

# Microeconomia

## Lezione 2: Preferenze e Curve di Indifferenza

Marco Rosso

Università di Bologna

A.A. 2025–2026

13 febbraio 2026

# Obiettivi della lezione

Dopo questa lezione sarete in grado di:

1. **Comprendere** i quattro assiomi delle preferenze razionali
2. **Distinguere** utilità ordinale vs cardinale
3. **Rappresentare graficamente** le preferenze con curve di indifferenza
4. **Calcolare** il Saggio Marginale di Sostituzione (MRS)
5. **Applicare** derivate parziali a funzioni di utilità

## Focus della Lezione

Oggi ci concentriamo SOLO su **cosa vuole il consumatore** (preferenze).  
La prossima settimana: **cosa può permettersi** (vincolo) e come trova l'**ottimo**.

# Il Problema del Consumatore

## Domanda centrale:

*Come un consumatore razionale sceglie tra diverse alternative, dato che ha risorse limitate?*

## Per rispondere dobbiamo capire:

1. **Cosa vuole** il consumatore → **Preferenze**
2. **Cosa può permettersi** → Vincolo di bilancio
3. **Come combina i due** → Scelta ottima

## Preferenze

Oggi studiamo solo le **preferenze**: cosa piace al consumatore, come lo rappresentiamo matematicamente, e come misuriamo il trade-off soggettivo tra beni.

# Preferenze: Notazione Base

**Paniere di consumo:** combinazione di quantità di beni

- Paniere A =  $(x_A, y_A)$ :  $x_A$  unità del bene 1,  $y_A$  unità del bene 2
- Paniere B =  $(x_B, y_B)$

**Relazioni di preferenza:**

$A \succ B$  "Preferisco strettamente A a B"

$A \sim B$  "Sono indifferente tra A e B" (stessa soddisfazione)

$A \succeq B$  "A è almeno buono quanto B" (preferisco A o sono indifferente)

**Esempio:**

- A = (4 pizze, 2 birre)
- B = (2 pizze, 3 birre)
- Se amo la pizza:  $A \succ B$
- Se cerco equilibrio: potrei avere  $A \sim B$

# Assiomi delle Preferenze Razionali

Per modellare matematicamente le scelte, assumiamo preferenze **razionali**:

## I Quattro Assiomi

1. **Completezza**: posso sempre confrontare due panieri
2. **Transitività**: le preferenze sono coerenti
3. **Monotonicità**: più è meglio (non sazietà)
4. **Convessità**: preferisco panieri bilanciati

## Nota

Questi sono **assunzioni semplificatrici**, non verità universali. Permettono di costruire modelli matematici maneggevoli.

# Assioma 1: Completezza

## Definizione

Per ogni coppia di panieri A e B, il consumatore è in grado di confrontarli.

**Formalmente:**  $A \succ B$ , oppure  $B \succ A$ , oppure  $A \sim B$

### Interpretazione:

- Non esistono "non so" o "non posso decidere"
- Il consumatore sa sempre cosa preferisce (o se è indifferente)
- Anche tra alternative mai provate

### Esempi:

- Pizza vs hamburger: posso decidere anche se non ho mai provato l'hamburger
- Studiare vs Netflix: posso confrontare anche se dipende dall'umore

**Possibile violazione:** "Non so cosa preferisco tra economia e ingegneria"

→ Ma alla fine *devo* scegliere, quindi rivelo una preferenza

## Assioma 2: Transitività

### Definizione

Se preferisco A a B, e B a C, allora preferisco A a C.

**Formalmente:** Se  $A \succ B$  e  $B \succ C$ , allora  $A \succ C$

**Interpretazione:**

- Le preferenze sono **coerenti**
- Non ci sono contraddizioni o cicli
- Fondamentale per esistenza di una funzione di utilità

**Esempio valido (transitivo):**

- Mela  $\succ$  Banana
- Banana  $\succ$  Arancia
- Quindi: Mela  $\succ$  Arancia

**Esempio NON transitivo (irrazionale):**

- Mela  $\succ$  Banana
- Banana  $\succ$  Arancia
- Arancia  $\succ$  Mela  $\rightarrow$  **Ciclo! Contraddizione!**

## Transitività: Perché è importante

**Conseguenza della violazione:** Senza transitività, il consumatore può essere "manipolato" in un ciclo infinito di scambi.

### Esempio (Money Pump):

Supponiamo preferenze cicliche: Mela  $\succ$  Banana  $\succ$  Arancia  $\succ$  Mela

1. Parti con 1 Arancia
2. Ti offro: "Scambia Arancia con Mela + paga €0.10"  $\rightarrow$  Accetti (Mela  $\succ$  Arancia)
3. Ti offro: "Scambia Mela con Banana + paga €0.10"  $\rightarrow$  Accetti (Banana  $\succ$  Mela)
4. Ti offro: "Scambia Banana con Arancia + paga €0.10"  $\rightarrow$  Accetti (Arancia  $\succ$  Banana)
5. **Risultato:** Sei tornato all'Arancia, ma hai pagato €0.30!
6. Ripeto all'infinito  $\rightarrow$  diventi povero!

### Riassunto

La transitività protegge il consumatore da comportamenti auto-dannosi.



## Assioma 3: Monotonicità (Non Sazietà)

### Definizione

Più è meglio. Se un paniere ha almeno la stessa quantità di tutti i beni, e di almeno uno ne ha di più, allora è preferito.

**Formalmente:** Se  $x_A \geq x_B$  e  $y_A \geq y_B$ , con almeno una disuguaglianza stretta, allora  $A \succ B$

### Esempio:

- $A = (3 \text{ pizze}, 4 \text{ birre})$
- $B = (3 \text{ pizze}, 2 \text{ birre})$
- $A \succ B$  perché ha più birre (a parità di pizze)

### Interpretazione economica:

- Non c'è sazietà completa
- I beni sono sempre desiderabili

**Implicazione grafica:** Le curve di indifferenza hanno pendenza negativa!

# Monotonicità: Discussione

## Quando viene violata?

### 1. Sazietà vera:

- "10 gelati mi fanno male" → troppo di un bene riduce utilità
- Soluzione: lavoriamo entro intervalli "ragionevoli"

### 2. Mali invece di beni:

- Inquinamento, rumore, tempo di commuting
- Soluzione: ridefiniamo come "riduzione del male" = bene (es. aria pulita invece di inquinamento)

### 3. Costi di smaltimento:

- "Non voglio 100 kg di zucchine" → devo pagarle e smaltirle
- Soluzione: distinguiamo tra "acquisizione" e "possessione"

## In Pratica

La monotonicità è ragionevole per la maggior parte dei beni di consumo in quantità normali.

## Assioma 4: Convessità

### Definizione

I consumatori preferiscono panieri "bilanciati" a panieri estremi.

Formalmente: se  $A \sim B$ , allora qualsiasi media ponderata  $(1 - t)A + tB \succeq A$  (con  $t \in [0, 1]$ )

### Esempio:

- $A = (10 \text{ pizze}, 0 \text{ birre})$
- $B = (0 \text{ pizze}, 10 \text{ birre})$
- Supponiamo  $A \sim B$  (stesso livello di soddisfazione)
- Allora  $C = (5 \text{ pizze}, 5 \text{ birre}) \succeq A$  e  $C \succeq B$

### Intuizione:

- **Varietà** è preferita a specializzazione estrema
- La 10<sup>a</sup> pizza di seguito vale meno della 1<sup>a</sup> (*utilità marginale decrescente*)
- Disposizione decrescente a sostituire (vedremo con MRS)

**Implicazione grafica:** Curve di indifferenza **convesse verso l'origine**

# Convessità: Discussione

## Quando viene violata?

### 1. Sostituti perfetti:

- Matite rosse vs matite blu  $\rightarrow$  mi interessa solo il totale
- $(5 \text{ rosse}, 5 \text{ blu}) \sim (10 \text{ rosse}, 0 \text{ blu}) \sim (0 \text{ rosse}, 10 \text{ blu})$
- **Preferenze lineari** (non convesse!)

### 2. Complementi perfetti:

- Scarpe sinistre vs destre  $\rightarrow$  servono in coppia (1:1)
- $(10 \text{ destre}, 5 \text{ sinistre}) \sim (5 \text{ destre}, 5 \text{ sinistre}) \rightarrow$  eccesso inutile
- **Preferenze "a L"** (non strettamente convesse!)

### 3. Gusti estremi:

- "Amo solo la pizza, odio le birre"  $\rightarrow$  preferisco  $(10 \text{ pizze}, 0 \text{ birre})$
- Raro ma possibile

## In Pratica

La convessità è ragionevole per la maggior parte dei beni "normali" con sostituibilità imperfetta.

# Dalla Preferenza alla Funzione di Utilità

**Idea:** Invece di confrontare ogni coppia di panieri (infiniti confronti!), possiamo assegnare un **numero** a ogni paniere?

## Definizione: Funzione di Utilità

Una **funzione di utilità**  $U(x, y)$  assegna un numero reale a ogni paniere  $(x, y)$ , in modo che:

$$A \succ B \iff U(A) > U(B)$$

$$A \sim B \iff U(A) = U(B)$$

## Interpretazione:

- $U(\cdot)$  è una **rappresentazione numerica** delle preferenze
- Panieri con utilità maggiore sono preferiti
- Il numero assoluto NON ha significato intrinseco (utilità **ordinale**)

## Esempio:

- $U(A) = 10, U(B) = 5 \rightarrow$  sappiamo solo che  $A \succ B$
- NON possiamo dire "A è due volte meglio di B"!

# Utilità Ordinale vs Cardinale

## Utilità Ordinale (quella che usiamo!)

- Importa solo l'**ordine**
- $U(A) = 10, U(B) = 5$   
stesso info di  
 $U(A) = 100, U(B) = 2$
- Posso applicare trasformazioni monotone crescenti
- Es:  $V = 2U + 3, V = U^2, V = \ln U$

### Proprietà:

- Preserva le preferenze
- Non confronti interpersonali
- Sufficiente per teoria del consumatore

Useremo sempre **utilità ordinale**: conta solo l'ordine delle preferenze, non i valori assoluti.

## Utilità Cardinale (NON usiamo)

- I numeri hanno significato assoluto
- $U(A) = 10, U(B) = 5$   
significa "A è due volte meglio"
- Solo trasformazioni affini:  
 $V = aU + b$  (con  $a > 0$ )
- Es: scala Celsius/Fahrenheit

### Uso:

- Teoria delle scelte in incertezza (utilità attesa)
- Confronti interpersonali (welfare)
- Non necessaria per scelte senza incertezza

# Trasformazioni Monotone

## Proprietà

Se  $U(x, y)$  rappresenta le preferenze, anche  $V(x, y) = f(U(x, y))$  le rappresenta, purché  $f$  sia **strettamente crescente**.

### Esempio:

Funzione originale:  $U(x, y) = x \cdot y$

Trasformazioni valide (preservano ordine):

- $V_1(x, y) = 2U = 2xy$  ✓
- $V_2(x, y) = U + 10 = xy + 10$  ✓
- $V_3(x, y) = \ln U = \ln(xy) = \ln x + \ln y$  ✓
- $V_4(x, y) = U^{1/2} = \sqrt{xy}$  ✓

Trasformazione NON valida:

- $V_5(x, y) = -U = -xy$  (inverte l'ordine!)

**Implicazione:** Possiamo scegliere la forma più conveniente per i calcoli!

# Tre Funzioni di Utilità Fondamentali

Nel corso useremo principalmente questi tre tipi:

1. **Cobb-Douglas** (preferenze "standard")

$$U(x, y) = x^{\alpha} \cdot y^{\beta} \quad \text{oppure} \quad U(x, y) = \alpha \ln x + \beta \ln y$$

2. **Sostituti Perfetti** (sostituibilità 1:1)

$$U(x, y) = ax + by$$

3. **Complementi Perfetti** (proporzioni fisse)

$$U(x, y) = \min\{ax, by\}$$



# Tipo 1: Cobb-Douglas (1)

## Forma Generale

$$U(x, y) = x^\alpha \cdot y^\beta \quad (\alpha, \beta > 0)$$

oppure versione logaritmica (equivalente!):

$$U(x, y) = \alpha \ln x + \beta \ln y$$

### Parametri:

- $\alpha, \beta$  = "pesi" dei beni (importanza relativa)
- Se  $\alpha = \beta$ : i due beni hanno uguale importanza
- Se  $\alpha > \beta$ : il bene  $x$  è più importante

## Tipo 1: Cobb-Douglas (2)

### Esempi:

- $U(x, y) = x \cdot y = x^1 \cdot y^1$  (pesi uguali)
- $U(x, y) = \sqrt{xy} = x^{1/2} \cdot y^{1/2}$  (equivalente al precedente!)
- $U(x, y) = x^{0.7} \cdot y^{0.3}$  (preferenza per  $x$ )

### Proprietà:

- Rappresenta preferenze "standard" (convesse, monotone)
- Molto usata per semplicità matematica
- Curve di indifferenza = iperboli convesse

## Tipo 2: Sostituti Perfetti

### Forma Generale

$$U(x, y) = ax + by \quad (a, b > 0)$$

### Interpretazione:

- I beni sono **perfetti sostituti**
- Il consumatore è disposto a scambiarli in rapporto costante  $a/b$
- Solo il "totale ponderato" conta

## Tipo 2: Sostituti Perfetti (2)

### Esempi:

- $U(x, y) = x + y$  (matite rosse vs blu)
- $U(x, y) = 2x + 3y$  (€2 valgono quanto €3? No! Ma possono essere tassi di sostituzione)
- Coca-Cola vs Pepsi (per alcuni consumatori)

### Proprietà:

- Curve di indifferenza = **rette parallele**
- **NON** **convesse** (piatte)
- Tasso sostituzione costante (MRS costante)

## Tipo 3: Complementi Perfetti

### Forma Generale

$$U(x, y) = \min\{ax, by\} \quad (a, b > 0)$$

### Interpretazione:

- I beni sono **perfetti complementi**
- Vanno consumati in proporzioni fisse  $a : b$
- Eccesso di un bene NON aumenta utilità

## Tipo 3: Complementi Perfetti (2)

### Esempi:

- $U(x, y) = \min\{x, y\}$  (scarpe sinistre e destre, rapporto 1:1)
- $U(x, y) = \min\{x, 2y\}$  (caffè e zucchero, rapporto 1:2)
- Auto e benzina (nel breve periodo)

### Proprietà:

- Curve di indifferenza a forma di **L**
- Vertice sulla retta  $ax = by$  (proporzione ottima)
- Tratti orizzontali/verticali (eccesso inutile)

## Confronto: I Tre Tipi

Tipo	Funzione	Curve Indiff.	Esempio
Cobb-Douglas	$x^\alpha y^\beta$	Iperboli convesse	Cibo vs vestiario
Sostituti perfetti	$ax + by$	Rette parallele	Matite rosse vs blu
Complementi perfetti	$\min\{ax, by\}$	Forma a "L"	Scarpe dx vs sx

**Domanda:** Quali preferenze sono "realistiche"?

**Risposta:**

- **Cobb-Douglas:** La più comune per beni "normali" (cibo, vestiti, entertainment)
- **Sostituti:** Rara (pochi beni sono perfetti sostituti)
- **Complementi:** Rara nella forma estrema, ma utile per alcuni beni (hardware/software, caffè/zucchero)

In pratica: **Cobb-Douglas è il nostro "riferimento"** per la maggior parte degli esempi.

# Riepilogo

## 1. Assiomi delle Preferenze Razionali

- Completezza  $\rightarrow$  posso sempre confrontare
- Transitività  $\rightarrow$  coerenza (no cicli)
- Monotonicità  $\rightarrow$  più è meglio
- Convessità  $\rightarrow$  preferisco panieri bilanciati

## 2. Funzione di Utilità

- Rappresentazione numerica delle preferenze
- Ordinale (solo ordine conta)
- Trasformazioni monotone preservano preferenze

## 3. Tre Tipi Fondamentali

- Cobb-Douglas:  $x^\alpha y^\beta$  (standard)
- Sostituti perfetti:  $ax + by$
- Complementi perfetti:  $\min\{ax, by\}$



# Rappresentazione Grafica delle Preferenze

**Problema:** Le preferenze sono astratte. Come visualizzarle?

**Soluzione:** Curve di indifferenza

## Definizione

Una **curva di indifferenza** è l'insieme di tutti i panieri che danno al consumatore lo stesso livello di utilità.

**Formalmente:** Curva di livello  $\bar{U}$ :

$$CI_{\bar{U}} = \{(x, y) : U(x, y) = \bar{U}\}$$

**Interpretazione:**

- Tutti i punti sulla stessa curva: consumatore **indifferente**
- Spostarsi lungo la curva: cambio composizione, utilità costante
- Spostarsi tra curve diverse: cambio livello di utilità

# Proprietà delle Curve di Indifferenza

**Quattro proprietà fondamentali:**

1. **Pendenza negativa** (da monotonicità)
2. **Non si intersecano mai** (da coerenza)
3. **Curve più lontane dall'origine = utilità maggiore** (da monotonicità)
4. **Convesse verso l'origine** (da convessità)

## Proprietà 1: Pendenza Negativa (1)

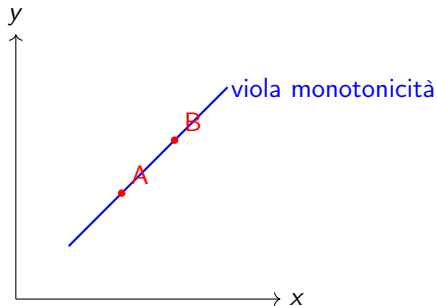
**Affermazione:** Le curve di indifferenza hanno pendenza negativa.

**Dimostrazione (intuizione):**

- Parto da un punto A sulla curva di indifferenza
- Se **aumento**  $x$  (più del bene 1)  $\rightarrow$  utilità aumenta (monotonicità)
- Per restare sulla stessa curva (utilità costante), devo **diminuire**  $y$
- Quindi: quando  $x \uparrow$ , allora  $y \downarrow \rightarrow$  pendenza negativa  $\checkmark$

## Proprietà 1: Pendenza Negativa (2)

**Controesempio:** Pendenza positiva violerebbe monotonicità



Se pendenza +,  $A \sim B$  ma B ha più di tutto!

## Proprietà 2: Non si Intersecano

**Affermazione:** Due curve di indifferenza non possono mai intersecarsi.

**Dimostrazione per assurdo:**

1. Supponiamo due curve ( $U_1 < U_2$ ) si intersechino in punto A
2. Punto B sulla curva  $U_2$  (diverso da A):  $U(B) = U_2$
3. Punto C sulla curva  $U_1$  (diverso da A):  $U(C) = U_1$
4. Da intersezione:  $U(A) = U_1$  (perché A su curva 1)
5. Ma anche:  $U(A) = U_2$  (perché A su curva 2)
6. Quindi:  $U_1 = U_2 \rightarrow$  **Contraddizione!**

### Conclusione

L'intersezione violerebbe la definizione stessa di curva di indifferenza: ogni punto può appartenere a un solo livello di utilità.

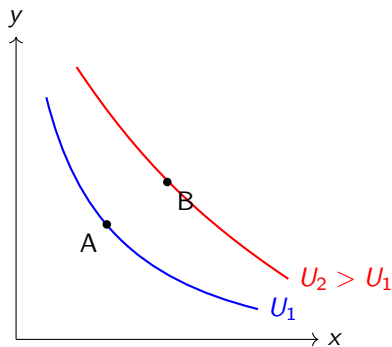
## Proprietà 3: Lontananza dall'Origine (1)

**Affermazione:** Curve più lontane dall'origine rappresentano utilità maggiore.

**Dimostrazione:**

- Punto A su curva interna (vicina a origine)
- Punto B su curva esterna (lontana da origine)
- Per costruzione: B ha più di almeno un bene (a parità dell'altro o più di entrambi)
- Per monotonicità:  $B \succ A$
- Quindi:  $U(B) > U(A)$  ✓

### Proprietà 3: Lontananza dall'Origine (2)



## Proprietà 4: Convessità (1)

**Affermazione:** Le curve di indifferenza sono convesse verso l'origine (per preferenze convesse).

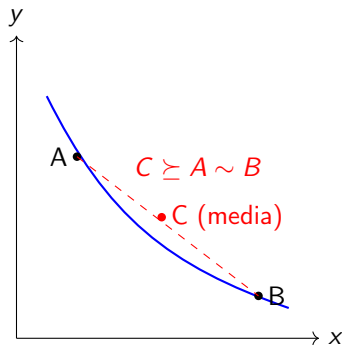
### Interpretazione geometrica:

- Prendi due punti A e B sulla stessa curva di indifferenza
- Il segmento che li congiunge (medie ponderate) sta **sopra** la curva
- Cioè: panieri "medi" danno utilità maggiore o uguale



## Proprietà 4: Convessità (2)

**Equivalentemente:** La pendenza (in valore assoluto) **diminuisce** muovendosi verso destra.



**Collegamento:** Questo riflette utilità marginale decrescente (vedremo con MRS).

# Mappa di Indifferenza

## Definizione

Una **mappa di indifferenza** è l'insieme di tutte le curve di indifferenza di un consumatore.

**Analogia:** Come le curve di livello su una mappa topografica

- Ogni curva = stessa "altitudine" (livello di utilità)
- Curve più alte = maggiore utilità
- Non si intersecano
- Direzione di preferenza crescente: verso Nord-Est

**Proprietà:**

- Infinite curve (una per ogni livello  $\bar{U}$ )
- Riempiono tutto il quadrante positivo  $(x, y) \geq 0$
- Rappresentano **completamente** le preferenze del consumatore

**Implicazione:** Se conosciamo la mappa di indifferenza, conosciamo tutte le preferenze del consumatore!

## Esempio 1: Cobb-Douglas (1)

**Funzione:**  $U(x, y) = \sqrt{x \cdot y} = x^{1/2}y^{1/2}$

**Equazione curva di indifferenza livello  $\bar{U}$ :**

$$\sqrt{x \cdot y} = \bar{U} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\bar{U}^2}{x}$$

**Caratteristiche:**

- **Iperboli** decrescenti
- Convesse verso origine ✓
- Asintoti sugli assi (mai toccano assi) → non voglio zero di nessun bene
- $\bar{U}$  maggiore → curva più lontana

## Esempio 1: Cobb-Douglas (2)

### Punti numerici:

- $\bar{U} = 2$ :  $y = 4/x \rightarrow$  punti (1, 4), (2, 2), (4, 1)
- $\bar{U} = 4$ :  $y = 16/x \rightarrow$  punti (2, 8), (4, 4), (8, 2)
- $\bar{U} = 6$ :  $y = 36/x \rightarrow$  punti (4, 9), (6, 6), (9, 4)

**Interpretazione:** Preferenze "standard" con sostituibilità imperfetta.

## Esempio 2: Sostituti Perfetti (1)

**Funzione:**  $U(x, y) = x + y$

**Equazione curva di indifferenza livello  $\bar{U}$ :**

$$x + y = \bar{U} \quad \Rightarrow \quad y = \bar{U} - x$$

**Caratteristiche:**

- **Rette** parallele con pendenza  $-1$
- **NON convesse** (piatte)
- $\bar{U}$  maggiore  $\rightarrow$  retta più lontana da origine
- Intercette:  $(0, \bar{U})$  e  $(\bar{U}, 0)$

## Esempio 2: Sostituti Perfetti (2)

### Punti numerici:

- $\bar{U} = 5$ :  $y = 5 - x \rightarrow$  punti  $(0, 5)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(5, 0)$
- $\bar{U} = 10$ :  $y = 10 - x \rightarrow$  punti  $(0, 10)$ ,  $(5, 5)$ ,  $(10, 0)$

**Interpretazione:** Il consumatore è disposto a scambiare  $x$  e  $y$  in rapporto 1:1 costante. Solo il totale conta:  $(5, 0) \sim (0, 5) \sim (2, 3)$  se  $U = 5$ .

## Esempio 3: Complementi Perfetti (1)

**Funzione:**  $U(x, y) = \min\{x, y\}$

**Equazione curva di indifferenza livello  $\bar{U}$ :**

$$\min\{x, y\} = \bar{U}$$

**Tratti:**

- Tratto verticale:  $x = \bar{U}$  per  $y \geq \bar{U}$  (eccesso di  $y$ )
- Tratto orizzontale:  $y = \bar{U}$  per  $x \geq \bar{U}$  (eccesso di  $x$ )
- Vertice:  $x = y = \bar{U}$  (proporzione ottima 1:1)

**Caratteristiche:**

- Forma a "L" (angolo retto)
- Vertice sulla bisettrice  $x = y$
- NON differenziabile al vertice

## Esempio 3: Complementi Perfetti (2)

### Punti numerici:

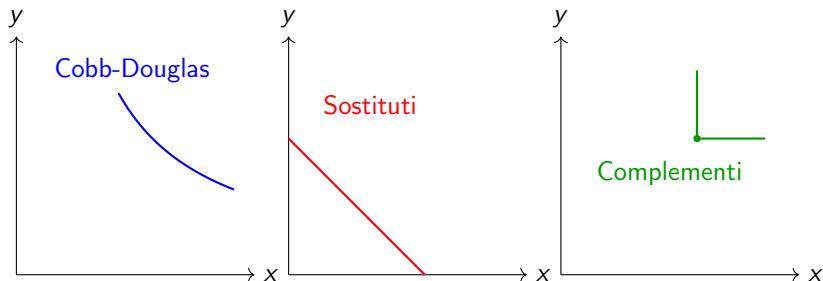
- $\bar{U} = 3$ : L con vertice in (3, 3)
- $\bar{U} = 5$ : L con vertice in (5, 5)
- Nota: (5, 10) e (10, 5) danno entrambe  $U = 5$  (eccesso inutile)

**Interpretazione:** I beni vanno in coppia. Eccesso di uno non aumenta utilità.



# Confronto Grafico

Curve di indifferenza per  $\bar{U} = 2$ :



Osservazioni:

- **Cobb-Douglas:** sostituibilità *decrescente* (curvatura)
- **Sostituti:** sostituibilità *costante* (retta)
- **Complementi:** nessuna sostituibilità fuori dal vertice (kink)

# Riepilogo

## 1. Curve di Indifferenza

- Rappresentazione grafica delle preferenze
- Insieme di panieri con stessa utilità
- Mappa di indifferenza = tutte le curve

## 2. Quattro Proprietà

- Pendenza negativa (monotonicità)
- Non si intersecano (coerenza)
- Lontananza = utilità maggiore (monotonicità)
- Convessità (preferenza per panieri bilanciati)

## 3. Tre Forme Grafiche

- Cobb-Douglas  $\rightarrow$  iperboli convesse
- Sostituti perfetti  $\rightarrow$  rette parallele
- Complementi perfetti  $\rightarrow$  forma a L

# Misurare il Trade-off

**Domanda:** Come misuriamo quanto un consumatore è disposto a sostituire un bene con l'altro?

**Risposta:** Con il **Saggio Marginale di Sostituzione (MRS)**.

## Definizione Intuitiva

Il **MRS** è la quantità di bene  $y$  che il consumatore è disposto a cedere per ottenere 1 unità aggiuntiva di bene  $x$ , rimanendo sulla stessa curva di indifferenza (utilità costante).

### Interpretazione:

- Misura il **trade-off soggettivo** tra i beni
- Quanto "vale"  $x$  in termini di  $y$  per il consumatore
- Dipende solo dalle preferenze (soggettivo)
- Varia lungo la curva (tranne sostituti perfetti)

**Esempio:**  $MRS = 2$  significa "Sono disposto a cedere 2 birre per avere 1 pizza in più"

# MRS come Pendenza della Curva

**Interpretazione geometrica:** Il MRS è (il valore assoluto della) **pendenza della curva di indifferenza**.

## Definizione Formale (geometrica)

$$MRS = - \frac{dy}{dx} \Big|_{U=\text{const}}$$

**Nota bene:** Il segno negativo serve perché la pendenza è negativa, ma MRS lo esprimiamo positivo

### Perché ha senso?

- Se aumento  $x$  di  $\Delta x$ , devo diminuire  $y$  di  $\Delta y$  per restare sulla curva
- Il rapporto  $-\Delta y / \Delta x$  misura esattamente "quanto  $y$  cedo per 1 unità di  $x$ "
- Nel limite:  $-dy/dx$

## Ripasso: Derivate Parziali

**Funzione di due variabili:**  $U(x, y)$

**Derivata parziale rispetto a  $x$ :**

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U(x + \Delta x, y) - U(x, y)}{\Delta x}$$

**Interpretazione:** Quanto varia  $U$  se aumento  $x$  di poco, tenendo  $y$  fissato.

**Analogamente per  $y$ :**

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{U(x, y + \Delta y) - U(x, y)}{\Delta y}$$

**Notazione:**

- $\frac{\partial U}{\partial x}$  = derivata parziale rispetto a  $x$
- $U_x$  = notazione abbreviata (useremo questa)
- Analogamente:  $U_y = \frac{\partial U}{\partial y}$

# Utilità Marginali

## Definizione

L'**utilità marginale** del bene  $x$  è la derivata parziale di  $U$  rispetto a  $x$ :

$$MU_x = \frac{\partial U}{\partial x}$$

Analogamente per  $y$ :

$$MU_y = \frac{\partial U}{\partial y}$$

## Interpretazione economica:

- $MU_x$  = beneficio (aumento di utilità) di consumare 1 unità in più di  $x$ , tenendo  $y$  fisso
- $MU_y$  = beneficio di consumare 1 unità in più di  $y$ , tenendo  $x$  fisso

**Proprietà tipica:**  $MU_x, MU_y > 0$  (monotonicità: più è meglio)

**Utilità marginale decrescente:** Spesso  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} < 0 \rightarrow$  La 10<sup>a</sup> pizza vale meno della 1<sup>a</sup>

# MRS come Rapporto di Utilità Marginali (1)

**Teorema fondamentale:**

Formula del MRS

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{\partial U / \partial x}{\partial U / \partial y}$$

**Dimostrazione (intuitiva):** Lungo la curva di indifferenza:  $dU = 0$  (utilità costante)

Dalla formula del differenziale totale:

$$dU = MU_x \cdot dx + MU_y \cdot dy$$

## MRS come Rapporto di Utilità Marginali

Imponiamo  $dU = 0$ :

$$MU_x \cdot dx + MU_y \cdot dy = 0$$

$$MU_x \cdot dx = -MU_y \cdot dy$$

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{MU_x}{MU_y}$$

Quindi:

$$MRS = -\frac{dy}{dx} \Big|_{U=\text{const}} = \frac{MU_x}{MU_y} \quad \checkmark$$



## Interpretazione Economica del MRS

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y}$$

### Cosa significa?

- **Numeratore** ( $MU_x$ ): Quanto guadagno (in utilità) se consumo 1 unità in più di  $x$
- **Denominatore** ( $MU_y$ ): Quanto guadagno se consumo 1 unità in più di  $y$
- **Rapporto**: Quante unità di  $y$  devo cedere per compensare 1 unità di  $x$

### Esempio numerico:

- $MU_x = 4$  (1 pizza in più dà 4 "util" extra)
- $MU_y = 2$  (1 birra in più dà 2 "util" extra)
- $MRS = 4/2 = 2$

**Interpretazione:** "1 pizza vale quanto 2 birre per me" → Sono disposto a cedere 2 birre per avere 1 pizza

*Nota: I valori assoluti di MU non contano (utilità ordinale!), solo il rapporto.*

## Calcolo MRS: Cobb-Douglas (1)

**Funzione:**  $U(x, y) = x^\alpha \cdot y^\beta$

**Step 1: Calcola utilità marginali**

$$MU_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \alpha x^{\alpha-1} y^\beta$$

$$MU_y = \frac{\partial U}{\partial y} = \beta x^\alpha y^{\beta-1}$$

**Step 2: Calcola MRS**

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{\alpha x^{\alpha-1} y^\beta}{\beta x^\alpha y^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y}{x}$$

## Calcolo MRS: Cobb-Douglas (2)

**Caso speciale:**  $U(x, y) = \sqrt{xy} = x^{1/2}y^{1/2} \rightarrow \alpha = \beta = 1/2$

$$MRS = \frac{1/2}{1/2} \cdot \frac{y}{x} = \frac{y}{x}$$

**Esempio numerico:** Nel punto  $(x, y) = (2, 8)$ :

$$MRS = \frac{8}{2} = 4$$

**Interpretazione:** In quel punto, il consumatore è disposto a cedere 4 birre per 1 pizza.

## Calcolo MRS: Sostituti Perfetti (1)

**Funzione:**  $U(x, y) = ax + by$

**Step 1: Calcola utilità marginali**

$$MU_x = \frac{\partial U}{\partial x} = a$$

$$MU_y = \frac{\partial U}{\partial y} = b$$

**Step 2: Calcola MRS**

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{a}{b} \quad (\text{costante!})$$

## Calcolo MRS: Sostituti Perfetti (2)

**Esempio:**  $U(x, y) = x + y \rightarrow a = b = 1$

$$MRS = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{ovunque}$$

### Interpretazione:

- Il tasso di sostituzione è **costante** (non dipende da  $(x, y)$ )
- Il consumatore è sempre disposto a scambiare in rapporto  $a : b$
- Coerente con curve di indifferenza lineari (pendenza costante)

# Calcolo MRS: Complementi Perfetti

**Funzione:**  $U(x, y) = \min\{x, y\}$

**Problema:** La funzione min non è differenziabile al "kink" (vertice)!

**Analisi per casi:**

1. **Tratto verticale** ( $y > x$ ):  
Aumentare  $y$  non aumenta utilità ( $U$  dipende solo da  $x$ )  $\rightarrow MU_y = 0$ , quindi  $MRS = MU_x/0 = \infty$
2. **Tratto orizzontale** ( $x > y$ ):  
Aumentare  $x$  non aumenta utilità ( $U$  dipende solo da  $y$ )  $\rightarrow MU_x = 0$ , quindi  $MRS = 0/MU_y = 0$
3. **Vertice** ( $x = y$ ):  
MRS **non definito** (curva non differenziabile al kink)

**Interpretazione:**

- Fuori dal vertice: nessuna sostituibilità ( $MRS = 0$  o  $\infty$ )
- Al vertice: proporzione perfetta, piccoli scambi accettabili

# MRS Decrescente

**Osservazione empirica:** Per preferenze convesse (Cobb-Douglas), il MRS **diminuisce** lungo la curva di indifferenza (muovendosi verso destra).

**Perché?** Utilità marginale decrescente:

- Punto A: (1 pizza, 10 birre)  $\rightarrow$  ho poco  $x$ , molto  $y$   
 $MU_x$  alto (valuto molto la pizza),  $MU_y$  basso (birre abbondanti)  $\rightarrow MRS = MU_x/MU_y$  **alto**
- Punto B: (5 pizze, 2 birre)  $\rightarrow$  ho molto  $x$ , poco  $y$   
 $MU_x$  basso (pizze abbondanti),  $MU_y$  alto (valuto molto le birre)  $\rightarrow MRS = MU_x/MU_y$  **basso**

**Esempio numerico (Cobb-Douglas  $MRS = y/x$ ):**

- A = (1, 10):  $MRS = 10/1 = 10$  (darei 10 birre per 1 pizza)
- B = (5, 2):  $MRS = 2/5 = 0.4$  (darei 0.4 birre per 1 pizza)

**Collegamento:** MRS decrescente  $\leftrightarrow$  curve convesse  $\leftrightarrow$  utilità marginale decrescente

## Esercizio 1: Calcolo MRS

**Funzione di utilità:**  $U(x, y) = 2x^{1/2} + y$

**Domanda:** Calcola MRS nel punto  $(x, y) = (4, 5)$

**Soluzione:**

**Step 1:** Utilità marginali

$$MU_x = \frac{\partial U}{\partial x} = 2 \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$MU_y = \frac{\partial U}{\partial y} = 1$$

**Step 2:** MRS generale

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{1/\sqrt{x}}{1} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

**Step 3:** Valuta in  $(4, 5)$

$$MRS(4, 5) = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

**Interpretazione:** Nel punto  $(4, 5)$ , il consumatore è disposto a cedere 0.5 unità di  $y$  per ottenere 1 unità di  $x$ .



## Esercizio 2: MRS e Convessità

**Funzione:**  $U(x, y) = x^{0.6}y^{0.4}$

**Domanda 1:** Calcola MRS in funzione di  $x$  e  $y$ .

**Soluzione:**

$$MU_x = 0.6x^{-0.4}y^{0.4}, \quad MU_y = 0.4x^{0.6}y^{-0.6}$$

$$MRS = \frac{0.6x^{-0.4}y^{0.4}}{0.4x^{0.6}y^{-0.6}} = \frac{0.6}{0.4} \cdot \frac{y}{x} = 1.5 \cdot \frac{y}{x}$$

**Domanda 2:** Verifica che MRS è decrescente lungo la curva.

**Soluzione:**  $MRS = 1.5 \cdot y/x$

- Lungo una curva di indifferenza: quando  $x \uparrow$ , allora  $y \downarrow$  (pendenza negativa)
- Quindi:  $y/x \downarrow \rightarrow MRS \downarrow \checkmark$

**Conclusione:** Le preferenze sono convesse (MRS decrescente).

## Esercizio 3: Confronto MRS (1)

**Due consumatori con preferenze diverse:**

- Consumatore A:  $U_A(x, y) = x \cdot y$
- Consumatore B:  $U_B(x, y) = 2x + y$

**Domanda:** Chi ha MRS maggiore nel punto (2, 4)?

**Soluzione:**

**Consumatore A (Cobb-Douglas):**

$$MRS_A = \frac{y}{x} = \frac{4}{2} = 2$$

**Consumatore B (sostituti perfetti):**

$$MRS_B = \frac{2}{1} = 2$$

**Risposta:** In questo punto, entrambi hanno lo stesso MRS=2!

## Esercizio 3: Confronto MRS (2)

### Differenza chiave:

- Per A, l'MRS **dipende dal punto**: lungo la stessa indifferenza, diminuisce man mano che  $x$  cresce (sostituibilità decrescente).
- Per B, l'MRS è **costante ovunque** ( $=2$ ), indipendentemente dal punto scelto.

**Controesempio:** Se si spostano a  $(4,2)$  sulla stessa indifferenza:

- A:  $MRS_A = 2/4 = 0.5$  (ora vuole meno  $y$  per  $x$ )
- B:  $MRS_B = 2/1 = 2$  (non cambia mai)

## Esercizio 4: Disegno Curva da MRS

**Dato:**  $MRS = 3$  costante ovunque.

**Domanda 1:** Che tipo di preferenze?

**Risposta:** Sostituti perfetti (MRS costante)

**Domanda 2:** Scrivi una possibile funzione di utilità.

**Risposta:**  $U(x, y) = 3x + y$  (Verifica:  $MU_x = 3$ ,  $MU_y = 1$ , quindi  $MRS = 3/1 = 3$  ✓)

**Domanda 3:** Disegna la curva di indifferenza per  $U = 6$ .

**Risposta:**  $3x + y = 6 \rightarrow y = 6 - 3x$

Retta con intercette:  $(0, 6)$  e  $(2, 0)$ , pendenza  $-3$ .

## Esercizio 5: Verifica Numerica

**Funzione:**  $U(x, y) = \ln x + 2 \ln y$

**Domanda:** Calcola MRS in (1, 1) e (4, 2). È decrescente?

**Soluzione:**

$$MU_x = \frac{1}{x}, \quad MU_y = \frac{2}{y}$$
$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{1/x}{2/y} = \frac{y}{2x}$$

**Punto (1, 1):**

$$MRS(1, 1) = \frac{1}{2 \cdot 1} = 0.5$$

**Punto (4, 2):**

$$MRS(4, 2) = \frac{2}{2 \cdot 4} = 0.25$$

**Risposta:** Sì, MRS diminuisce (da 0.5 a 0.25) muovendosi verso destra sulla curva → preferenze convesse ✓

# Riepilogo Generale

## Parte 1: Assiomi e Funzioni di Utilità

- 4 assiomi razionalità (completezza, transitività, monotonicità, convessità)
- Utilità ordinale (solo ordine conta)
- 3 tipi: Cobb-Douglas, sostituti, complementi

## Parte 2: Curve di Indifferenza

- Rappresentazione grafica delle preferenze
- 4 proprietà (pendenza negativa, non intersecanti, lontananza, convessità)
- Forme grafiche: iperboli, rette, "L"

## Parte 3: Saggio Marginale di Sostituzione

- $MRS = \text{pendenza curva} = MU_x / MU_y$
- Misura trade-off soggettivo tra beni
- MRS decrescente convessità
- Calcolo per diverse funzioni

## Cosa dovremmo sapere fare dopo questa lezione

- ✓ Riconoscere se le preferenze rispettano gli assiomi
- ✓ Scrivere funzioni di utilità per diversi tipi di preferenze
- ✓ Disegnare curve di indifferenza
- ✓ Calcolare MRS data  $U(x, y)$
- ✓ Interpretare MRS economicamente
- ✓ Verificare convessità (MRS decrescente)

## Esercizi Facoltativi per Casa

1. Data  $U(x, y) = x^{0.3}y^{0.7}$ , calcola MRS in  $(9, 4)$ .
2. Data  $U(x, y) = 3x + 5y$ , qual è MRS? Che tipo di preferenze?
3. Se  $MRS = 4$  nel punto  $(2, y)$  e  $U(x, y) = \sqrt{xy}$ , trova  $y$ .
4. Verifica che  $U(x, y) = xy$  e  $V(x, y) = 2xy + 10$  rappresentano le stesse preferenze.
5. Disegna qualitativamente le curve di indifferenza per:
  - a)  $U = x + 2y$
  - b)  $U = \min\{2x, y\}$
  - c)  $U = x^{0.5}y^{0.5}$