

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC (UFABC)

NOTAS DE AULA

GEOMETRIA DIFERENCIAL II

MARCOS AGNOLETTO FORTE¹
Estagiário

MÁRCIO FABIANO DA SILVA
Professor

Santo André, 2023

¹Conta com apoio de bolsa da CAPES - Código de Financiamento: 88887.667684/2022-00.

Sumário

I	Notas de Aula	1
1	Revisão de geometria diferencial I	2
1.1	Curvas	2
1.2	Superfícies	4
1.3	A faixa de Möbius	6
1.3.1	Parametrização	7
1.4	Orientabilidade	11
1.5	O gradiente	15
2	A segunda forma fundamental	16
2.1	Consequências geométricas	17
2.2	A curvatura normal	17
2.2.1	Exemplos	18
3	A aplicação normal de Gauss	22
3.1	Exemplos	23
3.2	dN_p é uma aplicação autoadjunta	24
3.3	Consequências geométricas	26
3.4	Exemplos	27
3.5	A fórmula de Euler	27
3.6	Expressão em coordenadas locais para as curvaturas Gaussiana e média	28
4	Classificação de pontos de uma superfície	31
4.1	Caracterização das superfícies totalmente umbílicas do \mathbb{R}^3	40
5	Curvas especiais sobre uma superfície	43
5.1	Linhas de curvatura	43
5.2	Linhas assintóticas	47
5.3	Geodésicas	49

Parte I.

Notas de Aula

1. Revisão de geometria diferencial I

1.1. Curvas

Definição 1.1. Uma *curva diferenciável parametrizada no \mathbb{R}^3* é uma aplicação diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Escrevemos $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, para $t \in I$, o conjunto $\alpha(I)$ é chamado de *traço da curva* α .

Exemplo 1.1. $\alpha(t) := (\cos(t), \sin(t), t)$, $t \in \mathbb{R}$, é uma curva diferenciável parametrizada no \mathbb{R}^3 (C^∞) cujo traço está contido em um cilindro.

Definição 1.2. Sejam $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada diferenciável e $t_0 \in I$ tal que $\alpha'(t_0) \neq 0$. Neste caso, dizemos que $\alpha'(t_0)$ é o *vetor tangente a α no ponto $\alpha(t_0)$* e que $\alpha(t_0)$ é um *ponto regular de α* .

Definição 1.3. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada diferenciável. Dizemos que α é *regular* se $\alpha(t_0)$ for um ponto regular de α para todo $t_0 \in I$.

Note que uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é regular se $\alpha'(t_0) \neq 0$ para todo $t_0 \in I$.

Exemplo 1.2. $\alpha(t) := (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, é uma curva diferenciável (C^∞) que não é regular.

Definição 1.4. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Dizemos que β é uma *reparametrização de α* se existir um difeomorfismo $h : J \subset \mathbb{R} \rightarrow I$ tal que $\beta = \alpha \circ h$.

Definição 1.5. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular. O *comprimento de arco de α* é dado por

$$L_\alpha(I) = L(\alpha(I)) := \int_I \|\alpha'(t)\| dt.$$

Definição 1.6. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Dizemos que α está *parametrizada pelo comprimento de arco (p.p.c.a.)* se

$$L_\alpha([t_0, t_1]) = t_1 - t_0,$$

para todos $t_0, t_1 \in I$ tais que $t_0 < t_1$.

Proposição 1.1. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Então α está p.p.c.a. se, e somente se, $\|\alpha'(t_0)\| = 1$ para todo $t_0 \in I$.

Proposição 1.2. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Então α pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco.

Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular p.p.c.a.. Denotaremos por $\vec{t}(s) := \alpha'(s)$ o vetor tangente de α no ponto $\alpha(s)$ para todo $s \in I$. Como α está p.p.c.a., para todo $s \in I$ temos que

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

$$\begin{aligned} \|\alpha'(s)\|^2 &= 1 \\ \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle &= 1 \\ \langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle + \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle &= 0 \\ \langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Consequentemente, $\alpha''(s) \perp \alpha'(s)$.

Definição 1.7. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular p.p.c.a.. Definimos a **curvatura de α em $s \in I$** como sendo o número $\kappa(s) := \|\alpha''(s)\|$.

Geometricamente, $\kappa(s)$ mede o quanto uma curva se afasta de uma reta.

Definição 1.8. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular p.p.c.a. tal que $\kappa(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Definimos o **normal (principal) de α em $s \in I$** como sendo o vetor

$$\vec{n}(s) := \frac{1}{\kappa(s)} \alpha''(s).$$

Note que $\vec{t}(s) \perp \vec{n}(s)$ para todo $s \in I$.

Definição 1.9. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular p.p.c.a. tal que $\kappa(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Definimos o **binormal de α em $s \in I$** como sendo o vetor

$$\vec{b}(s) := \vec{t}(s) \wedge \vec{n}(s).$$

Note que $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 centrada em $\alpha(s)$ para cada $s \in I$, ou seja, um referencial móvel sobre α , o qual chamamos de **triedro de Frenet-Serret**¹ ou **referencial de Frenet-Serret** ou **referencial TNB**.

Para todo $s \in I$ temos que

$$\begin{aligned} \langle \vec{b}(s), \vec{b}(s) \rangle &= 1 \\ \left\langle \frac{d\vec{b}}{ds}(s), \vec{b}(s) \right\rangle &= 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle \vec{b}(s), \vec{t}(s) \rangle &= 0 \\ \left\langle \frac{d\vec{b}}{ds}(s), \vec{t}(s) \right\rangle + \left\langle \vec{b}(s), \frac{d\vec{t}}{ds}(s) \right\rangle &= 0 \\ \left\langle \frac{d\vec{b}}{ds}(s), \vec{t}(s) \right\rangle + \kappa(s) \langle \vec{b}(s), \vec{n}(s) \rangle &= 0 \\ \left\langle \frac{d\vec{b}}{ds}(s), \vec{t}(s) \right\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\frac{d\vec{b}}{ds}(s) \parallel \vec{n}(s),$$

para todo $s \in I$.

¹Em homenagem aos matemáticos Jean Frédéric Frenet e Joseph Alfred Serret.

Definição 1.10. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular p.p.c.a. tal que $\kappa(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Definimos a **torção de α em $s \in I$** como sendo o numero

$$\tau(s) := \left\langle \frac{d\vec{b}}{ds}(s), \vec{n}(s) \right\rangle.$$

Geometricamente, $\tau(s)$ mede o quanto a curva deixa de ser plana. Além disso, note que

$$\frac{d\vec{b}}{ds}(s) = \left\langle \frac{d\vec{b}}{ds}(s), \vec{t}(s) \right\rangle \vec{t}(s) + \left\langle \frac{d\vec{b}}{ds}(s), \vec{b}(s) \right\rangle \vec{b}(s) + \left\langle \frac{d\vec{b}}{ds}(s), \vec{n}(s) \right\rangle \vec{n}(s) = \tau(s) \vec{n}(s).$$

Proposição 1.3 (Equações de Frenet-Serret). Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular p.p.c.a. tal que $\kappa(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Então, para todo $s \in I$, valem que

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{t}}{ds}(s) &= 0 + \kappa(s) \vec{n}(s) + 0, \\ \frac{d\vec{n}}{ds}(s) &= -\kappa(s) \vec{t}(s) + 0 - \tau(s) \vec{b}(s), \\ \frac{d\vec{b}}{ds}(s) &= 0 + \tau(s) \vec{n}(s) + 0. \end{aligned}$$

Ou ainda, matricialmente,

$$\begin{pmatrix} \vec{t}' \\ \vec{n}' \\ \vec{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix}.$$

Teorema 1.1 (Teorema fundamental da teoria local de curvas). Dadas duas funções $\kappa, \tau : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\kappa(s) > 0$ para todo $s \in I$, então existe uma curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja curvatura é $\kappa(s)$ e cuja torção é $\tau(s)$. Além disso, qualquer outra curva com a mesma propriedade é congruente a α .

1.2. Superfícies

Definição 1.11. Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma **superfície regular** se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap S$ de um aberto U de \mathbb{R}^2 sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que

1. X é um homeomorfismo diferenciável.
2. A diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva para todo $q \in U$.

Proposição 1.4 (Mudança de parâmetros). Sejam $p \in S$ um ponto de uma superfície regular S , $X_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ e $X_2 : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ duas parametrizações de S tais que $p \in X_1(U) \cap X_2(V) =: W$. Então

$$h := X_1^{-1} \circ X_2 : X_2^{-1}(W) \rightarrow X_1^{-1}(W)$$

é um difeomorfismo, isto é, h é diferenciável e tem inversa diferenciável.

1. Revisão de geometria diferencial I

Sejam $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de uma superfície regular S e $q \in U$. Chamamos o subespaço vetorial de dimensão 2

$$T_{X(q)}S := dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3,$$

de **espaço tangente a S em $X(q)$** . Este espaço vetorial coincide com o conjunto dos vetores tangentes $\alpha'(0)$ de curvas parametrizadas diferenciáveis $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S$, com $\alpha(0) = X(q)$.

A escolha de uma parametrização X determina uma base

$$\{dX_q(u), dX_q(v)\} = \left\{ \frac{\partial X}{\partial u}(q), \frac{\partial X}{\partial v}(q) \right\} =: \{X_u(q), X_v(q)\}$$

de $T_{X(q)}S$ e um vetor normal unitário em cada ponto $p \in X(U)$ dado por

$$N(p) := \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(q).$$

Nem sempre é possível estender a aplicação diferenciável $N : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ de maneira diferenciável à superfície S .

O produto interno canônico do \mathbb{R}^3 induz em cada plano tangente $T_p S$ de uma superfície regular S um produto interno, que denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. A esse produto interno, que é uma forma bilinear simétrica, corresponde uma forma quadrática $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$I_p(w) := \langle w, w \rangle_p = \|w\|_p^2 \geq 0.$$

Tal forma quadrática em $T_p S$ é chamada de **primeira forma fundamental de S em $p \in S$** .

Vamos, agora, expressar a primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ associada a parametrização $X(u, v)$ em p . Como um vetor $w \in T_p S$ é o vetor tangente a uma curva parametrizada $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, com $p = \alpha(0)$, obtemos

$$\begin{aligned} I_p(w) &= I_p(\alpha'(0)) \\ &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle X_u(u(0), v(0))u'(0) + X_v(u(0), v(0))v'(0), X_u(u(0), v(0))u'(0) + X_v(u(0), v(0))v'(0) \rangle_p \\ &= \langle X_u(q), X_u(q) \rangle_p (u'(0))^2 + 2\langle X_u(q), X_v(q) \rangle_p u'(0)v'(0) + \langle X_v(q), X_v(q) \rangle_p (v'(0))^2 \\ &= E(q) (u'(0))^2 + 2F(q)u'(0)v'(0) + G(q) (v'(0))^2, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{cases} E(q) := \langle X_u(q), X_u(q) \rangle_p, \\ F(q) := \langle X_u(q), X_v(q) \rangle_p, \\ G(q) := \langle X_v(q), X_v(q) \rangle_p \end{cases}$$

são os **coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ de $T_p S$** . Fazendo q variar numa vizinhança coordenada correspondente à parametrização X , obtemos funções E, F, G que são diferenciáveis nesta vizinhança. Quando não houver ambiguidade, os índices p e q serão omitidos.

Assim, podemos representar a primeira forma fundamental como uma matriz simétrica

$$I(w) = w^\top \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} w = (u'(0)v'(0)) \begin{pmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix}.$$

Definição 1.12. Uma superfície S é **orientável** se ela admite uma cobertura por vizinhanças coordenadas $X_\alpha(U_\alpha)$, em que $X_\alpha : U_\alpha \rightarrow S$, de tal modo que se $p \in X_{\alpha_1}(U_{\alpha_1}) \cap X_{\alpha_2}(U_{\alpha_2})$, com $(u, v) \in U_{\alpha_1}$ e $(\bar{u}, \bar{v}) \in U_{\alpha_2}$, então

$$\text{Jac}((\bar{u}, \bar{v}) \mapsto (u, v)) = \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{pmatrix} > 0.$$

A escolha de uma tal família de vizinhanças coordenadas que cobrem S é chamada de **orientação** de S e S , neste caso, diz-se **orientada**. Se uma tal escolha não é possível, diz-se que S é **não-orientável**. Se S é orientada, uma parametrização local X é compatível com a orientação de S se, unindo X à família de parametrizações dada pela orientação, obtém-se ainda uma (logo, a mesma) orientação.

Proposição 1.5. Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é orientável se, e somente se, existe um campo diferenciável $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ de vetores normais em S , isto é, $N(p) \perp T_p S$ para todo $p \in S$.

1.3. A faixa de Möbius

A faixa de Möbius² é obtida tomando-se um retângulo e identificando-se dois lados opostos depois de uma rotação de 180° , como ilustra a Figura 1.1.

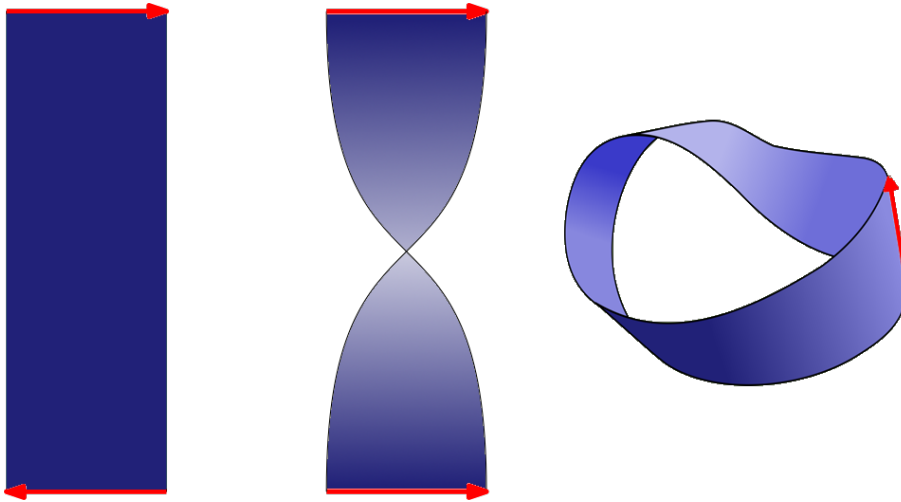


Figura 1.1.: Construção de uma faixa de Möbius.

A faixa de Möbius, além de suas inúmeras aplicações artísticas, como em logotipos de centros de estudo de matemática em todo o mundo, também encontra frequentemente uso na engenharia, especialmente na produção de correias que desgastam “ambos” os lados igualmente.

A seguir, apresentaremos uma parametrização da faixa de Möbius e calcularemos os coeficientes de sua primeira forma fundamental.

²Em homenagem ao matemático August Ferdinand Möbius.

1.3.1. Parametrização

Considere a faixa de Möbius, denotada por \mathbf{M} , ao redor do eixo z com raio 2 e largura 1. Sejam $(u, v) \in]0, 2\pi[\times [-1, 1]$ e note que para $p = (x, y, z) \in \mathbf{M}$ temos que

$$\begin{cases} x(u, v) &= \left(2 + v \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) \cos(u) \\ y(u, v) &= \left(2 + v \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) \sin(u) \\ z(u, v) &= v \sin\left(\frac{u}{2}\right). \end{cases}$$

A Figura 1.2 auxilia a entender as equações acima. Note que cada ponto do segmento que rotacionamos identificamos com um valor de $v \in [-1, 1]$ e esta é uma variável da parametrização, que segue a mesma ideia do Toro.

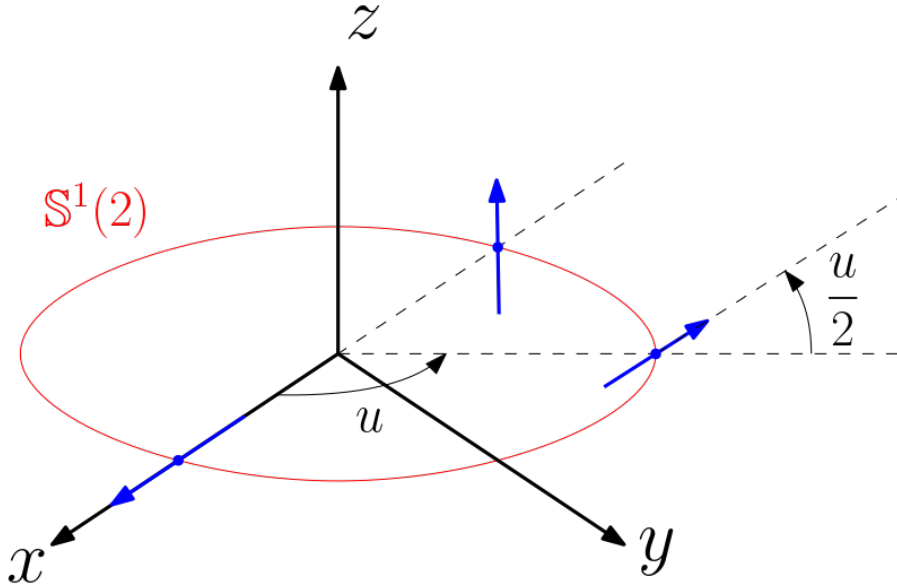


Figura 1.2.: Facilitador para a parametrização da faixa de Möbius.

Portanto, um sistema de coordenadas locais para a faixa de Möbius é dado por

$$\begin{aligned} X :]0, 2\pi[\times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbf{M} \subset \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)). \end{aligned}$$

A vizinhança coordenada correspondente omite os pontos $u = 0$, como ilustra a Figura 1.3.

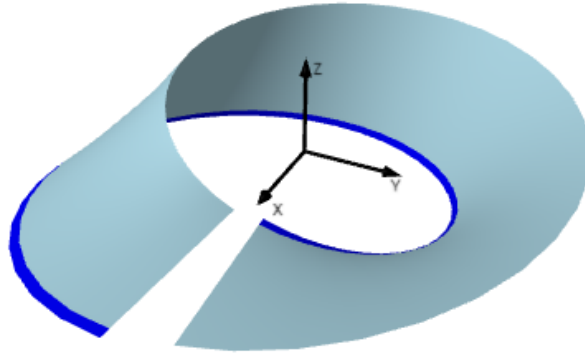


Figura 1.3.: Plot de X .

Logo, tomando-se $(\bar{u}, \bar{v}) \in]0, 2\pi[\times [-1, 1]$ de modo que

$$\begin{cases} x(\bar{u}, \bar{v}) &= \left(2 + \bar{v} \cos \left(\frac{\bar{u}}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \cos \left(\bar{u} + \frac{\pi}{2} \right) \\ y(\bar{u}, \bar{v}) &= \left(2 + \bar{v} \cos \left(\frac{\bar{u}}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \sin \left(\bar{u} + \frac{\pi}{2} \right) \\ z(\bar{u}, \bar{v}) &= \bar{v} \sin \left(\frac{\bar{u}}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \end{cases}$$

obtemos outro sistema de coordenadas locais para a faixa de Möbius é dado por

$$\begin{aligned} \bar{X} :]0, 2\pi[\times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbf{M} \subset \mathbb{R}^3 \\ (\bar{u}, \bar{v}) &\mapsto (x(\bar{u}, \bar{v}), y(\bar{u}, \bar{v}), z(\bar{u}, \bar{v})). \end{aligned}$$

A vizinhança coordenada correspondente omite os pontos no intervalo aberto $u = 0$, como ilustra a Figura 1.4.

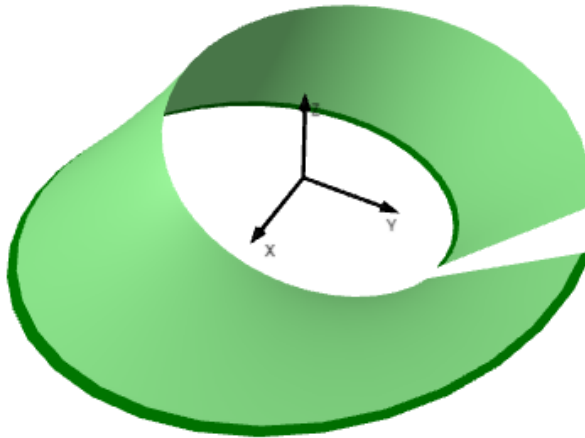


Figura 1.4.: Plot de \bar{X} .

Essas duas vizinhanças coordenadas formam uma cobertura para a faixa de Möbius, como ilustra a Figura 1.5.

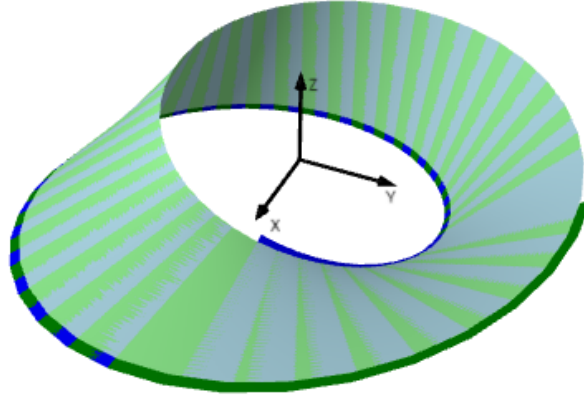


Figura 1.5.: Plot de X e \bar{X} juntos.

Assim, temos que a faixa de Möbius é uma superfície regular. De fato, a intersecção dessas duas vizinhanças coordenadas é constituída por duas componentes conexas

$$W_1 := \left\{ X(u, v) : 0 < u < \frac{\pi}{2}, -1 \leq v \leq 1 \right\} \text{ e } W_2 := \left\{ X(u, v) : \frac{\pi}{2} < u < 2\pi, -1 \leq v \leq 1 \right\}.$$

A mudança de coordenada é dada por (a Figura 1.5 ilustra a mudança de orientação de v em W_1 pela sobreposição ou não das partes mais escuras)

$$\begin{cases} \bar{u} = u + \frac{\pi}{2} \\ \bar{v} = -v \end{cases} \text{ em } W_1 \text{ e } \begin{cases} \bar{u} = u + \frac{\pi}{2} \\ \bar{v} = v \end{cases} \text{ em } W_2.$$

Donde temos que

$$\text{Jac}((\bar{u}, \bar{v}) \mapsto (u, v)) = \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

em W_1 , e

$$\text{Jac}((\bar{u}, \bar{v}) \mapsto (u, v)) = \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

em W_2 .

Primeira forma fundamental

Para obtermos a primeira forma fundamental basta calcularmos as expressões de E, F, G da métrica pelas expressões em coordenadas obtidas anteriormente.

Derivamos $x(u, v)$ com relação a u

$$\begin{aligned} x_u(u, v) &= \frac{\partial}{\partial u} \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \cos(u) + \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \frac{\partial}{\partial u} (\cos(u)) \\ &= -\frac{v}{2} \sin \left(\frac{u}{2} \right) \cos(u) - \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \sin(u), \end{aligned}$$

e com relação a v

$$\begin{aligned} x_v(u, v) &= \frac{\partial}{\partial v} \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \cos(u) + \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \frac{\partial}{\partial v} (\cos(u)) \\ &= \cos \left(\frac{u}{2} \right) \cos(u). \end{aligned}$$

Derivamos $y(u, v)$ com relação a u

$$\begin{aligned} y_u(u, v) &= \frac{\partial}{\partial u} \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \sin(u) + \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \frac{\partial}{\partial u} (\sin(u)) \\ &= -\frac{v}{2} \sin \left(\frac{u}{2} \right) \sin(u) + \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \cos(u), \end{aligned}$$

e com relação a v

$$\begin{aligned} y_v(u, v) &= \frac{\partial}{\partial v} \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \sin(u) + \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \frac{\partial}{\partial v} (\sin(u)) \\ &= \cos \left(\frac{u}{2} \right) \sin(u). \end{aligned}$$

Derivamos $z(u, v)$ com relação a u

$$z_u(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} \left(v \sin \left(\frac{u}{2} \right) \right) = \frac{v}{2} \cos \left(\frac{u}{2} \right),$$

e com relação a v

$$z_v(u, v) = \frac{\partial}{\partial v} \left(v \sin \left(\frac{u}{2} \right) \right) = \sin \left(\frac{u}{2} \right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle \\ &= \langle (x_u, y_u, z_u), (x_u, y_u, z_u) \rangle \\ &= x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \\ &= \left(-\frac{v}{2} \sin \left(\frac{u}{2} \right) \cos(u) - \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \sin(u) \right)^2 \\ &\quad + \left(-\frac{v}{2} \sin \left(\frac{u}{2} \right) \sin(u) + \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \cos(u) \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{v}{2} \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right)^2 \\ &= \frac{v^2}{4} \sin^2 \left(\frac{u}{2} \right) \cos^2(u) + \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right)^2 \sin^2(u) + 2 \frac{v}{2} \sin \left(\frac{u}{2} \right) \cos(u) \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \sin(u) \\ &\quad + \frac{v^2}{4} \sin^2 \left(\frac{u}{2} \right) \sin^2(u) + \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right)^2 \cos^2(u) - 2 \frac{v}{2} \sin \left(\frac{u}{2} \right) \sin(u) \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \cos(u) \\ &\quad + \frac{v^2}{4} \cos^2 \left(\frac{u}{2} \right) \\ &= \frac{v^2}{4} \sin^2 \left(\frac{u}{2} \right) + \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right)^2 + \frac{v^2}{4} \cos^2 \left(\frac{u}{2} \right) \\ &= \frac{v^2}{4} + 4 + v^2 \cos^2 \left(\frac{u}{2} \right) + 4v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \\ &= v^2 \left(\frac{1}{4} + \cos^2 \left(\frac{u}{2} \right) \right) + 4v \cos \left(\frac{u}{2} \right) + 4. \end{aligned}$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle (x_u, y_u, z_u), (x_v, y_v, z_v) \rangle \\
&= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\
&= \left(-\frac{v}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right) \cos(u) - \left(2 + v \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) \sin(u) \right) \left(\cos\left(\frac{u}{2}\right) \cos(u) \right) \\
&\quad + \left(-\frac{v}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right) \sin(u) + \left(2 + v \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) \cos(u) \right) \left(\cos\left(\frac{u}{2}\right) \sin(u) \right) \\
&\quad + \left(\frac{v}{2} \cos\left(\frac{u}{2}\right) \right) \left(\sin\left(\frac{u}{2}\right) \right) \\
&= -\frac{v}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right) \cos\left(\frac{u}{2}\right) \cos^2(u) - \left(2 + v \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) \sin(u) \cos\left(\frac{u}{2}\right) \cos(u) \\
&\quad - \frac{v}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right) \cos\left(\frac{u}{2}\right) \sin^2(u) + \left(2 + v \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) \cos(u) \cos\left(\frac{u}{2}\right) \sin(u) \\
&\quad + \frac{v}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right) \cos\left(\frac{u}{2}\right) \\
&= -\frac{v}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right) \cos\left(\frac{u}{2}\right) + \frac{v}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right) \cos\left(\frac{u}{2}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= \langle X_v, X_v \rangle \\
&= \langle (x_v, y_v, z_v), (x_v, y_v, z_v) \rangle \\
&= x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \\
&= \left(\cos\left(\frac{u}{2}\right) \cos(u) \right)^2 + \left(\cos\left(\frac{u}{2}\right) \sin(u) \right)^2 + \left(\sin\left(\frac{u}{2}\right) \right)^2 \\
&= \cos^2\left(\frac{u}{2}\right) \cos^2(u) + \cos^2\left(\frac{u}{2}\right) \sin^2(u) + \sin^2\left(\frac{u}{2}\right) \\
&= \cos^2\left(\frac{u}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{u}{2}\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Donde obtemos a primeira forma fundamental

$$I = \begin{pmatrix} v^2 \left(\frac{1}{4} + \cos^2\left(\frac{u}{2}\right) \right) + 4v \cos\left(\frac{u}{2}\right) + 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.4. Orientabilidade

A seguir apresentaremos alguns exemplos de superfícies orientáveis:

Exemplo 1.3. Superfícies que podem ser cobertas por uma única vizinhança coordenada são trivialmente orientáveis. Por exemplo, superfícies dadas como gráficos de uma função diferenciável.

Exemplo 1.4 (Esfera unitária (\mathbb{S}^2)). Considere $X_1(u, v)$ a projeção estereográfica pelo polo norte, $X_2(u, v)$ a projeção estereográfica pelo polo sul e

$$W := X_1(\mathbb{R}^2) \cap X_2(\mathbb{R}^2) = \mathbb{S}^2 \setminus \{N := (0, 0, 2), S := (0, 0, 0)\}.$$

Note que W é um conjunto conexo e fixe $p \in W$. A Figura 1.6 ilustra a mudança de parâmetros entre as duas parametrizações da esfera.

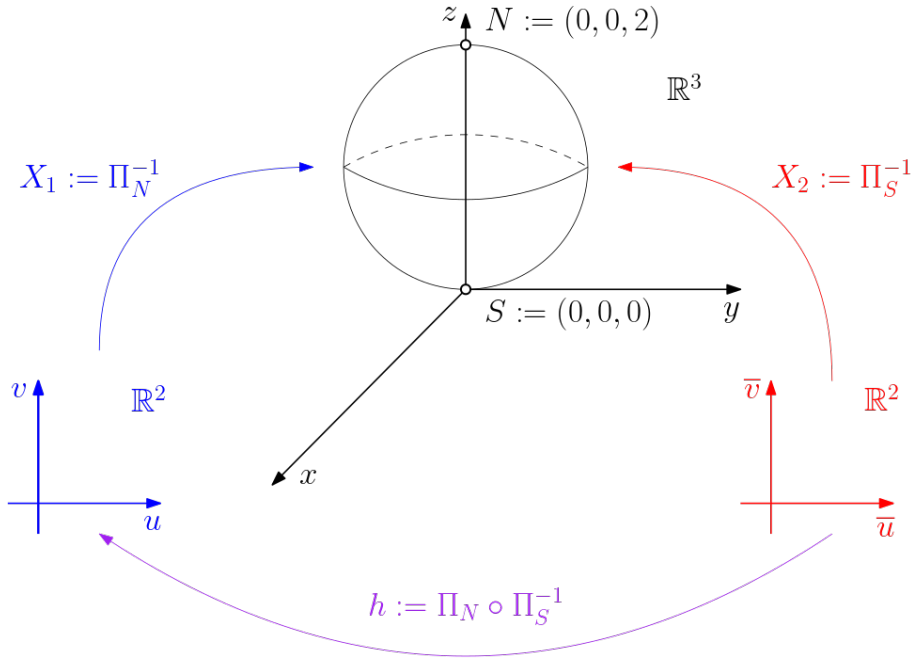


Figura 1.6.: O mapa de transição para as parametrizações estereográficas.

Onde

$$\Pi_N^{-1}(u, v) := \left(\frac{4u}{u^2 + v^2 + 4}, \frac{4v}{u^2 + v^2 + 4}, \frac{2(u^2 + v^2)}{u^2 + v^2 + 4} \right),$$

e

$$\Pi_S^{-1}(\bar{u}, \bar{v}) := \left(\frac{4\bar{v}}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + 4}, \frac{4\bar{u}}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + 4}, \frac{8}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + 4} \right).$$

Consequentemente,

$$\Pi_N(x, y, z) = \left(\frac{2x}{2 - z}, \frac{2y}{2 - z} \right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (u, v) &= h(\bar{u}, \bar{v}) = (\Pi_N \circ \Pi_S^{-1})(\bar{u}, \bar{v}) \\ &= \Pi_N \left(\frac{4\bar{v}}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + 4}, \frac{4\bar{u}}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + 4}, \frac{8}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + 4} \right) \\ &= \left(\frac{\frac{8\bar{v}}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + 4}}{2 - \frac{8}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + 4}}, \frac{\frac{8\bar{u}}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + 4}}{2 - \frac{8}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + 4}} \right) \\ &= \left(\frac{8\bar{v}}{2(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)}, \frac{8\bar{u}}{2(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)} \right) \\ &= \left(\frac{4\bar{v}}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}, \frac{4\bar{u}}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} \right). \end{aligned}$$

Donde obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} &= -\frac{8\bar{v}\bar{u}}{(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^2}. \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} &= \frac{4(\bar{u}^2 + \bar{v}^2) - 4\bar{v}2\bar{v}}{(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^2} = \frac{4(\bar{u}^2 - \bar{v}^2)}{(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^2} \end{aligned}$$

1. Revisão de geometria diferencial I

$$\frac{\partial v}{\partial \bar{v}} = -\frac{8\bar{u}\bar{v}}{(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \bar{u}} = \frac{4(\bar{u}^2 + \bar{v}^2) - 4\bar{u}2\bar{u}}{(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^2} = \frac{4(\bar{v}^2 - \bar{u}^2)}{(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^2} = -\frac{4(\bar{u}^2 - \bar{v}^2)}{(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^2}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^4} \det \begin{pmatrix} -8\bar{u}\bar{v} & 4(\bar{u}^2 - \bar{v}^2) \\ -4(\bar{u}^2 - \bar{v}^2) & -8\bar{u}\bar{v} \end{pmatrix} \\ &= \frac{64\bar{u}^2\bar{v}^2 + 16(\bar{u}^2 - \bar{v}^2)^2}{(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^4} \\ &> 0 \end{aligned}$$

Como a função de transição $h(\bar{u}, \bar{v})$ é um difeomorfismo temos que $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$ é diferente de zero em W . Além disso, como o Jacobiano $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$ é uma função contínua, $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}(p) > 0$ e W é conexo, segue do Teorema de Bolzano que $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} > 0$ em W . Portanto, S é orientável. De modo análogo, se uma superfície pode ser coberta por duas vizinhanças coordenadas cuja intersecção é conexa, então a superfície é orientável.

Proposição 1.6. Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é orientável se, e somente se, existe um campo diferenciável $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ de vetores normais em S , isto é, $N(p) \perp T_p S$ para todo $p \in S$.

Demonstração. (\implies) : Como S é orientável, podemos cobri-la com uma família de vizinhanças coordenadas de tal modo que, na vizinhança de duas quaisquer delas, a mudança de coordenadas tenha Jacobiano positivo.

Nos pontos $p = X(u, v)$ de cada vizinhança coordenada, definimos:

$$N(p) := N(u, v) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(p).$$

Note que $N(p)$ está bem definido. De fato, sejam $X : U \rightarrow S$ e $\bar{X} : \bar{U} \rightarrow S$ duas parametrizações tais que $X(U) \cap \bar{X}(\bar{U}) =: W \neq \emptyset$ e $h : U \rightarrow \bar{U}$ tal que $h(u, v) = (\bar{u}, \bar{v})$. Assim, $X = \bar{X} \circ h$ e, consequentemente,

$$X_u = \frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial(\bar{X} \circ h)}{\partial u} = \frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} + \frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{v}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \bar{X}_{\bar{u}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \bar{X}_{\bar{v}}.$$

e

$$X_v = \frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial(\bar{X} \circ h)}{\partial v} = \frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} + \frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{v}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \bar{X}_{\bar{u}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \bar{X}_{\bar{v}}.$$

Logo,

$$X_u \wedge X_v = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \bar{X}_{\bar{u}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \bar{X}_{\bar{v}} \right) \wedge \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \bar{X}_{\bar{u}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \bar{X}_{\bar{v}} \right)$$

1. Revisão de geometria diferencial I

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \bar{X}_{\bar{v}} \wedge \bar{X}_{\bar{u}} \\
&= \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \right) \bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}} \\
&= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{pmatrix} \bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}} \\
&= \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} \bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}.
\end{aligned}$$

Portanto, para $p \in W$ arbitrário, temos que os vetores $N(u, v)$ e $N(\bar{u}, \bar{v})$ coincidem, pois

$$\begin{aligned}
N(u, v) &= \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} \\
&= \frac{\text{Jac}(h) \bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}}{\|\text{Jac}(h) \bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}\|} \\
&= \frac{\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} \bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}}{\left| \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} \right| \|\bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}\|} \\
&= \text{sign} \left(\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} \right) N(\bar{u}, \bar{v}) \\
&= N(\bar{u}, \bar{v}).
\end{aligned}$$

Além disso, as coordenadas de $N(u, v)$ em \mathbb{R}^3 são funções diferenciáveis de (u, v) e, portanto, a aplicação $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ é diferenciável. Por construção $N(p) \perp T_p S$ para todo $p \in S$.

(\Leftarrow) : Reciprocamente, seja $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo diferenciável unitário de vetores normais em S , e considere uma família de vizinhanças coordenadas cobrindo S . Para os pontos $p \in X(u, v)$ de cada vizinhança coordenada $X(U)$, $U \subset \mathbb{R}^2$, é possível, pela continuidade de N e, se necessário, intercambiar u e v , fazer com que

$$N(u, v) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}.$$

De fato, como $\|N(p)\| = 1$, $\left\| \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} \right\| = 1$, $N(p) \perp T_p S$ e $\frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} \perp T_p S$, temos que

$$f(p) := \left\langle N(p), \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} \right\rangle = \pm 1.$$

Como $f(p)$ é uma função contínua em $X(U)$ e $X(U)$ é um conjunto conexo, então o sinal de f é constante em $X(U)$. Se $f(p) = -1$, podemos intercambiar o u, v na parametrização, e então $f(p) = 1$.

Procedendo desse modo com todas as vizinhanças coordenadas, teremos que na intersecção de duas quaisquer delas, digamos $X(u, v)$ e $\bar{X}(\bar{u}, \bar{v})$ o Jacobiano $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$ é positivo.

De fato, suponha por absurdo que $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})} < 0$. Logo,

$$\begin{aligned} N(u,v) &= \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} \\ &= \frac{\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})} \bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}}{\left\| \frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})} \bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}} \right\|} \\ &= \frac{\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}}{\left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})} \right|} \frac{\bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}}{\|\bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}\|} \\ &= \text{sign} \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})} \right) N(\bar{u},\bar{v}) \\ &= -N(\bar{u},\bar{v}). \end{aligned}$$

Absurdo! Portanto, a dada família de vizinhanças coordenadas, com eventuais intercâmbios de u, v , torna S orientável. \square

Exemplo 1.5 (Esfera unitária (\mathbb{S}^2)). Note que a aplicação $N(x, y, z) := (x, y, z)$ quando restrita aos pontos de \mathbb{S}^2 é uma campo normal diferenciável (prova usando coordenadas). Além disso, sua diferencial em $p \in \mathbb{S}^2$ aplicada ao vetor $v \in T_p \mathbb{S}^2$ é dada por

$$dN_p(v) = v.$$

1.5. O gradiente

Definição 1.13. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Definimos o **gradiente de f em $p \in S$** como o campo de vetores $\nabla f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\langle \nabla f(p), v \rangle = df_p(v),$$

para todo $v \in T_p S$.

Lema 1.1. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável (pelo menos \mathcal{C}^2) e $a \in \mathbb{R}$ um valor regular de f . Então $S := f^{-1}(a)$ é uma superfície regular orientável.

Rascunho da Demonstração. Use o Teorema da função inversa para mostrar que S é uma superfície regular. Para mostrar que S é orientável mostre que $N(p) := \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$ é um campo normal unitário em S e, pela 1.6 temos que S é orientável. \square

2. A segunda forma fundamental

Sejam $S = X(U)$, $U \subset \mathbb{R}^2$, uma superfície parametrizada regular, $p = X(u, v)$, $v \in T_p S$ e $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva em S tal que $\alpha(t_0) = p$ e $\alpha'(t_0) = v$.

Primeiramente, note que

$$\begin{aligned} v = \alpha'(t) &= \frac{d\alpha}{dt} \\ &= \frac{dX(u(t), v(t))}{dt} \\ &= \frac{\partial X}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial X}{\partial v} \frac{dv}{dt} \\ &= u'(t)X_u(u(t), v(t)) + v'(t)X_v(u(t), v(t)), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= \frac{d^2\alpha}{dt^2} \\ &= \frac{d}{dt} (u'(t)X_u(u(t), v(t)) + v'(t)X_v(u(t), v(t))) \\ &= u''(t)X_u(u(t), v(t)) + u'(t) \frac{dX_u(u(t), v(t))}{dt} + v''(t)X_v(u(t), v(t)) + v'(t) \frac{dX_v(u(t), v(t))}{dt} \\ &= u''(t)X_u(u(t), v(t)) + u'(t) \left(\frac{dX_u}{du} \frac{du}{dt} + \frac{dX_u}{dv} \frac{dv}{dt} \right) + v''(t)X_v(u(t), v(t)) + v'(t) \left(\frac{dX_v}{du} \frac{du}{dt} + \frac{dX_v}{dv} \frac{dv}{dt} \right) \\ &= u''(t)X_u(u(t), v(t)) + (u'(t))^2 X_{uu}(u(t), v(t)) + u'(t)v'(t)X_{uv}(u(t), v(t)) \\ &\quad + v''(t)X_v(u(t), v(t)) + v'(t)u'(t)X_{vu}(u(t), v(t)) + (v'(t))^2 X_{vv}(u(t), v(t)) \\ &= u''(t)X_u(u(t), v(t)) + v''(t)X_v(u(t), v(t)) \\ &\quad + (u'(t))^2 X_{uu}(u(t), v(t)) + 2u'(t)v'(t)X_{uv}(u(t), v(t)) + (v'(t))^2 X_{vv}(u(t), v(t)). \end{aligned}$$

No ponto $p = \alpha(t_0)$ temos que $\{X_u(u_0, v_0), X_v(u_0, v_0), N(u_0, v_0)\}$ é uma base do \mathbb{R}^3 , onde $(u_0, v_0) = (u(t_0), v(t_0))$. Calculemos a componente de $\alpha''(t_0)$ na direção $N(u_0, v_0)$.

Observação 2.1. As componentes de $\alpha''(t_0)$ nas direções $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ serão calculadas posteriormente e levarão aos símbolos de Christoffel.

$$\begin{aligned} \langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0) \rangle &= u''(t_0) \langle X_u, N \rangle + v''(t_0) \langle X_v, N \rangle \\ &\quad + (u'(t_0))^2 \langle X_{uu}, N \rangle + 2u'(t_0)v'(t_0) \langle X_{uv}, N \rangle + (v'(t_0))^2 \langle X_{vv}, N \rangle \\ &= (u'(t_0))^2 \langle X_{uu}, N \rangle + 2u'(t_0)v'(t_0) \langle X_{uv}, N \rangle + (v'(t_0))^2 \langle X_{vv}, N \rangle \\ &= \langle v, X_u \rangle^2 \langle X_{uu}, N \rangle + 2\langle v, X_u \rangle \langle v, X_v \rangle \langle X_{uv}, N \rangle + \langle v, X_v \rangle^2 \langle X_{vv}, N \rangle. \end{aligned}$$

Observação 2.2 (Exercício). O número $\langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0) \rangle$ não depende da parametrização da curva $\alpha(t)$.

2. A segunda forma fundamental

Definição 2.1. Seja $S = X(U)$, $U \subset \mathbb{R}^3$, uma superfície parametrizada regular e $p \in S$. Definimos a **segunda forma fundamental de S em p** como sendo a forma quadrática $\Pi_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned}\Pi_p(v) &:= a^2 \langle X_{uu}, N \rangle + 2ab \langle X_{uv}, N \rangle + b^2 \langle X_{vv}, N \rangle \\ &= a^2 e(u, v) + 2ab f(u, v) + b^2 g(u, v).\end{aligned}$$

onde $v = aX_u + bX_v$ e

$$\begin{cases} e(u, v) &:= \langle X_{uu}(u, v), N(u, v) \rangle \\ f(u, v) &:= \langle X_{uv}(u, v), N(u, v) \rangle \\ g(u, v) &:= \langle X_{vv}(u, v), N(u, v) \rangle \end{cases}.$$

Chamamos as funções $e, f, g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de **coeficientes da segunda forma fundamental de S** .

2.1. Consequências geométricas

Sejam $S = X(U)$, $U \subset \mathbb{R}^2$, uma superfície parametrizada regular, $p = X(u, v)$, $v \in T_p S$ e $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$ uma curva p.p.c.a. em S tal que $\alpha(s_0) = p$ e $\alpha'(s_0) = v$.

Considere $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$ o triedro de Frenet-Serret de α . Neste caso,

$$\langle \alpha''(s), N(\alpha(s)) \rangle = \langle \kappa(s) \vec{n}(s), N(\alpha(s)) \rangle = \kappa(s) \langle \vec{n}(s), N(\alpha(s)) \rangle = \kappa(s) \cos(\theta(s)),$$

onde $\theta(s) := \angle(\vec{n}(s), N(\alpha(s)))$.

Suponha que o traço de α seja uma seção normal de S em p , isto é, $\alpha = \Pi \cap S$, em que Π é o plano nas direções $\alpha'(s)$ e $N(\alpha(s))$ em p .

Como α é uma curva plana então Π é o plano osculador que passa por p e cujos vetores vetores diretores são $\alpha'(s)$ e $\vec{n}(s)$. Mas como $\alpha'(s) \perp N(\alpha(s))$ e $\alpha'(s) \perp \vec{n}(s)$ temos que $\vec{n}(s) = \pm N(\alpha(s))$ e daí

$$\langle \alpha''(s), N(\alpha(s)) \rangle = \pm \kappa(s).$$

2.2. A curvatura normal

Definição 2.2. Sejam $S = X(U)$, $U \subset \mathbb{R}^2$, uma superfície parametrizada regular, $p \in S$ e $v \in T_p S$. Definimos a **curvatura normal de S em p na direção v** por

$$\kappa_{n,p}(v) := \frac{\Pi_p(v)}{I_p(v)}.$$

Note que a curvatura normal de uma superfície S em um ponto p depende somente da direção de v . De fato, para $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\kappa_{n,p}(\lambda v) &= \frac{\Pi_p(\lambda v)}{I_p(\lambda v)} \\ &= \frac{(\lambda a)^2 e + 2(\lambda a)(\lambda b) f + (\lambda b)^2 g}{(\lambda a)^2 E + 2(\lambda a)(\lambda b) F + (\lambda b)^2 G} \\ &= \frac{\Pi_p(v)}{I_p(v)} \\ &= \kappa_{n,p}(v).\end{aligned}$$

2.2.1. Exemplos

Agora faremos alguns exemplos de como calcular a segunda forma fundamental e a curvatura normal.

Exemplo 2.1 (Esfera). Valos calcular a primeira e a segunda formas fundamentais de uma esfera em um ponto da vizinhança coordenada pela parametrização

$$X(u, v) = (a \cos(u) \sin(v), a \sin(u) \sin(v), a \cos(v)),$$

com $a > 0$. Primeiro observe que

$$\begin{aligned} X_u(u, v) &= (-a \sin(u) \sin(v), a \cos(u) \sin(v), 0), \\ X_v(u, v) &= (a \cos(u) \cos(v), a \sin(u) \cos(v), -a \sin(v)), \\ X_{uu}(u, v) &= (-a \cos(u) \sin(v), -a \sin(u) \sin(v), 0), \\ X_{uv}(u, v) &= (-a \sin(u) \cos(v), a \cos(u) \cos(v), 0), \\ X_{vv}(u, v) &= (-a \cos(u) \sin(v), -a \sin(u) \sin(v), -a \cos(v)). \end{aligned}$$

Agora calculemos o vetor normal em p :

$$\begin{aligned} N(p) &= \frac{X_u \wedge X_v}{||X_u \wedge X_v||} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -a \sin(u) \sin(v) & a \cos(u) \sin(v) & 0 \\ a \cos(u) \cos(v) & a \sin(u) \cos(v) & -a \sin(v) \end{pmatrix}}{||X_u \wedge X_v||} \\ &= \frac{(-a \sin(v) a \cos(u) \sin(v)) \hat{i} + (-a \sin(v) a \sin(u) \sin(v)) \hat{j} + (-a \sin(u) \cos(v) a \sin(u) \sin(v) - a \cos(u) \sin(v) a \cos(u) \cos(v)) \hat{k}}{||X_u \wedge X_v||} \\ &= \frac{(-a^2 \sin^2(v) \cos(u)) \hat{i} + (-a^2 \sin^2(v) \sin(u)) \hat{j} + (-a^2 \sin^2(u) \cos(v) \sin(v) - a^2 \cos^2(u) \sin(v) \cos(v)) \hat{k}}{||X_u \wedge X_v||} \\ &= \frac{(-a^2 \sin^2(v) \cos(u)) \hat{i} + (-a^2 \sin^2(v) \sin(u)) \hat{j} + (-a^2 \cos(v) \sin(v) (\sin^2(v) + \cos^2(v))) \hat{k}}{||X_u \wedge X_v||} \\ &= \frac{(-a^2 \sin^2(v) \cos(u)) \hat{i} + (-a^2 \sin^2(v) \sin(u)) \hat{j} + (-a^2 \cos(v) \sin(v)) \hat{k}}{||X_u \wedge X_v||} \\ &= \frac{(-a^2 \sin^2(v) \cos(u)) \hat{i} + (-a^2 \sin^2(v) \sin(u)) \hat{j} + (-a^2 \cos(v) \sin(v)) \hat{k}}{\sqrt{(-a^2 \sin^2(v) \cos(u))^2 + (-a^2 \sin^2(v) \sin(u))^2 + (-a^2 \cos(v) \sin(v))^2}} \\ &= \frac{(-a^2 \sin^2(v) \cos(u)) \hat{i} + (-a^2 \sin^2(v) \sin(u)) \hat{j} + (-a^2 \cos(v) \sin(v)) \hat{k}}{\sqrt{a^4 \sin^4(v) \cos^2(u) + a^4 \sin^4(v) \sin^2(u) + a^4 \cos^2(v) \sin^2(v)}} \\ &= \frac{(-a^2 \sin^2(v) \cos(u)) \hat{i} + (-a^2 \sin^2(v) \sin(u)) \hat{j} + (-a^2 \cos(v) \sin(v)) \hat{k}}{\sqrt{a^4 \sin^4(v) + a^4 \cos^2(v) \sin^2(v)}} \\ &= \frac{(-a^2 \sin^2(v) \cos(u)) \hat{i} + (-a^2 \sin^2(v) \sin(u)) \hat{j} + (-a^2 \cos(v) \sin(v)) \hat{k}}{\sqrt{a^4 \sin^2(v)}} \\ &= \frac{(-a^2 \sqrt{\sin^4(v)} \cos(u)) \hat{i} + (-a^2 \sqrt{\sin^4(v)} \sin(u)) \hat{j} + (-a^2 \cos(v) \sqrt{\sin^2(v)}) \hat{k}}{a^2 \sqrt{\sin^2(v)}} \\ &= (-|\sin(v)| \cos(u), -|\sin(v)| \sin(u), \cos(v)). \end{aligned}$$

Finalmente podemos calcular os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais:

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \langle X_u, X_u \rangle = a^2 \sin^2(v) \\ F(u, v) &= \langle X_u, X_v \rangle = 0 \\ G(u, v) &= \langle X_v, X_v \rangle = a^2 \\ e(u, v) &= \langle X_{uu}, N \rangle = a \sin^2(v) \\ f(u, v) &= \langle X_{uv}, N \rangle = 0 \\ g(u, v) &= \langle X_{vv}, N \rangle = a. \end{aligned}$$

2. A segunda forma fundamental

Obteremos a primeira e segunda formas fundamentais para v , um vetor tangente a esfera no ponto p , dado na base associada a $X(u, v)$ por

$$v = v_1 X_u + v_2 X_v.$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_p(v) &= v_1^2(a^2 \sin^2(v)) + v_2^2 a^2 \\ II_p(v) &= v_1^2(a \sin^2(v)) + v_2^2 a. \end{aligned}$$

Por fim, calculamos a curvatura normal:

$$\kappa_{n,p}(v) = \frac{II_p(v)}{I_p(v)} = \frac{v_1^2(a \sin^2(v)) + v_2^2 a}{v_1^2(a^2 \sin^2(v)) + v_2^2 a^2} = \frac{1}{a}.$$

$\kappa_{n,p}(v)$ é a curvatura do círculo máximo determinado por p, N, v .

Exemplo 2.2 (Plano). Vamos calcular a primeira e segunda formas fundamentais do plano $S = X(U)$ cuja equação é $ax + by + cz + d = 0$, com $c \neq 0$, em um ponto da vizinhança coordenada pela parametrização

$$X(u, v) = \left(u, v, \frac{-d - au - bv}{c} \right).$$

Primeiro observe que

$$\begin{aligned} X_u(u, v) &= \left(1, 0, -\frac{a}{c} \right), \\ X_v(u, v) &= \left(0, 1, -\frac{b}{c} \right), \\ X_{uu}(u, v) &= (0, 0, 0), \\ X_{uv}(u, v) &= (0, 0, 0), \\ X_{vv}(u, v) &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Agora calculamos o vetor normal em p :

$$\begin{aligned} N(p) &= \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -\frac{a}{c} \\ 0 & 1 & -\frac{b}{c} \end{pmatrix}}{\|X_u \wedge X_v\|} \\ &= \frac{\left(\frac{a}{c}\right)\hat{i} + \left(\frac{b}{c}\right)\hat{j} + (1)\hat{k}}{\|X_u \wedge X_v\|} \\ &= \frac{\left(\frac{a}{c}\right)\hat{i} + \left(\frac{b}{c}\right)\hat{j} + (1)\hat{k}}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + 1}} \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1 \right). \end{aligned}$$

2. A segunda forma fundamental

Finalmente podemos calcular os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais:

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \langle X_u, X_u \rangle = 1 + \frac{a^2}{b^2} \\ F(u, v) &= \langle X_u, X_v \rangle = \frac{ab}{c^2} \\ G(u, v) &= \langle X_v, X_v \rangle = 1 + \frac{b^2}{c^2} \\ e(u, v) &= \langle X_{uu}, N \rangle = 0 \\ f(u, v) &= \langle X_{uv}, N \rangle = 0 \\ g(u, v) &= \langle X_{vv}, N \rangle = 0. \end{aligned}$$

Obteremos a primeira e segunda formas fundamentais para v , um vetor tangente ao plano no ponto p , dado na base associada a $X(u, v)$ por

$$v = v_1 X_u + v_2 X_v.$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_p(v) &= v_1^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) + 2v_1 v_2 \left(\frac{ab}{c^2} \right) + v_2^2 \left(1 + \frac{b^2}{c^2} \right) \\ II_p(v) &= 0. \end{aligned}$$

Por fim, calculamos a curvatura normal:

$$\kappa_{n,p}(v) = \frac{II_p(v)}{I_p(v)} = \frac{0}{v_1^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) + 2v_1 v_2 \left(\frac{ab}{c^2} \right) + v_2^2 \left(1 + \frac{b^2}{c^2} \right)} = 0.$$

A curvatura de qualquer seção normal do plano é igual a 0, pois são retas.

Exemplo 2.3 (Cilindro circular). Vamos calcular a primeira e segunda formas fundamentais de um cilindro circular em um ponto da vizinhança coordenada pela parametrização

$$X(u, v) = (r \cos(u), r \sin(u), v),$$

com $r > 0$. Primeiro observe que

$$\begin{aligned} X_u(u, v) &= (-r \sin(u), r \cos(u), 0), \\ X_v(u, v) &= (0, 0, 1), \\ X_{uu}(u, v) &= (-r \cos(u), -r \sin(u), 0), \\ X_{uv}(u, v) &= (0, 0, 0), \\ X_{vv}(u, v) &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Agora calculemos o vetor normal em p :

$$N(p) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}$$

2. A segunda forma fundamental

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -r \sin(u) & r \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -r \sin(u) & r \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{\|X_u \wedge X_v\|} \\
&= \frac{(r \cos(u))\hat{i} + (r \sin(u))\hat{j} + (0)\hat{k}}{\|X_u \wedge X_v\|} \\
&= \frac{(r \cos(u))\hat{i} + (r \sin(u))\hat{j} + (0)\hat{k}}{\sqrt{(r \cos(u))^2 + (r \sin(u))^2 + 0}} \\
&= \frac{(r \cos(u))\hat{i} + (r \sin(u))\hat{j} + (0)\hat{k}}{r} \\
&= (\cos(u), \sin(u), 0).
\end{aligned}$$

Finalmente podemos calcular os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais:

$$\begin{aligned}
E(u, v) &= \langle X_u, X_u \rangle = r^2 \\
F(u, v) &= \langle X_u, X_v \rangle = 0 \\
G(u, v) &= \langle X_v, X_v \rangle = 1 \\
e(u, v) &= \langle X_{uu}, N \rangle = -r \\
f(u, v) &= \langle X_{uv}, N \rangle = 0 \\
g(u, v) &= \langle X_{vv}, N \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Obteremos a primeira e segunda formas fundamentais para v , um vetor tangente a esfera no ponto p , dado na base associada a $X(u, v)$ por

$$v = v_1 X_u + v_2 X_v.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
I_p(v) &= v_1^2(r^2) + v_2^2(1) \\
II_p(v) &= v_1^2(-r).
\end{aligned}$$

Por fim, calculamos a curvatura normal:

$$\kappa_{n,p}(v) = \frac{II_p(v)}{I_p(v)} = \frac{-v_1^2 r}{v_1^2(r^2) + v_2^2} \leq 0.$$

O máximo de $\kappa_{n,p}(v)$ ocorre para $v_1 = 0$, isto é, $v = v_2 X_v$ e neste caso $\kappa_{n,p}(v) = 0$.

O mínimo de $\kappa_{n,p}(v)$ ocorre para $v_2 = 0$, isto é, $v = v_1 X_u$ e neste caso $\kappa_{n,p}(v) = -\frac{1}{r}$.

3. A aplicação normal de Gauss

Como medir a taxa de variação do plano tangente em um ponto p de uma superfície regular S ?

Isso será feito a partir da aplicação linear de $T_p S$ em $T_p S$ dada pela variação do campo normal N , ilustrado na Figura 3.1 no caso em que S é a esfera de centro na origem e raio 5.

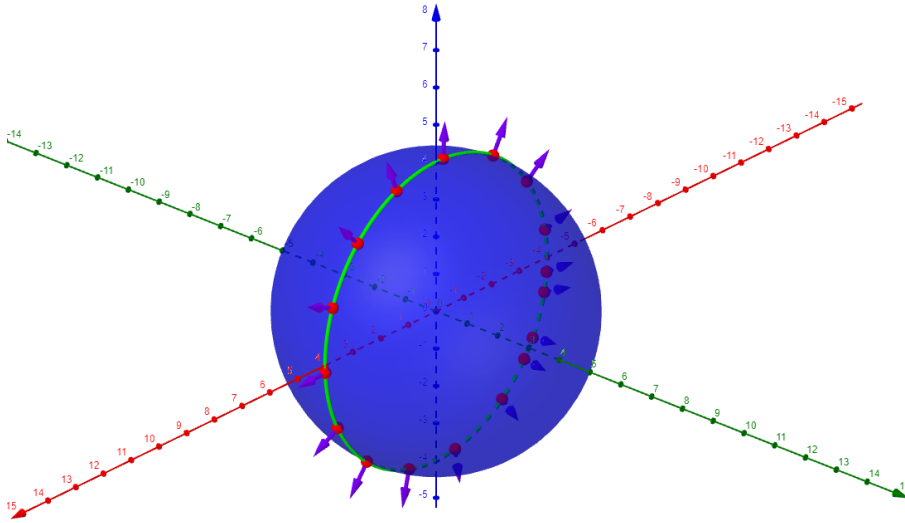


Figura 3.1.: Campo normal unitário sobre um meridiano da esfera de centro na origem e raio 5.

Note que a escolha de um vetor normal $N(p) \in T_p S^\perp$ determina uma orientação de $T_p S$. Neste caso, dizemos que **a base $\{u, v\}$ de $T_p S$ está orientada positivamente (resp. negativamente) em relação ao normal $N(p)$** se $\{u, v, N(p)\}$ é uma base de \mathbb{R}^3 orientada positivamente (resp. negativamente), isto é, $\langle u \wedge v, N(p) \rangle > 0$ (resp. $\langle u \wedge v, N(p) \rangle < 0$).

Definição 3.1. Uma **superfície orientada** é um par (S, N) em que S é uma superfície orientável e $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável tais que $N(p) \in T_p S^\perp$ e $\|N(p)\| = 1$ para todo $p \in S$.

Definição 3.2. Seja (S, N) uma superfície orientada. A **aplicação normal de Gauss de (S, N)** é a aplicação $\mathbf{N} : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ que associa a cada ponto $p \in S$ o representante de $N(p)$ com origem na origem de \mathbb{R}^3 .

A Figura 3.2 ilustra a aplicação normal de Gauss \mathbf{N} .

3. A aplicação normal de Gauss

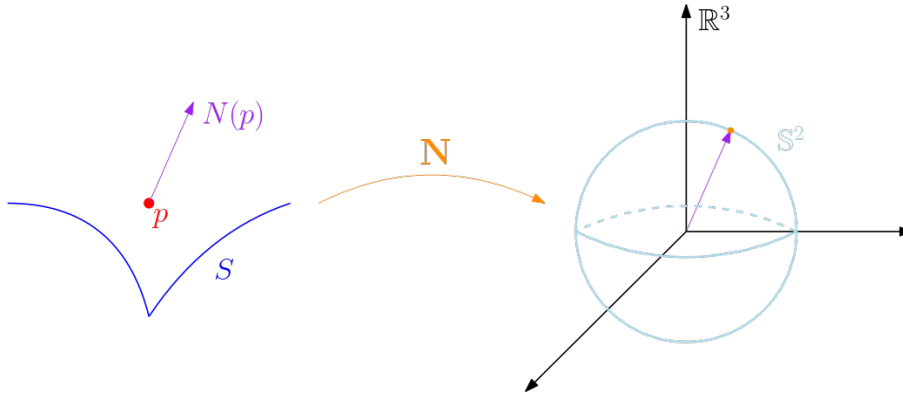


Figura 3.2.: A aplicação normal de Gauss \mathbf{N} .

Observação 3.1. Note que como N é diferenciável por definição, temos que a aplicação normal de Gauss \mathbf{N} é diferenciável. Além disso, como $T_p S \parallel T_{\mathbf{N}(p)} \mathbb{S}^2$ temos que $T_p S \sim T_{\mathbf{N}(p)} \mathbb{S}^2$. Assim, através desta identificação, podemos olhar a diferencial da aplicação normal de Gauss dN_p como uma aplicação linear em $T_p S$.

Sejam S_1, S_2 duas superfícies regulares e $f : S_1 \rightarrow S_2$ uma aplicação diferenciável. Para $p \in S_1$ e $v \in T_p S_1$, assim calculamos $df_p(v)$:

Seja $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S_1$ uma curva em S_1 tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Assim,

$$df_p(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \alpha) = \beta'(0),$$

onde $\beta(t) = f(\alpha(t))$ é uma curva em S_2 tal que $\beta(0) = f(p)$.

3.1. Exemplos

Agora faremos alguns exemplos de como calcular a diferencial da aplicação normal de Gauss.

Exemplo 3.1 (Esfera). Vamos calcular a diferencial da aplicação normal de Gauss da esfera \mathbb{S}^2 . Note que a aplicação $N : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, dada por $N(p) = -p$ para todo $p \in \mathbb{S}^2$ é a aplicação normal de Gauss na esfera. Em coordenadas,

$$N(x, y, z) := (-x, -y, -z).$$

Sejam $p \in \mathbb{S}^2$, $v \in T_p \mathbb{S}^2$ arbitrários e $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{S}^2$ uma curva na esfera dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tal que $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Logo,

$$\begin{aligned} dN_p(v) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (N \circ \alpha)(t) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} N(x(t), y(t), z(t)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (-x(t), -y(t), -z(t)) \\ &= -(x'(0), y'(0), z'(0)) \\ &= -\alpha'(0) \end{aligned}$$

3. A aplicação normal de Gauss

$$= -v.$$

Portanto, $dN_p : T_p\mathbb{S}^2 \rightarrow T_p\mathbb{S}^2$ é menos a aplicação identidade. Em breve, interpretaremos geometricamente esta relação.

Exemplo 3.2 (Plano). Vamos calcular a diferencial da aplicação normal de Gauss do plano S cuja equação é $ax + by + cz + d = 0$, com $c \neq 0$. Note que a aplicação $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$, dada por

$$N(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + 1}} \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1 \right),$$

é a aplicação normal de Gauss de S . Sejam $p \in S$, $v \in T_pS$ arbitrários e $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S$ uma curva no plano dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tal que $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Logo,

$$dN_p(v) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (N \circ \alpha)(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} N(x(t), y(t), z(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + 1}} \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1 \right) = 0.$$

Portanto, $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ é a aplicação identicamente nula.

Exemplo 3.3 (Cilindro circular). Vamos calcular a diferencial da aplicação normal de Gauss do cilindro circular S dado por $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$. Note que a aplicação $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$, dada por

$$N(x, y, z) = (x, y, 0),$$

é a aplicação normal de Gauss de S . Sejam $p \in S$, $v \in T_pS$ arbitrários e $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S$ uma curva no cilindro circular dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tal que $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Logo,

$$dN_p(v) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (N \circ \alpha)(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} N(x(t), y(t), z(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (x(t), y(t), 0) = (x'(0), y'(0), 0).$$

Portanto, $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ é a projeção sobre o plano Oxy .

3.2. dN_p é uma aplicação autoadjunta

Definição 3.3. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $T : V \rightarrow V$ uma aplicação linear. Dizemos que T é **autoadjunta** se

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, Tw \rangle,$$

para todos $v, w \in V$.

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $T : V \rightarrow V$ uma aplicação linear autoadjunta. Associamos T à forma bilinear simétrica

$$B_T(v, w) = \langle Tv, w \rangle,$$

e à forma quadrática

$$Q_T(v) = \langle Tv, v \rangle,$$

que estão relacionadas pela seguinte identidade:

$$B_T(v, w) = \frac{1}{4}(Q_T(v + w) - Q_T(v - w)).$$

3. A aplicação normal de Gauss

Proposição 3.1. Sejam (S, N) uma superfície orientada e \mathbf{N} a aplicação normal de Gauss de (S, N) . A diferencial $d\mathbf{N}_p$ da aplicação normal de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta para todo $p \in S$.

Demonstração. Sejam $p \in S$, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma carta de S tal que $p \in X(U)$, $v, w \in T_p S$ arbitrários e $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S$ e $\beta :]-\delta, \delta[\rightarrow S$ curvas em S dadas por $\alpha(t) = X(u_1(t), v_1(t))$ e $\beta(t) = X(u_2(t), v_2(t))$ tais que $\alpha(0) = \beta(0) = p$, $\alpha'(0) = v$ e $\beta'(0) = w$. Assim,

$$\begin{aligned} d\mathbf{N}_p(v) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\mathbf{N} \circ \alpha)(t) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\mathbf{N} \circ X(u_1(t), v_1(t))) \\ &= \frac{\partial}{\partial u} (\mathbf{N} \circ X)(p) u'_1(0) + \frac{\partial}{\partial v} (\mathbf{N} \circ X)(p) v'_1(0) \\ &= u'_1(0) \mathbf{N}_u + v'_1(0) \mathbf{N}_v. \end{aligned}$$

Analogamente, $d\mathbf{N}_p(w) = u'_2(0) \mathbf{N}_u + v'_2(0) \mathbf{N}_v$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \langle d\mathbf{N}_p(v), w \rangle &= \langle u'_1(0) \mathbf{N}_u + v'_1(0) \mathbf{N}_v, u'_2(0) \mathbf{N}_u + v'_2(0) \mathbf{N}_v \rangle \\ &= u'_1(0) u'_2(0) \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{N}_u \rangle + u'_1(0) v'_2(0) \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{N}_v \rangle \\ &\quad + v'_1(0) u'_2(0) \langle \mathbf{N}_v, \mathbf{N}_u \rangle + v'_1(0) v'_2(0) \langle \mathbf{N}_v, \mathbf{N}_v \rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle v, d\mathbf{N}_p(w) \rangle &= \langle u'_1(0) \mathbf{N}_u + v'_1(0) \mathbf{N}_v, u'_2(0) \mathbf{N}_u + v'_2(0) \mathbf{N}_v \rangle \\ &= u'_1(0) u'_2(0) \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{N}_u \rangle + u'_1(0) v'_2(0) \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{N}_v \rangle \\ &\quad + v'_1(0) u'_2(0) \langle \mathbf{N}_v, \mathbf{N}_u \rangle + v'_1(0) v'_2(0) \langle \mathbf{N}_v, \mathbf{N}_v \rangle \end{aligned}$$

Portanto, se $\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{N}_v \rangle = \langle \mathbf{N}_v, \mathbf{N}_u \rangle$ então temos que

$$\langle d\mathbf{N}_p(v), w \rangle = \langle v, d\mathbf{N}_p(w) \rangle.$$

Portanto, pela arbitrariedade de p , v e w , temos que $d\mathbf{N}_p$ é uma aplicação linear auto-adjunta.

Agora vamos mostrar que $\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{N}_v \rangle = \langle \mathbf{N}_v, \mathbf{N}_u \rangle$. Para ver isso derivamos $\langle \mathbf{N}, \mathbf{N}_u \rangle = 0$ com relação a v , donde obtemos

$$\langle \mathbf{N}_v, \mathbf{N}_u \rangle = -\langle \mathbf{N}, \mathbf{N}_{uv} \rangle.$$

E derivamos $\langle \mathbf{N}, \mathbf{N}_v \rangle = 0$ com relação a u , donde obtemos

$$\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{N}_v \rangle = -\langle \mathbf{N}, \mathbf{N}_{vu} \rangle = -\langle \mathbf{N}, \mathbf{N}_{uv} \rangle.$$

Portanto, $\langle \mathbf{N}_v, \mathbf{N}_u \rangle = \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{N}_v \rangle$ como requerido. \square

3.3. Consequências geométricas

Com o resultado obtido para a diferencial da aplicação normal de Gauss de uma superfície orientada podemos ter uma nova caracterização para a segunda forma fundamental desta superfície.

Sejam (S, N) uma superfície orientada e \mathbf{N} a aplicação normal de Gauss de (S, N) . Afirmamos que

$$\Pi_p(v) = -Q_{d\mathbf{N}_p}(v) = \langle -d\mathbf{N}_p(v), v \rangle,$$

onde $Q_{d\mathbf{N}_p}$ é a forma quadrática associada a diferencial $d\mathbf{N}_p$ da aplicação normal de Gauss.

De fato, sejam $p \in S$, $v \in T_p S$ arbitrários e $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Como $\langle \mathbf{N}(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle = 0$ para todo $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ temos que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle \mathbf{N}(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle &= 0 \\ \left\langle \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbf{N}(\alpha(t)), \alpha'(0) \right\rangle + \left\langle \mathbf{N}(\alpha(0)), \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha'(t) \right\rangle &= 0 \\ \langle d\mathbf{N}_p(v), v \rangle + \langle \mathbf{N}(p), \alpha''(0) \rangle &= 0 \\ Q_{d\mathbf{N}_p}(v) + \Pi_p(v) &= 0. \end{aligned}$$

Teorema 3.1 (Teorema espectral). Sejam V um espaço vetorial bidimensional com produto interno e $T : V \rightarrow V$ uma aplicação linear autoadjunta. Então existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de V tal que $T(e_1) = \lambda_1 e_1$, $T(e_2) = \lambda_2 e_2$ e os autovalores λ_1, λ_2 são o máximo e o mínimo da forma quadrática Q_T no círculo unitário de V .

Como $-d\mathbf{N}_p$ é autoadjunta então existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ tal que

$$\begin{cases} -d\mathbf{N}_p(e_1) &= \kappa_1 e_1 \\ -d\mathbf{N}_p(e_2) &= \kappa_2 e_2 \end{cases},$$

onde κ_1, κ_2 são o mínimo e o máximo de $\Pi_p(v)$ com $\|v\| = 1$, respectivamente. Chamamos κ_1, κ_2 de **curvaturas principais de S em p** e os respectivos e_1, e_2 de **direções principais de S em p** .

Chamamos de **operador de Weingarten de S em p** (ou **operador forma de S em p**) o operador linear $\mathcal{S} := -d\mathbf{N}_p$.

Definição 3.4. Sejam S uma superfície orientada e $p \in S$. Definimos a **curvatura Gaussiana de S em p** por

$$K(p) := \det(\mathcal{S}).$$

Definimos também a **curvatura média de S em p** por

$$H(p) := \frac{1}{2} \text{tr}(\mathcal{S}).$$

Seja $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ uma base de direções principais de S em p com respectivas curvaturas principais κ_1, κ_2 ($\kappa_1 \leq \kappa_2$). Assim, a matriz de \mathcal{S} na base \mathcal{B} é dada por

$$[\mathcal{S}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}.$$

E as curvaturas Gaussiana e média são dadas por

$$K(p) = \kappa_1 \kappa_2 \quad \text{e} \quad H(p) = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

3.4. Exemplos

Agora faremos alguns exemplos de como calcular as curvaturas principais, Gaussiana e normal.

Exemplo 3.4 (Esfera). Sejam S a esfera de centro na origem e raio r , $p \in S$ e $v \in T_p S$ arbitrários tais que $\|v\|=1$ (isto é, v está no círculo unitário de $T_p S$). Note que

$$\Pi_p(v) = \frac{\Pi_p(v)}{I_p(v)} = \kappa_{n,p}(v) = \frac{1}{r}.$$

Portanto o mínimo e o máximo da forma quadrática Π_p no círculo unitário de $T_p S$ são dados por $\kappa_1 = \frac{1}{r}$ e $\kappa_2 = \frac{1}{r}$. Portanto,

$$K(p) = \frac{1}{r^2} \quad \text{e} \quad H(p) = \frac{1}{r}.$$

Exemplo 3.5 (Plano). Seja S o plano cuja equação é $ax+by+cz+d=0$, com $c \neq 0$, $p \in S$ e $v \in T_p S$ arbitrários tais que $\|v\|=1$ (isto é, v está no círculo unitário de $T_p S$). Note que

$$\Pi_p(v) = \frac{\Pi_p(v)}{I_p(v)} = \kappa_{n,p}(v) = 0.$$

Portanto o mínimo e o máximo da forma quadrática Π_p no círculo unitário de $T_p S$ são dados por $\kappa_1 = 0$ e $\kappa_2 = 0$. Portanto,

$$K(p) = 0 \quad \text{e} \quad H(p) = 0.$$

Exemplo 3.6 (Cilindro circular). Seja $S = X(U)$ o cilindro circular de raio r , $p \in S$ e $v \in T_p S$ arbitrários tais que $\|v\|=1$ (isto é, v está no círculo unitário de $T_p S$). Note que

$$\Pi_p(v) = \frac{\Pi_p(v)}{I_p(v)} = \kappa_{n,p}(v) = \frac{-v_1^2 r}{v_1^2(r^2) + v_2^2} \leq 0,$$

onde $v = v_1 X_u + v_2 X_v$. Portanto o mínimo e o máximo da forma quadrática Π_p no círculo unitário de $T_p S$ são dados por $\kappa_1 = -\frac{1}{r}$ e $\kappa_2 = 0$ (para ver isso basta usar a identidade $v_1^2 + v_2^2 = 1$ na curvatura normal e maximizar e minimizar as funções para v_1 e v_2). Portanto,

$$K(p) = 0 \quad \text{e} \quad H(p) = -\frac{1}{2r}.$$

3.5. A fórmula de Euler

A fórmula de Euler calcula a curvatura normal de um vetor unitário no espaço tangente através das curvaturas principais.

Proposição 3.2 (Fórmula de Euler). Sejam κ_1 e κ_2 as curvaturas principais de $S = X(U)$ em p , e_1 e e_2 as direções principais correspondentes. Se $w \in T_p S$, $\|w\|=1$ e θ é o ângulo entre w e e_1 , então

$$\kappa_{n,p}(w) = \kappa_1 \cos^2(\theta) + \kappa_2 \sin^2(\theta).$$

3. A aplicação normal de Gauss

Demonstração. Note que $w = \langle w, e_1 \rangle e_1 + \langle w, e_2 \rangle e_2 = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$. Assim,

$$\begin{aligned}
 \kappa_{n,p}(w) &= \frac{\Pi_p(w)}{I_p(w)} \\
 &= \Pi_p(w) \\
 &= -\langle d\mathbf{N}_p(w), w \rangle \\
 &= -\langle d\mathbf{N}_p(\cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2), \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2 \rangle \\
 &= \langle -\cos(\theta)d\mathbf{N}_p(e_1) - \sin(\theta)d\mathbf{N}_p(e_2), \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2 \rangle \\
 &= \langle \cos(\theta)\kappa_1 e_1 + \sin(\theta)\kappa_2 e_2, \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2 \rangle \\
 &= \kappa_1 \cos^2(\theta) + \kappa_2 \sin^2(\theta).
 \end{aligned}$$

□

3.6. Expressão em coordenadas locais para as curvaturas Gaussiana e média

Seja (S, N) uma superfície orientada, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ um sistema de coordenadas locais em $p = X(q) \in S$, $N := \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}$ e $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ uma curva tal que $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ e $\alpha(0) = p$.

Note que como $\langle N, N \rangle = 1$ temos que $\langle N_u, N \rangle = 0$ e $\langle N_v, N \rangle = 0$ e, conseqüentemente, $N_u, N_v \in T_p S$. Logo,

$$\begin{cases} N_u &:= a_{11}X_u + a_{21}X_v \\ N_v &:= a_{12}X_u + a_{22}X_v \end{cases}.$$

Assim,

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

é a matriz associada ao operador linear $d\mathbf{N}_p : T_p S \rightarrow T_p S$ na base $\{X_u, X_v\}$ de $T_p S$. Observe que $e = \langle X_{uu}, N \rangle$, mas como $\langle X_u, N \rangle = 0$ temos que $\langle X_{uu}, N \rangle + \langle X_u, N_u \rangle = 0$, de modo que $\langle N_u, X_u \rangle = -e$. Portanto,

$$\begin{cases} e &= -\langle N_u, X_u \rangle = -\langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_u \rangle = -a_{11}E - a_{21}F \\ f &= -\langle N_u, X_v \rangle = -\langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_v \rangle = -a_{11}F - a_{21}G \\ f &= -\langle N_v, X_u \rangle = -\langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_u \rangle = -a_{12}E - a_{22}F \\ g &= -\langle N_v, X_v \rangle = -\langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_v \rangle = -a_{12}F - a_{22}G \end{cases}.$$

Em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Como $EG - F^2 > 0$ temos que a matriz

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

3. A aplicação normal de Gauss

é inversível. Portanto,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \\ &= - \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-eG + fF}{EG - F^2} & \frac{eF - fE}{EG - F^2} \\ \frac{-fG + gF}{EG - F^2} & \frac{fF - gE}{EG - F^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} K &= \det(\mathcal{S}) \\ &= \det(-d\mathbf{N}_p) \\ &= \det \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} ((-eG + fF)(fF - gE) - (eF - fE)(-fG + gF)) \\ &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} (-efFG + egEG + f^2F^2 - fgEF + efFG - egF^2 - f^2EG + fgEF) \\ &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} (eg(EG - F^2) - f^2(EG - F^2)) \\ &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} ((eg - f^2)(EG - F^2)) \\ &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \text{tr}(\mathcal{S}) \\ &= \frac{1}{2} \text{tr}(-d\mathbf{N}_p) \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \frac{-a_{11} - a_{22}}{2} \\ &= \frac{eG - fF - fF + gE}{2(EG - F^2)} \\ &= \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}. \end{aligned}$$

Note que como $K = \kappa_1\kappa_2$ e $H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ temos que κ_1 e κ_2 são soluções de

$$\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0.$$

3. A aplicação normal de Gauss

De outro modo,

$$\begin{aligned}\det(\mathcal{S} - \lambda \text{Id}) &= 0 \\ \det \begin{pmatrix} -a_{11} - \lambda & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} - \lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ (-a_{11} - \lambda)(-a_{22} - \lambda) - (-a_{12})(-a_{21}) &= 0 \\ \lambda^2 + (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} &= 0 \\ \lambda^2 - 2H\lambda + K &= 0\end{aligned}$$

Definição 3.5. Se $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é tal que $H(p) = 0$ para todo $p \in S = X(U)$, dizemos que S é uma *superfície mínima*.

Note que se $H \equiv 0$ então $\kappa_1 + \kappa_2 = 0$, ou seja, $\kappa_1 = -\kappa_2$ e, portanto, $K = \kappa_1\kappa_2 = -(\kappa_1)^2 \leq 0$.

4. Classificação de pontos de uma superfície

Definição 4.1. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $S = X(U)$ uma superfície parametrizada regular. Dizemos que $p \in S$ é um ponto

1. *elíptico*, se $K(p) > 0$,
2. *hiperbólico*, se $K(p) < 0$,
3. *parabólico*, se $K(p) = 0$ e $H(p) \neq 0$, e
4. *planar*, se $K(p) = H(p) = 0$.

Nas condições da Definição 4.1 temos que se o ponto é elíptico então $\kappa_1(p) \leq \kappa_2(p) < 0$ ou $\kappa_2(p) \geq \kappa_1(p) > 0$, se o ponto é hiperbólico então $\kappa_1(p) < 0 < \kappa_2(p)$, se o ponto é parabólico então $\kappa_1(p) = 0$ e $\kappa_2(p) > 0$ ou $\kappa_1(p) < 0$ e $\kappa_2(p) = 0$ e se o ponto é planar então $\kappa_1(p) = \kappa_2(p) = 0$. Em especial, dizemos que p é um ponto *umbílico* se $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$. Neste caso, p é elíptico ou planar. Além disso,

$$\begin{aligned}(H^2 - K)(p) &= \left(\frac{\kappa_1(p) + \kappa_2(p)}{2} \right)^2 - \kappa_1(p)\kappa_2(p) \\ &= \frac{(\kappa_1(p))^2 + 2\kappa_1(p)\kappa_2(p) + (\kappa_2(p))^2}{4} - \frac{4\kappa_1(p)\kappa_2(p)}{4} \\ &= \left(\frac{\kappa_1(p) - \kappa_2(p)}{2} \right)^2.\end{aligned}$$

Logo, p é um ponto umbílico se $(H^2 - K)(p) = 0$.

Definição 4.2. Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é dita (totalmente) umbílica se todos os seus pontos forem umbílicos.

Veremos que, em \mathbb{R}^3 , as únicas superfícies totalmente umbílicas são o plano e a esfera.

Exemplo 4.1 (Esfera). Seja S a esfera de centro na origem e raio r . Como vimos anteriormente, $\kappa_1(p) = \frac{1}{r}$, $\kappa_2(p) = \frac{1}{r}$, $K(p) = \frac{1}{r^2}$ e $H(p) = \frac{1}{r}$ para todo $p \in S$. Logo, todos os pontos de uma esfera são elípticos. Além disso, a esfera é uma superfície totalmente umbílica.

Exemplo 4.2 (Plano). Seja S a esfera de centro na origem e raio r . Como vimos anteriormente, $\kappa_1(p) = 0$, $\kappa_2(p) = 0$, $K(p) = 0$ e $H(p) = 0$ para todo $p \in S$. Logo, todos os pontos de um plano são planares. Além disso, o plano é uma superfície mínima.

Exemplo 4.3 (Cilindro circular). Seja S o cilindro circular de raio r . Como vimos anteriormente, $\kappa_1(p) = -\frac{1}{r}$, $\kappa_2(p) = 0$, $K(p) = 0$ e $H(p) = -\frac{1}{2r} \neq 0$ para todo $p \in S$. Logo, todos os pontos de um cilindro são parabólicos.

Exemplo 4.4 (Paraboloides hiperbólico). Seja S o paraboloides hiperbólico dado por $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^2 - x^2\}$, ilustrado na Figura 4.1.

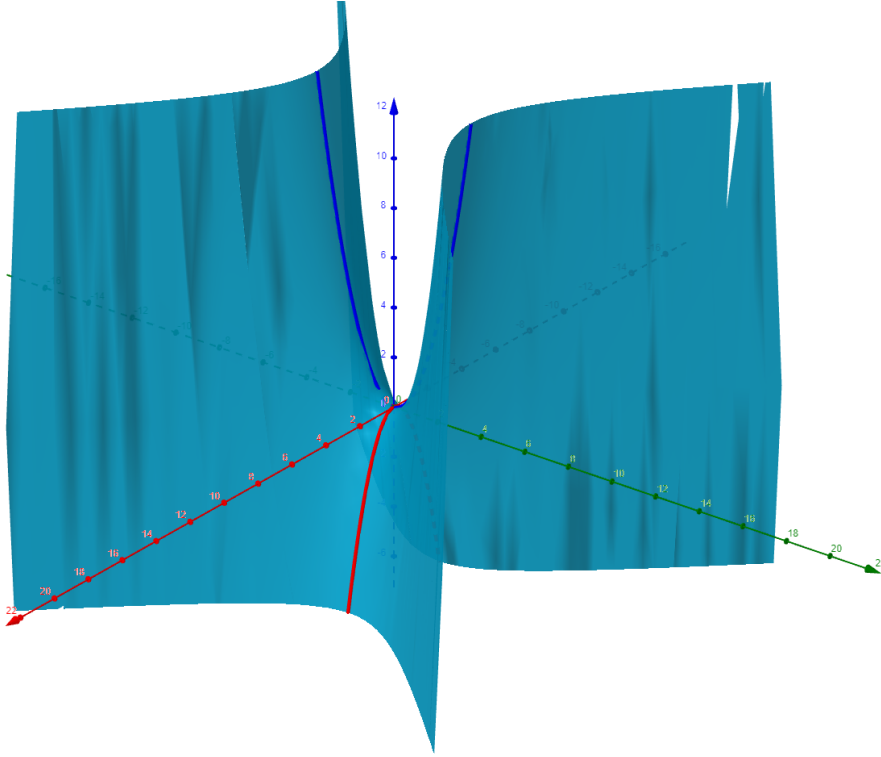


Figura 4.1.: Paraboloides hiperbólico

Note que $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $X(u, v) = (u, v, v^2 - u^2)$ é uma parametrização para o paraboloides hiperbólico. Observe que

$$\begin{aligned} X_u(u, v) &= (1, 0, -2u), \\ X_v(u, v) &= (0, 1, 2v), \\ X_{uu}(u, v) &= (0, 0, -2), \\ X_{uv}(u, v) &= (0, 0, 0), \\ X_{vv}(u, v) &= (0, 0, 2). \end{aligned}$$

Agora calculamos o vetor normal em p :

$$\begin{aligned} N(p) &= \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} \\ &= \frac{\det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & 2v \end{pmatrix}}{\|X_u \wedge X_v\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}(2u, -2v, 1) \end{aligned}$$

Finalmente podemos calcular os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais:

$$E(u, v) = \langle X_u, X_u \rangle = 1 + 4u^2$$

4. Classificação de pontos de uma superfície

$$\begin{aligned}
 F(u, v) &= \langle X_u, X_v \rangle = -4uv \\
 G(u, v) &= \langle X_v, X_v \rangle = 1 + 4v^2 \\
 e(u, v) &= \langle X_{uu}, N \rangle = -\frac{2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} \\
 f(u, v) &= \langle X_{uv}, N \rangle = 0 \\
 g(u, v) &= \langle X_{vv}, N \rangle = \frac{2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}.
 \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
 K(p) &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\
 &= \frac{\left(-\frac{2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}\right) \left(\frac{2}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}\right)}{(1 + 4u^2)(1 + 4v^2) - (-4uv)^2} \\
 &= \frac{-\frac{4}{4u^2 + 4v^2 + 1}}{1 + 4u^2 + 4v^2 + 16u^2v^2 - 16u^2v^2} \\
 &= \frac{-\frac{4}{4u^2 + 4v^2 + 1}}{1 + 4u^2 + 4v^2} \\
 &= -\frac{4}{(4u^2 + 4v^2 + 1)^2} \\
 &< 0.
 \end{aligned}$$

Portanto, todos os pontos de um parabolóide hiperbólico são hiperbólicos.

Exemplo 4.5 (Chapéu de Sherlock). Seja S a superfície gerada pela rotação da curva $z = y^3$, no plano Oyz , com $-1 < y < 1$, em relação à reta $z = 1$, ilustrado na Figura 4.2.

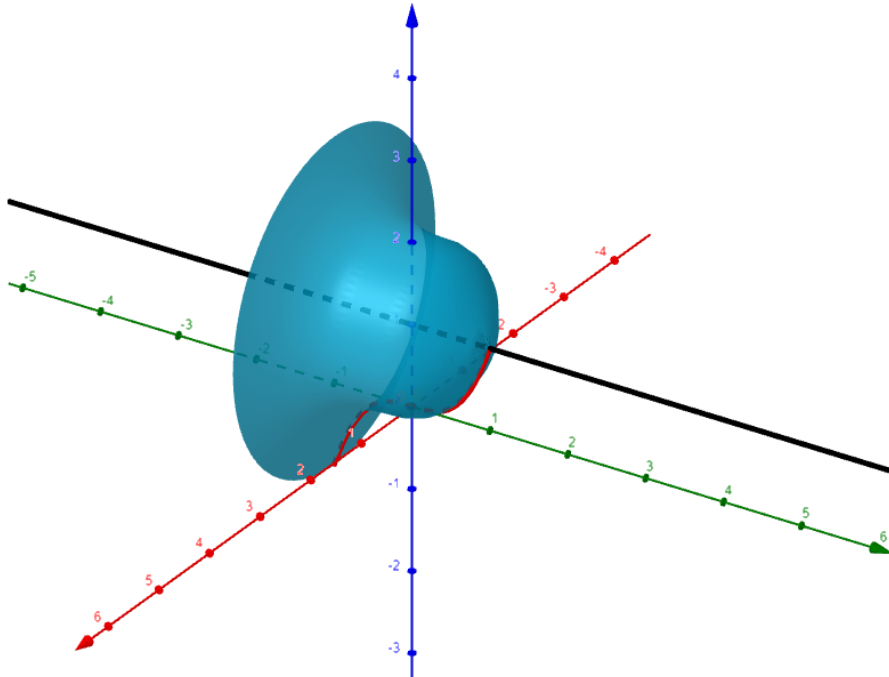


Figura 4.2.: Chapéu de Sherlock

4. Classificação de pontos de uma superfície

Uma parametrização para o chapéu de Sherlock é obtida da seguinte maneira:

1. Parametrização da curva $z = y^3$, no plano Oyz , com $-1 < y < 1$:

$$\begin{aligned}\alpha :]-1, 1[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ u &\mapsto (0, u, u^3).\end{aligned}$$

2. Translação de $\alpha(u)$:

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} :]-1, 1[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ u &\mapsto (0, u, u^3 - 1).\end{aligned}$$

3. Rotação ao redor do eixo Oy :

$$\begin{aligned}\bar{X} :]-1, 1[\times]0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto ((u^3 - 1) \cos(v), u, (u^3 - 1) \sin(v)).\end{aligned}$$

4. Translação para a posição final:

$$\begin{aligned}X :]-1, 1[\times]0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto ((u^3 - 1) \cos(v), u, (u^3 - 1) \sin(v) + 1).\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}X_u(u, v) &= (3u^2 \cos(v), 1, 3u^2 \sin(v)), \\ X_v(u, v) &= (-(u^3 - 1) \sin(v), 0, (u^3 - 1) \cos(v)), \\ X_{uu}(u, v) &= (6u \cos(v), 0, 6u \sin(v)), \\ X_{uv}(u, v) &= (-3u^2 \sin(v), 0, 3u^2 \cos(v)), \\ X_{vv}(u, v) &= (-(u^3 - 1) \cos(v), 0, -(u^3 - 1) \sin(v)).\end{aligned}$$

Agora calculamos o vetor normal em p :

$$\begin{aligned}N(p) &= \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} \\ &= \frac{\det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3u^2 \cos(v) & 1 & 3u^2 \sin(v) \\ -(u^3 - 1) \sin(v) & 0 & (u^3 - 1) \cos(v) \end{pmatrix}}{\|X_u \wedge X_v\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(u^3 - 1) \cos(v)^2 + (-3u^2(u^3 - 1))^2 + ((u^3 - 1) \sin(v))^2}} ((u^3 - 1) \cos(v), -3u^2(u^3 - 1), (u^3 - 1) \sin(v)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(u^3 - 1)^2 + (3u^2(u^3 - 1))^2}} ((u^3 - 1) \cos(v), -3u^2(u^3 - 1), (u^3 - 1) \sin(v)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1 + 9u^4)(u^3 - 1)^2}} ((u^3 - 1) \cos(v), -3u^2(u^3 - 1), (u^3 - 1) \sin(v)) \\ &= \frac{1}{|u^3 - 1| \sqrt{1 + 9u^4}} ((u^3 - 1) \cos(v), -3u^2(u^3 - 1), (u^3 - 1) \sin(v)) \\ &= \frac{\text{sign}(u^3 - 1)}{\sqrt{1 + 9u^4}} (\cos(v), -3u^2, \sin(v)) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 + 9u^4}} (\cos(v), -3u^2, \sin(v)).\end{aligned}$$

4. Classificação de pontos de uma superfície

Finalmente podemos calcular os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais:

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \langle X_u, X_u \rangle = 1 + 9u^4 \\ F(u, v) &= \langle X_u, X_v \rangle = 0 \\ G(u, v) &= \langle X_v, X_v \rangle = (u^3 - 1)^2 \\ e(u, v) &= \langle X_{uu}, N \rangle = \frac{-6u}{\sqrt{1 + 9u^4}} \\ f(u, v) &= \langle X_{uv}, N \rangle = 0 \\ g(u, v) &= \langle X_{vv}, N \rangle = \frac{u^3 - 1}{\sqrt{1 + 9u^4}}. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} K(p) &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\left(\frac{-6u}{\sqrt{1 + 9u^4}}\right) \left(\frac{u^3 - 1}{\sqrt{1 + 9u^4}}\right)}{(1 + 9u^4)(u^3 - 1)^2} \\ &= \frac{-6u(u^3 - 1)}{(1 + 9u^4)^2(u^3 - 1)^2} \\ &= -\frac{6u}{(1 + 9u^4)^2(u^3 - 1)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} \\ &= \frac{\left(\frac{-6u}{\sqrt{1 + 9u^4}}\right)(u^3 - 1)^2 + \left(\frac{u^3 - 1}{\sqrt{1 + 9u^4}}\right)(1 + 9u^4)}{2(1 + 9u^4)(u^3 - 1)^2} \\ &= \frac{(1 + 9u^4 - 6u(u^3 - 1))(u^3 - 1)}{2(1 + 9u^4)^{\frac{3}{2}}(u^3 - 1)^2} \\ &= \frac{1 + 9u^4 - 6u(u^3 - 1)}{2(1 + 9u^4)^{\frac{3}{2}}(u^3 - 1)}. \end{aligned}$$

Note que as curvaturas Gaussiana e média dependem somente da variável u , assim podemos plotar os gráficos de $H(u)$ e $K(u)$ para $-1 < u < 1$, como ilustram as Figuras 4.3 e 4.4, respectivamente.

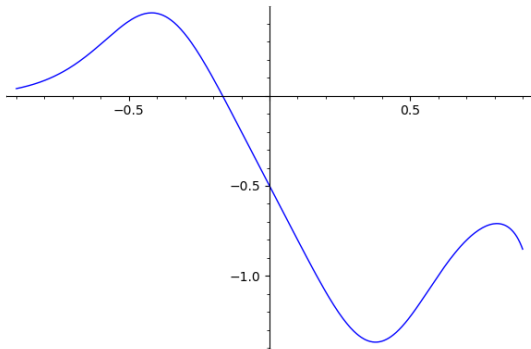


Figura 4.3.: Função $H(u)$.

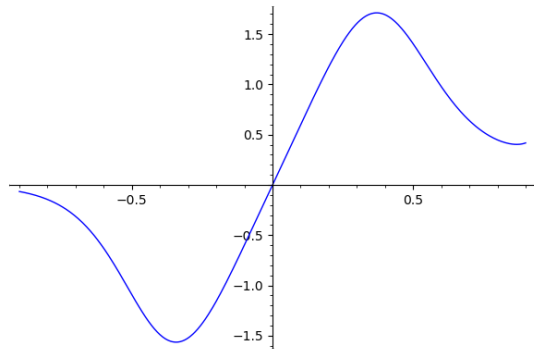


Figura 4.4.: Função $K(u)$.

4. Classificação de pontos de uma superfície

Para $0 < u < 1$, temos que $K(u, v) > 0$, de modo que os pontos $p = X(u, v)$, com $0 < u < 1$, são elípticos.

Para $-1 < u < 0$, temos que $K(u, v) < 0$, de modo que os pontos $p = X(u, v)$, com $-1 < u < 0$, são hiperbólicos.

Além disso, $K(0, v) = 0$ e $H(0, v) = -\frac{1}{2} \neq 0$, de modo que os pontos $p = X(0, v)$ são parabólicos.

Definição 4.3. Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in S$. Os conjuntos $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x, y, z) - p, N(p) \rangle > 0\}$ e $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x, y, z) - p, N(p) \rangle < 0\}$ são chamados de **semiespaços abertos de origem** $T_p S$.

Definição 4.4. Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in S$. Os conjuntos $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x, y, z) - p, N(p) \rangle \geq 0\}$ e $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x, y, z) - p, N(p) \rangle \leq 0\}$ são chamados de **semiespaços fechados de origem** $T_p S$.

Proposição 4.1. Sejam $S = X(U)$ uma superfície parametrizada regular, $q = (u_0, v_0) \in U$ e $p = X(q)$. Então

1. se p é um ponto elíptico, então existe uma vizinhança W de q em U tal que $X(W)$ está contida num dos semiespaços fechados de origem $T_p S$.
2. se p é um ponto hiperbólico, então para qualquer vizinhança W de q em U existem q_1 e q_2 em W tais que $X(q_1)$ e $X(q_2)$ pertencem a semiespaços abertos distintos de origem $T_p S$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha que $q = (0, 0)$ e $N = N(0, 0)$. Considere $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(u, v) := \langle X(u, v) - p, N \rangle$.

Temos que h é contínua e $h(0, 0) = 0$. Tomando-se o polinômio de Taylor de 2ª ordem de $X(u, v)$ ao redor de $q = (0, 0)$, temos:

$$\begin{aligned} X(u, v) &= X(0, 0) + X_u(0, 0)u + X_v(0, 0)v \\ &\quad + \frac{1}{2} (X_{uu}(0, 0)u^2 + 2X_{uv}(0, 0)uv + X_{vv}(0, 0)v^2) + R(u, v), \end{aligned}$$

onde $\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{R(u,v)}{\|(u,v)\|^2} = 0$. Assim,

$$h(u, v) = \frac{1}{2} (e(q)u^2 + 2f(q)uv + g(q)v^2) + \tilde{R}(u, v),$$

onde $\tilde{R}(u, v) := \langle R(u, v), N(0, 0) \rangle$. Ou seja, $h(u, v) = \frac{1}{2} \Pi_p(w) + \tilde{R}(u, v)$, onde $w := uX_u + vX_v$.

(1): No caso em que p é um ponto elíptico ($K(p) > 0$), tem-se

$$0 < \kappa_1(p) \leq \kappa_{n,p} \leq \kappa_2(p) \tag{4.1}$$

$$\kappa_1(p) \leq \kappa_{n,p} \leq \kappa_2(p) < 0 \tag{4.2}$$

Se ocorrer (4.1), então $\kappa_{n,p}(w) > 0$, donde $\Pi_p(w) > 0$. Já se ocorrer (4.2), então $\kappa_{n,p}(w) < 0$, donde $\Pi_p(w) < 0$. Ou seja, em qualquer um dos casos temos que $\Pi_p(w) \neq 0$ para todo $w \in T_p S$.

Afirmamos que se $\Pi_p(w) \neq 0$ para todo $w \in T_p S$ então existe uma vizinhança de q na qual o sinal de $h(u, v)$ está determinado pelo sinal de $\Pi_p(w)$.

4. Classificação de pontos de uma superfície

De fato, note que

$$\begin{aligned} h(u, v) &= \frac{1}{2} \Pi_p(w) + \tilde{R}(u, v) \\ &= \Pi_p(w) \left(\frac{1}{2} + \frac{\tilde{R}(u, v)}{\Pi_p(w)} \right). \end{aligned}$$

Como $\Pi_p(w) \neq 0$ para todo $w \in T_p S$ temos que

$$\begin{aligned} \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{\tilde{R}(u, v)}{\Pi_p(w)} &= \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{\langle R(u, v), N(0, 0) \rangle \Pi_p(w)}{\Pi_p(w)} \\ &= \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{\left\langle \frac{R(u, v)}{\|(u, v)\|^2}, N(0, 0) \right\rangle \|(u, v)\|^2}{\Pi_p(w)} \\ &= \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{\left\langle \frac{R(u, v)}{\|(u, v)\|^2}, N(0, 0) \right\rangle \Pi_p(w)}{\Pi_p(w)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, temos que existe uma vizinhança $\bar{U} \subset U$ de q tal que

$$\left| \frac{\tilde{R}(u, v)}{\Pi_p(w)} \right| < \frac{1}{4}.$$

Portanto, para $(u, v) \in \bar{U}$, temos que

$$\text{sign}(h(u, v)) = \text{sign}(\Pi_p(w)) \text{sign} \left(\frac{1}{2} + \frac{\tilde{R}(u, v)}{\Pi_p(w)} \right) = \text{sign}(\Pi_p(w)).$$

Se ocorrer (4.1), então $\kappa_{n,p}(w) > 0$, donde $\Pi_p(w) > 0$. Pelo Lema de conservação de sinal, existe uma vizinhança W de q em \bar{U} para a qual $h(u, v) > 0$.

Se ocorrer (4.2), então $\kappa_{n,p}(w) < 0$, donde $\Pi_p(w) < 0$. Pelo Lema de conservação de sinal, existe uma vizinhança \tilde{W} de q em \bar{U} para a qual $h(u, v) < 0$.

Como $h(0, 0) = 0$, concluímos que existe uma vizinhança de $q = (0, 0)$ em que $h(u, v) \geq 0$ ou $h(u, v) \leq 0$.

(2): No caso em que p é um ponto hiperbólico ($K(p) < 0$), tem-se

$$\kappa_1(p) < 0 < \kappa_2(p).$$

Sejam $\{e_1, e_2\}$ as direções principais correspondentes a $\kappa_1(p)$ e $\kappa_2(p)$, isto é,

$$\begin{cases} \kappa_{n,p}(e_1) = \kappa_1(p) < 0 \\ \kappa_{n,p}(e_2) = \kappa_2(p) > 0 \end{cases}.$$

Em coordenadas, sejam $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in U$ tais que $e_1 = dX_q(u_1, v_1)$ e $e_2 = dX_q(u_2, v_2)$. Para qualquer vizinhança W de q existe $\lambda_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\begin{cases} \lambda(u_1, v_1) = (\lambda u_1, \lambda v_1) \in W \text{ e} \\ \lambda(u_2, v_2) = (\lambda u_2, \lambda v_2) \in W \end{cases},$$

4. Classificação de pontos de uma superfície

para todo $\lambda < \lambda_0$. Além disso, para $\lambda < \lambda_0$, temos que

$$\begin{aligned}\kappa_{n,p}(dX_q(\lambda u_1, \lambda v_1)) &= \kappa_{n,p}(\lambda dX_q(u_1, v_1)) \\ &= \kappa_{n,p}(dX_q(u_1, v_1)) \\ &= \kappa_{n,p}(e_1) \\ &= \kappa_1(p) \\ &< 0\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\kappa_{n,p}(dX_q(\lambda u_2, \lambda v_2)) &= \kappa_{n,p}(\lambda dX_q(u_2, v_2)) \\ &= \kappa_{n,p}(dX_q(u_2, v_2)) \\ &= \kappa_{n,p}(e_2) \\ &= \kappa_2(p) \\ &> 0.\end{aligned}$$

Assim, tomemos $q_1(\lambda) := (\lambda u_1, \lambda v_1)$ e $q_2(\lambda) := (\lambda u_2, \lambda v_2)$ para todo $\lambda < \lambda_0$. Primeiramente note que para $\lambda < \lambda_0$ temos que

$$\begin{aligned}h(q_1(\lambda)) &= \frac{1}{2}\Pi_p(dX_q(\lambda u_1, \lambda v_1)) + \tilde{R}(q_1(\lambda)) \\ &= \frac{\Pi_p(dX_q(\lambda u_1, \lambda v_1))}{\Pi_p(dX_q(\lambda u_1, \lambda v_1))} \left(\frac{\Pi_p(dX_q(\lambda u_1, \lambda v_1))}{2} + \frac{\tilde{R}(q_1(\lambda))\Pi_p(dX_q(\lambda u_1, \lambda v_1))}{\Pi_p(dX_q(\lambda u_1, \lambda v_1))} \right) \\ &= \kappa_{n,p}(dX_q(\lambda u_1, \lambda v_1)) \left(\frac{\Pi_p(dX_q(\lambda u_1, \lambda v_1))}{2} + \frac{\tilde{R}(q_1(\lambda))}{\kappa_{n,p}(dX_q(\lambda u_1, \lambda v_1))} \right) \\ &= \kappa_1(p) \left(\frac{\lambda^2 \Pi_p(dX_q(u_1, v_1))}{2} + \frac{\tilde{R}(q_1(\lambda))}{\kappa_1(p)} \right) \\ &= \kappa_1(p) \left(\frac{\lambda^2 \Pi_p(e_1)}{2} + \frac{\tilde{R}(q_1(\lambda))}{\kappa_1(p)} \right) \\ &= \kappa_1(p) \left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\tilde{R}(q_1(\lambda))}{\kappa_1(p)} \right).\end{aligned}$$

Como $\kappa_1(p) \neq 0$ temos que

$$\begin{aligned}\lim_{q_1(\lambda) \rightarrow (0,0)} \frac{\tilde{R}(q_1(\lambda))}{\kappa_1(p)} &= \lim_{q_1(\lambda) \rightarrow (0,0)} \frac{\langle R(q_1(\lambda)), N(0,0) \rangle}{\kappa_1(p)} \\ &= \lim_{q_1(\lambda) \rightarrow (0,0)} \frac{\left\langle \frac{R(q_1(\lambda))}{\|q_1(\lambda)\|^2}, N(0,0) \right\rangle \|q_1(\lambda)\|^2}{\kappa_1(p)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Assim, temos que existe $\lambda_1 > 0$ tal que, para todo $\lambda < \lambda_1$, temos que

$$\left| \frac{\tilde{R}(q_1(\lambda))}{\kappa_1(p)} \right| < \frac{\lambda^2}{4}.$$

4. Classificação de pontos de uma superfície

Portanto, para $\lambda < \min\{\lambda_1, \lambda_0\}$ temos que

$$\text{sign}(h(q_1(\lambda))) = \text{sign}(\kappa_1(p)) \text{sign} \left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\tilde{R}(q_1(\lambda))}{\kappa_1(p)} \right) = \text{sign}(\kappa_1(p)).$$

Consequentemente, $h(q_1(\lambda)) < 0$ para todo $\lambda < \min\{\lambda_0, \lambda_1\}$. Por outro lado, para $\lambda < \lambda_0$, temos que

$$\begin{aligned} h(q_2(\lambda)) &= \frac{1}{2} \Pi_p(dX_q(\lambda u_2, \lambda v_2)) + \tilde{R}(q_2(\lambda)) \\ &= \frac{\Pi_p(dX_q(\lambda u_2, \lambda v_2))}{\text{I}_p(dX_q(\lambda u_2, \lambda v_2))} \left(\frac{\text{I}_p(dX_q(\lambda u_2, \lambda v_2))}{2} + \frac{\tilde{R}(q_2(\lambda)) \text{I}_p(dX_q(\lambda u_2, \lambda v_2))}{\Pi_p(dX_q(\lambda u_2, \lambda v_2))} \right) \\ &= \kappa_{n,p}(dX_q(\lambda u_2, \lambda v_2)) \left(\frac{\text{I}_p(dX_q(\lambda u_2, \lambda v_2))}{2} + \frac{\tilde{R}(q_2(\lambda))}{\kappa_{n,p}(dX_q(\lambda u_2, \lambda v_2))} \right) \\ &= \kappa_2(p) \left(\frac{\lambda^2 \text{I}_p(dX_q(u_2, v_2))}{2} + \frac{\tilde{R}(q_2(\lambda))}{\kappa_2(p)} \right) \\ &= \kappa_2(p) \left(\frac{\lambda^2 \text{I}_p(e_2)}{2} + \frac{\tilde{R}(q_2(\lambda))}{\kappa_2(p)} \right) \\ &= \kappa_2(p) \left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\tilde{R}(q_2(\lambda))}{\kappa_2(p)} \right). \end{aligned}$$

Como $\kappa_2(p) \neq 0$ temos que

$$\begin{aligned} \lim_{q_2(\lambda) \rightarrow (0,0)} \frac{\tilde{R}(q_2(\lambda))}{\kappa_2(p)} &= \lim_{q_2(\lambda) \rightarrow (0,0)} \frac{\langle \tilde{R}(q_2(\lambda)), N(0,0) \rangle}{\kappa_2(p)} \\ &= \lim_{q_2(\lambda) \rightarrow (0,0)} \frac{\left\langle \frac{\tilde{R}(q_2(\lambda))}{\|q_2(\lambda)\|^2}, N(0,0) \right\rangle \|q_2(\lambda)\|^2}{\kappa_2(p)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, temos que existe $\lambda_2 > 0$ tal que, para todo $\lambda < \lambda_2$, temos que

$$\left| \frac{\tilde{R}(q_2(\lambda))}{\kappa_2(p)} \right| < \frac{\lambda^2}{4}.$$

Portanto, para $\lambda < \min\{\lambda_2, \lambda_0\}$ temos que

$$\text{sign}(h(q_2(\lambda))) = \text{sign}(\kappa_2(p)) \text{sign} \left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\tilde{R}(q_2(\lambda))}{\kappa_2(p)} \right) = \text{sign}(\kappa_2(p)).$$

Consequentemente, $h(q_2(\lambda)) > 0$ para todo $\lambda < \min\{\lambda_0, \lambda_2\}$.

Finalmente, seja $r < \min\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\}$ e note que para toda vizinhança W de q temos que $q_1(r), q_2(r) \in W$. Além disso, $h(q_1(r)) < 0$ e $h(q_2(r)) > 0$. Portanto, $X(q_1(r))$ e $X(q_2(r))$ estão em semiespaços abertos opostos de origem $T_p S$. \square

4.1. Caracterização das superfícies totalmente umbílicas do \mathbb{R}^3

Lema 4.1. Seja $S = X(U)$ uma superfície parametrizada regular. Então $p \in S$ é um ponto umbílico se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} e(q) &= \lambda E(q) \\ f(q) &= \lambda F(q) , \\ g(q) &= \lambda G(q) \end{cases}$$

com $q \in U$ tal que $X(q) = p$. Neste caso, $\kappa_{n,p} \equiv \lambda$ em $T_p S$.

Demonstração. (\implies): Vimos que

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = (-d\mathbf{N}_p)_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Sendo \mathcal{B} a base de direções principais em $p \in S$ relativas às curvaturas principais $\kappa_1(p)$ e $\kappa_2(p)$, temos

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_1(p) & 0 \\ 0 & \kappa_2(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Mas, por hipótese p é um ponto umbílico. Logo, se $\lambda = \kappa_1(p) = \kappa_2(p)$, então

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda E & \lambda F \\ \lambda F & \lambda G \end{pmatrix}.$$

Neste caso, para todo $w = uX_u + vX_v \in T_p S$, temos que

$$\begin{aligned} \kappa_{n,p}(w) &= \frac{\Pi_p(w)}{I_p(w)} \\ &= \frac{u^2 e + 2uvf + v^2 g}{u^2 E + 2uvF + v^2 G} \\ &= \frac{u^2 \lambda E + 2uv\lambda F + v^2 \lambda G}{u^2 E + 2uvF + v^2 G} \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

(\impliedby): Temos que

$$\begin{aligned} (H^2 - K)(p) &= \left(\frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} \right)^2 - \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ &= \left(\frac{\lambda EG - 2\lambda F^2 + \lambda GE}{2(EG - F^2)} \right)^2 - \frac{\lambda^2 EG - \lambda^2 F^2}{EG - F^2} \\ &= \left(\frac{2\lambda(EG - F^2)}{2(EG - F^2)} \right)^2 - \frac{\lambda^2(EG - F^2)}{EG - F^2} \\ &= \lambda^2 - \lambda^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, p é um ponto umbílico. □

4. Classificação de pontos de uma superfície

Teorema 4.1. Sejam $S = X(U)$ uma superfície parametrizada regular, $U \subset \mathbb{R}^2$ conexo tal que S é umbílica. Então S está contida num plano ou numa esfera.

Demonstração. Como S é uma superfície totalmente umbílica, então, pelo Lema 4.1, temos que para todo $p \in S$ existe $\lambda(p) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} e(u, v) &= \lambda(p)E(u, v) \\ f(u, v) &= \lambda(p)F(u, v) \\ g(u, v) &= \lambda(p)G(u, v) \end{cases}.$$

Deste modo, fica definida uma função $\Lambda : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\Lambda(u, v) := \lambda(X(u, v))$. A seguir mostraremos que Λ é constante em U . De fato,

$$-\langle X_u, N_u \rangle = \Lambda(u, v) \langle X_u, X_u \rangle \quad (4.3)$$

$$-\langle X_u, N_v \rangle = \Lambda(u, v) \langle X_u, X_v \rangle \quad (4.4)$$

$$-\langle X_v, N_u \rangle = \Lambda(u, v) \langle X_u, X_v \rangle \quad (4.5)$$

$$-\langle X_v, N_v \rangle = \Lambda(u, v) \langle X_v, X_v \rangle \quad (4.6)$$

De (4.3) e (4.5) temos

$$\begin{cases} \langle N_u + \Lambda(u, v)X_u, X_u \rangle &= 0 \\ \langle N_u + \Lambda(u, v)X_u, X_v \rangle &= 0 \end{cases},$$

enquanto que de (4.4) e (4.6) temos

$$\begin{cases} \langle N_v + \Lambda(u, v)X_v, X_u \rangle &= 0 \\ \langle N_v + \Lambda(u, v)X_v, X_v \rangle &= 0 \end{cases}.$$

Consequentemente, $N_u + \Lambda(u, v)X_u$ e $N_v + \Lambda(u, v)X_v$ são ortogonais a $T_p S$. Mas $N_u + \Lambda(u, v)X_u$ e $N_v + \Lambda(u, v)X_v$ pertencem a $T_p S$. Assim,

$$\begin{cases} N_u + \Lambda(u, v)X_u &= 0 \\ N_v + \Lambda(u, v)X_v &= 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

Derivando a primeira equação de (4.7) em relação a v e a segunda em relação a u , chegamos a:

$$\begin{cases} N_{uv} + \Lambda_v X_u + \Lambda(u, v)X_{uv} &= 0 \\ N_{vu} + \Lambda_u X_v + \Lambda(u, v)X_{vu} &= 0 \end{cases}.$$

Então $\Lambda_v X_u - \Lambda_u X_v = 0$. Como $\{X_u, X_v\}$ é uma base de $T_p S$, temos que $\Lambda_u = \Lambda_v = 0$ em p . Como U é conexo, temos que Λ é constante em U .

- Caso $\Lambda \equiv 0$:

Em (4.7), obtemos $N_u = N_v = 0$. Como U é conexo, então $N(u, v)$ é constante em U . Logo,

$$\langle X(u, v) - p, N(u, v) \rangle = 0.$$

Portanto, S está contida no plano que passa por p e cujo normal é N .

4. Classificação de pontos de uma superfície

- Caso $\Lambda \equiv \lambda \neq 0$:

Consideremos $Z(u, v) := X(u, v) + \frac{1}{\lambda}N(u, v)$. Temos que

$$\begin{cases} Z_u &= X_u + \frac{1}{\lambda}N_u \\ Z_v &= X_v + \frac{1}{\lambda}N_v \end{cases}.$$

Como $Z_u = Z_v = 0$ e U é conexo, temos que $Z(u, v) \equiv C \in \mathbb{R}^3$. Deste modo,

$$\|X(u, v) - C\| = \|X(u, v) - Z(u, v)\| = \left\| \frac{1}{\lambda}N(u, v) \right\| = \frac{1}{|\lambda|} \|N(u, v)\| = \frac{1}{|\lambda|}.$$

Portanto, S está contida na esfera de centro $C \in \mathbb{R}^3$ e raio $\frac{1}{|\lambda|}$.

□

5. Curvas especiais sobre uma superfície

5.1. Linhas de curvatura

Definição 5.1. Seja $S = X(U)$ uma superfície parametrizada regular. Uma curva regular $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ sobre S é um **linha de curvatura** se $\alpha'(t)$ for uma direção principal de S em $\alpha(t)$.

Exemplo 5.1 (Esfera). Todas as curvas regulares sobre a esfera de raio r são linhas de curvatura, pois $\kappa_{n,p} \equiv \frac{1}{r}$ para todo ponto p da esfera, o que implica que todas as direções da esfera são direções principais.

Exemplo 5.2 (Plano). Todas as curvas regulares sobre um plano são linhas de curvatura, pois $\kappa_{n,p} \equiv 0$ para todo ponto p do plano, o que implica que todas as direções do plano são direções principais.

Exemplo 5.3 (Cilindro circular). Seja S o cilindro circular de raio r . Como vimos anteriormente

$$-\frac{1}{r} \leq \kappa_{n,p}(w) \leq 0,$$

para todo $p \in S$ e $w \in T_p S$. Assim, sendo $C \in \mathbb{R}$, as curvas

$$\alpha(t) := X(C, t) = (r \cos(C), r \sin(C), t),$$

e

$$\beta(t) := X(t, C) = (r \cos(t), r \sin(t), C).$$

são linhas de curvatura sobre o cilindro. De fato,

$$\alpha'(t) = (0, 0, 1) = X_v(t, C)$$

e

$$\beta'(t) = (-r \sin(t), r \cos(t), 0) = X_u(t, C).$$

Como X_u e X_v são direções principais do cilindro temos o desejado.

Exercício 5.1. Prove que em superfícies rotacionais, os paralelos e os meridianos são linhas de curvatura.

Proposição 5.1 (EDO das linhas de curvatura). Sejam $S = X(U)$ uma superfície parametrizada regular e $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva regular sobre S . Então α é uma linha de curvatura de S se, e somente se,

$$\det \begin{pmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{pmatrix} = 0.$$

5. Curvas especiais sobre uma superfície

Demonstração. Note que $\alpha'(t)$ é uma direção principal se, e somente se, $\alpha'(t) = u'(t)X_u + v'(t)X_v$ for solução do sistema:

$$\begin{aligned} -d\mathbf{N}_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) &= \lambda(t)\alpha'(t) \\ \begin{pmatrix} \frac{eG - fF}{EG - F^2} & \frac{fG - gF}{EG - F^2} \\ \frac{fE - eF}{EG - F^2} & \frac{gE - fF}{EG - F^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} &= \lambda(t) \begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} \\ \left(\frac{eG - fF}{EG - F^2}u' + \frac{fG - gF}{EG - F^2}v' \right) &= \lambda(t)u' \\ \left(\frac{fE - eF}{EG - F^2}u' + \frac{gE - fF}{EG - F^2}v' \right) &= \lambda(t)v' \end{aligned}$$

para alguma função λ . Equivalentemente,

$$\begin{cases} \frac{eG - fF}{EG - F^2}u' + \frac{fG - gF}{EG - F^2}v' = \lambda(t)u' \\ \frac{fE - eF}{EG - F^2}u' + \frac{gE - fF}{EG - F^2}v' = \lambda(t)v' \end{cases}$$

Eliminando-se $\lambda(t)$ no sistema acima, obtemos a EDO das linhas de curvatura

- Suponha que $u' \neq 0$ e $v' \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{eG - fF}{EG - F^2} + \frac{fG - gF}{EG - F^2} \frac{v'}{u'} &= \frac{fE - eF}{EG - F^2} \frac{u'}{v'} + \frac{gE - fF}{EG - F^2} \\ (eG - fF) + (fG - gF) \frac{v'}{u'} &= (fE - eF) \frac{u'}{v'} + (gE - fF) \\ (eG - fF)u'v' + (fG - gF)(v')^2 &= (fE - eF)(u')^2 + (gE - fF)u'v'. \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned} (eG - fF)u'v' + (fG - gF)(v')^2 - (fE - eF)(u')^2 - (gE - fF)u'v' &= 0 \\ (eF - fE)(u')^2 + (eG - gE)u'v' + (fG - gF)(v')^2 &= 0 \\ (eF - fE)(u')^2 - (gE - eG)u'v' + (fG - gF)(v')^2 &= 0 \\ -(fE - eF)(u')^2 - (gE - eG)u'v' - (gF - fG)(v')^2 &= 0 \\ -((fE - eF)(u')^2 - (gE - eG)(-u'v') + (gF - fG)(v')^2) &= 0 \\ (fE - eF)(u')^2 - (gE - eG)(-u'v') + (gF - fG)(v')^2 &= 0 \end{aligned}$$

que pode ser escrito como

$$\det \begin{pmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{pmatrix} = 0.$$

- Suponha $u' = 0$. Neste caso, note que $v' \neq 0$, pois $\alpha(t)$ é regular. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{fG - gF}{EG - F^2}v' &= 0 \\ (fG - gF)v' &= 0 \end{aligned}$$

5. Curvas especiais sobre uma superfície

$$\begin{aligned}(fG - gF)(v')^2 &= 0 \\ -(gF - fG)(v')^2 &= 0 \\ (gF - fG)(v')^2 &= 0\end{aligned}$$

que pode ser rescrito como

$$\det \begin{pmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{pmatrix} = 0.$$

- Suponha $v' = 0$. Neste caso, note que $u' \neq 0$, pois $\alpha(t)$ é regular. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{fE - eF}{EG - F^2}u' &= 0 \\ (fE - eF)u' &= 0 \\ (fE - eF)(u')^2 &= 0\end{aligned}$$

que pode ser rescrito como

$$\det \begin{pmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{pmatrix} = 0.$$

□

Teorema 5.1 (Existência das linhas de curvatura). Seja $S = X(U)$ uma superfície parametrizada regular. Se $p = X(q) \in S$ for um ponto não umbílico de X então existe uma vizinhança W de $q = (u_0, v_0)$ tal que para todo $\bar{q} \in W$ existem duas linhas de curvatura $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ com $\alpha(0) = \beta(0) = \bar{q}$.

Demonstração. Primeiramente, note que p é um ponto umbílico se, e somente se, $H^2(u_0, v_0) - K(u_0, v_0) \neq 0$. Suponha, sem perda de generalidade, que $H^2(u_0, v_0) - K(u_0, v_0) > 0$.

Pela continuidade de $H^2 - K$, temos que existe uma vizinhança W de $q = (u_0, v_0)$ tal que $H^2(u, v) - K(u, v) > 0$ para todo $(u, v) \in W$.

Caso existam linhas de curvatura para os pontos de W , então κ_1 e κ_2 são soluções da equação do segundo grau $x^2 - 2Hx + K = 0$. Mas $\Delta = (2H)^2 - 4K = 4(H^2 - K) > 0$. Logo, para cada $(u, v) \in W$, a equação $x^2 - 2Hx + K = 0$ tem duas soluções:

$$\begin{cases} \kappa_1(u, v) = H(u, v) - \sqrt{H^2(u, v) - K(u, v)} \\ \kappa_2(u, v) = H(u, v) + \sqrt{H^2(u, v) - K(u, v)} \end{cases}.$$

Note que $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma linha de curvatura se, e somente se, $-d\mathbf{N}_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = \kappa_1(u(t), v(t))\alpha'(t)$ ou $-d\mathbf{N}_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = \kappa_2(u(t), v(t))\alpha'(t)$. Sendo $\alpha(t) = X(u_1(t), v_1(t))$ uma linha de curvatura, tem-se

$$\begin{aligned}-d\mathbf{N}_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) &= \kappa_1(u_1(t), v_1(t))\alpha'(t) \\ \frac{d}{dt}N(\alpha(t)) &= \kappa_1(u_1(t), v_1(t))\alpha'(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}N(X(u_1(t), v_1(t))) &= \kappa_1(u_1(t), v_1(t))\alpha'(t) \\ (N \circ X)_{u_1}(u_1)' + (N \circ X)_{v_1}(v_1)' &= \kappa_1(u_1(t), v_1(t)) ((u_1)'X_{u_1} + (v_1)'X_{v_1}) \\ N_{u_1}(u_1)' + N_{v_1}(v_1)' &= \kappa_1(u_1(t), v_1(t)) ((u_1)'X_{u_1} + (v_1)'X_{v_1}) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Fazendo-se o produto interno de (5.1) com X_{u_1} obtemos

$$\begin{aligned} \langle N_{u_1}, X_{u_1} \rangle (u_1)' + \langle N_{v_1}, X_{u_1} \rangle (v_1)' &= \kappa_1(u_1(t), v_1(t)) ((u_1)'\langle X_{u_1}, X_{u_1} \rangle + (v_1)'\langle X_{v_1}, X_{u_1} \rangle) \\ -e(u_1)' - f(v_1)' &= \kappa_1(u_1(t), v_1(t)) ((u_1)'E + (v_1)'F) \\ (u_1)'(e - \kappa_1 E) + (v_1)'(f - \kappa_1 F) &= 0. \end{aligned}$$

E fazendo-se o produto interno de (5.1) com X_{v_1} obtemos

$$\begin{aligned} \langle N_{u_1}, X_{v_1} \rangle (u_1)' + \langle N_{v_1}, X_{v_1} \rangle (v_1)' &= \kappa_1(u_1(t), v_1(t)) ((u_1)'\langle X_{u_1}, X_{v_1} \rangle + (v_1)'\langle X_{v_1}, X_{v_1} \rangle) \\ -f(u_1)' - g(v_1)' &= \kappa_1(u_1(t), v_1(t)) ((u_1)'F + (v_1)'G) \\ (u_1)'(f - \kappa_1 F) + (v_1)'(g - \kappa_1 G) &= 0. \end{aligned}$$

Donde obtemos que $\alpha(t)$ é uma linha de curvatura se, e somente se, o sistema homogêneo

$$\begin{cases} (u_1)'(e - \kappa_1 E) + (v_1)'(f - \kappa_1 F) = 0 \\ (u_1)'(f - \kappa_1 F) + (v_1)'(g - \kappa_1 G) = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

tiver solução. Mas como

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} e - \kappa_1 E & f - \kappa_1 F \\ f - \kappa_1 F & g - \kappa_1 G \end{pmatrix} &= (e - \kappa_1 E)(g - \kappa_1 G) - (f - \kappa_1 F)(f - \kappa_1 F) \\ &= eg - \kappa_1 eG - \kappa_1 Eg + (\kappa_1)^2 EG - (f^2 - 2\kappa_1 fF + (\kappa_1)^2 F^2) \\ &= eg - f^2 - \kappa_1(eG + Eg - 2fF) + (\kappa_1)^2(EG - F^2) \\ &= (EG - F^2)((\kappa_1)^2 - 2H\kappa_1 + K) \\ &= 0. \end{aligned}$$

O sistema (5.2) tem solução não nula, que é solução de

$$(u_1)'(e - \kappa_1 E) + (v_1)'(f - \kappa_1 F) = 0.$$

Pelo Teorema de Existência e Unicidade de EDO's existe uma única solução não-nula $(u_1(t), v_1(t))$ com a condição inicial $(u_0, v_0) = q$.

De modo análogo, obtemos outra linha de curvatura $\beta(t) = X(u_2(t), v_2(t))$ usando-se que $-d\mathbf{N}_{\beta(t)}(\beta'(t)) = \kappa_2(u_2(t), v_2(t))\beta'(t)$. \square

Proposição 5.2 (Olinde Rodrigues). Sejam $S = X(U)$ uma superfície parametrizada regular e $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in I$, curva regular sobre S . Então $\alpha(t)$ é uma linha de curvatura se, e somente se, existe uma função $\lambda : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$N'(t) + \lambda(t)\alpha'(t) = 0,$$

em que $N(t) := \frac{X_u(u(t), v(t)) \wedge X_v(u(t), v(t))}{\|X_u(u(t), v(t)) \wedge X_v(u(t), v(t))\|}$. Neste caso, $\kappa_{n, \alpha(t)}(\alpha'(t)) = \lambda(t)$, para todo $t \in I$.

5. Curvas especiais sobre uma superfície

Demonstração. Seja $w(t) := N'(t) + \kappa_{n,\alpha(t)}(\alpha'(t))\alpha'(t)$ para todo $t \in I$. Como $N'(t), \alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}S$ então $w(t) \in T_{\alpha(t)}S$. Além disso,

$$\begin{aligned}\langle w(t), X_u(u(t), v(t)) \rangle &= \langle N_u u' + N_v v' + \kappa_{n,\alpha(t)}(\alpha'(t)) (u' X_u + v' X_v), X_u \rangle \\ &= -e u' - f v' + \kappa_{n,\alpha(t)}(\alpha'(t)) E u' + \kappa_{n,\alpha(t)}(\alpha'(t)) F v' \\ &= - (u' (e - \kappa_{n,\alpha(t)}(\alpha'(t)) E) + v' (f - \kappa_{n,\alpha(t)}(\alpha'(t)) F)).\end{aligned}$$

De modo análogo,

$$\begin{aligned}\langle w(t), X_v(u(t), v(t)) \rangle &= \langle N_u u' + N_v v' + \kappa_{n,\alpha(t)}(\alpha'(t)) (u' X_u + v' X_v), X_v \rangle \\ &= -f u' - g v' + \kappa_{n,\alpha(t)}(\alpha'(t)) F u' + \kappa_{n,\alpha(t)}(\alpha'(t)) G v' \\ &= - (u' (g - \kappa_{n,\alpha(t)}(\alpha'(t)) F) + v' (g - \kappa_{n,\alpha(t)}(\alpha'(t)) G)).\end{aligned}$$

Assim, como α é uma linha de curvatura se, e somente se,

$$\begin{cases} u' (e - \kappa_{n,\alpha(t)}(\alpha'(t)) E) + v' (f - \kappa_{n,\alpha(t)}(\alpha'(t)) F) = 0 \\ u' (g - \kappa_{n,\alpha(t)}(\alpha'(t)) F) + v' (g - \kappa_{n,\alpha(t)}(\alpha'(t)) G) = 0 \end{cases}.$$

Temos que $\alpha(t)$ é uma linha de curvatura se, e somente se, $w(t) = 0$, isto é,

$$N'(t) + \kappa_{n,\alpha(t)}(\alpha'(t))\alpha'(t) = 0.$$

□

5.2. Linhas assintóticas

Definição 5.2. Seja $S = X(U)$ uma superfície parametrizada regular. Uma curva regular $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in I$, é uma **linha assintótica de S** se $\kappa_{n,\alpha(t)}(\alpha'(t)) = 0$ para todo $t \in I$. Neste caso, dizemos que $\alpha'(t)$ é uma direção assintótica.

Proposição 5.3. Sejam $S = X(U)$ uma superfície parametrizada regular e $p \in S$. Então

1. Se p é um ponto elíptico então não existem direções assintóticas de S em p .
2. Se p é um ponto hiperbólico então existem duas direções assintóticas de S em p .
3. Se p é um ponto parabólico então existe uma direção assintótica de S em p , que também é uma direção principal.
4. Se p é um ponto planar então todas as direções são assintóticas.

Demonstração. (1): Como $K(p) > 0$ então $\kappa_{n,p} \neq 0$, de modo que não existem direções assintóticas de S em p .

(2): Como $K(p) < 0$ então $\kappa_1(p) < 0 < \kappa_2(p)$. De modo que existe uma direção $v \in T_p S$ para a qual $\kappa_{n,p}(v) = 0$. Como p é não-umbílico, podemos considerar $\{e_1, e_2\}$ uma base de direções principais de S em p . Sendo θ a medida do ângulo entre v e e_1 , temos que $0 = \kappa_{n,p}(v) = \kappa_1(p) \cos^2(\theta) + \kappa_2(p) \sin^2(\theta)$. Donde segue

$$\begin{aligned}\kappa_1(p) \cos^2(\theta) + \kappa_2(p) \sin^2(\theta) &= 0 \\ \kappa_1(p) \cos^2(\theta) + \kappa_2(p) (1 - \cos^2(\theta)) &= 0\end{aligned}$$

5. Curvas especiais sobre uma superfície

$$\begin{aligned}\cos^2(\theta) (\kappa_1(p) - \kappa_2(p)) &= -\kappa_2(p) \\ \cos^2(\theta) &= \frac{\kappa_2(p)}{\kappa_2(p) - \kappa_1(p)} \\ \cos(\theta) &= \pm \sqrt{\frac{\kappa_2(p)}{\kappa_2(p) - \kappa_1(p)}}.\end{aligned}$$

De modo que existem duas direções assintóticas de S em p .

(3): Como $K(p) = 0$ podemos supor que $\kappa_1(p) = 0$ e $\kappa_2(p) \neq 0$. Neste caso, como p é não-umbílico, podemos considerar $\{e_1, e_2\}$ uma base de direções principais de S em p . Temos que

$$\kappa_{n,p}(e_1) = \kappa_1(p) \cos^2(0) + \kappa_2(p) \sin^2(0) = \kappa_1(p) = 0.$$

Portanto e_1 é uma direção assintótica de S em p que também é uma direção principal.

(4): Trivial. \square

Exemplo 5.4. Toda reta contida numa superfície é uma linha assintótica.

Proposição 5.4 (EDO das linhas assintóticas). Sejam $S = X(U)$ uma superfície parametrizada regular e $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva regular sobre S . Então $\alpha(t)$ é uma curva assintótica se, e somente se,

$$(u')^2 e + 2u'v'f + (v')^2 g = 0.$$

Demonstração. Note que $\alpha(t)$ é uma linha assintótica se, e somente se,

$$\begin{aligned}\kappa_{n,\alpha(t)}(\alpha'(t)) &= 0 \\ \frac{\Pi_{\alpha(t)}(\alpha'(t))}{I_{\alpha(t)}(\alpha'(t))} &= 0 \\ \Pi_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) &= 0 \\ (u')^2 e + 2u'v'f + (v')^2 g &= 0.\end{aligned}$$

\square

Proposição 5.5 (Existência das linhas assintóticas). Sejam $S = X(U)$ uma superfície parametrizada regular e $p = X(u_0, v_0)$ um ponto hiperbólico. Então existe uma vizinhança W de (u_0, v_0) tal que por qualquer ponto $X(q)$, $q \in W$, passam duas linhas assintóticas.

Demonstração. Como $p = X(u_0, v_0)$ é um ponto hiperbólico temos que $K(u_0, v_0) < 0$. Pela continuidade de K , existe uma vizinhança W de (u_0, v_0) tal que

$$K(u, v) = \frac{e(u, v)g(u, v) - f^2(u, v)}{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} < 0,$$

para todo $(u, v) \in W$. Assim,

$$e(u, v)g(u, v) - f^2(u, v) < 0,$$

para todo $(u, v) \in W$.

5. Curvas especiais sobre uma superfície

- Suponha que $g(u, v) \neq 0$ para todo $(u, v) \in W$:

Neste caso, podemos resolver a equação

$$(u')^2 e + 2u'v'f + (v')^2 g = 0$$

como equação do segundo grau em v' , cujo discriminante é

$$\Delta = (2u'f)^2 - 4g(u')^2 e = 4(u')^2 (f^2 - eg) > 0,$$

para todo $(u, v) \in W$. Assim, as linhas assintóticas são dadas por:

$$v' = \frac{-2u'f \pm \sqrt{4(u')^2(f^2 - eg)}}{2g} = \frac{u'(-f \pm \sqrt{f^2 - eg})}{g}.$$

- Suponha que $g(u, v) = 0$ para todo $(u, v) \in W$:

Neste caso, podemos resolver a equação

$$\begin{aligned} (u')^2 e + 2u'v'f &= 0 \\ u'(u'e + 2fv') &= 0. \end{aligned}$$

Donde segue-se que $u' = 0$ ou $u'e + 2fv' = 0$. Para a última temos duas possibilidades:

$$\begin{cases} v' = 0, & \text{se } e = 0, \\ u' = \frac{-2f}{e}v' & \text{se } e \neq 0. \end{cases}$$

Assim, as linhas assintóticas são dadas por:

$$\begin{cases} u' = 0 \text{ e } v' = 0, \\ u' = 0 \text{ e } u' = \frac{-2f}{e}v' \end{cases}.$$

□

5.3. Geodésicas

Definição 5.3. Seja $S = X(U)$ uma superfície parametrizada regular. Uma curva regular $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in I$, é uma **geodésica de S em p** se $\alpha''(t)$ for normal à superfície S em $\alpha(t)$ para todo $t \in I$, isto é, $\alpha''(t) \perp T_{\alpha(t)}S$, para todo $t \in I$.

Exemplo 5.5 (Esfera). Todo círculo máximo da esfera é uma geodésica, pois $\vec{n}(t) = \pm N(\alpha(t))$.

Exemplo 5.6 (Plano). Toda reta contida em um plano é uma geodésica, pois se $\alpha(t) = \vec{a}t + \vec{b}$ for uma parametrização para a reta, temos que $\alpha''(t) = 0$.

Observação 5.1. Se $\alpha(t)$ é uma geodésica de S então

$$\frac{d}{dt} \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 2 \langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0.$$

Donde segue que $\|\alpha'(t)\|$ é constante.

5. Curvas especiais sobre uma superfície

Observação 5.2. Se $\alpha(s)$ é uma geodésica de S e está p.p.c.a. então $\alpha''(s) = \kappa(s) \vec{n}(s)$, de modo que $\alpha''(s) \parallel N(\alpha(s))$.

Assim, $\vec{n}(s) = \pm N(\alpha(s))$ e

$$\pm dN_{\alpha(s)}(\alpha'(s)) = \pm \frac{d}{ds} N(\alpha(s)) = \frac{d}{ds} \vec{n}(s) = -\kappa(s) \vec{t}(s) - \tau(s) \vec{b}(s).$$

Considere a base $\mathcal{B} = \{X_u, X_v, N\}$ de \mathbb{R}^3 . Queremos $(\alpha''(t))_{\mathcal{B}}$. Seja

$$\alpha(t) := X(u(t), v(t)).$$

Assim,

$$\alpha'(t) = u'(t)X_u(u(t), v(t)) + v'(t)X_v(u(t), v(t))$$

e

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= u''X_u + u'(X_{uu}u' + X_{uv}v') + v''X_v + v'(X_{vu}u' + X_{vv}v') \\ &= u''X_u + v''X_v + (u')^2X_{uu} + 2u'v'X_{uv} + (v')^2X_{vv}. \end{aligned}$$

Vamos escrever X_{uu} , X_{uv} e X_{vv} na base \mathcal{B} da seguinte maneira:

$$X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN \quad (5.3)$$

$$X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN \quad (5.4)$$

$$X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN \quad (5.5)$$

Queremos encontrar Γ_{ij}^k , para $i, j, k = 1, 2$. Para isso, note que

$$\langle X_u, X_u \rangle = E \implies \langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{E_u}{2} \quad (5.6)$$

$$\langle X_u, X_u \rangle = E \implies \langle X_{uv}, X_u \rangle = \frac{E_v}{2} \quad (5.7)$$

$$\langle X_v, X_v \rangle = G \implies \langle X_{vv}, X_v \rangle = \frac{G_v}{2} \quad (5.8)$$

$$\langle X_v, X_v \rangle = G \implies \langle X_{vu}, X_v \rangle = \frac{G_u}{2} \quad (5.9)$$

$$\langle X_u, X_v \rangle = F \implies \langle X_{uu}, X_v \rangle + \langle X_u, X_{vu} \rangle = F_u \implies \langle X_{uu}, X_v \rangle = F_u - \frac{E_v}{2} \quad (5.10)$$

$$\langle X_u, X_v \rangle = F \implies \langle X_{uv}, X_v \rangle + \langle X_u, X_{vv} \rangle = F_v \implies \langle X_{vv}, X_u \rangle = F_v - \frac{G_u}{2}. \quad (5.11)$$

De (5.3), (5.6) e (5.10) obtemos o seguinte sistema para as incógnitas Γ_{11}^1 e Γ_{11}^2 :

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{E_u}{2} \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{E_v}{2} \end{cases}.$$

Donde obtemos que

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} \end{aligned}$$

5. Curvas especiais sobre uma superfície

De (5.4), (5.7) e (5.9) obtemos o seguinte sistema para as incógnitas Γ_{12}^1 e Γ_{12}^2 :

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F &= \frac{E_v}{2} \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G &= \frac{G_u}{2} \end{cases}.$$

Donde obtemos que

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}$$

De (5.5), (5.8) e (5.11) obtemos o seguinte sistema para as incógnitas Γ_{22}^1 e Γ_{22}^2 :

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F &= F_v - \frac{G_u}{2} \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G &= \frac{G_v}{2} \end{cases}.$$

Donde obtemos que

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}. \end{aligned}$$

Proposição 5.6 (EDO das geodésicas). Sejam $S = X(U)$ uma superfície parametrizada regular e $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva regular sobre S . Então $\alpha(t)$ é uma geodésica de S se, e somente se,

$$\begin{cases} u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 &= 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 &= 0 \end{cases}. \quad (5.12)$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= u''X_u + v''X_v + (u')^2X_{uu} + 2u'v'X_{uv} + (v')^2X_{vv} \\ &= u''X_u + v''X_v + (u')^2(\Gamma_{11}^1X_u + \Gamma_{11}^2X_v + eN) \\ &\quad + 2u'v'(\Gamma_{12}^1X_u + \Gamma_{12}^2X_v + fN) + (v')^2(\Gamma_{22}^1X_u + \Gamma_{22}^2X_v + gN) \\ &= (u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2)X_u \\ &\quad + (v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2)X_v \\ &\quad + ((u')^2e + 2u'v'f + (v')^2g)N. \end{aligned}$$

Assim, $\alpha(t)$ é uma geodésica se, e somente se, $\alpha''(t) \in T_{\alpha(t)}S$, isto é, $\langle \alpha''(t), X_u \rangle = 0$ e $\langle \alpha''(t), X_v \rangle = 0$. Donde temos que $\alpha''(t)$ é uma geodésica se, e somente se,

$$\begin{cases} u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 &= 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 &= 0 \end{cases}.$$

□

Corolário 5.1. Sejam $S = X(U)$ e $\bar{S} = \bar{X}(U)$ duas superfícies parametrizadas regulares e isométricas (isto é, X e \bar{X} injetoras com $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$ e $G = \bar{G}$ em U) e $\phi := \bar{X} \circ X^{-1}$ isometria então α é uma geodésica de S se, e somente se, $\phi(\alpha)$ é uma geodésica de \bar{S} .

Demonstração. Observe que os símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, 2$, são intrínsecos, isto é, dependem somente dos coeficientes da primeira forma fundamental. \square

Observação 5.3 (Cilindro circular). O cilindro circular é isométrico à faixa do plano dada por $\bar{X}(u, v) = (u, v, 0)$, $0 < u < 2\pi$ e $v \in \mathbb{R}$.

Proposição 5.7 (Existência de geodésicas). Seja $S = X(U)$ uma superfície parametrizada regular. Para todo $p \in S$ e todo $w \in T_p S$ não nula existe uma única geodésica $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$.

Demonstração. Basta aplicar o Teorema de Existência e Unicidade de EDO's com as condições iniciais $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$ para o sistema (5.12). \square

Exemplo 5.7 (Cilindro circular). Seja S o cilindro circular de raio r . Como vimos anteriormente,

$$\begin{aligned} E(u, v) &= r^2 \\ F(u, v) &= 0 \\ G(u, v) &= 1 \end{aligned}$$

Donde temos que $\Gamma_{ij}^k \equiv 0$ para todo $i, j, k = 1, 2$. Portanto, o sistema (5.12) é dado por

$$\begin{cases} u''(t) &= 0 \\ v''(t) &= 0 \end{cases}.$$

Cujas soluções são

$$\begin{cases} u(t) &= at + b \\ v(t) &= ct + d \end{cases}.$$

Assim, as geodésicas do cilindro são dadas por

$$\alpha(t) = X(u(t), v(t)) = (r \cos(at + b), r \sin(at + b), ct + d).$$

- Suponha que $a \neq 0$ e $c \neq 0$. Neste caso $\alpha(t)$ é uma hélice.
- Suponha que $a = 0$ e $c \neq 0$. Neste caso $\alpha(t)$ é uma reta.
- Suponha que $a \neq 0$ e $c = 0$. Neste caso $\alpha(t)$ é uma circunferência.