## Exercício 1

### item 1.1

Temos os seguintes três títulos disponíveis:

Diagrama

Descrição gerada automaticamente

Sendo:

Todos os títulos tem a mesma maturidade, 10 anos, bem como o novo título que queremos. O novo título é zero cupom, ou seja, tem um único pagamento de seu principal mais o seu bônus no momento do seu vencimento.

Diante desse problema, queremos resolver uma combinação linear entre os 3 títulos disponíveis, de modo que a resultante seja o novo título.

O novo fluxo será:

Contudo, devemos respeitar as seguintes condições:

Seja o número de na carteira, o número de e o número de , tal que se implica a venda de unidades do .

1. Zero cupom
2. Além disso, como queremos uma valor de face do novo título seja igual a 1000,
3. E, por último,

Pois dessa forma, não precisaremos nos preocupar com a taxa curta.

Desse modo,

$$

=

$$

Logo,

Portanto, teremos que o preço do novo título será igual a:

### Item 1.2

Agora, queremos determinar o preço de um título pós-fixado, com cupons anuais, vencimento de 10 anos e valor de face igual $ 1000,00.

Assim, devemos alterar as restrições impostas do modelo no Item 1.1, de tal forma que

1. O título tenha cupom.
2. Valor de face do novo título seja igual a 1000.
3. E, por último,

Pois dessa forma, o novo título ficará

Desse modo,

$$

=

$$

Logo,

Portanto, teremos que o preço do novo título será igual a:

## Exercício 2

### Item 2.2

Sejam o Título 1, o preço do Título 1 e o cupom do Título 1. Analogamente, para , e .

Queremos encontrar o preço de uma NTN-B Principal com valor de face igual a $100 com tempo de vencimento igual a 10 anos, em função da precificação dos títulos acima.

Dessa forma, construiremos um **título sintético** que é uma combinação linear entre e , tal que satisfaça duas restrições.

1. Valor de face do título sintético igual a $100. Isso implica que:
2. Não haja pagamento de cupom ao longo da vida do título. logo,

Por consequência, devemos resolver o seguinte sistema linear abaixo.

$$

=

$$

Logo,

E, portanto, , o preço do nosso título **sintético** é igual a

### Item 2.2

Como podemos notar, a taxa de IPCA não impactará nessa tomada de decisão, uma vez que a precificação de não depende desse parâmetro.

## Exercício 3

### Item 3.1

O preço de um título é dado pela soma dos fluxos de pagamentos descontado por uma taxa efetiva. De modo geral, podemos escrever

$$P = \frac{C\_1}{(1+y)^{1}} + \frac{C\_2}{(1+y)^{2}}+\;...\;+ \frac{C\_T}{(1+y)^{T}}\;=\; \sum\_\limits{t = 1}^{T}\frac{C\_t}{(1+y)^{t}}$$

Onde:

= Preço do Título

= Fluxo de Pagamento no período t

= Taxa interna de retorno de mercado

= Número de períodos

Dessa forma o preço de cada título é dado por

### Item 3.2

O coeficiente de **Duration** ou Duração é entendido pela definição de Frederick Macaulay, dada em 1938: um prazo médio do título. Para um bônus cupom zero, a Duração do investimento é o prazo que resta para o seu vencimento. Para os ativos com fluxos intermediários como os bônus que pagam cupom de juros, Macaulay sugere uma medida similar: a média ponderada dos prazos de um título no qual os pesos são dados pelo valor presente do fluxo do título em relação ao seu preço, ou seja, uma medida de prazo, em média, que o detentor de um título terá que esperar antes de receber o pagamento.

Segue abaixo, a sua experessão

$$DM = \frac{\sum\_\limits{t = 1}^{T} \frac{t \times C\_t}{(1+y)^{t}}}{P}$$

Logo, temos que

### Item 3.3

Podemos expandir a fórmula obitida para o *preço de um título* no **Item 3.1** para medir a sua taxa de variação em relação à *taxa de desconto*. Dessa forma,

$$P = \frac{C\_1}{(1+y)^{1}} + \frac{C\_2}{(1+y)^{2}}+\;...\;+ \frac{C\_T}{(1+y)^{T}}\;=\; \sum\_\limits{t = 1}^{T}\frac{C\_t}{(1+y)^{t}}$$

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{1}{(1+y)}\sum\_\limits{t = 1}^{T} \frac{t \times C\_t}{(1+y)^t}$$

Obtemos, então, a variação de primeira ordem do preço em relação à taxa de desconto. Contudo, a depender da sensibilidade que o título tem com a taxa de juros, essa medidade se torna rapidamente enviesada. Portanto, vamos expandir um pouco mais os resultados a fim de melhorar a sua performance!

Dividindo tudo por , temos

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dy} = -\frac{1}{(1+y)}\sum\_\limits{t = 1}^{T}\frac{1}{P} \frac{t \times C\_t}{(1+y)^t}$$

Logo, calculando as sensibilidades dos títulos:

### Item 3.4

Seja o vetor de decisão de compra dos Títulos 1,2,3 e 4 (resp. Títulos A,B,C e D), é o vetor de custos de cada título.

$$\min\_{x\_i \in X} \sum\_\limits{i = 1}^{4} x\_i \times P\_i$$

1. Casamento de valor presente. Seja o valor presente do passivo,

$$\sum\_\limits{i =1}^{4}x\_i \times P\_i = VP\_L $$

1. Convexidade da cesta de títulos maior que a do passivo.

$$\frac{d\;(\sum\_\limits{i=1}^{4}x\_i \times P\_i)}{dy} \geq \frac{d \; VP\_L}{dy}$$

O que implica a seguinte restrição

$$$$

$$\left[-\frac{1}{1+y}\right]\sum\_\limits{i = 1}^{4}x\_i \times D\_i \times P\_i = \left[-\frac{1}{1+y}\right] \times D\_L \times VP\_L$$

$$\sum\_\limits{i = 1}^{4}x\_i \times D\_i \times P\_i = D\_L \times VP\_L \;\;\;\;\ (2)$$

$$\frac{d^2 (\sum\_\limits{i=1}^{4}x\_i \times VP\_i)}{dy^2} \geq \frac{d^2 VP\_L}{dy^2}$$

$$\sum\_\limits{i = 1}^{4}x\_i \times C\_i \times P$$

## Questão 4