Simulado - Funções de uma variável - 2023.3

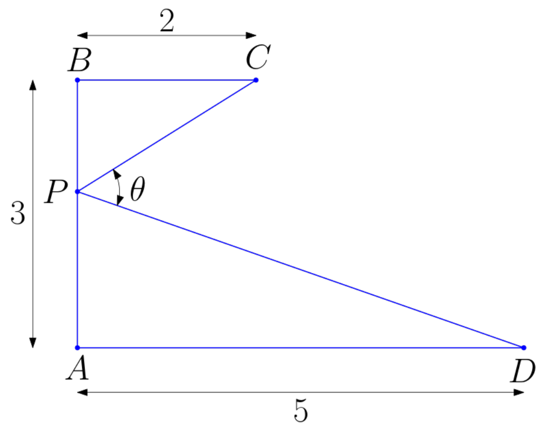
Stefano Nardulli

1. Simulado

Exercício 1 (4 pontos). *Esboce o gráfico da função*

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2x+3}{x+1}\right) - 2x.$$

Exercício 2 (2,5 pontos). *Determine a que distância vertical, em relação ao segmento AD, deve estar posicionado o ponto $P \in AB$ de modo a maximizar o valor do ângulo θ?*



Exercício 3 (2,5 pontos). *Esboce o gráfico da função*

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercício 4 (1 ponto). *Determine o seguinte limite, fornecendo justificativas para cada etapa do cálculo:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(x)}{\sin(x) - x}.$$

Exercício 5 (Bônus, 1 ponto). *Enuncie e prove o Teorema do valor médio de Lagrange.*

2. Soluções

2.1. **Solução do exercício 1.** Para esboçar o gráfico de uma função, podemos seguir os seguintes passos, que asseguram que as informações mais importantes dessa função estão incluídas em nossa representação.

Passo 1: Determinação do domínio

Note que as funções $\arctan(u)$ e $2u$ tem como domínio o conjunto dos números reais. Entretanto, a função $\frac{2u+3}{u+1}$ não está definida para $u = -1$. Portanto, o domínio da função f, denotado por $\mathcal{D}(f)$, é dado por

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Passo 2: Intersecção com os eixos coordenados

Primeiramente determinemos a intersecção com o eixo x, isto é, $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} 0 = f(x) &= \arctan\left(\frac{2x+3}{x+1}\right) - 2x \\ 2x &= \arctan\left(\frac{2x+3}{x+1}\right) \\ x &= \frac{\arctan\left(\frac{2x+3}{x+1}\right)}{2}. \end{aligned}$$

Utilizando do método das interações a partir de $x_0 = 0$ temos que

$$x_1 = \frac{\arctan\left(\frac{2*0+3}{0+1}\right)}{2} = \frac{\arctan(3)}{2} \approx \frac{1,3}{2} = 0,7$$

Fazendo uma interação obtemos

$$x_2 = \frac{\arctan\left(\frac{2*0,7+3}{0,7+1}\right)}{2} = \frac{\arctan\left(\frac{4,4}{1,7}\right)}{2} = \frac{\arctan(2,6)}{2} \approx \frac{1,2}{2} = 0.6$$

Podemos verificar se a nossa aproximação já está boa o suficiente substituindo-se $x_2 = 0,6$ em $f(x)$. Donde temos que

$$\begin{aligned} f(x_2) &= f(0,6) \\ &= \arctan\left(\frac{2*0,6+3}{0,6+1}\right) - 2*0,6 \\ &= \arctan\left(\frac{4,2}{1,6}\right) - 1,2 \\ &= \arctan(2,6) - 1,2 \\ &\approx 1,2 - 1,2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Calculemos agora a intersecção com o eixo y, isto é, $f(0)$.

$$f(0) = \arctan\left(\frac{2.0+3}{0+1}\right) - 2.0 = \arctan(3) \approx 1,3.$$

Passo 3: Determinação de simetrias

Não há simetrias, isto é, a função não é par, ímpar ou periódica.

Passo 4: Determinação de assíntotas

Para verificarmos a existência de assíntotas horizontais temos que calcular os seguintes limites:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\arctan\left(\frac{2x+3}{x+1}\right)-2x\right)\\ &= \arctan\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{x+1}\right)-\left(\lim_{x\to+\infty}2x\right).\end{aligned}$$

Note que $\lim_{x\to+\infty} 2x+3 = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$ e, portanto, temos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Por L'Hopital temos que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{d}{dx}(2x+3)}{\frac{d}{dx}(x+1)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{1} = 2.$$

Assim,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \arctan(2) - \infty = -\infty.$$

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\left(\arctan\left(\frac{2x+3}{x+1}\right)-2x\right)\\ &= \arctan\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+3}{x+1}\right)-\left(\lim_{x\to-\infty}2x\right).\end{aligned}$$

Note novamente que $\lim_{x\to-\infty} 2x+3 = -\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$ e, portanto, temos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Por L'Hopital temos que

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+3}{x+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{d}{dx}(2x+3)}{\frac{d}{dx}(x+1)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1} = 2.$$

Assim,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \arctan(2) - (-\infty) = \infty.$$

Donde concluímos que a função f não tem assíntotas horizontais.

Para verificarmos a existência de assíntotas verticais temos que calcular os seguintes limites:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1^+} f(x) &= \lim_{x\to-1^+}\left(\arctan\left(\frac{2x+3}{x+1}\right)-2x\right)\\ &= \arctan\left(\lim_{x\to-1^+}\frac{2x+3}{x+1}\right)-\left(\lim_{x\to-1^+}2x\right)\\ &= \frac{\pi}{2}-(-2)\\ &= \frac{\pi}{2}+2.\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1^-} f(x) &= \lim_{x\to-1^-}\left(\arctan\left(\frac{2x+3}{x+1}\right)-2x\right)\\ &= \arctan\left(\lim_{x\to-1^-}\frac{2x+3}{x+1}\right)-\left(\lim_{x\to-1^-}2x\right)\\ &= -\frac{\pi}{2}-(-2)\\ &= -\frac{\pi}{2}+2.\end{aligned}$$

Portanto, como $x = -1$ é o único ponto da reta que não está no domínio de $f(x)$, temos que $f(x)$ não tem assíntotas verticais.

Para verificarmos a existência de assíntotas inclinadas temos que calcular os seguintes limites:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(\arctan(2)-2x)) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\arctan\left(\frac{2x+3}{x+1}\right)-2x-(\arctan(2)-2x)\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\arctan\left(\frac{2x+3}{x+1}\right)-\arctan(2)\right)\\
&= \arctan\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{x+1}\right)-\arctan(2)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(\arctan(2)-2x)) &= \lim_{x\to-\infty}\left(\arctan\left(\frac{2x+3}{x+1}\right)-2x-(\arctan(2)-2x)\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty}\left(\arctan\left(\frac{2x+3}{x+1}\right)-\arctan(2)\right)\\
&= \arctan\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+3}{x+1}\right)-\arctan(2)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, a função f é assintótica a reta dada pela equação $y = \arctan(2) - 2x$.

Passo 5: Determinação dos intervalos de crescimentos e decrescimento

Para determinar os intervalos de crescimento e decrescimento da função f calculemos $f'(x)$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\arctan\left(\frac{2x+3}{x+1}\right)-2x\right)\\
&= \frac{1}{\left(\frac{2x+3}{x+1}\right)^2+1}\frac{d}{dx}\left(\frac{2x+3}{x+1}\right)-2\\
&= \frac{1}{\frac{(2x+3)^2+(x+1)^2}{(x+1)^2}}\frac{2(x+1)-(2x+3)1}{(x+1)^2}-2\\
&= \frac{(x+1)^2}{(2x+3)^2+(x+1)^2}\frac{2x+2-2x-3}{(x+1)^2}-2\\
&= \frac{-1}{(2x+3)^2+(x+1)^2}-2\\
&= -\left(\frac{1}{(2x+3)^2+(x+1)^2}+2\right).
\end{aligned}$$

Como $(2x+3)^2 \geq 0$ e $(x+1)^2 \geq 0$ temos que $(2x+3)^2+(x+1)^2 > 0$ (note que esta última desigualdade é estrita, pois $(2x+3)^2 = 0$ quando $x = -\frac{3}{2}$ e $(x+1)^2 = 0$ quando $x = -1$. Assim, $(2x+3)^2+(x+1)^2 \neq 0$ para todo valor de x). Logo, de $(2x+3)^2+(x+1)^2 > 0$, temos que

$$\frac{1}{(2x+3)^2+(x+1)^2} > 0$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(2x+3)^2+(x+1)^2}+2 > 2 > 0 \\
-\left(\frac{1}{(2x+3)^2+(x+1)^2}+2\right) < 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $f'(x) < 0$ para todo $x \in \mathcal{D}(f)$. Logo, a função $f(x)$ é decrescente para todo $x \in \mathcal{D}(f)$.

Passo 6: Determinação dos valores de máximo e mínimo local

Para determinar os máximos e mínimos locais vamos encontrar os pontos críticos de $f(x)$, isto é, os valores de c tais que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe. Primeiramente,

$$
\begin{aligned}
0 = f'(c) &= -\left(\frac{1}{(2c+3)^2+(c+1)^2}+2\right) \\
0 &= \frac{1}{(2c+3)^2+(c+1)^2}+2 \\
-2 &= \frac{1}{(2c+3)^2+(c+1)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-2\left(4c^2+12c+9+c^2+2c+1\right) &= 1 \\
-2\left(5c^2+14c+10\right) &= 1 \\
-10c^2-28c-21 &= 0 \\
10c^2+28c+21 &= 0.
\end{aligned}
$$

Note que $\Delta = 28 * 28 - 4 * 10 * 21 = 784 - 840 = -56$ e portanto $\nexists\ c \in \mathbb{R}$ tal que $10c^2 + 28c + 21 = 0$. Logo, $f'(c) \neq 0$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

Como $f'(x)$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ temos que $f(x)$ não tem pontos críticos e portanto não tem máximos ou mínimos locais (note que $x = -1$ não está no domínio de f e esse fato é essencial para que ele não seja um máximo ou mínimo local).

Passo 7: Concavidade e pontos de inflexão

Para determinarmos a concavidade calculemos $f''(x)$.

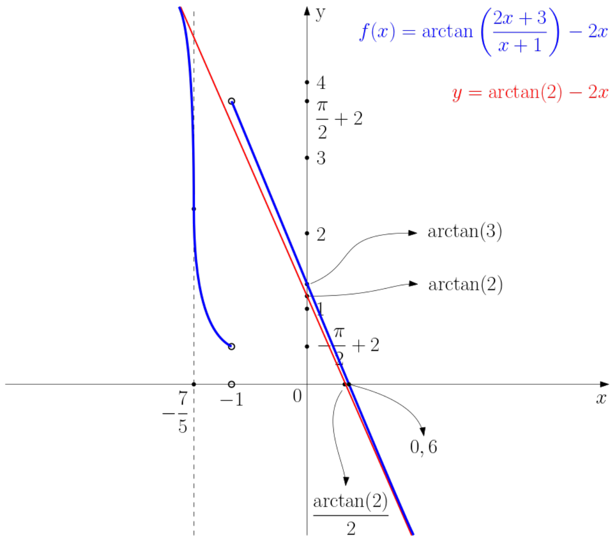
$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{d}{dx}f'(x) \\
&= \frac{d}{dx}\left(-\left(\frac{1}{(2x+3)^2+(x+1)^2}+2\right)\right) \\
&= -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(2x+3)^2+(x+1)^2}\right) \\
&= -\frac{-\left(2(2x+3)2+2(x+1)1\right)}{\left((2x+3)^2+(x+1)^2\right)^2} \\
&= \frac{8x+12+2x+2}{\left((2x+3)^2+(x+1)^2\right)^2} \\
&= \frac{10x+14}{\left((2x+3)^2+(x+1)^2\right)^2}.
\end{aligned}
$$

Como $\left((2x+3)^2+(x+1)^2\right)^2 > 0$ temos que o sinal de $f''(x)$ é determinado pelo sinal de $10x + 14$. Logo, como $10x + 14 > 0$ para $x > -\frac{14}{10} = -\frac{7}{5}$, $10x + 14 < 0$ para $x < -\frac{7}{5}$ e $10x + 14 = 0$ para $x = -\frac{7}{5}$, temos que $f''(x) > 0$ para $x > -\frac{7}{5}$, $f''(x) < 0$ para $x < -\frac{7}{5}$ e $f''(x) = 0$ para $x = -\frac{7}{5}$

Assim, $f(x)$ é côncava para cima para $x > -\frac{7}{5}$, côncava para baixo para $x < -\frac{7}{5}$ e $x = -\frac{7}{5}$ é um ponto de inflexão.

Passo 8: Esboço do gráfico

Das informações dos passos 1 a 7 temos que um possível esboço do gráfico de $f(x)$ é dado por:



2.2. **Solução do exercício 2.** Para solucionarmos este problema de otimização temos que encontrar uma função que descreva o valor de θ em função da altura de P com relação ao segmento AD. Denotemos por x a altura do ponto P em relação ao segmento AD.

Seja α os ângulo $\widehat{BPC}$ e β o ângulo $\widehat{APD}$. Note que

$$\tan(\alpha(x)) = \frac{2}{3-x} \qquad \text{e} \qquad \tan(\beta(x)) = \frac{5}{x}.$$

Assim, como $\theta + \alpha + \beta = \pi$ temos que

$$\theta(x) = \pi - \arctan\left(\frac{2}{3-x}\right) - \arctan\left(\frac{5}{x}\right).$$

Derivando-se a expressão θ com relação a x obtemos que

$$\begin{aligned}
\theta'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\pi - \arctan\left(\frac{2}{3-x}\right) - \arctan\left(\frac{5}{x}\right)\right)\\
&= -\frac{1}{\left(\frac{2}{3-x}\right)^2+1}\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3-x}\right) - \frac{1}{\left(\frac{5}{x}\right)^2+1}\frac{d}{dx}\left(\frac{5}{x}\right)\\
&= -\frac{1}{\frac{4+(3-x)^2}{(3-x)^2}}\frac{0(3-x)-2(-1)}{(3-x)^2} - \frac{1}{\frac{25+x^2}{x^2}}\frac{0x-5*1}{x^2}\\
&= -\frac{(3-x)^2}{4+(3-x)^2}\frac{2}{(3-x)^2} + \frac{x^2}{25+x^2}\frac{5}{x^2}\\
&= -\frac{2}{4+(3-x)^2} + \frac{5}{25+x^2}\\
&= \frac{5}{25+x^2} - \frac{2}{4+9-6x+x^2}\\
&= \frac{5}{x^2+25} - \frac{2}{x^2-6x+13}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{5(x^2-6x+13)-2(x^2+25)}{(x^2+25)(x^2-6x+13)} \\
&= \frac{5x^2-30x+65-2x^2-50}{(x^2+25)(x^2-6x+13)} \\
&= \frac{3x^2-30x+15}{(x^2+25)(x^2-6x+13)}.
\end{aligned}
$$

Note que queremos encontrar o máximo de $\theta(x)$ para $x \in [0,3]$, pois se $x < 0$ ou $x > 3$ temos que $P \notin AB$.

Assim, $\theta'(x) = 0$ quanto $3x^2 - 30x + 15 = 0$, ou ainda, $x^2 - 10x + 5 = 0$. Portanto, $\theta'(x) = 0$ quando $x = 5 - 2\sqrt{5}$ ou $x = 5 + 2\sqrt{5}$. Como queremos encontrar o máximo de $\theta(x)$ para $x \in [0,3]$ temos que um possível candidato é $x = 5 - 2\sqrt{5}$.

Para verificarmos se $x = 5-2\sqrt{5}$ é um máximo local de $\theta(x)$ façamos o teste da segunda derivada.

$$
\begin{aligned}
\theta''(x) &= \frac{d}{dx}\theta'(x) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2-30x+15}{(x^2+25)(x^2-6x+13)}\right) \\
&= \frac{6(x^5-18x^4+70x^3-160x^2-135x+1250)}{(x^2+25)^2(x^2-6x+13)^2}.
\end{aligned}
$$

Donde temos que $\theta''(5-2\sqrt{5}) = \frac{-420-207\sqrt{5}}{8410} < 0$. Assim, $x = 5 - 2\sqrt{5} \approx 0.53$ é de fato um máximo local para θ.

Uso da segunda derivada para máximos e mínimos

Seja c um número crítico de f tal que $f'(c) = 0$. Suponha que $f'(x)$ e $f''(x)$ existam em um intervalo aberto I contendo c. Desta forma,

- se $f''(c) < 0$, então f tem um valor máximo relativo em c;
- se $f''(c) > 0$, então f tem um valor mínimo relativo em c;

Note que este fato é uma consequência imediata do teste da segunda derivada para convexidade.

De fato, se $f''(x) > 0$, então a concavidade está voltada para cima e, portanto, o ponto crítico é um mínimo local. Já se $f''(x) < 0$, então a concavidade está voltada para baixo e, portanto, o ponto crítico é um máximo local.

2.3. **Solução do exercício 3.** Para esboçar o gráfico de uma função, podemos seguir os seguintes passos, que asseguram que as informações mais importantes dessa função estão incluídas em nossa representação.

Passo 1: Determinação do domínio

Note que a função u^2 tem como domínio o conjunto dos números reais. Entretanto, a função $\frac{1}{u}$ tem como domínio os valores $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e a função $\sqrt{u}$ tem como domínio os valores $u \geq 0$. Portanto, $f(x)$ tem como domínio os valores $x \in \mathbb{R}$ tais que $1 - x^2 > 0$, ou ainda, $x^2 < 1$. Portanto, o domínio da função f, denotado por $\mathcal{D}(f)$, é dado por

$$\mathcal{D}(f) =]-1, 1[.$$

Passo 2: Intersecção com os eixos coordenados

Primeiramente determinemos a intersecção com o eixo x, isto é, $f(x) = 0$.

$$0 = f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$0 = x^2.$$

Donde temos que $x = 0$. Calculemos agora a intersecção com o eixo y, isto é, $f(0)$.

$$f(0) = \frac{0^2}{\sqrt{1-0^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Passo 3: Determinação de simetrias

A função f é uma função par, isto é, $f(-x) = f(x)$. De fato, como $(-x)^2 = (-1)^2x^2 = x^2$, temos que

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{\sqrt{1-(-x)^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = f(x).$$

Donde temos que f é simétrica com relação ao eixo y.

Passo 4: Determinação de assíntotas

Para verificarmos a existência de assíntotas verticais temos que calcular os seguintes limites:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty.$$

Por outro lado, note que

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty.$$

Donde segue-se que $x = 1$ e $x = -1$ são assíntotas verticais da função f. Note que a função f não possui assíntotas horizontais ou inclinadas.

Passo 5: Determinação dos intervalos de crescimentos e decrescimento

Para determinar os intervalos de crescimentos e decrescimento da função f calculemos $f'(x)$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right) \\
&= \frac{2x\sqrt{1-x^2} - x^2\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \\
&= \frac{\frac{2x(1-x^2)+x^3}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \\
&= \frac{2x-2x^3+x^3}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{x(2-x^2)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

Como $x \in]-1,1[$ temos que $x^2 < 1$, ou ainda, $-x^2 > -1$. Ou seja, $1 - x^2 > 0$ e, portanto, $(1-x^2)^{\frac{3}{2}} > 0$.

Assim, $f'(x) = 0$ quando $x = 0$ ou quando $x = \pm\sqrt{2}$. Mas como $\mathcal{D}(f) =]-1,1[$ e $|\pm\sqrt{2}| > 1$ temos que o único ponto crítico que 0.

Além disso, note que para $x \in]-1,1[$ temos que $x^2 < 1$, ou ainda, $-x^2 > -1$. Ou seja, $2 - x^2 > 1 > 0$ e, portanto, o sinal de $f'(x)$ é determinado somente pelo sinal de x. Logo, $f'(x) < 0$ para $x < 0$ e $f'(x) > 0$ para $x > 0$.

Passo 6: Determinação dos valores de máximo e mínimo local

Como $f'(0) = 0$ e $f'(x)$ muda de sinal de negativo para positivo em 0, $f(0) = 0$ é um mínimo local (e neste caso global).

Passo 7: Concavidade e pontos de inflexão

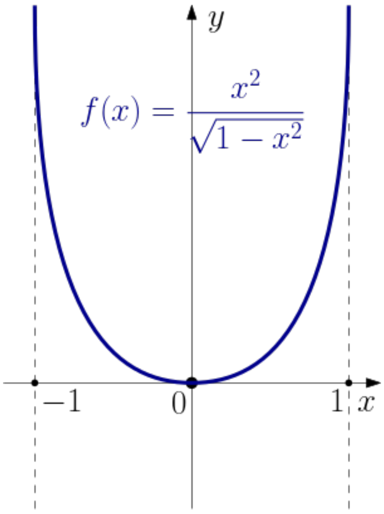
Para determinarmos a concavidade calculemos $f''(x)$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx} f'(x) \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x(2-x^2)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \\ &= \frac{x^2+2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} \qquad . \end{aligned}$$

Como, para $x \in]-1, 1[$ temos que $1 - x^2 > 0$ concluímos que $(1-x^2)^{\frac{5}{2}} > 0$. Além disso, $x^2 + 2 > 0$ e, portanto, $f''(x) > 0$ para todo $x \in]-1, 1[$, donde temos que f tem a concavidade para cima e não tem ponto de inflexão.

Passo 8: Esboço do gráfico

Das informações dos passos 1 a 7 temos que um possível esboço do gráfico de $f(x)$ é dado por:



2.4. **Solução do exercício 4.** Primeiramente, note que $\lim_{x\to 0}(x^2\sin(x)) = 0$ e $\lim_{x\to 0}(\sin(x) - x) = 0$ e, portanto, temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Por L'Hopital temos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(x)}{\sin(x) - x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(x^2\sin(x))}{\frac{d}{dx}(\sin(x) - x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin(x) + x^2\cos(x)}{\cos(x) - 1}.$$

Agora note que $\lim_{x\to 0}(2x\sin(x) + x^2\cos(x)) = 0$ e $\lim_{x\to 0}(\cos(x) - 1) = 0$ e, portanto, temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Por L'Hopital temos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(x)}{\sin(x) - x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(2x\sin(x) + x^2\cos(x))}{\frac{d}{dx}(\cos(x) - 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x) + 4x\cos(x) - x^2\sin(x)}{-\sin(x)}.$$

Entretanto, $\lim_{x\to 0}(2\sin(x) + 4x\cos(x) - x^2\sin(x)) = 0$ e $\lim_{x\to 0}(-\sin(x)) = 0$ e, portanto, temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Por L'Hopital temos que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(x)}{\sin(x) - x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(2\sin(x) + 4x\cos(x) - x^2\sin(x))}{\frac{d}{dx}(-\sin(x))} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x) + 4\cos(x) - 4x\sin(x) - 2x\sin(x) - x^2\cos(x)}{-\cos(x)} \end{aligned}$$

$$= \frac{2+4}{-1}$$
$$= -6.$$

2.5. **Solução do exercício 5.**

Teorema 1 (Teorema do valor médio de Lagrange)**.** *Seja f uma função tal que*

(1) f é contínua no intervalo fechado $[a,b]$.
(2) f é diferenciável no intervalo aberto $]a,b[$.

Então existe um número $c \in]a,b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Demonstração. Note que o segmento de reta com pontos finais $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é dado pela equação

$$y(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Vamos definir uma função auxiliar h por

$$h(x) := f(x) - y(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Ilustrada na Figura 1.

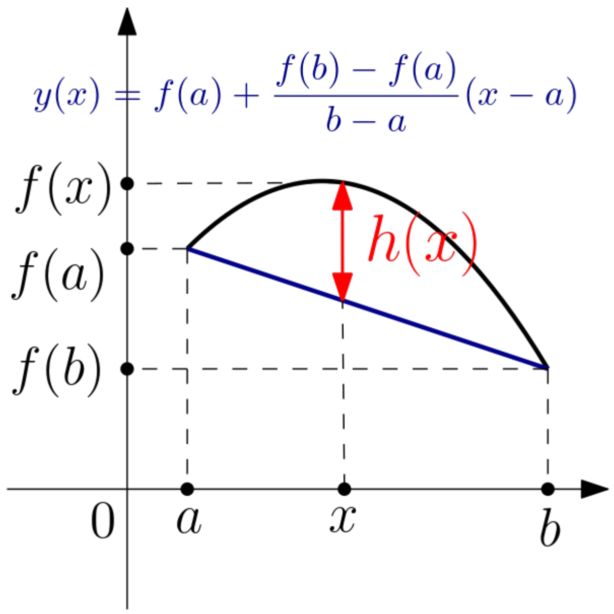


Figura 1. Função auxiliar h da prova do Teorema de Lagrange.

Note que

- A função h é contínua em $[a,b]$, pois é soma de f (que é contínua em $[a,b]$ por hipótese) com um polinômio do primeiro grau que também é contínuo.
- A função h é diferenciável em $]a,b[$, pois é a soma de f (que é diferenciável em $]a,b[$ por hipótese) com um polinômio do primeiro grau que também é diferenciável. Além disso, temos que

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

- Por fim, temos que

$$h(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0,$$

e

$$h(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(b) - f(a) - (f(b) - f(a)) = 0.$$

Portanto, $h(a) = h(b)$.

Assim, h satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle. Donde segue-se que existe $c \in]a, b[$ tal que $h'(c) = 0$. Portanto,

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$\square$