Homologia em superfícies

Marcos Agnoletto Forte, Profa. Dra. Mariana Rodrigues da Silveira
Centro de Engenharia, Modelagem e Ciências Sociais Aplicadas da UFABC
Av. dos Estados, 5001, Santo André, SP
marcos.forte@aluno.ufabc.edu.br,mariana.silveira@ufabc.edu.br

INTRODUÇÃO

Este projeto faz uma introdução à topologia algébrica com abordagem introdutória e intuitiva, utilizando o apelo geométrico para demonstrar importantes resultados, como o Teorema da curva de Jordan, o Teorema da classificação de Superfícies e o Teorema das quatro cores.

DEFINIÇÕES

Definições. *Uma n-célula σ é o conjunto cujo interior é homeomorfo a um disco n-dimensional. Um k-complexo K é a união de uma quantidade finita de k-células. A fronteira de uma k-célula σ, denotada por $\partial(\sigma)$, é a $(k-1)-cadeia$ com todas as (k-1)-células de σ, com orientação herdada de σ;*

Definição. *A característica de Euler de um complexo K de dimensão n é definida por $\chi(K) = \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^k \#k\right)$, onde $\#k$ é o número de k-células em um complexo K.*

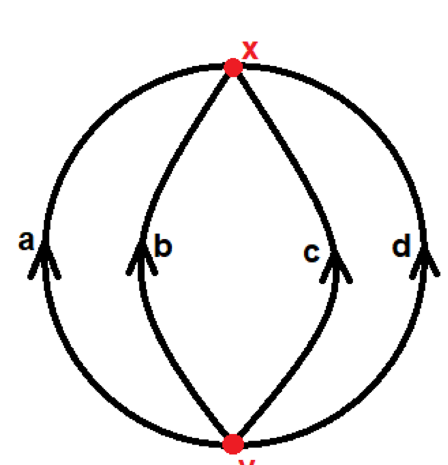
Definição. *Um k-simplexo simplicial em K é uma k-célula triangular orientada $\sigma_k = < v_1, \ldots, v_k >$. Seja C_k o grupo abeliano gerado pelos k-simplexos e $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$, dada por $\partial_k(< v_1, \ldots, v_k >) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j < v_1, \ldots, \overline{v_j}, \ldots, v_k >$.*

Definição. *Seja K um complexo. O k-ésimo grupo de homologia de K é definido por $H_k(K) = ker(\partial_k(K)) \big/ Im(\partial_{k+1}(K))$.*

Definição. *O número de Betti de K é definido por $\beta_k = rk(H_k(K))$.*

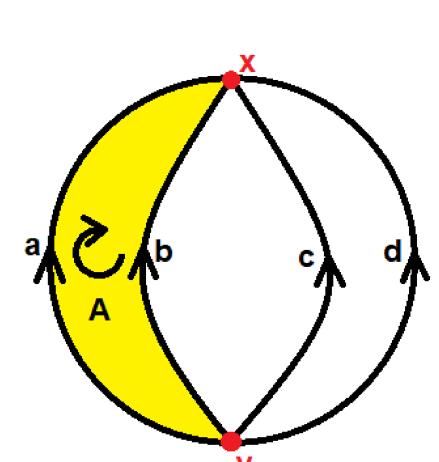
EXEMPLOS

Exemplo. *A característica de Euler, os grupos de homologia e os números de Betti do complexo K_1 abaixo:*



- $\chi(K_1) = -2$;
- $H_0(K_1) = [x]$;
- $H_1(K_1) = [a-b, b-c, c-d]$;
- $\beta_0(K_1) = 1$;
- $\beta_1(K_1) = 3$;

Exemplo. *A característica de Euler, os grupos de homologia e os números de Betti do complexo K_2 abaixo:*



- $\chi(K_2) = -1$;
- $H_0(K_2) = [x]$;
- $H_1(K_2) = [b-c, c-d]$;
- $\beta_0(K_2) = 1$;
- $\beta_1(K_2) = 2$;

Exemplo. *A característica de Euler, os grupos de homologia e os números de Betti de $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{T}^2$ e $\mathbb{P}^2$:*

Superfície	$\chi(S)$	$H_i, i \geq 3$	H_2	H_1	H_0	$\beta_i, i \geq 3$	β_2	β_1	β_0
$\mathbb{S}^2$	2	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	1	0	1
$\mathbb{T}^2$	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	1	2	1
$\mathbb{P}^2$	1	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	1

RESULTADOS

Teorema. ***(Teorema da curva de Jordan)*** *Seja $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}^2$ uma curva de Jordan (qualquer caminho fechado). Então, $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{J}$ não é conexo, mas consiste de duas componentes conexas disjuntas, uma das quais é limitada (chamada de interior) e a outra não é limitada (chamada de exterior). A curva de Jordan $\mathcal{J}$ forma uma fronteira para ambos os lados.*

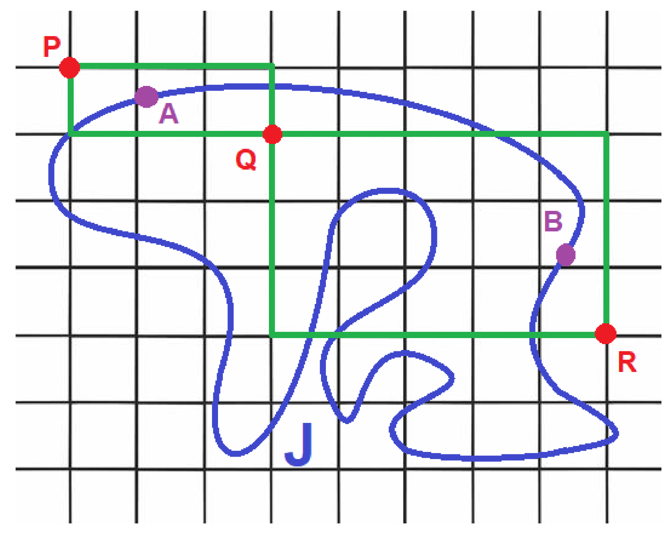


Figura 3: *Curva de Jordan (em azul)*

Teorema. ***(Teorema da classificação de superfícies)*** *Toda superfície compacta e conexa é homeomorfa ou a uma esfera, ou a soma conexa de toros ou a soma conexa de planos projetivos.*

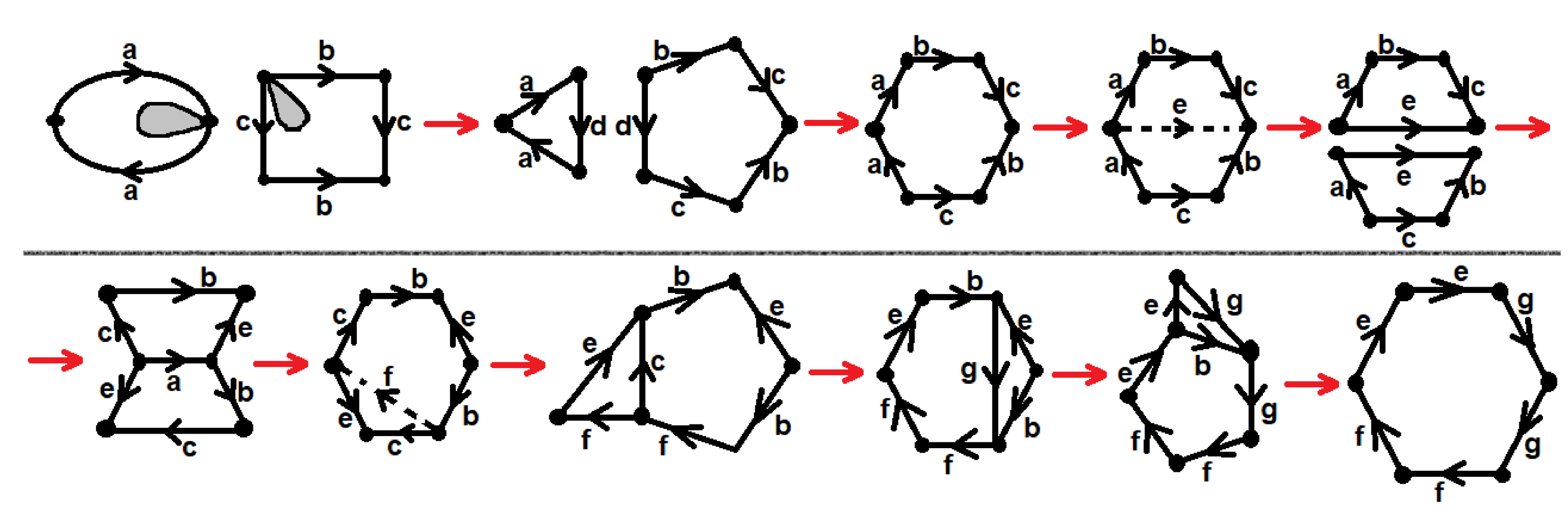


Figura 4: $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$

Teorema. ***(Teorema das cores)*** *Sejam S uma superfície compacta e conexa, e $N(S)$ o número mínimo de cores necessárias para colorir todos os mapas em S. Então, $N(\mathbb{T}^2) = 7$, $N(\mathbb{P}^2) = 6$ e $N(\mathbb{S}^2) = 4$.*

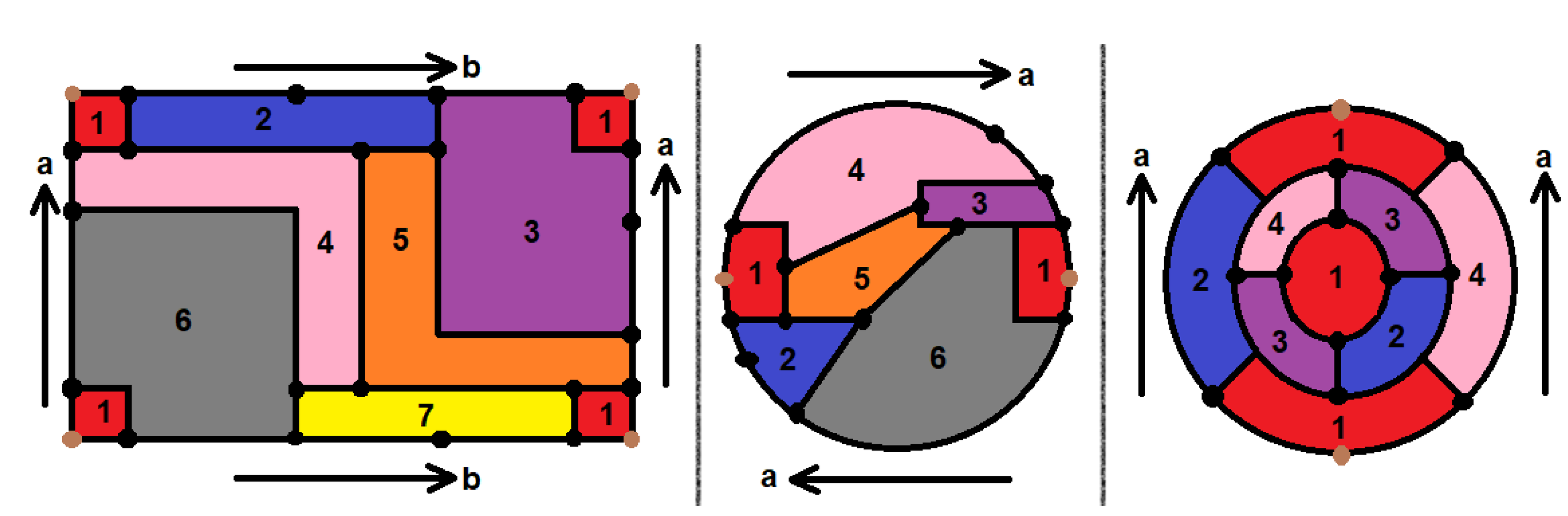


Figura 5: *Um mapa no toro com 7 cores, um mapa no plano projetivo com 6 cores e um mapa na esfera com 4 cores.*

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi financiado pelo Programa de Iniciação Científica da UFABC.

REFERÊNCIAS

Hatcher, A., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

Henle, M., *A combinatorial Introduction to Topology*, Dover publications, New York, 1994.

Kinsey, L. Christine, *Topology of Surfaces*, Springer, USA, 1993.