O que é esse site?

Esse site é uma simulação de cassinos onlines que possuem uma roleta. Todo o dinheiro é fictício. O seu objetivo é demonstrar que cassinos não necessitam de algoritmos complexos e engenhosos para ganharem dos usuários, por isso o lucro líquido da casa é exibido de forma explícita na página inicial.

Se você acha que possui uma estratégia para ganhar do cassino, esse é o lugar perfeito para testar a sua eficiência.

Como as cores da roleta são sorteadas?

O algoritmo que escolhe as cores é extremamente simples: Existe 47% de chande de cair vermelho/preto e 6% de chance de cair branco.
As seguintes 9 linhas de código compõem **todo o funcionamento** da roleta em relação a cor que é escolhida em uma rodada:

```
rng = random.random()

if rng < 0.47:
    color_rolled = Color.red
elif rng < 0.47 + 0.47:
    color_rolled = Color.black
else:
    color_rolled = Color.white
```

Em que `random.random()` é um número aleatório provindo de uma distribuição uniforme entre 0 e 1.

Como a sorte é calculada?

A sorte é um número que quantifica o quão sortudo ou azarado o apostar é no momento. Valores positivos representem que o apostar foi sortudo, e quão maior o número, mais sortudo ele foi, já números negativos representam azar.
A motivação inicial por trás da definição da sorte é a seguinte:

> Se o apostador acertou um evento de probabilidade p, quantos lances de moedas justas devem ser acertados em sequência para obter a mesma probabilidade?

Sendo x o número de lances acertados, a reposta para essa pergunta é

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = p \Rightarrow x = log_{1/2}(p)$$

Se tudo que o apostador fez foi apostar nesse evento, e acertar, podemos definir que sua sorte é a expressão obtida para x. Mas e se o apostador acertar uma série de n eventos com probabilidades $p_1, p_2, \dots, p_n$, então, de acordo com a motivação inicial, sua sorte será

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \prod_{i=1}^{n} p_i \Rightarrow x = \log_{1/2}\left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\log_{1/2}(p_i) \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n}\log_{1/2}(p_i)$$

Ou seja, a sorte é a soma das sortes individuas de cada evento. Mas o que fazer com a sorte quando o usuário erra um evento de probabilidade de sucesso p? É tentador definir que a sorte deva diminuir por $log_{1/2}(1-p)$, pois a probabilidade de perder é $1-p$, mas de acordo com essa definição, o valor esperado da sorte, em geral, não vai ser zero, e isso é uma propriedade desejável que a sorte tenha. Então vamos impor isso, seja S a variável aleatória da sorte e x o valor que sorte deve diminuir se o usuário não tiver sucesso, então

$$\langle S\rangle = 0 \Rightarrow \overbrace{p\log_{1/2}(p) - (1-p)x}^{\langle S\rangle} = 0 \Rightarrow x = \frac{p}{1-p}\log_{1/2}(p)$$

Até o momento lidamos com eventos em que o usuário aposta em um único resultado, assim tendo uma probabilidade de sucesso bem definida, mas se ele puder apostar em diferentes resultados ao mesmo tempo? (O que é possível na roleta, pois apostas em diferentes cores podem ser feitas na mesma rodada). Nesse caso, faz sentido definir a sorte como sendo a soma das sortes de cada aposta feita. Para verificar se essa definição faz sentido, é necessário que o valor esperado da sorte continue sendo 0. Vamos fazer isso, seja N o número de resultados possíveis, m o número de resultados apostados e $\{p_i\}_{i\in\{1,\dots,N\}}$ as probabilidades de sucesso de cada resultado, sendo que os primeiros m p's $(p_1, p_2, \dots, p_m)$ são as probabilidades dos resultados apostados. Seja s_j o valor da sorte se der o resultado j, então

$$s_j = \begin{cases} \log_{1/2}(p_j) - \sum_{i\neq j}^{m}\frac{p_i}{1-p_i}\log_{1/2}(p_i) & ,1 \le j \le m \\ -\sum_{i=1}^{m}\frac{p_i}{1-p_i}\log_{1/2}(p_i) & ,m < j \le N \end{cases}$$

Pois quando $1 \le j \le m$ o usuário ganha a j-ésima aposta, mas perde todas as outras, e quando $j > m$ o usuário perde todas as m apostas. Chamando de $-L$ a sorte quando $j > m$, podemos reescrever s_j da seguinte forma

$$\begin{aligned} s_j &= \begin{cases} \log_{1/2}(p_j) - L + \frac{p_j}{1-p_j}\log_{1/2}(p_j) \\ -L \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-p_j}\log_{1/2}(p_j) - L & ,1 \le j \le m \\ -L & ,m < j \le N \end{cases} \end{aligned}$$

Agora estamos prontos para calcular o valor esperado

$$\begin{aligned} \langle S\rangle &= \sum_{j=1}^{N} p_j s_j = \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{p_j}{1-p_j}\log_{1/2}(p_j) - p_j L\right) + \sum_{j=m+1}^{N} -p_j L = \\ &= \overbrace{\sum_{j=1}^{m}\frac{p_j}{1-p_j}\log_{1/2}(p_j)}^{L} - L\sum_{j=1}^{m} p_j - L\sum_{j=m+1}^{N} p_j = L - L\overbrace{\sum_{j=1}^{N} p_j}^{1} = L - L = 0 \end{aligned}$$

Logo, o valor esperado de S é zero, como queríamos. Como o valor esperado de uma variável aleatória, que é a soma de outras variáveis aleatórias, é a soma dos valores esperados dessas variáveis, ou seja,

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \langle Y\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle X_i\rangle$$

podemos definir que a sorte de múltiplos eventos é a soma da sorte dos eventos individuas, que seu valor esperado vai continuar sendo zero (pois individualmente o valor esperado sempre é zero). Dessa forma, temos a seguinte definição para a sorte:

- Se um usuário apostar em um evento com probabilidade de sucesso p, a sua sorte s será

$$s = \begin{cases} \log_{1/2}(p) & \text{, Se houver sucesso} \\ -\frac{p}{1-p}\log_{1/2}(p) & \text{, Se não houver sucesso} \end{cases}$$

- Se o usuário apostar em n eventos, a sua sorte é a soma das sortes de cada evento.
- Se o usuário pode apostar em diferentes resultados em um mesmo evento, as apostas são tratadas como eventos únicos, recaindo na definição anterior.

Dado que sorte está definida como uma soma de variáveis aleatórias independentes, segue do teorema do limite central que a sua distribuição tende a ser gaussiana conforme $n \to \infty$. Por questão de conveniência, vamos nos aproveitar desse fato para modificar a definição da sorte tal que sua variância tenda a 1. Primeiramente precisamos calcular a variância de um evento individual.

$$Var(S) = \langle (S - \overbrace{\langle S\rangle}^{0})^2\rangle = \langle S^2\rangle$$

Do cálculo de seu valor esperado, já sabemos qual é valor da sorte quando acontece o resultado j de N possibilidades (s_j), sendo que o apostar apostou em m delas, então

$$\begin{aligned} \langle S^2\rangle &= \sum_{j=1}^{N} p_j s_j^2 = \sum_{j=1}^{m} p_j\left(\frac{1}{1-p_j}\log_{1/2}(p_j) - L\right)^2 + \sum_{j=m+1}^{N} p_j L^2 = \\ &= \sum_{j=1}^{m} p_j\left(\frac{\log_{1/2}^2(p_j)}{(1-p_j)^2} + L^2 - \frac{2L}{1-p_j}\log_{1/2}(p_j)\right) + \sum_{j=m+1}^{N} p_j L^2 = \\ &= \sum_{j=1}^{m}\frac{p_j}{(1-p_j)^2}\log_{1/2}^2(p_j) - 2L\overbrace{\sum_{j=1}^{m}\frac{p_j}{1-p_j}\log_{1/2}(p_j)}^{L} + L^2\overbrace{\sum_{j=1}^{N} p_j}^{1} = \\ &= \sum_{j=1}^{m}\frac{p_j}{(1-p_j)^2}\log_{1/2}^2(p_j) - L^2 \end{aligned}$$

Perfeito, encontramos a variância da sorte de um evento individual. Agora, sendo X_i variáveis aleatórias independentes, é possível mostrar que

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \langle Y^2\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle X_i^2\rangle$$

Então a variância da sorte de n eventos é a soma das variâncias dos eventos individuais

$$S_{tn} := \sum_{i=1}^{n} S_i \Rightarrow \langle S_{tn}^2\rangle = \sum_{i=i}^{n}\langle S_i^2\rangle = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m_i}\frac{p_{i,j}}{(1-p_{i,j})^2}\log_{1/2}^2(p_{i,j}) - L_i^2\right)$$

$$L_i = \sum_{j=1}^{m_i}\frac{p_{i,j}}{1-p_{i,j}}\log_{1/2}(p_{i,j})$$

em que $p_{i,j}$ é a probabilidade de dar o resultado j no evento i. Finalmente, vamos definir a sorte normalizada

$$\bar{S}_{tn} := \frac{S_{tn}}{\sqrt{\langle S_{tn}^2\rangle}}$$

Claramente o desvio padrão de $\bar{S}_{tn}$ é 1, como queríamos, pois

$$\langle \bar{S}_{tn}^2\rangle = \frac{1}{\langle S_{tn}^2\rangle}\langle S_{tn}^2\rangle = 1$$

A definição final da sorte será ser uma amostra de $\bar{S}_{tn}$, mas antes de enunciar a definição, vamos reescrever s_j. Recapitulando, se um apostar apostar nos primeiros m_i possíveis resultados do i-ésimo evento, e o resultado desse evento for r_i, temos que a sorte será

$$s_{i,r_i} = \begin{cases} \frac{1}{1-p_{i,r_i}}\log_{1/2}(p_{i,r_i}) - L_i & ,1 \le r_i \le m_i \\ -L_i & ,m_i < r_i \le N \end{cases}$$

Escrever a sorte assim é ótimo para fazer cálculos teóricos, como fizemos acima, mas na prática essa forma não é muito boa, pois os resultados de cada evento precisam estar organizados tal que os primeiros m_i resultados sejam aqueles que foram apostados, isso não é problema em um cálculo teórico, mas na prática garantir essa organização é um caos, então vamos reescrever s_{i,r_i} de uma forma que não dependa da organização dos resultados dos eventos. Seja R_i o conjunto de todos os resultados possíveis do i-ésimo elemento e $T_i \subseteq R_i$ o conjunto de resultados que o apostador apostou nesse evento, então

$$s_{i,r_i} = \begin{cases} \frac{1}{1-p_{i,r_i}}\log_{1/2}(p_{i,r_i}) - L_i & ,r_i \in T_i \\ -L_i & ,r_i \notin T_i \end{cases}$$

Ainda, utilizando a função indicador $\mathbb{1}$, podemos escrever

$$s_{i,r_i} = \frac{\mathbb{1}_{T_i}(r_i)}{1-p_{i,r_i}}\log_{1/2}(p_{i,r_i}) - L_i$$

Agora sim, vamos para a definição da sorte

Definição: Sorte

Se um usuário apostar em n eventos, sendo R_i o conjunto de possíveis resultados do i-ésimo evento e T_i os resultados apostados nesse evento, a sua sorte s será

$$s := \frac{1}{\sqrt{\langle S_{tn}^2\rangle}}\sum_{i=1}^{n} s_{i,r_i}$$

em que r_i é o resultado do i-ésimo evento e s_{i,r_i} é o valor da variável aleatória associada a esse evento e tipo de aposta, dado esse resultado, conforme mostrado anteriormente

$$s_{i,r_i} = \frac{\mathbb{1}_{T_i}(r_i)}{1-p_{i,r_i}}\log_{1/2}(p_{i,r_i}) - L_i$$

p_{i,r_i} é a probabilidade do resultado do i-ésimo evento ser r_i, e L_i é quanto a sorte diminui se todas as apostas feitas no evento i são perdidas

$$L_i = \sum_{j\in T_i}\frac{p_{i,j}}{1-p_{i,j}}\log_{1/2}(p_{i,j})$$

$S_{tn} := \sum_{i=1}^{n} S_i$ é a variável aleatória da sorte total não normalizada, e sua variância, conforme visto acima, é

$$\langle S_{tn}^2\rangle = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\in T_i}\frac{p_{i,j}}{(1-p_{i,j})^2}\log_{1/2}^2(p_{i,j}) - L_i^2\right)$$

Expandindo todos os termos da sorte, ficamos com a seguinte expressão

$$s = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\mathbb{1}_{T_i}(r_i)}{1-p_{i,r_i}}\log_{1/2}(p_{i,r_i}) - \sum_{j\in T_i}\frac{p_{i,j}}{1-p_{i,j}}\log_{1/2}(p_{i,j})\right]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j\in T_i}\frac{p_{i,j}}{(1-p_{i,j})^2}\log_{1/2}^2(p_{i,j}) - \left(\sum_{j\in T_i}\frac{p_{i,j}}{1-p_{i,j}}\log_{1/2}(p_{i,j})\right)^2\right]}}$$

Sorte apostando na roleta

Voltando para a roleta, cada evento consiste em uma rodada da roleta. Cada rodada tem três possibilidades de aposta ($R_i = \{\text{preto}, \text{vermelho}, \text{branco}\}, \forall i$). As probabilidades de cair cada cor independem do número da rodada, ou seja, são sempre as mesmas

- $p_{\text{preto}} = p_{\text{vermelho}} = 0,47$: Probabilidade de cair vermelho/preto.
- $p_{\text{branco}} = 0,06$: Probabilidade de cair branco.

Existem 7 formas diferentes de fazer uma aposta

Id	Preto	Vermelho	Branco
1	x	-	-
2	-	x	-
3	-	-	x
4	x	x	-
5	x	-	x
6	-	x	x
7	x	x	x

então, existem 7 diferentes variáveis aleatórias possíveis para cada rodada $(S_1, S_2, \dots, S_7)$. Cada S possui uma variância e um L associado

Id	$\langle S_i^2\rangle$	L_i
1	1,05218	0,96595
2	1,05218	0,96595
3	1,05157	0,25908
4	0,23823	1,93191
5	1,60324	1,22503
6	1,60324	1,22503
7	0,28877	2,19099

e cada S_i possui 3 possíveis valores

Id	$s_{i,preto}$	$s_{i,vermelho}$	$s_{i,branco}$
1	1,0893	-0,966	-0,966
2	-0,966	1,0893	-0,966
3	-0,2591	-0,2591	4,0589
4	0,1233	0,1233	-1,9319
5	0,8302	-1,225	3,0929
6	-1,225	0,8302	3,0929
7	-0,1358	-0,1358	2,127

Repare que perder apostando no branco é muito menos danoso à sorte do que perder no vermelho/preto, pois o valor de S quando é perdido uma aposta no vermelho/preto é $-0,966$, já quando é perdido uma aposta no branco é $-0,2591$, o que faz sentido, porque é muito mais provável (não necessita de muito azar) perder no branco.

Com essas duas tabelas é possível calcular a sorte dos apostadores. Por exemplo, suponha que um apostador fez as seguintes apostados

Tipo da aposta	Cor rolada
1	Preto
5	Preto

podemos definir a n-tupla ordenada b que contém as apostas feitas, nesse caso $b = (1,5)$, então sua sorte é

$$\sum_{i=1}^{2} s_{b_i,r_i} = s_{1,preto} + s_{5,preto} = 1,0893 + 0,8302 = 1,9185$$

$$\langle S_{t2}^2\rangle = \langle S_1^2\rangle + \langle S_5^2\rangle = 1,05218 + 1,60324 = 2,65542$$

$$s = \frac{\sum_{i=1}^{2} s_{b_i,r_i}}{\sqrt{\langle S_{t2}^2\rangle}} = \frac{1,9185}{\sqrt{2,65542}} = 1,178$$

Apenas por curiosidade, a sorte de uma pessoa que ganhou na mega-sena é 7075,58, mas dado que a nossa definição foi baseada em a sorte ser uma soma de variáveis aleatórias, o seu valor perde sentido em um único evento com probabilidade extrema, como é o caso aqui. Podemos resolver isso calculando a sorte de uma pessoa que jogou uma moeda justa e errou o seu resultado, e em sequência apostou na mega-sena e ganhou. A sua sorte após errar o resultado da moeda é -1 e após ganhar na mega-sena é 24,577, ou seja, sua sorte aumentou em 25,577, que é justamente quantos lances de moedas justas precisam ser acertados, em sequência, para dar a mesma probabilidade de ganhar na mega-sena.