{r} \right] \\ &= \frac{Z^4 e^2 R_N^2}{\pi\epsilon_0} \int_0^1 dy e^{-\frac{2ZR_N}{a_0} y} \left[y - \frac{3}{2} y^2 + \frac{y^4}{2} \right] \\ &\simeq \left(\frac{2ZR_N}{a_0} \right)^2 \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} \frac{1}{10} \\ &= \left(\frac{2ZR_N}{a_0} \right)^2 \frac{Z^2 \alpha^2 m_e e^2}{10} \end{aligned} \quad [13.29]$$

dato che il rapporto $\frac{R_N}{a_0}$ fa sì che l'esponenziale sia approssimabile a 1. Notare che abbiamo sfruttato il cambio di variabile $y = \frac{r}{R_N}$. Abbiamo dunque che per lo stato 1s:

$$\frac{\Delta E_{1s}}{E_{1s}} \sim 10^{-4} \quad [13.30]$$

Si può far vedere che, dato che lo stato 2p non è in grado di distinguere fra il caso puntiforme e il caso continuo, allora:

$$\Delta E_{2p \rightarrow 1s} = \langle \psi_{2p} | \overset{0}{\cancel{\dots}} | \psi_{2p} \rangle - \langle \psi_{1s} | \dots | \psi_{1s} \rangle \simeq -\Delta E_{1s} \quad [13.31]$$

Consideriamo due isotopi A e A' di una stessa specie atomica:

$$\Delta E_{2p \rightarrow 1s}(A) - \Delta E_{2p \rightarrow 1s}(A') = \left(\frac{2ZR_0}{a_0} \right)^2 \frac{Z^2 \alpha^2 m_e e^2}{10} \left(A^{\frac{2}{3}} - A'^{\frac{2}{3}} \right) \quad [13.32]$$

possiamo quindi sfruttare questa quantità per approssimare la dimensione del nucleo effettuando una misura sperimentale delle differenze di energia e invertendo l'equazione rispetto a R_0 .

13.4 Muonic atoms

Illustriamo ora un metodo che considera atomi esotici, che al posto di elettroni presenta *muoni* ($m_\mu \simeq 106 \text{ MeV}/c^2$, $\tau_\mu \simeq 2 \times 10^{-6} \text{ sec}$). Ricordiamo:

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} \simeq 5.3 \times 10^{-11} \text{ cm} \quad [13.33]$$

dunque:

$$r_n = \frac{n^2}{Z} a_0, \quad E_n = -\frac{Z^2 \alpha^2 m c^2}{2n^2} \quad [13.34]$$

Per un atomo $Z = 82$, ad esempio:

$$r_1 = \frac{a_0 m_e}{Z m_\mu} \simeq 3.1 \text{ fm} < R_N \sim 7 \text{ fm} \quad [13.35]$$

Per $n = 2$:

$$\Delta E_{2s} = \langle \psi_{2s} | V_{\text{cont.}}(r) - V_{\text{cont.}}(r) | \psi_{2s} \rangle \quad [13.36]$$

dove in questo caso la funzione d'onda:

$$\psi_{2s}(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left(\frac{Z}{r_\mu} \right)^{\frac{3}{2}} \left(2 - \frac{Zr}{r_\mu} \right) e^{-\frac{Zr}{2r_\mu}} \quad [13.37]$$

con $r_\mu = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m e^2}$.

Nota. Per $Z = 6$ si ottiene $\Delta E_{2s} \simeq 40 \text{ eV}$.

$$E_{2s} = \frac{E_{1s}({}^1\text{H})}{4} \frac{m_\mu}{m_e} \simeq 251 \text{ keV} \quad [13.38]$$

13.5 Nuclei speculari

In questo metodo per stabilire le dimensioni dei nuclei si sfruttano *nuclei speculari*, ossia nuclei aventi *stesso numero di massa* (isotopi specifici) e *diverso numero atomico*, e.g. ${}^{39}_{20}\text{Ca}$ e ${}^{39}_{20}\text{K}$. L'energia coulombiana:

$$E_c = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 R_N} \quad [13.39]$$

La differenza di energia coulombiana, nel caso in cui i due atomi differiscano in numero atomico per un'unità:

$$\Delta E_c = \frac{3}{5} \frac{e^2 [Z^2 - (Z-1)^2]}{4\pi\epsilon_0 R_0 A^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{5} \frac{e^2 A^{\frac{2}{3}}}{4\pi\epsilon_0 R_0} \quad [13.40]$$

Lezione 14

2022-05-03

14.1 Sezioni d'urto per nuclei non puntiformi

14.1.1 Fattori di forma

Abbiamo visto che la *sezione d'urto differenziale* può essere scritta come:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{puntiforme}} |F(q^2)|^2 \quad [14.1]$$

dove q è il modulo dell'*impulso trasferito*¹ $\vec{q} = \vec{p}_i - \vec{p}_f$ e F il **fattore di forma**:

$$F(\vec{q}) = \int d^3r \rho_N(\vec{r}) \exp \left\{ i \frac{\vec{q} \cdot \vec{r}}{\hbar} \right\} \quad [14.2]$$

Ora, abbiamo che il *raggio del nucleo*:

$$R_N \simeq (1.2 \text{ fm}) A^{\frac{1}{3}} \quad [14.3]$$

quindi:

$$\frac{q R_N}{\hbar} \gtrsim 1 \quad [14.4]$$

allora:

$$q c \gtrsim \frac{\hbar c}{R_N} = \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{R_N} \quad [14.5]$$

e di conseguenza:

$$q \gtrsim \frac{200 \text{ MeV}/c}{R_N [\text{fm}]} \quad [14.6]$$

Quindi se vogliamo sondare oggetti della dimensione di un *fermi*, dobbiamo utilizzare sonde di impulso superiore a:

$$p \simeq q \gtrsim \frac{200 \text{ MeV}/c}{R_N [\text{fm}]} \quad [14.7]$$

Se consideriamo uno scattering di elettroni sui nuclei (se consideriamo invece uno scattering di *particelle alfa* su nuclei dovremmo tener conto anche delle interazioni forti), possiamo cominciare a vedere la dimensione finita del nucleo, per valori di impulso che fanno sì che gli *elettroni* siano **ultra-relativistici**:

$$p c \simeq 100 \text{ MeV} \gg m_e c^2 \simeq 0.5 \text{ MeV} \quad [14.8]$$

L'ipotesi che il nucleo non rinculi è ancora adeguata, perché l'energia cinetica della collisione, che è dell'ordine dei MeV, è inferiore rispetto all'energia a riposo della massa del centro scatteratore, che è dell'ordine dei GeV.

Questo vuol dire che la formula di Rutherford deve essere modificata per tener conto di effetti relativistici: *Scattering Rutherford* \rightarrow *Scattering Mott*.

¹Ricordiamo che in approssimazione di nucleo fisso, quindi *nucleo non rinculante*, $|\vec{q}| = 2p \sin \frac{\theta}{2}$ e $|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f| = p$

14.1.2 Scattering Mott

Ricordiamo la sezione d'urto differenziale dello *scattering Rutherford*:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} = \frac{Z^2 \alpha^2 \hbar^2 c^2}{4p^2 v^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad [14.9]$$

La sezione d'urto differenziale dello **scattering Mott** è ricavata a partire da quella dello *scattering Rutherford*, ma è adatta per il caso di **effetti ultra-relativistici**:

$$\text{Sezione d'urto diff. - Scattering Mott} \quad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} = \frac{Z^2 \alpha^2 \hbar^2 c^2}{4p^2 v^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \left\{ 1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\}$$

14.2 Proprietà dei Nuclei

Numero Atomico In un atomo neutro abbiamo che, indicando con Z il **numero atomico**, Z corrisponde alla *carica del nucleo*. In particolare Z indica il numero di protoni contenuti nel nucleo atomico e nel caso di atomi neutri questo numero corrisponde esattamente al numero di elettroni. Il numero atomico determina il comportamento chimico della sostanza.

Isotopi Studiando le masse atomiche si è scoperto che un determinato elemento chimico, quindi Z fissato, può presentarsi con masse atomiche differenti, quindi si parla di **isotopi**. Tali valori riscontrati sono sempre vicini ($\sim 0.1\%$) ad un multiplo intero di m_H . Tale massa è stata associata al diverso numero di neutroni nei nuclei.

Nella tavola periodica la massa atomica è indicata come la media delle masse atomiche dei vari isotopi.

Numero di Massa Atomica Il **numero di massa atomica**, indicato con A , è definito come l'intero più vicino al rapporto m_A/m_H , dove m_A rappresenta la *massa dell'atomo* considerato e m_H la *massa dell'idrogeno* (che quindi funge da riferimento).

In genere si utilizza la seguente notazione:

$${}^A_Z X \quad [14.10]$$

dove X rappresenta il *simbolo chimico* e come detto Z il *numero atomico* e A il *numero di massa atomica*. Il numero atomico e il numero di massa atomica determinano la struttura del nucleo:

- Z : *numero di protoni*;
- A : *numero di nucleoni*²
- $N = A - Z$: *numero di neutroni*

Nota. Notiamo che:

$$\begin{aligned} m_p c^2 &\simeq 1 \text{ GeV} \\ m_n c^2 &\simeq 1 \text{ GeV} \\ m_n c^2 - m_p c^2 &\simeq 1.29 \text{ MeV} \end{aligned}$$

in particolare:

$$\frac{m_n - m_p}{m_N} \simeq 10^{-3} \quad [14.11]$$

dove m_N è la *massa del nucleo*. In natura, il fatto che il neutrone sia più massivo del protone, permette il processo di decadimento, nel vuoto, del neutrone:

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad [14.12]$$

dove $\bar{\nu}_e$ è l'*antineutrino elettronico*. Il tempo caratteristico del decadimento del neutrone è $\tau \simeq 880 \text{ s}$.

Il processo inverso di decadimento del protone:

$$p \longrightarrow n + e^+ + \nu_e \quad [14.13]$$

non può avvenire spontaneamente per via della differenza di massa fra proton e neutrone.

²Termine utilizzato per indicare indifferentemente protoni e neutroni, costituenti il nucleo

14.2.1 Difetto di massa ed energia di legame

Consideriamo un nucleo (Z, A) :

$$m(Z, A) c^2 \neq Z m_p c^2 + (A - Z) m_n c^2 \quad [14.14]$$

Una particella libera (puntiforme o composta) ha una *relazione impulso-energia*:

$$E(\vec{p}) = \sqrt{c^2 |\vec{p}|^2 + m^2 c^4} \quad [14.15]$$

La massa di una particella equivale all'energia a riposo della particella nel sistema di riferimento in cui la particella ha impulso nullo:

$$m c^2 = E(\vec{p} = 0) \quad [14.16]$$

Questo è ovvio per sistemi puntiformi, ma non è ovvio per sistemi composti.

Esempio 14.2.2 (Nucleo di ^3He). La massa dell'*elio* ^3He sarà:

$$m(^3\text{He}) c^2 = E_{\text{tot}}(p_{\text{tot}} = 0) = m_p c^2 + m_p c^2 + m_n c^2 + T + V \neq m_p c^2 + m_p c^2 + m_n c^2 \quad [14.17]$$

dove T *energia cinetica* e V rappresenta l'*energia di interazione*. Tipicamente $T + V < 0 \sim \text{MeV}$ (la somma dei termini è negativa perché stiamo parlando di uno stato legato) e $m_p c^2 + m_p c^2 + m_n c^2 \sim \text{GeV}$.

L'energia cinetica del sistema si può scrivere come:

$$T = \frac{p_p^2}{2m_p} + \frac{p_p^2}{2m_p} + \frac{p_n^2}{2m_n} \quad [14.18]$$

Allora:

$$\Delta p_x \Delta x \gtrsim \hbar \quad [14.19]$$

dove:

$$\Delta p_x = \{\langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2\}^{1/2} = \langle p_x^2 \rangle^{1/2} \quad [14.20]$$

dato che $\langle p_x \rangle^2 = 0$. Considerando il fatto che le dimensioni fisiche del sistema (Δx) sono quelle delle dimensioni del nucleo, quindi dell'ordine del *fermi*:

$$\langle p_x^2 \rangle \gtrsim \frac{\hbar^2}{R_N^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\langle p_x^2 \rangle}{2m} \gtrsim \frac{\hbar^2 c^2}{2m c^2 R_N^2} \gtrsim \frac{20 \text{ MeV}}{(R_N [\text{fm}])^2} \quad [14.21]$$

Energia di legame del nucleo Tipicamente ci aspettiamo *difetti di massa dell'ordine del MeV* perché sono legati ai contributi apportati da $T + V < 0 \simeq \text{MeV}$. Potremo scrivere che:

$$m(Z, A) c^2 = [Z m_p c^2 + (A - Z) m_n c^2] - B(Z, A) \quad [14.22]$$

dove $B(Z, A)$ rappresenta l'**energia di legame del nucleo**.

14.3 Radioattività - Decadimenti Nucleari

Fenomeno che riguarda esclusivamente i nuclei atomici. Un generico fenomeno di decadimento si indica con:

$$(Z, A) \rightarrow (Z + \Delta Z, A + \Delta A) + X \quad [14.23]$$

con $\Delta Z, \Delta A \in \mathbb{Z}$.

Storicamente i **decadimenti nucleari** sono raggruppati in tre classi principali, che riguardano tutti fenomeni di scala energetica del MeV (poiché stiamo considerando particelle di 1MeV confinate in dimensioni spaziali della scala di 1fm). Indichiamo con $(Z, A)^*$ uno stato eccitato di (Z, A) .

Nota (Conservazione del numero di nucleoni). In queste reazioni di decadimento il *numero di nucleoni* deve rimanere costante.

Tabella 14.1: Decadimenti di particelle

| DEC. | TIPO DI INTERAZIONE | PARTICELLA PRODOTTA | REAZIONE |
|-----------|---------------------------------------|-----------------------------------|---|
| α | Interazioni forti + interazioni EM | α : fotoni | $(Z, A) \rightarrow (Z-2, A-4) + (2, 4)$ |
| β^+ | Interazioni deboli | β : nuclei di He^4 | $(Z, A) \rightarrow (Z-1, A) + e^+ + \nu_e$ |
| β^- | Interazioni deboli | β : nuclei di He^4 | $(Z, A) \rightarrow (Z+1, A) + e^- + \bar{\nu}_e$ |
| γ | Interazioni deboli | γ : elettrone/positrone | $(Z, A)^* \rightarrow (Z, A) + \gamma$ |

14.3.1 Legge di decadimento esponenziale

Indichiamo con ω la *probabilità di decadimento per unità di tempo*, ipotizzando che la *probabilità di decadimento sia costante nel tempo*. Quindi:

$$\frac{dP}{dt} = \omega = \frac{1}{\tau} \quad [14.24]$$

dove τ rappresenta il *tempo di vita medio*. Indicando con N il *numero di nuclei* della specie considerato:

$$dN = -\omega N dt \quad [14.25]$$

per cui:

$$\frac{dN}{dt} = -\omega N \quad [14.26]$$

Quindi otteniamo:

$$\text{Legge di decadimento esponenziale} \quad N(t) = N_0 e^{-\omega t} = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad [14.27]$$

dove $N_0 = N(t_0)$. Questa legge viene spesso espressa in termini del **tempo di dimezzamento** $t_{1/2}$, definito da:

$$\frac{N(t_{1/2})}{N_0} = \frac{1}{2} \quad [14.28]$$

quindi:

$$e^{-\omega t_{1/2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{t_{1/2}}{\tau}} = 2 \quad \Rightarrow \quad t_{1/2} = \tau \ln(2) \quad \Rightarrow \quad t_{1/2} \simeq 0.693\tau \quad [14.29]$$

Nota (Curie). ???

Nota (Becquerel). ???

Nota. La quantità misurata in un campione radioattivo non è N (*numero di nuclei*) ma l'attività del campione I (*numero di decadimenti al secondo nel campione*).

$$I = -\frac{dN}{dt} = \omega N \quad [14.30]$$

quindi la grandezza che viene effettivamente misurata:

$$I(t) = \omega N_0 e^{-\omega t} = I_0 e^{-\omega t} \quad [14.31]$$

Fino a ora abbiamo considerato il caso particolarmente semplice in cui il nucleo può avere *un unico modo di decadimento*. Realisticamente questo non accade, infatti un unico nucleo può avere diversi modi di decadimento.

14.3.2 Decadimenti multimodali

Consideriamo ora il caso in cui un unico atomo può avere *diversi modi di decadimento*:

$$\frac{dN}{dt} = -\omega_1 N - \omega_2 N = -\sum_{i=1}^2 \omega_i N \equiv -\omega N \quad [14.32]$$

dove $\omega = \omega_1 + \omega_2$. La *probabilità totale di decadimento* ω sarà chiaramente la somma delle probabilità di decadimento di ogni modo.

Questo implica che si sommino gli inversi delle vite medie per ogni modo di decadimento:

$$\frac{1}{\tau} = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\tau_i} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \quad [14.33]$$

dove $\tau = \frac{1}{\omega}$, $\tau_1 = \frac{1}{\omega_1}$ e $\tau_2 = \frac{1}{\omega_2}$.

In questo caso abbiamo che le **branching fraction**:

$$\begin{cases} f_1 = \frac{\omega_1}{\omega} \\ f_2 = \frac{\omega_2}{\omega} \end{cases} \Rightarrow \sum_i f_i = 1 \quad [14.34]$$

L'evoluzione temporale dei nuclei presenti nel campione:

$$N(t) = N(t=0) e^{(-\sum_{i=1}^2 \omega_i)t} = N(t=0) e^{-\omega t} \quad [14.35]$$

Allora le attività di decadimento 1 e 2 seguono le seguenti leggi esponenziali:

$$\begin{cases} I_1(t) = \omega_1 N(t) = \omega_1 N(t=0) e^{-\omega t} = (I_1)_0 e^{-\omega t} \\ I_2(t) = \omega_2 N(t) = \omega_2 N(t=0) e^{-\omega t} = (I_2)_0 e^{-\omega t} \end{cases} \quad [14.36]$$

14.3.3 Costruzione di Esperimenti

Supponiamo di voler trovare ω (quindi il tempo medio di decadimento) per una campione di una determinata specie atomica. Se il tempo di decadimento non è particolarmente lungo si può misurare:

$$N(t=t_1), \quad N(t=t_2), \quad \Rightarrow \quad \frac{N(t=t_1)}{N(t=t_2)} = e^{-\omega(t_1-t_2)} \quad \Rightarrow \quad \omega = -\frac{\ln \frac{N(t=t_1)}{N(t=t_2)}}{t_1 - t_2} \quad [14.37]$$

L'efficienza ϵ di un esperimento è data dal rapporto:

$$\epsilon = \frac{\# \text{ particelle rivelate}}{\# \text{ particelle emesse}} \quad [14.38]$$

Lezione 15

2022-05-05

15.1 Radioattività - Decadimenti Nucleari (reprise)

15.1.1 Decadimenti sequenziali

Si parla di *decadimenti sequenziali* quando un “nucleo padre” può produrre un “nucleo figlio” che è a sua volta instabile. Indicando con 1 il *nucleo padre* e con 2 il *nucleo figlio* e con ω_1 e ω_2 rispettivamente le *probabilità totali di decadimento per unità di tempo*:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\omega_1 N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} = -\frac{dN_1}{dt} - \omega_2 N_2 = \omega_1 N_1 - \omega_2 N_2 \end{cases} \quad [15.1]$$

Il nucleo figlio che decade, a sua volta produrrà un nucleo figlio che indichiamo con 3:

$$\begin{aligned} \frac{dN_3}{dt} &= - \left[\frac{dN_2}{dt} \right]_{2 \rightarrow 3} - \omega_3 N_3 = \omega_2 N_2 - \omega_3 N_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

e così via¹. Quindi:

$$N_2(t) = \frac{N_1(t=0)\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} (e^{-\omega_1 t} - e^{-\omega_2 t}) \quad [15.2]$$

e

$$N_3(t) = N_1(t=0)\omega_1\omega_2 \left[\frac{e^{-\omega_1 t}}{(\omega_2 - \omega_1)(\omega_3 - \omega_1)} + \frac{e^{-\omega_2 t}}{(\omega_3 - \omega_2)(\omega_1 - \omega_2)} + \frac{e^{-\omega_3 t}}{(\omega_1 - \omega_3)(\omega_2 - \omega_3)} \right] \quad [15.3]$$

La condizione di equilibrio del numero di particelle figlio N_2 è la condizione per cui la derivata temporale del numero di particelle diventa stazionaria:

$$\frac{dN_2}{dt} = -\omega_2 N_2 + \omega_1 N_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 N_2(t) = \omega_1 N_1(t) \quad [15.4]$$

da questo otteniamo la condizione:

Equilibrio secolare

$$N_2(t) = \frac{\omega_1}{\omega_2} N_1(t)$$

[15.5]

questa condizione di equilibrio è valida nel caso in cui:

$$t \gg t_2 = \frac{1}{\omega_2} \quad [15.6]$$

A sua volta vale anche per le particelle prodotte (eventualmente) dai decadimenti delle particelle figlio:

$$\frac{dN_3}{dt} = -\omega_3 N_3 + \omega_2 N_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_3(t) = \frac{\omega_2}{\omega_3} N_2(t) \quad [15.7]$$

¹ Potremmo avere anche altri decadimenti sequenziali!

15.1.2 Condizioni energetiche per i vari decadimenti

Decadimenti α

$$(Z, A) \rightarrow (Z-2, A-4) + (2, 4) \quad [15.8]$$

$$\begin{cases} (E_{\text{tot}})_{\text{ini}} = (E_{\text{tot}})_{\text{fin}} \\ (\vec{p}_{\text{tot}})_{\text{ini}} = (\vec{p}_{\text{tot}})_{\text{fin}} \end{cases} \quad [15.9]$$

invarianza per traslazioni spazio-temporali. Oltre a questo:

$$(\vec{J}_{\text{tot}})_{\text{ini}} = (\vec{J}_{\text{tot}})_{\text{fin}} \quad [15.10]$$

invarianza per rotazione.

Sistema di quiete della particella che decade Consideriamo il sistema di quiete delle particella che decade. In tale sistema di riferimento abbiamo:

$$\begin{cases} (E_{\text{tot}})_{\text{ini}} = m(Z, A) c^2 \\ (\vec{p}_{\text{tot}})_{\text{ini}} = 0 \end{cases} \quad [15.11]$$

L'energia totale e l'impulso finali delle particelle dovranno essere uguali alle quantità iniziali:

$$\begin{aligned} (E_{\text{tot}})_{\text{fin}} &= (E_{\text{tot}})_{\text{fin}} = m(Z-2, A-4) c^2 + m(2, 4) c^2 + T \\ (\vec{p}_{\text{tot}})_{\text{fin}} &= 0 \end{aligned}$$

Quindi:

$$m(Z, A) c^2 = m(Z-2, A-4) c^2 + m(2, 4) c^2 + T \quad [15.12]$$

dove $T \geq 0$ ha un valore minimo possibile che è 0. Affinché il decadimento α possa avvenire, si deve verificare la condizione:

$$m(Z, A) c^2 - [m(Z-2, A-4) c^2 + m(2, 4) c^2] \geq 0 \quad [15.13]$$

dove $m(Z, A) c^2$ è la massa iniziale ed il termine in parentesi quadre rappresenta la somma delle masse nello stato finale. Possiamo scrivere, dato il decadimento:

$$\begin{cases} m(Z, A) c^2 = z m_p c^2 + (A-Z) m_n c^2 - B(Z, A) \\ [\dots] = -(Z-2) m_p c^2 - (A-Z-2) m_n c^2 + B(Z-2, A-4) - 2 m_p c^2 - 2 m_n c^2 + B(2, 4) \end{cases} \quad [15.14]$$

quindi sostituendo nell'equazione precedente:

$$\begin{aligned} \cancel{z m_p c^2} + \cancel{(A-Z) m_n c^2} - B(Z, A) - (Z-2) m_p c^2 - (A-Z-2) m_n c^2 + \\ + B(Z-2, A-4) - 2 m_p c^2 - 2 m_n c^2 + B(2, 4) \geq 0 \end{aligned}$$

quindi:

$$-B(Z, A) + B(Z-2, A-4) + B(2, 4) \geq 0 \quad [15.15]$$

allora:

$$[B(Z-2, A-4) + B(2, 4)] - B(Z, A) \geq 0 \quad [15.16]$$

dove:

$$[B(Z-2, A-4) + B(2, 4)] \text{ Somma delle energie di legame dello stato finale } B(Z, A) \quad \text{Stato iniziale}$$

Quindi otteniamo dei decadimenti α solo se è soddisfatta questa condizione!

Nota. Questo è il motivo per cui non esistono in natura dei nuclei arbitrariamente grandi: ad un certo punto le dimensioni dei nuclei e il numero dei nucleoni diventa tale che è probabile il decadimento α e il nucleo è quindi instabile.

Decadimento β

Il decadimento β è un processo tale che $A = \text{const}$ e $Z \rightarrow Z \pm 1$:

$$\begin{cases} (Z, A) \rightarrow (Z+1, A) + e^- + \bar{\nu}_e & \text{decadimento } \beta^- \\ (Z, A) \rightarrow (Z-1, A) + e^+ + \nu_e & \text{decadimento } \beta^+ \\ e^- + (Z, A) \rightarrow (Z-1, A) + \nu_e & \text{electronic capture} \end{cases} \quad [15.17]$$

Nota (Conservazione del numero leptonico). Le particelle portano numero leptonico $+1$ e le antiparticelle portano numero leptonico -1 . Nei decadimenti deve valere la *conservazione del numero leptonico*.

Q-valore

$$\begin{cases} Q_{\beta^-} = [M(Z, A) - M(Z+1, A) - m_e] c^2 \\ Q_{\beta^+} = [M(Z, A) - M(Z-1, A) - m_e] c^2 \\ Q_{e.c.} = [M(Z, A) + m_e - M(Z-1, A)] c^2 \end{cases} \quad [15.18]$$

Nel sistema di riferimento del centro di massa, il *Q-valore* fornisce l'informazione dell'energia cinetica dello stato finale. Ad esempio, per il decadimento β^- :

$$M(Z, A) c^2 = M(Z+1, A) c^2 + m_e c^2 + T_N + T_e \quad [15.19]$$

Nel sistema del centro di massa, l'impulso:

$$0 = p_n + p_e \quad [15.20]$$

Quindi avremo che, data la differenza di massa fra il nucleo N e l'elettrone e :

$$T_e = \frac{p_e}{2m_e} \gg T_n = \frac{p_n}{2m_N} \quad [15.21]$$

Quindi potremmo trascurare T_N :

$$M(Z, A) c^2 = M(Z+1, A) c^2 + m_e c^2 + T_e \Rightarrow Q_{\beta^-} = T_e \quad [15.22]$$

Questo portò Pauli a ipotizzare la presenza dei *neutrini*, particelle neutre dalla massa estremamente piccola, che non conosciamo, ma che alla quale è stato posto un limite superiore: $m_\nu < 1 \text{ eV}$.

In termini di *masse atomiche* \mathcal{M} :

$$M(Z, A) = \mathcal{M}(Z, A) - m_e Z \quad [15.23]$$

il *Q-valore*:

$$\{Q_{\beta^-} = [\mathcal{M}(Z, A) - \mathcal{M}(Z+1)]\} \quad \{Q_{\beta^+} = [\mathcal{M}(Z, A) - \mathcal{M}(Z-1)]\} \quad \{Q_{e.c.} = [\mathcal{M}(Z, A) - \mathcal{M}(Z-1)]\} \quad [15.24]$$

Energia Per i decadimenti β otteniamo le seguenti *condizioni energetiche*:

$$\begin{cases} m(Z, A) c^2 - [m(Z+1, A) c^2 + m_e c^2 + \cancel{m_\nu c^2}] \geq 0 & \text{decadimento } \beta^+ \\ m(Z, A) c^2 - [m(Z-1, A) c^2 + m_e c^2 + \cancel{m_\nu c^2}] \geq 0 & \text{decadimento } \beta^- \\ [m_e c^2 + m(Z, A) c^2] - [m(Z-1, A) c^2 + \cancel{m_\nu c^2}] \geq 0 & \text{e.c.} \end{cases} \quad [15.25]$$

??

$$\begin{aligned} z m_p c^2 + (A-Z) m_n c^2 - B(Z, A) - (Z+1) m_p c^2 - (A-Z-1) m_n c^2 + B(Z+1, A) - m_e c^2 \\ = (m_n c^2 - m_p c^2 - m_e c^2) - B(Z, A) + B(Z+1, A) \geq 0 \end{aligned} \quad [15.26]$$

quindi per i tre processi:

- *decadimento β^+* , $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$:

$$B(Z+1, A) - B(Z, A) \geq m_p c^2 + m_e c^2 - m_n c^2 \simeq -1.3 + 0.5 \text{ MeV} \simeq -0.8 \text{ MeV} \quad [15.27]$$

- *decadimento β^-* , $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$:

$$B(Z-1, A) - B(Z, A) \geq m_p c^2 + m_e c^2 - m_n c^2 \simeq 1.3 + 0.5 \text{ MeV} \simeq 1.8 \text{ MeV} \quad [15.28]$$

- *electronic capture*, $e^- + p \rightarrow n + \nu_e$:

$$B(Z-1, A) - B(Z, A) \geq m_n c^2 - m_p c^2 - m_e c^2 = 1.3 - 0.5 \text{ MeV} \quad [15.29]$$

15.2 Modello standard delle interazioni fondamentali

Tutti i fenomeni fisici, secondo questo modello, sono riconducibili ad un certo numero di **particelle elementari**, che interagiscono fra di loro grazie ad un certo numero di **interazioni fondamentali**. Secondo il **modello standard delle interazioni fondamentali** le interazioni fondamentali sono:

- *interazione gravitazionale*;
- *interazione elettromagnetica*;
- *interazione forte*;
- *interazione debole*.

Nei processi microscopici possiamo considerare trascurabile l'interazione gravitazionale.

Interazioni deboli Le *interazioni deboli* sono mediate da ...

Interazioni forti Le *interazioni forti* sono mediate da **gluoni**...

I **mediatori delle interazioni** sono particelle con spin 1, mentre le **particelle fondamentali** sono particelle con spin $\frac{1}{2}$.

Particelle fondamentali Le particelle fondamentali sono particelle a spin $\frac{1}{2}$ si distinguono in:

- **Leptoni** (*interazioni elettromagnetiche + interazioni deboli*), divisi in 3 famiglie:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \quad (\nu_\mu) \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \theta^- \end{pmatrix} \quad + \text{antiparticelle} \quad [15.30]$$

I *leptoni* hanno carica intera: $Q = 0$, $Q = -1$;

- **Quarks** (*interazioni elettromagnetiche + interazioni deboli + interazioni forti*)

$$\begin{pmatrix} \mu \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \quad [15.31]$$

I *quarks* hanno carica frazionaria: $Q = \frac{2}{3}$, $Q = -\frac{1}{3}$: per questo motivo *in natura non si osservano quark liberi*.

$$\begin{cases} \text{Mesoni} - q\bar{q} \\ \text{Barioni (Anti-Barioni)} - qq\bar{q}(\bar{q}q\bar{q}) \end{cases} \quad [15.32]$$

dove abbiamo indicato con q i *quarks* e con \bar{q} gli *anti-quarks*. Ad esempio, i *barioni più leggeri* sono quelli che osserviamo in natura:

$$\begin{aligned} p &= (\mu\mu d) & n &= (\mu d d) \\ \pi^+ &= (\mu\bar{d}) & \pi^- &= (d\bar{\mu}) \end{aligned}$$

15.2.1 Leggi di conservazione

$Q = \text{carica}$

$$B = \frac{1}{3} \{N(q) - N(\bar{q})\} = \text{numero barionico}$$

$$L = \{N(l) - N(\bar{l})\} = \text{numero leptonico}$$

$$L_\alpha = \{N(l_\alpha) - N(\bar{l}_\alpha)\} = \text{numero leptonico di famiglia}$$

Lezione 16

2022-05-10

16.1 Modello standard (reprise)

16.1.1 Cinematica del decadimento α

Indichiamo con D la *particella figlia* (*daughter*). Dato che $\vec{p}_{\text{tot}} = 0$, dalla *conservazione dell'impulso*:

$$\vec{p}_D + \vec{p}_\alpha = 0 \quad [16.1]$$

dove quindi:

$$|\vec{p}_D| = |\vec{p}_\alpha| = p \quad [16.2]$$

Uniamo la conservazione dell'energia (siamo in un regime di particelle non relativistiche):

$$m(Z-2, A-4)c^2 + m(2, 4)c^2 + \frac{p^2}{2m_D} + \frac{p^2}{2m_\alpha} = m(A, Z)c^2 \quad [16.3]$$

dove il primo membro rappresenta l'*energia dello stato finale* e il secondo membro rappresenta l'*energia dello stato iniziale*.

Quindi:

$$Q_\alpha = \frac{p^2}{2m_D} + \frac{p^2}{2m_\alpha} = \frac{p^2}{2} \left\{ \frac{1}{m_D} + \frac{1}{m_\alpha} \right\} = \frac{p^2}{2} \left\{ \frac{m_D + m_\alpha}{m_D m_\alpha} \right\} = \frac{p^2}{2\mu} \quad [16.4]$$

dove μ rappresenta la *massa ridotta del sistema*. Quindi l'impulso finale delle due particelle sarà in modulo:

$$p^2 = 2\mu Q_\alpha \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt{2\mu Q_\alpha} \quad [16.5]$$

La ripartizione di energia fra le particelle D e α , invece:

$$\begin{cases} T_D = \frac{\mu}{m_D} Q_\alpha \\ T_\alpha = \frac{2\mu}{2m_\alpha} Q_\alpha \end{cases} \quad [16.6]$$

16.1.2 Cinematica del decadimento β

Esempio 16.1.3 (Esercizio per parziale). Consideriamo un fascio incidente di 5 Å di elettroni ultrarelativistici (questo vuol dire che si è in regime di *scattering Mott*) di impulso $q_e = 700 \text{ MeV}/c$, su una *targhetta di calcio* ^{40}Ca di densità $\rho = 0.12 \text{ g/cm}^3$. ??? $S = 20 \text{ cm}^2$, $R = 1 \text{ m}$.

Formula empirica che fornisce il raggio di un nucleo, data la sua massa atomica:

$$R_N = (118 A^{1/3} - 0.48) \text{ fm} \quad [16.7]$$

$$\frac{dN_e}{dt} = \frac{dN_e}{dt d\Omega} \Delta\Omega = \phi_e N_T \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{S}{R^2} = \frac{dN_i}{dt} \frac{N_T}{S'} \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{S}{R^2} \quad [16.8]$$

$$\Delta\Omega = \frac{S}{R^2} \quad [16.9]$$

ϕ_e rappresenta il *flusso di elettroni*, quindi indicando con N_i il numero di elettroni incidenti:

$$\phi_e = \frac{dN_i}{dt} \frac{1}{S'} \quad [16.10]$$

con m_a l'unità di massa atomica:

$$\rho = \frac{m_a N_T}{S'} = ??? \quad [16.11]$$

Quindi, con I la corrente incidente e e la carica dell'elettrone:

$$\frac{dN_e}{dt} = \frac{dN_e}{dt} \frac{\rho}{Am_a} \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{S}{R^2} = \frac{I}{e} \frac{\rho}{Am_a} \frac{S}{R^2} \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad [16.12]$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} |F(q)|^2 \quad [16.13]$$

dove la *sezione d'urto di Mott* vale:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} = \frac{Z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{4 (pc)^2 \sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)} \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad [16.14]$$

A questo punto resta da calcolare il *fattore di forma* per una distribuzione sferica uniforme:

$$F(q^2) = \frac{3}{x^3} (\sin x - x \cos x) \quad [16.15]$$

dove $x = \frac{qR_N}{\hbar}$, con $q = 2p \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)$. Questo perché possiamo considerare l'energia assorbita dal rinculo del nucleo trascurabile, quindi assumendo $|\vec{p}_{\text{in}}| = |\vec{p}_{\text{fin}}| = p$, l'*impulso trasferito*, che vettorialmente scriviamo $\vec{q} = \vec{p}_{\text{fin}} - \vec{p}_{\text{in}}$, vale in modulo:

$$|\vec{q}| = 2p \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad [16.16]$$

Lezione 17

2022-05-17

17.1 Formula semi-empirica di massa (formula di Weizsäcker)

17.1.1 Nuclei stabili

17.1.2 Energia di legame dei nuclei

L'energia di legame per nucleone è data da:

$$\epsilon = B \quad [17.1]$$

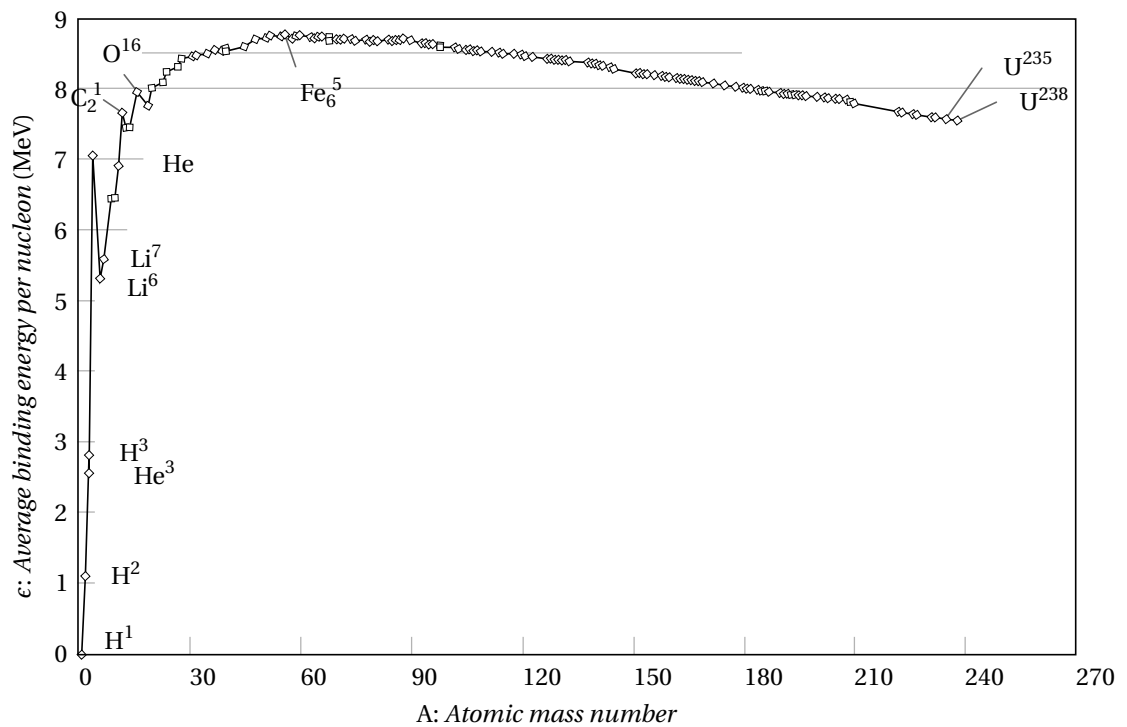


Figura 17.1: Energia di legame per nucleone

Nota. Questa formula si può pensare in analogia con una *goccia di liquido*. Infatti un liquido è un fluido con una *densità fissata*.

Ricordiamo che il *raggio* nucleare può essere approssimato da:

$$R_N \simeq 12 \text{ fm} A^{1/3} \quad [17.2]$$

Quindi il *volume* occupato da un nucleo è circa:

$$V_N \simeq \frac{4}{3} \pi R_N^3 = \frac{4}{3} \pi (12 \text{ fm} A) \quad [17.3]$$

Quindi abbiamo che:

$$\frac{dN}{dV} = \frac{A}{V_N} = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi(12\text{fm}A)^3} \quad [17.4]$$

Penseremo il potenziale d'interazione fra nucleoni all'interno di un nucleo come il potenziale d'interazione fra particelle che costituiscono un liquido¹.

$$V_{\text{coulomb}} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad [17.5]$$

Potenziale di Yukawa

$$V = \frac{g}{r} e^{-\frac{r}{r_T}} \quad [17.6]$$

g è la *costante di accoppiamento* dell'interazione e r_T rappresenta la *lunghezza di taglio* dell'interazione (μ il suo inverso).

Nota. Il pione π è il mediatore dell'interazione forte nucleare.

Nota. La costante μ ha le dimensioni di una lunghezza e si può scrivere come: $\mu = \frac{mc^2}{\hbar c}$.

Nota. La carica nelle *interazioni forti* si chiama **colore**. L'effetto delle interazioni forti si osserva quando le particelle sono portate a distanze paragonabili con le loro dimensioni lineari.

$$B \sim \left(\frac{dN}{dV} \frac{4}{3} \pi r_T^3 \right) \epsilon_{\text{in}} A \quad [17.7]$$

dove $\frac{dN}{dV} \frac{4}{3} \pi r_T^3 = N_{\text{???}}$ Quindi se dividiamo per A :

$$\epsilon \equiv \frac{B}{A} \sim \left(\frac{dN}{dV} \frac{4}{3} \pi r_T^3 \right) \epsilon_{\text{in}} \frac{A}{A} = \text{const} \quad [17.8]$$

Abbiamo il *termine di volume*:

$$B = a_V A \quad [17.9]$$

quindi:

$$\epsilon = \frac{B}{A} = a_V \quad [17.10]$$

Termine di superficie

Introduciamo ora una *correzione*. Fino ad ora abbiamo assunto che tutti i nucleoni interagiscono fra loro allo stesso modo. È facile capire però che un nucleone alla superficie del nucleo interagisce con un numero minore di altri nucleoni². Il raggio e la superficie del nucleo sono rispettivamente proporzionali ad A :

$$R_N \propto A^{1/3} \quad \Rightarrow \quad S_N \propto A^{2/3} \quad [17.11]$$

Il numero di nucleoni contenuti all'interno di un *guscio superficiale di raggio* r_T , quindi:

$$N_n^{\text{superf.}} \sim \frac{dN}{dV} S_N r_T \propto A^{2/3} \quad [17.12]$$

(ricorda che $\frac{dN}{dV}$ rappresenta la densità di nucleoni nel nucleo). Quindi:

$$\begin{aligned} B &= a_V A - a_S A^{2/3} \\ \Rightarrow \epsilon &= \frac{B}{A} = a_V - a_S A^{-1/3} \end{aligned}$$

¹Il prof. disegna il grafico del *potenziale di Lennard-Jones*

²Oltrepassata la superficie del nucleo non troviamo ulteriori nucleoni!

Termine Coulombiano Se fosse solo così, però, in natura dovrebbero essere privilegiati i nuclei ad A molto grande. L'interazione forte rispetterà quanto appena detto, per per l'interazione Coulombiana, che è un'interazione a lungo raggio, non possiamo dire che i protoni (che sono gli unici che risentono dell'effetto coulombiano) interagiscano solo con i primi vicini. Il *potenziale d'interazione coulombiana totale* fra le coppie di protoni in un nucleo sarà:

$$(V_{\text{coulomb}})_{\text{tot}} \simeq \frac{Z(Z-1)}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_N} \quad [17.13]$$

dove $Z(Z-1)/2$ è il *numero di coppie di protoni all'interno del nucleo*. In termini della *costante di struttura fine* α :

$$(V_{\text{coulomb}})_{\text{tot}} \simeq \frac{Z(Z-1)}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hbar c}{\hbar c} \frac{1}{R_N} = \frac{Z(Z-1)}{2} \frac{\alpha (\hbar c)}{R_N} \quad [17.14]$$

Chiaramente questa è una stima approssimata, poiché per avere una stima più accurata dovremmo almeno avere informazioni sulla distribuzione dei protoni all'interno del nucleo.

Detto questo, quindi, possiamo scrivere che l'*energia di legame per nucleone* diventa:

$$B = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad [17.15]$$

Quindi otteniamo:

$$\epsilon = \frac{B}{A} = a_V - a_S A^{-1/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{4/3}} \quad [17.16]$$

Quindi possiamo dire che ad alti valori di A , la decrescita dell'energia di legame per nucleone è dovuta dalla **repulsione coulombiana** che diventa prevalente. Per questo motivo *non possiamo avere nuclei con numero arbitrario di nucleoni* (oltre certe soglie, infatti, i nuclei cominciano a fare fissione).

Nota. Attenzione! Mancano delle considerazioni, perché così facendo avremmo che *i nuclei più fortemente legati sarebbero quelli privi di protoni!*

Termine di Asimmetria

La natura sceglie $Z = N$, perché *neutroni e protoni sono fermioni*, quindi non possiamo porli tutti nello stesso livello di energia! Nella disposizione nei livelli energetici dovremo soddisfare quindi il *principio di esclusione di Pauli*.

Descriviamo il *nucleo come una buca di potenziale* di volume V ; la **densità di stati nello spazio delle fasi**:

$$\frac{d^3 n_{\text{stati}}}{d^3 p} = \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} \quad [17.17]$$

Nota. Il volume minimo occupato da una particella quantistica nello spazio delle fasi si ottiene dal *principio d'indeterminazione*.

Lo stato di *minima energia* si ottiene occupando tutti gli stati di energia più bassa, *compatibilmente con il principio di esclusione di Pauli*.

$$Z = N_p = 2 \int_{|\vec{p}| \leq p_{F,p}} d^3 p \frac{d^3 n_{\text{stati}}}{d^3 p} = 2 \int_0^{p_{F,p}} 4\pi p^2 \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} dp = \frac{8\pi}{3} p_{F,p}^3 \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} \quad [17.18]$$

$$A - Z \equiv N_n = 2 \int_0^{p_{F,n}} 4\pi p^2 \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} dp = \frac{8\pi}{3} p_{F,n}^3 \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} = \frac{V p_{F,n}^3}{3\pi^2 \hbar^3} \quad [17.19]$$

dove $p_{F,p}$ e $p_{F,n}$ sono gli **impulsi di fermi** relativi a protoni e neutroni. Le energie saranno³:

$$E_p = 2 \int_{|\vec{p}| \leq p_{F,p}} d^3 p \frac{d^3 n_{\text{stati}}}{d^3 p} \frac{p^2}{2m_p} = 2 \int_0^{p_{F,p}} \frac{4\pi p^4}{2m_p} \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} dp = \frac{8\pi}{5} \frac{p_{F,p}^5}{2m_p} \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} \quad [17.20]$$

$$E_n = 2 \int_0^{p_{F,n}} \frac{4\pi p^4}{2m_n} \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} dp = \frac{8\pi}{5} \frac{p_{F,n}^5}{2m_n} \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} \quad [17.21]$$

³Nel calcolo abbiamo assunto la distribuzione degli impulsi isotropa, per cui si può sostituire $d^3 p = 4\pi p^2 dp$

L'energia cinetica totale è data da:

$$E_{\text{tot}} = E_p + E_n = \frac{8\pi}{5} \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} \frac{1}{2m_n} \left[p_{E,p}^5 + p_{E,n}^5 \right] \quad [17.22]$$

ricordando che $m_p \simeq m_n \simeq m_N \simeq 1 \text{ GeV}/c^2$.

Lezione 18

2022-05-19

18.1 Formula semi-empirica di massa (reprise)

18.1.1 Nuclei stabili

Consideriamo che l'*impulso di fermi* di protoni e neutroni è rispettivamente:

$$p_{F,p}^3 = Z \left\{ \frac{8}{3} \pi \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} \right\}^{-1} \quad [18.1]$$

$$p_{F,n}^3 = (A - Z) \left\{ \frac{8}{3} \pi \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} \right\}^{-1} \quad [18.2]$$

Nota. Per nuclei tali che $Z = N = \frac{A}{2}$ abbiamo che l'*impulso di fermi*:

$$p_F \equiv p_{F,n} \equiv p_{F,p} = \left(\frac{A}{2} \frac{3\pi^2 \hbar^3}{V} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{A}{2} \frac{3\pi^2 \hbar^3}{\frac{4}{3}\pi R_0^3 A} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{\hbar}{R_0} \simeq 250 \text{ MeV}/c \quad [18.3]$$

Otteniamo dunque che l'*energia totale*:

$$E_{\text{tot}} = \frac{8\pi}{5} \frac{V}{2m_N} \frac{1}{(2\pi)^3 \hbar^3} \left\{ \frac{8}{3} \pi \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} \right\}^{-5/3} [Z^{5/3} + (A - Z)^{5/3}] \quad [18.4]$$

dove abbiamo confuso le masse di protone e neutrone con la *massa del generico nucleone* m_N . Quindi:

$$E_{\text{tot}} = K \frac{(2\pi)^3 \hbar^2}{2m_N} \frac{1}{V^{2/3}} \{Z^{5/3} + (A - Z)^{5/3}\} \quad [18.5]$$

quindi, raccogliendo ulteriori costanti:

$$E_{\text{tot}} = \frac{C}{A^{2/3}} \{Z^{5/3} + (A - Z)^{5/3}\} \quad [18.6]$$

Calcoliamo la derivata di E_{tot} rispetto a Z , ottenendo il minimo (*estremale*) dell'energia cinetica in funzione di A :

$$\frac{\partial E_{\text{tot}}}{\partial Z} = \frac{5}{3} \frac{C}{A^{2/3}} \{Z^{2/3} + (A - Z)^{2/3}\} \quad [18.7]$$

quindi:

$$\frac{\partial E_{\text{tot}}}{\partial Z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z = \frac{A}{2}} \quad [18.8]$$

Sostituendo nell'espressione dell'energia totale, otteniamo l'energia *totale minima*:

$$(E_{\text{tot}})_{\text{min}} = E_{\text{tot}} \left(Z = \frac{A}{2}, A \right) = \frac{C}{A^{2/3}} \left\{ \left(\frac{A}{2} \right)^{5/3} + \left(\frac{A}{2} \right)^{5/3} \right\} \propto A \quad [18.9]$$

che *contribuisce al termine di volume*.

Calcoliamo la derivata seconda:

$$\frac{\partial^2 E_{\text{tot}}}{\partial Z^2} = \frac{10}{9} \frac{C}{A^{2/3}} \{Z^{-1/3} + (A - Z)^{-1/3}\} \quad [18.10]$$

quindi:

$$\frac{\partial^2 E_{\text{tot}}}{\partial Z^2} \left(Z = \frac{A}{2}, A \right) = \frac{10}{9} \frac{C}{A^{2/3}} \left\{ \left(\frac{A}{2} \right)^{-1/3} + \left(\frac{A}{2} \right)^{-1/3} \right\} \propto \frac{1}{A} \quad [18.11]$$

In conclusione, quindi:

$$E_{\text{tot}}(Z, A) \simeq KA + \frac{D}{A} \left(Z - \frac{A}{2} \right)^2 \quad [18.12]$$

dove KA viene riassorbito dal termine di volume e $\frac{D}{A} \left(Z - \frac{A}{2} \right)^2$ costituisce il *termine di asimmetria*.

Quindi dobbiamo aggiungere un ultimo termine correttivo, chiamato **termine di asimmetria**, dovuto alla *natura fermionica di protoni e neutroni*. Otteniamo così:

$$B = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_A \frac{(A - 2Z)^2}{A} \quad [18.13]$$

Quindi

$$\epsilon = a_V - a_S A^{-1/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{4/3}} - a_A \frac{(A - 2Z)^2}{A^2} \quad [18.14]$$

Nota. Il *termine di asimmetria favorisce configurazioni* con $Z \simeq N$.

Termine di Pairing

Il *termine di pairing* riflette l'osservazione sperimentale che 2 protoni o 2 neutroni possono formare un sistema particolarmente legato (*effetto di "shell"* non legato alle caratteristiche specifiche delle interazioni forti). Per tenere conto di ciò si introduce:

$$B = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_A \frac{(A - 2Z)^2}{A} + \delta_p(A, Z) \quad [18.15]$$

dove:

$$\delta_p(A, Z) = \begin{cases} -\frac{a_p}{A^{1/2}}, & N = \text{dispari}, Z = \text{dispari} \\ 0, & A = \text{dispari} \\ \frac{a_p}{A^{1/2}}, & N = \text{pari}, Z = \text{pari} \end{cases}$$

Nota. I nuclei $N = \text{dispari}$ e $Z = \text{dispari}$ sono molto rari in natura, infatti quelli noti sono solo quattro: ${}^2_1\text{H}$, ${}^6_3\text{Li}$, ${}^{10}_5\text{B}$, ${}^{14}_7\text{N}$.

Nota. Questo termine si può studiare sperimentalmente misurando la "*neutron separation energy*", ovvero l'energia necessaria per liberare un neutrone dal nucleo con energia cinetica nulla.

Formula semi-empirica di massa

Questa è dunque la *formula semi-empirica di massa*:

$$M(Z, A) c^2 = Z m_p c^2 + (A - Z) m_n c^2 - B(Z, A) \quad [18.16]$$

dove M è la *massa nucleare a riposo*, m_p la *massa del protone*, m_n la *massa del neutrone* e $B(Z, A)$:

| | | |
|---|------------------------------|---------|
| $B(Z, A) = + a_V A$ | <i>Termine di Volume</i> | |
| $- a_S A^{2/3}$ | <i>Termine di Superficie</i> | |
| $- a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}}$ | <i>Termine di Coulomb</i> | |
| $- a_A \frac{(A - 2Z)^2}{A}$ | <i>Termine di Asimmetria</i> | [18.17] |
| $\begin{cases} -\frac{a_p}{A^{1/2}} & N = \text{pari}, Z = \text{disp.} \\ 0 & A = \text{disp.} \\ \frac{a_p}{A^{1/2}} & N = \text{pari}, Z = \text{disp.} \end{cases}$ | <i>Termine di Pairing</i> | |

La formula si può scrivere anche in termini della *massa atomica a riposo* (piuttosto che la massa del nucleo), quindi indicando con μ la *massa atomica*:

$$\mu(A, Z) c^2 = Z m_p c^2 + (A - Z) m_n c^2 + Z m_e c^2 - B(A, Z) - \overset{0}{B_{\text{atomic}}} \quad [18.18]$$

perché nell'atomo dobbiamo tener conto della massa degli elettroni e sottrarre la *binding energy atomica*, che tiene conto delle energie di legame degli elettroni, che però, essendo dell'ordine dell'eV, può essere trascurata. Quindi possiamo riscrivere la massa atomica, considerando che $m_p c^2 + m_e c^2 = m_H c^2$ è la *massa a riposo dell'atomo d'idrogeno*:

$$\boxed{\mu(A, Z) c^2 \simeq Z m_H c^2 + (A - Z) m_n c^2 - B(A, Z)} \quad [18.19]$$

Nota. La *formula semi-empirica di massa* (modello a goccia del nucleo) funziona piuttosto bene per $A > 20$, ma non riesce a riprodurre i picchi nell'energia di legame per nucleone che si osservano sperimentalmente in prossimità dei cosiddetti *numeri magici*. Una trattazione più accurata sarà il *modello a shell*.

Nota. I valori dei parametri che riproducono al meglio gli andamenti sperimentali dell'energia di legame per nucleone sono:

$$a_V \simeq 15.6 \text{ MeV}, \quad a_S \simeq 17.2 \text{ MeV}, \quad a_C \simeq 0.7 \text{ MeV}, \quad a_A \simeq 23.3 \text{ MeV} \quad [18.20]$$

Lezione 19

2022-05-24

19.1 Instabilità dei nuclei

19.1.1 Decadimenti β

Decadimenti β^+ :

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z-1) + e^+ + \nu_e$$

Il decadimento è possibile se:

$$m(A, Z) c^2 \geq m(A, Z-1) c^2 + m_e c^2$$

e moltiplicando entrambi i membri per $Z m_e c^2$:

$$\mu(A, Z) c^2 \geq \mu(A, Z-1) c^2 + 2 m_e c^2$$

Oppure, sempre per decadimenti β^+ :

$$e^+ + (A, Z) \rightarrow (A, Z-1) + \nu_e$$

che è possibile se:

$$m_e c^2 + m(A, Z) c^2 \geq m(A, Z-1) c^2$$

e moltiplicando entrambi i membri per $(Z-1) m_e c^2$:

$$\mu(A, Z) c^2 \geq \mu(A, Z-1) c^2$$

Decadimenti β^- :

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z+1) + e^- + \bar{\nu}_e$$

che è possibile se:

$$m(A, Z) c^2 \geq m(A, Z+1) c^2$$

e moltiplicando entrambi i membri per $Z m_e c^2$:

$$\mu(A, Z) c^2 \geq \mu(A, Z+1) c^2$$

Nota. Ci si aspetta un andamento *smooth* con un *unico isobaro stabile*.

19.1.2 Decadimenti α

Un decadimento α è un decadimento del tipo:

$$(Z, A) \rightarrow (Z-2, A-4) + (2, 4)$$

dove $(2, 4)$ rappresenta la *particella α* . Il processo è possibile se:

$$m(Z, A) c^2 - [m(Z-2, A-4) c^2 + m(2, 4) c^2] \geq 0$$

Il processo si può riscrivere in termini di *energie di legame*. Il processo di *decadimento α* è possibile se vale la seguente relazione fra le energie di legame:

$$B(Z-2, A-4) + B(2, 4) - B(Z, A) \geq 0$$

Quindi, muovendoci lungo la **valle di stabilità**:

$$B(2, 4) \geq B(Z, A) - B(Z-2, A-4) \simeq \frac{dB}{dA} 4$$

ϵ è l'energia di legame per nucleone:

$$\epsilon = \frac{B}{A}$$

allora:

$$\frac{d\epsilon}{dA} = \frac{d(B/A)}{dA} = \frac{1}{A} \frac{dB}{dA} - \frac{1}{A^2} B$$

quindi:

$$\frac{dB}{dA} = A \frac{d\epsilon}{dA} + \epsilon$$

Quindi sostituendo vediamo che il decadimento α diventa *energeticamente possibile quando*:

$$B(2, 4) \geq 4 \left\{ A \frac{d\epsilon}{dA} + \epsilon \right\}$$

dove $B(2, 4) \simeq 28.3 \text{ MeV}$ è l'energia di legame di ${}^4\text{He}$, dove $A \gtrsim 100$, $\frac{d\epsilon}{dA} \simeq -7.7 \times 10^{-3} \text{ MeV}$ e $B(2, 4)/4 = 7.075 \text{ MeV}$. Quindi possiamo dire che:

$$7.075 \text{ MeV} \geq -7.7 \times 10^{-3} \text{ MeV} \cdot A + \epsilon$$

allora:

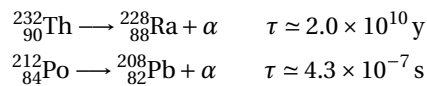
$$\boxed{\epsilon \leq 7.075 \text{ MeV} + 7.7 \times 10^{-3} \text{ MeV} \cdot A}$$

Nota. Al crescere del numero atomico l'interazione coulombiana rendono i nuclei instabili (vedi plot energia media di legame in funzione del numero atomico).

Vita media rispetto al decadimento α

La *vita media rispetto al decadimento α* è estremamente variabile, sebbene le interazioni alla base dei decadimenti sono le stesse (interazioni forti e interazioni elettromagnetiche). Quindi: *stessa fisica, ma risultati molto diversi fra loro*.

Esempio 19.1.3. Due esempi di decadimenti α con tempi di vita media di molti ordini di grandezza differenti fra loro:



Legge di Geiger-Nuttal

Legge di Geiger-Nuttal

$$\boxed{\log_{10}(\omega) = B \log_{10}(Ra) + C}$$

dove:

- $\omega = \frac{1}{\tau} = [\text{s}^{-1}]$ è il *rate di transizione*;
- $R_\alpha = [\text{cm}]$ è il “range”¹ della particella α .

Quindi abbiamo che $\omega \propto R_\alpha^B$. Il range della particella α dipende dalla sua energia cinetica:

$$R_\alpha \propto T_\alpha^{3/2} = \left\{ \frac{M_d}{M_d + M_\alpha} Q_\alpha \right\}^{3/2}$$

¹La distanza percorsa nel materiale in cui viene prodotta, prima che questa si fermi

Descrizione fenomenologica del decadimento α

Dato il decadimento α :

$$(Z, A) \rightarrow (Z-2, A-4) + \alpha$$

abbiamo che $T_\alpha \simeq Q_\alpha$ (dove Q_α è la differenza di energia di legame del nucleo padre rispetto al nucleo figlio). Assumiamo:

- particella α è “*pre-formata*” all'interno del nucleo padre;
- transizione da uno stato legato ad uno stato libero ad energia Q_α (trascuriamo il *rinculo del nucleo figlio*, i.e. $T_d \ll T_\alpha \simeq Q_\alpha$).

$$V(r) = \frac{Z_0 Z_\alpha e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \simeq \frac{Z_0 Z_\alpha e^2 \hbar c}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \frac{1}{r} \simeq \frac{Z_0 Z_\alpha \alpha (\hbar c)}{r}$$

dove $\alpha \simeq 1/137$ è la *costante di struttura fine*.

Quindi la spiegazione dell'estrema variabilità della vita media rispetto al decadimento α è associabile all'*effetto tunnel quantistico*.

Effetto tunnel Abbiamo una particella ad energia E fissata con $E < U$. L'equazione di Schrodinger per questa particella:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |p\rangle = H|\psi\rangle$$

dove l'Hamiltoniana:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V$$

Gli autostati dell'Hamiltoniana sono gli stati che soddisfano l'equazione:

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

Nel caso monodimensionale diventa:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x) \psi(x) = E \psi(x)$$

Risolviamo l'equazione di Schrodinger separatamente nelle tre regioni spaziali I, II, III e successivamente imponiamo delle condizioni di raccordo (ossia imponendo che la funzione d'onda e la sua derivata siano continue):

- zona I ($x \leq 0$):

$$\psi(x) = A_R e^{ikx} + A_L e^{-ikx}$$

con:

$$\hbar k = \sqrt{2mE}$$

- zona II ($0 < x < L$):

$$\psi(x) = B_R e^{Kx} + B_L e^{-Kx}$$

con:

$$\hbar K = \sqrt{2m(U-E)}$$

- zona III:

$$\psi(x) = C_R e^{ik(x-L)} + C_L e^{-ik(x-L)}$$

con:

$$\hbar k = \sqrt{2mE}$$

Imponiamo *continuità in $x = 0$* :

$$A_R + A_L = B_R + B_L$$

Imponiamo la *derivata prima continua in $x = 0$* :

$$(A_R - A_L) ik = (B_R - B_L) K$$

Imponiamo la *continuità in $x = L$* :

$$B_R e^{KL} + B_L e^{-KL} = C_R + C_L$$

Imponiamo la *derivata prima continua in $x = L$* :

$$(B_R e^{KL} - B_L e^{-KL}) K = (C_R - C_L) ik$$

Cerchiamo soluzioni che abbiano le seguenti proprietà:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_R = 1 \\ A_L = ? = r \quad (\text{riflessione}) \\ B_R = ? \\ B_L = ? \\ C_R = ? = t \quad (\text{trasmissione}) \\ C_L = 0 \end{array} \right.$$

quindi abbiamo 4 coefficienti ignoti. Otteniamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + r = B_R + B_L \\ (1 - r) \frac{ik}{K} = B_R - B_L \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B_R = \frac{1}{2} \left[(1 + r) + \frac{ik}{K} (1 - r) \right] \\ B_L = \frac{1}{2} \left[(1 + r) - \frac{ik}{K} (1 - r) \right] \end{array} \right.$$

e:

$$\left\{ \begin{array}{l} t = B'_R + B'_L \\ t \frac{ik}{K} = B'_R - B'_L \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B'_R = \frac{1}{2} \left[t + \frac{ik}{K} t \right] \\ B'_L = \frac{1}{2} \left[t - \frac{ik}{K} t \right] \end{array} \right.$$

dove $B'_R \equiv B_R e^{KL}$ e $B'_L \equiv B_L e^{-KL}$. Dalle relazioni precedenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} [(1 + i\delta) + r(1 - i\delta)] = e^{-KL} t(1 + i\delta) \\ [(1 - i\delta) + r(1 + i\delta)] = e^{-KL} t(1 - i\delta) \end{array} \right.$$

dove $\delta \equiv k/K$. Da cui otteniamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \frac{e^{-KL} t(1 + i\delta) - (1 + i\delta)}{(1 - i\delta)} \\ r = \frac{e^{-KL} t(1 - i\delta) - (1 - i\delta)}{(1 + i\delta)} \end{array} \right.$$

uguagliando le due espressioni di r , otteniamo un'espressione per t :

$$t = \frac{(1 + i\delta)^2 - (1 - i\delta)^2}{e^{-KL} (1 + i\delta)^2 - e^{KL} (1 - i\delta)^2} \simeq \frac{4i\delta}{(1 - i\delta)^2} e^{-KL}$$

quindi:

$$t \simeq -\frac{4i\delta}{(1 - i\delta)^2} e^{-KL}$$

dove k è il vettore d'onda della funzione d'onda nella zona dove *non* è presente il potenziale, mentre K è relativo alla zona *classicamente proibita*. Il *dump esponenziale* è tanto più influente quanto più ampia è la zona proibita ed intenso il potenziale.

Lezione 20

2022-05-26

20.1 Instabilità dei nuclei (reprise)

20.1.1 Decadimenti α (reprise)

Descrizione fenomenologica del decadimento α (reprise)

Effetto tunnel (reprise) La **probabilità di tunneling** sarà data da:

$$P = |t|^2 = \frac{16\delta^2}{(1+\delta^2)^2} e^{-2KL} = \frac{16\left(\frac{k}{K}\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{k}{K}\right)^2\right]^2} e^{-2KL} \simeq e^{-2KL}$$

se $k/K \simeq 1$.

Barriera di potenziale arbitraria

$$P_T = P_1 P_2 \dots P_N = e^{-2K_1 \Delta x} e^{-2K_2 \Delta x} \dots e^{-2K_N \Delta x} = e^{-\sum_i K_i \Delta x}$$

nel limite in cui mandiamo $\Delta x \rightarrow 0$, la somma diventa un integrale ed otteniamo così la probabilità di attraversare interamente la barriera di potenziale arbitraria:

$$P_T = e^{-2 \int_A^B K(x) dx}$$

Nota. Questo è un ragionamento approssimato. Stiamo componendo le probabilità (mentre dovremmo comporre le ampiezze di probabilità, causa interferenza), quindi stiamo implicitamente assumendo che il potenziale non vari molto rapidamente rispetto alla funzione d'onda.

Consideriamo che, come avevamo detto:

$$\hbar K = \sqrt{2mV(x) - E}$$

e otteniamo che la **probabilità di tunneling attraverso una barriera di potenziale arbitraria**:

$$P_T = \exp - \frac{2}{\hbar} \int_A^B \sqrt{2mV(x) - E} dx = e^{-G}$$

dove G è il **fattore di penetrazione di Gammon**.

Tunneling attraverso barriera coulombiana Indichiamo con R una **lunghezza di taglio** sotto la quale le *interazioni forti* sono dominanti ed al di sopra della quale sono invece *trascurabili*. La **probabilità di tunneling della particella α** può essere calcolata, dato il **fattore di penetrazione di Gammon**:

$$G = \frac{2}{\hbar} \int_R^b \sqrt{2m \left(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 r} - E \right)} dr$$

dove m è la **massa della particella α** , $z = 2$ il **numero atomico della particella α** , Z il **numero atomico della particella figlio** ed $E = T_\alpha \simeq Q_\alpha$. Otteniamo:

$$G = \frac{2}{\hbar} \sqrt{2m} \sqrt{\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0}} \int_R^b \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)^{1/2} dr$$

dove il seguente passaggio intermedio:

$$G = \frac{2}{\hbar} \sqrt{2m} \sqrt{\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0}} b^2 \frac{b}{\int_R^b \frac{1}{b} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)^{1/2} dr}$$

quindi:

$$G = \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{mzZe^2b}{2\pi\epsilon_0}} \left\{ \arccos \left(\sqrt{\frac{R}{b}} \right) - \sqrt{\frac{R}{b} \left(1 - \frac{R}{b} \right)} \right\}$$

In *approssimazione di barriera spessa*, i.e. $\frac{R}{b} \ll 1$, si ottiene:

$$G = \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{mzZe^2}{2\pi\epsilon_0}} \left\{ \frac{\pi}{2} - 2x^{1/2} \right\}$$

dove $x = R/b$, tenendo conto anche dell'espressione di $\arccos \sqrt{x}$.

Sappiamo che R fm, mentre b dipende dall'energia cinetica della particella, ovvero:

$$E = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b}$$

con:

$$b = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hbar c}{\hbar c} \frac{1}{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{zZ\alpha\hbar c}{\frac{1}{2}mv^2} \simeq \frac{1.4 \text{ MeV}}{\frac{1}{2}mv^2} zZ \text{ fm}$$

In conclusione otteniamo:

$$G = \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{mzZe^2b}{2\pi\epsilon_0}} \left\{ \frac{\pi}{2} - 2x^{1/2} \right\} = \frac{4(zZ\alpha)}{\frac{v}{c}} \left\{ \frac{\pi}{2} - 2x^{1/2} \right\}$$

dove nel primo termine del prodotto, $v/c \propto T_\alpha^{1/2}$. Il valore del *fattore di penetrazione di Gammon*:

$$G = \frac{2\pi zZ\alpha}{\frac{v}{c}} - 4 \sqrt{\frac{2(mc^2)zZ\alpha R}{\hbar c}}$$

Osserviamo che:

- $\frac{2\pi zZ\alpha}{\frac{v}{c}}$ *non dipende da R!* Quindi i dettagli della buca di potenziale non sono importanti per calcolare la probabilità di tunneling, nel limite di barriera spessa;
- $4 \sqrt{\frac{2(mc^2)zZ\alpha R}{\hbar c}}$ *dipende da R.*

Nota. È molto più facile far interagire, con *interazioni forti*, nuclei leggeri, rispetto a nuclei pesanti, a causa dell'altezza della barriera coulombiana.

Quindi, ricapitolando, per *barriera coulombiana* in limite di *barriera spessa*, l'effetto tunneling di particelle α è descritto, approssimativamente, da:

| | |
|--|--|
| $\begin{cases} P_T = e^{-G} \\ G = \frac{2\pi zZ\alpha}{\frac{v}{c}} - 4 \sqrt{\frac{2(mc^2)zZ\alpha R}{\hbar c}} \end{cases}$ | <p style="text-align: center;"><i>Probabilità di tunneling</i></p> <p style="text-align: center;"><i>Fattore di penetrazione di Gammon</i></p> |
|--|--|

Rate di decadimento Per determinare il *rate di decadimento*:

$$\omega = FP_T$$

dove $[\omega] = t^{-1}$ e $[F] = t^{-1}$, con:

$$F \sim \frac{v_0}{2R}$$

dove v_0 è la *velocità della particella nella buca di potenziale*. Notiamo che:

$$\ln(\omega/s^{-1}) = \ln(F/s^{-1}) + \ln(P_T) = \ln(F/s^{-1}) - G = \ln(F/s^{-1}) + 4\sqrt{\frac{2(mc^2)zZ\alpha R}{(\hbar c)}} - \frac{2\pi zZ\alpha}{\frac{v}{c}}$$

indicando con:

$$f = \ln(F/s^{-1}) + 4\sqrt{\frac{2(mc^2)zZ\alpha R}{(\hbar c)}}$$

allora:

$$\ln(\omega/s^{-1}) = f - g \frac{Z}{\sqrt{T_\alpha}}$$

con $T_\alpha = \frac{1}{2}mv^2 \simeq Q_\alpha$. La costante g è data da:

$$g = 4\pi\alpha\sqrt{\frac{mc^2}{2}} \simeq 3.97 \text{ MeV}^{1/2}$$

Quindi:

$$\ln(\omega/s^{-1}) = f - 3.97 \text{ MeV}^{1/2} \frac{Z}{\sqrt{T_\alpha}}$$

Quindi vediamo che ω è una *funzione fortemente crescente di T_α* :

$$\omega \propto \exp \left\{ -3.97 Z \left(\frac{T_\alpha}{1 \text{ MeV}} \right)^{-\frac{1}{2}} \right\}$$

Quindi aumentando l'energia cinetica avremo che la probabilità di tunneling decresce esponenzialmente. Questo spiega un po' il significato della *legge di Geiger-Nuttall*.

Nota. Per fare queste considerazioni abbiamo considerato il **nucleo figlio non rinculante** (i.e. $M_D \gg m$).

Tunneling attraverso barriera coulombiana con rinculo del nucleo Vediamo ora il caso più generale di *nucleo rinculante*. Introducendo la *massa ridotta*:

$$\mu = \frac{m_D m_\alpha}{m_D + m_\alpha}$$

e trasformando v nella *velocità relativa*. Il *fattore di penetrazione di Gammon* diventa:

$$G = \frac{2\pi\alpha zZ}{\frac{v}{c}} - 4\sqrt{\frac{2(\mu c^2)zZ\alpha R}{\hbar c}}$$

In questo caso avremo che $T_\alpha \neq Q_\alpha$. Quindi:

$$Q_\alpha = \frac{1}{2}\mu v^2 \quad \Rightarrow \quad 2Q_\alpha = \mu v^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2Q_\alpha}{\mu}} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2Q_\alpha}{m} \frac{m}{\mu}}$$

Utilizzando queste relazioni otteniamo:

$$\ln(\omega/s^{-1}) = \ln(F/s^{-1}) - G = \ln(F/s^{-1}) + 4\sqrt{\frac{2(mc^2)zZ\alpha R}{\hbar c}} - \frac{2\pi zZ\alpha}{\frac{v}{c}}$$

dove, inndicando con f' :

$$f' = \ln(F/s^{-1}) + 4\sqrt{\frac{2(mc^2)zZ\alpha R}{\hbar c}}$$

Nota. Noi abbiamo considerato il problema come unidimensionale, ma il processo reale è in realtà tridimensionale.

Ruolo del momento angolare Dato il processo di *decadimento* α :

$$(Z, A) \rightarrow (Z - 2, A - 4) + {}^4\text{He}$$

abbiamo che necessariamente deve valere il *principio di conservazione del momento angolare*, quindi consideriamo:

- \vec{J}_P lo spin del nucleo padre;
- \vec{J}_D lo spin del nucleo figlio (daughter);
- $\vec{J}_\alpha = 0$ lo spin della particella α ;
- \vec{L} il momento angolare orbitale dello stato finale;

quindi dovrà essere:

$$\vec{J}_P = \vec{J}_D + \vec{J}_\alpha + \vec{L} = \vec{J}_D + \vec{L}$$

con:

$$|J_D - l| \leq J_{\text{TOT}} \leq J_D + l$$

La relazione precedente implica che se $J_P \neq J_D$, allora $l \neq 0$:

$$|J_P - J_D| \leq l \leq |J_P + J_D|$$

con $l = 0, 1, 2, \dots$. Se $l = 0$ dobbiamo modificare la trattazione fatta fino ad ora. La *funzione d'onda che descrive il moto relativo* soddisfa l'equazione di Schrodinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = Q_\alpha \psi(\vec{r})$$

dove $V(\vec{r})$ è un *potenziale che tiene conto della repulsione coulombiana e delle interazioni forti*. L'ipotesi è che questo sia un *potenziale centrale*:

$$V(\vec{r}) = V(|\vec{r}|)$$

La funzione d'onda può essere scomposta in *armoniche sferiche*:

$$\psi(\vec{r}) = R(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

con $l = 0, 1, 2, \dots$ e $-l \leq m \leq l$. Definendo $\rho(r) = rR(r)$, si ottiene la seguente equazione per $\rho(r)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} \rho(r) + \left\{ V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \right\} \rho(r) = Q_\alpha \rho(r)$$

dove $V(r)$ è il *potenziale effettivo centrifugo*.

$$\frac{l(l+1)\hbar^2 c^2}{2\mu r^2} = \frac{l(l+1)(200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}^2)}{8 \times 10^3 \text{ MeV} r^2} \sim \frac{l(l+1) 5 \text{ MeV}}{(r/1 \text{ fm})^2}$$

Per $l \neq 0$ otteniamo un *innalzamento della barriera di potenziale*, quindi un effetto tunneling meno probabile. In più:

- anche se sotto-dominante, il termine aggiuntivo può modificare sostanzialmente il valore di P_T ;
- “*effetto centrifugo*” presente anche in assenza di repulsione coulombiana (importante per reazioni nucleari).

Lezione 21

2022-05-31

21.1 Reazioni nucleari

Definizione 21.1.1 (Processo di scattering). Parliamo di un **processo di scattering** se la particella incidente è presente nei prodotti di reazione:

$$a + A \longrightarrow b + B \quad \text{se } a = b \Rightarrow \text{scattering}$$

Parliamo di *scattering elastico* se $a = b$ e $A = B$, mentre parliamo di *scattering inelastico* se $A \neq B$.

Nota. Ricordiamo che deve valere la *conservazione del numero barionico* (per quanto visto i nucleoni sono barioni).

Nota. Noi qui faremo l'ipotesi che l'interazione avvenga fra nuclei *non-relativistiche*.

21.1.2 Cinematica di un processo di collisione (non-relativistica)

$$a + A \longrightarrow b + B$$

Sistema del laboratorio Nel sistema del laboratorio $\vec{v}_A = 0$.

$$T_A = \frac{1}{2} m_a v_a^2 = 0$$

$$\vec{p}_A = m_a \vec{v}_a = 0$$

Energia cinetica ed impulso totali:

$$T_{\text{TOT}} = T_a + T_A = \frac{1}{2} m_a \vec{v}_a^2$$

$$\vec{p}_{\text{TOT}} = \vec{p}_a + \vec{p}_A = m \vec{v}_a$$

Nota. Il sistema del centro di massa è definito come il sistema di riferimento in cui l'impulso totale delle particelle risultanti è nullo.

La velocità del *CdM* nel sistema del laboratorio sarà:

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{m_a \vec{r}_a + m_A \vec{r}_A}{m_a + m_A} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{CM}} = \frac{m_a \vec{v}_a + m_A \vec{v}_A}{m_a + m_A} = \frac{m_a}{m_a + m_A} \vec{v}_a$$

Sistema del centro di massa Nel sistema del centro di massa:

$$\begin{cases} \vec{p}_{\text{TOT}} = \vec{p}_a + \vec{p}_A = \vec{0} \\ \vec{v}_{\text{CM}} = \vec{0} \end{cases}$$

e abbiamo che:

$$\vec{p}_a = -\vec{p}_A \quad \Rightarrow \quad |\vec{p}_a| = |\vec{p}_A| = \tilde{p}$$

Per le velocità:

$$m_a \vec{v}_a = -m_A \vec{v}_A \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_A = -\frac{m_a}{m_A} \vec{v}_a$$

Per l'energia cinetica:

$$\tilde{T}_a = \frac{1}{2} m_a \tilde{v}_a^2 = \frac{\tilde{p}^2}{2m_a}$$

$$\tilde{T}_A = \frac{1}{2} m_A \tilde{v}_A^2 = \frac{\tilde{p}^2}{2m_A}$$

Consideriamo che:

$$\vec{\tilde{v}}_a = \vec{v}_a - \vec{v}_{\text{CM}} = \left(1 - \frac{m_a}{m_a + m_A}\right) \vec{v}_a = \frac{m_A}{m_a + m_A} \vec{v}_a$$

ciò implica che:

$$\vec{\tilde{p}}_A = -\vec{\tilde{p}}_a = -\frac{m_a}{m_a + m_A} \vec{p}_A$$

quindi:

$$\vec{\tilde{p}}_A = -\vec{\tilde{p}}_a = -\frac{m_a}{m_a + m_A} \vec{p}_A$$

L'energia cinetica del moto relativo:

$$\tilde{T} = \tilde{T}_a + \tilde{T}_A = \frac{\tilde{p}^2}{2m_a} + \frac{\tilde{p}^2}{2m_A} = \frac{\tilde{p}^2}{2} \left\{ \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_A} \right\} = \frac{\tilde{p}^2}{2} \frac{1}{\mu}$$

dove μ è la massa ridotta:

$$\mu = \frac{m_a m_A}{m_a + m_A}$$

Quindi:

$$\tilde{T} = \frac{1}{2\mu} \tilde{p}^2 = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{m_a}{m_a + m_A} \right)^2 \left(\frac{p_a^2}{2m_a} \right) 2m_a = \frac{m_A}{m_a + m_A} T$$

In tutti i processi fisici dovranno essere conservati *energia e impulso*:

$$\begin{array}{ll} \text{Conservazione dell'energia} & (E_{\text{tot}})_{\text{ini}} = (E_{\text{tot}})_{\text{fin}} \\ \text{Conservazione impulso} & (\vec{p}_{\text{tot}})_{\text{ini}} = (\vec{p}_{\text{tot}})_{\text{fin}} \end{array}$$

Ricordando che stiamo considerando una reazione del tipo:



Nel sistema del centro di massa:

$$(\vec{p}_{\text{tot}})_{\text{ini}} = (\vec{p}_{\text{tot}})_{\text{fin}} = \vec{0}$$

quindi:

$$\left. \begin{array}{l} |\vec{\tilde{p}}_a| = |\vec{\tilde{p}}_A| = \tilde{p}_{\text{ini}} \\ |\vec{\tilde{p}}_b| = |\vec{\tilde{p}}_B| = \tilde{p}_{\text{fin}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{\tilde{p}}_a = -\vec{\tilde{p}}_A \\ \vec{\tilde{p}}_b = -\vec{\tilde{p}}_B \end{array} \right.$$

implementa la *conservazione dell'impulso*.

La *conservazione dell'energia* implica che:

$$m_a c^2 + \tilde{T}_a + m_A c^2 + \tilde{T}_A = m_b c^2 + \tilde{T}_b + m_B c^2 + \tilde{T}_B$$

quindi definiamo il *Q-value* della reazione:

$$Q = (m_a c^2 + m_A c^2) - (m_b c^2 + m_B c^2) = (\tilde{T}_b + \tilde{T}_B) - (\tilde{T}_a + \tilde{T}_A) \equiv \Delta \tilde{T}$$

dove:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_a c^2 + m_A c^2 \Rightarrow \text{Somma delle masse dello stato ini.} \\ m_b c^2 + m_B c^2 \Rightarrow \text{Somma delle masse dello stato fin.} \\ \tilde{T}_b + \tilde{T}_B \Rightarrow \text{Ener. cin. totale dello stato fin.} \\ \tilde{T}_a + \tilde{T}_A \Rightarrow \text{Ener. cin. totale dello stato ini.} \end{array} \right.$$

Il Q -value della reazione:

$$Q = \sum_{ini} m_i c^2 - \sum_{fin} m_f c^2 = \Delta \tilde{T} = (\tilde{T}_{tot})_{fin} - (\tilde{T}_{tot})_{ini}$$

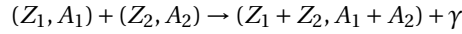
quindi:

$$Q < 0 \Rightarrow (\tilde{T}_{tot})_{fin} > (\tilde{T}_{tot})_{ini} \quad \text{Reazione esotermica}$$

con $(\tilde{T}_{tot})_{fin} = (\tilde{T}_{tot})_{ini} + Q$.

21.1.3 Fusione nucleare

Il processo di **fusione nucleare** è un processo in cui abbiamo la fusione di nuclei:



Il Q -value di tale reazione:

$$\begin{aligned} Q &= m(Z_1, A_1) c^2 + m(Z_2, A_2) c^2 - m(Z_1 + Z_2, A_1 + A_2) c^2 \\ &= Z_1 m_p c^2 + (A_1 - Z_1) m_n c^2 - B(Z_1, A_1) \\ &\quad + Z_2 m_p c^2 + (A_2 - Z_2) m_n c^2 - B(Z_2, A_2) \\ &\quad - (Z_1 + Z_2) m_p c^2 + (A_1 + A_2 - Z_1 - Z_2) m_n c^2 - B(Z_1 + Z_2, A_1 + A_2) \\ &= B(Z_1 + Z_2, A_1 + A_2) - B(Z_1, A_1) - B(Z_2, A_2) \\ &= \epsilon(A_1 + A_2)(A_1 + A_2) - \epsilon(A_1)A_1 - \epsilon(A_2)A_2 \\ &\geq \epsilon(A_1 + A_2)(A_1 + A_2) - \max(\epsilon(A_1), \epsilon(A_2))(A_1 + A_2) \end{aligned}$$

quindi:

$$Q \geq [\epsilon(A_1 + A_2) - \max(\epsilon(A_1), \epsilon(A_2))](A_1 + A_2) \geq 0$$

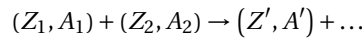
dove il termine in parentesi quadra è un termine positivo, poiché $\epsilon(A)$ è una funzione crescente di A per $A \leq 56$. Quindi: **la fusione nucleare di nuclei leggeri è un processo esotermico.**

Nota. Generalmente, in condizioni “normali” non avvengono fusioni spontanee fra nuclei (se non ad esempio nelle stelle), o meglio sono altamente improbabili, causa effetto tunnel nella barriera coulombiana. Per questo motivo, per farle avvenire abbiamo bisogno di collisioni ad alta energia.

21.1.4 Fissione nucleare

21.1.5 Considerazioni sulle reazioni nucleari

Affinché una reazione nucleare:



possa avvenire è necessario portare i due nuclei a distanze *piccole* (\sim fm). Se i nuclei sono carichi, ciò è ostacolato dalla repulsione coulombiana. La *sezione d'urto* di un processo di fusione fra due nuclei sarà:

$$\sigma = \tilde{\sigma} P_T$$

con $\tilde{\sigma} \sim \text{fm}^2$ (*stima geometrica*), dove P_T è la *probabilità di tunneling attraverso la barriera coulombiana*:

$$P_T = e^{-G}$$

dove G è il *fattore di penetrazione di Gammon*, che in questo caso:

$$G = \frac{2\pi(Z_1 Z_2 \alpha)}{\frac{v}{c}} - 4\sqrt{\frac{2(\mu c^2) Z_1 Z_2 \alpha R}{\hbar c}}$$

quindi P_T è il fattore che ci dice che un processo spontaneo di fusione nucleare è altamente improbabile.

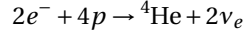
Nota. La barriera coulombiana, chiaramente, è assente per reazioni indotte da neutroni¹.

Nota. Se la collisione avviene con $l \neq 0$, dobbiamo tenere conto anche della *barriera centrifuga*:

$$V_C(r) = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}$$

21.1.6 Fusione dell'idrogeno nel Sole

Il processo di fusione dell'idrogeno nel sole è un processo del tipo:



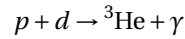
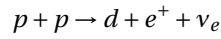
dove la presenza ν_e soddisfa la legge di conservazione fondamentale di *conservazione di numero leptónico*. Questo è il motivo per cui il sole è una *sorgente di neutrini di tipo e*.

$$Q = [2m_e + 4m_p - m({}^4\text{He})] \simeq 26 \text{ MeV}$$

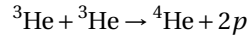
Il flusso di neutrini prodotto a terra (sulla terra):

$$\phi_\nu \sim 6 \times 10^{10} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

Catena pp Dati i primi due processi:



possiamo ottenere *Terminazione ppI* (90% della reazione):



o le *terminazioni $ppII$* (10%): o *$ppIII$* :

¹Neutroni liberi pronti a reagire sono poco probabili, perché i *neutroni liberi sono instabili*

Lezione 22

2022-06-07

22.1 Approssimazione di campo medio

In generale un nucleo è composto da A (*numero di massa atomica*) nucleoni. La funzione d'onda totale che diagonalizza l'Hamiltoniana:

$$\psi_{\text{tot}} = \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A)$$

quindi:

$$H_{\text{tot}} \psi_{\text{tot}} = E_{\text{tot}} \psi_{\text{tot}}$$

L'Hamiltoniana sarà:

$$H_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^A \frac{\hbar^2 \nabla_i^2}{2m_N} + \sum_j \sum_{i>j} V_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

possiamo scrivere, in termini di un *potenziale medio* \bar{V} , che descriva l'effetto medio delle interazioni:

$$H_{\text{tot}} \simeq \sum_{i=1}^A \frac{\hbar^2 \nabla_i^2}{2m_N} + \sum_i \bar{V}(\vec{r}_i - \vec{r}_{\text{CM}}) =$$

La funzione d'onda totale sarà la *funzione d'onda prodotto*:

$$\psi_{\text{tot}} = \prod_{i=1}^A \psi_i(\vec{r}_i)$$

con le corrette *proprietà di simmetria*. In tal caso:

$$H_i \psi_i = E_i \psi_i$$

dunque:

$$E_{\text{tot}} = \sum_i e_i$$

Momento angolare Il momento angolare è *quantizzato*:

$$\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$$

con Hamiltoniana *diagonalizzabile simultaneamente* a:

$$\begin{cases} L^2 \rightarrow l(l+1)\hbar^2 \\ L_z \rightarrow n\hbar \end{cases}$$

con $l = 0, 1, \dots$ e $-l \leq m \leq l$. La funzione d'onda è separabile in parte radiale e parte angolare:

$$\psi(\vec{r}) = R(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Affinché una funzione d'onda di questo tipo sia autofunzione dell'Hamiltoniana con potenziale di campo centrale, come abbiamo visto, sarà necessario che:

$$r R(\vec{r}) = \rho(r)$$

con la funzione $\rho(r)$ autofunzione di uno specifico operatore:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_N} + \frac{d^2 \rho(r)}{dr^2} + \left\{ \bar{V}(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2m_N r^2} \right\} \rho(r) = E_{nl} \rho(r)$$

da risolvere per $r \geq 0$. Vediamo che abbiamo la forma di un'equazione di Schrodinger monodimensionale (dobbiamo avere che $\rho(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$). Vediamo che non abbiamo dipendenza dal numero quantico m : questo è spiegabile riflettendo sul fatto che abbiamo un sistema invariante per rotazione.

Dovremmo considerare anche lo *spin* di ogni particella:

$$\begin{cases} S^2 \rightarrow s(s+1)\hbar^2 & \text{i.e. } s = \frac{1}{2} \\ S_z \rightarrow \text{i.e. } s_z = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \end{cases}$$

Nota. Stiamo considerando lo stesso tipo di interazione per tutti i nucleoni, senza distinguere quindi *neutroni e protoni*. Questo, in altre parole, vuol dire che stiamo trascurando i fenomeni di interazione elettromagnetica.

Nota (Potenziali di Saxon-Woods). La forma del potenziale di campo medio per nucleoni è il cosiddetto **potenziale di Saxon-Woods**. Noi, tuttavia, faremo i conti con un potenziale armonico.

D'ora in poi indicheremo la massa del nucleone con m . Effettuiamo un'approssimazione e consideriamo un potenziale che è quello dell'**oscillatore armonico tridimensionale**:

$$V(r) = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$$

Lo spettro dei *livelli energetici* dell'*oscillatore armonico unidimensionale*:

$$E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

la cui Hamiltoniana:

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

Per l'*oscillatore armonico tridimensionale* avremo un'Hamiltoniana che è:

$$\begin{aligned} H &= \frac{|\vec{p}|^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 |\vec{r}|^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \\ &= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 y^2 + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 z^2 \\ &= H_x + H_y + H_z \end{aligned}$$

quindi è la somma di 3 oscillatori armonici unidimensionali. Quindi la *funzione d'onda* sarà la *funzione d'onda prodotto dei 3 oscillatori armonici unidimensionali* e lo *spetto energetico* sarà la *somma delle singole energie*:

$$E_{\text{tot}} = \hbar \omega \left\{ \frac{3}{2} + (n_x + n_y + n_z) \right\}$$

Scriviamo quindi ora:

$$\rho(x) = v(x) \exp -\frac{1}{2} x^2$$

$$x = \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} r \equiv A^2 r$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dx} &= \frac{d\rho}{dx} \frac{dx}{dr} = \frac{d\rho}{dx} A^{1/2} = A^{1/2} [v'(x) - x v(x)] \exp \left\{ -\frac{1}{2} x^2 \right\} \\ \frac{d^2 \rho}{dx^2} &= A [v''(x) - 2x v'(x) - v(x) + x^2 v(x)] \exp \left\{ -\frac{1}{2} x^2 \right\} \end{aligned}$$

Quindi l'equazione:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \left\{ v''(x) - 2xv'(x) - v(x) + x^2 v(x) \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2}x^2 \right\} + \left\{ \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 - E \right\} v(x) \exp \left\{ -\frac{1}{2}x^2 \right\} = 0$$

Quindi l'equazione che andremo a studiare è:

$$v''(x) - 2xv'(x) + v(x) \left[\frac{2E}{\hbar\omega} - \frac{l(l+1)}{x^2} - 1 \right] = 0$$

Le soluzioni saranno della forma:

$$\begin{aligned} v(x) &= \sum_{j=M}^N c_j x^j \quad M \geq 1 \quad \rho(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ v'(x) &= \sum_{j=M}^N c_j j x^{j-1} \\ v''(x) &= \sum_{j=M}^N c_j j(j-1) x^{j-2} \quad \text{valida per } j \geq 2 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\sum_{j=M}^N c_j j(j-1) x^{j-2} - 2 \sum_{j=M}^N c_j j x^j + \sum_{j=M}^N c_j x^j \left[\frac{2E}{\hbar\omega} - 1 \right] - l(l+1) \sum_{j=M}^N c_j x^{j-2} = 0$$

Facciamo ora l'ipotesi **Hp**: $l = 0$:

$$\begin{aligned} \text{Ordine } 0 &\longrightarrow c_2 2(2-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0 \\ \text{Ordine } 1 &\longrightarrow c_3 3(3-1) - 2c_1 + c_1 \left[\frac{2E}{\hbar\omega} - 1 \right] = 0 \\ \text{Ordine } 2 &\longrightarrow c_4 4(4-1) - 4c_2 + c_2 \left[\frac{2E}{\hbar\omega} - 1 \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad c_4 = 0 \end{aligned}$$

Il nostro unico problema è capire cosa succede quando consideriamo i *coefficienti dispari*; infatti tutti i coefficienti c_k con $k = 2n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ sono *nulli*.

$$\text{Ordine } k \ (k = 2n-1; n = 1, 2, \dots) \longrightarrow c_{k+2}(k+2)(k+1) - c_k \left[2k+1 - \frac{2E}{\hbar\omega} \right] = 0$$

La serie si interrompe solo se:

$$2k+1 = \frac{2E}{\hbar\omega}$$

quindi:

$$E = \hbar\omega \left(k + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left(2n - \frac{1}{2} \right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

In definitiva:

$$E_{n\phi} = \hbar\omega \left\{ 2n - \frac{1}{2} \right\} \quad n = 1, 2, \dots$$

Nel caso in cui $l \neq 0$ il ragionamento precedente deve essere modificato e dobbiamo necessariamente assumere $M \geq 2$. Quindi:

$$\text{Ordine più basso } (M \geq 2) \longrightarrow c_M M(M-1) - l(l+1) c_M = 0$$

che implica $c_M \neq 0$ solo se $M = l+1$ (il valore di l determina il valore di M).

$$\text{Ordine successivo } (M-1) \longrightarrow c_{M+1}(M+1)M - l(l+1)c_{M+1} = 0$$

che essendo $M \neq l$, allora $c_{M+1} = 0$.

$$\text{Ordine } k \longrightarrow c_{k+2} [(k+2)(k+1) - l(l+1)] - c_k \left\{ 2k+1 - \frac{2E}{\hbar\omega} \right\} = 0$$

Quindi:

$$c_{M+1} = 0 \longrightarrow \begin{cases} c_{M+3} = 0 \\ c_{M+5} = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

e:

$$c_M \neq 0 \longrightarrow \text{Coefficienti } c_k \text{ con } k = (l+1) + 2(n-1) \text{ sono non nulli}$$

sempre con $n = 1, 2, 3, \dots$. La serie si interrompe se:

$$2k+1 - \frac{2E}{\hbar\omega} = 0$$

Da ciò segue:

$$E_{nl} = \hbar\omega \left\{ 2n + l - \frac{1}{2} \right\} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Il livello di minima energia:

$$\begin{cases} n = 1 \\ l = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{1,0} = \frac{3}{2}\hbar\omega \\ m_l = 0 \\ m_z = 2 \end{cases}$$

Il primo stato eccitato:

$$\begin{cases} n = 1 \\ l = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E = \frac{5}{2}\hbar\omega \\ m_l = -1, 0, 1 \\ m_z = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$$

Lezione 23

2022-06-09