APLICACIÓN DEL ANÁLISIS DE FOURIER A LA ECONOMÍA

Marcos Jiménez Larroy

5 de diciembre de 2023

Métodos Matemáticos III

Abstract

En este trabajo, se utilizará el análisis de Fourier (en concreto el algoritmo computacional de la transformada rápida de Fourier (FFT)) a dos de los valores más importantes en la economía actual, aunque tengan naturalezas diferentes: el índice Standard & Poor's 500 (S&P500) y el precio del oro. Para ello será necesario hacer un tratado inicial a los datos originales. Además, se comprobará que, dependiendo de este tratado inicial, la eficacia de la FFT variará, y se estudiará como obtener resultados fiables a través de este método. Todas las gráficas y representaciones son de elaboración propia, utilizando Python y el paquete 'matplotlib' y 'scipy'.

Método de Fourier. La transformada discreta de Fourier (DFT)

Joseph Fourier (1768-1830) demostró que cualquier función periódica podía ser descompuesta en una suma (finita o infinita) de senos y cosenos con unas determinadas frecuencias. La transformada de Fourier permite encontrar dichas frecuencias y estudiarlas en el espacio de frecuencias, en vez del espacio de tiempos, donde suele estar definida la función con la que se trabaja inicialmente.

Esta suma de senos y cosenos, con sus respectivos coeficientes, se puede expresar en notación compleja, que será la que utilicemos en este trabajo. Si queremos, por tanto, representar una función f(t) utilizando la serie de Fourier, obtendremos el siguiente resultado [1]:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i\omega_n t} \tag{1}$$

Donde ω_n son las diferentes frecuencias posibles, múltiplos de la frecuencia correspondiente al periodo de la función f(t). Conociendo estos coeficientes, podemos pasar del espacio de tiempo al espacio de frecuencias y obtener información de la función que antes no podíamos. La operación con la que los conseguimos es la transformada de Fourier de la función:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega_n t}dt \tag{2}$$

Sin embargo, lo que se utiliza a la hora de analizar datos de manera computacional, es la conocida como transformada discreta de Fourier (DFT), ya que los datos con los que trabajamos están discretizados. La DFT, entonces, transforma una secuencia de datos (x_t) en el espacio de tiempo (de longitud N) en una secuencia de datos (Xk, en general complejos) en el espectro de frecuencias (también de longitud N) de la siguiente manera [2,3]:

$$X_k = \sum_{t=0}^{N-1} x_t \cdot e^{-\frac{2\pi i}{N}tk} \tag{3}$$

Estos datos obtenidos, que luego se representarán utilizando el módulo, ya que son números complejos, serán los que utilizaremos para el estudio de ambos valores (S&P500 y precio del oro). Para realizar esta operación, se realizará la transformada rápida de Fourier, que es el algoritmo computacional que calcula la DFT de manera rápida y es un algoritmo que viene incluido en los paquetes utilizados en este trabajo ('scipy' de Python).

Antes de continuar, es importante destacar ciertos aspectos sobre la transformada rápida de Fourier (FFT a partir de ahora). En primer lugar, viendo la expresión (3), podemos observar que la FFT solamente va a capturar los coeficientes correspondientes a unas frecuencias muy determinadas, que vendrán dadas en múltiplos enteros de la que llamaremos frecuencia principal, que será el inverso del periodo temporal completo que cubramos con nuestros datos. Este periodo total será la división entre el número de datos que tenemos (N) y la frecuencia de medida (sr), que en nuestro caso será de una medida por semana. Es importante señalar que ambas series de datos que vamos a utilizar no son periódicas[1], por lo que no existe realmente una 'frecuencia principal', pero ayudará a la hora de cuantizar el resto de las frecuencias que se detecten.

Esto quiere decir que si en la señal analizada hay una frecuencia importante, pero no coincide con ninguno de estos valores, no se va a detectar (aunque probablemente se detecte la más cercana a ella).

Otro factor muy importante, en especial en el análisis de los datos que se van a utilizar, es que los datos estén equiespaciados en el tiempo (fácil de cumplir) y que oscilen en torno al cero con una amplitud aproximadamente constante. Esto no lo cumplen inicialmente los valores que se van a estudiar, por lo que será necesario hacer un tratamiento de datos anterior a la transformada. Los métodos que utilizaremos para conseguir estas propiedades se conocen como métodos de 'detrending' o de eliminación de tendencias, y se comentarán en la sección posterior.

Por último, para ilustrar el funcionamiento de la FFT de manera simple, se muestra un ejemplo realizado con Python, con una señal dada por:

$$f(t) = sen(6\pi t) + sen(2\pi t)$$

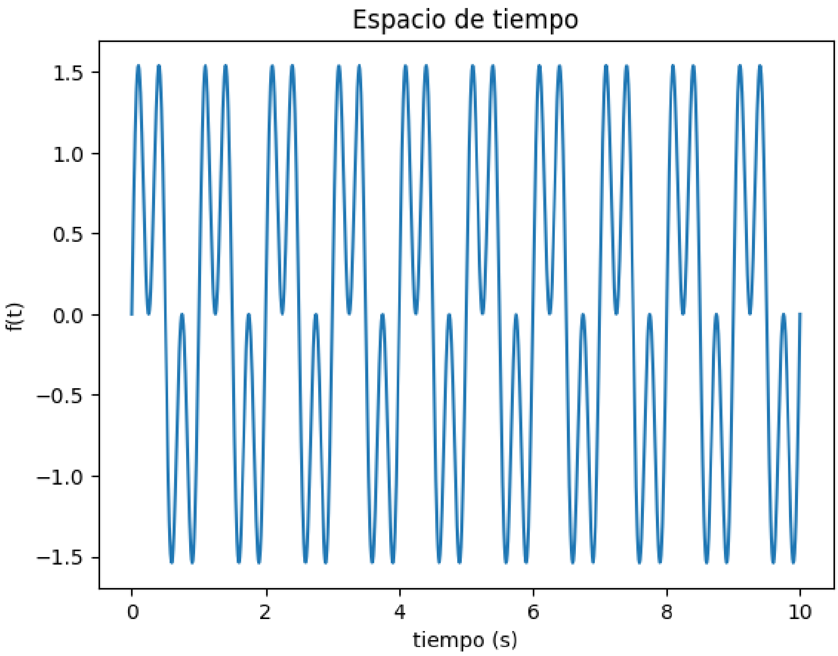

Figura 1.- Señal formada por dos senos de frecuencia 3Hz y 1Hz

[1] Aunque en la definición de la transformada de Fourier y sus diversas formas se indique que la función f(t) ha de ser periódica, muchas veces se aplica a funciones no periódicas, considerando o bien que el periodo de esta es infinito (mucho mayor que el tiempo cubierto) o que justo el tiempo cubierto corresponde a un periodo [4].

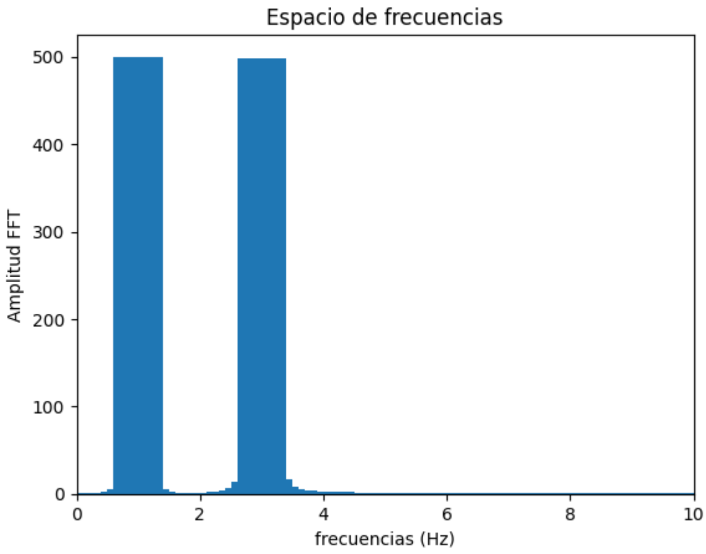

Figura 2.- Espacio de frecuencias de la señal anterior

Como esperábamos, obtenemos dos picos muy marcados para los valores de 3Hz y 1Hz; frecuencias de las dos señales sumadas en el ejemplo. Vemos igualmente unas pequeñas colas alrededor de estas, ya que el algoritmo no es perfecto y siempre detectará rastros de frecuencias cercanas.

Series temporales y métodos de 'detrending'

Tanto el índice S&P500 como el valor del precio del oro son series temporales, definidas como una sucesión de medidas ordenada en el tiempo. Esto no quiere decir que el tiempo sea como tal una variable de la medida tomada, sino una manera de ordenar los datos. El objetivo principal a la hora de estudiar series temporales es el de identificar ciertos comportamientos en el pasado que permitan conocer el posible comportamiento de la serie en un futuro (en especial cuando se trata de series relacionadas con la economía).

Un modelo generalmente aceptado para representar una serie temporal es dividirla en cuatro (o tres) componentes diferentes: la tendencia (T), la componente cíclica y estacional (S) (que nosotros trataremos como una sola, aunque pueda ser dividida en dos) y una componente aleatoria (ε), de tal modo que el valor de la serie temporal en un tiempo genérico 't' (Y_t) se pueda describir como [3]:

$$Y_t = T_t + S_t + \varepsilon_t \tag{4}$$

Dos características importantes de las series son la media y la autocorrelación de sus datos. La primera sigue la definición estadística habitual, mientras que la segunda se expresa de la siguiente manera:

$$\mu = E[Y] \tag{5}$$

$$\gamma_{t,k} = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-k} - \mu)] \tag{6}$$

Donde μ representa la media se la serie y E[ ]; el operador 'valor esperado'. Según sea el comportamiento general de la serie (en concreto estos parámetros), se pueden clasificar en diversos tipos. El tipo de serie temporal que nosotros vamos a buscar obtener es una serie estacionaria. Esta se define como aquella cuya media se mantiene constante en el tiempo y la autocorrelación de sus datos no depende del momento escogido, sino únicamente de la diferencia de estos.

Estas series, como vimos, son de gran importancia ya que son las únicas que cumplen los requisitos necesarios para poder aplicar en ellas la transformada rápida de Fourier. La diferencia principal entre una serie estacionaria y las series que nosotros trataremos es la tendencia, ya que ambos valores presentan una clara. Para eliminarlas, se utilizan los métodos de eliminación de tendencia o 'detrending' [1,3,5]. Nosotros utilizaremos tres métodos comunes en el análisis de series temporales, con el objetivo principal de comprobar cómo afecta cada uno de ellos a la FFT posterior.

El primero que utilizaremos será restar una tendencia calculada con ajuste lineal. Para ello, representaremos el logaritmo de los valores y hallaremos la recta que mejor se aproxime a ellos. Una vez hecho esto, restaremos dicha resta a los datos. Las oscilaciones que resten podrán ser entonces analizadas con la FFT en principio.

Como segundo método, utilizaremos las medias móviles lineales (SMA[2]). Estas consisten en una media de los datos correspondientes a un determinado número de periodos anterior. De ahí el adjetivo de 'móvil', ya que, por cada nuevo dato considerado, deshecha el más alejado considerado en la operación anterior. Concretamente, nosotros utilizaremos una media móvil de 10 periodos (10 semanas en nuestra división temporal).

El tercer y último método utilizado será el de diferencias consecutivas [6], donde transformaremos cada dato en la resta entre él mismo y el anterior. Haremos esta diferencia entre los logaritmos de los datos, buscando que la amplitud no varíe mucho con el tiempo.

Además, los dos primeros métodos estarán normalizados al precio marcado en cada instante. De esta manera, los tres métodos de 'detrending' señalarán de alguna manera el cambio relativo de valor para un determinado tiempo con respecto a una media o al anterior periodo.

Ciclos económicos

A lo largo de los años, diversos economistas y matemáticos han tratado de hallar los ciclos que siguen los mercados económicos. Sin embargo, esta tarea no es fácil, ya que los valores de un determinado índice o acción siguen una distribución mucho más complicada que una suma de funciones sinusoidales. La estructura general buscada para un ciclo económico está basada en cinco fases:

- Recuperación: Fase en la que la economía crece ligeramente.
- Expansión: Fase donde el crecimiento económico es máximo.

[2] Standard Moving Average en inglés

- Auge: Fase con el valor máximo de las acciones o índices, pero donde se empiezan a ver señales de sobrecompra o agotamiento.
- Recesión: Caída de la economía de manera generalizada, con bajada del consumo y desplome de los valores.
- Depresión: Punto más bajo de la economía.

Lo complicado de hallar estos ciclos económicos es que, al haber ciclos de duraciones diferentes, la fase en la que se encuentra uno no tiene por qué corresponder con la fase de otro, por lo que el patrón es más difícil de visualizar. A continuación, se hará una breve presentación de los ciclos más reconocidos actualmente [7,8].

Ciclo de Kondratieff

Esta onda o ciclo del mercado tiene una supuesta duración de entre 40 y 60 años. Es la oscilación más larga propuesta hasta la fecha (debido también a que no existen datos infinitos). No obstante, pese a ser sobre el papel la más importante, pocas veces se ha medido de verdad, y su credibilidad no es alta.

Ciclo de Juglar

Estos ciclos, de duración aproximada de una década, son quizá los más medidos y los que más influyen; ya que el ciclo anterior es demasiado largo.

Ciclo de Kitchin

Se trata de un ciclo de entre 40 y 59 meses; basado esta vez en la acción de las propias empresas, más allá de otros aspectos más globales. Estos ciclos han sido contrastados muchas veces, y se cree que también estén relacionados con las elecciones presidenciales de EE. UU. (cada 48 meses).

Ciclos más cortos

Existen muchos otros ciclos, más o menos documentados, que son los más cortos. Estos pueden tener una duración de entre pocos meses hasta incluso algunos días. Sin embargo, debido al ruido de los índices en general son difíciles de predecir. No obstante, la transformada rápida de Fourier podría ser capaz de distinguir estas pequeñas componentes cíclicas. Esto mismo es lo que vamos a buscar. Los más importantes son los de tres o cuatro meses.

Metodología

Para obtener los resultados acerca del funcionamiento de la FFT aplicada a series temporales con tendencia (como son el S&P500 y el oro), seguiremos el siguiente procedimiento. En primer lugar, comprobaremos que los datos sean correctos y calcularemos las medias móviles de los mismos para diferentes periodos. Posteriormente, aplicaremos los tres métodos de eliminación de tendencia comentados anteriormente.

Sobre estos resultados obtenidos, aplicaremos la FFT, con el objetivo de comprobar cómo afecta cada método al espectro de frecuencias medido, y poder discutir qué método se adapta mejor a la naturaleza de la FFT. Primero se mostrarán los tres resultados y luego se comentarán a la vez, para entender mejor sus diferencias y similitudes.

<u>**FFT al índice Standard & Poor’s 500 (S&P500)**</u>

Los datos que tenemos del índice son los siguientes:

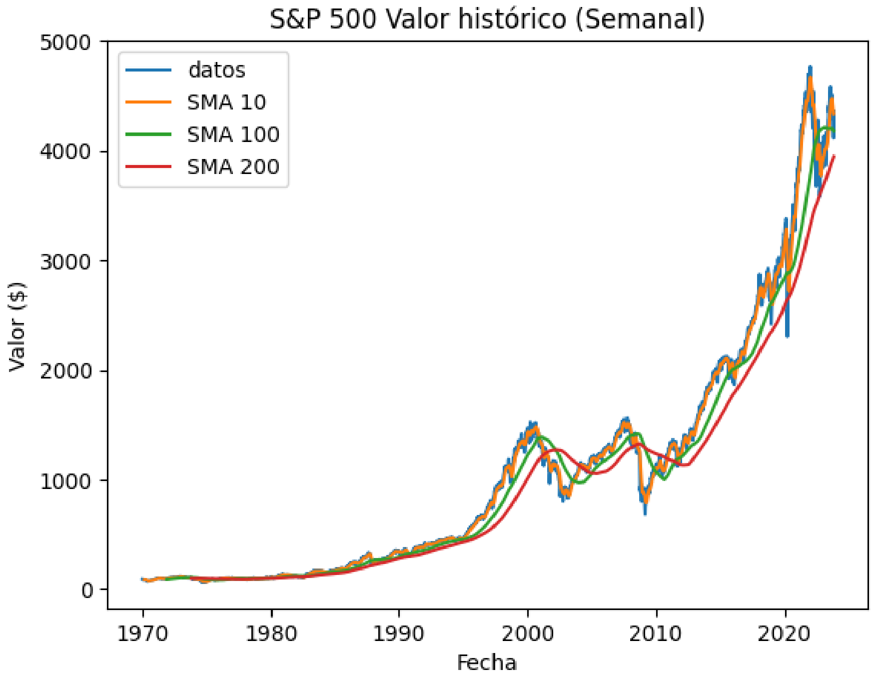

Figura 3.- Valor histórico del S&P500 con tres medias móviles (10, 100 y 200 semanas). Fuente: Investing.com [9].

Observamos que los datos cuentan con una clara tendencia alcista en el tiempo, por lo que será totalmente necesario utilizar los métodos de eliminación de tendencia. El primero será eliminar la tendencia lineal del logaritmo de los valores. Obtenemos el siguiente ajuste y los valores después de restar la tendencia (residuos):

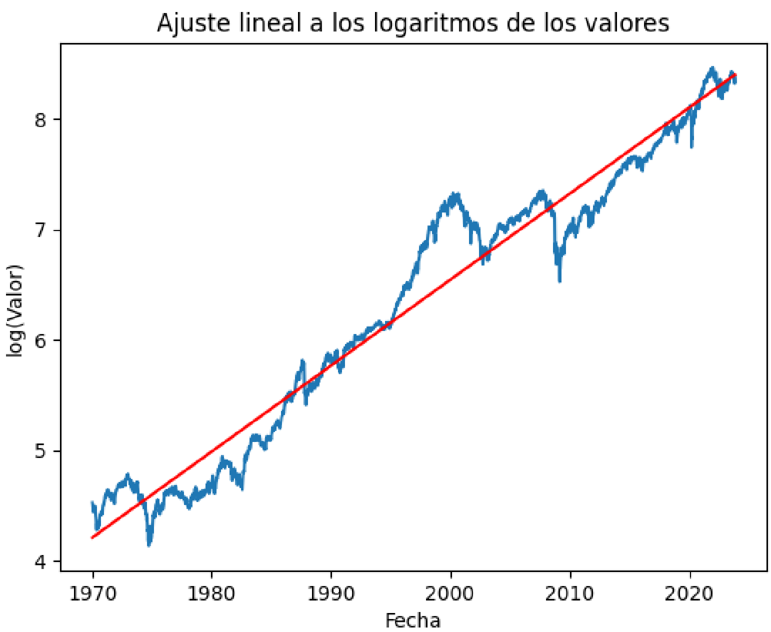

Figura 4.- Ajuste lineal para log(Valor)

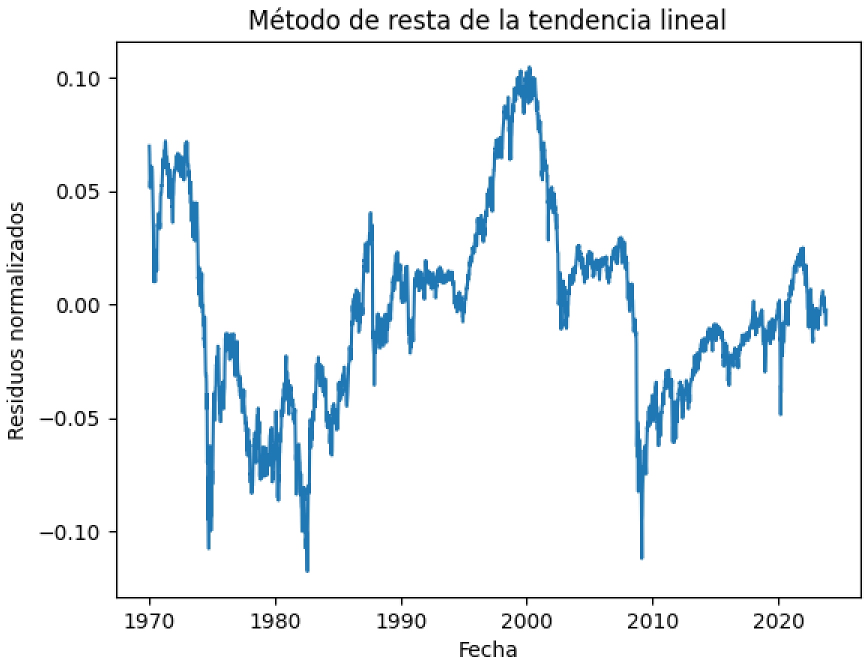

Figura 5.- Datos tras la resta de la tendencia lineal

Una vez tenemos la tendencia eliminada, hacemos la FFT de nuestros datos:

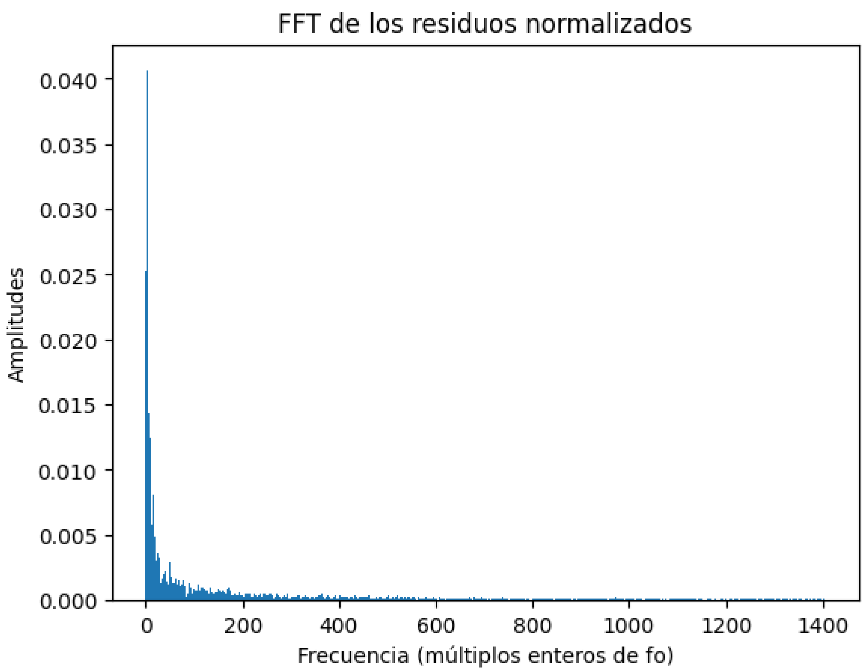

Figura 6.- FFT de los residuos normalizados

Como se comentó en las primeras secciones, las frecuencias que puede distinguir la FFT son múltiplos de una determinada frecuencia, que nosotros llamaremos f_o. Teniendo en cuenta que tenemos datos semanales y un total de 2809 valores, el valor de f_o será:

$$f_o = \frac{1}{T_{total}} = \frac{sr}{N} = \frac{1}{2809 * (3600 * 24 * 7)} = 5,88 \cdot 10^{-10}\, Hz = 3,56 \cdot 10^{-4}\, sem^{-1}$$

Utilizando ahora el segundo método (resta de la SMA de 10 semanas normalizada) obtenemos los siguientes datos y FFT:

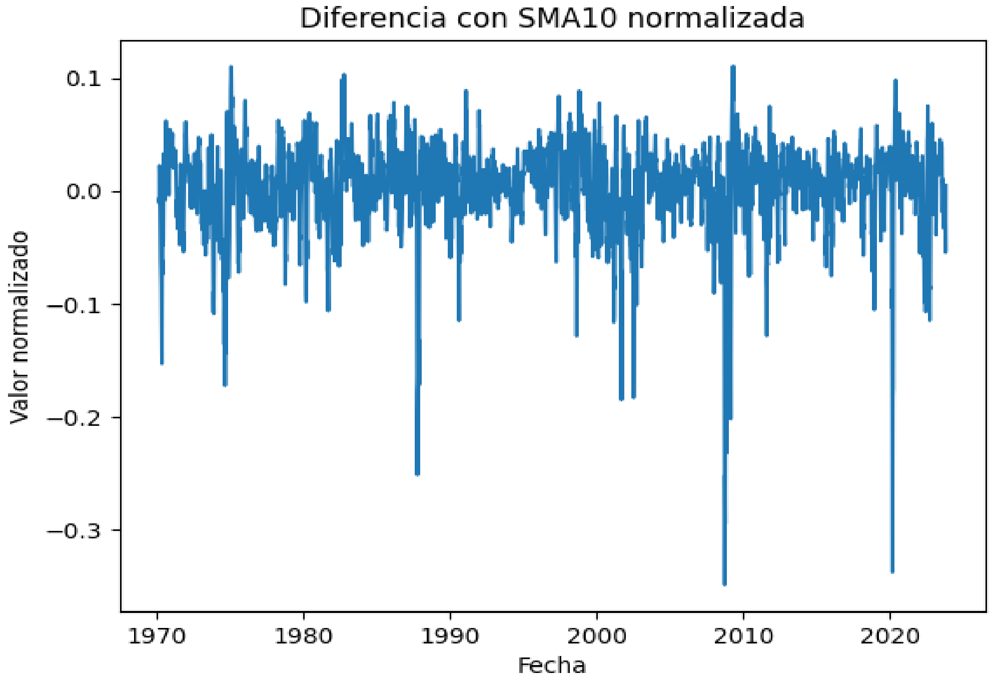

Figura 7.- Diferencia de los valores con la SMA 10 normalizados

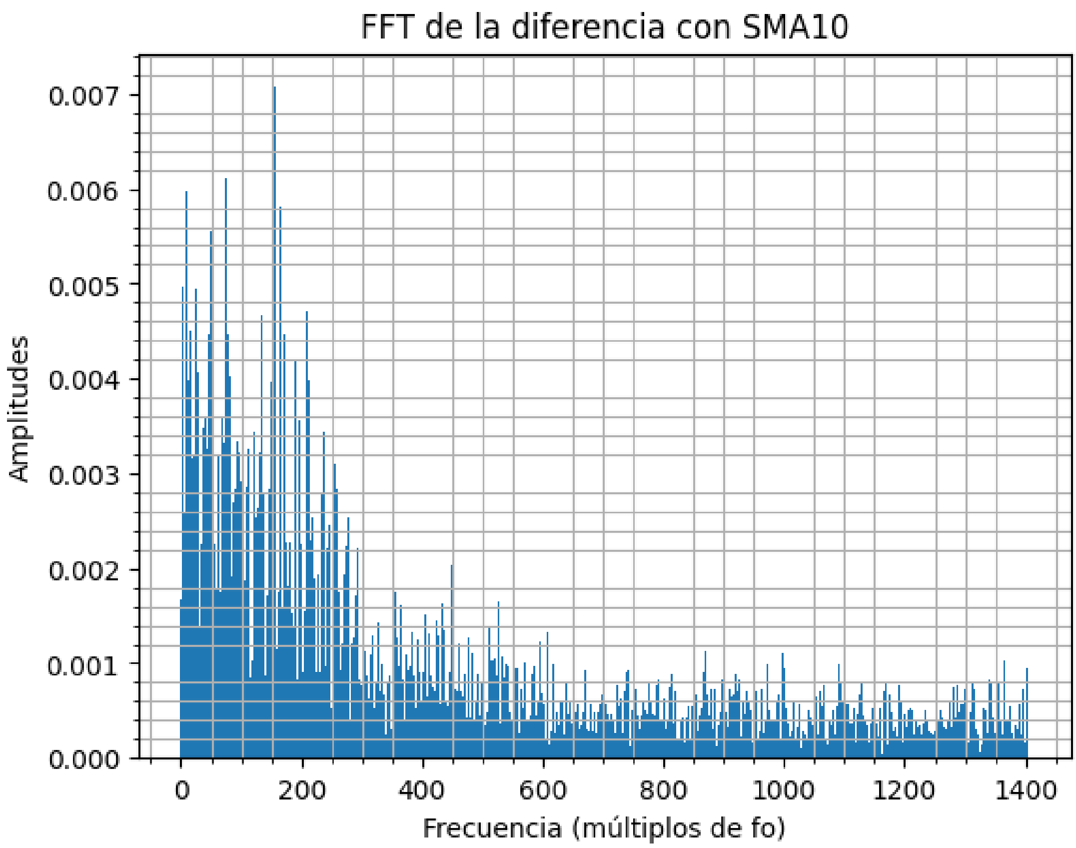

Figura 8.- FFT de las diferencias con SMA 10

Por último, presentamos los resultados de las diferencias consecutivas del logaritmo de los valores:

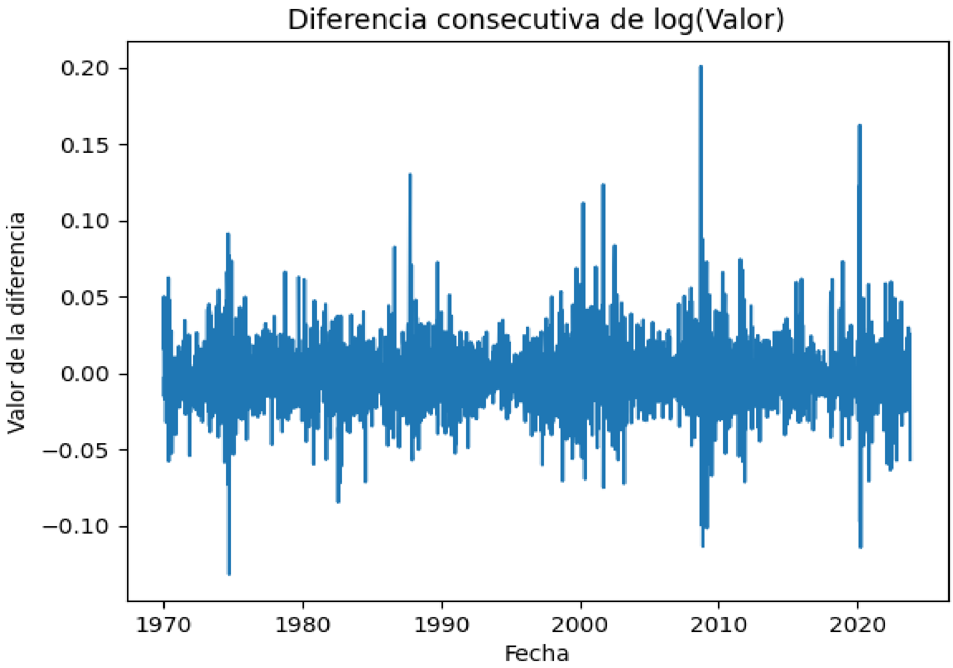

Figura 9.- Diferencias consecutivas del logaritmo de los valores

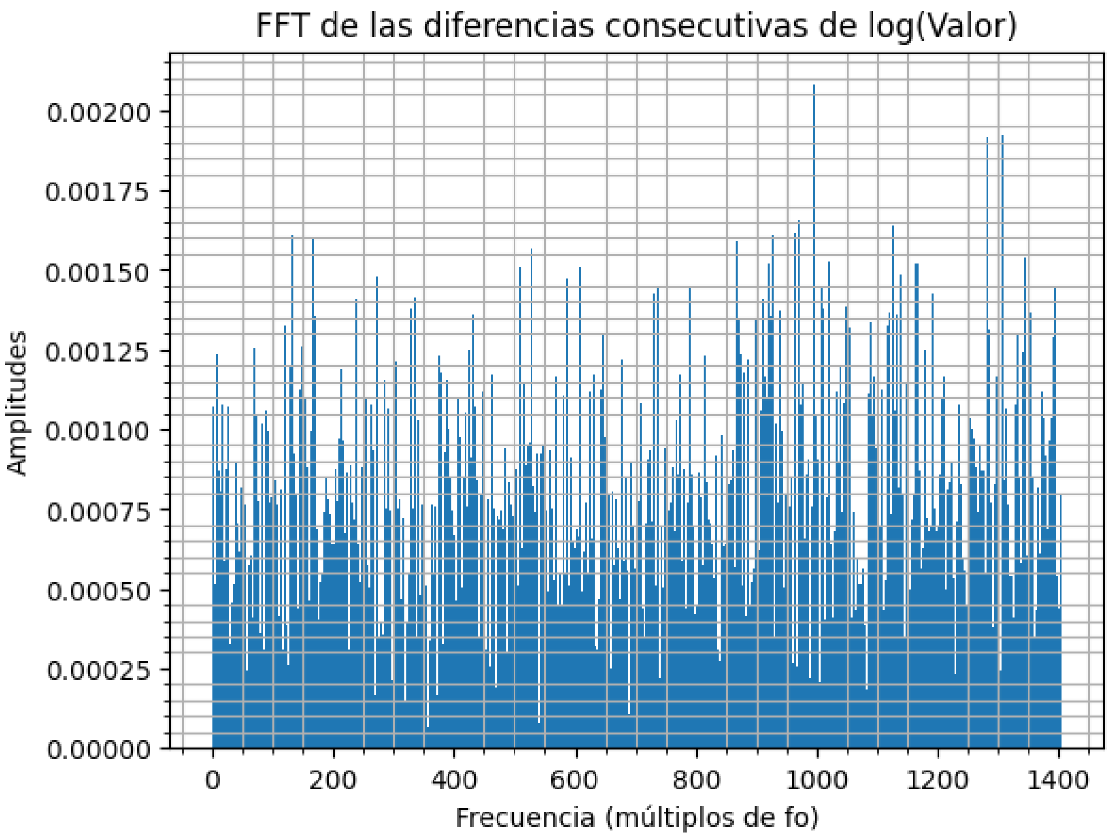

Figura 10.- FFT de las diferenciad consecutivas

A primera vista vemos que los resultados no son en absoluto iguales para los tres métodos, aun habiendo salido todos los datos del mismo lugar. Concretamente, la diferencia principal se encuentra en las frecuencias cortas. El método de resta del ajuste lineal ha desembocado en una gran importancia de las frecuencias pequeñas, mientras que el resto tienen muy poco peso. Por otro lado, con la diferencia con la SMA de 10 semanas, aunque se sigue dando más valor a las frecuencias cortas, la diferencia con las grandes es mucho menor. Por último, con las diferencias consecutivas, todas tienen amplitudes aproximadamente iguales.

Estos resultados pueden sugerir dos cosas diferentes. La primera posible interpretación es que cada método resultará más útil a la hora de estudiar ciertos ciclos/frecuencias. Si queremos centrarnos en los ciclos largos, utilizaremos el primer método; mientras que si queremos hacerlo en los cortos utilizaremos los otros dos.

Sin embargo, otro posible resultado es que el primer método no haya eliminado del todo la tendencia de la serie. Cuando se hace la FFT a una serie con tendencia, detectará la propia tendencia como una función sinusoidal; y al extenderse tanto en el tiempo comparado con sus oscilaciones, tendrá una amplitud mucho mayor; como se ve en la figura 6.

Para sacar resultados creíbles, se optó por estudiar el primer método aparte; y luego comparar los otros dos. Para el primero, las frecuencias más destacadas son:

$$2f_o \ \rightarrow T = 27 \ años$$

$$f_o \ \rightarrow T = 54 \ años$$

$$4f_o \ \rightarrow T = 13{,}5 \ años$$

$$6f_o \ \rightarrow T = 9 \ años$$

La frecuencia correspondiente con f_o no la contaremos; ya que en nuestros datos solo tenemos entonces 1 periodo. Sin embargo, el periodo más importante es de 27 años. Este ciclo sí que puede observarse en la figura 5, donde la separación entre máximos es de 28 años (1972-2000) y de los mínimos es de 26 años (1983-2009). Esto podría ser por supuesto una casualidad, ya que solo podemos medir dos periodos (y el siguiente máximo es en 2021 (21 años después)), pero para esos dos periodos concuerda suficientemente bien. Por tanto, para medir ciclos largos, puede resultar una buena medida; a coste de no tener información sobre los ciclos cortos[3].

Si nos fijamos ahora en las otras dos FFT realizadas, podremos obtener cierta información acerca de periodos importantes más cortos. Debido a que todavía hay una diferencia notable entre ambas, se ha optado por seleccionar aquellas frecuencias que destaquen en comparación con las que tienen alrededor para ambos métodos; ya que así podemos eliminar de alguna manera el sesgo que tiene todavía el segundo método hacia las frecuencias bajas.

[3] Mirar la figura 11 para una ampliación de la zona de frecuencias bajas.

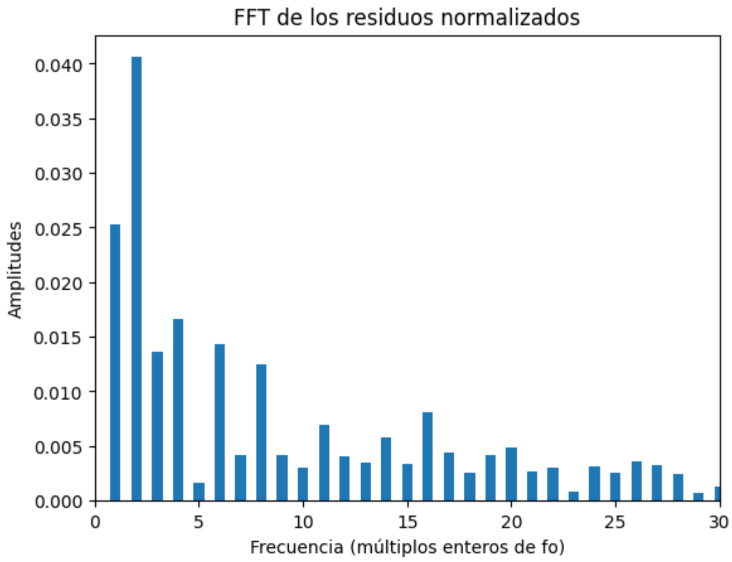

Figura 11.- Zoom de la FFT del primer método

Haciendo esto mismo, obtenemos las siguientes frecuencias importantes:

$$165 f_o \rightarrow 119\ días \rightarrow 4\ meses$$

$$996 f_o \rightarrow 20\ días$$

$$870 f_o \rightarrow 22{,}6\ días$$

$$525 f_o \rightarrow 37{,}45\ días$$

$$275 f_o \rightarrow 71{,}5\ días$$

$$50 f_o \rightarrow 393\ días \rightarrow 13\ meses \rightarrow 1{,}08\ años$$

En este caso, las dos frecuencias que más resaltaban eran las que proporcionaban un periodo de 4 meses y otro de 20 días. Estos ciclos, mucho más cortos que los anteriores, sí que podrían servir para intuir aproximadamente el comportamiento del índice para momentos cercanos. Es interesante ver, además, que varios de los ciclos más importantes son múltiplos sencillos unos de otros, como el ciclo de 4 meses y de un año (el triple) o el ciclo de 37 días y de 71 (prácticamente el doble). Esto refuerza la creencia general que los ciclos más importantes son 'subciclos' de otros más grandes, generalmente con un factor dos o tres.

Con estos tres ejemplos de eliminación de tendencia hemos comprobado que, aunque la FFT sea una herramienta útil y potente, hay que tener cuidado con los datos a los que se le aplica, ya que una pequeña variación en el método utilizado implicará unos resultados totalmente diferentes.

Para tener otro ejemplo de este comportamiento, pasamos ahora a hacer el mismo análisis con el precio del oro histórico.

FFT al precio histórico del oro

En este caso, contamos con datos desde 1975, también en periodo semanal:

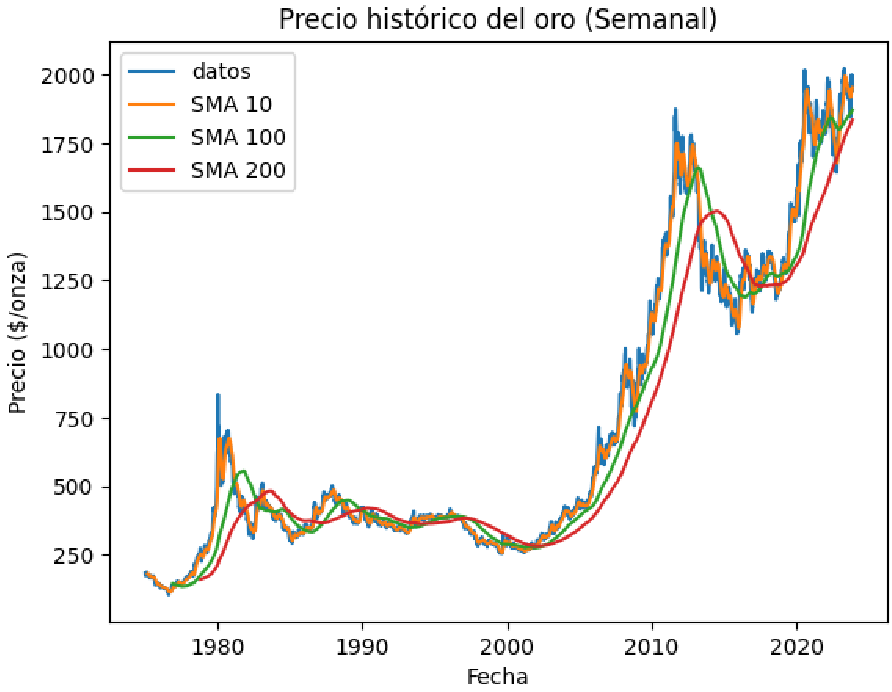

Figura 12.- Precio histórico del oro con sus medias móviles de 10, 100 y 200 semanas. Fuente: Investing.com [10].

Los datos para el oro cuentan también con una tendencia notable, por lo que habrá que aplicar métodos de 'detrending'. Siguiendo el procedimiento anterior, primero calculamos la pendiente que se ajusta a la tendencia lineal que tienen los logaritmos de los precios y luego obtenemos los residuos (la diferencia):

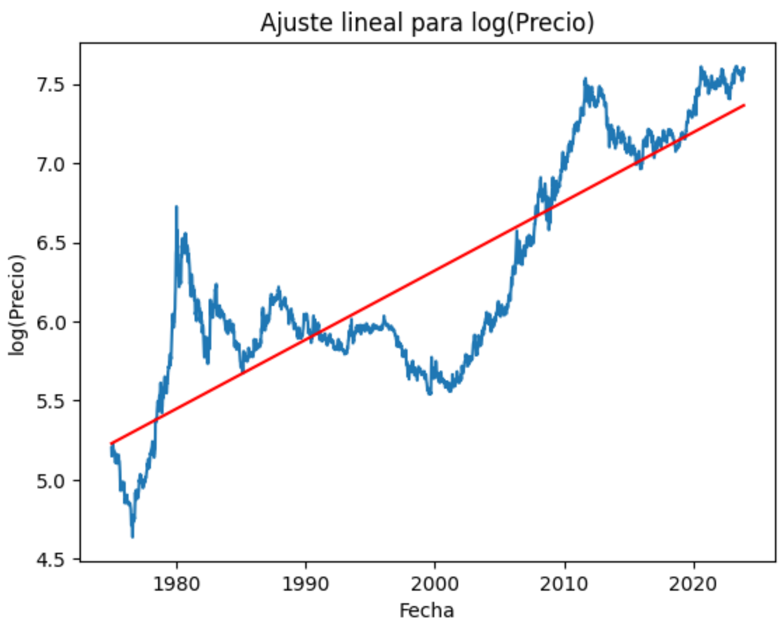

Figura 13.- Primer método de eliminación de tendencia aplicado al precio del oro.

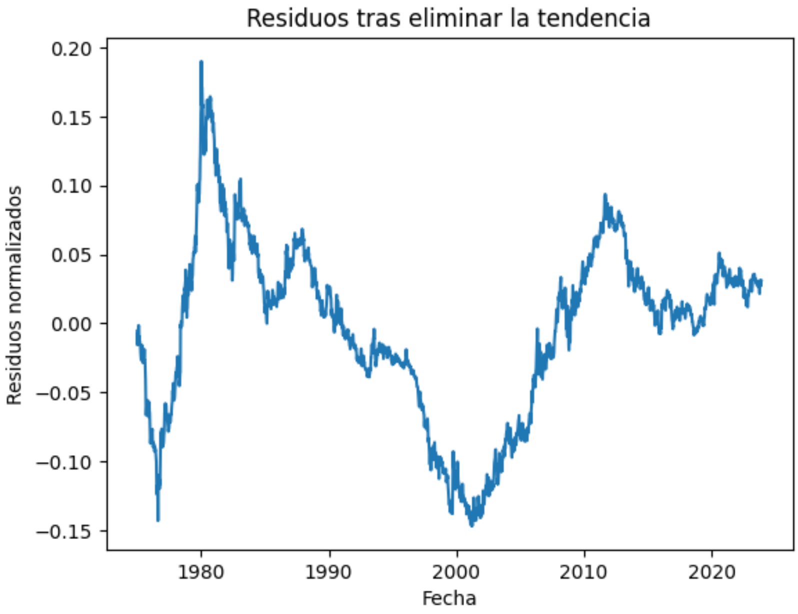

Figura 14.- Residuos normalizados del precio del oro.

Comprobamos que el ajuste no es tan bueno esta vez, de ahí que la amplitud sea mayor. Sin embargo, para analizar las frecuencias esto no va a importar. Haciendo la FFT de estos residuos obtenemos la siguiente figura:

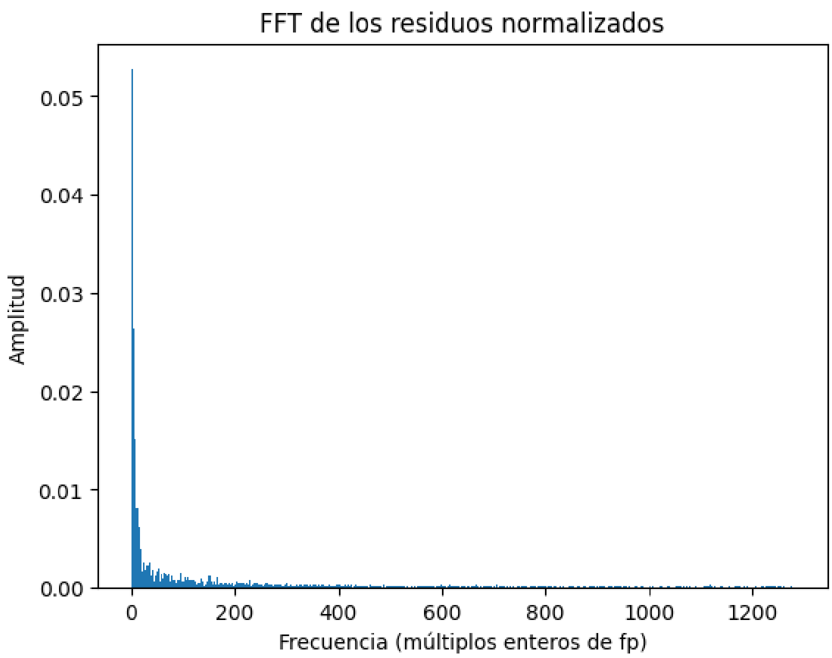

Figura 15.- FFT de los residuos normalizados del precio del oro.

Esta vez contamos con menos datos (2561), por lo que la nueva 'frecuencia principal', que llamaremos f_p para no confundir con la f_o anterior, es:

$$f_p = \frac{1}{T_{total}} = \frac{sr}{N} = \frac{1}{2561 * (3600 * 24 * 7)} = 6{,}456 \cdot 10^{-10}\, Hz = 3{,}90 \cdot 10^{-4}\, sem^{-1}$$

Si pasamos ahora al segundo método, obtenemos los siguientes datos para la diferencia con la SMA 10 y su FFT:

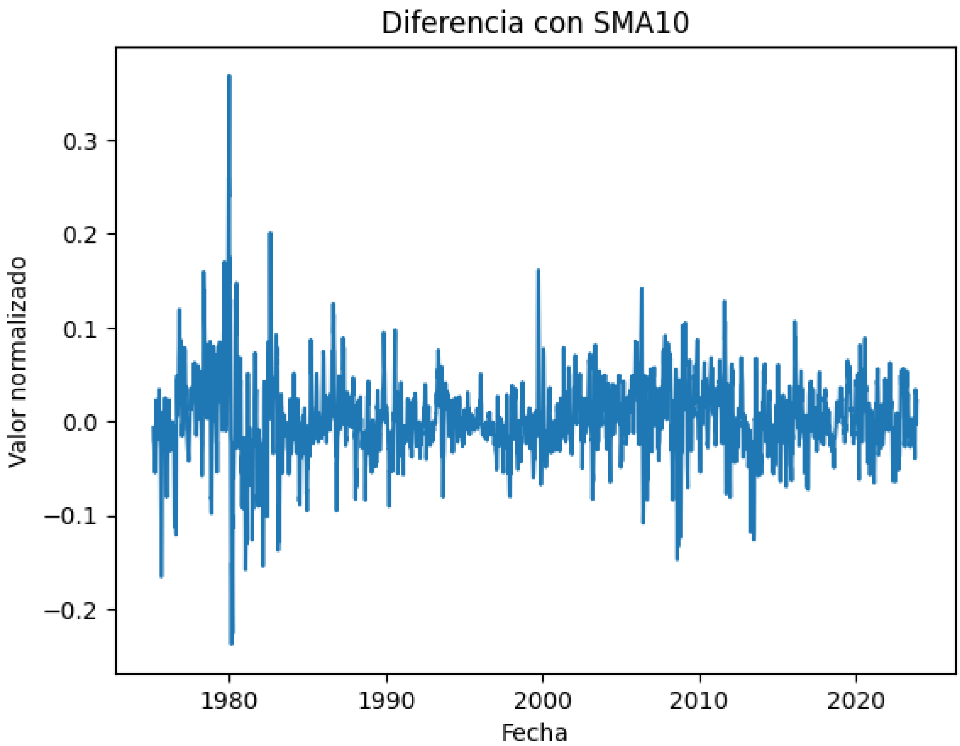

Figura 16.- Diferencia normalizada entre precio del oro y su SMA de 10 semanas.

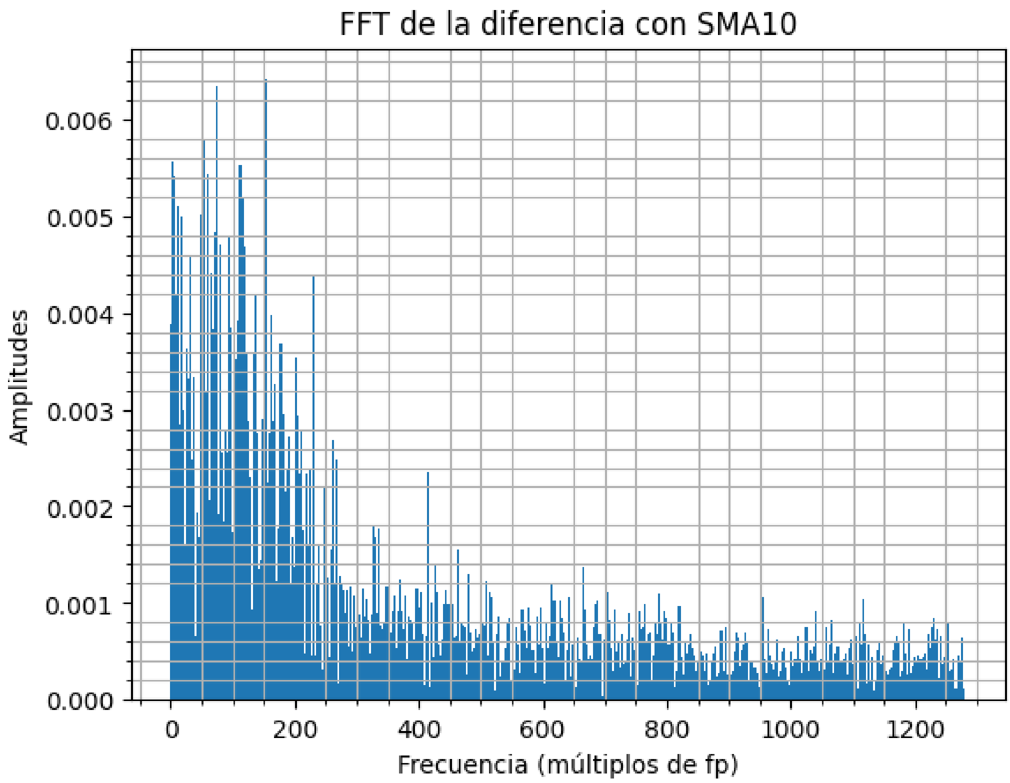

Figura 17.- FFT de las diferencias normalizadas con la SMA de 10 semanas para el oro.

Haciendo lo propio para el tercer método (diferencias consecutivas entre valores para el logaritmo del precio del oro) obtenemos los siguientes resultados:

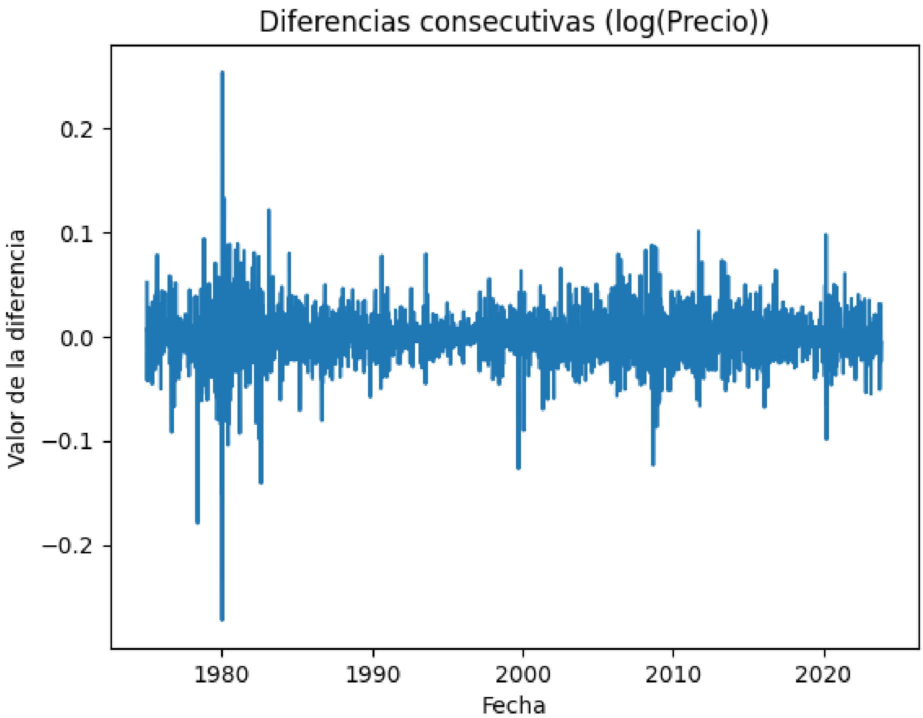

Figura 18.- Diferencias consecutivas entre logaritmos del precio del oro.

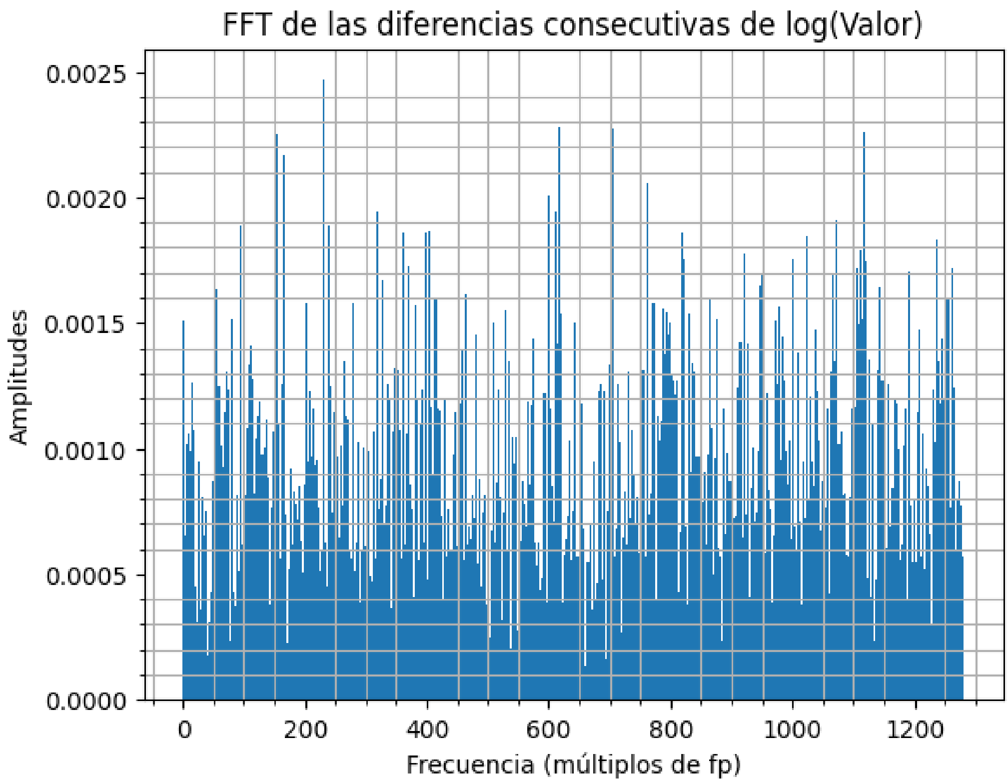

Figura 19.- FFT de las diferencias consecutivas para el oro.

A primera vista, podemos decir que el comportamiento cualitativo de los tres métodos de eliminación de tendencia es igual tanto para el S&P500 como para el oro. Esto es beneficioso para nosotros, ya que nos indica que las conclusiones que obtengamos de esta prueba nos valdrán para valores de diferente tipo, como son estos dos.

La interpretación general de los tres métodos coincide con la explicada en el apartado anterior: la eliminación de la recta de ajuste se utilizará para observar los ciclos largos, ya que todavía mantiene las oscilaciones grandes del índice; mientras que los otros dos; al suprimir en gran medida estas oscilaciones principales, pueden centrarse en captar los ciclos más cortos.

Estudiando ahora las frecuencias más importantes obtenidas con la FFT a los datos sin la tendencia lineal (método 1), derivamos los siguientes valores:

$$f_p \ \rightarrow T = 49 \ años$$

$$2f_p \ \rightarrow T = 24{,}5 \ años$$

$$6f_p \ \rightarrow T = 8{,}2 \ años$$

$$4f_p \ \rightarrow T = 12{,}3 \ años$$

Volvemos a obtener que las frecuencias más importantes son las más bajas. Un resultado destacable es que los múltiplos más importantes obtenidos para el oro son los mismos que para el S&P500. Aunque los periodos no son iguales, ya que no tenemos el mismo número de datos, son muy parecidos, lo que nos puede indicar que ambas distribuciones tienen un comportamiento similar en cuanto a grandes oscilaciones[4]. No obstante, esto también puede indicar que la FFT para unas oscilaciones tan grandes puede no ser efectiva, y proporcionar resultados parecidos sea cual sea la distribución [11].

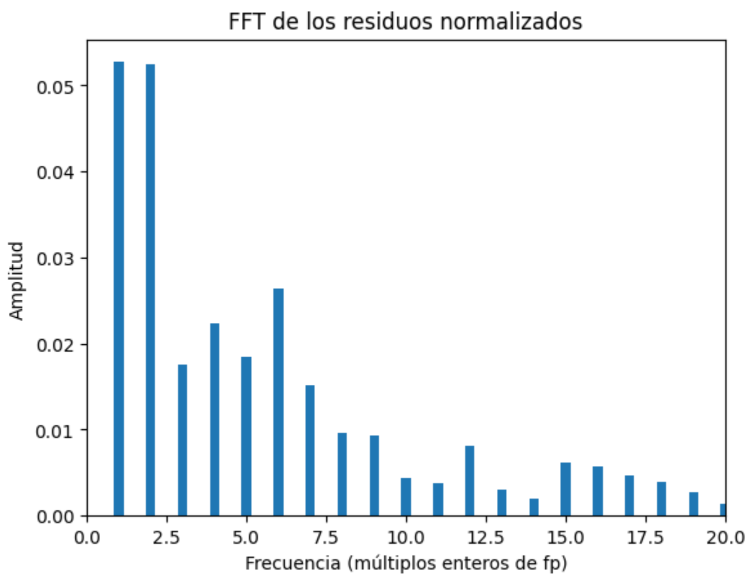

Figura 20.- Ampliación de la zona de bajas frecuencias para el primer método de 'detrending'.

[4] Aunque la FFT no nos proporcione la información de cuándo empieza cada oscilación, lo que sería lo realmente interesante a efectos económicos.

Para analizar los otros dos métodos, seguimos el procedimiento análogo al caso anterior. Detectaremos cuáles son las frecuencias que más destacan en comparación con las cercanas en ambos casos; y seleccionaremos solamente aquellas que aparezcan de manera importante en ambas transformadas. Dichas frecuencias son:

$$230f_p \rightarrow 78\ días$$

$$150f_p \rightarrow 119{,}5\ días \rightarrow 4\ meses$$

$$1137f_p \rightarrow 15{,}8\ días$$

$$460f_p \rightarrow 39\ días$$

$$710f_p \rightarrow 25{,}25\ días$$

$$820f_p \rightarrow 21{,}9\ días$$

Para el precio del oro, las frecuencias que más sobresalen corresponden a un periodo de aproximadamente 80 días y otro de 4 meses. Volvemos a observar como aparecen ciertos ciclos que son múltiplos de otros, como ocurre con los de periodo de 78 días y de 39 días.

Un resultado muy llamativo es que, uno de los ciclos más largos que destaca este método en ambos casos es el de 4 meses. Además, es un periodo importante ya que es un submúltiplo muy claro de los 12 meses que tiene el año; por lo que la detección de ese ciclo en ambos valores puede significar que existe de manera real un ciclo económico de esa duración.

Además, obtenemos otros resultados muy cercanos como entorno a los 22 días o cerca de los 75 días. El hecho de realizar estas medidas con series temporales de distinto tipo, con valores económicos diferentes y obtener resultados parecidos abre la posibilidad de que realmente se pueda captar la presencia de ciertos ciclos económicos.

Conclusión

Tras haber hecho estas pruebas con la FFT aplicada a dos valores económicos diferentes, podemos sacar bastantes conclusiones.

La primera y más importante es que la FFT no es aplicable a cualquier función que nosotros queramos modelar; sino que es necesario que esta cumpla una serie de condiciones; a saber: oscilaciones entorno a un nivel fijo (que siempre podemos bajar al cero) y tener una amplitud aproximadamente constante con el tiempo. Por otro lado, hemos visto que para conseguir estas características hay varios caminos, y no todos de ellos son iguales. Se probaron tres métodos distintos para la eliminación de tendencia, y los resultados fueron diferentes en los tres. Mientras que la eliminación de una recta de ajuste privilegiaba mucho las frecuencias pequeñas al hacer la FFT; los otros dos métodos aportaban resultados más ‘equilibrados’ en cuanto a las frecuencias (el tercero más incluso que el segundo). Esto se debe a que la resta de un ajuste básico (como es el lineal), todavía mantiene las oscilaciones grandes entorno a la misma, por lo que la amplitud correspondiente a frecuencias bajas será mucho mayor que la de las frecuencias más altas.

En cuanto a las frecuencias medidas, destaca la presencia de frecuencias similares en los dos datos, como los periodos de aproximadamente 9 años, 12,5 años o 23 y 75 días, llegando incluso a coincidir por completo, como el ciclo de periodo de 119 días. Esto indica que a pesar de que la FFT no es tan buena trabajando en este campo como suele ser habitual en otros, sí que se puede extraer cierta información al utilizarla. De hecho, los dos ciclos de 9 o 12 años pueden corresponder a ciclos de Juglar (duración aproximada de una década) y el ciclo de 4 meses puede estar relacionado con la actividad anual de las empresas, dependiendo de la estación o la época del año.

Finalmente, concluimos que la FFT puede llegar a ser un instrumento útil en el análisis de ciclos económicos, pero ha de ir siempre acompañada de otros instrumentos de análisis y de una buena preparación de los datos; sabiendo en todo momento elegir qué método utilizar para eliminar tendencias en función de las regiones temporales que se quieran estudiar o modelar.

Referencias bibliográficas

[1] Ramírez, J. L. (2020). *Propuesta metodológica para el pronóstico de ciclos económicos a partir del análisis de Fourier.* Universidad de Guanajuato. Divisón de ciencias económicas administrativas.

[2] *Discrete Fourier Transform*. (2023). Obtenido de https://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_Fourier_transform

[3] Fang, D. (2019). *Investigatin the efficient market hypothesis using Fourier analysis.* Lund University. Department of Economics.

[4] Puckette, M. (30 de Diciembre de 2006). *Fourier analysis of non-periodic signals*. Obtenido de https://msp.ucsd.edu/techniques/v0.11/book-html/node171.html

[5] Filho, M. (10 de Marzo de 2023). *Detrending Time Series Data With Python*. Obtenido de Forecastegy: https://forecastegy.com/posts/detrending-time-series-data-python/

[6] Sahdev, N. (2016). *An Analysis of S&P 500.*

[7] López-Sors, Á. Z. (2017). *Los ciclos económicos bursátiles: El factor temporal en la formación de los precios.* Madrid: Universidad Pontificia de Comillas.

[8] Korotayev, A. V., & Tsirel, S. V. (2010). *A Spectral Analysis of WOrld GDP Dynamics: Kondratieff Waves, KUznets Swings, Juglar and Kitchin Cycles in Global Economic Developmente, and the 2008-2009 Economic Crisis.* Moscú.

[9] Investing.com. (s.f.). *S&P 500 Historical Data*. Obtenido de Investing.com: https://www.investing.com/indices/us-spx-500-historical-data

[10] Investing.com. (s.f.). *Gold Futures*. Obtenido de Investing.com: https://www.investing.com/commodities/gold-historical-data

[11] *Stack Exchange*. (Enero de 2019). Obtenido de FFT returns large frequency power. How is this called?: https://dsp.stackexchange.com/questions/55315/fft-returns-large-low-frequency-power-probably-because-signal-is-interpreted-a

Referencias para crear el código en Python

[a] Alkousa, O. (27 de Febrero de 2023). *Fourier Transform, the Practical Python Implementation*. Obtenido de Medium: https://towardsdatascience.com/fourier-transform-the-practical-python-implementation-acdd32f1b96a

[b] FFT in Python. (2020). En *Python Programming and Numerical Methods - A Guide for Engineers and Scientists* (pág. Capítulo 24.4). Elsevier.

[c] MacLeod, C. (s.f.). *Fourier Transforms With scipy.fft: Python Signal Processing*. Obtenido de Real Python: https://realpython.com/python-scipy-fft/

[d] Rodrigo, J. A., & Ortiz, J. E. (Febrero de 2021). *Skforecast: forecasting series temporales con Python y Scikit-learn*. Obtenido de https://cienciadedatos.net/documentos/py27-forecasting-series-temporales-python-scikitlearn.html