Limites de espaços-tempo

Marcos Agnoletto Forte
https://sites.google.com/view/marcos-agnoletto/home

2023

Universidade Federal do ABC (UFABC)
Centro de Matemática, Computação e Cognição (CMCC)

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Finance Code 88887.667684/2022-00

Sumário

Motivação

Motivação

Equação de Einstein

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}}$$

- $R_{\mu\nu}$ - Tensor curvatura de Ricci.
- R - Curvatura escalar.
- $g_{\mu\nu}$ - Tensor métrico.
- κ - Constante gravitacional de Einstein.
- $T_{\mu\nu}$ - Tensor energia-momento.

Tensor energia-momento eletromagnético

$$\boxed{T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}}$$

- $F_{\mu\nu}$ - Tensor eletromagnético.

Motivação

Equação de Einstein

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}}$$

- $R_{\mu\nu}$ - Tensor curvatura de Ricci.
- R - Curvatura escalar.
- $g_{\mu\nu}$ - Tensor métrico.
- κ - Constante gravitacional de Einstein.
- $T_{\mu\nu}$ - Tensor energia-momento.

Tensor energia-momento eletromagnético

$$\boxed{T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}}$$

- $F_{\mu\nu}$ - Tensor eletromagnético.

Motivação

Equação de Einstein

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}}$$

- $R_{\mu\nu}$ - Tensor curvatura de Ricci.
- R - Curvatura escalar.
- $g_{\mu\nu}$ - Tensor métrico.
- κ - Constante gravitacional de Einstein.
- $T_{\mu\nu}$ - Tensor energia-momento.

Tensor energia-momento eletromagnético

$$\boxed{T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}}$$

- $F_{\mu\nu}$ - Tensor eletromagnético.

Motivação

Equação de Einstein

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}}$$

- $R_{\mu\nu}$ - Tensor curvatura de Ricci.
- R - Curvatura escalar.
- $g_{\mu\nu}$ - Tensor métrico.
- κ - Constante gravitacional de Einstein.
- $T_{\mu\nu}$ - Tensor energia-momento.

Tensor energia-momento eletromagnético

$$\boxed{T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho} F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}}$$

- $F_{\mu\nu}$ - Tensor eletromagnético.

Motivação

Equação de Einstein

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}}$$

- $R_{\mu\nu}$ - Tensor curvatura de Ricci.
- R - Curvatura escalar.
- $g_{\mu\nu}$ - Tensor métrico.
- κ - Constante gravitacional de Einstein.
- $T_{\mu\nu}$ - Tensor energia-momento.

Tensor energia-momento eletromagnético

$$\boxed{T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}}$$

- $F_{\mu\nu}$ - Tensor eletromagnético.

Motivação

Equação de Einstein

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}}$$

- $R_{\mu\nu}$ - Tensor curvatura de Ricci.
- R - Curvatura escalar.
- $g_{\mu\nu}$ - Tensor métrico.
- κ - Constante gravitacional de Einstein.
- $T_{\mu\nu}$ - Tensor energia-momento.

Tensor energia-momento eletromagnético

$$\boxed{T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}}$$

- $F_{\mu\nu}$ - Tensor eletromagnético.

Motivação

Equação de Einstein

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}}$$

- $R_{\mu\nu}$ - Tensor curvatura de Ricci.
- R - Curvatura escalar.
- $g_{\mu\nu}$ - Tensor métrico.
- κ - Constante gravitacional de Einstein.
- $T_{\mu\nu}$ - Tensor energia-momento.

Tensor energia-momento eletromagnético

$$\boxed{T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}}$$

- $F_{\mu\nu}$ - Tensor eletromagnético.

O limite sobre as componentes da métrica

Universidade Federal do ABC

O limite sobre as componentes da métrica

- Introdução

M uma variedade de dimensão 4, conexa e de Hausdorff.
$g(\alpha)$ uma métrica a 1-parâmetro ($\alpha > 0$) de classe $\mathcal{C}^\infty$ em M com assinatura $(-,+,+,+)$ dada por

$$g(\alpha) = g_{\mu\nu}(\alpha) dx^\mu dx^\nu,$$

onde $g_{\mu\nu}(\alpha)$ são as componentes da métrica g na carta $x : U \subset \mathbb{R}^4 \to x(U) \subset M$.
Como descrever a métrica para um valor específico $\alpha_0 > 0$?

$$g(\alpha_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \downarrow \alpha_0} g(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} g_{\mu\nu}(\alpha_0) dx^\mu dx^\nu,$$

onde $g_{\mu\nu}(\alpha_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \downarrow \alpha_0} g_{\mu\nu}(\alpha)$.
Essa solução é de alguma maneira invariante por mudanças de cartas?
Para responder esta pergunta consideremos alguns exemplos.

O limite sobre as componentes da métrica

- Introdução

M uma variedade de dimensão 4, conexa e de Hausdorff.
$g(\alpha)$ uma métrica a 1-parâmetro ($\alpha > 0$) de classe $\mathcal{C}^\infty$ em M com assinatura $(-,+,+,+)$ dada por

$$g(\alpha) = g_{\mu\nu}(\alpha) dx^\mu dx^\nu,$$

onde $g_{\mu\nu}(\alpha)$ são as componentes da métrica g na carta $x : U \subset \mathbb{R}^4 \to x(U) \subset M$.
Como descrever a métrica para um valor específico $\alpha_0 > 0$?

$$g(\alpha_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \downarrow \alpha_0} g(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} g_{\mu\nu}(\alpha_0) dx^\mu dx^\nu,$$

onde $g_{\mu\nu}(\alpha_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \downarrow \alpha_0} g_{\mu\nu}(\alpha)$.
Essa solução é de alguma maneira invariante por mudanças de cartas?
Para responder esta pergunta consideremos alguns exemplos.

O limite sobre as componentes da métrica

- Introdução

M uma variedade de dimensão 4, conexa e de Hausdorff.
$g(\alpha)$ uma métrica a 1-parâmetro ($\alpha > 0$) de classe $\mathcal{C}^\infty$ em M com assinatura $(-,+,+,+)$ dada por

$$g(\alpha) = g_{\mu\nu}(\alpha) dx^\mu dx^\nu,$$

onde $g_{\mu\nu}(\alpha)$ são as componentes da métrica g na carta $x : U \subset \mathbb{R}^4 \to x(U) \subset M$.
Como descrever a métrica para um valor específico $\alpha_0 > 0$?

$$g(\alpha_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \downarrow \alpha_0} g(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} g_{\mu\nu}(\alpha_0) dx^\mu dx^\nu,$$

onde $g_{\mu\nu}(\alpha_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \downarrow \alpha_0} g_{\mu\nu}(\alpha)$.
Essa solução é de alguma maneira invariante por mudanças de cartas?
Para responder esta pergunta consideremos alguns exemplos.

O limite sobre as componentes da métrica

- Introdução

M uma variedade de dimensão 4, conexa e de Hausdorff.
$g(\alpha)$ uma métrica a 1-parâmetro ($\alpha > 0$) de classe $\mathcal{C}^\infty$ em M com assinatura $(-,+,+,+)$ dada por

$$g(\alpha) = g_{\mu\nu}(\alpha) dx^\mu dx^\nu,$$

onde $g_{\mu\nu}(\alpha)$ são as componentes da métrica g na carta $x : U \subset \mathbb{R}^4 \to x(U) \subset M$.
Como descrever a métrica para um valor específico $\alpha_0 > 0$?

$$g(\alpha_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \downarrow \alpha_0} g(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} g_{\mu\nu}(\alpha_0) dx^\mu dx^\nu,$$

onde $g_{\mu\nu}(\alpha_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \downarrow \alpha_0} g_{\mu\nu}(\alpha)$.
Essa solução é de alguma maneira invariante por mudanças de cartas?
Para responder esta pergunta consideremos alguns exemplos.

O limite sobre as componentes da métrica

- Introdução

M uma variedade de dimensão 4, conexa e de Hausdorff.
$g(\alpha)$ uma métrica a 1-parâmetro ($\alpha > 0$) de classe $\mathcal{C}^\infty$ em M com assinatura $(-,+,+,+)$ dada por

$$g(\alpha) = g_{\mu\nu}(\alpha) dx^\mu dx^\nu,$$

onde $g_{\mu\nu}(\alpha)$ são as componentes da métrica g na carta $x : U \subset \mathbb{R}^4 \to x(U) \subset M$.
Como descrever a métrica para um valor específico $\alpha_0 > 0$?

$$g(\alpha_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \downarrow \alpha_0} g(\alpha) \overset{\text{def}}{=} g_{\mu\nu}(\alpha_0) dx^\mu dx^\nu,$$

onde $g_{\mu\nu}(\alpha_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \downarrow \alpha_0} g_{\mu\nu}(\alpha)$.
Essa solução é de alguma maneira invariante por mudanças de cartas?
Para responder esta pergunta consideremos alguns exemplos.

O limite sobre as componentes da métrica

- Introdução

M uma variedade de dimensão 4, conexa e de Hausdorff.
$g(\alpha)$ uma métrica a 1-parâmetro ($\alpha > 0$) de classe $\mathcal{C}^\infty$ em M com assinatura $(-,+,+,+)$ dada por

$$g(\alpha) = g_{\mu\nu}(\alpha) dx^\mu dx^\nu,$$

onde $g_{\mu\nu}(\alpha)$ são as componentes da métrica g na carta $x : U \subset \mathbb{R}^4 \to x(U) \subset M$.
Como descrever a métrica para um valor específico $\alpha_0 > 0$?

$$g(\alpha_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \downarrow \alpha_0} g(\alpha) \overset{\text{def}}{=} g_{\mu\nu}(\alpha_0) dx^\mu dx^\nu,$$

onde $g_{\mu\nu}(\alpha_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \downarrow \alpha_0} g_{\mu\nu}(\alpha)$.
Essa solução é de alguma maneira invariante por mudanças de cartas?
Para responder esta pergunta consideremos alguns exemplos.

O limite sobre as componentes da métrica

- Introdução

M uma variedade de dimensão 4, conexa e de Hausdorff.
$g(\alpha)$ uma métrica a 1-parâmetro ($\alpha > 0$) de classe $\mathcal{C}^\infty$ em M com assinatura $(-,+,+,+)$ dada por

$$g(\alpha) = g_{\mu\nu}(\alpha) dx^\mu dx^\nu,$$

onde $g_{\mu\nu}(\alpha)$ são as componentes da métrica g na carta $x : U \subset \mathbb{R}^4 \to x(U) \subset M$.
Como descrever a métrica para um valor específico $\alpha_0 > 0$?

$$g(\alpha_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \downarrow \alpha_0} g(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} g_{\mu\nu}(\alpha_0) dx^\mu dx^\nu,$$

onde $g_{\mu\nu}(\alpha_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \downarrow \alpha_0} g_{\mu\nu}(\alpha)$.
Essa solução é de alguma maneira invariante por mudanças de cartas?
Para responder esta pergunta consideremos alguns exemplos.

O limite sobre as componentes da métrica

- Introdução

M uma variedade de dimensão 4, conexa e de Hausdorff.
$g(\alpha)$ uma métrica a 1-parâmetro ($\alpha > 0$) de classe $\mathcal{C}^\infty$ em M com assinatura $(-,+,+,+)$ dada por

$$g(\alpha) = g_{\mu\nu}(\alpha) dx^\mu dx^\nu,$$

onde $g_{\mu\nu}(\alpha)$ são as componentes da métrica g na carta $x : U \subset \mathbb{R}^4 \to x(U) \subset M$.
Como descrever a métrica para um valor específico $\alpha_0 > 0$?

$$g(\alpha_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \downarrow \alpha_0} g(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} g_{\mu\nu}(\alpha_0) dx^\mu dx^\nu,$$

onde $g_{\mu\nu}(\alpha_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \downarrow \alpha_0} g_{\mu\nu}(\alpha)$.
Essa solução é de alguma maneira invariante por mudanças de cartas?
Para responder esta pergunta consideremos alguns exemplos.

O limite sobre as componentes da métrica

- Introdução

M uma variedade de dimensão 4, conexa e de Hausdorff.
$g(\alpha)$ uma métrica a 1-parâmetro ($\alpha > 0$) de classe $\mathcal{C}^\infty$ em M com assinatura $(-,+,+,+)$ dada por

$$g(\alpha) = g_{\mu\nu}(\alpha) dx^\mu dx^\nu,$$

onde $g_{\mu\nu}(\alpha)$ são as componentes da métrica g na carta $x : U \subset \mathbb{R}^4 \to x(U) \subset M$.
Como descrever a métrica para um valor específico $\alpha_0 > 0$?

$$g(\alpha_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \downarrow \alpha_0} g(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} g_{\mu\nu}(\alpha_0) dx^\mu dx^\nu,$$

onde $g_{\mu\nu}(\alpha_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \downarrow \alpha_0} g_{\mu\nu}(\alpha)$.
Essa solução é de alguma maneira invariante por mudanças de cartas?
Para responder esta pergunta consideremos alguns exemplos.

O limite sobre as componentes da métrica

- Introdução

M uma variedade de dimensão 4, conexa e de Hausdorff.
$g(\alpha)$ uma métrica a 1-parâmetro ($\alpha > 0$) de classe $\mathcal{C}^\infty$ em M com assinatura $(-,+,+,+)$ dada por

$$g(\alpha) = g_{\mu\nu}(\alpha)dx^\mu dx^\nu,$$

onde $g_{\mu\nu}(\alpha)$ são as componentes da métrica g na carta $x : U \subset \mathbb{R}^4 \to x(U) \subset M$.
Como descrever a métrica para um valor específico $\alpha_0 > 0$?

$$g(\alpha_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \downarrow \alpha_0} g(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} g_{\mu\nu}(\alpha_0)dx^\mu dx^\nu,$$

onde $g_{\mu\nu}(\alpha_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \downarrow \alpha_0} g_{\mu\nu}(\alpha)$.
Essa solução é de alguma maneira invariante por mudanças de cartas?
Para responder esta pergunta consideremos alguns exemplos.

O limite sobre as componentes da métrica

- A métrica de Schwarzschild

Considere a família de métricas $g(\lambda)$ a 1-parâmetro ($\lambda > 0$) dada por

$$g(\lambda) = -\left(1 - \frac{2}{\lambda^3 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2}{\lambda^3 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2,$$

Note que $g\left(\frac{1}{\sqrt[3]{m}}\right)$, onde $m > 0$, é a métrica de Schwarzschild.

Além disso, $\lim_{\lambda \downarrow 0} g(\lambda)$ "diverge".

O limite sobre as componentes da métrica

- A métrica de Schwarzschild

Considere a família de métricas $g(\lambda)$ a 1-parâmetro $(\lambda > 0)$ dada por

$$g(\lambda) = -\left(1 - \frac{2}{\lambda^3 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2}{\lambda^3 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2,$$

Note que $g\left(\frac{1}{\sqrt[3]{m}}\right)$, onde $m > 0$, é a métrica de Schwarzschild.

Além disso, $\lim_{\lambda \downarrow 0} g(\lambda)$ "diverge".

O limite sobre as componentes da métrica

- A métrica de Schwarzschild

Considere a família de métricas $g(\lambda)$ a 1-parâmetro ($\lambda > 0$) dada por

$$g(\lambda) = -\left(1 - \frac{2}{\lambda^3 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2}{\lambda^3 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2,$$

Note que $g\left(\frac{1}{\sqrt[3]{m}}\right)$, onde $m > 0$, é a métrica de Schwarzschild.

Além disso, $\lim_{\lambda \downarrow 0} g(\lambda)$ "diverge".

O limite sobre as componentes da métrica

- A métrica de Schwarzschild

Considere a família de métricas $g(\lambda)$ a 1-parâmetro ($\lambda > 0$) dada por

$$g(\lambda) = -\left(1 - \frac{2}{\lambda^3 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2}{\lambda^3 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2,$$

Note que $g\left(\frac{1}{\sqrt[3]{m}}\right)$, onde $m > 0$, é a métrica de Schwarzschild.

Além disso, $\lim_{\lambda \downarrow 0} g(\lambda)$ "diverge".

O limite sobre as componentes da métrica

- A métrica de Schwarzschild

Considere a família de métricas $g(\lambda)$ a 1-parâmetro ($\lambda > 0$) dada por

$$g(\lambda) = -\left(1 - \frac{2}{\lambda^3 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2}{\lambda^3 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2,$$

Note que $g\left(\frac{1}{\sqrt[3]{m}}\right)$, onde $m > 0$, é a métrica de Schwarzschild.
Além disso, $\lim_{\lambda \downarrow 0} g(\lambda)$ "diverge".

O limite sobre as componentes da métrica

Considere a seguinte mudança de coordenadas:

$$\widehat{\Phi} : \begin{cases} \widehat{t} &= \dfrac{1}{\lambda} t \\ \widehat{r} &= \lambda r \end{cases} \qquad \widehat{\theta} = \frac{1}{\lambda}\theta \qquad \widehat{\phi} = \phi$$

Neste sistema de coordenadas $g(\lambda)$ é dada por

$$\widehat{g}(\lambda) = -\left(\lambda^2 - \frac{2}{\widehat{r}}\right) d\widehat{t}^2 + \left(\lambda^2 - \frac{2}{\widehat{r}}\right)^{-1} d\widehat{r}^2 + \widehat{r}^2 d\widehat{\theta}^2 + \left(\frac{\widehat{r}\sin\left(\lambda\widehat{\theta}\right)}{\lambda}\right)^2 d\widehat{\phi}^2.$$

Donde temos que $\widehat{g}(0) = \frac{2}{\widehat{r}} d\widehat{t}^2 - \frac{\widehat{r}}{2} d\widehat{r}^2 + \widehat{r}^2 d\widehat{\theta}^2 + \widehat{r}^2\widehat{\theta}^2 d\widehat{\phi}^2$ é uma solução no vácuo não-plana originalmente descoberta por Edward Kasner [Kas21].

O limite sobre as componentes da métrica

Considere a seguinte mudança de coordenadas:

$$\widehat{\Phi} : \begin{cases} \widehat{t} &= \dfrac{1}{\lambda} t \qquad\qquad \widehat{\theta} = \dfrac{1}{\lambda}\theta \\ \widehat{r} &= \lambda r \qquad\qquad \widehat{\phi} = \phi \end{cases}$$

Neste sistema de coordenadas $g(\lambda)$ é dada por

$$\widehat{g}(\lambda) = -\left(\lambda^2 - \frac{2}{\widehat{r}}\right) d\widehat{t}^2 + \left(\lambda^2 - \frac{2}{\widehat{r}}\right)^{-1} d\widehat{r}^2 + \widehat{r}^2 d\widehat{\theta}^2 + \left(\frac{\widehat{r}\sin\left(\lambda\widehat{\theta}\right)}{\lambda}\right)^2 d\widehat{\phi}^2.$$

Donde temos que $\widehat{g}(0) = \frac{2}{\widehat{r}} d\widehat{t}^2 - \frac{\widehat{r}}{2} d\widehat{r}^2 + \widehat{r}^2 d\widehat{\theta}^2 + \widehat{r}^2\widehat{\theta}^2 d\widehat{\phi}^2$ é uma solução no vácuo não-plana originalmente descoberta por Edward Kasner [Kas21].

O limite sobre as componentes da métrica

Considere a seguinte mudança de coordenadas:

$$\widehat{\Phi} : \begin{cases} \widehat{t} & = \dfrac{1}{\lambda} t \qquad\qquad \widehat{\theta} = \dfrac{1}{\lambda}\theta \\ \widehat{r} & = \lambda r \qquad\qquad \widehat{\phi} = \phi \end{cases}$$

Neste sistema de coordenadas $g(\lambda)$ é dada por

$$\widehat{g}(\lambda) = -\left(\lambda^2 - \frac{2}{\widehat{r}}\right) d\widehat{t}^2 + \left(\lambda^2 - \frac{2}{\widehat{r}}\right)^{-1} d\widehat{r}^2 + \widehat{r}^2 d\widehat{\theta}^2 + \left(\frac{\widehat{r} \sin\left(\lambda\widehat{\theta}\right)}{\lambda}\right)^2 d\widehat{\phi}^2.$$

Donde temos que $\widehat{g}(0) = \dfrac{2}{\widehat{r}} d\widehat{t}^2 - \dfrac{\widehat{r}}{2} d\widehat{r}^2 + \widehat{r}^2 d\widehat{\theta}^2 + \widehat{r}^2 \widehat{\theta}^2 d\widehat{\phi}^2$ é uma solução no vácuo não-plana originalmente descoberta por Edward Kasner [Kas21].

O limite sobre as componentes da métrica

Considere a seguinte mudança de coordenadas:

$$\widehat{\Phi}:\begin{cases}\widehat{t} &= \dfrac{1}{\lambda}t \qquad\qquad \widehat{\theta} = \dfrac{1}{\lambda}\theta\\ \widehat{r} &= \lambda r \qquad\qquad \widehat{\phi} = \phi\end{cases}$$

Neste sistema de coordenadas $g(\lambda)$ é dada por

$$\widehat{g}(\lambda) = -\left(\lambda^2 - \frac{2}{\widehat{r}}\right)d\widehat{t}^2 + \left(\lambda^2 - \frac{2}{\widehat{r}}\right)^{-1} d\widehat{r}^2 + \widehat{r}^2 d\widehat{\theta}^2 + \left(\frac{\widehat{r}\sin\left(\lambda\widehat{\theta}\right)}{\lambda}\right)^2 d\widehat{\phi}^2.$$

Donde temos que $\widehat{g}(0) = \frac{2}{\widehat{r}}d\widehat{t}^2 - \frac{\widehat{r}}{2}d\widehat{r}^2 + \widehat{r}^2 d\widehat{\theta}^2 + \widehat{r}^2\widehat{\theta}^2 d\widehat{\phi}^2$ é uma solução no vácuo não-plana originalmente descoberta por Edward Kasner [Kas21].

O limite sobre as componentes da métrica

```
M = Manifold(4, 'M', latex_name='M', structure='Lorentzian')
Chart.<t,r,theta,phi> = M.chart(r"t:(-oo,oo):\widehat{t} r:(0,+oo):\widehat{r} theta:(0,pi):
↪\widehat{\theta} phi:(0,2*pi):\widehat{\phi}")
Chart
```

$$\left(M, (\widehat{t}, \widehat{r}, \widehat{\theta}, \widehat{\phi})\right)$$

O limite sobre as componentes da métrica

```
M = Manifold(4, 'M', latex_name='M', structure='Lorentzian')
Chart.<t,r,theta,phi> = M.chart(r"t:(-oo,oo):\widehat{t} r:(0,+oo):\widehat{r} theta:(0,pi):
↪\widehat{\theta} phi:(0,2*pi):\widehat{\phi}")
Chart
```

$$\left(M, (\widehat{t}, \widehat{r}, \widehat{\theta}, \widehat{\phi})\right)$$

```
g = M.metric()
g[0,0] = 2/r
g[1,1] = -r/2
g[2,2] = r^2
g[3,3] = r^2*theta^2
g[:]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\widehat{r}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\,\widehat{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{r}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widehat{r}^2\widehat{\theta}^2 \end{pmatrix}$$

O limite sobre as componentes da métrica

```
Riemann = g.riemann()
Riemann.display()
```

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Riem}\left(g\right) = & -\frac{1}{\widehat{r}^{2}}\frac{\partial}{\partial\widehat{t}}\otimes \mathrm{d}\widehat{r}\otimes \mathrm{d}\widehat{t}\otimes \mathrm{d}\widehat{r} + \frac{1}{\widehat{r}^{2}}\frac{\partial}{\partial\widehat{t}}\otimes \mathrm{d}\widehat{r}\otimes \mathrm{d}\widehat{r}\otimes \mathrm{d}\widehat{t} - \frac{1}{\widehat{r}}\frac{\partial}{\partial\widehat{t}}\otimes \mathrm{d}\widehat{\theta}\otimes \mathrm{d}\widehat{t}\otimes \mathrm{d}\widehat{\theta} + \frac{1}{\widehat{r}}\frac{\partial}{\partial\widehat{t}}\otimes \mathrm{d}\widehat{\theta}\otimes \mathrm{d}\widehat{\theta}\otimes \mathrm{d}\widehat{t} \\
& -\frac{\widehat{\theta}^{2}}{\widehat{r}}\frac{\partial}{\partial\widehat{t}}\otimes \mathrm{d}\widehat{\phi}\otimes \mathrm{d}\widehat{t}\otimes \mathrm{d}\widehat{\phi} + \frac{\widehat{\theta}^{2}}{\widehat{r}}\frac{\partial}{\partial\widehat{t}}\otimes \mathrm{d}\widehat{\phi}\otimes \mathrm{d}\widehat{\phi}\otimes \mathrm{d}\widehat{t} - \frac{4}{\widehat{r}^{4}}\frac{\partial}{\partial\widehat{r}}\otimes \mathrm{d}\widehat{t}\otimes \mathrm{d}\widehat{t}\otimes \mathrm{d}\widehat{r} + \frac{4}{\widehat{r}^{4}}\frac{\partial}{\partial\widehat{r}}\otimes \mathrm{d}\widehat{t}\otimes \mathrm{d}\widehat{r}\otimes \mathrm{d}\widehat{t} \\
& -\frac{1}{\widehat{r}}\frac{\partial}{\partial\widehat{r}}\otimes \mathrm{d}\widehat{\theta}\otimes \mathrm{d}\widehat{r}\otimes \mathrm{d}\widehat{\theta} + \frac{1}{\widehat{r}}\frac{\partial}{\partial\widehat{r}}\otimes \mathrm{d}\widehat{\theta}\otimes \mathrm{d}\widehat{\theta}\otimes \mathrm{d}\widehat{r} - \frac{\widehat{\theta}^{2}}{\widehat{r}}\frac{\partial}{\partial\widehat{r}}\otimes \mathrm{d}\widehat{\phi}\otimes \mathrm{d}\widehat{r}\otimes \mathrm{d}\widehat{\phi} + \frac{\widehat{\theta}^{2}}{\widehat{r}}\frac{\partial}{\partial\widehat{r}}\otimes \mathrm{d}\widehat{\phi}\otimes \mathrm{d}\widehat{\phi}\otimes \mathrm{d}\widehat{r} \\
& +\frac{2}{\widehat{r}^{4}}\frac{\partial}{\partial\widehat{\theta}}\otimes \mathrm{d}\widehat{t}\otimes \mathrm{d}\widehat{t}\otimes \mathrm{d}\widehat{\theta} - \frac{2}{\widehat{r}^{4}}\frac{\partial}{\partial\widehat{\theta}}\otimes \mathrm{d}\widehat{t}\otimes \mathrm{d}\widehat{\theta}\otimes \mathrm{d}\widehat{t} - \frac{1}{2\,\widehat{r}^{2}}\frac{\partial}{\partial\widehat{\theta}}\otimes \mathrm{d}\widehat{r}\otimes \mathrm{d}\widehat{r}\otimes \mathrm{d}\widehat{\theta} + \frac{1}{2\,\widehat{r}^{2}}\frac{\partial}{\partial\widehat{\theta}}\otimes \mathrm{d}\widehat{r}\otimes \mathrm{d}\widehat{\theta}\otimes \mathrm{d}\widehat{r} \\
& +\frac{2\,\widehat{\theta}^{2}}{\widehat{r}}\frac{\partial}{\partial\widehat{\theta}}\otimes \mathrm{d}\widehat{\phi}\otimes \mathrm{d}\widehat{\theta}\otimes \mathrm{d}\widehat{\phi} - \frac{2\,\widehat{\theta}^{2}}{\widehat{r}}\frac{\partial}{\partial\widehat{\theta}}\otimes \mathrm{d}\widehat{\phi}\otimes \mathrm{d}\widehat{\phi}\otimes \mathrm{d}\widehat{\theta} + \frac{2}{\widehat{r}^{4}}\frac{\partial}{\partial\widehat{\phi}}\otimes \mathrm{d}\widehat{t}\otimes \mathrm{d}\widehat{t}\otimes \mathrm{d}\widehat{\phi} - \frac{2}{\widehat{r}^{4}}\frac{\partial}{\partial\widehat{\phi}}\otimes \mathrm{d}\widehat{t}\otimes \mathrm{d}\widehat{\phi}\otimes \mathrm{d}\widehat{t} \\
& -\frac{1}{2\,\widehat{r}^{2}}\frac{\partial}{\partial\widehat{\phi}}\otimes \mathrm{d}\widehat{r}\otimes \mathrm{d}\widehat{r}\otimes \mathrm{d}\widehat{\phi} + \frac{1}{2\,\widehat{r}^{2}}\frac{\partial}{\partial\widehat{\phi}}\otimes \mathrm{d}\widehat{r}\otimes \mathrm{d}\widehat{\phi}\otimes \mathrm{d}\widehat{r} - \frac{2}{\widehat{r}}\frac{\partial}{\partial\widehat{\phi}}\otimes \mathrm{d}\widehat{\theta}\otimes \mathrm{d}\widehat{\theta}\otimes \mathrm{d}\widehat{\phi} + \frac{2}{\widehat{r}}\frac{\partial}{\partial\widehat{\phi}}\otimes \mathrm{d}\widehat{\theta}\otimes \mathrm{d}\widehat{\phi}\otimes \mathrm{d}\widehat{\theta}
\end{aligned}
$$

O limite sobre as componentes da métrica

```
Ricci = g.ricci()
RicciScalar = g.ricci_scalar()
G = Ricci - (1/2)*RicciScalar*g
G[:]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Agora considere a seguinte mudança de coordenadas:

$$\overline{\Phi} : \begin{cases} \overline{t} = t & \overline{\theta} = \dfrac{1}{\lambda^4}\theta \\ \overline{r} = r + \dfrac{1}{\lambda^4} & \overline{\phi} = \phi \end{cases}$$

O limite sobre as componentes da métrica

```
Ricci = g.ricci()
RicciScalar = g.ricci_scalar()
G = Ricci - (1/2)*RicciScalar*g
G[:]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Agora considere a seguinte mudança de coordenadas:

$$\overline{\Phi} : \begin{cases} \overline{t} &= t \\ \overline{r} &= r + \dfrac{1}{\lambda^4} \end{cases} \qquad \begin{aligned} \overline{\theta} &= \frac{1}{\lambda^4}\theta \\ \overline{\phi} &= \phi \end{aligned}$$

O limite sobre as componentes da métrica

Neste sistema de coordenadas $g(\lambda)$ é dada por

$$\overline{g}(\lambda) = -\left(1 - \frac{2\lambda}{\lambda^4\overline{r} - 1}\right) d\overline{t}^2 + \left(1 - \frac{2\lambda}{\lambda^4\overline{r} - 1}\right)^{-1} d\overline{r}^2 + \left(\lambda^4\overline{r} - 1\right)^2 d\overline{\theta}^2 + \left(\overline{r}\sin\left(\lambda^4\overline{\theta}\right) - \frac{\sin\left(\lambda^4\overline{\theta}\right)}{\lambda^4}\right)^2 d\overline{\phi}^2.$$

Donde temos que $\overline{g}(0) = -d\overline{t}^2 + d\overline{r}^2 + d\overline{\theta}^2 + \overline{\theta}^2 d\overline{\phi}^2$ é uma solução no vácuo plana.

O limite sobre as componentes da métrica

Neste sistema de coordenadas $g(\lambda)$ é dada por

$$\overline{g}(\lambda) = -\left(1 - \frac{2\lambda}{\lambda^4\overline{r} - 1}\right) d\overline{t}^2 + \left(1 - \frac{2\lambda}{\lambda^4\overline{r} - 1}\right)^{-1} d\overline{r}^2 + \left(\lambda^4\overline{r} - 1\right)^2 d\overline{\theta}^2 + \left(\overline{r}\sin\left(\lambda^4\overline{\theta}\right) - \frac{\sin\left(\lambda^4\overline{\theta}\right)}{\lambda^4}\right)^2 d\overline{\phi}^2.$$

Donde temos que $\overline{g}(0) = -d\overline{t}^2 + d\overline{r}^2 + d\overline{\theta}^2 + \overline{\theta}^2 d\overline{\phi}^2$ é uma solução no vácuo plana.

O limite sobre as componentes da métrica

Neste sistema de coordenadas $g(\lambda)$ é dada por

$$\overline{g}(\lambda) = -\left(1 - \frac{2\lambda}{\lambda^4\overline{r} - 1}\right) d\overline{t}^2 + \left(1 - \frac{2\lambda}{\lambda^4\overline{r} - 1}\right)^{-1} d\overline{r}^2 + \left(\lambda^4\overline{r} - 1\right)^2 d\overline{\theta}^2 + \left(\overline{r}\sin\left(\lambda^4\overline{\theta}\right) - \frac{\sin\left(\lambda^4\overline{\theta}\right)}{\lambda^4}\right)^2 d\overline{\phi}^2.$$

Donde temos que $\overline{g}(0) = -d\overline{t}^2 + d\overline{r}^2 + d\overline{\theta}^2 + \overline{\theta}^2 d\overline{\phi}^2$ é uma solução no vácuo plana.

O limite sobre as componentes da métrica

Neste sistema de coordenadas $g(\lambda)$ é dada por

$$\overline{g}(\lambda) = -\left(1 - \frac{2\lambda}{\lambda^4\overline{r} - 1}\right) d\overline{t}^2 + \left(1 - \frac{2\lambda}{\lambda^4\overline{r} - 1}\right)^{-1} d\overline{r}^2 + \left(\lambda^4\overline{r} - 1\right)^2 d\overline{\theta}^2 + \left(\overline{r}\sin\left(\lambda^4\overline{\theta}\right) - \frac{\sin\left(\lambda^4\overline{\theta}\right)}{\lambda^4}\right)^2 d\overline{\phi}^2.$$

Donde temos que $\overline{g}(0) = -d\overline{t}^2 + d\overline{r}^2 + d\overline{\theta}^2 + \overline{\theta}^2 d\overline{\phi}^2$ é uma solução no vácuo plana.

```
M = Manifold(4, 'M', latex_name='M', structure='Lorentzian')
Chart.<t,r,theta,phi> = M.chart(r"t:(-oo,oo):\overline{t} r:(0,+oo):\overline{r} theta:(0,pi):
 ↪\overline{\theta} phi:(0,2*pi):\overline{\phi}")
Chart
```

$$\left(M, (\overline{t}, \overline{r}, \overline{\theta}, \overline{\phi})\right)$$

O limite sobre as componentes da métrica

```
g = M.metric()
g[0,0] = -1
g[1,1] = 1
g[2,2] = 1
g[3,3] = theta^2
g[:]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\theta}^2 \end{pmatrix}$$

O limite sobre as componentes da métrica

```
g = M.metric()
g[0,0] = -1
g[1,1] = 1
g[2,2] = 1
g[3,3] = theta^2
g[:]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\theta}^{2} \end{pmatrix}$$

```
Riemann = g.riemann()
Riemann.display()
```

$$\mathrm{Riem}\left(g\right) = 0$$

O limite sobre as componentes da métrica

```
Ricci = g.ricci()
RicciScalar = g.ricci_scalar()
G = Ricci - (1/2)*RicciScalar*g
G[:]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \overline{g}(\lambda) \arrow[r, "\lambda \downarrow 0"] & \text{Solução plana} \\
\text{“Divergente”} & g(\lambda) \arrow[l, "\lambda \downarrow 0"'] \arrow[ur, "\overline{\Phi}"] \arrow[dr, "\widehat{\Phi}"'] & & \\
 & & \widehat{g}(\lambda) \arrow[r, "\lambda \downarrow 0"] & \text{Kasner}
\end{tikzcd}$$

O limite sobre as componentes da métrica

```
Ricci = g.ricci()
RicciScalar = g.ricci_scalar()
G = Ricci - (1/2)*RicciScalar*g
G[:]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \overline{g}(\lambda) \arrow[r, "\lambda \downarrow 0"] & \text{Solução plana} \\
\text{“Divergente”} & g(\lambda) \arrow[l, "\lambda \downarrow 0"'] \arrow[ur, "\overline{\Phi}"] \arrow[dr, "\widehat{\Phi}"'] & & \\
 & & \widehat{g}(\lambda) \arrow[r, "\lambda \downarrow 0"] & \text{Kasner}
\end{tikzcd}$$

O limite sobre as componentes da métrica

- A métrica de Reissner-Nordström

Considere a família de métricas $g(e)$ a 1-parâmetro ($e > 0$) dada por

$$g(e) = -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2,$$

onde $m > 0$ está fixado. Esta família é conhecida como métrica de Reissner-Nordström. Note que

$$\begin{aligned} g(m) &= -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{m^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{m^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \\ &= -\left(1 - \frac{m}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{m}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \end{aligned}$$

é conhecida como métrica de Reissner-Nordström extrema.

O limite sobre as componentes da métrica

- A métrica de Reissner-Nordström

Considere a família de métricas $g(e)$ a 1-parâmetro $(e > 0)$ dada por

$$g(e) = -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2,$$

onde $m > 0$ está fixado. Esta família é conhecida como métrica de Reissner-Nordström. Note que

$$\begin{aligned} g(m) &= -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{m^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{m^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \\ &= -\left(1 - \frac{m}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{m}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \end{aligned}$$

é conhecida como métrica de Reissner-Nordström extrema.

O limite sobre as componentes da métrica

- A métrica de Reissner-Nordström

Considere a família de métricas $g(e)$ a 1-parâmetro ($e > 0$) dada por

$$g(e) = -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2,$$

onde $m > 0$ está fixado. Esta família é conhecida como métrica de Reissner-Nordström. Note que

$$\begin{aligned} g(m) &= -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{m^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{m^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \\ &= -\left(1 - \frac{m}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{m}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \end{aligned}$$

é conhecida como métrica de Reissner-Nordström extrema.

O limite sobre as componentes da métrica

- A métrica de Reissner-Nordström

Considere a família de métricas $g(e)$ a 1-parâmetro $(e > 0)$ dada por

$$g(e) = -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2,$$

onde $m > 0$ está fixado. Esta família é conhecida como métrica de Reissner-Nordström. Note que

$$\begin{aligned} g(m) &= -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{m^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{m^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \\ &= -\left(1 - \frac{m}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{m}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \end{aligned}$$

é conhecida como métrica de Reissner-Nordström extrema.

O limite sobre as componentes da métrica

- A métrica de Reissner-Nordström

Considere a família de métricas $g(e)$ a 1-parâmetro ($e > 0$) dada por

$$g(e) = -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2,$$

onde $m > 0$ está fixado. Esta família é conhecida como métrica de Reissner-Nordström. Note que

$$\begin{aligned} g(m) &= -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{m^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{m^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \\ &= -\left(1 - \frac{m}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{m}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \end{aligned}$$

é conhecida como métrica de Reissner-Nordström extrema.

O limite sobre as componentes da métrica

- A métrica de Reissner-Nordström

Considere a família de métricas $g(e)$ a 1-parâmetro ($e > 0$) dada por

$$g(e) = -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2,$$

onde $m > 0$ está fixado. Esta família é conhecida como métrica de Reissner-Nordström. Note que

$$\begin{aligned} g(m) &= -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{m^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{m^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \\ &= -\left(1 - \frac{m}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{m}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \end{aligned}$$

é conhecida como métrica de Reissner-Nordström extrema.

O limite sobre as componentes da métrica

Considere a seguinte mudança de coordenadas:

$$\widehat{\Phi} : \begin{cases} \widehat{t} &= \dfrac{\sqrt{m^2 - e^2}\, t}{m^2} \\ \widehat{r} &= \dfrac{r - m}{\sqrt{m^2 - e^2}} \end{cases} \qquad \begin{aligned} \widehat{\theta} &= \theta \\ \widehat{\phi} &= \phi \end{aligned}$$

Neste sistema de coordenadas $g(e)$ é dada por

$$\begin{aligned} \widehat{g}(e) = &- \left(\frac{m^5 \widehat{r}^2 - m^5 + \left(m^4 \widehat{r}^3 - m^4 \widehat{r}\right)\sqrt{e+m}\sqrt{-e+m}}{m^3 - 3\left(e^2 m - m^3\right)\widehat{r}^2 - \left(\left(e^2 - m^2\right)\widehat{r}^3 - 3\, m^2 \widehat{r}\right)\sqrt{e+m}\sqrt{-e+m}} \right) d\widehat{t}^2 \\ &+ \left(\frac{m^3 - 3\left(e^2 m - m^3\right)\widehat{r}^2 - \left(\left(e^2 - m^2\right)\widehat{r}^3 - 3\, m^2 \widehat{r}\right)\sqrt{e+m}\sqrt{-e+m}}{m\widehat{r}^2 + \left(\widehat{r}^3 - \widehat{r}\right)\sqrt{e+m}\sqrt{-e+m} - m} \right) d\widehat{r}^2 \\ &+ \left(2\sqrt{e+m}\sqrt{-e+m}\, m\widehat{r} - \left(e^2 - m^2\right)\widehat{r}^2 + m^2\right) d\widehat{\theta}^2 \\ &+ \left(2\sqrt{e+m}\sqrt{-e+m}\, m\widehat{r} \sin\left(\widehat{\theta}\right)^2 - \left(\left(e^2 - m^2\right)\widehat{r}^2 - m^2\right)\sin\left(\widehat{\theta}\right)^2\right) d\widehat{\phi}^2 \end{aligned}$$

O limite sobre as componentes da métrica

Considere a seguinte mudança de coordenadas:

$$\widehat{\Phi}: \begin{cases} \widehat{t} &= \dfrac{\sqrt{m^2 - e^2}\, t}{m^2} \\ \widehat{r} &= \dfrac{r - m}{\sqrt{m^2 - e^2}} \end{cases} \qquad \begin{aligned} \widehat{\theta} &= \theta \\ \widehat{\phi} &= \phi \end{aligned}$$

Neste sistema de coordenadas $g(e)$ é dada por

$$\begin{aligned} \widehat{g}(e) = &-\left(\frac{m^5\widehat{r}^2 - m^5 + \left(m^4\widehat{r}^3 - m^4\widehat{r}\right)\sqrt{e+m}\sqrt{-e+m}}{m^3 - 3\left(e^2 m - m^3\right)\widehat{r}^2 - \left(\left(e^2 - m^2\right)\widehat{r}^3 - 3\, m^2\widehat{r}\right)\sqrt{e+m}\sqrt{-e+m}}\right) d\widehat{t}^2 \\ &+ \left(\frac{m^3 - 3\left(e^2 m - m^3\right)\widehat{r}^2 - \left(\left(e^2 - m^2\right)\widehat{r}^3 - 3\, m^2\widehat{r}\right)\sqrt{e+m}\sqrt{-e+m}}{m\widehat{r}^2 + \left(\widehat{r}^3 - \widehat{r}\right)\sqrt{e+m}\sqrt{-e+m} - m}\right) d\widehat{r}^2 \\ &+ \left(2\sqrt{e+m}\sqrt{-e+m}\, m\widehat{r} - \left(e^2 - m^2\right)\widehat{r}^2 + m^2\right) d\widehat{\theta}^2 \\ &+ \left(2\sqrt{e+m}\sqrt{-e+m}\, m\widehat{r}\sin\left(\widehat{\theta}\right)^2 - \left(\left(e^2 - m^2\right)\widehat{r}^2 - m^2\right)\sin\left(\widehat{\theta}\right)^2\right) d\widehat{\phi}^2 \end{aligned}$$

O limite sobre as componentes da métrica

Donde temos que $\widehat{g}(m) = m^2 \left(-\left(\widehat{r}^2 - 1\right) d\widehat{t}^2 + \left(\widehat{r}^2 - 1\right)^{-1} d\widehat{r}^2 + d\widehat{\theta}^2 + \sin^2\left(\widehat{\theta}\right) d\widehat{\phi}^2 \right)$ é conhecida como a métrica de Bertotti-Robinson $\left(AdS_2 \otimes \mathbb{S}^2\right)$ (uma métrica conformalmente plana).

O limite sobre as componentes da métrica

Donde temos que $\widehat{g}(m) = m^2 \left(- \left(\widehat{r}^2 - 1 \right) d\widehat{t}^2 + \left(\widehat{r}^2 - 1 \right)^{-1} d\widehat{r}^2 + d\widehat{\theta}^2 + \sin^2\left(\widehat{\theta}\right) d\widehat{\phi}^2 \right)$ é conhecida como a métrica de Bertotti-Robinson $\left(AdS_2 \otimes \mathbb{S}^2\right)$ (uma métrica conformalmente plana).

O limite sobre as componentes da métrica

Donde temos que $\widehat{g}(m) = m^2 \left(-\left(\widehat{r}^2 - 1\right) d\widehat{t}^2 + \left(\widehat{r}^2 - 1\right)^{-1} d\widehat{r}^2 + d\widehat{\theta}^2 + \sin^2\left(\widehat{\theta}\right) d\widehat{\phi}^2 \right)$ é conhecida como a métrica de Bertotti-Robinson $\left(AdS_2 \otimes \mathbb{S}^2\right)$ (uma métrica conformalmente plana).

```
M = Manifold(4, 'M', latex_name='M', structure='Lorentzian')
Chart.<t,r,theta,phi> = M.chart(r"t:(-oo,oo):\widehat{t} r:(0,+oo):\widehat{r} theta:(0,pi):
↪\widehat{\theta} phi:(0,2*pi):\widehat{\phi}")
Chart
```

$$\left(M, (\widehat{t}, \widehat{r}, \widehat{\theta}, \widehat{\phi})\right)$$

O limite sobre as componentes da métrica

```
g = M.metric()
m = var('m')
g[0,0] = m^2*(-(r^2-1))
g[1,1] = m^2*(1/(r^2-1))
g[2,2] = m^2
g[3,3] = m^2*sin(theta)^2
g[:]
```

$$\begin{pmatrix} -\left(\hat{r}^2 - 1\right)m^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m^2}{\hat{r}^2-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m^2 \sin\left(\hat{\theta}\right)^2 \end{pmatrix}$$

O limite sobre as componentes da métrica

```
g = M.metric()
m = var('m')
g[0,0] = m^2*(-(r^2-1))
g[1,1] = m^2*(1/(r^2-1))
g[2,2] = m^2
g[3,3] = m^2*sin(theta)^2
g[:]
```

$$\begin{pmatrix} -\left(\hat{r}^2-1\right)m^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m^2}{\hat{r}^2-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m^2\sin\left(\hat{\theta}\right)^2 \end{pmatrix}$$

```
C = g.weyl()
C.display()
```

$$\mathrm{C}\left(g\right) = 0$$

O limite sobre as componentes da métrica

$$\text{Reissner-Nordström extrema} \xleftarrow{e \downarrow m} g(e) \xrightarrow{\widehat{\Phi}} \widehat{g}(e) \xrightarrow{e \downarrow m} \text{Bertotti-Robinson}$$

Ainda olhando para a métrica

$$g(e) = -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2.$$

Note que $g(0) = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2$ é conhecida como métrica de Schwarzschild.

O limite sobre as componentes da métrica

$$\text{Reissner-Nordström extrema} \xleftarrow{e \downarrow m} g(e) \xrightarrow{\widehat{\Phi}} \widehat{g}(e) \xrightarrow{e \downarrow m} \text{Bertotti-Robinson}$$

Ainda olhando para a métrica

$$g(e) = -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2.$$

Note que $g(0) = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2$ é conhecida como métrica de Schwarzschild.

O limite sobre as componentes da métrica

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Reissner-Nordström}\\\text{extrema}\end{array} \xleftarrow{e \downarrow m} g(e) \xrightarrow{\widehat{\Phi}} \widehat{g}(e) \xrightarrow{e \downarrow m} \text{Bertotti-Robinson}}$$

Ainda olhando para a métrica

$$g(e) = -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2.$$

Note que $g(0) = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2$ é conhecida como métrica de Schwarzschild.

O limite sobre as componentes da métrica

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Reissner-Nordström} \\ \text{extrema}\end{array} \xleftarrow{e \downarrow m} g(e) \xrightarrow{\widehat{\Phi}} \widehat{g}(e) \xrightarrow{e \downarrow m} \text{Bertotti-Robinson}}$$

Ainda olhando para a métrica

$$g(e) = -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2.$$

Note que $g(0) = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2$ é conhecida como métrica de Schwarzschild.

O limite sobre as componentes da métrica

Considere a seguinte mudança de coordenadas:

$$\overline{\Phi} : \begin{cases} \overline{t} & = t \\ \overline{r} & = r + \dfrac{1}{e} \end{cases} \qquad \begin{aligned} \overline{\theta} &= \frac{\theta}{e} \\ \overline{\phi} &= \phi \end{aligned}$$

Neste sistema de coordenadas $g(e)$ é dada por

$$\overline{g}(e) = -\left(\frac{e^4 + e^2\overline{r}^2 + 2\,em - 2\left(e^2m + e\right)\overline{r} + 1}{e^2\overline{r}^2 - 2\,e\overline{r} + 1}\right) d\overline{t}^2 + \left(\frac{e^2\overline{r}^2 - 2\,e\overline{r} + 1}{e^4 + e^2\overline{r}^2 + 2\,em - 2\left(e^2m + e\right)\overline{r} + 1}\right) d\overline{r}^2$$
$$+ \left(e^2\overline{r}^2 - 2\,e\overline{r} + 1\right) d\overline{\theta}^2 + \left(\frac{\left(e^2\overline{r}^2 - 2\,e\overline{r} + 1\right)\sin\left(e\overline{\theta}\right)^2}{e^2}\right) d\overline{\phi}^2$$

Donde temos que $\overline{g}(0) = -d\overline{t}^2 + d\overline{r}^2 + d\overline{\theta}^2 + \overline{\theta}^2 d\overline{\phi}^2$ é uma solução no vácuo plana.

$$\text{Schwarzschild} \xleftarrow{e \downarrow 0} g(e) \xrightarrow{\overline{\Phi}} \overline{g}(e) \xrightarrow{e \downarrow 0} \text{Solução plana}$$

O limite sobre as componentes da métrica

Considere a seguinte mudança de coordenadas:

$$\overline{\Phi} : \begin{cases} \overline{t} &= t \\ \overline{r} &= r + \dfrac{1}{e} \end{cases} \qquad \overline{\theta} = \frac{\theta}{e} \qquad \overline{\phi} = \phi$$

Neste sistema de coordenadas $g(e)$ é dada por

$$\overline{g}(e) = -\left(\frac{e^4 + e^2\overline{r}^2 + 2\,em - 2\left(e^2 m + e\right)\overline{r} + 1}{e^2\overline{r}^2 - 2\,e\overline{r} + 1}\right) d\overline{t}^2 + \left(\frac{e^2\overline{r}^2 - 2\,e\overline{r} + 1}{e^4 + e^2\overline{r}^2 + 2\,em - 2\left(e^2 m + e\right)\overline{r} + 1}\right) d\overline{r}^2$$

$$+ \left(e^2\overline{r}^2 - 2\,e\overline{r} + 1\right) d\overline{\theta}^2 + \left(\frac{\left(e^2\overline{r}^2 - 2\,e\overline{r} + 1\right)\sin\left(e\overline{\theta}\right)^2}{e^2}\right) d\overline{\phi}^2$$

Donde temos que $\overline{g}(0) = -d\overline{t}^2 + d\overline{r}^2 + d\overline{\theta}^2 + \overline{\theta}^2 d\overline{\phi}^2$ é uma solução no vácuo plana.

$$\text{Schwarzschild} \xleftarrow{e \downarrow 0} g(e) \xrightarrow{\overline{\Phi}} \overline{g}(e) \xrightarrow{e \downarrow 0} \begin{array}{c}\text{Solução}\\ \text{plana}\end{array}$$

O limite sobre as componentes da métrica

Considere a seguinte mudança de coordenadas:

$$\overline{\Phi} : \begin{cases} \overline{t} &= t \\ \overline{r} &= r + \dfrac{1}{e} \end{cases} \qquad \begin{aligned} \overline{\theta} &= \frac{\theta}{e} \\ \overline{\phi} &= \phi \end{aligned}$$

Neste sistema de coordenadas $g(e)$ é dada por

$$\overline{g}(e) = -\left(\frac{e^4 + e^2\overline{r}^2 + 2\,em - 2\left(e^2 m + e\right)\overline{r} + 1}{e^2\overline{r}^2 - 2\,e\overline{r} + 1}\right) d\overline{t}^2 + \left(\frac{e^2\overline{r}^2 - 2\,e\overline{r} + 1}{e^4 + e^2\overline{r}^2 + 2\,em - 2\left(e^2 m + e\right)\overline{r} + 1}\right) d\overline{r}^2$$
$$+ \left(e^2\overline{r}^2 - 2\,e\overline{r} + 1\right) d\overline{\theta}^2 + \left(\frac{\left(e^2\overline{r}^2 - 2\,e\overline{r} + 1\right)\sin\left(e\overline{\theta}\right)^2}{e^2}\right) d\overline{\phi}^2$$

Donde temos que $\overline{g}(0) = -d\overline{t}^2 + d\overline{r}^2 + d\overline{\theta}^2 + \overline{\theta}^2 d\overline{\phi}^2$ é uma solução no vácuo plana.

$$\text{Schwarzschild} \xleftarrow{e \downarrow 0} g(e) \xrightarrow{\overline{\Phi}} \overline{g}(e) \xrightarrow{e \downarrow 0} \text{Solução plana}$$

O limite sobre as componentes da métrica

Considere a seguinte mudança de coordenadas:

$$\overline{\Phi} : \begin{cases} \overline{t} & = t \\ \overline{r} & = r + \dfrac{1}{e} \end{cases} \qquad \begin{aligned} \overline{\theta} &= \frac{\theta}{e} \\ \overline{\phi} &= \phi \end{aligned}$$

Neste sistema de coordenadas $g(e)$ é dada por

$$\overline{g}(e) = -\left(\frac{e^4 + e^2\overline{r}^2 + 2\,em - 2\,(e^2 m + e)\overline{r} + 1}{e^2\overline{r}^2 - 2\,e\overline{r} + 1}\right) d\overline{t}^2 + \left(\frac{e^2\overline{r}^2 - 2\,e\overline{r} + 1}{e^4 + e^2\overline{r}^2 + 2\,em - 2\,(e^2 m + e)\overline{r} + 1}\right) d\overline{r}^2$$
$$+ \left(e^2\overline{r}^2 - 2\,e\overline{r} + 1\right) d\overline{\theta}^2 + \left(\frac{\left(e^2\overline{r}^2 - 2\,e\overline{r} + 1\right)\sin\left(e\overline{\theta}\right)^2}{e^2}\right) d\overline{\phi}^2$$

Donde temos que $\overline{g}(0) = -d\overline{t}^2 + d\overline{r}^2 + d\overline{\theta}^2 + \overline{\theta}^2 d\overline{\phi}^2$ é uma solução no vácuo plana.

$$\text{Schwarzschild} \xleftarrow{e \downarrow 0} g(e) \xrightarrow{\overline{\Phi}} \overline{g}(e) \xrightarrow{e \downarrow 0} \text{Solução plana}$$

O limite sobre as componentes da métrica

Considere a seguinte mudança de coordenadas:

$$\overline{\Phi} : \begin{cases} \bar{t} &= t \\ \bar{r} &= r + \dfrac{1}{e} \end{cases} \qquad \bar{\theta} = \frac{\theta}{e} \qquad \bar{\phi} = \phi$$

Neste sistema de coordenadas $g(e)$ é dada por

$$\bar{g}(e) = -\left(\frac{e^4 + e^2\bar{r}^2 + 2\,em - 2\,(e^2 m + e)\bar{r} + 1}{e^2\bar{r}^2 - 2\,e\bar{r} + 1}\right) d\bar{t}^2 + \left(\frac{e^2\bar{r}^2 - 2\,e\bar{r} + 1}{e^4 + e^2\bar{r}^2 + 2\,em - 2\,(e^2 m + e)\bar{r} + 1}\right) d\bar{r}^2 + (e^2\bar{r}^2 - 2\,e\bar{r} + 1)\, d\bar{\theta}^2 + \left(\frac{(e^2\bar{r}^2 - 2\,e\bar{r} + 1)\sin\left(e\bar{\theta}\right)^2}{e^2}\right) d\bar{\phi}^2$$

Donde temos que $\bar{g}(0) = -d\bar{t}^2 + d\bar{r}^2 + d\bar{\theta}^2 + \bar{\theta}^2 d\bar{\phi}^2$ é uma solução no vácuo plana.

$$\boxed{\text{Schwarzschild} \xleftarrow{e \downarrow 0} g(e) \xrightarrow{\overline{\Phi}} \bar{g}(e) \xrightarrow{e \downarrow 0} \text{Solução plana}}$$

O limite sobre as componentes da métrica

- A métrica de Kerr

Considere a família de métricas $g(a)$ a 1-parâmetro $(a > 0)$ dada por

$$g(a) = -\left(1 - \frac{2mr}{a^2\cos^2(\theta) + r^2}\right)dt^2 - \left(\frac{4amr\sin^2(\theta)}{a^2\cos^2(\theta) + r^2}\right)dtd\phi$$
$$+ \left(\frac{a^2\cos^2(\theta) + r^2}{a^2 - 2mr + r^2}\right)dr^2 + \left(a^2\cos^2(\theta) + r^2\right)d\theta^2$$
$$+ \left(\frac{2a^2mr\sin^4(\theta)}{a^2\cos^2(\theta) + r^2} + \left(a^2 + r^2\right)\sin^2(\theta)\right)d\phi^2,$$

onde $m > 0$ está fixado. Esta família é conhecida com métrica de Kerr.

O limite sobre as componentes da métrica

- A métrica de Kerr

Considere a família de métricas $g(a)$ a 1-parâmetro $(a > 0)$ dada por

$$g(a) = -\left(1 - \frac{2mr}{a^2\cos^2(\theta) + r^2}\right)dt^2 - \left(\frac{4amr\sin^2(\theta)}{a^2\cos^2(\theta) + r^2}\right)dtd\phi$$
$$+ \left(\frac{a^2\cos^2(\theta) + r^2}{a^2 - 2mr + r^2}\right)dr^2 + \left(a^2\cos^2(\theta) + r^2\right)d\theta^2$$
$$+ \left(\frac{2a^2mr\sin^4(\theta)}{a^2\cos^2(\theta) + r^2} + \left(a^2 + r^2\right)\sin^2(\theta)\right)d\phi^2,$$

onde $m > 0$ está fixado. Esta família é conhecida com métrica de Kerr.

O limite sobre as componentes da métrica

- A métrica de Kerr

Considere a família de métricas $g(a)$ a 1-parâmetro $(a > 0)$ dada por

$$
\begin{aligned}
g(a) = &-\left(1 - \frac{2mr}{a^2\cos^2(\theta) + r^2}\right) dt^2 - \left(\frac{4amr\sin^2(\theta)}{a^2\cos^2(\theta) + r^2}\right) dtd\phi \\
&+ \left(\frac{a^2\cos^2(\theta) + r^2}{a^2 - 2mr + r^2}\right) dr^2 + \left(a^2\cos^2(\theta) + r^2\right) d\theta^2 \\
&+ \left(\frac{2a^2mr\sin^4(\theta)}{a^2\cos^2(\theta) + r^2} + \left(a^2 + r^2\right)\sin^2(\theta)\right) d\phi^2,
\end{aligned}
$$

onde $m > 0$ está fixado. Esta família é conhecida com métrica de Kerr.

O limite sobre as componentes da métrica

- A métrica de Kerr

Considere a família de métricas $g(a)$ a 1-parâmetro $(a > 0)$ dada por

$$g(a) = -\left(1 - \frac{2mr}{a^2\cos^2(\theta) + r^2}\right) dt^2 - \left(\frac{4amr\sin^2(\theta)}{a^2\cos^2(\theta) + r^2}\right) dtd\phi + \left(\frac{a^2\cos^2(\theta) + r^2}{a^2 - 2mr + r^2}\right) dr^2 + \left(a^2\cos^2(\theta) + r^2\right) d\theta^2 + \left(\frac{2a^2mr\sin^4(\theta)}{a^2\cos^2(\theta) + r^2} + \left(a^2 + r^2\right)\sin^2(\theta)\right) d\phi^2,$$

onde $m > 0$ está fixado. Esta família é conhecida com métrica de Kerr.

O limite sobre as componentes da métrica

Note que

$$
\begin{aligned}
g(0) = &-\left(1 - \frac{2mr}{0\cos^2(\theta) + r^2}\right) dt^2 - \left(\frac{4 \cdot 0 \cdot mr\sin^2(\theta)}{0\cos^2(\theta) + r^2}\right) dt d\phi \\
&+ \left(\frac{0\cos^2(\theta) + r^2}{0 - 2mr + r^2}\right) dr^2 + \left(0\cos^2(\theta) + r^2\right) d\theta^2 \\
&+ \left(\frac{2 \cdot 0 \cdot mr\sin^4(\theta)}{0\cos^2(\theta) + r^2} + \left(0 + r^2\right)\sin^2(\theta)\right) d\phi^2 \\
= &-\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta) d\phi^2
\end{aligned}
$$

é conhecida como a métrica de Schwarzschild. Considere a seguinte mudança de coordenadas:

$$
\overline{\Phi} : \begin{cases} \overline{t} &= t \\ \overline{r} &= r - \dfrac{1}{a} \end{cases} \qquad \begin{aligned} \overline{\theta} &= \frac{\theta}{a} \\ \overline{\phi} &= \phi \end{aligned}
$$

O limite sobre as componentes da métrica

Note que

$$
\begin{aligned}
g(0) = &-\left(1-\frac{2mr}{0\cos^2(\theta)+r^2}\right)dt^2-\left(\frac{4\cdot 0\cdot mr\sin^2(\theta)}{0\cos^2(\theta)+r^2}\right)dtd\phi \\
&+\left(\frac{0\cos^2(\theta)+r^2}{0-2mr+r^2}\right)dr^2+\left(0\cos^2(\theta)+r^2\right)d\theta^2 \\
&+\left(\frac{2\cdot 0\cdot mr\sin^4(\theta)}{0\cos^2(\theta)+r^2}+\left(0+r^2\right)\sin^2(\theta)\right)d\phi^2 \\
= &-\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2+\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2(\theta)d\phi^2
\end{aligned}
$$

é conhecida como a métrica de Schwarzschild. Considere a seguinte mudança de coordenadas:

$$
\overline{\Phi}:\begin{cases}\overline{t} &= t \\ \overline{r} &= r-\dfrac{1}{a}\end{cases} \qquad \begin{aligned}\overline{\theta} &= \frac{\theta}{a} \\ \overline{\phi} &= \phi\end{aligned}
$$

O limite sobre as componentes da métrica

Note que

$$
\begin{aligned}
g(0) = &-\left(1-\frac{2mr}{0\cos^2(\theta)+r^2}\right)dt^2-\left(\frac{4\cdot 0\cdot mr\sin^2(\theta)}{0\cos^2(\theta)+r^2}\right)dtd\phi \\
&+\left(\frac{0\cos^2(\theta)+r^2}{0-2mr+r^2}\right)dr^2+\left(0\cos^2(\theta)+r^2\right)d\theta^2 \\
&+\left(\frac{2\cdot 0\cdot mr\sin^4(\theta)}{0\cos^2(\theta)+r^2}+\left(0+r^2\right)\sin^2(\theta)\right)d\phi^2 \\
= &-\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2+\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2(\theta)d\phi^2
\end{aligned}
$$

é conhecida como a métrica de Schwarzschild. Considere a seguinte mudança de coordenadas:

$$
\overline{\Phi}:\begin{cases}\overline{t} &= t \\ \overline{r} &= r-\dfrac{1}{a}\end{cases}
\qquad
\begin{aligned}\overline{\theta} &= \frac{\theta}{a} \\ \overline{\phi} &= \phi\end{aligned}
$$

O limite sobre as componentes da métrica

Neste sistema de coordenadas $g(a)$ é dada por

$$
\begin{aligned}
\overline{g}(a) = &-\left(\frac{a^4\cos\left(a\overline{\theta}\right)^2 + a^2\overline{r}^2 - 2\,am - 2\left(a^2m - a\right)\overline{r} + 1}{a^4\cos\left(a\overline{\theta}\right)^2 + a^2\overline{r}^2 + 2\,a\overline{r} + 1}\right)d\overline{t}^2 \\
&-\left(\frac{4\left(a^3m\overline{r} + a^2m\right)\sin\left(a\overline{\theta}\right)^2}{a^4\cos\left(a\overline{\theta}\right)^2 + a^2\overline{r}^2 + 2\,a\overline{r} + 1}\right)d\overline{t}d\overline{\phi} + \left(\frac{a^4\cos\left(a\overline{\theta}\right)^2 + a^2\overline{r}^2 - 2\,am - 2\left(a^2m - a\right)\overline{r} + 1}{a^4\cos\left(a\overline{\theta}\right)^2 + a^2\overline{r}^2 + 2\,a\overline{r} + 1}\right)d\overline{r}^2 \\
&+\left(a^4\cos\left(a\overline{\theta}\right)^2 + a^2\overline{r}^2 + 2\,a\overline{r} + 1\right)d\overline{\theta}^2 \\
&+\left(\frac{2\left(a^6m\overline{r}+a^5m\right)\sin\left(a\overline{\theta}\right)^4+\left(a^4\overline{r}^4+4\,a^3\overline{r}^3+a^4+\left(a^6+6\,a^2\right)\overline{r}^2+\left(a^8+a^6\overline{r}^2+2\,a^5\overline{r}+a^4\right)\cos\left(a\overline{\theta}\right)^2+2\left(a^5+2\,a\right)\overline{r}+1\right)\sin\left(a\overline{\theta}\right)^2}{a^6\cos\left(a\overline{\theta}\right)^2+a^4\overline{r}^2+2\,a^3\overline{r}+a^2}\right)d\overline{\phi}^2
\end{aligned}
$$

Donde temos que $\overline{g}(0) = -d\overline{t}^2 + d\overline{r}^2 + d\overline{\theta}^2 + \overline{\theta}^2 d\overline{\phi}^2$ é uma solução no vácuo plana.

$$\text{Schwarzschild} \xleftarrow{\;a\downarrow 0\;} g(a) \xrightarrow{\;\overline{\Phi}\;} \overline{g}(a) \xrightarrow{\;a\downarrow 0\;} \begin{array}{c}\text{Solução}\\ \text{plana}\end{array}$$

O limite sobre as componentes da métrica

Neste sistema de coordenadas $g(a)$ é dada por

$$
\begin{aligned}
\overline{g}(a) = &- \left(\frac{a^4 \cos\left(a\overline{\theta}\right)^2 + a^2\overline{r}^2 - 2\,am - 2\left(a^2 m - a\right)\overline{r} + 1}{a^4 \cos\left(a\overline{\theta}\right)^2 + a^2\overline{r}^2 + 2\,a\overline{r} + 1} \right) d\overline{t}^2 \\
&- \left(\frac{4\left(a^3 m\overline{r} + a^2 m\right) \sin\left(a\overline{\theta}\right)^2}{a^4 \cos\left(a\overline{\theta}\right)^2 + a^2\overline{r}^2 + 2\,a\overline{r} + 1} \right) d\overline{t}d\overline{\phi} + \left(\frac{a^4 \cos\left(a\overline{\theta}\right)^2 + a^2\overline{r}^2 - 2\,am - 2\left(a^2 m - a\right)\overline{r} + 1}{a^4 \cos\left(a\overline{\theta}\right)^2 + a^2\overline{r}^2 + 2\,a\overline{r} + 1} \right) d\overline{r}^2 \\
&+ \left(a^4 \cos\left(a\overline{\theta}\right)^2 + a^2\overline{r}^2 + 2\,a\overline{r} + 1 \right) d\overline{\theta}^2 \\
&+ \left(\frac{2\left(a^6 m\overline{r} + a^5 m\right)\sin\left(a\overline{\theta}\right)^4 + \left(a^4\overline{r}^4 + 4\,a^3\overline{r}^3 + a^4 + \left(a^6 + 6\,a^2\right)\overline{r}^2 + \left(a^8 + a^6\overline{r}^2 + 2\,a^5\overline{r} + a^4\right)\cos\left(a\overline{\theta}\right)^2 + 2\left(a^5 + 2\,a\right)\overline{r} + 1\right)\sin\left(a\overline{\theta}\right)^2}{a^6\cos\left(a\overline{\theta}\right)^2 + a^4\overline{r}^2 + 2\,a^3\overline{r} + a^2} \right) d\overline{\phi}^2
\end{aligned}
$$

Donde temos que $\overline{g}(0) = -d\overline{t}^2 + d\overline{r}^2 + d\overline{\theta}^2 + \overline{\theta}^2 d\overline{\phi}^2$ é uma solução no vácuo plana.

$$
\text{Schwarzschild} \xleftarrow{a \downarrow 0} g(a) \xrightarrow{\Phi} \overline{g}(a) \xrightarrow{a \downarrow 0} \text{Solução plana}
$$

O limite sobre as componentes da métrica

Neste sistema de coordenadas $g(a)$ é dada por

$$
\begin{aligned}
\overline{g}(a) = &-\left(\frac{a^4\cos\left(a\overline{\theta}\right)^2 + a^2\overline{r}^2 - 2\,am - 2\left(a^2m - a\right)\overline{r} + 1}{a^4\cos\left(a\overline{\theta}\right)^2 + a^2\overline{r}^2 + 2\,a\overline{r} + 1}\right)d\overline{t}^2 \\
&-\left(\frac{4\left(a^3m\overline{r} + a^2m\right)\sin\left(a\overline{\theta}\right)^2}{a^4\cos\left(a\overline{\theta}\right)^2 + a^2\overline{r}^2 + 2\,a\overline{r} + 1}\right)d\overline{t}d\overline{\phi} + \left(\frac{a^4\cos\left(a\overline{\theta}\right)^2 + a^2\overline{r}^2 - 2\,am - 2\left(a^2m - a\right)\overline{r} + 1}{a^4\cos\left(a\overline{\theta}\right)^2 + a^2\overline{r}^2 + 2\,a\overline{r} + 1}\right)d\overline{r}^2 \\
&+\left(a^4\cos\left(a\overline{\theta}\right)^2 + a^2\overline{r}^2 + 2\,a\overline{r} + 1\right)d\overline{\theta}^2 \\
&+\left(\frac{2\left(a^6m\overline{r}+a^5m\right)\sin\left(a\overline{\theta}\right)^4+\left(a^4\overline{r}^4+4\,a^3\overline{r}^3+a^4+\left(a^6+6\,a^2\right)\overline{r}^2+\left(a^8+a^6\overline{r}^2+2\,a^5\overline{r}+a^4\right)\cos\left(a\overline{\theta}\right)^2+2\left(a^5+2\,a\right)\overline{r}+1\right)\sin\left(a\overline{\theta}\right)^2}{a^6\cos\left(a\overline{\theta}\right)^2+a^4\overline{r}^2+2\,a^3\overline{r}+a^2}\right)d\overline{\phi}^2
\end{aligned}
$$

Donde temos que $\overline{g}(0) = -d\overline{t}^2 + d\overline{r}^2 + d\overline{\theta}^2 + \overline{\theta}^2 d\overline{\phi}^2$ é uma solução no vácuo plana.

$$\text{Schwarzschild} \xleftarrow{a \downarrow 0} g(a) \xrightarrow{\overline{\Phi}} \overline{g}(a) \xrightarrow{a \downarrow 0} \text{Solução plana}$$

O limite sobre as componentes da métrica

Neste sistema de coordenadas $g(a)$ é dada por

$$
\begin{aligned}
\overline{g}(a) = &- \left(\frac{a^4 \cos\left(a\overline{\theta}\right)^2 + a^2\overline{r}^2 - 2\,am - 2\left(a^2 m - a\right)\overline{r} + 1}{a^4 \cos\left(a\overline{\theta}\right)^2 + a^2\overline{r}^2 + 2\,a\overline{r} + 1} \right) d\overline{t}^2 \\
&- \left(\frac{4\left(a^3 m\overline{r} + a^2 m\right)\sin\left(a\overline{\theta}\right)^2}{a^4 \cos\left(a\overline{\theta}\right)^2 + a^2\overline{r}^2 + 2\,a\overline{r} + 1} \right) d\overline{t}d\overline{\phi} + \left(\frac{a^4 \cos\left(a\overline{\theta}\right)^2 + a^2\overline{r}^2 - 2\,am - 2\left(a^2 m - a\right)\overline{r} + 1}{a^4 \cos\left(a\overline{\theta}\right)^2 + a^2\overline{r}^2 + 2\,a\overline{r} + 1} \right) d\overline{r}^2 \\
&+ \left(a^4 \cos\left(a\overline{\theta}\right)^2 + a^2\overline{r}^2 + 2\,a\overline{r} + 1 \right) d\overline{\theta}^2 \\
&+ \left(\frac{2\left(a^6 m\overline{r} + a^5 m\right)\sin\left(a\overline{\theta}\right)^4 + \left(a^4\overline{r}^4 + 4\,a^3\overline{r}^3 + a^4 + \left(a^6 + 6\,a^2\right)\overline{r}^2 + \left(a^8 + a^6\overline{r}^2 + 2\,a^5\overline{r} + a^4\right)\cos\left(a\overline{\theta}\right)^2 + 2\left(a^5 + 2\,a\right)\overline{r} + 1\right)\sin\left(a\overline{\theta}\right)^2}{a^6 \cos\left(a\overline{\theta}\right)^2 + a^4\overline{r}^2 + 2\,a^3\overline{r} + a^2} \right) d\overline{\phi}^2
\end{aligned}
$$

Donde temos que $\overline{g}(0) = -d\overline{t}^2 + d\overline{r}^2 + d\overline{\theta}^2 + \overline{\theta}^2 d\overline{\phi}^2$ é uma solução no vácuo plana.

$$
\boxed{\text{Schwarzschild} \xleftarrow{a \downarrow 0} g(a) \xrightarrow{\overline{\Phi}} \overline{g}(a) \xrightarrow{a \downarrow 0} \text{Solução plana}}
$$

Limites de espaços-tempo por Geroch

Limites de espaços-tempo por Geroch

- A definição de limite de espaços-tempo por Geroch
- $(M_\kappa, g(\kappa))$ uma família de espaços-tempo a 1-parâmetro $\kappa > 0$.
- $\mathcal{M}$ uma variedade de dimensão 5 tal que
  - Para cada κ, M_κ é uma subvariedade quadridimensional de $\mathcal{M}$.
- λ um campo escalar em $\mathcal{M}$ tal que
  - Para cada κ, $\lambda^{-1}(\kappa) = M_\kappa$.
- $\gamma^{\alpha\beta}$ um tensor suave em $\mathcal{M}$ tal que
  - Para cada κ, $\gamma^{\alpha\beta}|_{M_\kappa} = g^{ab}(\kappa)$.
  - A assinatura de $\gamma^{\alpha\beta}$ é dada por $(-,+,+,+,0)$, com direção singular dada por $\mathrm{grad}\,(\lambda)$.

Com esta construção temos que

- Não estamos adicionando nenhuma estrutura a variedade $\mathcal{M}$, além daquela fornecida pela família $(M_\kappa, g(\kappa))$.
- Não conseguimos estabelecer uma correspondência entre espaços-tempo M_κ's distintos.
- $\gamma^{\alpha\beta}$ define completamente os espaços-tempo M_κ's.
- Encontrar um limite para a família $(M_\kappa, g(\kappa))$ equivale a encontrar uma fronteira adequada para $\mathcal{M}$.

Limites de espaços-tempo por Geroch

- A definição de limite de espaços-tempo por Geroch
- $(M_\kappa, g(\kappa))$ uma família de espaços-tempo a 1-parâmetro $\kappa > 0$.
- $\mathcal{M}$ uma variedade de dimensão 5 tal que
  - Para cada κ, M_κ é uma subvariedade quadridimensional de $\mathcal{M}$.
- λ um campo escalar em $\mathcal{M}$ tal que
  - Para cada κ, $\lambda^{-1}(\kappa) = M_\kappa$.
- $\gamma^{\alpha\beta}$ um tensor suave em $\mathcal{M}$ tal que
  - Para cada κ, $\gamma^{\alpha\beta}|_{M_\kappa} = g^{ab}(\kappa)$.
  - A assinatura de $\gamma^{\alpha\beta}$ é dada por $(-,+,+,+,0)$, com direção singular dada por $\mathrm{grad}\,(\lambda)$.

Com esta construção temos que

- Não estamos adicionando nenhuma estrutura a variedade $\mathcal{M}$, além daquela fornecida pela família $(M_\kappa, g(\kappa))$.
- Não conseguimos estabelecer uma correspondência entre espaços-tempo M_κ's distintos.
- $\gamma^{\alpha\beta}$ define completamente os espaços-tempo M_κ's.
- Encontrar um limite para a família $(M_\kappa, g(\kappa))$ equivale a encontrar uma fronteira adequada para $\mathcal{M}$.

Limites de espaços-tempo por Geroch

- A definição de limite de espaços-tempo por Geroch
- $(M_\kappa, g(\kappa))$ uma família de espaços-tempo a 1-parâmetro $\kappa > 0$.
- $\mathcal{M}$ uma variedade de dimensão 5 tal que
  - Para cada κ, M_κ é uma subvariedade quadridimensional de $\mathcal{M}$.
- λ um campo escalar em $\mathcal{M}$ tal que
  - Para cada κ, $\lambda^{-1}(\kappa) = M_\kappa$.
- $\gamma^{\alpha\beta}$ um tensor suave em $\mathcal{M}$ tal que
  - Para cada κ, $\gamma^{\alpha\beta}|_{M_\kappa} = g^{ab}(\kappa)$.
  - A assinatura de $\gamma^{\alpha\beta}$ é dada por $(-,+,+,+,0)$, com direção singular dada por $\operatorname{grad}(\lambda)$.

Com esta construção temos que

- Não estamos adicionando nenhuma estrutura a variedade $\mathcal{M}$, além daquela fornecida pela família $(M_\kappa, g(\kappa))$.
- Não conseguimos estabelecer uma correspondência entre espaços-tempo M_κ's distintos.
- $\gamma^{\alpha\beta}$ define completamente os espaços-tempo M_κ's.
- Encontrar um limite para a família $(M_\kappa, g(\kappa))$ equivale a encontrar uma fronteira adequada para $\mathcal{M}$.

Limites de espaços-tempo por Geroch

- A definição de limite de espaços-tempo por Geroch
- $(M_\kappa, g(\kappa))$ uma família de espaços-tempo a 1-parâmetro $\kappa > 0$.
- $\mathcal{M}$ uma variedade de dimensão 5 tal que
  - Para cada κ, M_κ é uma subvariedade quadridimensional de $\mathcal{M}$.
- λ um campo escalar em $\mathcal{M}$ tal que
  - Para cada κ, $\lambda^{-1}(\kappa) = M_\kappa$.
- $\gamma^{\alpha\beta}$ um tensor suave em $\mathcal{M}$ tal que
  - Para cada κ, $\gamma^{\alpha\beta}|_{M_\kappa} = g^{ab}(\kappa)$.
  - A assinatura de $\gamma^{\alpha\beta}$ é dada por $(-,+,+,+,0)$, com direção singular dada por $\mathrm{grad}\,(\lambda)$.

Com esta construção temos que

- Não estamos adicionando nenhuma estrutura a variedade $\mathcal{M}$, além daquela fornecida pela família $(M_\kappa, g(\kappa))$.
- Não conseguimos estabelecer uma correspondência entre espaços-tempo M_κ's distintos.
- $\gamma^{\alpha\beta}$ define completamente os espaços-tempo M_κ's.
- Encontrar um limite para a família $(M_\kappa, g(\kappa))$ equivale a encontrar uma fronteira adequada para $\mathcal{M}$.

Limites de espaços-tempo por Geroch

- A definição de limite de espaços-tempo por Geroch
- $(M_\kappa, g(\kappa))$ uma família de espaços-tempo a 1-parâmetro $\kappa > 0$.
- $\mathcal{M}$ uma variedade de dimensão 5 tal que
  - Para cada κ, M_κ é uma subvariedade quadridimensional de $\mathcal{M}$.
- λ um campo escalar em $\mathcal{M}$ tal que
  - Para cada κ, $\lambda^{-1}(\kappa) = M_\kappa$.
- $\gamma^{\alpha\beta}$ um tensor suave em $\mathcal{M}$ tal que
  - Para cada κ, $\gamma^{\alpha\beta}|_{M_\kappa} = g^{ab}(\kappa)$.
  - A assinatura de $\gamma^{\alpha\beta}$ é dada por $(-,+,+,+,0)$, com direção singular dada por $\mathrm{grad}\,(\lambda)$.

Com esta construção temos que

- Não estamos adicionando nenhuma estrutura a variedade $\mathcal{M}$, além daquela fornecida pela família $(M_\kappa, g(\kappa))$.
- Não conseguimos estabelecer uma correspondência entre espaços-tempo M_κ's distintos.
- $\gamma^{\alpha\beta}$ define completamente os espaços-tempo M_κ's.
- Encontrar um limite para a família $(M_\kappa, g(\kappa))$ equivale a encontrar uma fronteira adequada para $\mathcal{M}$.

Limites de espaços-tempo por Geroch

- A definição de limite de espaços-tempo por Geroch
- $(M_\kappa, g(\kappa))$ uma família de espaços-tempo a 1-parâmetro $\kappa > 0$.
- $\mathcal{M}$ uma variedade de dimensão 5 tal que
  - Para cada κ, M_κ é uma subvariedade quadridimensional de $\mathcal{M}$.
- λ um campo escalar em $\mathcal{M}$ tal que
  - Para cada κ, $\lambda^{-1}(\kappa) = M_\kappa$.
- $\gamma^{\alpha\beta}$ um tensor suave em $\mathcal{M}$ tal que
  - Para cada κ, $\gamma^{\alpha\beta}|_{M_\kappa} = g^{ab}(\kappa)$.
  - A assinatura de $\gamma^{\alpha\beta}$ é dada por $(-,+,+,+,0)$, com direção singular dada por $\operatorname{grad}(\lambda)$.

Com esta construção temos que

- Não estamos adicionando nenhuma estrutura a variedade $\mathcal{M}$, além daquela fornecida pela família $(M_\kappa, g(\kappa))$.
- Não conseguimos estabelecer uma correspondência entre espaços-tempo M_κ's distintos.
- $\gamma^{\alpha\beta}$ define completamente os espaços-tempo M_κ's.
- Encontrar um limite para a família $(M_\kappa, g(\kappa))$ equivale a encontrar uma fronteira adequada para $\mathcal{M}$.

Limites de espaços-tempo por Geroch

- A definição de limite de espaços-tempo por Geroch
- $(M_\kappa, g(\kappa))$ uma família de espaços-tempo a 1-parâmetro $\kappa > 0$.
- $\mathcal{M}$ uma variedade de dimensão 5 tal que
  - Para cada κ, M_κ é uma subvariedade quadridimensional de $\mathcal{M}$.
- λ um campo escalar em $\mathcal{M}$ tal que
  - Para cada κ, $\lambda^{-1}(\kappa) = M_\kappa$.
- $\gamma^{\alpha\beta}$ um tensor suave em $\mathcal{M}$ tal que
  - Para cada κ, $\gamma^{\alpha\beta}|_{M_\kappa} = g^{ab}(\kappa)$.
  - A assinatura de $\gamma^{\alpha\beta}$ é dada por $(-,+,+,+,0)$, com direção singular dada por $\mathrm{grad}\,(\lambda)$.

Com esta construção temos que

- Não estamos adicionando nenhuma estrutura a variedade $\mathcal{M}$, além daquela fornecida pela família $(M_\kappa, g(\kappa))$.
- Não conseguimos estabelecer uma correspondência entre espaços-tempo M_κ's distintos.
- $\gamma^{\alpha\beta}$ define completamente os espaços-tempo M_κ's.
- Encontrar um limite para a família $(M_\kappa, g(\kappa))$ equivale a encontrar uma fronteira adequada para $\mathcal{M}$.

Limites de espaços-tempo por Geroch

- A definição de limite de espaços-tempo por Geroch
- $(M_\kappa, g(\kappa))$ uma família de espaços-tempo a 1-parâmetro $\kappa > 0$.
- $\mathcal{M}$ uma variedade de dimensão 5 tal que
  - Para cada κ, M_κ é uma subvariedade quadridimensional de $\mathcal{M}$.
- λ um campo escalar em $\mathcal{M}$ tal que
  - Para cada κ, $\lambda^{-1}(\kappa) = M_\kappa$.
- $\gamma^{\alpha\beta}$ um tensor suave em $\mathcal{M}$ tal que
  - Para cada κ, $\gamma^{\alpha\beta}|_{M_\kappa} = g^{ab}(\kappa)$.
  - A assinatura de $\gamma^{\alpha\beta}$ é dada por $(-,+,+,+,0)$, com direção singular dada por $\operatorname{grad}(\lambda)$.

Com esta construção temos que

- Não estamos adicionando nenhuma estrutura a variedade $\mathcal{M}$, além daquela fornecida pela família $(M_\kappa, g(\kappa))$.
- Não conseguimos estabelecer uma correspondência entre espaços-tempo M_κ's distintos.
- $\gamma^{\alpha\beta}$ define completamente os espaços-tempo M_κ's.
- Encontrar um limite para a família $(M_\kappa, g(\kappa))$ equivale a encontrar uma fronteira adequada para $\mathcal{M}$.

Limites de espaços-tempo por Geroch

- A definição de limite de espaços-tempo por Geroch
- $(M_\kappa, g(\kappa))$ uma família de espaços-tempo a 1-parâmetro $\kappa > 0$.
- $\mathcal{M}$ uma variedade de dimensão 5 tal que
  - Para cada κ, M_κ é uma subvariedade quadridimensional de $\mathcal{M}$.
- λ um campo escalar em $\mathcal{M}$ tal que
  - Para cada κ, $\lambda^{-1}(\kappa) = M_\kappa$.
- $\gamma^{\alpha\beta}$ um tensor suave em $\mathcal{M}$ tal que
  - Para cada κ, $\gamma^{\alpha\beta}|_{M_\kappa} = g^{ab}(\kappa)$.
  - A assinatura de $\gamma^{\alpha\beta}$ é dada por $(-,+,+,+,0)$, com direção singular dada por $\operatorname{grad}(\lambda)$.

Com esta construção temos que

- Não estamos adicionando nenhuma estrutura a variedade $\mathcal{M}$, além daquela fornecida pela família $(M_\kappa, g(\kappa))$.
- Não conseguimos estabelecer uma correspondência entre espaços-tempo M_κ's distintos.
- $\gamma^{\alpha\beta}$ define completamente os espaços-tempo M_κ's.
- Encontrar um limite para a família $(M_\kappa, g(\kappa))$ equivale a encontrar uma fronteira adequada para $\mathcal{M}$.

Limites de espaços-tempo por Geroch

- A definição de limite de espaços-tempo por Geroch
- $(M_\kappa, g(\kappa))$ uma família de espaços-tempo a 1-parâmetro $\kappa > 0$.
- $\mathcal{M}$ uma variedade de dimensão 5 tal que
  - Para cada κ, M_κ é uma subvariedade quadridimensional de $\mathcal{M}$.
- λ um campo escalar em $\mathcal{M}$ tal que
  - Para cada κ, $\lambda^{-1}(\kappa) = M_\kappa$.
- $\gamma^{\alpha\beta}$ um tensor suave em $\mathcal{M}$ tal que
  - Para cada κ, $\gamma^{\alpha\beta}|_{M_\kappa} = g^{ab}(\kappa)$.
  - A assinatura de $\gamma^{\alpha\beta}$ é dada por $(-,+,+,+,0)$, com direção singular dada por $\mathrm{grad}\,(\lambda)$.

Com esta construção temos que

- Não estamos adicionando nenhuma estrutura a variedade $\mathcal{M}$, além daquela fornecida pela família $(M_\kappa, g(\kappa))$.
- Não conseguimos estabelecer uma correspondência entre espaços-tempo M_κ's distintos.
- $\gamma^{\alpha\beta}$ define completamente os espaços-tempo M_κ's.
- Encontrar um limite para a família $(M_\kappa, g(\kappa))$ equivale a encontrar uma fronteira adequada para $\mathcal{M}$.

Limites de espaços-tempo por Geroch

- A definição de limite de espaços-tempo por Geroch
- $(M_\kappa, g(\kappa))$ uma família de espaços-tempo a 1-parâmetro $\kappa > 0$.
- $\mathcal{M}$ uma variedade de dimensão 5 tal que
  - Para cada κ, M_κ é uma subvariedade quadridimensional de $\mathcal{M}$.
- λ um campo escalar em $\mathcal{M}$ tal que
  - Para cada κ, $\lambda^{-1}(\kappa) = M_\kappa$.
- $\gamma^{\alpha\beta}$ um tensor suave em $\mathcal{M}$ tal que
  - Para cada κ, $\gamma^{\alpha\beta}|_{M_\kappa} = g^{ab}(\kappa)$.
  - A assinatura de $\gamma^{\alpha\beta}$ é dada por $(-,+,+,+,0)$, com direção singular dada por $\mathrm{grad}\,(\lambda)$.

Com esta construção temos que

- Não estamos adicionando nenhuma estrutura a variedade $\mathcal{M}$, além daquela fornecida pela família $(M_\kappa, g(\kappa))$.
- Não conseguimos estabelecer uma correspondência entre espaços-tempo M_κ's distintos.
- $\gamma^{\alpha\beta}$ define completamente os espaços-tempo M_κ's.
- Encontrar um limite para a família $(M_\kappa, g(\kappa))$ equivale a encontrar uma fronteira adequada para $\mathcal{M}$.

Limites de espaços-tempo por Geroch

- A definição de limite de espaços-tempo por Geroch
- $(M_\kappa, g(\kappa))$ uma família de espaços-tempo a 1-parâmetro $\kappa > 0$.
- $\mathcal{M}$ uma variedade de dimensão 5 tal que
  - Para cada κ, M_κ é uma subvariedade quadridimensional de $\mathcal{M}$.
- λ um campo escalar em $\mathcal{M}$ tal que
  - Para cada κ, $\lambda^{-1}(\kappa) = M_\kappa$.
- $\gamma^{\alpha\beta}$ um tensor suave em $\mathcal{M}$ tal que
  - Para cada κ, $\gamma^{\alpha\beta}|_{M_\kappa} = g^{ab}(\kappa)$.
  - A assinatura de $\gamma^{\alpha\beta}$ é dada por $(-,+,+,+,0)$, com direção singular dada por $\mathrm{grad}\,(\lambda)$.

Com esta construção temos que

- Não estamos adicionando nenhuma estrutura a variedade $\mathcal{M}$, além daquela fornecida pela família $(M_\kappa, g(\kappa))$.
- Não conseguimos estabelecer uma correspondência entre espaços-tempo M_κ's distintos.
- $\gamma^{\alpha\beta}$ define completamente os espaços-tempo M_κ's.
- Encontrar um limite para a família $(M_\kappa, g(\kappa))$ equivale a encontrar uma fronteira adequada para $\mathcal{M}$.

Limites de espaços-tempo por Geroch

- A definição de limite de espaços-tempo por Geroch
- $(M_\kappa, g(\kappa))$ uma família de espaços-tempo a 1-parâmetro $\kappa > 0$.
- $\mathcal{M}$ uma variedade de dimensão 5 tal que
  - Para cada κ, M_κ é uma subvariedade quadridimensional de $\mathcal{M}$.
- λ um campo escalar em $\mathcal{M}$ tal que
  - Para cada κ, $\lambda^{-1}(\kappa) = M_\kappa$.
- $\gamma^{\alpha\beta}$ um tensor suave em $\mathcal{M}$ tal que
  - Para cada κ, $\gamma^{\alpha\beta}|_{M_\kappa} = g^{ab}(\kappa)$.
  - A assinatura de $\gamma^{\alpha\beta}$ é dada por $(-,+,+,+,0)$, com direção singular dada por $\mathrm{grad}\,(\lambda)$.

Com esta construção temos que

- Não estamos adicionando nenhuma estrutura a variedade $\mathcal{M}$, além daquela fornecida pela família $(M_\kappa, g(\kappa))$.
- Não conseguimos estabelecer uma correspondência entre espaços-tempo M_κ's distintos.
- $\gamma^{\alpha\beta}$ define completamente os espaços-tempo M_κ's.
- Encontrar um limite para a família $(M_\kappa, g(\kappa))$ equivale a encontrar uma fronteira adequada para $\mathcal{M}$.

Limites de espaços-tempo por Geroch

- A definição de limite de espaços-tempo por Geroch
- $(M_\kappa, g(\kappa))$ uma família de espaços-tempo a 1-parâmetro $\kappa > 0$.
- $\mathcal{M}$ uma variedade de dimensão 5 tal que
  - Para cada κ, M_κ é uma subvariedade quadridimensional de $\mathcal{M}$.
- λ um campo escalar em $\mathcal{M}$ tal que
  - Para cada κ, $\lambda^{-1}(\kappa) = M_\kappa$.
- $\gamma^{\alpha\beta}$ um tensor suave em $\mathcal{M}$ tal que
  - Para cada κ, $\gamma^{\alpha\beta}|_{M_\kappa} = g^{ab}(\kappa)$.
  - A assinatura de $\gamma^{\alpha\beta}$ é dada por $(-,+,+,+,0)$, com direção singular dada por $\mathrm{grad}\,(\lambda)$.

Com esta construção temos que

- Não estamos adicionando nenhuma estrutura a variedade $\mathcal{M}$, além daquela fornecida pela família $(M_\kappa, g(\kappa))$.
- Não conseguimos estabelecer uma correspondência entre espaços-tempo M_κ's distintos.
- $\gamma^{\alpha\beta}$ define completamente os espaços-tempo M_κ's.
- Encontrar um limite para a família $(M_\kappa, g(\kappa))$ equivale a encontrar uma fronteira adequada para $\mathcal{M}$.

Limites de espaços-tempo por Geroch

- A definição de limite de espaços-tempo por Geroch
- $(M_\kappa, g(\kappa))$ uma família de espaços-tempo a 1-parâmetro $\kappa > 0$.
- $\mathcal{M}$ uma variedade de dimensão 5 tal que
  - Para cada κ, M_κ é uma subvariedade quadridimensional de $\mathcal{M}$.
- λ um campo escalar em $\mathcal{M}$ tal que
  - Para cada κ, $\lambda^{-1}(\kappa) = M_\kappa$.
- $\gamma^{\alpha\beta}$ um tensor suave em $\mathcal{M}$ tal que
  - Para cada κ, $\gamma^{\alpha\beta}|_{M_\kappa} = g^{ab}(\kappa)$.
  - A assinatura de $\gamma^{\alpha\beta}$ é dada por $(-, +, +, +, 0)$, com direção singular dada por $\operatorname{grad}(\lambda)$.

Com esta construção temos que

- Não estamos adicionando nenhuma estrutura a variedade $\mathcal{M}$, além daquela fornecida pela família $(M_\kappa, g(\kappa))$.
- Não conseguimos estabelecer uma correspondência entre espaços-tempo M_κ's distintos.
- $\gamma^{\alpha\beta}$ define completamente os espaços-tempo M_κ's.
- Encontrar um limite para a família $(M_\kappa, g(\kappa))$ equivale a encontrar uma fronteira adequada para $\mathcal{M}$.

Limites de espaços-tempo por Geroch

Sejam $\mathcal{M}$ uma variedade de dimensão 5 com um campo escalar λ e um tensor suave $\gamma^{\alpha\beta}$.

Definição

Definimos um ***espaço-limite*** *de $\mathcal{M}$ como sendo uma variedade $\mathcal{N}$ de dimensão 5 com fronteira não-vazia $\partial\mathcal{N}$ juntamente com um campo escalar λ', um tensor $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ e uma aplicação Ψ de $\mathcal{M}$ para o interior de $\mathcal{N}$ tais que*

1. *Ψ leva $\gamma^{\alpha\beta}$ em $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ e λ em λ'.*
2. *$\partial\mathcal{N}$ é a região conexa e de Hausdorff tal que $\partial\mathcal{N} = (\lambda')^{-1}(0)$.*
3. *$\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ tem assinatura $(-,+,+,+,0)$ em $\partial\mathcal{N}$.*

1. Garante que $\mathcal{N}$ representa $\mathcal{M}$ com fronteira não-vazia.
2. Garante que a fronteira representa o limite quando tomamos $\lambda \to 0$.
3. Garante que a métrica na fronteira é não-singular.

Limites de espaços-tempo por Geroch

Sejam $\mathcal{M}$ uma variedade de dimensão 5 com um campo escalar λ e um tensor suave $\gamma^{\alpha\beta}$.

Definição

Definimos um ***espaço-limite*** *de $\mathcal{M}$ como sendo uma variedade $\mathcal{N}$ de dimensão 5 com fronteira não-vazia $\partial\mathcal{N}$ juntamente com um campo escalar λ', um tensor $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ e uma aplicação Ψ de $\mathcal{M}$ para o interior de $\mathcal{N}$ tais que*

1. Ψ *leva* $\gamma^{\alpha\beta}$ *em* $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ *e* λ *em* λ'.
2. $\partial\mathcal{N}$ *é a região conexa e de Hausdorff tal que* $\partial\mathcal{N} = (\lambda')^{-1}(0)$.
3. $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ *tem assinatura* $(-,+,+,+,0)$ *em* $\partial\mathcal{N}$.

1. Garante que $\mathcal{N}$ representa $\mathcal{M}$ com fronteira não-vazia.
2. Garante que a fronteira representa o limite quando tomamos $\lambda \to 0$.
3. Garante que a métrica na fronteira é não-singular.

Limites de espaços-tempo por Geroch

Sejam $\mathcal{M}$ uma variedade de dimensão 5 com um campo escalar λ e um tensor suave $\gamma^{\alpha\beta}$.

Definição

*Definimos um **espaço-limite** de $\mathcal{M}$ como sendo uma variedade $\mathcal{N}$ de dimensão 5 com fronteira não-vazia $\partial\mathcal{N}$ juntamente com um campo escalar λ', um tensor $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ e uma aplicação Ψ de $\mathcal{M}$ para o interior de $\mathcal{N}$ tais que*

1. *Ψ leva $\gamma^{\alpha\beta}$ em $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ e λ em λ'.*
2. *$\partial\mathcal{N}$ é a região conexa e de Hausdorff tal que $\partial\mathcal{N} = (\lambda')^{-1}(0)$.*
3. *$\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ tem assinatura $(-,+,+,+,0)$ em $\partial\mathcal{N}$.*

1. Garante que $\mathcal{N}$ representa $\mathcal{M}$ com fronteira não-vazia.
2. Garante que a fronteira representa o limite quando tomamos $\lambda \to 0$.
3. Garante que a métrica na fronteira é não-singular.

Limites de espaços-tempo por Geroch

Sejam $\mathcal{M}$ uma variedade de dimensão 5 com um campo escalar λ e um tensor suave $\gamma^{\alpha\beta}$.

Definição

Definimos um ***espaço-limite*** *de $\mathcal{M}$ como sendo uma variedade $\mathcal{N}$ de dimensão 5 com fronteira não-vazia $\partial\mathcal{N}$ juntamente com um campo escalar λ', um tensor $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ e uma aplicação Ψ de $\mathcal{M}$ para o interior de $\mathcal{N}$ tais que*

1. *Ψ leva $\gamma^{\alpha\beta}$ em $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ e λ em λ'.*
2. *$\partial\mathcal{N}$ é a região conexa e de Hausdorff tal que $\partial\mathcal{N} = (\lambda')^{-1}(0)$.*
3. *$\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ tem assinatura $(-,+,+,+,0)$ em $\partial\mathcal{N}$.*

1. Garante que $\mathcal{N}$ representa $\mathcal{M}$ com fronteira não-vazia.
2. Garante que a fronteira representa o limite quando tomamos $\lambda \to 0$.
3. Garante que a métrica na fronteira é não-singular.

Limites de espaços-tempo por Geroch

Sejam $\mathcal{M}$ uma variedade de dimensão 5 com um campo escalar λ e um tensor suave $\gamma^{\alpha\beta}$.

Definição

*Definimos um **espaço-limite** de $\mathcal{M}$ como sendo uma variedade $\mathcal{N}$ de dimensão 5 com fronteira não-vazia $\partial\mathcal{N}$ juntamente com um campo escalar λ', um tensor $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ e uma aplicação Ψ de $\mathcal{M}$ para o interior de $\mathcal{N}$ tais que*

1. *Ψ leva $\gamma^{\alpha\beta}$ em $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ e λ em λ'.*
2. *$\partial\mathcal{N}$ é a região conexa e de Hausdorff tal que $\partial\mathcal{N} = (\lambda')^{-1}(0)$.*
3. *$\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ tem assinatura $(-,+,+,+,0)$ em $\partial\mathcal{N}$.*

1. Garante que $\mathcal{N}$ representa $\mathcal{M}$ com fronteira não-vazia.
2. Garante que a fronteira representa o limite quando tomamos $\lambda \to 0$.
3. Garante que a métrica na fronteira é não-singular.

Limites de espaços-tempo por Geroch

Definição

Sejam $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ espaços-limite em $\mathcal{M}$. Dizemos que $\mathcal{N}_1$ é uma ***extensão*** *de $\mathcal{N}_2$ se existe uma aplicação suave $\Phi : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ que preserva $\gamma^{\alpha\beta}$ e é invariante sobre $\mathcal{M}$.*

Definição

Seja $(M_\kappa, g(\kappa))$ a família de espaços-tempo associada a $\mathcal{M}$ e, para cada κ, $p_\kappa \in M_\kappa$. Uma ***família de referenciais*** *em $\mathcal{M}$ é uma base tetrádica ortonormal $\omega^a(\kappa)$ no espaço cotangente em p_κ que é suave na curva em $\mathcal{M}$ formada pelos pontos p_κ.*

Limites de espaços-tempo por Geroch

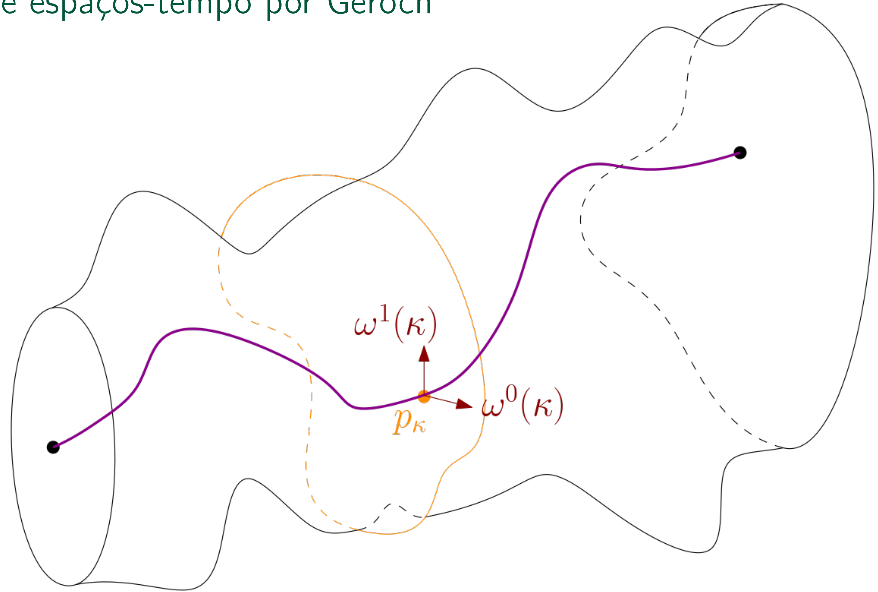
Definição

Sejam $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ espaços-limite em $\mathcal{M}$. Dizemos que $\mathcal{N}_1$ é uma ***extensão*** *de $\mathcal{N}_2$ se existe uma aplicação suave $\Phi : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ que preserva $\gamma^{\alpha\beta}$ e é invariante sobre $\mathcal{M}$.*

Definição

Seja $(M_\kappa, g(\kappa))$ a família de espaços-tempo associada a $\mathcal{M}$ e, para cada κ, $p_\kappa \in M_\kappa$. Uma ***família de referenciais*** *em $\mathcal{M}$ é uma base tetrádica ortonormal $\omega^a(\kappa)$ no espaço cotangente em p_κ que é suave na curva em $\mathcal{M}$ formada pelos pontos p_κ.*

Limites de espaços-tempo por Geroch



Limites de espaços-tempo por Geroch

Teorema (Teorema de Rigidez)

Sejam M e M' dois espaços-tempo conexos tais que M é isométrico a um subconjunto de M' e ω uma base tetrádica ortonormal em $p \in M$ e ω' uma base tetrádica ortonormal em $p' \in M'$. Então existe uma única isometria de M em M' que leva ω em ω'.

Teorema (Unicidade do espaço-limite)

Se $\mathcal{N}$ um espaço-limite em $\mathcal{M}$ então $\mathcal{N}$ tem uma única extensão $\overline{\mathcal{M}}$ tal que

1. *$\overline{\mathcal{M}}$ não tem extensões próprias.*
2. *$\overline{\mathcal{M}}$ é uma extensão para toda extensão de $\mathcal{N}$.*

Corolário

Toda família de referenciais ou não possuem um espaço-limite ou possuem um espaço-limite que é "maximal" no sentido do Teorema da unicidade do espaço-limite.

Limites de espaços-tempo por Geroch

Teorema (Teorema de Rigidez)

Sejam M e M' dois espaços-tempo conexos tais que M é isométrico a um subconjunto de M' e ω uma base tetrádica ortonormal em $p \in M$ e ω' uma base tetrádica ortonormal em $p' \in M'$. Então existe uma única isometria de M em M' que leva ω em ω'.

Teorema (Unicidade do espaço-limite)

Se $\mathcal{N}$ um espaço-limite em $\mathcal{M}$ então $\mathcal{N}$ tem uma única extensão $\overline{\mathcal{M}}$ tal que

1. *$\overline{\mathcal{M}}$ não tem extensões próprias.*
2. *$\overline{\mathcal{M}}$ é uma extensão para toda extensão de $\mathcal{N}$.*

Corolário

Toda família de referenciais ou não possuem um espaço-limite ou possuem um espaço-limite que é "maximal" no sentido do Teorema da unicidade do espaço-limite.

Limites de espaços-tempo por Geroch

Teorema (Teorema de Rigidez)

Sejam M e M' dois espaços-tempo conexos tais que M é isométrico a um subconjunto de M' e ω uma base tetrádica ortonormal em $p \in M$ e ω' uma base tetrádica ortonormal em $p' \in M'$. Então existe uma única isometria de M em M' que leva ω em ω'.

Teorema (Unicidade do espaço-limite)

Se $\mathcal{N}$ um espaço-limite em $\mathcal{M}$ então $\mathcal{N}$ tem uma única extensão $\overline{\mathcal{M}}$ tal que

1. *$\overline{\mathcal{M}}$ não tem extensões próprias.*
2. *$\overline{\mathcal{M}}$ é uma extensão para toda extensão de $\mathcal{N}$.*

Corolário

Toda família de referenciais ou não possuem um espaço-limite ou possuem um espaço-limite que é "maximal" no sentido do Teorema da unicidade do espaço-limite.

Limites de espaços-tempo por Geroch

- Hereditariedade

Definição

*Seja $(M_\kappa, g(\kappa))$ uma família de espaços-tempo. Uma propriedade de espaços-tempo será dita **hereditária** se, sempre que todo elemento da família possuir esta propriedade, então todos os espaços-limite também a possuem.*

✓ Tensores construídos a partir do tensor de Riemann e suas derivadas que se anulam em cada M_λ, por exemplo as equações de Einstein no vácuo.

× Propriedades topológicas, como os grupos de homologia e homotopia.

Uma classificação das propriedades entre hereditárias e não-hereditárias facilitam na descrição dos espaços-limite.

Limites de espaços-tempo por Geroch

- Hereditariedade

Definição

*Seja $(M_\kappa, g(\kappa))$ uma família de espaços-tempo. Uma propriedade de espaços-tempo será dita **hereditária** se, sempre que todo elemento da família possuir esta propriedade, então todos os espaços-limite também a possuem.*

✓ Tensores construídos a partir do tensor de Riemann e suas derivadas que se anulam em cada M_λ, por exemplo as equações de Einstein no vácuo.

× Propriedades topológicas, como os grupos de homologia e homotopia.

Uma classificação das propriedades entre hereditárias e não-hereditárias facilitam na descrição dos espaços-limite.

Limites de espaços-tempo por Geroch

- Hereditariedade

Definição

Seja $(M_\kappa, g(\kappa))$ uma família de espaços-tempo. Uma propriedade de espaços-tempo será dita ***hereditária*** *se, sempre que todo elemento da família possuir esta propriedade, então todos os espaços-limite também a possuem.*

✓ Tensores construídos a partir do tensor de Riemann e suas derivadas que se anulam em cada M_λ, por exemplo as equações de Einstein no vácuo.

× Propriedades topológicas, como os grupos de homologia e homotopia.

Uma classificação das propriedades entre hereditárias e não-hereditárias facilitam na descrição dos espaços-limite.

Limites de espaços-tempo por Geroch

- Hereditariedade

Definição

*Seja $(M_\kappa, g(\kappa))$ uma família de espaços-tempo. Uma propriedade de espaços-tempo será dita **hereditária** se, sempre que todo elemento da família possuir esta propriedade, então todos os espaços-limite também a possuem.*

✓ Tensores construídos a partir do tensor de Riemann e suas derivadas que se anulam em cada M_λ, por exemplo as equações de Einstein no vácuo.

× Propriedades topológicas, como os grupos de homologia e homotopia.

Uma classificação das propriedades entre hereditárias e não-hereditárias facilitam na descrição dos espaços-limite.

Limites de espaços-tempo por Geroch

- Hereditariedade

Definição

Seja $(M_\kappa, g(\kappa))$ uma família de espaços-tempo. Uma propriedade de espaços-tempo será dita ***hereditária*** *se, sempre que todo elemento da família possuir esta propriedade, então todos os espaços-limite também a possuem.*

✓ Tensores construídos a partir do tensor de Riemann e suas derivadas que se anulam em cada M_λ, por exemplo as equações de Einstein no vácuo.

× Propriedades topológicas, como os grupos de homologia e homotopia.

Uma classificação das propriedades entre hereditárias e não-hereditárias facilitam na descrição dos espaços-limite.

Um exemplo

Universidade Federal do ABC

Um exemplo

- O espaço de Anti-De Sitter

M uma variedade de dimensão 4, conexa e de Hausdorff.
ds^2 uma métrica indefinida em M dada por

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 - dU^2 - dV^2.$$

O espaço de Anti-De Sitter AdS_3 é a hipersuperfície dada implicitamente por

$$X^2 + Y^2 - U^2 - V^2 = -1.$$

Uma maneira de visualizarmos este espaço é utilizando as coordenadas (t, x, y) dadas por

$$\begin{cases} X &= \dfrac{2x}{1-\rho^2} \\ Y &= \dfrac{2y}{1-\rho^2} \end{cases} \qquad U = \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\sin(t) \qquad V = \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\cos(t)$$

onde $\rho^2 = x^2 + y^2$ e $\rho \neq 1$.

Um exemplo

- O espaço de Anti-De Sitter

M uma variedade de dimensão 4, conexa e de Hausdorff.

ds^2 uma métrica indefinida em M dada por

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 - dU^2 - dV^2.$$

O espaço de Anti-De Sitter AdS_3 é a hipersuperfície dada implicitamente por

$$X^2 + Y^2 - U^2 - V^2 = -1.$$

Uma maneira de visualizarmos este espaço é utilizando as coordenadas (t, x, y) dadas por

$$\begin{cases} X = \dfrac{2x}{1-\rho^2} & U = \dfrac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\sin(t) \\ Y = \dfrac{2y}{1-\rho^2} & V = \dfrac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\cos(t) \end{cases}$$

onde $\rho^2 = x^2 + y^2$ e $\rho \neq 1$.

Um exemplo

- O espaço de Anti-De Sitter

M uma variedade de dimensão 4, conexa e de Hausdorff.
ds^2 uma métrica indefinida em M dada por

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 - dU^2 - dV^2.$$

O espaço de Anti-De Sitter AdS_3 é a hipersuperfície dada implicitamente por

$$X^2 + Y^2 - U^2 - V^2 = -1.$$

Uma maneira de visualizarmos este espaço é utilizando as coordenadas (t, x, y) dadas por

$$\begin{cases} X = \dfrac{2x}{1-\rho^2} \\ Y = \dfrac{2y}{1-\rho^2} \end{cases} \qquad U = \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\sin(t) \qquad V = \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\cos(t)$$

onde $\rho^2 = x^2 + y^2$ e $\rho \neq 1$.

Um exemplo

- O espaço de Anti-De Sitter

M uma variedade de dimensão 4, conexa e de Hausdorff.
ds^2 uma métrica indefinida em M dada por

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 - dU^2 - dV^2.$$

O espaço de Anti-De Sitter AdS_3 é a hipersuperfície dada implicitamente por

$$X^2 + Y^2 - U^2 - V^2 = -1.$$

Uma maneira de visualizarmos este espaço é utilizando as coordenadas (t, x, y) dadas por

$$\begin{cases} X = \dfrac{2x}{1-\rho^2} & U = \dfrac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\sin(t) \\ Y = \dfrac{2y}{1-\rho^2} & V = \dfrac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\cos(t) \end{cases}$$

onde $\rho^2 = x^2 + y^2$ e $\rho \neq 1$.

Um exemplo

- O espaço de Anti-De Sitter

M uma variedade de dimensão 4, conexa e de Hausdorff.
ds^2 uma métrica indefinida em M dada por

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 - dU^2 - dV^2.$$

O espaço de Anti-De Sitter AdS_3 é a hipersuperfície dada implicitamente por

$$X^2 + Y^2 - U^2 - V^2 = -1.$$

Uma maneira de visualizarmos este espaço é utilizando as coordenadas (t, x, y) dadas por

$$\begin{cases} X = \dfrac{2x}{1-\rho^2} \\ Y = \dfrac{2y}{1-\rho^2} \end{cases} \qquad U = \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\sin(t) \qquad V = \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\cos(t)$$

onde $\rho^2 = x^2 + y^2$ e $\rho \neq 1$.

Um exemplo

- O espaço de Anti-De Sitter

M uma variedade de dimensão 4, conexa e de Hausdorff.
ds^2 uma métrica indefinida em M dada por

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 - dU^2 - dV^2.$$

O espaço de Anti-De Sitter AdS_3 é a hipersuperfície dada implicitamente por

$$X^2 + Y^2 - U^2 - V^2 = -1.$$

Uma maneira de visualizarmos este espaço é utilizando as coordenadas (t, x, y) dadas por

$$\begin{cases} X = \dfrac{2x}{1-\rho^2} \\ Y = \dfrac{2y}{1-\rho^2} \end{cases} \qquad U = \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\sin(t) \qquad V = \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\cos(t)$$

onde $\rho^2 = x^2 + y^2$ e $\rho \neq 1$.

Um exemplo

- O espaço de Anti-De Sitter

M uma variedade de dimensão 4, conexa e de Hausdorff.
ds^2 uma métrica indefinida em M dada por

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 - dU^2 - dV^2.$$

O espaço de Anti-De Sitter AdS_3 é a hipersuperfície dada implicitamente por

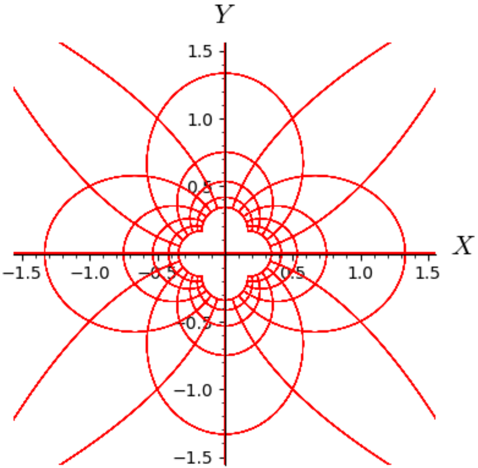
$$X^2 + Y^2 - U^2 - V^2 = -1.$$

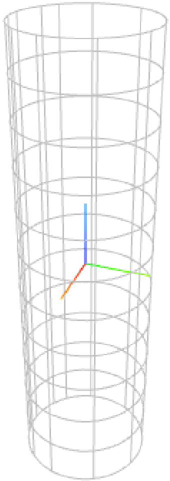
Uma maneira de visualizarmos este espaço é utilizando as coordenadas (t, x, y) dadas por

$$\begin{cases} X = \dfrac{2x}{1-\rho^2} \\ Y = \dfrac{2y}{1-\rho^2} \end{cases} \qquad \begin{aligned} U &= \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\sin(t) \\ V &= \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\cos(t) \end{aligned}$$

onde $\rho^2 = x^2 + y^2$ e $\rho \neq 1$.

Um exemplo





Um exemplo

- Um mergulho no espaço de Anti-De Siter

Considere a família de métricas $\mathfrak{g}(\lambda)$ a 1-parâmetro ($\lambda > 0$) com simetria esférica dada por

$$\mathfrak{g}(\lambda) = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2,$$

onde f é uma função. Pela simetria esférica podemos considerar somente a família de espaços bidimensionais Σ descritos pela família de métricas a 1-parâmetro

$$\gamma(\lambda) = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2.$$

Um exemplo

- Um mergulho no espaço de Anti-De Siter

Considere a família de métricas $\mathfrak{g}(\lambda)$ a 1-parâmetro $(\lambda > 0)$ com simetria esférica dada por

$$\mathfrak{g}(\lambda) = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2,$$

onde f é uma função. Pela simetria esférica podemos considerar somente a família de espaços bidimensionais Σ descritos pela família de métricas a 1-parâmetro

$$\gamma(\lambda) = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2.$$

Um exemplo

- Um mergulho no espaço de Anti-De Siter

Considere a família de métricas $\mathfrak{g}(\lambda)$ a 1-parâmetro $(\lambda > 0)$ com simetria esférica dada por

$$\mathfrak{g}(\lambda) = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2,$$

onde f é uma função. Pela simetria esférica podemos considerar somente a família de espaços bidimensionais Σ descritos pela família de métricas a 1-parâmetro

$$\gamma(\lambda) = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2.$$

Um exemplo

- Um mergulho no espaço de Anti-De Siter

Considere a família de métricas $\mathfrak{g}(\lambda)$ a 1-parâmetro $(\lambda > 0)$ com simetria esférica dada por

$$\mathfrak{g}(\lambda) = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2,$$

onde f é uma função. Pela simetria esférica podemos considerar somente a família de espaços bidimensionais Σ descritos pela família de métricas a 1-parâmetro

$$\gamma(\lambda) = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2.$$

Um exemplo

- Um mergulho no espaço de Anti-De Siter

Considere a família de métricas $\mathfrak{g}(\lambda)$ a 1-parâmetro $(\lambda > 0)$ com simetria esférica dada por

$$\mathfrak{g}(\lambda) = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2,$$

onde f é uma função. Pela simetria esférica podemos considerar somente a família de espaços bidimensionais Σ descritos pela família de métricas a 1-parâmetro

$$\gamma(\lambda) = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2.$$

Um exemplo

Considere o seguinte mergulho de Σ em AdS_3:

$$\begin{cases} X &= \sqrt{1+a^2 f(r)}\sinh(g(r)) \\ Y &= a\sqrt{f(r)}\cosh\left(\frac{t}{a}\right) \end{cases} \qquad \begin{aligned} U &= a\sqrt{f(r)}\sinh\left(\frac{t}{a}\right) \\ V &= \sqrt{1+a^2 f(r)}\cosh(g(r)) \end{aligned}$$

onde a é uma constante que tomaremos como sendo $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{2}\left.\dfrac{df}{dr}\right|_{r=r_0}$.

Note que $X^2 + Y^2 - U^2 - V^2 = -1$.

Além disso, queremos que este mergulho seja isométrico e isso ocorre quando a função $g(r)$ satisfaz a seguinte equação diferencial

$$(g'(r))^2 = \frac{1 + a^2 f(r) - \dfrac{a^2 f'(r)}{4}}{f\left(1+a^2 f(r)\right)^2}.$$

A escolha de $g(r_0) = 0$ identifica diferentes pontos de Σ no ponto $(X, Y, U, V) = (0, 0, 0, 1)$ do espaço ambiente (AdS_3).

Um exemplo

Considere o seguinte mergulho de Σ em AdS_3:

$$\begin{cases} X &= \sqrt{1+a^2 f(r)}\sinh(g(r)) \\ Y &= a\sqrt{f(r)}\cosh\left(\frac{t}{a}\right) \end{cases} \qquad \begin{aligned} U &= a\sqrt{f(r)}\sinh\left(\frac{t}{a}\right) \\ V &= \sqrt{1+a^2 f(r)}\cosh(g(r)) \end{aligned}$$

onde a é uma constante que tomaremos como sendo $\frac{1}{a} = \frac{1}{2}\left.\frac{df}{dr}\right|_{r=r_0}$.

Note que $X^2 + Y^2 - U^2 - V^2 = -1$.

Além disso, queremos que este mergulho seja isométrico e isso ocorre quando a função $g(r)$ satisfaz a seguinte equação diferencial

$$(g'(r))^2 = \frac{1 + a^2 f(r) - \frac{a^2 f'(r)}{4}}{f\left(1 + a^2 f(r)\right)^2}.$$

A escolha de $g(r_0) = 0$ identifica diferentes pontos de Σ no ponto $(X, Y, U, V) = (0, 0, 0, 1)$ do espaço ambiente (AdS_3).

Um exemplo

Considere o seguinte mergulho de Σ em AdS_3:

$$\begin{cases} X &= \sqrt{1+a^2 f(r)}\sinh(g(r)) \\ Y &= a\sqrt{f(r)}\cosh\left(\frac{t}{a}\right) \end{cases} \qquad \begin{aligned} U &= a\sqrt{f(r)}\sinh\left(\frac{t}{a}\right) \\ V &= \sqrt{1+a^2 f(r)}\cosh(g(r)) \end{aligned}$$

onde a é uma constante que tomaremos como sendo $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{2}\left.\dfrac{df}{dr}\right|_{r=r_0}$.

Note que $X^2 + Y^2 - U^2 - V^2 = -1$.

Além disso, queremos que este mergulho seja isométrico e isso ocorre quando a função $g(r)$ satisfaz a seguinte equação diferencial

$$\left(g'(r)\right)^2 = \frac{1 + a^2 f(r) - \dfrac{a^2 f'(r)}{4}}{f\left(1 + a^2 f(r)\right)^2}.$$

A escolha de $g(r_0) = 0$ identifica diferentes pontos de Σ no ponto $(X, Y, U, V) = (0, 0, 0, 1)$ do espaço ambiente (AdS_3).

Um exemplo

Considere o seguinte mergulho de Σ em AdS_3:

$$\begin{cases} X &= \sqrt{1+a^2 f(r)}\sinh(g(r)) \\ Y &= a\sqrt{f(r)}\cosh\left(\frac{t}{a}\right) \end{cases} \qquad U = a\sqrt{f(r)}\sinh\left(\frac{t}{a}\right)$$

$$V = \sqrt{1+a^2 f(r)}\cosh(g(r))$$

onde a é uma constante que tomaremos como sendo $\displaystyle\frac{1}{a} = \frac{1}{2}\frac{df}{dr}\bigg|_{r=r_0}$.

Note que $X^2 + Y^2 - U^2 - V^2 = -1$.

Além disso, queremos que este mergulho seja isométrico e isso ocorre quando a função $g(r)$ satisfaz a seguinte equação diferencial

$$(g'(r))^2 = \frac{1 + a^2 f(r) - \dfrac{a^2 f'(r)}{4}}{f\left(1 + a^2 f(r)\right)^2}.$$

A escolha de $g(r_0) = 0$ identifica diferentes pontos de Σ no ponto $(X, Y, U, V) = (0, 0, 0, 1)$ do espaço ambiente (AdS_3).

Um exemplo

Considere o seguinte mergulho de Σ em AdS_3:

$$\begin{cases} X &= \sqrt{1+a^2 f(r)}\sinh(g(r)) \\ Y &= a\sqrt{f(r)}\cosh\left(\frac{t}{a}\right) \end{cases} \qquad \begin{aligned} U &= a\sqrt{f(r)}\sinh\left(\frac{t}{a}\right) \\ V &= \sqrt{1+a^2 f(r)}\cosh(g(r)) \end{aligned}$$

onde a é uma constante que tomaremos como sendo $\displaystyle\frac{1}{a} = \frac{1}{2}\left.\frac{df}{dr}\right|_{r=r_0}$.

Note que $X^2 + Y^2 - U^2 - V^2 = -1$.
Além disso, queremos que este mergulho seja isométrico e isso ocorre quando a função $g(r)$ satisfaz a seguinte equação diferencial

$$\left(g'(r)\right)^2 = \frac{1 + a^2 f(r) - \dfrac{a^2 f'(r)}{4}}{f\left(1 + a^2 f(r)\right)^2}.$$

A escolha de $g(r_0) = 0$ identifica diferentes pontos de Σ no ponto $(X, Y, U, V) = (0, 0, 0, 1)$ do espaço ambiente (AdS_3).

Um exemplo

Considere o seguinte mergulho de Σ em AdS_3:

$$\begin{cases} X &= \sqrt{1+a^2 f(r)}\sinh(g(r)) \\ Y &= a\sqrt{f(r)}\cosh\left(\frac{t}{a}\right) \end{cases} \qquad \begin{aligned} U &= a\sqrt{f(r)}\sinh\left(\frac{t}{a}\right) \\ V &= \sqrt{1+a^2 f(r)}\cosh(g(r)) \end{aligned}$$

onde a é uma constante que tomaremos como sendo $\displaystyle \frac{1}{a} = \frac{1}{2}\left.\frac{df}{dr}\right|_{r=r_0}$.

Note que $X^2 + Y^2 - U^2 - V^2 = -1$.

Além disso, queremos que este mergulho seja isométrico e isso ocorre quando a função $g(r)$ satisfaz a seguinte equação diferencial

$$\left(g'(r)\right)^2 = \frac{1 + a^2 f(r) - \dfrac{a^2 f'(r)}{4}}{f\left(1 + a^2 f(r)\right)^2}.$$

A escolha de $g(r_0) = 0$ identifica diferentes pontos de Σ no ponto $(X, Y, U, V) = (0, 0, 0, 1)$ do espaço ambiente (AdS_3).

Um exemplo

```
M = Manifold(4, 'M', latex_name='M', structure='pseudo-Riemannian', signature=2+2)
ChartM.<X,Y,U,V> = M.chart()
ChartM
```

$$(M, (X, Y, U, V))$$

Um exemplo

```
M = Manifold(4, 'M', latex_name='M', structure='pseudo-Riemannian', signature=2+2)
ChartM.<X,Y,U,V> = M.chart()
ChartM
```

$$(M,(X,Y,U,V))$$

```
gM = M.metric()
gM[0,0] = 1
gM[1,1] = 1
gM[2,2] = -1
gM[3,3] = -1
gM.display()
```

$$g = \mathrm{d}X \otimes \mathrm{d}X + \mathrm{d}Y \otimes \mathrm{d}Y - \mathrm{d}U \otimes \mathrm{d}U - \mathrm{d}V \otimes \mathrm{d}V$$

Um exemplo

```
RN = Manifold(2, 'RN', ambient=M , latex_name='RN',structure='pseudo-Riemannian')
ChartRN.<t,r> = RN.chart(r"t:(-oo,oo):t r:(0,+oo):r")
a = var('a')
f(r) = function('f')(r)
g(r) = function('g')(r)
RN_to_M = RN.diff_map(M, {(ChartRN,ChartM):[(1+a^2*f)^(1/2)*sinh(g),
                                             a*(f)^(1/2)*cosh(t/a),
                                             a*(f)^(1/2)*sinh(t/a),
                                             (1+a^2*f)^(1/2)*cosh(g)]})
RN_to_M.display()
```

$$\begin{array}{llcl} & RN & \longrightarrow & M \\ & (t,r) & \longmapsto & (X,Y,U,V) = \left(\sqrt{a^2 f(r)+1}\sinh\left(g(r)\right), a\cosh\left(\frac{t}{a}\right)\sqrt{f(r)}, a\sqrt{f(r)}\sinh\left(\frac{t}{a}\right), \sqrt{a^2 f(r)+1}\cosh\left(g(r)\right)\right) \end{array}$$

Um exemplo

```
RN = Manifold(2, 'RN', ambient=M , latex_name='RN',structure='pseudo-Riemannian')
ChartRN.<t,r> = RN.chart(r"t:(-oo,oo):t r:(0,+oo):r")
a = var('a')
f(r) = function('f')(r)
g(r) = function('g')(r)
RN_to_M = RN.diff_map(M, {(ChartRN,ChartM):[(1+a^2*f)^(1/2)*sinh(g),
                                             a*(f)^(1/2)*cosh(t/a),
                                             a*(f)^(1/2)*sinh(t/a),
                                             (1+a^2*f)^(1/2)*cosh(g)]})
RN_to_M.display()
```

$$\begin{array}{llll} RN & \longrightarrow & M & \\ (t,r) & \longmapsto & (X,Y,U,V) = & \left(\sqrt{a^2 f(r)+1}\sinh\left(g(r)\right), a\cosh\left(\frac{t}{a}\right)\sqrt{f(r)}, a\sqrt{f(r)}\sinh\left(\frac{t}{a}\right), \sqrt{a^2 f(r)+1}\cosh\left(g(r)\right)\right) \end{array}$$

```
RN.set_embedding(RN_to_M)
gRN = RN.induced_metric()
gRN.display()
```

$$\gamma = -f(r)\,\mathrm{d}t\otimes\mathrm{d}t + \left(\frac{a^2\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + 4\left(a^4 f(r)^3 + 2\,a^2 f(r)^2 + f(r)\right)\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2}{4\left(a^2 f(r)^2 + f(r)\right)}\right)\mathrm{d}r\otimes\mathrm{d}r$$

Um exemplo

- A métrica de Reissner-Nordström

Tomando-se a função f nesta construção como sendo

$$f(r) = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2},$$

onde $m, e > 0$, temos que a métrica $\mathfrak{g}$ é a métrica de Reissner-Nordström.
As raízes de f são dadas por

$$r_\pm = m \pm \sqrt{m^2 - e^2}.$$

Identificando-se os pontos p_I e p_+ com $(X, Y, U, V) = (0, 0, 0, 1)$ podemos analisar o limite $e \to m$ através dos mergulhos. As próximas imagens foram retiradas de [BHJ14].

Um exemplo

- A métrica de Reissner-Nordström

Tomando-se a função f nesta construção como sendo

$$f(r) = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2},$$

onde $m, e > 0$, temos que a métrica $\mathfrak{g}$ é a métrica de Reissner-Nordström.
As raízes de f são dadas por

$$r_\pm = m \pm \sqrt{m^2 - e^2}.$$

Identificando-se os pontos p_I e p_+ com $(X, Y, U, V) = (0, 0, 0, 1)$ podemos analisar o limite $e \to m$ através dos mergulhos. As próximas imagens foram retiradas de [BHJ14].

Um exemplo

- A métrica de Reissner-Nordström

Tomando-se a função f nesta construção como sendo

$$f(r) = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2},$$

onde $m, e > 0$, temos que a métrica $\mathfrak{g}$ é a métrica de Reissner-Nordström.

As raízes de f são dadas por

$$r_\pm = m \pm \sqrt{m^2 - e^2}.$$

Identificando-se os pontos p_I e p_+ com $(X, Y, U, V) = (0, 0, 0, 1)$ podemos analisar o limite $e \to m$ através dos mergulhos. As próximas imagens foram retiradas de [BHJ14].

Um exemplo

- A métrica de Reissner-Nordström

Tomando-se a função f nesta construção como sendo

$$f(r) = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2},$$

onde $m, e > 0$, temos que a métrica $\mathfrak{g}$ é a métrica de Reissner-Nordström.
As raízes de f são dadas por

$$r_\pm = m \pm \sqrt{m^2 - e^2}.$$

Identificando-se os pontos p_I e p_+ com $(X, Y, U, V) = (0, 0, 0, 1)$ podemos analisar o limite $e \to m$ através dos mergulhos. As próximas imagens foram retiradas de [BHJ14].

Um exemplo

- A métrica de Reissner-Nordström

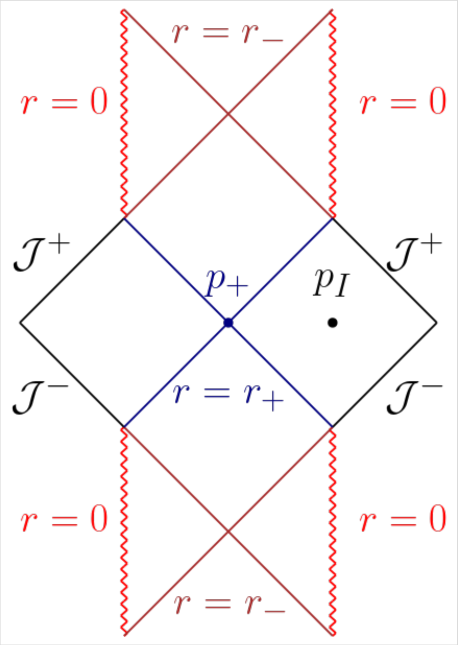
Tomando-se a função f nesta construção como sendo

$$f(r) = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2},$$

onde $m, e > 0$, temos que a métrica $\mathfrak{g}$ é a métrica de Reissner-Nordström.
As raízes de f são dadas por

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - e^2}.$$

Identificando-se os pontos p_I e p_+ com $(X, Y, U, V) = (0, 0, 0, 1)$ podemos analisar o limite $e \to m$ através dos mergulhos. As próximas imagens foram retiradas de [BHJ14].



Um exemplo

- A métrica de Reissner-Nordström

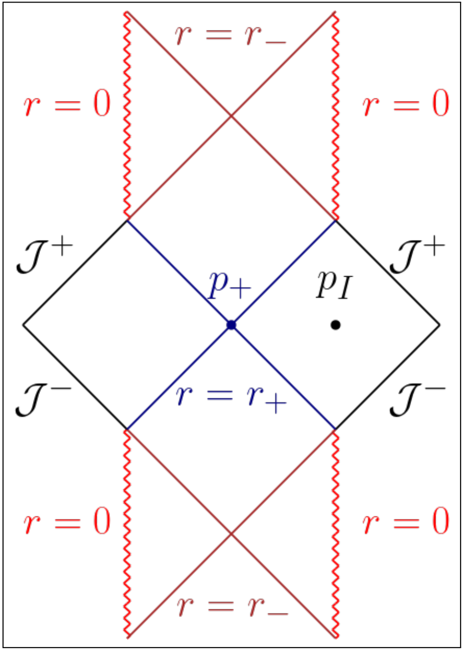
Tomando-se a função f nesta construção como sendo

$$f(r) = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2},$$

onde $m, e > 0$, temos que a métrica $\mathfrak{g}$ é a métrica de Reissner-Nordström.
As raízes de f são dadas por

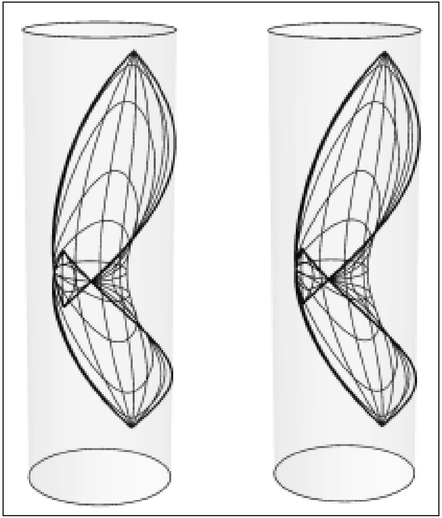
$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - e^2}.$$

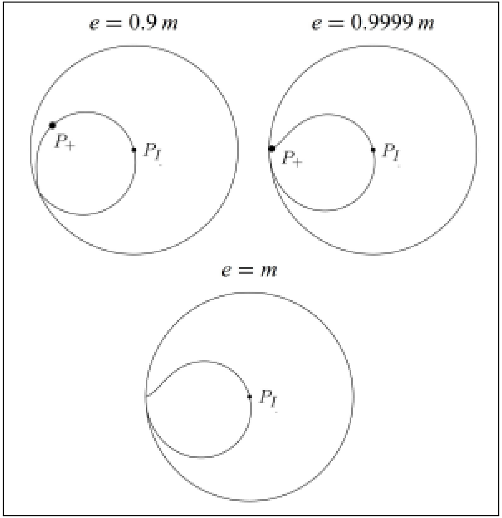
Identificando-se os pontos p_I e p_+ com $(X, Y, U, V) = (0, 0, 0, 1)$ podemos analisar o limite $e \to m$ através dos mergulhos. As próximas imagens foram retiradas de [BHJ14].



Um exemplo

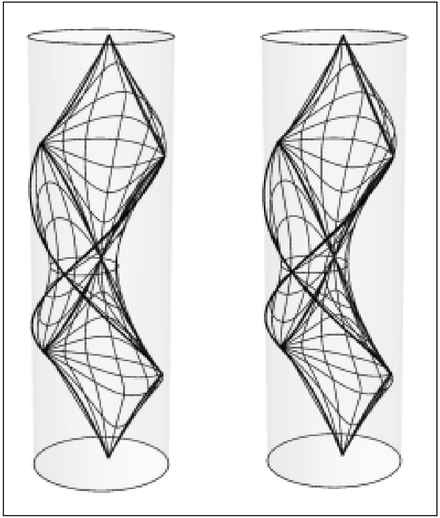
Identificando-se p_I com $(X, Y, U, V) = (0, 0, 0, 1)$. (Reissner-Nordström extrema)

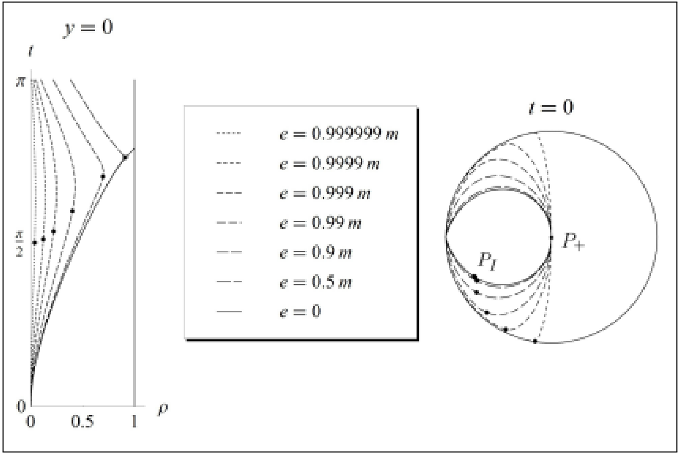




Um exemplo

Identificando-se p_+ com $(X, Y, U, V) = (0, 0, 0, 1)$. (Bertotti-Robinson)





Bibliografia

Universidade Federal do ABC

Bibliografia I

[BC80] F. Bampi and R. Cianci, *Comments on limits of space-times*, Internat. J. Theoret. Phys. **19** (1980), no. 3, 211–215. MR575076

[BHJ14] I. Bengtsson, S. Holst, and E. Jakobsson, *Classics illustrated: limits of spacetimes*, Classical Quantum Gravity **31** (2014), no. 20, 205008, 18. MR3270736

[BP19] M. Bugden and C. F. Paganini, *The Λ to zero limit of spacetimes and its physical interpretation*, Classical Quantum Gravity **36** (2019), no. 4, 045003, 18. MR3919532

[Fle16] S. C. Fletcher, *Similarity, topology, and physical significance in relativity theory*, British J. Philos. Sci. **67** (2016), no. 2, 365–389. MR3509976

[Ger69] R. Geroch, *Limits of spacetimes*, Comm. Math. Phys. **13** (1969), 180–193. MR250643

[Kas21] E. Kasner, *Geometrical Theorems on Einstein's Cosmological Equations*, Amer. J. Math. **43** (1921), no. 4, 217–221. MR1506447

[Mal12] D. B. Malament, *Topics in the foundations of general relativity and Newtonian gravitation theory*, Chicago Lectures in Physics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 2012. MR2963766

[Spa66] E. H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto, Ont.-London, 1966. MR0210112