Applications Rationnelles et Systèmes Linéaires en Géométrie Projective

Marco Ramponi

§1. Échauffement

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, un cercle C est donné par une équation de la forme :

$$C : x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

Le rayon r de C est tel que $4r^2 = a^2 + b^2 - 4c > 0$. Le centre de C est le point $(-a/2, -b/2)$. Il est naturel d'identifier C avec un point $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ qui satisfait $a^2 + b^2 - 4c > 0$. Notons $\mathcal{N}$ le paraboloïde de $\mathbb{R}^3$ d'équation [1]

$$\mathcal{N} : a^2 + b^2 - 4c = 0.$$

L'*espace de cercles* est donc la région Ω des points de $\mathbb{R}^3$ externes à $\mathcal{N}$,

$$\Omega = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \ a^2 + b^2 - 4c > 0\}.$$

Exercice. *Considérons une droite ℓ dans $\mathbb{R}^3$ d'équations paramétriques*

$$\ell = \{(a + tm, b + tn, c + tp) : t \in \mathbb{R}\},$$

Décrire la famille de cercles correspondent dans $\mathbb{R}^2$. Dessiner (avec l'ordinateur si on préfère) des exemples des familles dans les cas :

(i) *ℓ droite verticale (par exemple $m = n = 0$, $p = 1$).*

(ii) *ℓ intersecte $\mathcal{N}$ dans 2 points.*

(iii) *ℓ intersecte $\mathcal{N}$ dans 1 point (elle est tangente).*

(iv) *ℓ n'intersecte pas $\mathcal{N}$.*

Exercice. *Décrire le lieu de $\mathbb{R}^3$ qui représente les cercles des rayon 1 qui passent par l'origine de $\mathbb{R}^2$.*

L'exemple des cercles représente un cas particulier d'un phénomène général qui se produit en géométrie algébrique. Comme d'habitude, tout devient beaucoup plus symétrique si on considère nos objets définit sur $\mathbb{C}$ plutôt que sur $\mathbb{R}$ et si on se place dans le contexte *projectif*, plutôt que le contexte *affine*.

Soit $\mathbb{P}^n$ l'espace projectif complexe n-dimensionnel, c'est à dire l'ensemble des classes d'équivalence des vecteurs $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, où on considère équivalents tout vecteurs sur la même droite passant par l'origine de

1. $\mathcal{N}$ est une surface obtenue par rotation d'une parabole sur le plan XZ atour de l'axe Z.

$\mathbb{C}^{n+1}$. Dit autrement, on considère l'action de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$ définie par multiplication scalaire et on prend le quotient :

$$\mathbb{P}^n = \frac{\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}}{\mathbb{C}^*}.$$

La classe d'équivalence de $(x_0, \ldots, x_n)$ est dénotée $(x_0 : \ldots : x_n) = x \in \mathbb{P}^n$. L'expression $x = (x_0 : \ldots : x_n)$ est dite *expression de x en cordonnées homogènes.*

Plus généralement, si V est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ on dénote avec

$$\mathbb{P}(V) = \frac{V \setminus \{0\}}{\mathbb{C}^*}$$

l'espace projectif associé.

EXERCICE. *Donner l'exemple d'une fonction $f = f(x)$ sur $\mathbb{P}^n$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, en terme des cordonnées homogènes de $x \in \mathbb{P}^n$. Est-t-elle bien définie ?*

Un hyperplan de $\mathbb{P}^n$ est définit par une équation de la forme

$$a_0 x_0 + \cdots + a_n x_n = 0.$$

On remarque que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, si on substitue a_i avec λa_i, l'équation ne change pas. Ainsi, un tel hyperplan est complètement déterminé par un point $(a_0 : \ldots : a_n) \in \mathbb{P}^n$. Soit $|\mathcal{O}(1)|$ l'espace qui paramétrise tout hyperplan de $\mathbb{P}^n$. Il s'agit d'un espace projectif de dimension n, selon la correspondance

$$a_0 x_0 + \cdots + a_n x_n = 0 \longleftrightarrow (a_0 : \ldots : a_n) \in \mathbb{P}^n \simeq |\mathcal{O}(1)|.$$

Donc, on dit que l'espace des hyperplan de $\mathbb{P}^n$ est de dimension n.

Plus généralement, une hypersurface de degré $d \in \mathbb{N}$ est définie par

$$F(x_0, \ldots, x_n) = 0,$$

où F est un polynôme homogène de degré d, c'est à dire

$$F(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, \ldots, x_n) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^*$$

Soit $|\mathcal{O}(d)|$ l'espace qui paramétrise toute hypersurfaces de degré d de $\mathbb{P}^n$.

EXERCICE. *Calculer la dimension de $|\mathcal{O}(d)|$.*

EXERCICE. *Calculer la dimension du sous-espace $\mathcal{S} \subset |\mathcal{O}(d)|$ donné par les hypersurfaces de degré d de $\mathbb{P}^n$ qui passent par le point $p = (1 : 0 : \ldots : 0)$.*

Par exemple, une conique dans le plan $\mathbb{P}^2$ est définie par

$$C : a_{00}x_0^2 + a_{01}x_0x_1 + a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0.$$

L'équation ne change pas si on la multiplie par $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Ainsi, on obtient une correspondance biunivoque {coniques de $\mathbb{P}^2$} $\longleftrightarrow$ {points de $\mathbb{P}^5$}, en associant à C le point de $\mathbb{P}^5$ qui correspond au vecteur des coefficients a_{ij} de C.

EXERCICE. *Décrire le lieu de $\mathbb{P}^5$ qui représente les coniques qui passent par $p \in \mathbb{P}^2$.*

EXERCICE. *Soit A la matrice symétrique $A = (a_{ij})$ associée à C. Alors C est irréductible*[2] *si et seulement si* $\det A \neq 0$. *Décrire le lieu $\Delta \subset \mathbb{P}^5$ qui correspond aux coniques réductibles. Décrire le sous-ensemble $V \subset \Delta$ qui correspond aux "double droites", i.e. aux coniques de la forme $(ax_0 + bx_1 + cx_2)^2 = 0$.*

2. une conique réductible est l'union de deux droites (pas nécessairement différentes).

§2. DÉFINITION D'APPLICATION RATIONNELLE

On dénotera l'espace vectoriel de polynômes homogènes de degré d avec

$$S_d = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d.$$

Une *variété projective* est un sous-ensemble X de $\mathbb{P}^n$ de la forme

$$X = \{f_1 = \dots = f_k = 0\} \subset \mathbb{P}^n \quad (f_i \in S_{d_i})$$

REMARQUE. On supposera toujours X *lisse* et *irréductible*.

EXEMPLE. Si $X = \{f = 0\}$, on dit que X est une *hypersurface* de $\mathbb{P}^n$. Par exemple, la *surface quadrique* dans l'espace est définie par

$$Q = \{x_0x_3 - x_1x_2 = 0\} \subset \mathbb{P}^3.$$

Peut-on définir des fonctions sur $\mathbb{P}^n$? Plus généralement, sur une variété X dans $\mathbb{P}^n$? Malheureusement, un polynôme homogène $f \in S_d$ ne définit pas une fonction. Par contre, si $f, g \in S_d$, alors

$$\frac{f(\lambda x)}{g(\lambda x)} = \frac{f(x)}{g(x)},$$

et donc f/g donne quelque chose de bien défini, pour (presque) tout $x \in X$, au moins si on suppose que g ne soit pas identiquement nulle sur X. Plus précisément, soit $I(X) :=$ {polynômes homogènes g tel que $g|_X \equiv 0$}.

Définition. Le *corps des fonctions rationnelles* de X est

$$\mathbb{C}(X) := \{f/g : \ f, g \in S_d, \ g \notin I(X)\}/\sim$$

où $f/g \sim f'/g'$ si et seulement si fg' et $f'g$ sont égales sur X, i.e. $fg' - f'g \in I(X)$. On dit que une fonction rationnelle $f \in \mathbb{C}(X)$ est *régulière dans* $x \in X$ si on peut écrire $f(x) = g(x)/h(x)$ avec $h(x) \neq 0$. Le *domaine* $\mathrm{dom}(f)$ est défini comme l'ensemble des points réguliers. Soit $U \subset X$ un ouvert. On dit que f est *régulière dans* U si on à $U \subset \mathrm{dom}(f)$. On dénotera

$$\mathcal{O}(U) = \{\text{fonctions regulieres dans } U\}.$$

On dit qu'on à une *application rationnelle* f de X vers $\mathbb{P}^m$ si pour tout $x \in X$ on peut écrire

$$f(x) = (f_0(x) : \dots : f_m(x)),$$

avec $f_i \in \mathbb{C}(X)$. L'ensemble des *points réguliers* est dénoté toujours avec $\mathrm{dom}(f)$, et définit par : $x \in \mathrm{dom}(f)$ si on peut écrire $f(x) = (f_0(x) : \dots : f_m(x))$, avec

(i) $x \in \mathrm{dom}(f_i)$, pour tout $i = 0, \dots, m$.

(ii) $f_j(x) \neq 0$, pour au moins un j.

L'image de f est définie par $\mathrm{Im}(f) = f(\mathrm{dom}\, f)$. Vu que f n'est pas toujours définie partout, on écrit $f : X \dashrightarrow \mathbb{P}^m$. Plus généralement, si $W \subset \mathbb{P}^m$ est une variété et $\mathrm{Im}(f) \subset W$ on à une application rationnelle de X vers W et on écrit

$$f : X \dashrightarrow W.$$

Si $\mathrm{dom}(f) = X$, on appel f un *morphisme* et on écrit $f : X \to W$.

EXEMPLES

(i) $f : \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$, $f(x_0 : x_1) = (x_0^3 : x_0^2x_1 : x_0x_1^2 : x_1^3)$. Tout les points de $\mathbb{P}^1$ sont réguliers pour f. Il s'agit donc d'un morphisme $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$.

(ii) $f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^5$, $f(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2)$. Est-elle définie partout ? L'image est appelée *surface de Veronese* $V \subset \mathbb{P}^5$.

(iii) $f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, $f(x_0 : x_1 : x_2) = (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1)$. Ce n'est pas défini pour trois points $a, b, c \in \mathbb{P}^2$. On observe que $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{P}^2}$. L'application f est appelée *transformation de Cremona.*

(iv) $f : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, $f(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = (x_1 : x_2 : x_3)$ est définie partout sauf en un point p. On peut voir que pour tout $q \neq p$, l'image $f(q)$ est le point d'intersection de la droite $\ell = \langle p, q \rangle$ avec le plan $\mathbb{P}^2 = \{x_0 = 0\} \subset \mathbb{P}^3$. L'application f est appelée *projection par* p *sur un hyperplan.*

(v) Soit f comme dans le dernier exemple et soit g la restriction de f à la quadrique $Q = \{x_0x_3 - x_1x_2 = 0\} \subset \mathbb{P}^3$. On obtient une application rationnelle $g : Q \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, qui est inversible : on peut inverser g par l'application rationnelle $h : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow Q$, $h(x_1 : x_2 : x_3) = (x_1x_2/x_3 : x_1 : x_2 : x_3) \in Q$. Ainsi, on dit que Q et $\mathbb{P}^2$ sont deux surfaces *birationnelles*.

§3. DIVISEURS

Soit $X \subset \mathbb{P}^n$ une variété (lisse, irréductible). En gros, une sous-variété de X de codimension 1 est un sous-ensemble $Y \subset X$ qui est localement le lieu des zéros d'une fonction régulière de X. Un peu plus précisément, pour quelque recouvrement $X = \bigcup U_i$, on veut $Y \cap U_i = \{f_i = 0\}$, avec $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$.

On est pas complètement satisfaits avec cette définition car, par exemple elle ne distingue pas la droite $x_0 = 0$ dans $\mathbb{P}^2$ par la double droite $x_0^2 = 0$.

Définition. Une *sous-variété de* X *de codimension 1* de X est un sous-ensemble $Y \subset X$ tel que pour quelque recouvrement $X = \bigcup U_i$, on à $Y \cap U_i = \{f_i = 0\}$, avec $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ qui satisfaisait la condition suivante :

$$\text{si } g \in \mathcal{O}(U_i) \text{ est telle que } g|_Y \equiv 0 \text{ alors } g/f_i \in \mathcal{O}(U_i).$$

Cette condition implique en particulier $f_i/f_j \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$ et, par symétrie, aussi $f_j/f_i \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$. Dit autrement, on à f_i/f_j régulier et sans zéros sur l'intersection $U_i \cap U_j$. On écrit donc $f_i/f_j \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$. Finalement, avec cette définition, une sous-variété Y de X est la donnée $Y = (U_i, f_i)$ d'une famille des fonctions régulières $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ satisfaisant la condition écrite dessous, qui implique en particulier la condition (plus faible)

$$\frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j).$$

On peut facilement généraliser cette situation.

Définition. Un *diviseur (de Cartier)* sur une variété X est la donnée d'une famille $D = (U_i, g_i)$, où $X = \bigcup U_i$ et $g_i \in \mathbb{C}(U_i)$ satisfaisants la condition

$$\frac{g_i}{g_j} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j).$$

– Si toute g_i sont régulières, i.e. $g_i \in \mathcal{O}(U_i)$, on appel D *effectif* et on écrit $D \geq 0$. C'est le cas le plus intéressant : on peut imaginer un diviseur effectif comme une somme, possiblement avec des multiplicités, de sous-variété de codimension 1 de X.
– Si la donnée des g_i est tout simplement celle d'une seule fonction rationnelle globale $g \in \mathbb{C}(X)$, i.e. $D = (U_i, g|_{U_i})$, on dit que D est un diviseur *principal* et on écrit $D = (g)$.
– Souvent, pour $D = (U_i, g_i)$ on va tout simplement écrire $D = (g_i)$.

En gros, on s'intéresse surtout aux diviseurs effectifs, mais voici la raison principale pour introduire le concept de diviseur : l'ensemble des diviseurs de X, qu'on va dénoter avec $\mathrm{Div}(X)$ a la structure d'un *groupe*. Si $D, D' \in \mathrm{Div}(X)$ on définit la somme $D + D'$ comme le diviseur qui à pour famille de fonctions le produit des celles de D et D', c'est à dire $D + D' = (g_i g_i')$. En particulier, on remarque que pour $D = (g_i)$ on à $-D = (1/g_i)$.

Les diviseurs principales forment un sous-groupe de $\mathrm{Div}(X)$. Comme on considère les diviseurs principales des objets "triviales" dans ce cadre, on les mets à la corbeille en prenant le quotient : on définit le *groupe de Picard* de X,

$$\mathrm{Pic}(X) := \mathrm{Div}(X)/\sim$$

où $D \sim D'$ si et seulement si $D - D'$ est un diviseurs principal, c'est à dire $D - D' = (g_i/g_i') = (g)$, pour quelque fonction rationnelle $g \in \mathbb{C}(X)$.

EXEMPLE. Regardons le cas de l'espace projectif $X = \mathbb{P}^n$. Soit Y une hypersurface de $\mathbb{P}^n$, donnée par le lieu des zéros d'un polynôme homogène $F \in S_d$. On à un recouvrement standard de $\mathbb{P}^n = \bigcup U_i$, avec $U_i = \{x_i \neq 0\} \simeq \mathbb{A}^n$. Alors

$$Y = (U_i, g_i) \in \mathrm{Div}(\mathbb{P}^n),$$

où les g_i sont les fonctions régulières $g_i = F/x_i^d \in \mathcal{O}(U_i)$.

Soit H un hyperplan de $\mathbb{P}^n$, définit par $\{L = 0\}$ avec $L \in S_1$. On observe :

$$Y - dH = (F/x_i^d) - (L^d/x_i^d) = (F/L).$$

$Y - dH$ est ainsi un diviseur principal, donné par la fonction rationnelle globale $F/L \in \mathbb{C}(\mathbb{P}^n)$. Donc $Y - dH \sim 0$, i.e. $Y \sim dH$. On en déduit que le groupe de Picard de $\mathbb{P}^n$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, et engendré par la classe de H, c'est à dire

$$\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[H].$$

§4. SYSTÈMES LINÉAIRES

Soit $D = (g_i)$ un diviseur sur une variété X (lisse, irréductible).

Définition. Le *système linéaire (complet)* associé à D est

$$|D| := \{\text{diviseurs effectifs } D' \text{ tels que } D' \sim D\}.$$

Définition. Une *section* de D est une fonction rationnelle $s \in \mathbb{C}(X)$ tel que

$$sg_i \in \mathcal{O}(U_i).$$

L'ensemble $\mathcal{L}(D)$ des sections de D est naturellement un espace vectoriel. Si $s \in \mathcal{L}(D)$ n'est pas la section zero, alors on peut lui associer un diviseur effectif $(s) + D \geq 0$. On va le dénoter avec

$$\operatorname{div}(s) := (s) + D.$$

Évidemment $\operatorname{div}(s) \in |D|$.

On peut maintenant observer que $|D|$ est un espace projectif :

(i) si $D' \in |D|$ alors $D' = (g_i') \sim (g_i) = D$. Donc $g_i' = sg_i$, pour quelque $s \in \mathbb{C}(X)$. Évidemment $s \in \mathcal{L}(D)$ et $\operatorname{div}(s, D) = D'$.

(ii) si $s, s' \in \mathcal{L}(D)$ alors $\operatorname{div}(s, D) \sim \operatorname{div}(s', D)$.

(iii) $\operatorname{div}(s, D) = \operatorname{div}(\lambda s, D)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Enfin, on en déduit que

$$|D| \simeq \mathbb{P}(\mathcal{L}(D)).$$

Connaître la dimension de $\mathcal{L}(D)$ devient évidemment un problème intéressant, dit *problème de Riemann-Roch*. Un résultat d'immense importance en géométrie algébrique c'est le *théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch*. Il s'agit d'une formule pour $\dim \mathcal{L}(D)$ en terme de propriétés cohomologiques de D.

Définition. Soit $D \in \operatorname{Div}(X)$. Un *système linéaire* est un sous-espace linéaire

$$\mathcal{S} \subset |D|.$$

C'est à dire, $\mathcal{S} = \mathbb{P}(V)$ pour quelque sous-espace vectoriel $V \subset \mathcal{L}(D)$.

Concrètement, si on choisi une base $s_0, \dots, s_k$ de $V \subset \mathcal{L}(D)$ on a

$$\mathcal{S} = \{D_a\}_{a \in \mathbb{P}^k},$$

où, pour $a = (a_0 : \dots : a_k)$, le diviseur $D_a \in \mathcal{S}$ s'écrit comme combinaison

$$D_a = a_0 \operatorname{div}(s_0) + \cdots + a_k \operatorname{div}(s_k).$$

EXEMPLE. Soit $X = \mathbb{P}^n$ et D une hypersurface de $\mathbb{P}^n$. Alors on sait $D \sim dH$, où $H = \mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ est un hyperplan. Soit $H = \{L = 0\}$, pour quelque $L \in S_1$. Alors $D = (g_i)$ avec $g_i = L^d/x_i^d$ dans le recouvrement standard. On remarque que effectivement

$$\frac{g_i}{g_j} = \left(\frac{x_j}{x_i}\right)^d \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j).$$

Considérons maintenant un polynôme $G \in S_d$. Alors la fonction rationnelle $s = G/L^d$ est une section de D, car $sg_i = G/x_i^d \in \mathcal{O}(U_i)$. On remarque aussi que $\operatorname{div}(s, D) = (G/x_i^d)$ est le diviseur de l'hypersurface définie par $G = 0$.

Finalement, on obtient une injection $S_d \hookrightarrow \mathcal{L}(D)$. Avec un peu d'effort on peut tout à fait démontrer qu'il s'agit d'un isomorphisme

$$S_d \simeq \mathcal{L}(D).$$

En particulier, on obtient $\dim \mathcal{L}(D) = \binom{n+d}{n}$ et

$$|D| \simeq \mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d).$$

§5. Systèmes linéaires et applications rationnelles

Soit $D = (g_i)$ un diviseur sur une variété X (lisse, irréductible). Supposons $\dim \mathcal{L}(D) > 0$. Alors $|D| = \mathbb{P}(\mathcal{L}(D)) = \mathbb{P}^N$. Soit $s_0, \dots, s_N$ une base de $\mathcal{L}(D)$. Alors on obtient une application rationnelle $f_D : X \dashrightarrow |D| = \mathbb{P}^n$, définie par

$$f(x) = (s_0(x) : \dots : s_N(x)).$$

Elle n'est pas définie dans le *lieu de base de* D, l'ensemble

$$\operatorname{Bs}|D| := \{x \in X : \ s(x) = 0 \ \text{ pour tout } s \in \mathcal{L}(D)\}.$$

Géométriquement, le lieu de base est l'intersection des toute sous-variété de codimension 1 définies par les diviseurs effectifs du système linéaire $|D|$.

En particulier, f_D est un morphisme si et seulement si $\operatorname{Bs}|D|$ est vide.

De façon similaire, si $\mathcal{S} \subset |D|$ est un système linéaire on obtient une application rationnelle $f_{\mathcal{S}}$, en choisissant une base de $W \subset \mathcal{L}(D)$, où $\mathcal{S} = \mathbb{P}(W)$.

Exemple. Soit $H = \mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ un hyperplan et $p \in \mathbb{P}^n$. Considérons

$$\mathcal{S} = \{\text{hyperplans par } p\} \subset |H|.$$

On voit bien que $\mathcal{S}$ est un hyperplan dans $|H|$. En fait, si $p = (p_0 : \dots : p_n)$ et si l'équation de H est donnée par $a_0x_0 + \cdots + a_nx_n = 0$ alors

$$\mathcal{S} \simeq \{(a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n : \ a_0p_0 + \cdots + a_np_n = 0\} \simeq \mathbb{P}^{n-1}.$$

Par exemple, soit $p = (1 : 0 : \dots : 0)$. Alors $\mathcal{S} = \{a_0 = 0\}$ et en terme de sections on peut choisir la base $\mathcal{S} = \mathbb{P}(\langle x_1, \dots, x_n \rangle)$. On obtient

$$f_{\mathcal{S}}(x_0 : \dots : x_n) = (x_1 : \dots : x_n),$$

application rationnelle qu'on appel *projection par* p *sur un hyperplan*.

Exemple. Dans $\mathbb{P}^2$, on considère le systèmes complet des coniques $|2H|$ et

$$\mathcal{S} = \{\text{coniques par } a \text{ et } b\} \subset |2H|,$$

où a et b sont deux point fixes de $\mathbb{P}^2$. De façon tout à fait similaire à l'exemple précédent, la condition de passer par un point est équivalente à une condition linéaire, i.e. à "couper" avec un hyperplan dans $|2H| \simeq \mathbb{P}^5$. Donc

$$\dim \mathcal{S} = \dim |2H| - 2 = 3.$$

Alors $f_{\mathcal{S}} : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ et l'image de f est une quadrique de $\mathbb{P}^3$. Par exemple, si $a = (1 : 0 : 0)$ et $b = (0 : 1 : 0)$ on peut choisir la base

$$\mathcal{L}(2H) = \langle x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2 \rangle.$$

Alors $\mathcal{S} = \mathbb{P}(\langle x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2, x_2^2 \rangle)$ et on obtient

$$f_{\mathcal{S}}(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2 : x_2^2).$$

et son image est la quadrique $Q = \{z_0z_3 - z_1z_2\} \subset \mathbb{P}^3$.

EXEMPLE. On fixe trois points pas alignés $a, b, c \in \mathbb{P}^2$ et on considère

$$\mathcal{S} = \{\text{coniques par } a, b \text{ et } c\} \subset |2H|,$$

Alors $\dim \mathcal{S} = 2$ et $f_{\mathcal{S}}$ est une transformation de Cremona $f_{\mathcal{S}} : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, qui n'est pas définie pour a, b et c. Par exemple, si a et b sont comme dans le dernier exemple et $c = (0:0:1)$ on obtient l'involution de $\mathbb{P}^2$ définie par

$$f_{\mathcal{S}}(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2) = (\tfrac{1}{x_2} : \tfrac{1}{x_1} : \tfrac{1}{x_0}).$$

Que se passe-t-il si on choisi a, b, c sont sur une droite ?

EXEMPLE. On fixe 8 points p_i en position générale[3] dans $\mathbb{P}^2$ et on considère

$$\mathcal{S} = \{\text{cubiques de } \mathbb{P}^2 \text{ par les } p_i\} \subset |3H|.$$

Alors $\dim \mathcal{S} = \dim |3H| - 8 = 1$ et $\mathcal{S} = \{C_{\lambda,\mu}\}_{(\lambda:\mu)\in\mathbb{P}^1}$ est un *pinceau* engendré par deux cubiques, i.e. chaque cubique de $\mathcal{S}$ s'écrit comme combinaison

$$C_{\lambda,\mu} = \lambda C_0 + \mu C_\infty.$$

Par conséquent, si p est le neuvième point d'intersection de C_0 et C_∞, toutes les $C_{\lambda,\mu}$ doivent aussi passer par p. On à obtenu un résultat classique :

THEOREM. *Si une cubique C passe par 8 points d'intersections de deux cubiques C' et C'' alors C passe aussi par le neuvième point d'intersection de C' et C''.*

3. Ils ne sont pas trois sur une droite, ni six sur une conique.