

SIMULADO - FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL - 2023.3

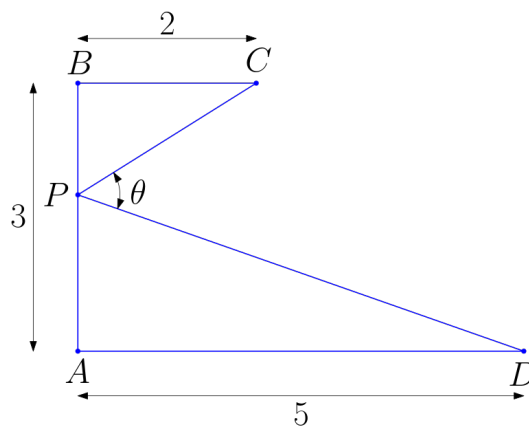
STEFANO NARDULLI

1. SIMULADO

Exercício 1 (4 pontos). *Esboce o gráfico da função*

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2x+3}{x+1}\right) - 2x.$$

Exercício 2 (2,5 pontos). *Determine a que distância vertical, em relação ao segmento AD , deve estar posicionado o ponto $P \in AB$ de modo a maximizar o valor do ângulo θ ?*



Exercício 3 (2,5 pontos). *Esboce o gráfico da função*

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercício 4 (1 ponto). *Determine o seguinte limite, fornecendo justificativas para cada etapa do cálculo:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(x)}{\sin(x) - x}.$$

Exercício 5 (Bônus, 1 ponto). *Enuncie e prove o Teorema do valor médio de Lagrange.*

2. SOLUÇÕES

2.1. Solução do exercício 1. Para esboçar o gráfico de uma função, podemos seguir os seguintes passos, que asseguram que as informações mais importantes dessa função estão incluídas em nossa representação.

Passo 1: Determinação do domínio

Note que as funções $\arctan(u)$ e $2u$ tem como domínio o conjunto dos números reais. Entretanto, a função $\frac{2u+3}{u+1}$ não está definida para $u = -1$. Portanto, o domínio da função f , denotado por $\mathcal{D}(f)$, é dado por

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Passo 2: Intersecção com os eixos coordenados

Primeiramente determinemos a intersecção com o eixo x , isto é, $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= f(x) = \arctan\left(\frac{2x+3}{x+1}\right) - 2x \\ 2x &= \arctan\left(\frac{2x+3}{x+1}\right) \\ x &= \frac{\arctan\left(\frac{2x+3}{x+1}\right)}{2}. \end{aligned}$$

Utilizando do método das iterações a partir de $x_0 = 0$ temos que

$$x_1 = \frac{\arctan\left(\frac{2*0+3}{0+1}\right)}{2} = \frac{\arctan(3)}{2} \approx \frac{1,3}{2} = 0,7$$

Fazendo uma interação obtemos

$$x_2 = \frac{\arctan\left(\frac{2*0,7+3}{0,7+1}\right)}{2} = \frac{\arctan\left(\frac{4,4}{1,7}\right)}{2} = \frac{\arctan(2,6)}{2} \approx \frac{1,2}{2} = 0,6$$

Podemos verificar se a nossa aproximação já está boa o suficiente substituindo-se $x_2 = 0,6$ em $f(x)$. Donde temos que

$$\begin{aligned} f(x_2) &= f(0,6) \\ &= \arctan\left(\frac{2*0,6+3}{0,6+1}\right) - 2*0,6 \\ &= \arctan\left(\frac{4,2}{1,6}\right) - 1,2 \\ &= \arctan(2,6) - 1,2 \\ &\approx 1,2 - 1,2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Calculemos agora a intersecção com o eixo y , isto é, $f(0)$.

$$f(0) = \arctan\left(\frac{2*0+3}{0+1}\right) - 2*0 = \arctan(3) \approx 1,3.$$

Passo 3: Determinação de simetrias

Não há simetrias, isto é, a função não é par, ímpar ou periódica.

Passo 4: Determinação de assíntotas

Para verificarmos a existência de assíntotas horizontais temos que calcular os seguintes limites:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\arctan \left(\frac{2x+3}{x+1} \right) - 2x \right) \\ &= \arctan \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x+1} \right) - \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \right).\end{aligned}$$

Note que $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x+3 = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 = +\infty$ e, portanto, temos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Por L'Hopital temos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{d}{dx}(2x+3)}{\frac{d}{dx}(x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1} = 2.$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \arctan(2) - \infty = -\infty.$$

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\arctan \left(\frac{2x+3}{x+1} \right) - 2x \right) \\ &= \arctan \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{x+1} \right) - \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x \right).\end{aligned}$$

Note novamente que $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x+3 = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} x+1 = -\infty$ e, portanto, temos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Por L'Hopital temos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{d}{dx}(2x+3)}{\frac{d}{dx}(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{1} = 2.$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \arctan(2) - (-\infty) = \infty.$$

Donde concluímos que a função f não tem assíntotas horizontais.

Para verificarmos a existência de assíntotas verticais temos que calcular os seguintes limites:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\arctan \left(\frac{2x+3}{x+1} \right) - 2x \right) \\ &= \arctan \left(\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x+3}{x+1} \right) - \left(\lim_{x \rightarrow -1^+} 2x \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - (-2) \\ &= \frac{\pi}{2} + 2.\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\arctan \left(\frac{2x+3}{x+1} \right) - 2x \right) \\ &= \arctan \left(\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x+3}{x+1} \right) - \left(\lim_{x \rightarrow -1^-} 2x \right) \\ &= -\frac{\pi}{2} - (-2) \\ &= -\frac{\pi}{2} + 2.\end{aligned}$$

Portanto, como $x = -1$ é o único ponto da reta que não está no domínio de $f(x)$, temos que $f(x)$ não tem assíntotas verticais.

Para verificarmos a existência de assíntotas inclinadas temos que calcular os seguintes limites:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (\arctan(2) - 2x)) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\arctan\left(\frac{2x+3}{x+1}\right) - 2x - (\arctan(2) - 2x) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\arctan\left(\frac{2x+3}{x+1}\right) - \arctan(2) \right) \\ &= \arctan\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x+1}\right) - \arctan(2) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (\arctan(2) - 2x)) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\arctan\left(\frac{2x+3}{x+1}\right) - 2x - (\arctan(2) - 2x) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\arctan\left(\frac{2x+3}{x+1}\right) - \arctan(2) \right) \\ &= \arctan\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{x+1}\right) - \arctan(2) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto, a função f é assintótica a reta dada pela equação $y = \arctan(2) - 2x$.

Passo 5: Determinação dos intervalos de crescimentos e decrescimento

Para determinar os intervalos de crescimento e decrescimento da função f calculemos $f'(x)$.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\arctan\left(\frac{2x+3}{x+1}\right) - 2x \right) \\ &= \frac{1}{\left(\frac{2x+3}{x+1}\right)^2 + 1} \frac{d}{dx} \left(\frac{2x+3}{x+1} \right) - 2 \\ &= \frac{1}{\frac{(2x+3)^2 + (x+1)^2}{(x+1)^2}} \frac{2(x+1) - (2x+3)1}{(x+1)^2} - 2 \\ &= \frac{(x+1)^2}{(2x+3)^2 + (x+1)^2} \frac{2x+2-2x-3}{(x+1)^2} - 2 \\ &= \frac{-1}{(2x+3)^2 + (x+1)^2} - 2 \\ &= - \left(\frac{1}{(2x+3)^2 + (x+1)^2} + 2 \right).\end{aligned}$$

Como $(2x+3)^2 \geq 0$ e $(x+1)^2 \geq 0$ temos que $(2x+3)^2 + (x+1)^2 > 0$ (note que esta última desigualdade é estrita, pois $(2x+3)^2 = 0$ quando $x = -\frac{3}{2}$ e $(x+1)^2 = 0$ quando $x = -1$. Assim, $(2x+3)^2 + (x+1)^2 \neq 0$ para todo valor de x). Logo, de $(2x+3)^2 + (x+1)^2 > 0$, temos que

$$\frac{1}{(2x+3)^2 + (x+1)^2} > 0$$

$$\frac{1}{(2x+3)^2 + (x+1)^2} + 2 > 2 > 0$$

$$- \left(\frac{1}{(2x+3)^2 + (x+1)^2} + 2 \right) < 0.$$

Portanto, $f'(x) < 0$ para todo $x \in \mathcal{D}(f)$. Logo, a função $f(x)$ é decrescente para todo $x \in \mathcal{D}(f)$.

Passo 6: Determinação dos valores de máximo e mínimo local

Para determinar os máximos e mínimos locais vamos encontrar os pontos críticos de $f(x)$, isto é, os valores de c tais que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe. Primeiramente,

$$0 = f'(c) = - \left(\frac{1}{(2c+3)^2 + (c+1)^2} + 2 \right)$$

$$0 = \frac{1}{(2c+3)^2 + (c+1)^2} + 2$$

$$-2 = \frac{1}{(2c+3)^2 + (c+1)^2}$$

$$-2(4c^2 + 12c + 9 + c^2 + 2c + 1) = 1$$

$$-2(5c^2 + 14c + 10) = 1$$

$$-10c^2 - 28c - 21 = 0$$

$$10c^2 + 28c + 21 = 0.$$

Note que $\Delta = 28^2 - 4 \cdot 10 \cdot 21 = 784 - 840 = -56$ e portanto $\nexists c \in \mathbb{R}$ tal que $10c^2 + 28c + 21 = 0$. Logo, $f'(c) \neq 0$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

Como $f'(x)$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ temos que $f(x)$ não tem pontos críticos e portanto não tem máximos ou mínimos locais (note que $x = -1$ não está no domínio de f e esse fato é essencial para que ele não seja um máximo ou mínimo local).

Passo 7: Concavidade e pontos de inflexão

Para determinarmos a concavidade calculemos $f''(x)$.

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x)$$

$$= \frac{d}{dx} \left(- \left(\frac{1}{(2x+3)^2 + (x+1)^2} + 2 \right) \right)$$

$$= - \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{(2x+3)^2 + (x+1)^2} \right)$$

$$= - \frac{-(2(2x+3)2 + 2(x+1)1)}{((2x+3)^2 + (x+1)^2)^2}$$

$$= \frac{8x + 12 + 2x + 2}{((2x+3)^2 + (x+1)^2)^2}$$

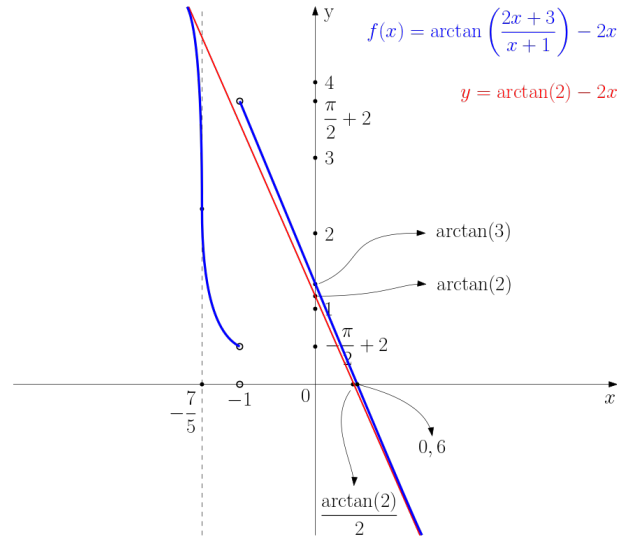
$$= \frac{10x + 14}{((2x+3)^2 + (x+1)^2)^2}.$$

Como $((2x+3)^2 + (x+1)^2)^2 > 0$ temos que o sinal de $f''(x)$ é determinado pelo sinal de $10x + 14$. Logo, como $10x + 14 > 0$ para $x > -\frac{14}{10} = -\frac{7}{5}$, $10x + 14 < 0$ para $x < -\frac{7}{5}$ e $10x + 14 = 0$ para $x = -\frac{7}{5}$, temos que $f''(x) > 0$ para $x > -\frac{7}{5}$, $f''(x) < 0$ para $x < -\frac{7}{5}$ e $f''(x) = 0$ para $x = -\frac{7}{5}$.

Assim, $f(x)$ é côncava para cima para $x > -\frac{7}{5}$, côncava para baixo para $x < -\frac{7}{5}$ e $x = -\frac{7}{5}$ é um ponto de inflexão.

Passo 8: Esboço do gráfico

Das informações dos passos 1 a 7 temos que um possível esboço do gráfico de $f(x)$ é dado por:



2.2. Solução do exercício 2. Para solucionarmos este problema de otimização temos que encontrar uma função que descreva o valor de θ em função da altura de P com relação ao segmento AD . Denotemos por x a altura do ponto P em relação ao segmento AD .

Seja α o ângulo \widehat{BPC} e β o ângulo \widehat{APD} . Note que

$$\tan(\alpha(x)) = \frac{2}{3-x} \quad \text{e} \quad \tan(\beta(x)) = \frac{5}{x}.$$

Assim, como $\theta + \alpha + \beta = \pi$ temos que

$$\theta(x) = \pi - \arctan\left(\frac{2}{3-x}\right) - \arctan\left(\frac{5}{x}\right).$$

Derivando-se a expressão θ com relação a x obtemos que

$$\begin{aligned} \theta'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\pi - \arctan\left(\frac{2}{3-x}\right) - \arctan\left(\frac{5}{x}\right) \right) \\ &= -\frac{1}{\left(\frac{2}{3-x}\right)^2 + 1} \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{3-x} \right) - \frac{1}{\left(\frac{5}{x}\right)^2 + 1} \frac{d}{dx} \left(\frac{5}{x} \right) \\ &= -\frac{1}{\frac{4+(3-x)^2}{(3-x)^2}} \frac{0(3-x) - 2(-1)}{(3-x)^2} - \frac{1}{\frac{25+x^2}{x^2}} \frac{0x - 5 \cdot 1}{x^2} \\ &= -\frac{(3-x)^2}{4+(3-x)^2} \frac{2}{(3-x)^2} + \frac{x^2}{25+x^2} \frac{5}{x^2} \\ &= -\frac{2}{4+(3-x)^2} + \frac{5}{25+x^2} \\ &= \frac{5}{25+x^2} - \frac{2}{4+9-6x+x^2} \\ &= \frac{5}{x^2+25} - \frac{2}{x^2-6x+13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{5(x^2 - 6x + 13) - 2(x^2 + 25)}{(x^2 + 25)(x^2 - 6x + 13)} \\
&= \frac{5x^2 - 30x + 65 - 2x^2 - 50}{(x^2 + 25)(x^2 - 6x + 13)} \\
&= \frac{3x^2 - 30x + 15}{(x^2 + 25)(x^2 - 6x + 13)}.
\end{aligned}$$

Note que queremos encontrar o máximo de $\theta(x)$ para $x \in [0, 3]$, pois se $x < 0$ ou $x > 3$ temos que $P \notin AB$.

Assim, $\theta'(x) = 0$ quanto $3x^2 - 30x + 15 = 0$, ou ainda, $x^2 - 10x + 5 = 0$. Portanto, $\theta'(x) = 0$ quando $x = 5 - 2\sqrt{5}$ ou $x = 5 + 2\sqrt{5}$. Como queremos encontrar o máximo de $\theta(x)$ para $x \in [0, 3]$ temos que um possível candidato é $x = 5 - 2\sqrt{5}$.

Para verificarmos se $x = 5 - 2\sqrt{5}$ é um máximo local de $\theta(x)$ façamos o teste da segunda derivada.

$$\begin{aligned}
\theta''(x) &= \frac{d}{dx} \theta'(x) \\
&= \frac{d}{dx} \left(\frac{3x^2 - 30x + 15}{(x^2 + 25)(x^2 - 6x + 13)} \right) \\
&= \frac{6(x^5 - 18x^4 + 70x^3 - 160x^2 - 135x + 1250)}{(x^2 + 25)^2(x^2 - 6x + 13)^2}.
\end{aligned}$$

Donde temos que $\theta''(5 - 2\sqrt{5}) = \frac{-420 - 207\sqrt{5}}{8410} < 0$. Assim, $x = 5 - 2\sqrt{5} \approx 0.53$ é de fato um máximo local para θ .

USO DA SEGUNDA DERIVADA PARA MÁXIMOS E MÍNIMOS

Seja c um número crítico de f tal que $f'(c) = 0$ e $f'(x)$ exista em um intervalo aberto I contendo c . Suponha que $f''(c)$ existe. Desta forma,

- se $f''(c) < 0$, então f tem um valor máximo relativo em c ;
- se $f''(c) > 0$, então f tem um valor mínimo relativo em c ;

Note que este fato é uma consequência imediata do teste da segunda derivada para convexidade.

De fato, se $f''(x) > 0$, então a concavidade está voltada para cima e, portanto, o ponto crítico é um mínimo local. Já se $f''(x) < 0$, então a concavidade está voltada para baixo e, portanto, o ponto crítico é um máximo local.

2.3. Solução do exercício 3. Para esboçar o gráfico de uma função, podemos seguir os seguintes passos, que asseguram que as informações mais importantes dessa função estão incluídas em nossa representação.

Passo 1: Determinação do domínio

Note que a função u^2 tem como domínio o conjunto dos números reais. Entretanto, a função $\frac{1}{u}$ tem como domínio os valores $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e a função \sqrt{u} tem como domínio os valores $u \geq 0$. Portanto, $f(x)$ tem como domínio os valores $x \in \mathbb{R}$ tais que $1 - x^2 > 0$, ou ainda, $x^2 < 1$. Portanto, o domínio da função f , denotado por $\mathcal{D}(f)$, é dado por

$$\mathcal{D}(f) =] - 1, 1[.$$

Passo 2: Intersecção com os eixos coordenados

Primeiramente determinemos a intersecção com o eixo x , isto é, $f(x) = 0$.

$$0 = f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$0 = x^2.$$

Donde temos que $x = 0$. Calculemos agora a intersecção com o eixo y , isto é, $f(0)$.

$$f(0) = \frac{0^2}{\sqrt{1-0^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Passo 3: Determinação de simetrias

A função f é uma função par, isto é, $f(-x) = f(x)$. De fato, como $(-x)^2 = (-1)^2 x^2 = x^2$, temos que

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{\sqrt{1-(-x)^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = f(x).$$

Donde temos que f é simétrica com relação ao eixo y .

Passo 4: Determinação de assíntotas

Para verificarmos a existência de assíntotas verticais temos que calcular os seguintes limites:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty.$$

Por outro lado, note que

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty.$$

Donde segue-se que $x = 1$ e $x = -1$ são assíntotas verticais da função f . Note que a função f não possui assíntotas horizontais ou inclinadas.

Passo 5: Determinação dos intervalos de crescimentos e decrescimento

Para determinar os intervalos de crescimentos e decrescimento da função f calculemos $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) \\ &= \frac{2x\sqrt{1-x^2} - x^2 \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \\ &= \frac{\frac{2x(1-x^2)+x^3}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \\ &= \frac{2x - 2x^3 + x^3}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{x(2-x^2)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Como $x \in]-1, 1[$ temos que $x^2 < 1$, ou ainda, $-x^2 > -1$. Ou seja, $1 - x^2 > 0$ e, portanto, $(1 - x^2)^{\frac{3}{2}} > 0$.

Assim, $f'(x) = 0$ quando $x = 0$ ou quando $x = \pm\sqrt{2}$. Mas como $\mathcal{D}(f) =]-1, 1[$ e $|\pm\sqrt{2}| > 1$ temos que o único ponto crítico que 0.

Além disso, note que para $x \in]-1, 1[$ temos que $x^2 < 1$, ou ainda, $-x^2 > -1$. Ou seja, $2 - x^2 > 1 > 0$ e, portanto, o sinal de $f'(x)$ é determinado somente pelo sinal de x . Logo, $f'(x) < 0$ para $x < 0$ e $f'(x) > 0$ para $x > 0$.

Passo 6: Determinação dos valores de máximo e mínimo local

Como $f'(0) = 0$ e $f'(x)$ muda de sinal de negativo para positivo em 0, $f(0) = 0$ é um mínimo local (e neste caso global).

Passo 7: Concavidade e pontos de inflexão

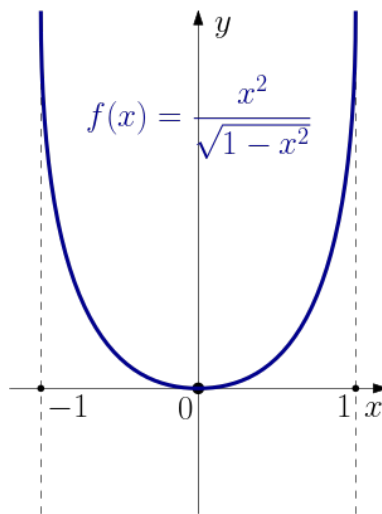
Para determinarmos a concavidade calculemos $f''(x)$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx} f'(x) \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{x(2-x^2)}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} \right) \\ &= \frac{x^2 + 2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

Como, para $x \in]-1, 1[$ temos que $1 - x^2 > 0$ concluímos que $(1 - x^2)^{\frac{5}{2}} > 0$. Além disso, $x^2 + 2 > 0$ e, portanto, $f''(x) > 0$ para todo $x \in]-1, 1[$, donde temos que f tem a concavidade para cima e não tem ponto de inflexão.

Passo 8: Esboço do gráfico

Das informações dos passos 1 a 7 temos que um possível esboço do gráfico de $f(x)$ é dado por:



2.4. Solução do exercício 4. Primeiramente, note que $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \sin(x)) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin(x) - x) = 0$ e, portanto, temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Por L'Hopital temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(x)}{\sin(x) - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx}(x^2 \sin(x))}{\frac{d}{dx}(\sin(x) - x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin(x) + x^2 \cos(x)}{\cos(x) - 1}.$$

Agora note que $\lim_{x \rightarrow 0} (2x \sin(x) + x^2 \cos(x)) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x) - 1) = 0$ e, portanto, temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Por L'Hopital temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(x)}{\sin(x) - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx}(2x \sin(x) + x^2 \cos(x))}{\frac{d}{dx}(\cos(x) - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(x) + 4x \cos(x) - x^2 \sin(x)}{-\sin(x)}.$$

Entretanto, $\lim_{x \rightarrow 0} (2 \sin(x) + 4x \cos(x) - x^2 \sin(x)) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} (-\sin(x)) = 0$ e, portanto, temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Por L'Hopital temos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(x)}{\sin(x) - x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx}(2 \sin(x) + 4x \cos(x) - x^2 \sin(x))}{\frac{d}{dx}(-\sin(x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x) + 4 \cos(x) - 4x \sin(x) - 2x \sin(x) - x^2 \cos(x)}{-\cos(x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2+4}{-1} \\
&= -6.
\end{aligned}$$

2.5. Solução do exercício 5.

Teorema 1 (Teorema do valor médio de Lagrange). *Seja f uma função tal que*

- (1) *f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$.*
- (2) *f é diferenciável no intervalo aberto $]a, b[$.*

Então existe um número $c \in]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demonstração. Note que o segmento de reta com pontos finais $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é dado pela equação

$$y(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Vamos definir uma função auxiliar h por

$$h(x) := f(x) - y(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Ilustrada na Figura 1.

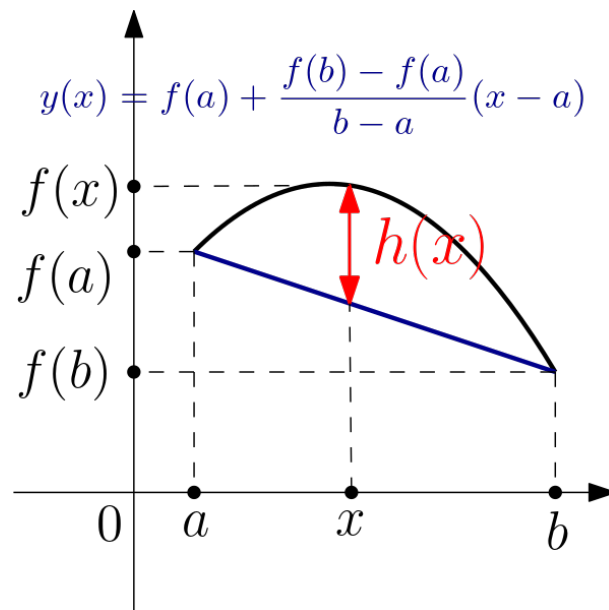


FIGURA 1. Função auxiliar h da prova do Teorema de Lagrange.

Note que

- A função h é contínua em $[a, b]$, pois é soma de f (que é contínua em $[a, b]$ por hipótese) com um polinômio do primeiro grau que também é contínuo.
 - A função h é diferenciável em $]a, b[$, pois é a soma de f (que é diferenciável em $]a, b[$ por hipótese) com um polinômio do primeiro grau que também é diferenciável.
- Além disso, temos que

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- Por fim, temos que

$$h(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0,$$

e

$$h(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(b) - f(a) - (f(b) - f(a)) = 0.$$

Portanto, $h(a) = h(b)$.

Assim, h satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle. Donde segue-se que existe $c \in]a, b[$ tal que $h'(c) = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} 0 = h'(c) &= f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ f'(c) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \end{aligned}$$

□