

# NOTAS DE ATENDIMENTO E EXERCÍCIOS

MARCOS AGNOLETTO FORTE

RESUMO. Estas são notas não oficiais sobre os temas mais importantes discutidos durante os horários de atendimento.

## CONTEÚDO

1. Aula do dia 18/09/2023	1
1.1. Revisão de geometria diferencial I	1
1.2. A faixa de Möbius	5
1.3. Um panorama de geometria diferencial II através do SageMath	10
2. Aula do dia 20/09/2023	10
2.1. Orientabilidade	10
2.2. O gradiente	14
2.3. A segunda forma fundamental	14
2.4. A curvatura normal	15
2.5. Exemplos	16
Referências	20

## 1. AULA DO DIA 18/09/2023

Objetivos da aula:

- Explicar as regras do curso (aproximadamente 10 minutos)
- Fazer uma revisão relâmpago de Geometria Diferencial I (aproximadamente 30 minutos)
- Introdução à faixa de Möbius (aproximadamente 10 minutos)
- Pausa de 10 minutos
- Obter a parametrização da Faixa de Möbius (aproximadamente 20 minutos)
- Calcular os coeficientes da primeira forma fundamental (aproximadamente 20 minutos)
- Um visão panorâmica do curso de Geometria Diferencial II através do SageManifolds (aproximadamente 10 minutos)
- Acabar 10 minutos antes

Tempo de aula (expectativa): 120 minutos.

1.1. **Revisão de geometria diferencial I.** A referência para esta seção é [DC05].

**Definição 1.1.** Uma curva diferenciável parametrizada no  $\mathbb{R}^3$  é uma aplicação diferenciável  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Escrevemos  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , para  $t \in I$ , o conjunto  $\alpha(I)$  é chamado de **traço da curva**  $\alpha$ .

**Exemplo 1.1.**  $\alpha(t) := (\cos(t), \sin(t), t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , é uma curva diferenciável parametrizada no  $\mathbb{R}^3$  ( $\mathcal{C}^\infty$ ) cujo traço está contido em um cilindro.

**Definição 1.2.** Sejam  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada diferenciável e  $t_0 \in I$  tal que  $\alpha'(t_0) \neq 0$ . Neste caso, dizemos que  $\alpha'(t_0)$  é o **vetor tangente a  $\alpha$  no ponto  $\alpha(t_0)$**  e que  $\alpha(t_0)$  é um **ponto regular de  $\alpha$** .

**Definição 1.3.** Seja  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada diferenciável. Dizemos que  $\alpha$  é **regular** se  $\alpha'(t_0)$  for um ponto regular de  $\alpha$  para todo  $t_0 \in I$ .

Note que uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  é regular se  $\alpha'(t_0) \neq 0$  para todo  $t_0 \in I$ .

**Exemplo 1.2.**  $\alpha(t) := (t^2, t^3)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , é uma curva diferenciável ( $\mathcal{C}^\infty$ ) que não é regular.

**Definição 1.4.** Seja  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular. Dizemos que  $\beta$  é uma **reparametrização** de  $\alpha$  se existir um difeomorfismo  $h : J \subset \mathbb{R} \rightarrow I$  tal que  $\beta = \alpha \circ h$ .

**Definição 1.5.** Seja  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular. O **comprimento de arco** de  $\alpha$  é dado por

$$L_\alpha(I) = L(\alpha(I)) := \int_I \|\alpha'(t)\| dt.$$

**Definição 1.6.** Seja  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular. Dizemos que  $\alpha$  está **parametrizada pelo comprimento de arco** (**p.p.c.a.**) se

$$L_\alpha([t_0, t_1]) = t_1 - t_0,$$

para todos  $t_0, t_1 \in I$  tais que  $t_0 < t_1$ .

**Proposição 1.1.** Seja  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular. Então  $\alpha$  está p.p.c.a. se, e somente se,  $\|\alpha'(t_0)\| = 1$  para todo  $t_0 \in I$ .

**Proposição 1.2.** Seja  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular. Então  $\alpha$  pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco.

Seja  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular p.p.c.a.. Denotaremos por  $\vec{t}(s) := \alpha'(s)$  o vetor tangente de  $\alpha$  no ponto  $\alpha(s)$  para todo  $s \in I$ . Como  $\alpha$  está p.p.c.a., para todo  $s \in I$  temos que

$$\begin{aligned} \|\alpha'(s)\| &= 1 \\ \|\alpha'(s)\|^2 &= 1 \\ \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle &= 1 \\ \langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle + \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle &= 0 \\ \langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Consequentemente,  $\alpha''(s) \perp \alpha'(s)$ .

**Definição 1.7.** Seja  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular p.p.c.a.. Definimos a **curvatura** de  $\alpha$  em  $s \in I$  como sendo o número  $\kappa(s) := \|\alpha''(s)\|$ .

Geometricamente,  $\kappa(s)$  mede o quanto uma curva se afasta de uma reta.

**Definição 1.8.** Seja  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular p.p.c.a. tal que  $\kappa(s) \neq 0$  para todo  $s \in I$ . Definimos o **normal (principal)** de  $\alpha$  em  $s \in I$  como sendo o vetor

$$\vec{n}(s) := \frac{1}{\kappa(s)} \alpha''(s).$$

Note que  $\vec{t}(s) \perp \vec{n}(s)$  para todo  $s \in I$ .

**Definição 1.9.** Seja  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular p.p.c.a. tal que  $\kappa(s) \neq 0$  para todo  $s \in I$ . Definimos o **binormal** de  $\alpha$  em  $s \in I$  como sendo o vetor

$$\vec{b}(s) := \vec{t}(s) \wedge \vec{n}(s).$$

Note que  $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$  é uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  centrada em  $\alpha(s)$  para cada  $s \in I$ , ou seja, um referencial móvel sobre  $\alpha$ , o qual chamamos de **triedro de Frenet-Serret**<sup>1</sup> ou **referencial de Frenet-Serret** ou **referencial TNB**.

Para todo  $s \in I$  temos que

$$\begin{aligned}\langle \vec{b}(s), \vec{b}(s) \rangle &= 1 \\ \left\langle \frac{d\vec{b}}{ds}(s), \vec{b}(s) \right\rangle &= 0,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle \vec{b}(s), \vec{t}(s) \rangle &= 0 \\ \left\langle \frac{d\vec{b}}{ds}(s), \vec{t}(s) \right\rangle + \left\langle \vec{b}(s), \frac{d\vec{t}}{ds}(s) \right\rangle &= 0 \\ \left\langle \frac{d\vec{b}}{ds}(s), \vec{t}(s) \right\rangle + \kappa(s) \langle \vec{b}(s), \vec{n}(s) \rangle &= 0 \\ \left\langle \frac{d\vec{b}}{ds}(s), \vec{t}(s) \right\rangle &= 0.\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\frac{d\vec{b}}{ds}(s) \parallel \vec{n}(s),$$

para todo  $s \in I$ .

**Definição 1.10.** *Seja  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular p.p.c.a. tal que  $\kappa(s) \neq 0$  para todo  $s \in I$ . Definimos a **torção de  $\alpha$  em  $s \in I$**  como sendo o numero*

$$\tau(s) := \left\langle \frac{d\vec{b}}{ds}(s), \vec{n}(s) \right\rangle.$$

Geometricamente,  $\tau(s)$  mede o quanto a curva deixa de ser plana. Além disso, note que

$$\frac{d\vec{b}}{ds}(s) = \left\langle \frac{d\vec{b}}{ds}(s), \vec{t}(s) \right\rangle \vec{t}(s) + \left\langle \frac{d\vec{b}}{ds}(s), \vec{b}(s) \right\rangle \vec{b}(s) + \left\langle \frac{d\vec{b}}{ds}(s), \vec{n}(s) \right\rangle \vec{n}(s) = \tau(s) \vec{n}(s).$$

**Proposição 1.3** (Equações de Frenet-Serret). *Seja  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular p.p.c.a. tal que  $\kappa(s) \neq 0$  para todo  $s \in I$ . Então, para todo  $s \in I$ , valem que*

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{t}}{ds}(s) &= 0 + \kappa(s) \vec{n}(s) + 0, \\ \frac{d\vec{n}}{ds}(s) &= -\kappa(s) \vec{t}(s) + 0 - \tau(s) \vec{b}(s), \\ \frac{d\vec{b}}{ds}(s) &= 0 + \tau(s) \vec{n}(s) + 0.\end{aligned}$$

Ou ainda, matricialmente,

$$\begin{pmatrix} \vec{t}' \\ \vec{n}' \\ \vec{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix}.$$

<sup>1</sup>Em homenagem aos matemáticos Jean Frédéric Frenet e Joseph Alfred Serret.

**Teorema 1.1** (Teorema fundamental da teoria local de curvas). *Dadas duas funções  $\kappa, \tau : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $\kappa(s) > 0$  para todo  $s \in I$ , então existe uma curva  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  cuja curvatura é  $\kappa(s)$  e cuja torção é  $\tau(s)$ . Além disso, qualquer outra curva com a mesma propriedade é congruente a  $\alpha$ .*

**Definição 1.11.** *Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma **superfície regular** se, para cada  $p \in S$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  e uma aplicação  $X : U \rightarrow V \cap S$  de um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$  tal que*

- (1)  $X$  é um homeomorfismo diferenciável.
- (2) A diferencial  $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva para todo  $q \in U$ .

**Proposição 1.4** (Mudança de parâmetros). *Sejam  $p \in S$  um ponto de uma superfície regular  $S$ ,  $X_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  e  $X_2 : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  duas parametrizações de  $S$  tais que  $p \in X_1(U) \cap X_2(V) =: W$ . Então*

$$h := X_1^{-1} \circ X_2 : X_2^{-1}(W) \rightarrow X_1^{-1}(W)$$

*é um difeomorfismo, isto é,  $h$  é diferenciável e tem inversa diferenciável.*

Sejam  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma parametrização de uma superfície regular  $S$  e  $q \in U$ . Chamamos o subespaço vetorial de dimensão 2

$$T_{X(q)}S := dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3,$$

de **espaço tangente a  $S$  em  $X(q)$** . Este espaço vetorial coincide com o conjunto dos vetores tangentes  $\alpha'(0)$  de curvas parametrizadas diferenciáveis  $\alpha : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow S$ , com  $\alpha(0) = X(q)$ .

A escolha de uma parametrização  $X$  determina uma base

$$\{dX_q(u), dX_q(v)\} = \left\{ \frac{\partial X}{\partial u}(q), \frac{\partial X}{\partial v}(q) \right\} =: \{X_u(q), X_v(q)\}$$

de  $T_{X(q)}S$  e um vetor normal unitário em cada ponto  $p \in X(U)$  dado por

$$N(p) := \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(q).$$

Nem sempre é possível estender a aplicação diferenciável  $N : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  de maneira diferenciável à superfície  $S$ .

O produto interno canônico do  $\mathbb{R}^3$  induz em cada plano tangente  $T_pS$  de uma superfície regular  $S$  um produto interno, que denotaremos por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ . A esse produto interno, que é uma forma bilinear simétrica, corresponde uma forma quadrática  $I_p : T_pS \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$I_p(w) := \langle w, w \rangle_p = \|w\|_p^2 \geq 0.$$

Tal forma quadrática em  $T_pS$  é chamada de **primeira forma fundamental de  $S$  em  $p \in S$** .

Vamos, agora, expressar a primeira forma fundamental na base  $\{X_u, X_v\}$  associada a parametrização  $X(u, v)$  em  $p$ . Como um vetor  $w \in T_pS$  é o vetor tangente a uma curva parametrizada  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ ,  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ , com  $p = \alpha(0)$ , obtemos

$$\begin{aligned} I_p(w) &= I_p(\alpha'(0)) \\ &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle X_u(u(0), v(0))u'(0) + X_v(u(0), v(0))v'(0), X_u(u(0), v(0))u'(0) + X_v(u(0), v(0))v'(0) \rangle_p \\ &= \langle X_u(q), X_u(q) \rangle_p (u'(0))^2 + 2\langle X_u(q), X_v(q) \rangle_p u'(0)v'(0) + \langle X_v(q), X_v(q) \rangle_p (v'(0))^2 \\ &= E(q) (u'(0))^2 + 2F(q) u'(0)v'(0) + G(q) (v'(0))^2, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{cases} E(q) := \langle X_u(q), X_u(q) \rangle_p, \\ F(q) := \langle X_u(q), X_v(q) \rangle_p, \\ G(q) := \langle X_v(q), X_v(q) \rangle_p \end{cases}$$

são os **coeficientes da primeira forma fundamental na base**  $\{X_u, X_v\}$  de  $T_p S$ . Fazendo  $q$  variar numa vizinhança coordenada correspondente à parametrização  $X$ , obtemos funções  $E, F, G$  que são diferenciáveis nesta vizinhança. Quando não houver ambiguidade, os índices  $p$  e  $q$  serão omitidos.

Assim, podemos representar a primeira forma fundamental como uma matriz simétrica

$$I(w) = w^\top \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} w = (u'(0)v'(0)) \begin{pmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix}.$$

**Definição 1.12.** Uma superfície  $S$  é **orientável** se ela admite uma cobertura por vizinhanças coordenadas  $X_\alpha(U_\alpha)$ , em que  $X_\alpha : U_\alpha \rightarrow S$ , de tal modo que se  $p \in X_{\alpha_1}(U_{\alpha_1}) \cap X_{\alpha_2}(U_{\alpha_2})$ , com  $(u, v) \in U_{\alpha_1}$  e  $(\bar{u}, \bar{v}) \in U_{\alpha_2}$ , então

$$\text{Jac}((\bar{u}, \bar{v}) \mapsto (u, v)) = \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{pmatrix} > 0.$$

A escolha de uma tal família de vizinhanças coordenadas que cobrem  $S$  é chamada de **orientação** de  $S$  e  $S$ , neste caso, diz-se **orientada**. Se uma tal escolha não é possível, diz-se que  $S$  é **não-orientável**. Se  $S$  é orientada, uma parametrização local  $X$  é compatível com a orientação de  $S$  se, unindo  $X$  à família de parametrizações dada pela orientação, obtém-se ainda uma (logo, a mesma) orientação.

**Proposição 1.5.** Uma superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  é orientável se, e somente se, existe um campo diferenciável  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  de vetores normais em  $S$ , isto é,  $N(p) \perp T_p S$  para todo  $p \in S$ .

**1.2. A faixa de Möbius.** A faixa de Möbius<sup>2</sup> é obtida tomando-se um retângulo e identificando-se dois lados opostos depois de uma rotação de  $180^\circ$ , como ilustra a Figura 1.

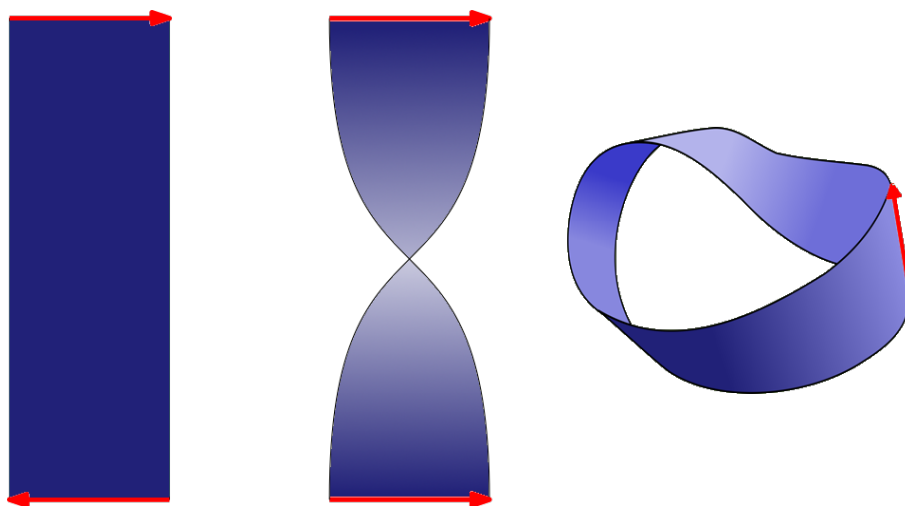


FIGURA 1. Construção de uma faixa de Möbius.

A faixa de Möbius, além de suas inúmeras aplicações artísticas, como em logotipos de centros de estudo de matemática em todo o mundo, também encontra frequentemente uso na engenharia, especialmente na produção de correias que desgastam “ambos” os lados igualmente.

A seguir, apresentaremos uma parametrização da faixa de Möbius e calcularemos os coeficientes de sua primeira forma fundamental.

<sup>2</sup>Em homenagem ao matemático August Ferdinand Möbius.

1.2.1. *Parametrização.* Considere a faixa de Möbius, denotada por  $\mathbf{M}$ , ao redor do eixo  $z$  com raio 2 e largura 1. Sejam  $(u, v) \in ]0, 2\pi[ \times [-1, 1]$  e note que para  $p = (x, y, z) \in \mathbf{M}$  temos que

$$\begin{cases} x(u, v) &= \left(2 + v \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) \cos(u) \\ y(u, v) &= \left(2 + v \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) \sin(u) \\ z(u, v) &= v \sin\left(\frac{u}{2}\right). \end{cases}$$

A Figura 2 auxilia a entender as equações acima. Note que cada ponto do segmento que rotacionamos identificamos com um valor de  $v \in [-1, 1]$  e esta é uma variável da parametrização, que segue a mesma ideia do Toro.

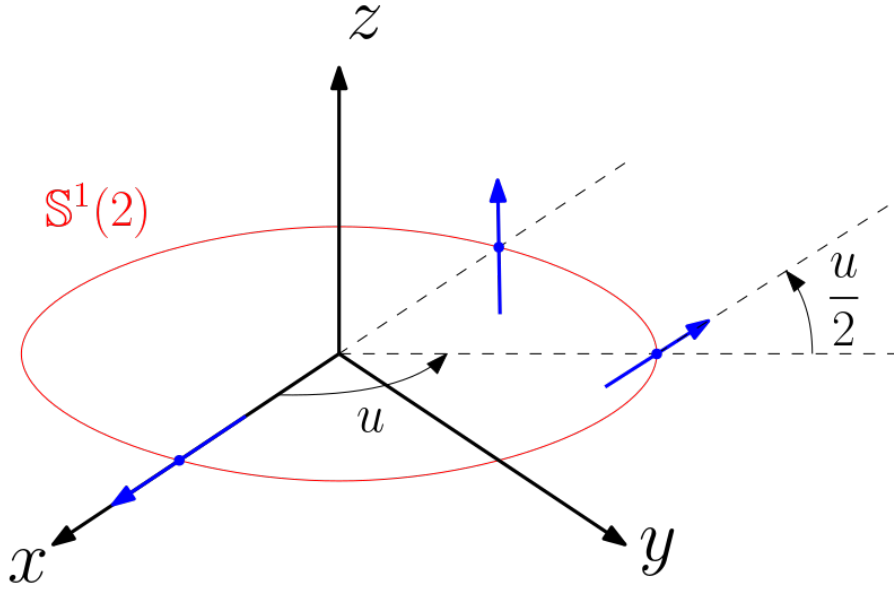


FIGURA 2. Facilitador para a parametrização da faixa de Möbius.

Portanto, um sistema de coordenadas locais para a faixa de Möbius é dado por

$$\begin{aligned} X : ]0, 2\pi[ \times [-1, 1] &\subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{M} \subset \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)). \end{aligned}$$

A vizinhança coordenada correspondente omite os pontos  $u = 0$ , como ilustra a Figura 3.

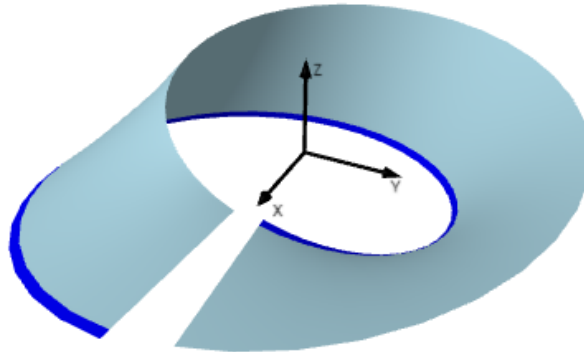


FIGURA 3. Plot de  $X$ .

Logo, tomando-se  $(\bar{u}, \bar{v}) \in ]0, 2\pi[ \times [-1, 1]$  de modo que

$$\begin{cases} x(\bar{u}, \bar{v}) &= \left(2 + \bar{v} \cos\left(\frac{\bar{u}}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \cos\left(\bar{u} + \frac{\pi}{2}\right) \\ y(\bar{u}, \bar{v}) &= \left(2 + \bar{v} \cos\left(\frac{\bar{u}}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \sin\left(\bar{u} + \frac{\pi}{2}\right) \\ z(\bar{u}, \bar{v}) &= \bar{v} \sin\left(\frac{\bar{u}}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

obtemos outro sistema de coordenadas locais para a faixa de Möbius é dado por

$$\begin{aligned} \bar{X} : ]0, 2\pi[ \times [-1, 1] &\subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{M} \subset \mathbb{R}^3 \\ (\bar{u}, \bar{v}) &\mapsto (x(\bar{u}, \bar{v}), y(\bar{u}, \bar{v}), z(\bar{u}, \bar{v})). \end{aligned}$$

A vizinhança coordenada correspondente omite os pontos no intervalo aberto  $u = 0$ , como ilustra a Figura 4.

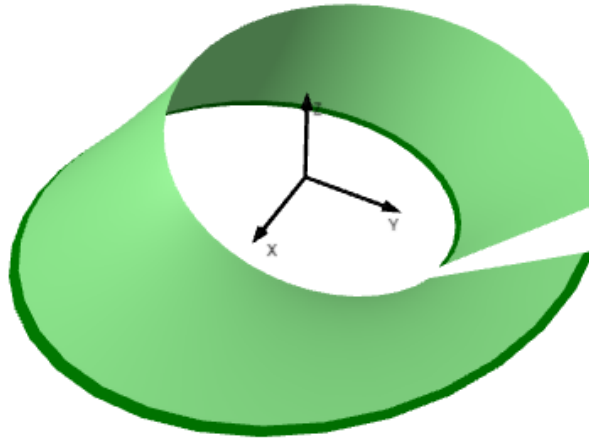


FIGURA 4. Plot de  $\bar{X}$ .

Essas duas vizinhanças coordenadas formam uma cobertura para a faixa de Möbius, como ilustra a Figura 5.

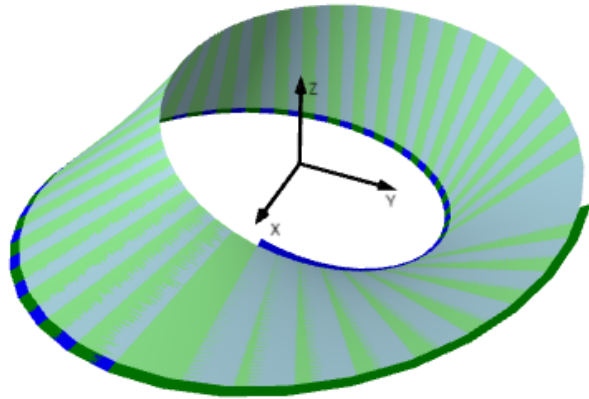


FIGURA 5. Plot de  $X$  e  $\bar{X}$  juntos.

Assim, temos que a faixa de Möbius é uma superfície regular. De fato, a intersecção dessas duas vizinhanças coordenadas é constituída por duas componentes conexas

$$W_1 := \left\{ X(u, v) : 0 < u < \frac{\pi}{2}, -1 \leq v \leq 1 \right\} \text{ e } W_2 := \left\{ X(u, v) : \frac{\pi}{2} < u < 2\pi, -1 \leq v \leq 1 \right\}.$$

A mudança de coordenada é dada por (a Figura 5 ilustra a mudança de orientação de  $v$  em  $W_1$  pela sobreposição ou não das partes mais escuras)

$$\begin{cases} \bar{u} = u + \frac{\pi}{2} \\ \bar{v} = -v \end{cases} \text{ em } W_1 \text{ e } \begin{cases} \bar{u} = u + \frac{\pi}{2} \\ \bar{v} = v \end{cases} \text{ em } W_2.$$

Donde temos que

$$\text{Jac}((\bar{u}, \bar{v}) \mapsto (u, v)) = \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

em  $W_1$ , e

$$\text{Jac}((\bar{u}, \bar{v}) \mapsto (u, v)) = \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

em  $W_2$ .

**1.2.2. Primeira forma fundamental.** Para obtermos a primeira forma fundamental basta calcularmos as expressões de  $E, F, G$  da métrica pelas expressões em coordenadas obtidas anteriormente.

Derivamos  $x(u, v)$  com relação a  $u$

$$\begin{aligned} x_u(u, v) &= \frac{\partial}{\partial u} \left( 2 + v \cos \left( \frac{u}{2} \right) \right) \cos(u) + \left( 2 + v \cos \left( \frac{u}{2} \right) \right) \frac{\partial}{\partial u} (\cos(u)) \\ &= -\frac{v}{2} \sin \left( \frac{u}{2} \right) \cos(u) - \left( 2 + v \cos \left( \frac{u}{2} \right) \right) \sin(u), \end{aligned}$$

e com relação a  $v$

$$\begin{aligned} x_v(u, v) &= \frac{\partial}{\partial v} \left( 2 + v \cos \left( \frac{u}{2} \right) \right) \cos(u) + \left( 2 + v \cos \left( \frac{u}{2} \right) \right) \frac{\partial}{\partial v} (\cos(u)) \\ &= \cos \left( \frac{u}{2} \right) \cos(u). \end{aligned}$$

Derivamos  $y(u, v)$  com relação a  $u$

$$\begin{aligned} y_u(u, v) &= \frac{\partial}{\partial u} \left( 2 + v \cos \left( \frac{u}{2} \right) \right) \sin(u) + \left( 2 + v \cos \left( \frac{u}{2} \right) \right) \frac{\partial}{\partial u} (\sin(u)) \\ &= -\frac{v}{2} \sin \left( \frac{u}{2} \right) \sin(u) + \left( 2 + v \cos \left( \frac{u}{2} \right) \right) \cos(u), \end{aligned}$$

e com relação a  $v$

$$\begin{aligned} y_v(u, v) &= \frac{\partial}{\partial v} \left( 2 + v \cos \left( \frac{u}{2} \right) \right) \sin(u) + \left( 2 + v \cos \left( \frac{u}{2} \right) \right) \frac{\partial}{\partial v} (\sin(u)) \\ &= \cos \left( \frac{u}{2} \right) \sin(u). \end{aligned}$$

Derivamos  $z(u, v)$  com relação a  $u$

$$z_u(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} \left( v \sin \left( \frac{u}{2} \right) \right) = \frac{v}{2} \cos \left( \frac{u}{2} \right),$$

e com relação a  $v$

$$z_v(u, v) = \frac{\partial}{\partial v} \left( v \sin \left( \frac{u}{2} \right) \right) = \sin \left( \frac{u}{2} \right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle \\ &= \langle (x_u, y_u, z_u), (x_u, y_u, z_u) \rangle \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \\
&= \left( -\frac{v}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right) \cos(u) - \left(2 + v \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) \sin(u) \right)^2 \\
&\quad + \left( -\frac{v}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right) \sin(u) + \left(2 + v \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) \cos(u) \right)^2 \\
&\quad + \left( \frac{v}{2} \cos\left(\frac{u}{2}\right) \right)^2 \\
&= \frac{v^2}{4} \sin^2\left(\frac{u}{2}\right) \cos^2(u) + \left(2 + v \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)^2 \sin^2(u) + 2\frac{v}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right) \cos(u) \left(2 + v \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) \sin(u) \\
&\quad + \frac{v^2}{4} \sin^2\left(\frac{u}{2}\right) \sin^2(u) + \left(2 + v \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)^2 \cos^2(u) - 2\frac{v}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right) \sin(u) \left(2 + v \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) \cos(u) \\
&\quad + \frac{v^2}{4} \cos^2\left(\frac{u}{2}\right) \\
&= \frac{v^2}{4} \sin^2\left(\frac{u}{2}\right) + \left(2 + v \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)^2 + \frac{v^2}{4} \cos^2\left(\frac{u}{2}\right) \\
&= \frac{v^2}{4} + 4 + v^2 \cos^2\left(\frac{u}{2}\right) + 4v \cos\left(\frac{u}{2}\right) \\
&= v^2 \left( \frac{1}{4} + \cos^2\left(\frac{u}{2}\right) \right) + 4v \cos\left(\frac{u}{2}\right) + 4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= \langle X_u, X_v \rangle \\
&= \langle (x_u, y_u, z_u), (x_v, y_v, z_v) \rangle \\
&= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\
&= \left( -\frac{v}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right) \cos(u) - \left(2 + v \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) \sin(u) \right) \left( \cos\left(\frac{u}{2}\right) \cos(u) \right) \\
&\quad + \left( -\frac{v}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right) \sin(u) + \left(2 + v \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) \cos(u) \right) \left( \cos\left(\frac{u}{2}\right) \sin(u) \right) \\
&\quad + \left( \frac{v}{2} \cos\left(\frac{u}{2}\right) \right) \left( \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right) \\
&= -\frac{v}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right) \cos\left(\frac{u}{2}\right) \cos^2(u) - \left(2 + v \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) \sin(u) \cos\left(\frac{u}{2}\right) \cos(u) \\
&\quad - \frac{v}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right) \cos\left(\frac{u}{2}\right) \sin^2(u) + \left(2 + v \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) \cos(u) \cos\left(\frac{u}{2}\right) \sin(u) \\
&\quad + \frac{v}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right) \cos\left(\frac{u}{2}\right) \\
&= -\frac{v}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right) \cos\left(\frac{u}{2}\right) + \frac{v}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right) \cos\left(\frac{u}{2}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= \langle X_v, X_v \rangle \\
&= \langle (x_v, y_v, z_v), (x_v, y_v, z_v) \rangle \\
&= x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \\
&= \left( \cos\left(\frac{u}{2}\right) \cos(u) \right)^2 + \left( \cos\left(\frac{u}{2}\right) \sin(u) \right)^2 + \left( \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right)^2 \\
&= \cos^2\left(\frac{u}{2}\right) \cos^2(u) + \cos^2\left(\frac{u}{2}\right) \sin^2(u) + \sin^2\left(\frac{u}{2}\right) \\
&= \cos^2\left(\frac{u}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{u}{2}\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Donde obtemos a primeira forma fundamental

$$I = \begin{pmatrix} v^2 \left( \frac{1}{4} + \cos^2 \left( \frac{u}{2} \right) \right) + 4v \cos \left( \frac{u}{2} \right) + 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 1.3. Um panorama de geometria diferencial II através do SageMath. Próximos passos:

- Orientabilidade.
- Segunda forma fundamental e consequências geométricas.
- Aplicação normal de Gauss.
- Operador forma, curvatura Gaussiana, média e total.
- Derivada covariante.
- Símbolos de Christoffel<sup>3</sup>.
- Geodésicas e curvatura geodésica.
- Equações de compatibilidade.
- Teorema egrégio de Gauss.
- Teorema de Bonnet.
- Superfícies mínimas.
- Teorema de Gauss-Bonnet e aplicações.

Apresentar Notebook do SageManifolds com exemplos de cálculos simples (métricas, curvaturas, símbolos de Christoffel, plotagens,...).

## 2. AULA DO DIA 20/09/2023

Objetivos da aula:

- Orientabilidade (aproximadamente 20 minutos)
- O gradiente (aproximadamente 10 minutos)
- A segunda forma fundamental e algumas consequências geométricas (aproximadamente 30 minutos)
- A curvatura normal (aproximadamente 10 minutos)
- Pausa de 10 minutos
- Exemplos (aproximadamente 30 minutos)
- Acabar 10 minutos antes

Tempo de aula (expectativa): 120 minutos.

### 2.1. Orientabilidade. A seguir apresentaremos alguns exemplos de superfícies orientáveis:

**Exemplo 2.1.** *Superfícies que podem ser cobertas por uma única vizinhança coordenada são trivialmente orientáveis. Por exemplo, superfícies dadas como gráficos de uma função diferenciável.*

**Exemplo 2.2** (Esfera unitária ( $\mathbb{S}^2$ )). *Considere  $X_1(u, v)$  a projeção estereográfica pelo polo norte,  $X_2(u, v)$  a projeção estereográfica pelo polo sul e*

$$W := X_1(\mathbb{R}^2) \cap X_2(\mathbb{R}^2) = \mathbb{S}^2 \setminus \{N := (0, 0, 2), S := (0, 0, 0)\}.$$

*Note que  $W$  é um conjunto conexo e fixe  $p \in W$ . A Figura 6 ilustra a mudança de parâmetros entre as duas parametrizações da esfera.*

<sup>3</sup>Em homenagem ao matemático e físico Elwin Bruno Christoffel.

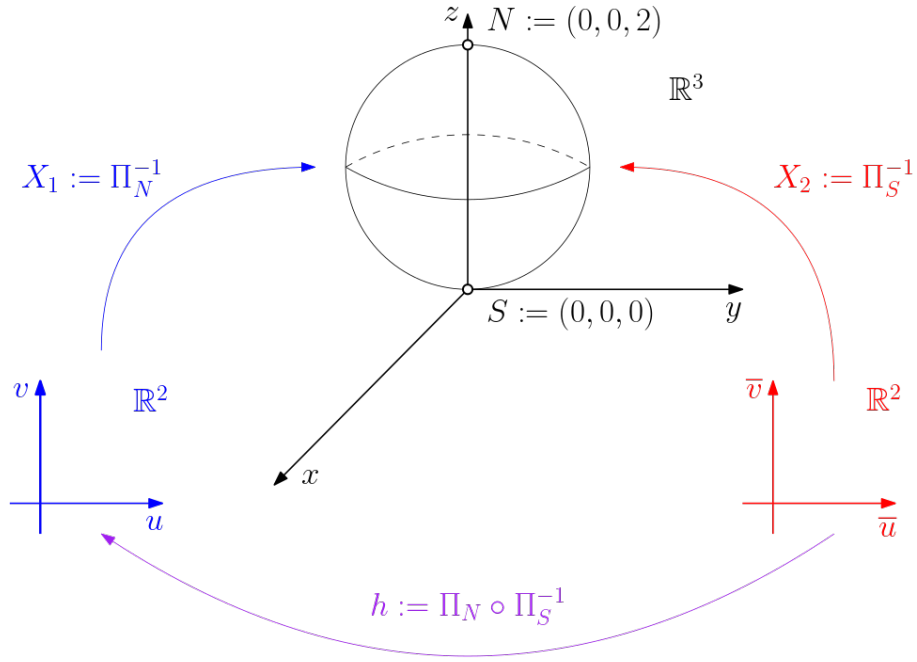


FIGURA 6. O mapa de transição para as parametrizações estereográficas.

Onde

$$\Pi_N^{-1}(u, v) := \left( \frac{4u}{u^2 + v^2 + 4}, \frac{4v}{u^2 + v^2 + 4}, \frac{2(u^2 + v^2)}{u^2 + v^2 + 4} \right),$$

e

$$\Pi_S^{-1}(\bar{u}, \bar{v}) := \left( \frac{4\bar{v}}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + 4}, \frac{4\bar{u}}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + 4}, \frac{8}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + 4} \right).$$

Consequentemente,

$$\Pi_N(x, y, z) = \left( \frac{2x}{2 - z}, \frac{2y}{2 - z} \right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (u, v) &= h(\bar{u}, \bar{v}) = (\Pi_N \circ \Pi_S^{-1})(\bar{u}, \bar{v}) \\ &= \Pi_N \left( \frac{4\bar{v}}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + 4}, \frac{4\bar{u}}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + 4}, \frac{8}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + 4} \right) \\ &= \left( \frac{\frac{8\bar{v}}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + 4}}{2 - \frac{8}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + 4}}, \frac{\frac{8\bar{u}}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + 4}}{2 - \frac{8}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + 4}} \right) \\ &= \left( \frac{8\bar{v}}{2(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)}, \frac{8\bar{u}}{2(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)} \right) \\ &= \left( \frac{4\bar{v}}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}, \frac{4\bar{u}}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} \right). \end{aligned}$$

Donde obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} &= -\frac{8\bar{v}\bar{u}}{(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} &= \frac{4(\bar{u}^2 + \bar{v}^2) - 4\bar{v}2\bar{v}}{(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^2} = \frac{4(\bar{u}^2 - \bar{v}^2)}{(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} &= -\frac{8\bar{u}\bar{v}}{(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \bar{u}} = \frac{4(\bar{u}^2 + \bar{v}^2) - 4\bar{u}2\bar{u}}{(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^2} = \frac{4(\bar{v}^2 - \bar{u}^2)}{(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^2} = -\frac{4(\bar{u}^2 - \bar{v}^2)}{(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^2}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^4} \det \begin{pmatrix} -8\bar{u}\bar{v} & 4(\bar{u}^2 - \bar{v}^2) \\ -4(\bar{u}^2 - \bar{v}^2) & -8\bar{u}\bar{v} \end{pmatrix} \\ &= \frac{64\bar{u}^2\bar{v}^2 + 16(\bar{u}^2 - \bar{v}^2)^2}{(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^4} \\ &> 0 \end{aligned}$$

Como a função de transição  $h(\bar{u}, \bar{v})$  é um difeomorfismo temos que  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$  é diferente de zero em  $W$ . Além disso, como o Jacobiano  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$  é uma função contínua,  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}(p) > 0$  e  $W$  é conexo, segue do Teorema de Bolzano que  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} > 0$  em  $W$ . Portanto,  $S$  é orientável. De modo análogo, se uma superfície pode ser coberta por duas vizinhanças coordenadas cuja intersecção é conexa, então a superfície é orientável.

**Proposição 2.1.** Uma superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  é orientável se, e somente se, existe um campo diferenciável  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  de vetores normais em  $S$ , isto é,  $N(p) \perp T_p S$  para todo  $p \in S$ .

*Demonstração.* ( $\implies$ ) : Como  $S$  é orientável, podemos cobri-la com uma família de vizinhanças coordenadas de tal modo que, na vizinhança de duas quaisquer delas, a mudança de coordenadas tenha Jacobiano positivo.

Nos pontos  $p = X(u, v)$  de cada vizinhança coordenada, definimos:

$$N(p) := N(u, v) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(p).$$

Note que  $N(p)$  está bem definido. De fato, sejam  $X : U \rightarrow S$  e  $\bar{X} : \bar{U} \rightarrow S$  duas parametrizações tais que  $X(U) \cap \bar{X}(\bar{U}) =: W \neq \emptyset$  e  $h : U \rightarrow \bar{U}$  tal que  $h(u, v) = (\bar{u}, \bar{v})$ . Assim,  $X = \bar{X} \circ h$  e, conseqüentemente,

$$X_u = \frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial(\bar{X} \circ h)}{\partial u} = \frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} + \frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{v}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \bar{X}_{\bar{u}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \bar{X}_{\bar{v}}.$$

e

$$X_v = \frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial(\bar{X} \circ h)}{\partial v} = \frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} + \frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{v}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \bar{X}_{\bar{u}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \bar{X}_{\bar{v}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} X_u \wedge X_v &= \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \bar{X}_{\bar{u}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \bar{X}_{\bar{v}} \right) \wedge \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \bar{X}_{\bar{u}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \bar{X}_{\bar{v}} \right) \\ &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \bar{X}_{\bar{v}} \wedge \bar{X}_{\bar{u}} \\ &= \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \right) \bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}} \\ &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{pmatrix} \bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} \bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}.$$

Portanto, para  $p \in W$  arbitrário, temos que os vetores  $N(u, v)$  e  $N(\bar{u}, \bar{v})$  coincidem, pois

$$\begin{aligned} N(u, v) &= \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} \\ &= \frac{\text{Jac}(h) \bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}}{\|\text{Jac}(h) \bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}\|} \\ &= \frac{\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} \bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}}{\left| \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} \right| \|\bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}\|} \\ &= \text{sign} \left( \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} \right) N(\bar{u}, \bar{v}) \\ &= N(\bar{u}, \bar{v}). \end{aligned}$$

Além disso, as coordenadas de  $N(u, v)$  em  $\mathbb{R}^3$  são funções diferenciáveis de  $(u, v)$  e, portanto, a aplicação  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  é diferenciável. Por construção  $N(p) \perp T_p S$  para todo  $p \in S$ .

( $\Leftarrow$ ) : Reciprocamente, seja  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo diferenciável unitário de vetores normais em  $S$ , e considere uma família de vizinhanças coordenadas cobrindo  $S$ . Para os pontos  $p \in X(u, v)$  de cada vizinhança coordenada  $X(U)$ ,  $U \subset \mathbb{R}^2$ , é possível, pela continuidade de  $N$  e, se necessário, intercambiar  $u$  e  $v$ , fazer com que

$$N(u, v) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}.$$

De fato, como  $\|N(p)\| = 1$ ,  $\left\| \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} \right\| = 1$ ,  $N(p) \perp T_p S$  e  $\frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} \perp T_p S$ , temos que

$$f(p) := \left\langle N(p), \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} \right\rangle = \pm 1.$$

Como  $f(p)$  é uma função contínua em  $X(U)$  e  $X(U)$  é um conjunto conexo, então o sinal de  $f$  é constante em  $X(U)$ . Se  $f(p) = -1$ , podemos intercambiar  $u, v$  na parametrização, e então  $f(p) = 1$ .

Procedendo desse modo com todas as vizinhanças coordenadas, teremos que na intersecção de duas quaisquer delas, digamos  $X(u, v)$  e  $\bar{X}(\bar{u}, \bar{v})$  o Jacobiano  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$  é positivo.

De fato, suponha por absurdo que  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} < 0$ . Logo,

$$\begin{aligned} N(u, v) &= \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} \\ &= \frac{\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}}{\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}} \right|} \\ &= \frac{\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}}{\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right| \|\bar{X}_{\bar{u}} \wedge \bar{X}_{\bar{v}}\|} \\ &= \text{sign} \left( \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \right) N(\bar{u}, \bar{v}) \\ &= -N(\bar{u}, \bar{v}). \end{aligned}$$

Absurdo! Portanto, a dada família de vizinhanças coordenadas, com eventuais intercâmbios de  $u, v$ , torna  $S$  orientável.  $\square$

**Exemplo 2.3** (Esfera unitária ( $\mathbb{S}^2$ )). Note que a aplicação  $N(x, y, z) := (x, y, z)$  quando restrita aos pontos de  $\mathbb{S}^2$  é uma campo normal diferenciável (prova usando coordenadas). Além disso, sua diferencial em  $p \in \mathbb{S}^2$  aplicada ao vetor  $v \in T_p\mathbb{S}^2$  é dada por

$$dN_p(v) = v.$$

## 2.2. O gradiente.

**Definição 2.1.** Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular e  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Definimos o **gradiente de  $f$  em  $p \in S$**  como o campo de vetores  $\nabla f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$\langle \nabla f(p), v \rangle = df_p(v),$$

para todo  $v \in T_pS$ .

**Lema 2.1.** Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável (pelo menos  $\mathcal{C}^2$ ) e  $a \in \mathbb{R}$  um valor regular de  $f$ . Então  $S := f^{-1}(a)$  é uma superfície regular orientável.

*Rascunho da Demonstração.* Use o Teorema da função inversa para mostrar que  $S$  é uma superfície regular. Para mostrar que  $S$  é orientável mostre que  $N(p) := \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$  é um campo normal unitário em  $S$  e, pela 2.1 temos que  $S$  é orientável.  $\square$

**FIM DO CAPÍTULO 2 DO LIVRO [DC05].**

**2.3. A segunda forma fundamental.** Sejam  $S = X(U)$ ,  $U \subset \mathbb{R}^2$ , uma superfície parametrizada regular,  $p = X(u, v)$ ,  $v \in T_pS$  e  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  uma curva em  $S$  tal que  $\alpha(t_0) = p$  e  $\alpha'(t_0) = v$ .

Primeiramente, note que

$$\begin{aligned} v = \alpha'(t) &= \frac{d\alpha}{dt} \\ &= \frac{dX(u(t), v(t))}{dt} \\ &= \frac{\partial X}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial X}{\partial v} \frac{dv}{dt} \\ &= u'(t)X_u(u(t), v(t)) + v'(t)X_v(u(t), v(t)), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= \frac{d^2\alpha}{dt^2} \\ &= \frac{d}{dt} (u'(t)X_u(u(t), v(t)) + v'(t)X_v(u(t), v(t))) \\ &= u''(t)X_u(u(t), v(t)) + u'(t) \frac{dX_u(u(t), v(t))}{dt} + v''(t)X_v(u(t), v(t)) + v'(t) \frac{dX_v(u(t), v(t))}{dt} \\ &= u''(t)X_u(u(t), v(t)) + u'(t) \left( \frac{dX_u}{du} \frac{du}{dt} + \frac{dX_u}{dv} \frac{dv}{dt} \right) + v''(t)X_v(u(t), v(t)) + v'(t) \left( \frac{dX_v}{du} \frac{du}{dt} + \frac{dX_v}{dv} \frac{dv}{dt} \right) \\ &= u''(t)X_u(u(t), v(t)) + (u'(t))^2 X_{uu}(u(t), v(t)) + u'(t)v'(t)X_{uv}(u(t), v(t)) \\ &\quad + v''(t)X_v(u(t), v(t)) + v'(t)u'(t)X_{vu}(u(t), v(t)) + (v'(t))^2 X_{vv}(u(t), v(t)) \\ &= u''(t)X_u(u(t), v(t)) + v''(t)X_v(u(t), v(t)) \\ &\quad + (u'(t))^2 X_{uu}(u(t), v(t)) + 2u'(t)v'(t)X_{uv}(u(t), v(t)) + (v'(t))^2 X_{vv}(u(t), v(t)). \end{aligned}$$

No ponto  $p = \alpha(t_0)$  temos que  $\{X_u(u_0, v_0), X_v(u_0, v_0), N(u_0, v_0)\}$  é uma base do  $\mathbb{R}^3$ , onde  $(u_0, v_0) = (u(t_0), v(t_0))$ . Calculemos a componente de  $\alpha''(t_0)$  na direção  $N(u_0, v_0)$ .

**Observação 2.1.** As componentes de  $\alpha''(t_0)$  nas direções  $X_u(u_0, v_0)$  e  $X_v(u_0, v_0)$  serão calculadas posteriormente e levarão aos símbolos de Christoffel.

$$\begin{aligned}
\langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0) \rangle &= u''(t_0) \langle X_u, N \rangle + v''(t_0) \langle X_v, N \rangle \\
&\quad + (u'(t_0))^2 \langle X_{uu}, N \rangle + 2u'(t_0)v'(t_0) \langle X_{uv}, N \rangle + (v'(t_0))^2 \langle X_{vv}, N \rangle \\
&= (u'(t_0))^2 \langle X_{uu}, N \rangle + 2u'(t_0)v'(t_0) \langle X_{uv}, N \rangle + (v'(t_0))^2 \langle X_{vv}, N \rangle \\
&= \langle \vec{v}, X_u \rangle^2 \langle X_{uu}, N \rangle + 2\langle \vec{v}, X_u \rangle \langle \vec{v}, X_v \rangle \langle X_{uv}, N \rangle + \langle \vec{v}, X_v \rangle^2 \langle X_{vv}, N \rangle.
\end{aligned}$$

**Observação 2.2** (Exercício). O número  $\langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0) \rangle$  não depende da parametrização da curva  $\alpha(t)$ .

**Definição 2.2.** Seja  $S = X(U)$ ,  $U \subset \mathbb{R}^3$ , uma superfície parametrizada regular e  $p \in S$ . Definimos a **segunda forma fundamental de  $S$  em  $p$**  como sendo a forma quadrática  $\Pi_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\begin{aligned}
\Pi_p(\vec{v}) &:= a^2 \langle X_{uu}, N \rangle + 2ab \langle X_{uv}, N \rangle + b^2 \langle X_{vv}, N \rangle \\
&= a^2 e(u, v) + 2ab f(u, v) + b^2 g(u, v).
\end{aligned}$$

onde  $\vec{v} = aX_u + bX_v$  e

$$\begin{cases} e(u, v) &:= \langle X_{uu}(u, v), N(u, v) \rangle \\ f(u, v) &:= \langle X_{uv}(u, v), N(u, v) \rangle \\ g(u, v) &:= \langle X_{vv}(u, v), N(u, v) \rangle \end{cases}.$$

Chamamos as funções  $e, f, g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de **coeficientes da segunda forma fundamental de  $S$** .

**2.3.1. Consequências geométricas.** Sejam  $S = X(U)$ ,  $U \subset \mathbb{R}^2$ , uma superfície parametrizada regular,  $p = X(u, v)$ ,  $\vec{v} \in T_p S$  e  $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$  uma curva p.p.c.a. em  $S$  tal que  $\alpha(s_0) = p$  e  $\alpha'(s_0) = \vec{v}$ .

Considere  $\left\{ \vec{t}, \vec{n}, \vec{b} \right\}$  o triedro de Frenet-Serret de  $\alpha$ . Neste caso,

$$\langle \alpha''(s), N(\alpha(s)) \rangle = \langle \kappa(s) \vec{n}(s), N(\alpha(s)) \rangle = \kappa(s) \langle \vec{n}(s), N(\alpha(s)) \rangle = \kappa(s) \cos(\theta(s)),$$

onde  $\theta(s) := \angle(\vec{n}(s), N(\alpha(s)))$ .

Suponha que o traço de  $\alpha$  seja uma seção normal de  $S$  em  $p$ , isto é,  $\alpha = \Pi \cap S$ , em que  $\Pi$  é o plano nas direções  $\alpha'(s)$  e  $N(\alpha(s))$  em  $p$ .

Como  $\alpha$  é uma curva plana então  $\Pi$  é o plano osculador que passa por  $p$  e cujos vetores vetores diretores são  $\alpha'(s)$  e  $\vec{n}(s)$ . Mas como  $\alpha'(s) \perp N(\alpha(s))$  e  $\alpha'(s) \perp \vec{n}(s)$  temos que  $\vec{n}(s) = \pm N(\alpha(s))$  e daí

$$\langle \alpha''(s), N(\alpha(s)) \rangle = \pm \kappa(s).$$

## 2.4. A curvatura normal.

**Definição 2.3.** Sejam  $S = X(U)$ ,  $U \subset \mathbb{R}^2$ , uma superfície parametrizada regular,  $p \in S$  e  $\vec{v} \in T_p S$ . Definimos a **curvatura normal de  $S$  em  $p$  na direção  $\vec{v}$**  por

$$\kappa_{n,p}(\vec{v}) := \frac{\Pi_p(\vec{v})}{I_p(\vec{v})}.$$

Note que a curvatura normal de uma superfície  $S$  em um ponto  $p$  depende somente da direção de  $\vec{v}$ . De fato, para  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}
\kappa_{n,p}(\lambda \vec{v}) &= \frac{\Pi_p(\lambda \vec{v})}{I_p(\lambda \vec{v})} \\
&= \frac{(\lambda a)^2 e + 2(\lambda a)(\lambda b) f + (\lambda b)^2 g}{(\lambda a)^2 E + 2(\lambda a)(\lambda b) F + (\lambda b)^2 G} \\
&= \frac{\Pi_p(\vec{v})}{I_p(\vec{v})}
\end{aligned}$$

$$= \kappa_{n,p}(\vec{v}).$$

**2.5. Exemplos.** Agora faremos alguns exemplos de como calcular a segunda forma fundamental e a curvatura normal.

**Exemplo 2.4** (Esfera). *Valos calcular a primeira e a segunda formas fundamentais de uma esfera em um ponto da vizinhança coordenada pela parametrização*

$$X(u, v) = (a \cos(u) \sin(v), a \sin(u) \sin(v), a \cos(v)),$$

com  $a > 0$ . Primeiro observe que

$$\begin{aligned} X_u(u, v) &= (-a \sin(u) \sin(v), a \cos(u) \sin(v), 0), \\ X_v(u, v) &= (a \cos(u) \cos(v), a \sin(u) \cos(v), -a \sin(v)), \\ X_{uu}(u, v) &= (-a \cos(u) \sin(v), -a \sin(u) \sin(v), 0), \\ X_{uv}(u, v) &= (-a \sin(u) \cos(v), a \cos(u) \cos(v), 0), \\ X_{vv}(u, v) &= (-a \cos(u) \sin(v), -a \sin(u) \sin(v), -a \cos(v)). \end{aligned}$$

Agora calculemos o vetor normal em  $p$ :

$$\begin{aligned} N(p) &= \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -a \sin(u) \sin(v) & a \cos(u) \sin(v) & 0 \\ a \cos(u) \cos(v) & a \sin(u) \cos(v) & -a \sin(v) \end{pmatrix}}{\|X_u \wedge X_v\|} \\ &= \frac{(-a \sin(v) a \cos(u) \sin(v)) \hat{i} + (-a \sin(v) a \sin(u) \sin(v)) \hat{j} + (-a \sin(u) \cos(v) a \sin(u) \sin(v) - a \cos(u) \sin(v) a \cos(u) \cos(v)) \hat{k}}{\|X_u \wedge X_v\|} \\ &= \frac{(-a^2 \sin^2(v) \cos(u)) \hat{i} + (-a^2 \sin^2(v) \sin(u)) \hat{j} + (-a^2 \sin^2(u) \cos(v) \sin(v) - a^2 \cos^2(u) \sin(v) \cos(v)) \hat{k}}{\|X_u \wedge X_v\|} \\ &= \frac{(-a^2 \sin^2(v) \cos(u)) \hat{i} + (-a^2 \sin^2(v) \sin(u)) \hat{j} + (-a^2 \cos(v) \sin(v) (\sin^2(v) + \cos^2(v))) \hat{k}}{\|X_u \wedge X_v\|} \\ &= \frac{(-a^2 \sin^2(v) \cos(u)) \hat{i} + (-a^2 \sin^2(v) \sin(u)) \hat{j} + (-a^2 \cos(v) \sin(v)) \hat{k}}{\|X_u \wedge X_v\|} \\ &= \frac{(-a^2 \sin^2(v) \cos(u)) \hat{i} + (-a^2 \sin^2(v) \sin(u)) \hat{j} + (-a^2 \cos(v) \sin(v)) \hat{k}}{\sqrt{(-a^2 \sin^2(v) \cos(u))^2 + (-a^2 \sin^2(v) \sin(u))^2 + (-a^2 \cos(v) \sin(v))^2}} \\ &= \frac{(-a^2 \sin^2(v) \cos(u)) \hat{i} + (-a^2 \sin^2(v) \sin(u)) \hat{j} + (-a^2 \cos(v) \sin(v)) \hat{k}}{\sqrt{a^4 \sin^4(v) \cos^2(u) + a^4 \sin^4(v) \sin^2(u) + a^4 \cos^2(v) \sin^2(v)}} \\ &= \frac{(-a^2 \sin^2(v) \cos(u)) \hat{i} + (-a^2 \sin^2(v) \sin(u)) \hat{j} + (-a^2 \cos(v) \sin(v)) \hat{k}}{\sqrt{a^4 \sin^4(v) + a^4 \cos^2(v) \sin^2(v)}} \\ &= \frac{(-a^2 \sin^2(v) \cos(u)) \hat{i} + (-a^2 \sin^2(v) \sin(u)) \hat{j} + (-a^2 \cos(v) \sin(v)) \hat{k}}{\sqrt{a^4 \sin^2(v)}} \\ &= \frac{(-a^2 \sqrt{\sin^4(v) \cos(u)} \hat{i} + (-a^2 \sqrt{\sin^4(v) \sin(u)} \hat{j} + (-a^2 \cos(v) \sqrt{\sin^2(v)}) \hat{k}}{a^2 \sqrt{\sin^2(v)}} \\ &= (-|\sin(v)| \cos(u), -|\sin(v)| \sin(u), \cos(v)). \end{aligned}$$

Finalmente podemos calcular os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais:

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \langle X_u, X_u \rangle = a^2 \sin^2(v) \\ F(u, v) &= \langle X_u, X_v \rangle = 0 \\ G(u, v) &= \langle X_v, X_v \rangle = a^2 \\ e(u, v) &= \langle X_{uu}, N \rangle = a \sin^2(v) \\ f(u, v) &= \langle X_{uv}, N \rangle = 0 \\ g(u, v) &= \langle X_{vv}, N \rangle = a. \end{aligned}$$



Obteremos a primeira e segunda formas fundamentais para  $\vec{v}$ , um vetor tangente a esfera no ponto  $p$ , dado na base associada a  $X(u, v)$  por

$$\vec{v} = v_1 X_u + v_2 X_v.$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_p(\vec{v}) &= v_1^2(a^2 \sin^2(v)) + v_2^2 a^2 \\ II_p(\vec{v}) &= v_1^2(a \sin^2(v)) + v_2^2 a. \end{aligned}$$

Por fim, calculamos a curvatura normal:

$$\kappa_{n,p}(\vec{v}) = \frac{II_p(\vec{v})}{I_p(\vec{v})} = \frac{v_1^2(a \sin^2(v)) + v_2^2 a}{v_1^2(a^2 \sin^2(v)) + v_2^2 a^2} = \frac{1}{a}.$$

$\kappa_{n,p}(\vec{v})$  é a curvatura do círculo máximo determinado por  $p, N, \vec{v}$ .

**Exemplo 2.5** (Plano). Vamos calcular a primeira e segunda formas fundamentais do plano  $S = X(U)$  cuja equação é  $ax + by + cz + d = 0$ , com  $c \neq 0$ , em um ponto da vizinhança coordenada pela parametrização

$$X(u, v) = \left( u, v, \frac{-d - au - bv}{c} \right).$$

Primeiro observe que

$$\begin{aligned} X_u(u, v) &= \left( 1, 0, -\frac{a}{c} \right), \\ X_v(u, v) &= \left( 0, 1, -\frac{b}{c} \right), \\ X_{uu}(u, v) &= (0, 0, 0), \\ X_{uv}(u, v) &= (0, 0, 0), \\ X_{vv}(u, v) &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Agora calculamos o vetor normal em  $p$ :

$$\begin{aligned} N(p) &= \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -\frac{a}{c} \\ 0 & 1 & -\frac{b}{c} \end{pmatrix}}{\|X_u \wedge X_v\|} \\ &= \frac{\left(\frac{a}{c}\right)\hat{i} + \left(\frac{b}{c}\right)\hat{j} + (1)\hat{k}}{\|X_u \wedge X_v\|} \\ &= \frac{\left(\frac{a}{c}\right)\hat{i} + \left(\frac{b}{c}\right)\hat{j} + (1)\hat{k}}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + 1}} \left( \frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1 \right). \end{aligned}$$

Finalmente podemos calcular os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais:

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \langle X_u, X_u \rangle = 1 + \frac{a^2}{c^2} \\ F(u, v) &= \langle X_u, X_v \rangle = \frac{ab}{c^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(u, v) &= \langle X_v, X_v \rangle = 1 + \frac{b^2}{c^2} \\
e(u, v) &= \langle X_{uu}, N \rangle = 0 \\
f(u, v) &= \langle X_{uv}, N \rangle = 0 \\
g(u, v) &= \langle X_{vv}, N \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Obteremos a primeira e segunda formas fundamentais para  $\vec{v}$ , um vetor tangente ao plano no ponto  $p$ , dado na base associada a  $X(u, v)$  por

$$\vec{v} = v_1 X_u + v_2 X_v.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
I_p(\vec{v}) &= v_1^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) + 2v_1 v_2 \left(\frac{ab}{c^2}\right) v_2^2 \left(1 + \frac{b^2}{c^2}\right) \\
II_p(\vec{v}) &= 0.
\end{aligned}$$

Por fim, calculamos a curvatura normal:

$$\kappa_{n,p}(\vec{v}) = \frac{II_p(\vec{v})}{I_p(\vec{v})} = \frac{0}{v_1^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) + 2v_1 v_2 \left(\frac{ab}{c^2}\right) v_2^2 \left(1 + \frac{b^2}{c^2}\right)} = 0.$$

A curvatura de qualquer seção normal do plano é igual a 0, pois são retas.

**Exemplo 2.6** (Cilindro circular). Vamos calcular a primeira e segunda formas fundamentais de um cilindro circular em um ponto da vizinhança coordenada pela parametrização

$$X(u, v) = (r \cos(u), r \sin(u), v),$$

com  $r > 0$ . Vamos calcular a primeira e a segunda formas fundamentais de uma esfera em um ponto da vizinhança coordenada pela parametrização

$$X(u, v) = (a \cos(u) \sin(v), a \sin(u) \sin(v), a \cos(v)),$$

com  $a > 0$ . Primeiro observe que

$$\begin{aligned}
X_u(u, v) &= (-r \sin(u), r \cos(u), 0), \\
X_v(u, v) &= (0, 0, 1), \\
X_{uu}(u, v) &= (-r \cos(u), -r \sin(u), 0), \\
X_{uv}(u, v) &= (0, 0, 0), \\
X_{vv}(u, v) &= (0, 0, 0).
\end{aligned}$$

Agora calculemos o vetor normal em  $p$ :

$$\begin{aligned}
N(p) &= \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -r \sin(u) & r \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{\|X_u \wedge X_v\|} \\
&= \frac{(r \cos(u)) \hat{i} + (r \sin(u)) \hat{j} + (0) \hat{k}}{\|X_u \wedge X_v\|} \\
&= \frac{(r \cos(u)) \hat{i} + (r \sin(u)) \hat{j} + (0) \hat{k}}{\sqrt{(r \cos(u))^2 + (r \sin(u))^2 + 0}} \\
&= \frac{(r \cos(u)) \hat{i} + (r \sin(u)) \hat{j} + (0) \hat{k}}{r}
\end{aligned}$$

$$= (\cos(u), \sin(u), 0).$$

Finalmente podemos calcular os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais:

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \langle X_u, X_u \rangle = r^2 \\ F(u, v) &= \langle X_u, X_v \rangle = 0 \\ G(u, v) &= \langle X_v, X_v \rangle = 1 \\ e(u, v) &= \langle X_{uu}, N \rangle = -r \\ f(u, v) &= \langle X_{uv}, N \rangle = 0 \\ g(u, v) &= \langle X_{vv}, N \rangle = 0. \end{aligned}$$

Obteremos a primeira e segunda formas fundamentais para  $\vec{v}$ , um vetor tangente a esfera no ponto  $p$ , dado na base associada a  $X(u, v)$  por

$$\vec{v} = v_1 X_u + v_2 X_v.$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_p(\vec{v}) &= v_1^2(r^2) + v_2^2 \\ \Pi_p(\vec{v}) &= v_1^2(-r). \end{aligned}$$

Por fim, calculamos a curvatura normal:

$$\kappa_{n,p}(\vec{v}) = \frac{\Pi_p(\vec{v})}{I_p(\vec{v})} = \frac{-v_1^2 r}{v_1^2(r^2) + v_2^2} \leq 0.$$

O máximo de  $\kappa_{n,p}(\vec{v})$  ocorre para  $v_1 = 0$ , isto é,  $\vec{v} = v_2 X_v$  e neste caso  $\kappa_{n,p}(\vec{v}) = 0$ .

O mínimo de  $\kappa_{n,p}(\vec{v})$  ocorre para  $v_2 = 0$ , isto é,  $\vec{v} = v_1 X_u$  e neste caso  $\kappa_{n,p}(\vec{v}) = -\frac{1}{r}$ .

**Exercício 2.1** (Superfícies tubulares). Seja  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada regular com curvatura diferente de zero em todos os pontos e parametrizada pelo comprimento de arco. Seja

$$X(s, v) = \alpha(s) + r(\vec{n}(s) \cos(v) + \vec{b}(s) \sin(v)),$$

com  $0 < r < \frac{1}{\kappa(s) \cos(v)}$ ,  $s \in I$  e  $v \in ]0, 2\pi[$ , uma superfície regular parametrizada (o **tubo de raio  $r$  em torno de  $\alpha$** ), onde  $\vec{n}$  é o vetor normal e  $\vec{b}$  é o vetor binormal do triedro de Frenet-Serret de  $\alpha$ , e seja  $p$  um ponto na vizinhança coordenada correspondente a esta parametrização. Calcule as curvaturas normais em  $p$  nas direções  $X_s$  e  $X_v$ , isto é,  $\kappa_{n,p}(X_s)$  e  $\kappa_{n,p}(X_v)$ .

## REFERÊNCIAS

- [DC05] M. P. Do Carmo, *Geometria diferencial de curvas e superfícies*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2005. [↑1](#), [14](#)