28 Marzo 2023

Fisica Nucelare - Prof. Capozzi

Marco Radocchia
marco.radocchia@outlook.com
Università degli Studi dell'Aqauila

Indice

1. Scattering Rutherford

1.1. Esperimento di Geiger-Masdner

La densità di nuclei va come

Indicando con θ l'angolo di scattering, per singolo scattering abbiamo una varianza:

$$\sigma_1 = \sigma^2 = \left\langle \theta^2 \right\rangle - \langle \theta \rangle^2 \quad [1]$$

Per duplice scattering:

$$\sigma_2^2 = \langle \theta_1 + \theta_2 \rangle^2 - \langle \theta_1 + \theta_2 \rangle^2 = \left\langle \theta_1^2 \right\rangle + \left\langle \theta_1^2 \right\rangle + 2\langle \theta_1 \theta_2 \rangle = 2\sigma_1^2 = 2\sigma_2^2 \quad [2]$$

dato che $\langle \theta_1 + \theta_2 \rangle = \langle \theta_1 \rangle + \langle \theta_2 \rangle$.

1.2. Regola d'oro di Fermi

Dalla *regola d'oro di Fermi*, il rate di transizione:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \left\langle \psi_f | \mathrm{H}_{\text{int}} | \psi_i \right\rangle \right|^2 \frac{\mathrm{d}n_f}{\mathrm{d}E_f} \quad [3]$$

dove le funzioni d'onda iniziale e finale:

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i \cdot \vec{\boldsymbol{p}}_i \frac{\vec{\boldsymbol{x}}}{\hbar}} \quad [4]$$

$$\psi_f = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i \cdot \vec{\boldsymbol{p}}_f \frac{\vec{\boldsymbol{x}}}{\hbar}} \quad [5]$$

e l'hamiltoniana di interazione:

$$\mathrm{H}_{\text{int}} = ze\Phi(\vec{\boldsymbol{x}}) \quad [6]$$

allora:

$$\left\langle \psi_f | \mathrm{H}_{\text{int}} | \psi_i \right\rangle = \int \mathrm{d}^3 \vec{\boldsymbol{x}} \ \psi_i(\vec{\boldsymbol{x}}) \Phi(\vec{\boldsymbol{x}}) \psi_f^*(\vec{\boldsymbol{x}}) = \frac{ze}{V} \int \mathrm{d}^3 \vec{\boldsymbol{x}} \ e^{i \frac{\vec{\boldsymbol{q}} \cdot \vec{\boldsymbol{x}}}{\hbar}} \Phi(\vec{\boldsymbol{x}}) \quad [7]$$

Teorema

Siano u, v due campi scalari tali che $u, v \to 0$ come $|\vec{\boldsymbol{x}}| \to \infty$:

$$\int_V \mathrm{d}^3 \vec{\boldsymbol{x}} \ \left(u \nabla^2 v - v \nabla^2 u \right) = \int_V \mathrm{d}^3 \vec{\boldsymbol{x}} \ \nabla \cdot (u \nabla v - v \nabla u) = \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} \cdot (u \nabla v - v \nabla u) = 0 \quad [8]$$

Ponendo:

$$u = \Phi(\vec{\boldsymbol{x}}) \quad [9]$$

$$v = -\frac{\hbar^2}{q^2} e^{i \frac{\vec{\boldsymbol{q}} \cdot \vec{\boldsymbol{x}}}{\hbar}} \quad [10]$$

allora, considerando l'equazione per la densità di carica nucleare:

$$\nabla^2 \Phi(\vec{\boldsymbol{x}}) = -\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{x}})}{\varepsilon_0} \quad [11]$$

e sostituendo:

$$
\begin{aligned}
\left\langle \psi_f | \mathrm{H}_{\text{int}} | \psi_i \right\rangle &= \frac{ze}{V} \int_V \mathrm{d}^3\vec{\boldsymbol{x}} \left(-\frac{\hbar^2}{q^2} \right) e^{i\frac{\vec{q}\cdot\vec{x}}{\hbar}} \nabla^2 \Phi(\vec{\boldsymbol{x}}) \\
&= \frac{ze\hbar^2}{Vq^2} \int \mathrm{d}^3\vec{\boldsymbol{x}}\ \rho(\vec{\boldsymbol{x}}) e^{i\frac{\vec{q}\cdot\vec{x}}{\hbar}} \\
&= \frac{zZe^2\hbar^2}{Vq^2} \int_V \mathrm{d}^3\vec{\boldsymbol{x}}\ f(\vec{\boldsymbol{x}}) e^{i\frac{\vec{q}\cdot\vec{x}}{\hbar}} \\
&= \frac{zZe^2\hbar^2}{Vq^2\varepsilon_0} F(\vec{\boldsymbol{q}})
\end{aligned}
\qquad [12]
$$

dove abbiamo introdotto il **fattore di forma**:

$$
F(\vec{\boldsymbol{q}}) = \int \mathrm{d}^3\vec{\boldsymbol{x}}\ f(\vec{\boldsymbol{x}}) e^{i\frac{\vec{q}\cdot\vec{x}}{\hbar}} \qquad [13]
$$

Quindi la *densità di stati*:

$$
\frac{\mathrm{d}n_f}{\mathrm{d}E_f} = \frac{p_f^2 \mathrm{d}p_f\ \mathrm{d}\Omega\ V}{(2\pi\hbar)^3 \mathrm{d}E_f} \qquad [14]
$$

e introducendo conservazione di impulso ed energia $p_f = p_i = mv,\ E_f = E_i = \frac{1}{2}mv^2,$ abbiamo $\mathrm{d}p_f = m\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}E_f = mv\mathrm{d}v$. Ricordiamo che V è il *volume occupato nello spazio delle fasi*.

Quindi sostituendo:

$$
\frac{\mathrm{d}n_f}{\mathrm{d}E_f} = \frac{m^2v^2m\mathrm{d}v\ \mathrm{d}\Omega\ V}{(2\pi\hbar)^3 mv\mathrm{d}v} = \frac{m^2v\mathrm{d}\Omega\ V}{(2\pi\hbar)^3} \qquad [15]
$$

Possiamo esprimere questo rapporto anche come:

$$
\frac{\mathrm{d}n_f}{\mathrm{d}E_f} = \frac{N_{\text{int}}}{N_{\text{inc}}N_{\text{bers}}} = \frac{\Phi_{\text{inc}}N_{\text{bers}}\sigma}{N_{\text{inc}}N_{\text{bers}}} = \frac{N_{\text{inc}}\sigma}{stN_{\text{inc}}}\frac{\Delta x}{\Delta x} = \frac{\sigma v}{V} \qquad [16]
$$

La sezione d'urto:

$$
\sigma = \frac{V}{v}\frac{2\pi}{\hbar}\left| \left\langle \psi_f | \mathrm{H}_{\text{int}} | \psi_i \right\rangle \right| \frac{\mathrm{d}n_f}{\mathrm{d}E_f} \qquad [17]
$$

Potenziale a corto raggio

Consideriamo un hamiltoniana di interazione che descriva un potenziale a *corto raggio* (interazioni fra particelle elementari):

$$
\mathrm{H}_{\text{int}} = V_0 \left(\frac{e^{-\mu r}}{r} \right) \qquad [18]
$$

dove il termine:

$$
V_0 = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0}, \mu = 0 \qquad [19]
$$

Utilizzando una tale hamiltoniana, l'elemento di matrice fra gli stati iniziale e finale:

$$
\left| \left\langle \psi_f | \mathrm{H}_{\text{int}} | \psi_i \right\rangle \right| = ??? \qquad [20]
$$

ed esplicitando la *densità di stati* e l'*elemento di matrice dell'hamiltoniana*:

$$\sigma = \frac{V}{v}\frac{2\pi}{\hbar}\frac{z^2 Z^2 e^4 \hbar^4}{V^2 q^4 \varepsilon_0^2}|F(\vec{\boldsymbol{q}})|^2 \frac{m^2 v \mathrm{d}\Omega\ V}{8\pi^3\hbar^3} \qquad [21]$$

Esplicitando il modulo dell'*impulso trasferito* $|\vec{\boldsymbol{q}}| = 2\left|\vec{\boldsymbol{p}}_i\right|\sin\frac{\theta}{2}$:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{z^2 Z^2 e^4 |F(\vec{\boldsymbol{q}})|^2}{4\pi^2\varepsilon_0^2 16 m^2 v^4 \sin^4\frac{\theta}{2}} = \left(\frac{zZe}{16\pi\varepsilon_0 T}\right)^2 \frac{|F(\vec{\boldsymbol{q}})|^2}{\sin^4\frac{\theta}{2}} \qquad [22]$$

L'*approssimazione classica* si ottiene considerando una distribuzione puntiforme di carica, il che equivale a inserire $f(\vec{\boldsymbol{x}}) = \delta^3(\vec{\boldsymbol{x}})$ nel calcolo del fattore di forma. Facendo questo si riottiene la sezione d'urto differenziale ottenuta con il calcolo puramente classico.

Se b è la *sezione d'urto* e p_T

$$bp \qquad [23]$$