

# Probabilidade Geométrica e a Geometria Integral no Plano Euclidiano



Universidade Federal do ABC

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Resultados</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Resultados</b>	<b>38</b>
3.1	Conjuntos de faixas no plano . . . . .	38
3.2	O grupo de movimentos no plano: densidade cinemática . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Conclusões</b>	<b>48</b>
<b>5</b>	<b>Apêndice</b>	<b>51</b>
5.1	As formas explícitas para $L_s$ e $R_s$ . . . . .	51
5.2	As expressões para as $1 - forms$ em $\mathfrak{M}$ . . . . .	52
5.3	A equação 3.7 . . . . .	54
5.4	O sistema de equações 3.9 . . . . .	55
5.4.1	Primeira equação . . . . .	55
5.4.2	Segunda equação . . . . .	56
5.4.3	Terceira equação . . . . .	57
5.5	Algumas fórmulas integrais . . . . .	59

“A Estereologia é geralmente considerada como a metodologia destinada à estimação de parâmetros geométricos de estruturas espaciais, a partir da informação proporcionada mediante uma amostra geométrica adequada. Trata-se, portanto, de uma ciência que combina resultados teóricos de Geometria Integral, Probabilidade Geométrica e Estatística. Os resultados obtidos em Estereologia, até aqueles mais teóricos, inspiram-se em problemas levantados em outras ciências, problemas como a estimação da proporção da quantidade de material em uma rocha, o número de neurônios em uma região cerebral ou o comprimento dos dendritos neurais. Uma vez formulado o problema na linguagem matemática adequada, trata-se de uma submersão do problema na Geometria Integral para obter-se a fórmula apropriada que nos leve ao parâmetro de interesse”(cf. [1], p.2).

Probabilidade, geometria, medida e grupos formam as bases da Geometria Integral, cujos primeiros resultados foram obtidos aos anos de 1935-1939 por W. Blaschke e seu grupo de estudos na Universidade de Hamburgo. Outra área de grande importância para a matemática é a probabilidade geométrica, seu desenvolvimento histórico pode ser visto da seguinte maneira: “[...] o problema da agulha de Buffon tem uma extraordinária importância histórica: foi o primeiro problema de um novo território, a Teoria da Probabilidade Geométrica, e nesse sentido rasgou horizontes para novas ideias matemáticas, que ainda hoje frutificam.”(cf. [2], p.131).

Um dos grandes dilemas histórico sobre a Teoria da Probabilidade Geométrica consiste no paradigma: “*Terá Buffon realmente lançado agulhas?*”. “Em notável contraste com o registo histórico, existe na comunidade matemática uma impressão generalizada de que Buffon teria não apenas considerado a possibilidade de determinar uma aproximação ao valor de  $\pi$  por meio de uma “experiência” como, de fato, a teria mesmo chegado a realizar. [...] Muitos outros livros de História da Probabilidade são omissos sobre a ligação de Buffon à aproximação experimental de  $\pi$ , deixando a questão totalmente em aberto.”(cf. [2], p.129).

Atualmente, resolver este e outros problema utilizando ferramentas da Geometria Integral, por exemplo, é o cerne de uma pesquisa básica e é sobre isso este relatório.

Inicialmente vamos exibir alguns axiomas sobre probabilidade:

**Axioma 2.1** Para um evento  $E$ :

$$0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$$

**Axioma 2.2** Para um espaço amostral  $S$ :

$$\mathbb{P}(S) = 1$$

**Axioma 2.3** Para eventos  $E_1, E_2, E_3, \dots$  mutuamente exclusivos, ou seja,  $E_i \cap E_j = \emptyset, \forall i \neq j$ :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i)$$

Agora vamos demonstrar algumas proposições, lemas, definições e teoremas essenciais para a compreensão das ferramentas básicas da geometria integral:

**Corolário 2.4** Para um evento  $E = \emptyset$ , temos que:

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

**Demonstração:** Tomemos os eventos  $E_1, E_2, E_3, \dots$  e  $S$  o espaço amostral, de modo que  $E_1 = S$  e  $E_i = \emptyset, \forall i > 1 \in \mathbb{N}$ , de modo que  $E_i \cap E_j = \emptyset, \forall i \neq j$ , temos que:

$$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

Calculando a probabilidade em ambos os lados da equação,

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)$$

## 2 Resultados

Pelo Axioma 2.3,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i) \\ \mathbb{P}(S) &= \mathbb{P}(E_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}(E_i) \\ \mathbb{P}(S) &= \mathbb{P}(S) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset) \\ \mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(S) &= \mathbb{P}(\emptyset) \\ \mathbb{P}(\emptyset) &= 0\end{aligned}$$

□

**Corolário 2.5** Para os eventos  $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ , mutuamente exclusivos, temos que:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E_i)$$

**Demonstração:** Temos que  $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ , mutuamente exclusivos, e tomemos  $E_{n+k} = \emptyset, \forall k > 1 \in \mathbb{N}$ , assim:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \mathbb{P}\left(\left[\bigcup_{i=1}^n E_i\right] \cup \left[\bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j\right]\right)$$

Pelo Axioma 2.3,

$$\mathbb{P}\left(\left[\bigcup_{i=1}^n E_i\right] \cup \left[\bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j\right]\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j\right)$$

Pelo Axioma 2.3,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset)$$

Pelo Corolário 2.4,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) + 0$$

## 2 Resultados

Pelo Axioma 2.3,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) + 0 = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E_i)$$

□

**Proposição 2.6** Para dois eventos  $E$  e  $F$ , temos que:

$$\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$$

**Demonstração:** Temos que  $E \cup F = E \cup (E^c \cap F)$ , então, calculando a probabilidade, obtemos:

$$\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E \cup (E^c \cap F)) \quad (2.1)$$

Pelo Corolário 2.5,

$$\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(E^c \cap F)$$

Mas, podemos observar que  $F = (E \cap F) \cup (E^c \cap F)$  e calculamos a sua probabilidade

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}((E \cap F) \cup (E^c \cap F))$$

Pelo Corolário 2.5,

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(E \cap F) + \mathbb{P}(E^c \cap F)$$

$$\mathbb{P}(E^c \cap F) = \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$$

Voltando na equação (2.1) obtemos,

$$\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$$

□

**Proposição 2.7** Para  $n$  eventos  $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ , temos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = & \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E_i) - \sum_{i_1 < i_2} \mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2}) + (-1)^{r+1} + \\ & + \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} \mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \dots \cap E_{i_r}) + \dots \\ & \dots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) \end{aligned}$$

## 2 Resultados

**Demonstração:** Para demonstrar essa proposição, aplicamos a indução finita em  $n$ . Para  $n = 2$ , pela Proposição 2.6, temos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_1 \cup E_2) &= \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) - \mathbb{P}(E_1 \cap E_2) \\ &= \sum_{i=1}^2 \mathbb{P}(E_i) - \sum_{i_1 < i_2} \mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2})\end{aligned}$$

Como hipótese de indução, tomemos  $n = k$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k) &= \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(E_i) - \sum_{i_1 < i_2} \mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2}) + (-1)^{r+1} + \\ &\quad + \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} \mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \dots \cap E_{i_r}) + \dots \\ &\quad \dots + (-1)^{k+1} \mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_k)\end{aligned}$$

Finalmente, vamos mostrar que é válido também para  $n = k + 1$ ,

$$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k \cup E_{k+1}) = \mathbb{P}((E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k) \cup E_{k+1})$$

Tomando  $(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k)$  como um evento, podemos aplicar a Proposição 2.6 e obteremos:

$$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k \cup E_{k+1}) = \mathbb{P}(E_{k+1}) + \underbrace{\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k)}_I - \underbrace{\mathbb{P}((E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k) \cap E_{k+1})}_{II}$$

Então, chamando  $I = \mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k)$  e  $II = \mathbb{P}((E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k) \cap E_{k+1})$ , podemos substituir  $I$  pela Hipótese de Indução e obteremos:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k \cup E_{k+1}) &= \mathbb{P}(E_{k+1}) + \\ &\quad \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(E_i) - \sum_{i_1 < i_2} \mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2}) + (-1)^{r+1} + \\ &\quad + \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} \mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \dots \cap E_{i_r}) + \dots \\ &\quad \dots + (-1)^{k+1} \mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_k) - \\ &\quad \underbrace{\mathbb{P}((E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k) \cap E_{k+1})}_{II}\end{aligned}$$

## 2 Resultados

Finalmente, podemos observar que  $II$  irá complementar os somatórios quando pegarmos as intersecções duas a duas, três a três e assim por diante, com o evento  $E_{k+1}$ , dessa maneira obteremos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k \cup E_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} \mathbb{P}(E_i) - \sum_{i_1 < i_2} \mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2}) + (-1)^{r+1} + \\ &+ \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} \mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \dots \cap E_{i_r}) + \dots \\ &\dots + (-1)^{(k+1)+1} \mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{k+1}) \end{aligned}$$

□

**Definição 2.8** Para  $\mathbb{P}(F) > 0$ , temos que:

$$\mathbb{P}(E|F) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)}$$

**Proposição 2.9** Fórmula de Bayes

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E|F) \cdot \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(E|F^c) \cdot \mathbb{P}(F^c)$$

**Demonstração:** Primeiramente temos que observar que  $E = (E \cap F) \cup (E \cap F^c)$  e podemos aplicar o calculo da probabilidade e obteremos

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}((E \cap F) \cup (E \cap F^c))$$

Pela Proposição 2.7

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \cap F) + \mathbb{P}(E \cap F^c)$$

Pela Definição 2.8

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E|F) \cdot \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(E|F^c) \cdot \mathbb{P}(F^c)$$

□

**Definição 2.10** Dois eventos  $E$  e  $F$  são independente se a equação  $\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(E) \cdot \mathbb{P}(F)$  for verdadeira.

**Definição 2.11** Uma variavel discreta é uma variavel aleatória que pode assumir no máximo um número contável de valores possíveis.



## 2 Resultados

**Definição 2.12** Para uma variável discreta  $X$  definimos a função discreta de probabilidade  $p(a)$  de  $X$  como:

$$p(a) = \mathbb{P}(X = a)$$

**Definição 2.13** Dizemos que  $X$  é uma variável aleatória contínua se existir uma função não negativa  $f$ , definida para todo  $x$ , de modo que  $x \in \mathbb{R}$ , que tenha a probabilidade de que, para qualquer intervalo  $B \subset \mathbb{R}$ :

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x)dx$$

**Definição 2.14** Para quaisquer  $X$  e  $Y$ , a função distribuição de probabilidade cumulativa conjunta de  $X$  e  $Y$  é definida como:

$$F(a, b) = \mathbb{P}(X \leq a, Y \leq b), \forall a, b \in \mathbb{R}$$

**Proposição 2.15** A distribuição de  $X$  pode ser obtida a partir da distribuição conjunta de  $X$  e  $Y$ , e é:

$$F_x(a) = F(a, \infty)$$

**Demonstração:** Temos que:

$$\begin{aligned} F_x(a) &= \mathbb{P}(X \leq a) \\ &= \mathbb{P}(X \leq a, Y < \infty) \\ &= \mathbb{P}\left(\lim_{b \rightarrow \infty} (X \leq a, Y < b)\right) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X \leq a, Y < b) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} F(a, b) \\ &= F(a, \infty) \end{aligned}$$

□

Alguns resultados a seguir, envolvendo variáveis aleatórias discretas, não serão úteis ao problema da agulha de Buffon. Mesmo assim, nós os apresentaremos para que sejam comparados ao caso contínuo.

**Definição 2.16** Definimos uma função discreta de probabilidade conjunta de  $X$  e  $Y$  como:

$$p(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

## 2 Resultados

**Proposição 2.17** *A função de probabilidade de  $X$  pode ser obtida a partir da função discreta de probabilidade conjunta e é:*

$$p_x(x) = \sum_y p(x, y)$$

**Demonstração:** Queremos mostrar que podemos obter a probabilidade de  $X$  dada uma função discreta de probabilidade conjunta com  $Y$ . Para tanto, temos que:

$$\begin{aligned} p_x(x) &= \mathbb{P}(X = x) \\ &= \mathbb{P}(X = x, Y = 0) + \mathbb{P}(X = x, Y = 1) + \cdots + \mathbb{P}(X = x, Y = n) \\ &= \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(X = x, Y = i) \\ &= \sum_{i=0}^n p(x, i) \\ &= \sum_y p(x, y) \end{aligned}$$

□

**Definição 2.18** *Dizemos que  $X$  e  $Y$ , variáveis aleatórias, são conjuntamente distribuídas se  $\exists f(x, y)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ , e um intervalo  $C \in \mathbb{R}$ , tal que:*

$$\mathbb{P}((X, Y) \in C) = \iint_{(x, y) \in C} f(x, y) dx dy$$

**Definição 2.19** *Nas condições da Definição 2.18, dizemos que  $f(x, y)$  é uma função densidade de probabilidade conjunta de  $X$  e  $Y$ .*

**Definição 2.20** *Dizemos que as variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  são independentes, se para quaisquer conjuntos  $A$  e  $B$ :*

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \cdot \mathbb{P}(Y \in B)$$

Podemos generalizar o conceito de variáveis aleatórias independentes.

**Definição 2.21** *Para as  $n$  variáveis aleatórias independentes  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  e os seguin-*

## 2 Resultados

tes subconjuntos de numeros reais  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  da seguinte maneira:

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in A_i)$$

**Proposição 2.22** *Se  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias conjuntamente contínuas, elas são individualmente contínuas, e suas funções densidade de probabilidade podem ser obtidas da seguinte maneira para o subconjunto  $A$  de numeros Reais:*

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_x(x) dx$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in A) &= \mathbb{P}(X \in A, Y \in \mathbb{R}) \\ &= \int_A \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx \\ &= \int_A f_x(x) dx \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde, na equação (2.2),

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

□

**Proposição 2.23** *Nas condições da Definição 2.20, no caso conjuntamente contínuo:*

$$f(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$$

**Demonstração:** Temos que pela Definição 2.18, para quaisquer subconjuntos  $A$  e  $B$  de números Reais:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) &= \int_B \int_A f(x, y) dx dy \\ &= \int_B \int_A f_x(x) \cdot f_y(y) dx dy \\ &= \left( \int_B f_y(y) dy \right) \cdot \left( \int_A f_x(x) dx \right) \\ &= \mathbb{P}(Y \in B) \cdot \mathbb{P}(X \in A) \end{aligned}$$

□

## Problema da Agulha de Buffon

Primeiramente vamos resolver o problema no qual o comprimento ( $L$ ) da agulha é menor ou igual ao espaçamento ( $D$ ) entre as linhas paralelas, para posteriormente resolver o caso em que  $L \geq D$ .

**Exemplo 2.24** *Uma tábua é graduada com linhas paralelas com espaçamento  $D$  entre si e uma agulha de comprimento  $L$ , onde  $L < D$  é jogada aleatoriamente sobre a mesa. Qual a probabilidade de que a agulha intercepte uma das linhas?*

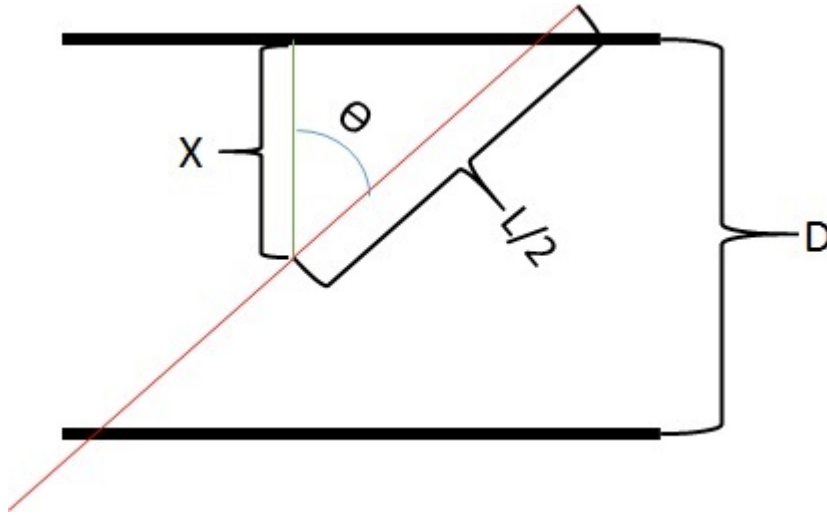


Figura 2.1: Exemplo do Problema da Agulha de Buffon

Sejam  $X$  a distância do centro da agulha à linha mais próxima e  $\theta$  a medida do ângulo formado entre a agulha e o segmento de reta cujas extremidades são o centro da agulha e sua projeção ortogonal sobre a linha mais próxima, com  $0 < X < \frac{D}{2}$  e  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ . A agulha interceptará uma linha se a hipotenusa do triângulo retângulo for menor que  $\frac{L}{2}$ , ou seja,  $\frac{X}{\cos(\theta)} < \frac{L}{2}$ . Podemos pensar  $X$  e  $\theta$  como variáveis aleatórias independentes e uniformes, com:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{D}, & \text{se } 0 < X < \frac{D}{2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$f_\theta(\theta) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}, & \text{se } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

## 2 Resultados

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X < \frac{L}{2} \cdot \cos(\theta)) &= \iint_{x < \frac{L}{2} \cdot \cos(\theta)} f(x, \theta) dx d\theta &= \iint_{x < \frac{L}{2} \cdot \cos(\theta)} f_x(x) \cdot f_\theta(\theta) dx d\theta \\
&= \iint_{x < \frac{L}{2} \cdot \cos(\theta)} \frac{2}{D} \cdot \frac{2}{\pi} dx d\theta &= \frac{4}{\pi \cdot D} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{L}{2} \cdot \cos(\theta)} dx d\theta \\
&= \frac{4}{\pi \cdot D} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{L}{2} \cdot \cos(\theta) d\theta &= \frac{2 \cdot L}{\pi \cdot D} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) d\theta \\
&= \frac{2 \cdot L}{\pi \cdot D} \cdot [\sin(\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} &= \frac{2 \cdot L}{\pi \cdot D} \cdot (1 - 0) \\
&= \frac{2 \cdot L}{\pi \cdot D}
\end{aligned}$$

**Exemplo 2.25** Vamos resolver o Exemplo 2.24, no entanto, com  $L \geq D$

Podemos tomar como correta a análise até o ponto em que definimos as equações de  $f_x(x)$  e  $f_\theta(\theta)$  e a partir daí mudamos a análise.

Para facilitar, vamos dividir em duas partes e ainda tomemos  $\theta_0$  como o angulo minimo que a agulha assumir sem encostar nas linhas paralelas:

$$\begin{cases} x = \frac{D}{2} & \Rightarrow 0 < \theta < \theta_0 \\ 0 < x < \frac{D}{2} & \Rightarrow \theta_0 < \theta < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X < \frac{L}{2} \cdot \cos(\theta)) + \mathbb{P}(0 < \theta < \theta_0) &= \iint_{x < \frac{L}{2} \cdot \cos(\theta)} f(x, \theta) dx d\theta + \int_{0 < \theta < \theta_0} f_\theta(\theta) d\theta \\
&= \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{L}{2} \cdot \cos(\theta)} \frac{4}{\pi \cdot D} dx d\theta + \int_0^{\theta_0} \frac{2}{\pi} d\theta \\
&= \frac{2 \cdot L}{\pi \cdot D} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) d\theta + \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta_0} d\theta \\
&= \frac{2 \cdot L}{\pi \cdot D} [\sin(\theta)]_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{\pi} [\theta]_0^{\theta_0} \\
&= \frac{2 \cdot L}{\pi \cdot D} (1 - \sin(\theta_0)) + \frac{2 \cdot \theta_0}{\pi}
\end{aligned}$$

Dessa maneira, resolvemos completamente o Problema da Agulha de Buffon.

## Resultados

Nesta seção descreveremos algumas definições, propriedades e proposições necessárias para resolvermos os problemas propostos.

Inicialmente, revemos brevemente algumas definições do Cálculo Vetorial e Tensorial que serão necessárias para compreender as próximas partes deste relatório.

**Definição 2.26** *Uma forma diferencial de grau 1, ou 1-forma, em  $\mathbb{R}^n$  é uma expressão do tipo*

$$\omega^{(1)} = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \cdots + a_n dx_n$$

**Definição 2.27** *O produto de um escalar  $\lambda$  por uma 1-forma  $\omega^{(1)} = \sum_i a_i dx_i$  é definido por*

$$\lambda \cdot \omega^{(1)} = \sum_i \lambda \cdot a_i dx_i$$

**Definição 2.28** *A soma de duas 1-forma  $\omega^{(1)} = \sum_i a_i dx_i$  e  $\phi^{(1)} = \sum_i b_i dx_i$  é definida da seguinte maneira*

$$\omega^{(1)} \pm \phi^{(1)} = \sum_i (a_i \pm b_i) dx_i$$

**Proposição 2.29**  $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$

**Proposição 2.30**  $dx_i \wedge dx_i = 0$

**Proposição 2.31**  $dx_i \wedge (dx_j + dx_k) = dx_i \wedge dx_j + dx_i \wedge dx_k$

**Proposição 2.32**  $dx_i \wedge (\lambda \cdot dx_k) = \lambda \cdot dx_i \wedge dx_k$

**Definição 2.33** *Podemos definir as r-forma em  $\mathbb{R}^n$  como*

$$\omega^{(r)} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_r} a_{i_1, i_2, \dots, i_r} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}$$

Em seguida, estudamos o conceito de envelope de uma família de retas, bem como algumas de suas propriedades.

**Proposição 2.34** *Uma reta  $r$  do plano pode ser determinada pela sua distância  $p$  até à origem e pelo ângulo  $\phi$  formando pelo eixo  $x$  e pela normal à reta  $r$ . A equação da reta  $r$  é dada por:*

$$x \cdot \cos \phi + y \cdot \sin \phi - p = 0 \quad (2.3)$$

## 2 Resultados

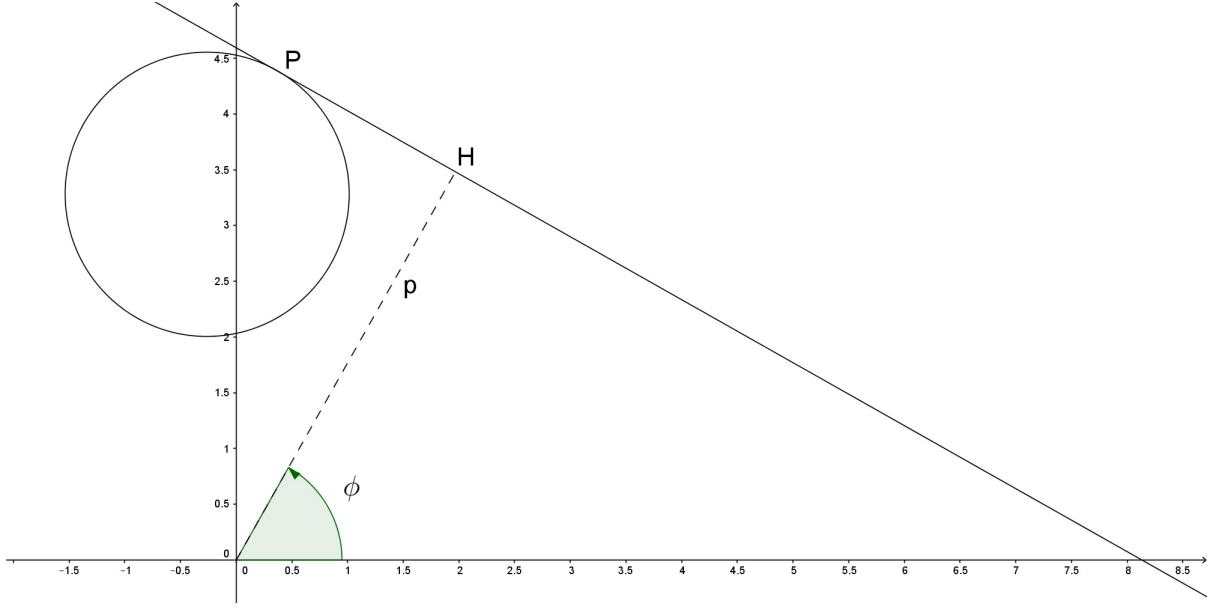


Figura 2.2: Proposição 3.4

**Demonstração:** Sejam  $H$  a projeção ortogonal da origem  $O$  sobre a reta  $r$  e

$$\begin{cases} \vec{A} = \overrightarrow{OH} = (p.\cos\phi, p.\sin\phi) \\ \vec{B} = \overrightarrow{PH} = (x - p.\cos\phi, y - p.\sin\phi) \end{cases}$$

vetores que representam, respectivamente, as coordenadas de  $H$  e de um vetor diretor de  $r$ . Como  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  são ortogonais, temos que

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= 0 \\ (p.\cos\phi, p.\sin\phi) \cdot (x - p.\cos\phi, y - p.\sin\phi) &= 0 \\ x.p.\cos\phi - p^2.\cos^2\phi + y.p.\sin\phi - p^2.\sin^2\phi &= 0 \\ x.p.\cos\phi + y.p.\sin\phi - p^2.(\cos^2\phi + \sin^2\phi) &= 0 \\ x.\cos\phi + y.\sin\phi - p &= 0 \end{aligned}$$

□

Uma família de curvas pode ser representada por  $F(x, y, \lambda) = 0$ , em que  $F$  é uma função e  $\lambda$  é o parâmetro das curvas da família. O envelope de uma família de curvas é definido como a curva a qual cada ponto é um ponto de contato com uma curva da família. A equação do envelope de uma família de curvas  $F(x, y, \lambda) = 0$

## 2 Resultados

pode ser obtida a partir do parâmetro  $\lambda$  nas seguintes equações:

$$\begin{cases} F &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= 0 \end{cases}$$

Se  $p = p(\phi)$  então (2.3) é a equação de uma família de retas. Admitindo-se  $p(\phi)$  derivável, o envelope da família de retas é dado por

$$\begin{cases} x = p \cdot \cos \phi - p' \cdot \sin \phi \\ y = p \cdot \sin \phi + p' \cdot \cos \phi \end{cases} \quad (2.4)$$

Quando o envelope de uma família de curvas é a fronteira  $\partial K$  de um conjunto convexo  $K$  com a origem  $O$  em seu interior, então  $p = p(\phi)$  é chamada de função suporte de  $K$  e as retas dadas por (2.3) são chamadas de retas suportes de  $K$ .

**Proposição 2.35** *O comprimento  $L$  de uma curva  $\gamma$  convexa fechada que possui uma função suporte  $p$  de classe  $C^2$  é dado por:*

$$L = \int_0^{2\pi} p d\phi$$

**Demonstração:** Tomando-se a família de retas tangentes a  $\gamma$ , temos que  $\gamma$  é o envelope dessa família o qual tem (2.4) como equação. Como  $p$  é de classe  $C^2$ , temos que

$$\begin{cases} dx = -(p + p'') \sin \phi d\phi \\ dy = (p + p'') \cos \phi d\phi \end{cases}$$

Consequentemente, calculamos  $ds$ :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$ds^2 = (-(p + p'') \sin \phi d\phi)^2 + ((p + p'') \cos \phi d\phi)^2$$

$$ds^2 = (p + p'')^2 d\phi^2.$$

Consequentemente,  $ds = |p + p''| d\phi$ .

É possível mostrar que  $p + p'' > 0$ . Pela definição de comprimento de curva e usando



## 2 Resultados

que  $p$  e  $p'$  são funções periódicas, temos que:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} ds &= L \\ \int_0^{2\pi} (p + p'') d\phi &= L \\ \int_0^{2\pi} p d\phi + \int_0^{2\pi} p'' d\phi &= L \\ \int_0^{2\pi} p d\phi + (p'(2\pi) - p'(0)) &= L \\ \int_0^{2\pi} p d\phi &= L\end{aligned}$$

□

Em seguida, estudamos o conceito de densidade de pontos.

**Definição 2.36** *A medida de um conjunto de pontos  $X$  é definida como a integral (no sentido de Lebesgue) sobre a forma diferencial  $\omega = f(x, y)dx \wedge dy$ , ou seja,  $m(X) = \int_X f(x, y)dx \wedge dy$ , em  $f(x, y)$  é escolhida de uma maneira que  $m(X)$  seja invariante sob a ação do grupo de movimentos rígidos no plano.*

As equações, nas coordenadas cartesianas, de um movimento  $u \in \mathfrak{M}$  são:

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha + a \\ y' = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha + b, \end{cases}$$

em que  $(a, b)$  são as coordenadas do vetor de translação e  $\alpha$  é o ângulo de rotação de  $u$ . O objetivo é determinar uma condição para  $f(x, y)$  de modo que a medida  $m(X) = \int_X f(x, y)dx \wedge dy$  seja invariante sob  $\mathfrak{M}$  para qualquer  $X$ . Se  $X' = uX$  então a

## 2 Resultados

condição  $m(X) = m(X')$ , para todo  $X$ , isto é,

$$\begin{aligned}
 \int_X f(x, y) dx \wedge dy &= \int_{X'} f(x', y') dx' \wedge dy' \\
 &= \int_X f(x', y') |J| dx \wedge dy \\
 &= \int_X f(x', y') \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \cdot \frac{\partial y'}{\partial y} - \frac{\partial x'}{\partial y} \cdot \frac{\partial y'}{\partial x} \right| dx \wedge dy \\
 &= \int_X f(x', y') |\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha| dx \wedge dy \\
 &= \int_X f(x', y') dx \wedge dy
 \end{aligned}$$

resulta em  $f(x, y) = f(x', y')$ , para todos pares de pontos correspondentes  $(x, y) \rightarrow (x', y')$ . Como todo ponto  $(x, y)$  pode ser transformado em outro  $(x', y')$  por um movimento, concluímos que  $f(x, y) = c$ , em que  $c$  é uma constante real. Isso justifica a seguinte definição.

**Definição 2.37** *A medida de um conjunto de pontos  $P(x, y)$  no plano é definida como sendo a integral sob a forma diferencial*

$$dP = dx \wedge dy,$$

que é chamada de densidade de pontos.

**Definição 2.38** *Dados dois conjuntos  $X$  e  $Y$  tais que  $Y \subset X$ , a probabilidade de um elemento aleatório que está em  $X$  estar também em  $Y$  é dada por*

$$p(Y|X) = \frac{m(Y)}{m(X)}.$$

E agora estudamos o conceito de densidade de retas.

**Definição 2.39** *A medida de um conjunto de retas  $G(p, \phi)$  do plano é definido pela integral sob a forma diferencial*

$$dG = dp \wedge d\phi, \tag{2.5}$$

que é chamada de densidade de retas.

De modo análogo ao que foi feito para a densidade de pontos, a densidade de retas é definida de modo a ser invariante sob a ação de  $\mathfrak{N}$ .

## 2 Resultados

**Proposição 2.40** *Sejam  $D$  um domínio no plano de área  $F$ ,  $G$  uma reta no plano que intersecta  $D$  e  $\sigma$  o comprimento do segmento determinado por  $D \cap G$ . Então*

$$\int_{G \cap D \neq \emptyset} \sigma dG = \pi \cdot F.$$

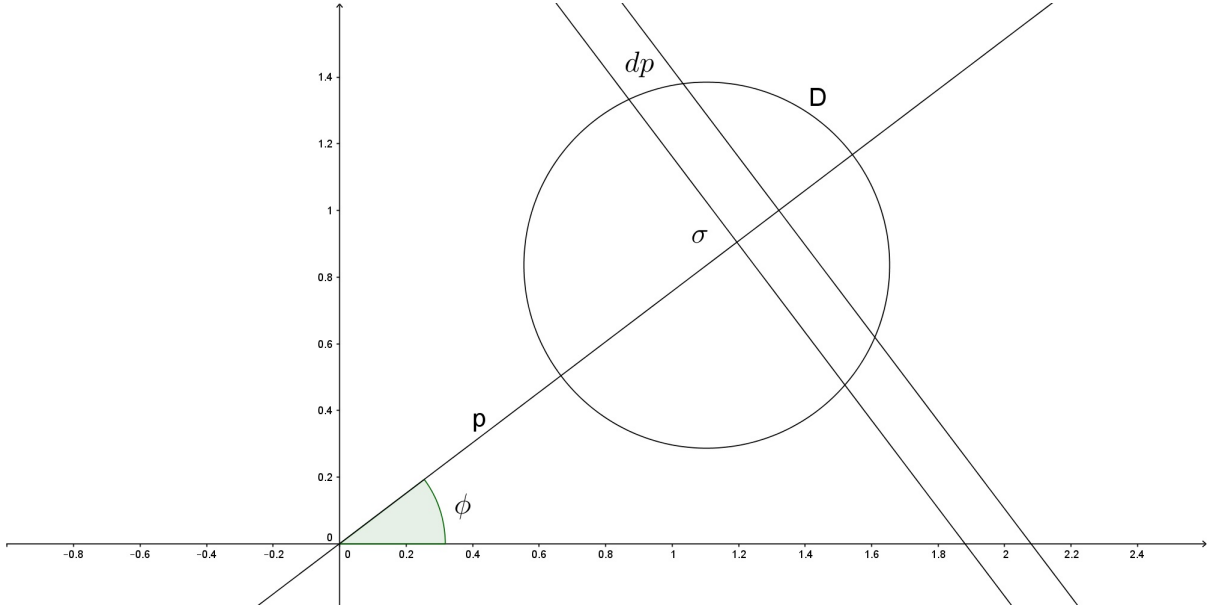


Figura 2.3: Proposição 3.5

**Demonstração:** Por (2.7), temos que

$$\sigma dG = \sigma dp \wedge d\phi \text{ e } \int_0^F \sigma dp = \text{área}(D) = F.$$

## 2 Resultados

Assim,

$$\begin{aligned}
 \int_{G \cap D \neq \emptyset} \sigma dG &= \int_0^\pi \int_0^F \sigma dp \wedge d\phi \\
 \int_{G \cap D \neq \emptyset} \sigma dG &= \int_0^\pi \int_0^F \sigma dp d\phi \\
 \int_{G \cap D \neq \emptyset} \sigma dG &= \int_0^\pi F d\phi \\
 \int_{G \cap D \neq \emptyset} \sigma dG &= F \cdot \int_0^\pi d\phi \\
 \int_{G \cap D \neq \emptyset} \sigma dG &= F \cdot \pi
 \end{aligned}$$

□

A próxima proposição é um importante resultado da geometria integral.

**Proposição 2.41** *Sejam  $K$  um conjunto convexo limitado no plano e  $L = |\partial K|$  o perímetro (ou comprimento) de  $K$ . A medida do conjunto de retas que intersectam  $K$  é igual a  $L$ .*

**Demonstração:** Por (2.7), temos que

$$\begin{aligned}
 m(G; G \cap K \neq \emptyset) &= \int_{G \cap D \neq \emptyset} dG \\
 &= \int_{G \cap D \neq \emptyset} dp \wedge d\phi \\
 &= \int_{G \cap D \neq \emptyset} dp d\phi \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^p dp d\phi \\
 &= \int_0^{2\pi} p d\phi \\
 &= L.
 \end{aligned}$$

□

De modo análogo à definição 2.38, temos a seguinte definição.

**Definição 2.42** *Dados dois conjuntos  $X$  e  $Y$  tais que  $Y \subset X$ , a probabilidade de uma reta*

## 2 Resultados

aleatória  $G$  que intersecta  $X$  também intersectar  $Y$  é dada por

$$p(Y|X) = \frac{m(G; G \cap Y \neq \emptyset)}{m(G; G \cap X \neq \emptyset)}.$$

Consequentemente, de acordo com a proposição 2.41, podemos afirmar que

**Proposição 2.43** *Sejam  $K$  e  $K_1$  conjuntos convexos limitados no plano, com  $K_1 \subset K$ , e perímetros  $L$  e  $L_1$ , respectivamente. A probabilidade que uma reta aleatória que intersecta  $K$  também intersecta  $K_1$  é igual a*

$$p(K_1|K) = \frac{L_1}{L}.$$

De modo análogo, podemos obter as probabilidades de retas cruzarem ou separarem dois conjuntos convexos, como a seguir. Para isso, considere dois conjuntos convexos limitados no plano  $K_1$  e  $K_2$ , com perímetros  $L_1$  e  $L_2$ , respectivamente. Sejam  $C_e$  o envoltório convexo de  $K_1 \cup K_2$  e  $L_e$  o perímetro de  $C_e$ . No caso em que  $K_1$  e  $K_2$  forem disjuntos, considere  $C_i$  como sendo a curva que envolve  $K_1$  e  $K_2$  e que tem uma autointersecção num ponto  $O$  entre  $K_1$  e  $K_2$ . Seja  $L_i$  o perímetro de  $C_i$ .

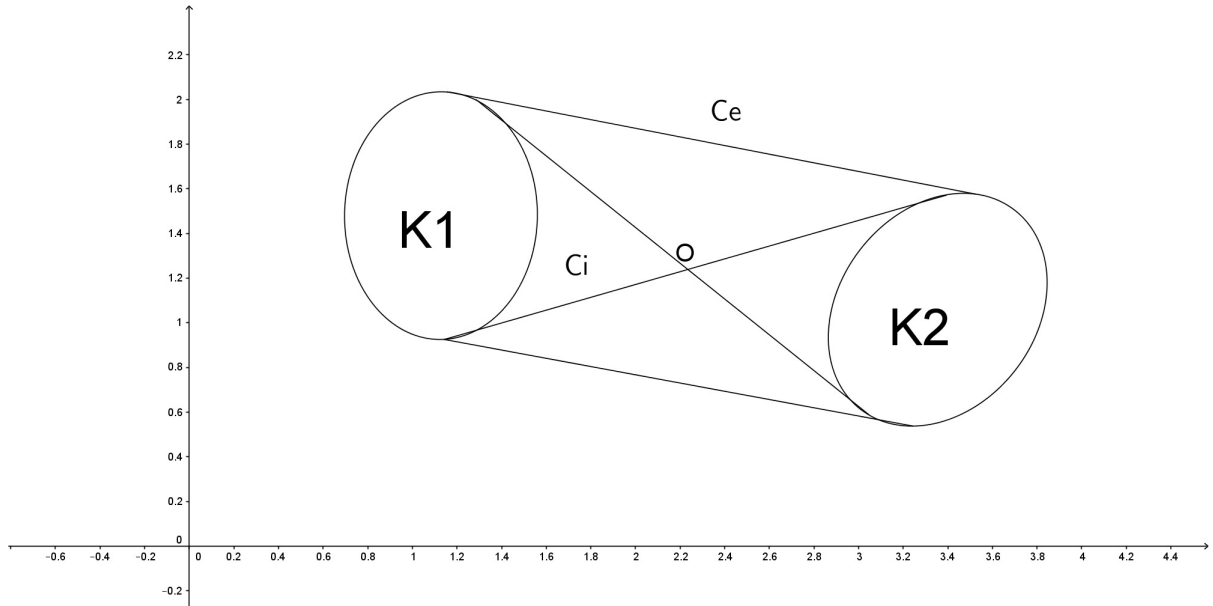


Figura 2.4: Envoltório convexo de  $K_1 \cup K_2$

**Proposição 2.44** *A medida de um conjunto de retas que intersectam  $K_1$  e  $K_2$  é igual a  $L_i - L_e$ .*

## 2 Resultados

**Proposição 2.45** *A medida de um conjunto de retas que intersectam  $K_1$  sem intersectar  $K_2$  é  $L_1 - (L_i - L_e)$  e a medida de um conjunto de retas que intersectam  $K_2$  sem intersectar  $K_1$  é  $L_2 - (L_i - L_e)$ .*

**Proposição 2.46** *A medida de um conjunto de retas que separam  $K_1$  e  $K_2$  é  $L_i - (L_1 + L_2)$ .*

**Proposição 2.47** *A probabilidade que uma reta aleatória  $G$  do plano intersecte  $K_1$  e  $K_2$  é  $p(G \cap K_1 \cap K_2 \neq \emptyset) = \frac{L_i - L_e}{L_e}$ .*

**Proposição 2.48** *A probabilidade que uma reta aleatória  $G$  intersecte  $K_1$  e não intersecte  $K_2$  é  $p(G \cap K_1 \neq \emptyset, G \cap K_2 = \emptyset) = 1 - \frac{L_i - L_1}{L_e}$*

**Proposição 2.49** *A probabilidade que  $G$  separe  $K_1$  e  $K_2$  é  $p(G \cap K_1 = \emptyset, G \cap K_2 = \emptyset, G \cap C_e \neq \emptyset) = \frac{L_i - (L_1 + L_2)}{L_e}$ .*

Nesta seção destacamos dois importantes problemas da Geometria que fizeram parte de nosso estudo.

**Problema 2.50** (*Desigualdade Isoperimétrica*) Para uma curva plana convexa fechada de comprimento  $L$  e que delimita uma região  $K$  (limitada) de área  $F$ , vale que

$$L^2 - 4\pi.F \geq 0.$$

**Demonstração:** Sejam  $G, G_1$  duas retas que intersectam  $\partial K$  nos pontos que correspondem aos comprimentos de arcos  $s$  e  $s'$ , respectivamente. Nestes pontos de intersecção, sejam  $\theta, \theta_1$  os ângulos, respectivamente, que  $G, G_1$  formam com as retas suportes e, por fim, tome  $\sigma, \sigma_1$  os comprimentos das cordas determinadas por  $G, G_1$  em  $K$ , respectivamente.

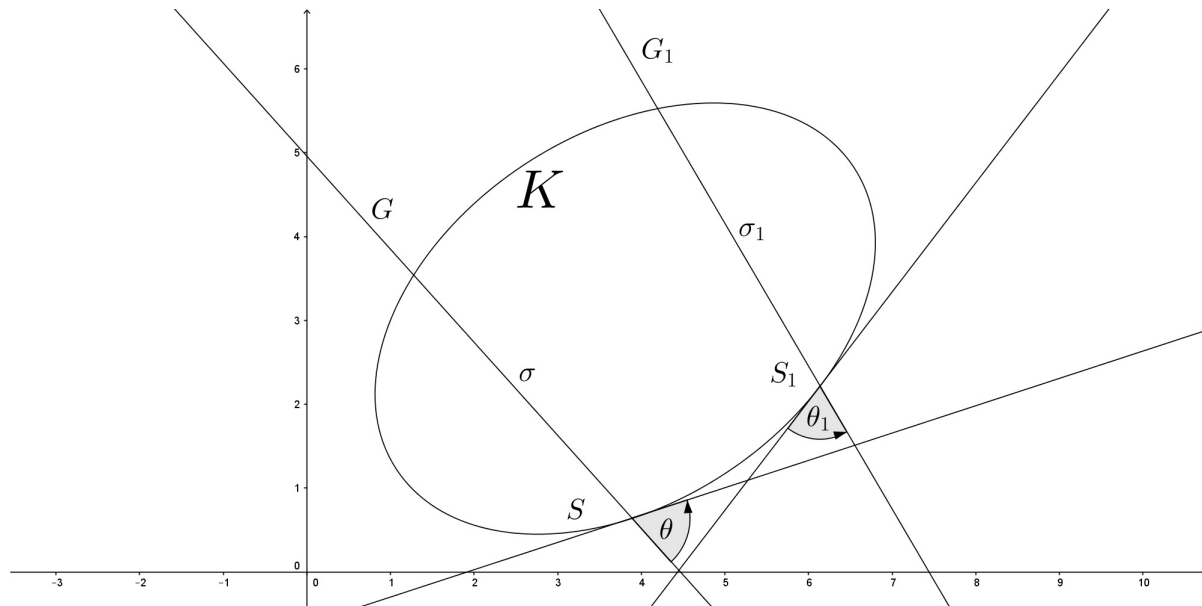


Figura 2.5: Problema 2.50

## 2 Resultados

Consideremos a integral

$$I = \int (\sigma \cdot \sin \theta_1 - \sigma_1 \cdot \sin \theta)^2 ds \wedge d\theta \wedge ds_1 \wedge d\theta_1, \quad (2.6)$$

com  $0 \leq s \leq L$ ,  $0 \leq s_1 \leq L$ ,  $0 \leq \theta, \theta_1 \leq \pi$ .

De modo geral, uma reta do plano pode ser representada por

$$p = x \cdot \cos \phi + y \cdot \sin \phi$$

Logo,

$$dp = \cos \phi \, dx + \sin \phi \, dy + (-x \cdot \sin \phi + y \cdot \cos \phi) \, d\phi.$$

Sendo  $\tau$  o ângulo que a reta faz com o eixo  $Ox$ , temos que

$$\begin{cases} dx = \cos \tau \, ds \\ dy = \sin \tau \, ds \end{cases}$$

Consequentemente,

$$dp = \cos(\phi - \tau) \, ds + (-x \cdot \sin \phi + y \cdot \cos \phi) \, d\phi$$

Como  $dG = dp \wedge d\phi$ , temos que

$$dG = \sin \theta \, ds \wedge d\phi,$$

pois  $\phi = \theta + \tau - \left(\frac{\pi}{2}\right)$  e  $d\phi = d\theta + \tau' \, ds$ . Assim,

$$dG = \sin \theta \, ds \wedge d\theta,$$

e então, utilizando-se coordenadas polares, obtemos.

$$\int_0^\pi \sigma^2 d\theta = 2F.$$

Além disso,

$$\int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2}$$

Tomando-se  $\tau$  e  $\tau_1$  convenientemente para  $G$  e  $G_1$ , respectivamente, podemos re-escrever  $I$  como



## 2 Resultados

$$I = 2.\pi.L^2.F - 2. \int_{G \cap K \neq \emptyset} \sigma dG \int_{G_1 \cap K \neq \emptyset} \sigma_1 dG_1 = 2.\pi.F(L^2 - 4.\pi.F)$$

Pela equação (2.6), vemos que  $I \geq 0$ , donde segue que

$$L^2 - 4.\pi.F \geq 0$$

□

**Problema 2.51** *Sejam  $K_0, K_1$  dois conjuntos convexos tais que  $K_1 \subset K_0$ . A probabilidade que  $n$  retas aleatórias do plano que intersectam  $K_0$  não ter ponto em comum com  $K_1$  é igual a  $\left(1 - \frac{L_1}{L_0}\right)^n$ , em que  $L_0, L_1$  são os perímetros de  $K_0$  e  $K_1$ , respectivamente.*

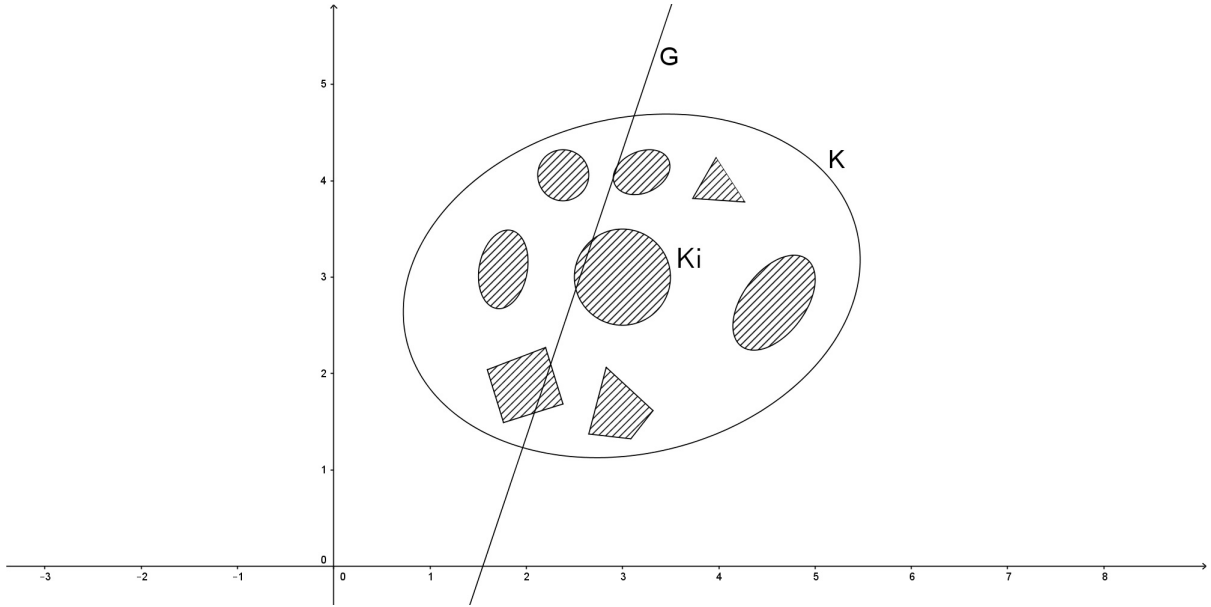


Figura 2.6: Problema 2.51

**Demonstração:** Segue da proposição 2.43 que, para uma reta  $G$  aleatória do plano,

$$p(G \cap K_0 \neq \emptyset; G \cap K_1 = \emptyset) = 1 - \frac{L_1}{L_0}$$

Portanto, para um conjunto de  $n$  retas aleatórias do plano, temos que

$$p(G \cap K_0 \neq \emptyset; G \cap K_1 = \emptyset) = \left(1 - \frac{L_1}{L_0}\right)^n.$$

□

## Resultados

### Revisão dos Conceitos

Nesta seção descrevemos algumas definições, propriedades e proposições necessárias para resolvermos o problema proposto.

#### Densidade de pontos

**Definição 2.52** *A medida de um conjunto de pontos  $P(x, y)$  no plano é definida como sendo a integral sob a forma diferencial*

$$dP = dx \wedge dy,$$

*que é chamada de densidade de pontos.*

#### Densidade de retas

**Definição 2.53** *A medida de um conjunto de retas  $G(p, \phi)$  do plano é definido pela integral sob a forma diferencial*

$$dG = dp \wedge d\phi, \tag{2.7}$$

*que é chamada de densidade de retas, em que  $p$  e  $\phi$  denotam respectivamente a distância da reta  $G$  até a origem do sistema de coordenadas e o ângulo da reta  $G$  com o eixo  $Ox$  positivo.*

Ambas as densidade são definidas de modo a serem invariantes sob a ação de um movimento rígido ( $\mathfrak{M}$ ) no plano.

### Densidade de faixas

**Definição 2.54** *Uma faixa  $B$  de largura  $a$  no plano consiste em uma parte fechada do plano entre duas retas paralelas cuja distância entre uma e outra é  $a$ .*

**Definição 2.55** *A posição de uma faixa  $B$  será determinada pela posição da reta que equidista das retas paralelas da fronteira da faixa.*

**Definição 2.56** *A densidade de um conjunto de faixas  $B(p, \phi)$  no plano é:*

$$dB = dp \wedge d\phi,$$

## 2 Resultados

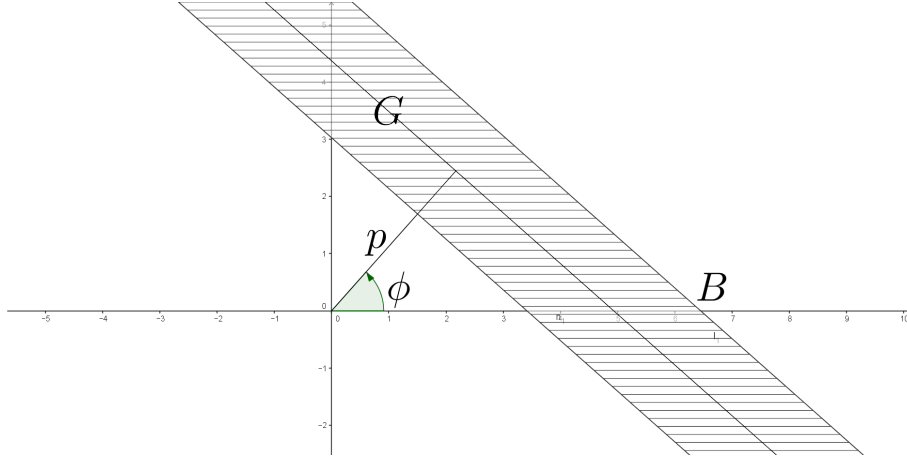


Figura 2.7: Posição de uma Faixa

onde  $p$  e  $\phi$  denotam as coordenadas da reta central  $G$  da faixa  $B$ , como na Definição 2.53.

Para calcular a medida desse conjunto de faixas, tomamos um conjunto  $K$  convexo fechado. Seja  $K_{a/2}$  o convexo paralelo de  $K$  a uma distância  $a/2$ , ou seja, o envoltório convexo das circunferências de centro na fronteira de  $K$  e raio  $a/2$ . Assim, se  $B \cap K \neq \emptyset$ , então a paralela central de  $B$  intercepta o conjunto paralelo  $K_{a/2}$  de  $K$  a uma distância  $a/2$ . Reciprocamente, se a paralela central de  $B$  intercepta  $K_{a/2}$ , então  $B$  intercepta  $K$ .

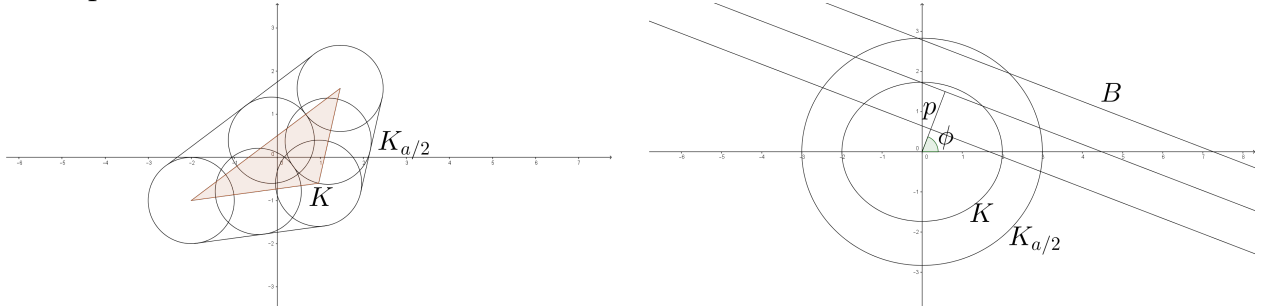


Figura 2.8: Conjunto Paralelo (à Esquerda) & Reta Central de uma Faixa (à Direita)

Por fim, basta calcularmos a medida da reta paralela central sobre o conjunto convexo paralelo de  $K$ .

**Proposição 2.57** *A medida de um conjunto de faixas  $B$  no plano sobre um conjunto convexo fechado  $K$  que intercepta  $B$  é*

$$m(B; B \cap K \neq \emptyset) = \int_{B \cap K \neq \emptyset} dB = L + \pi \cdot a,$$

## 2 Resultados

onde  $L$  é o perímetro de  $K$  e  $a$  a largura de  $B$ .

**Demonstração:** Denotamos por  $G$  a reta central de  $B$ , assim:

$$\int_{B \cap K \neq \emptyset} dB = \int_{G \cap K_{a/2} \neq \emptyset} dp \wedge d\phi = L + 2\pi \cdot \frac{a}{2} = L + \pi \cdot a$$

□

**Corolário 2.58** *A medida de todas as faixas  $B$  de largura  $a$  que contêm um ponto fixo  $P$  é:*

$$m(B; P \in B) = \pi \cdot a$$

**Demonstração:** Para o caso em que  $K$  é um ponto  $P$ , temos que  $L = 0$ , de modo que:

$$m(B; P \in B) = \pi \cdot a$$

□

**Corolário 2.59** *A medida de todas as faixas  $B$  de largura  $a$  que encontram um segmento de reta  $S$  de comprimento  $s$  é:*

$$m(B; B \cap S \neq \emptyset) = 2 \cdot s + \pi \cdot a$$

**Demonstração:** Para o caso em que  $K$  é um segmento de reta  $S$ , temos que  $L = 2s$  (uma vez que o comprimento é calculado percorrendo-se o segmento de reta nos dois sentidos). Logo,

$$m(B; B \cap S \neq \emptyset) = 2 \cdot s + \pi \cdot a$$

□

**Definição 2.60** *A largura  $\Delta(\phi)$  de um conjunto convexo  $K$  na direção  $\phi$ , dada conforme a Definição 2.53, é a distância entre duas retas suportes paralelas de  $K$  que são perpendiculares à direção  $\phi$  e que contêm  $K$  entre elas.*

Nas condições da Definição 3.2, temos o seguinte Lema:

**Lema 2.61** *Dado um conjunto convexo  $K$  e a função  $\Delta(\phi)$ , então:*

$$L = \int_0^\pi \Delta(\phi) d\phi,$$

onde  $L$  é o perímetro do conjunto convexo  $K$ .

## 2 Resultados

**Demonstração:** Segue da Definição 3.2 que  $\Delta(\phi) = p(\phi) + p(\phi + \pi)$  e então:

$$\int_0^\pi \Delta(\phi) d\phi = \int_0^\pi (p(\phi) + p(\phi + \pi)) d\phi = \int_0^\pi p(\phi) d\phi + \int_0^\pi p(\phi + \pi) d\phi = \frac{L}{2} + \frac{L}{2} = L$$

□

**Lema 2.62** Para o caso em que  $\Delta(\phi)$  é uma constante  $\Delta(\phi) = k \in \mathbb{R}$ ,  $\forall \phi$ , vale que:

$$L = k \cdot \pi$$

**Demonstração:** Temos:

$$L = \int_0^\pi \Delta(\phi) d\phi = \int_0^\pi k d\phi = k \cdot \pi$$

□

**Lema 2.63** A medida de todas as faixas de largura  $a$  que interceptam um conjunto convexo  $K$  de largura constante  $\Delta(\phi) = a \in \mathbb{R}$  (que, neste caso, é também o diâmetro de  $K$ ) é igual  $a$

$$m(B; \Delta(\phi) = a) = 2 \cdot L$$

**Demonstração:** Usando agora a Proposição 3.4:

$$m(B; B \cap K \neq \emptyset) = L + \pi \cdot a.$$

De acordo com o Lema 3.8 temos que  $L = \pi \cdot a$ , portanto:

$$m(B; \Delta(\phi) = a) = L + L = 2 \cdot L$$

□

**Proposição 2.64** A medida de todas as faixas  $B$  de largura  $a$  que contêm um conjunto convexo  $K$  é:

$$m(B; K \subset B) = \pi \cdot a - L$$

**Demonstração:** Dado que o conjunto convexo  $K$  está no interior das faixas, podemos dizer que  $D \leq a$ , onde  $D = \sup_{\phi} \Delta(\phi)$  é o diâmetro do conjunto convexo. Pela Proposição 3.4:

$$m(B; B \cap K \neq \emptyset) = L + \pi \cdot a \implies$$

## 2 Resultados

$$m(B; \Delta(\phi) < a) + \overbrace{m(B; \Delta(\phi) = a)}^{2.L} + \underbrace{m(B; \Delta(\phi) > a)}_0 = L + \pi.a.$$

Pelo Lema 3.22 e como  $m(B; \Delta(\phi) > a) = m(\emptyset) = 0$ , portanto:

$$m(B; \Delta(\phi) < a) = L + \pi.a - 2.L = \pi.a - L$$

□

Podemos agora expressar esses resultados em termos de probabilidade geométrica:

**Proposição 2.65** Tome  $K_1$  um conjunto convexo contido em um outro conjunto convexo  $K$  fechado. A probabilidade que uma faixa  $B$  de largura  $a$  intersecte  $K_1$ , dado que ela intersecta  $K$ , é de:

$$p = \frac{L_1 + \pi.a}{L + \pi.a}$$

**Demonstração:** Por definição de probabilidade:

$$p = \frac{m(B; K_1 \cap B \neq \emptyset)}{m(B; K \cap B \neq \emptyset)} = \frac{L_1 + \pi.a}{L + \pi.a}$$

□

**Proposição 2.66** Considere agora  $N$  conjuntos convexos  $K_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) contidos em um conjunto convexo fechado  $K$ . Tome  $L$  o perímetro de  $K$  e  $L_i$  os perímetros de  $K_i$ . O número médio de conjuntos  $K_i$  que são intersectados por uma faixa  $B$  de largura  $a$  que intersecta  $K$  é:

$$\mathbb{E}(n) = \frac{\sum_{i=1}^N L_i + \pi.a.N}{L + \pi.a}$$

## 2 Resultados

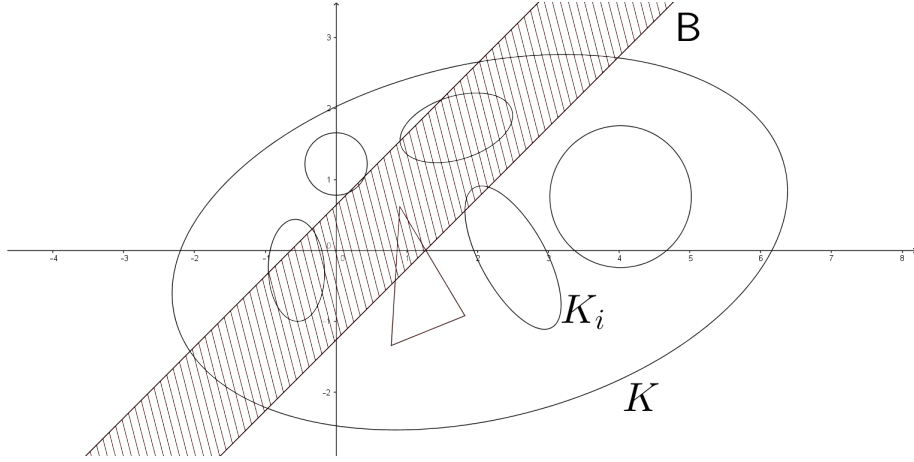


Figura 2.9: Faixa e Conjuntos

**Demonstração:** Sendo  $n$  o número de conjuntos convexos  $K_i$  intersectados pela faixa  $B$ , temos:

$$\int_{B \cap K_i \neq \emptyset} n dB = \sum_1^N m(B; B \cap K_i \neq \emptyset) = \sum_1^N L_i + \pi \cdot a \cdot N$$

Assim,

$$\mathbb{E}(n) = \frac{\sum_{i=1}^N m(B; B \cap K_i \neq \emptyset)}{m(B; B \cap K \neq \emptyset)} = \frac{\sum_{i=1}^N L_i + \pi \cdot a \cdot N}{L + \pi \cdot a}$$

□

## Conjuntos de Pontos, Retas e Faixas e Fórmulas

### Integrais

**Definição 2.67** A densidade para conjuntos de pontos e faixas  $(P, B)$ , assumindo que  $P$  e  $B$  são independentes é dada por:

$$dP \wedge dB$$

Para as Proposições 5.3 e 2.69, tome  $D$  um domínio no plano, não necessariamente convexo, de área  $F$ .

**Proposição 2.68** (Primeira Fórmula Integral) Sendo  $B$  uma faixa que intesecta  $D$  e tal que a área de  $B \cap D$  é  $f$ , então

$$m(P, B; P \in B \cap D) = \int_{B \cap D \neq \emptyset} f dB = \pi \cdot a \cdot F$$

## 2 Resultados

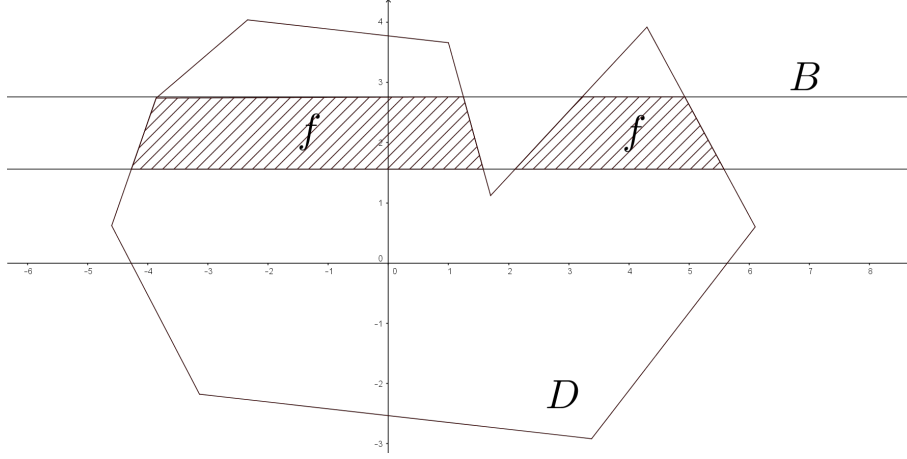


Figura 2.10: Área  $f$  entre Faixa  $B$  e Domínio  $D$

**Demonstração:** Por um lado,  $m(P, B; P \in B \cap D) = \int_{P \in B \cap D \neq \emptyset} dP \wedge dB = \int_{B \cap D \neq \emptyset} f dB$ . Por outro lado, considere fixado um ponto  $P \in B \cap D$ . Assim, de acordo com a Proposição 3.4,

$$m(P, B; P \in B \cap D) = \int_{P \in B \cap D \neq \emptyset} dP \wedge dB = \int_{P \in D} \pi \cdot a dP = \pi \cdot a \int_{P \in D} dP = \pi \cdot a \cdot F$$

Portanto,

$$\int_{B \cap D \neq \emptyset} f dB = m(P, B; P \in B \cap D) = \pi \cdot a \cdot F$$

□

**Proposição 2.69** Tome  $L$  como o perímetro do envoltório convexo de  $D$ . Então, se  $P$  e  $B$  são escolhidos aleatoriamente de modo que  $P \in D$  e  $B \cap D \neq \emptyset$ , a probabilidade de  $P$  pertencer a  $B \cap D$  é:

$$p = \frac{\pi \cdot a}{L + \pi \cdot a}.$$

E o valor esperado para a área  $f$  é:

$$\mathbb{E}(f) = \frac{\pi \cdot a \cdot F}{L + \pi \cdot a}.$$

**Demonstração:** A probabilidade de  $P$  pertencer a  $B \cap D$  é igual a

$$p = \frac{m(P, B; P \in (B \cap D))}{m(P; P \in D) \cdot m(B; B \cap D \neq \emptyset)} = \frac{\pi \cdot a \cdot F}{F(L + \pi a)} = \frac{\pi \cdot a}{L + \pi \cdot a}$$



## 2 Resultados

E para o valor esperafo de  $f$ , temos que:

$$\mathbb{E}(f) = \frac{m(P, B; P \in (B \cap D))}{m(B; B \cap D \neq \emptyset)} = \frac{\pi.a.F}{L + \pi.a}$$

□

**Definição 2.70** Tome  $K$  um conjunto convexo e considere o conjunto de pares  $(G, B)$ , em que  $B$  são faixas e  $G$  são retas (não necessariamente a reta central de  $B$ ), de modo que  $G \cap B \cap K \neq \emptyset$ . A densidade para conjuntos de retas e faixas é:

$$dG \wedge dB$$

**Proposição 2.71** (segunda fórmula integral) Sejam  $K$  um conjunto convexo,  $B$  uma faixa tal que  $B \cap K \neq \emptyset$ , e  $u$  o perímetro de  $B \cap K$ , então a medida de todos os pares de retas  $G$  e faixas  $B$  é

$$m(G, B; G \cap B \cap K \neq \emptyset) = \int_{B \cap K \neq \emptyset} u dB = 2.\pi.F + \pi.a.L$$

## 2 Resultados

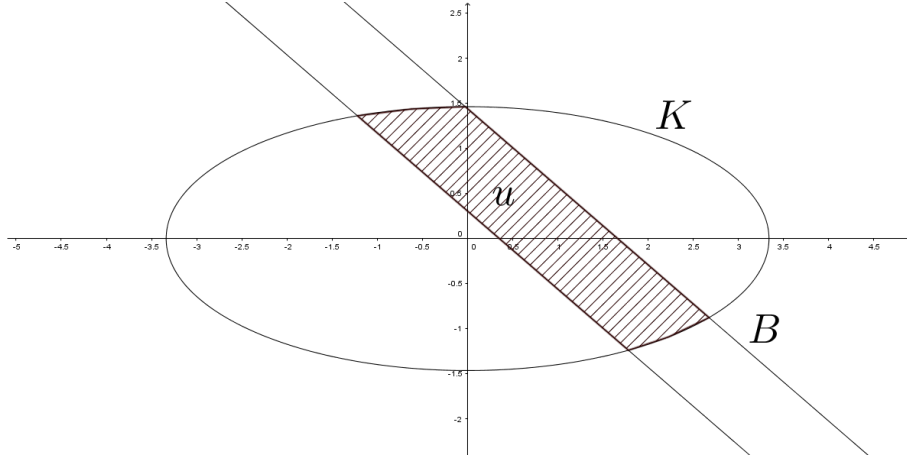


Figura 2.11: Perímetro  $u$  entre Faixa  $B$  e Convexo  $K$

**Demonstração:** Por um lado, fixando uma reta  $G$  e calculando a integral sobre todas as faixas  $B$  tais que  $G \cap B \cap K \neq \emptyset$ :

$$\begin{aligned} m(G, B; G \cap B \cap K \neq \emptyset) &= \int_{G \cap B \cap K \neq \emptyset} dG \wedge dB = \int_{G \cap K \neq \emptyset} (2 \cdot \sigma + \pi \cdot a) dG = \\ &= 2 \int_{G \cap K \neq \emptyset} \sigma dG + \pi \cdot a \int_{G \cap K \neq \emptyset} dG = 2 \cdot \pi \cdot F + \pi \cdot a \cdot L \end{aligned}$$

Por outro lado,  $m(G, B; G \cap B \cap K \neq \emptyset) = \int_{B \cap K \neq \emptyset} u dB$ . Portanto

$$m(G, B; G \cap B \cap K \neq \emptyset) = \int_{B \cap K \neq \emptyset} u dB = 2 \cdot \pi \cdot F + \pi \cdot a \cdot L$$

□

**Proposição 2.72** *Sejam  $G$  e  $B$  uma reta e uma faixa de largura  $a$ , respectivamente, escolhidas aleatoriamente tais que  $G \cap K \neq \emptyset$  e  $B \cap K \neq \emptyset$ . A probabilidade de que  $G \cap B \cap K \neq \emptyset$  é:*

$$p = \frac{2 \cdot \pi \cdot F + \pi \cdot a \cdot L}{L(L + \pi \cdot a)}$$

O valor esperado para a fronteira de  $B \cap K$  é:

$$\mathbb{E}(u) = \frac{2 \cdot \pi \cdot F + \pi \cdot a \cdot L}{L + \pi \cdot a}$$

**Demonstração:** A probabilidade de ocorrer o evento  $G \cap B \cap K \neq \emptyset$  é igual a

$$p = \frac{m(G, B; G \cap B \cap K \neq \emptyset)}{m(G; G \cap K \neq \emptyset) \cdot m(B; B \cap K \neq \emptyset)} = \frac{2 \cdot \pi \cdot F + \pi \cdot a \cdot L}{L(L + \pi \cdot a)}.$$

## 2 Resultados

E para o valor esperado de  $u$ , temos que:

$$\mathbb{E}(u) = \frac{m(G, B; G \cap B \cap K \neq \emptyset)}{m(B; B \cap K \neq \emptyset)} = \frac{2\pi.F + \pi.a.L}{L + \pi.a}$$

□

**Definição 2.73** Sendo  $K$  um conjunto convexo e  $(B_1, B_2)$  pares de faixas de larguras  $a_1$  e  $a_2$ , respectivamente, tais que  $B_1 \cap B_2 \cap K \neq \emptyset$ , a densidade para o par  $(B_1, B_2)$  é

$$dB_1 \wedge dB_2.$$

Nas condições da Definição 3.15 temos a seguinte proposição:

**Proposição 2.74** A medida de todos os pares de faixas  $(B_1, B_2)$  tais que  $B_1 \cap B_2 \cap K \neq \emptyset$  é igual a

$$m(B_1, B_2; B_1 \cap B_2 \cap K \neq \emptyset) = \int_{B_1 \cap B_2 \cap K \neq \emptyset} dB_1 \wedge dB_2 = 2\pi.F + \pi.a_1.L + \pi.a_2(L + \pi.a_1)$$

**Demonstração:** Fixando-se  $B_1$  tal que  $B_1 \cap K \neq \emptyset$ , e tomando-se  $B_2$  adequadamente, podemos obter a medida de  $B_1 \cap K$  sobre  $B_2$ :

$$\begin{aligned} m(B_1, B_2; B_1 \cap B_2 \cap K \neq \emptyset) &= \int_{B_1 \cap B_2 \cap K \neq \emptyset} dB_2 \wedge dB_1 = \int_{B_1 \cap K \neq \emptyset} (u_1 + \pi.a_2) dB_1 = \\ &= \int_{B_1 \cap K \neq \emptyset} u_1 dB_1 + \pi.a_2 \int_{B_1 \cap K \neq \emptyset} dB_1 = 2\pi.F + \pi.a_1.L + \pi.a_2(L + \pi.a_1), \end{aligned}$$

. de acordo com a Proposição 2.71

□

**Proposição 2.75** Se  $B_1$  e  $B_2$  são faixas aleatórias de largura  $a_1$  e  $a_2$ , respectivamente, que intersectam o conjunto convexo  $K$ , a probabilidade de  $B_1 \cap B_2 \cap K \neq \emptyset$  é igual a

$$p = \frac{2\pi.F + \pi.L(a_1 + a_2) + \pi^2.a_1.a_2}{(L + \pi.a_1).(L + \pi.a_2)}.$$

**Demonstração:** Temos que

$$p = \frac{m(B_1, B_2; B_1 \cap B_2 \cap K \neq \emptyset)}{m(B_1; B_1 \cap K \neq \emptyset).m(B_2; B_2 \cap K \neq \emptyset)} = \frac{2\pi.F + \pi.L(a_1 + a_2) + \pi^2.a_1.a_2}{(L + \pi.a_1).(L + \pi.a_2)}.$$

□

Nesta seção destacamos um problema importante da Geometria Integral que fez parte do nosso estudo. A demonstração que aqui apresentaremos esta baseada nos resultados sobre densidade de faixas.

**Problema 2.76** (*Problema da Agulha de Buffon*) Considere sobre um plano  $\pi$  um conjunto  $C$  de retas paralelas que distam  $D$  uma da outra. Qual é a probabilidade de que uma agulha de tamanho  $l < D$ , jogada aleatoriamente sobre  $\pi$  interseste uma das retas de  $C$ ?

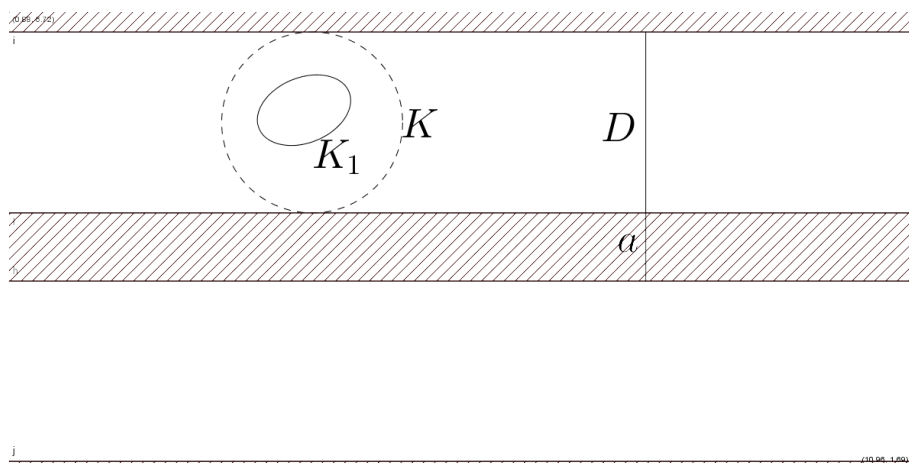


Figura 2.12: Plano Problema Agulha de Buffon

**Demonstração:** Tome aleatoriamente um conjunto convexo  $K$  de largura constante igual a  $D$  e um conjunto convexo  $K_1$  contido em  $K$  sobre um plano no qual são consideradas faixas  $B$  de largura  $a$ , distantes  $D$  uma da outra. Assim  $K$  encontrará uma única faixa  $B$  e a probabilidade de que  $K_1$  encontre uma destas faixas é

$$p = \frac{L_1 + \pi \cdot a}{L + \pi \cdot a},$$

onde  $L$  e  $L_1$  denotam os comprimentos de  $K$  e  $K_1$ , respectivamente. Como  $L = \pi \cdot D$  então

$$p = \frac{L_1 + \pi \cdot a}{\pi(D + a)}.$$

## 2 Resultados

O problema da agulha de Buffon pode ser então resolvido tomando-se  $a = 0$  (as faixas reduzem-se a retas) e  $K_1$  como um segmento de reta de comprimento  $L_1 = 2.s$ . Consequentemente

$$p = \frac{2.s}{\pi.D}$$

□

## Cronograma

Cronograma da segunda parte da Iniciação Científica:

**Fevereiro - Março:** Grupo de Movimentos no Plano: Densidade Cinemática

**Abril - Maio:** Fórmulas Fundamentais de Poincaré e Blaschke

**Junho - Julho:** Figuras em Rede e Relatório Final.

### 3.1 Conjuntos de faixas no plano

No que segue desta seção, vamos fazer algumas definições e provar algumas proposições que serão necessárias para a resolução do problema da agulha de Buffon, que será exibida na conclusão deste relatório.

**Definição 3.1** *Uma faixa  $B$  de largura  $a$  no plano consiste em uma parte fechada do plano entre duas retas paralelas cuja distância entre uma e outra é  $a$ .*

**Definição 3.2** *A posição de uma faixa  $B$  será determinada pela posição da reta que equidista das retas paralelas da fronteira da faixa.*

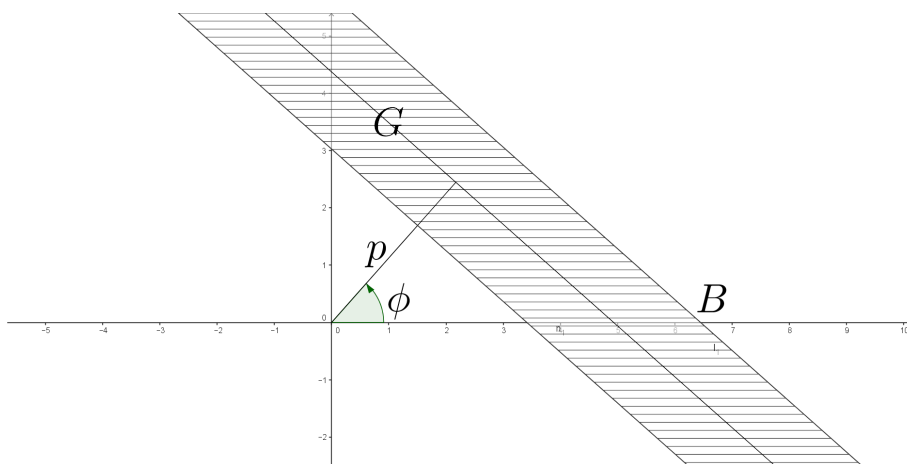


Figura 3.1: Posição de uma Faixa

**Definição 3.3** *A densidade de um conjunto de faixas  $B(p, \phi)$  no plano é:*

$$dB = dp \wedge d\phi,$$

onde  $p$  e  $\phi$  denotam as coordenadas da reta central  $G$  da faixa  $B$ .

### 3 Resultados

**Proposição 3.4** *A medida de um conjunto de faixas  $B$  no plano sobre um conjunto convexo fechado  $K$  que intercepa  $B$  é*

$$m(B; B \cap K \neq \emptyset) = \int_{B \cap K \neq \emptyset} dB = L + \pi.a,$$

onde  $L$  é o perímetro de  $K$  e  $a$  a largura de  $B$ .

**Demonstração:** Denotamos por  $G$  a reta central de  $B$ , assim:

$$\int_{B \cap K \neq \emptyset} dB = \int_{G \cap K_{a/2} \neq \emptyset} dp \wedge d\phi = L + 2.\pi.\frac{a}{2} = L + \pi.a$$

□

**Proposição 3.5** *Tome  $K_1$  um conjunto convexo contido em um outro conjunto convexo  $K$  fechado. A probabilidade que uma faixa  $B$  de largura  $a$  intersecte  $K_1$ , dado que ela intersecta  $K$ , é de:*

$$p = \frac{L_1 + \pi.a}{L + \pi.a}$$

**Demonstração:** Por definição de probabilidade:

$$p = \frac{m(B; K_1 \cap B \neq \emptyset)}{m(B; K \cap B \neq \emptyset)} = \frac{L_1 + \pi.a}{L + \pi.a}$$

□

## 3.2 O grupo de movimentos no plano: densidade cinemática

Para esta seção vamos fazer algumas definições e provar algumas proposições que serão necessárias para a resolução de um problema que será proposto na conclusão deste relatório.

**Definição 3.6** *Assuma o plano euclidiano referenciado por um sistema retangular de coordenadas cartesianas. Definimos um movimento como a transformação:*

$$u : P(x, y) \rightarrow P'(x', y')$$

### 3 Resultados

Que será representado pelas equações:

$$u \begin{cases} x' = x.\cos(\phi) - y.\sin(\phi) + a \\ y' = x.\sin(\phi) + y.\cos(\phi) + b \end{cases}$$

onde  $a, b, \phi$  são parâmetros, de modo que  $-\infty < a, b < \infty$  e  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ .

**Definição 3.7** Dizemos que  $K$  e  $K'$  são congruentes, se  $K'$  é a imagem  $K$  sobre um movimento  $u$ , ou seja,  $K' = u \cdot K$

**Lema 3.8** Podemos induzir uma interpretação geométrica para os parâmetros  $a, b, \phi$ . Suponha  $(O; x, y)$  um sistema de coordenadas cartesianas com origem  $O$  e eixos  $x$  e  $y$ . Dado um movimento  $u$ , se o sistema de coordenadas  $C$  for mapeado em um sistema  $(O'; x', y')$ , então os parâmetros  $a$  e  $b$  representam a translação em  $x$  e  $y$ , respectivamente, da origem  $O$  para  $O'$  e o parâmetro  $\phi$  representa uma rotação anti-horária do eixo  $x'$  em relação ao eixo  $x$ .

**Demonstração:** Suponha que tenhamos transladado por  $(a, b)$  e rotacionado por  $\phi$  o sistema  $(O'; x', y')$  com relação ao sistema  $(O; x, y)$ . Seja um ponto  $P$  de coordenadas  $(A, B)$  no sistema de coordenadas  $(O'; x', y')$ .

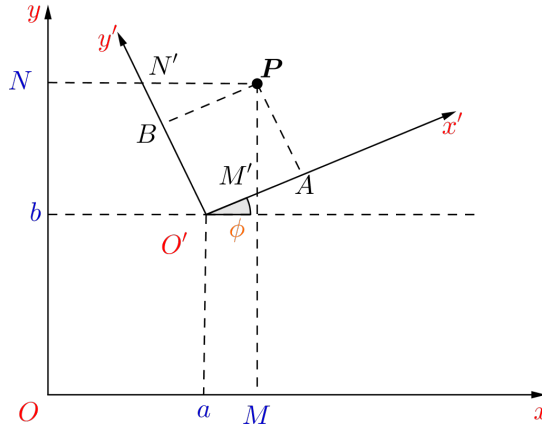


Figura 3.2: Sistema de Coordenadas Transladado

Queremos obter as coordenadas desse ponto no sistema original  $(O; x, y)$  e assim mostrar que as equações da Definição 3.6 valem. Assim, temos que:

$$\overline{O'M'}.\cos(\phi) + a = M$$



### 3 Resultados

$$\left(\overline{O'A} - \overline{M'A}\right).cos(\phi) + a = M$$

$$A.cos(\phi) - B.tan(\phi).cos(\phi) + a = M$$

$$M = A.cos(\phi) - B.sin(\phi) + a$$

Além disso, temos também:

$$\overline{O'N'}.cos(\phi) + b = N$$

$$\left(\overline{O'B} - \overline{BN'}\right).cos(\phi) + b = N$$

$$B.cos(\phi) + A.tan(\phi).cos(\phi) + b = N$$

$$N = B.cos(\phi) + A.sin(\phi) + b$$

Portanto, obtemos o seguinte sistema de equações para as coordenadas do ponto  $P$ :

$$\begin{cases} M = A.cos(\phi) - B.sin(\phi) + a \\ N = B.cos(\phi) + A.sin(\phi) + b \end{cases}$$

O que prova a interpretação geométrica para os parâmetros  $a, b, \phi$ .  $\square$

No que segue, encontraremos as 1 – formas  $\omega_1, \omega_2$  e  $\omega_3$ , que são invariantes a aplicação  $L_s^*$  induzida por  $L_s$ . Analogamente, encontraremos as 1 – formas invariantes a aplicação  $R_s^*$ .

**Observações 3.9** É usual representarmos o movimento  $u$  definido em 3.6 pela seguinte matriz:

$$u = \begin{pmatrix} cos(\phi) & -sin(\phi) & a \\ sin(\phi) & cos(\phi) & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Além disso, é fácil verificar que para fazermos uma composição de movimentos basta multiplicarmos as respectivas matrizes e para o movimento inverso basta invertemos a respectiva matriz.

**Definição 3.10** Defina o grupo de movimentos  $\mathfrak{N}$ , como um grupo de matrizes da forma mostrada na Observação 3.9, com o produto de matrizes como a operação do grupo.

**Definição 3.11** Seja um movimento  $s$  tal que  $s \in \mathfrak{N}$  e  $s := (a_0, b_0, \phi_0)$ . Cada movimento  $s$  define dois endomorfismos em  $\mathfrak{N}$ . A **transformação a esquerda**  $L_s : u \rightarrow s \cdot u$ , que pode

### 3 Resultados

ser escrita da seguinte maneira

$$L_s \begin{cases} a & \rightarrow a.\cos(\phi_0) - b.\sin(\phi_0) + a_0 \\ b & \rightarrow a.\sin(\phi_0) + b.\cos(\phi_0) + b_0 \\ \phi & \rightarrow \phi + \phi_0 \end{cases}$$

De maneira análoga temos a **transformação a direita**  $R_s : u \rightarrow u \cdot s$ , que pode ser escrita da seguinte maneira

$$R_s \begin{cases} a & \rightarrow a_0.\cos(\phi) - b.\sin(\phi) + a \\ b & \rightarrow a_0.\sin(\phi) + b.\cos(\phi) + b \\ \phi & \rightarrow \phi_0 + \phi \end{cases}$$

As formas explícitas para  $L_s$  e  $R_s$  apresentadas na Definição 3.11 serão demonstradas no Apêndice deste relatório.

**Definição 3.12** Defina as 1 – formas em  $\mathfrak{M}$  como qualquer expressão da seguinte tipo

$$\omega(u) = \alpha(u).da + \beta(u).db + \gamma(u).d\phi,$$

onde  $\alpha(u)$ ,  $\beta(u)$  e  $\gamma(u)$  são funções de classe  $\mathcal{C}^\infty$  definidas no espaço  $\mathfrak{M}$ .

**Observações 3.13** É fácil ver que o conjunto  $\mathfrak{U}$  de todas as 1 – formas de  $\mathfrak{M}$  em um ponto  $u$ , que juntamente com a adição e o produto por escalar definidos de maneira natural constituem um espaço vetorial de dimensão três  $(\mathfrak{U}, +, \cdot)$ . O qual chamaremos de espaço cotangente de  $\mathfrak{M}$  no ponto  $u$  e denotaremos por  $T_u^*$ . Note que as 1 – formas  $da$ ,  $db$  e  $d\phi$  constituem uma base para  $T_u^*$ .

**Observações 3.14** Note que as transformações a esquerda  $L_s$  e a direita  $R_s$  induzem em  $T_u^*$  as aplicações  $L_s^* : \omega(u) \rightarrow \omega(s \cdot u)$  e  $R_s^* : \omega(u) \rightarrow \omega(u \cdot s)$ . Assim, temos que as seguintes 1 – formas serão invariantes a  $L_s^*$  e  $R_s^*$

$$L_s^* \begin{cases} \omega_1 = \cos(\phi).da + \sin(\phi).db \\ \omega_2 = -\sin(\phi).da + \cos(\phi).db \\ \omega_3 = d\phi \end{cases} \quad R_s^* \begin{cases} \omega^1 = b.d\phi + da \\ \omega^2 = -a.d\phi + db \\ \omega^3 = d\phi \end{cases}$$

As expressões obtidas para  $\omega_1, \omega_2$  e  $\omega_3$ , assim como para  $\omega^1, \omega^2$  e  $\omega^3$ , na observação 3.14, serão demonstradas no Apêndice deste relatório.

**Definição 3.15** Sejam  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , 1 – formas invariantes a esquerda, então o produto exterior

$$dK = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$$

### 3 Resultados

é uma 3 – forma invariante a esquerda.

**Observações 3.16** Note que,  $dK = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = da \wedge db \wedge d\phi$ . Além disso, a menos de uma constante,  $dK$  é a unica 3 – forma invariante a esquerda em  $\mathfrak{M}$ .

**Observações 3.17** Analogamente, podemos definir uma 3 – forma invariante a direita, tal que,  $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = da \wedge db \wedge d\phi = dK$ . Além disso, observa-se também que, a menos de uma constante, essa é a unica 3 – forma invariante a direita em  $\mathfrak{M}$ .

As expressões obtidas para  $dK$  nas observações 3.16 e 3.17 são obtidas através do produto exterior diretamente.

**Observações 3.18** Podemos observar que diferenciando-se a identidade  $u.u^{-1} = e$ , onde  $u \in \mathfrak{M}$  e  $e \in \mathfrak{M}$  é a matriz identidade, obtemos que  $dK(u^{-1}) = -dK(u)$ . Daí segue que a 3 – forma definida em 3.15 é invariante sobre transformações à esquerda e direita e sobre inversão de movimento. Assim, a chamamos de **densidade cinemática** para um grupo de movimentos no plano. A densidade cinemática  $dK$  é um elemento de volume invariante no espaço dos grupos de movimentos  $\mathfrak{M}$ .

**Definição 3.19** Definimos que a integral sobre  $dK$  sobre um domínio em  $\mathfrak{M}$  é a medida desse conjunto de movimento (**medida cinemática**).

**Exemplo 3.20** Considere um retângulo  $K = 0ABC$  e um domínio fixado  $K_0$ , como mostrado na figura a seguir. Podemos nos perguntar sobre a medida do conjunto de movimentos  $u$  tais que  $u.K \cap K_0 \neq \emptyset$ . Essa medida é a integral de  $dK = da \wedge db \wedge d\phi$  sobre os pontos  $0'(a,b)$  e os ângulos  $\phi$  tais que  $u.K \cap K_0 \neq \emptyset$ . Como  $dK$  é invariante a translações a direita e a esquerda e inversões de movimento, não precisamos nos preocupar com os outros casos pois todos são equivalentes. A título de exemplificação, se  $K$  reduzir-se a um ponto  $P_0(0,0)$  e colocarmos  $u.P_0 = P(a,b)$ , nós temos:

$$m(u; uP_0 \in K_0) = \int_{uP_0 \in K_0} da \wedge db \wedge d\phi = 2.\pi \int_{uP_0 \in K_0} da \wedge db = 2.\pi.F_0, \quad (3.1)$$

onde  $F_0$  é a área de  $K_0$ . A equação 3.1 é uma simples, porém útil, fórmula integral.

**Observações 3.21** Podemos obter uma outra expressão para a densidade cinemática. Tome  $(P; x', y')$  um referencial móvel definido pelo ponto  $P(a,b)$  e pelo ângulo  $\phi$  que a reta orientada  $\overrightarrow{Px'}$  faz com o eixo  $x$ . Se nós definimos esse referencial móvel por essas novas coordenadas vamos obter uma nova expressão para  $dK$ .

### 3 Resultados

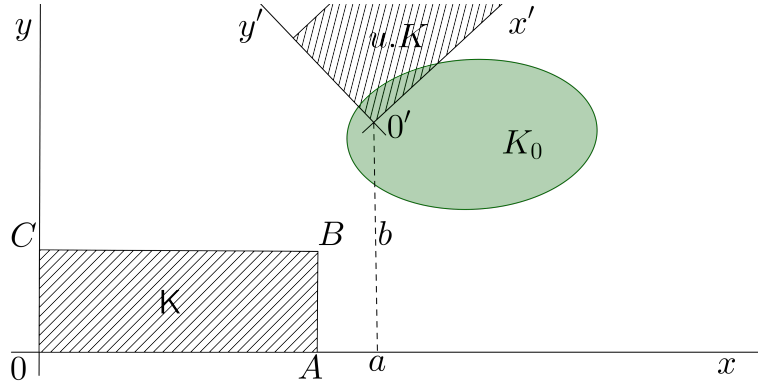
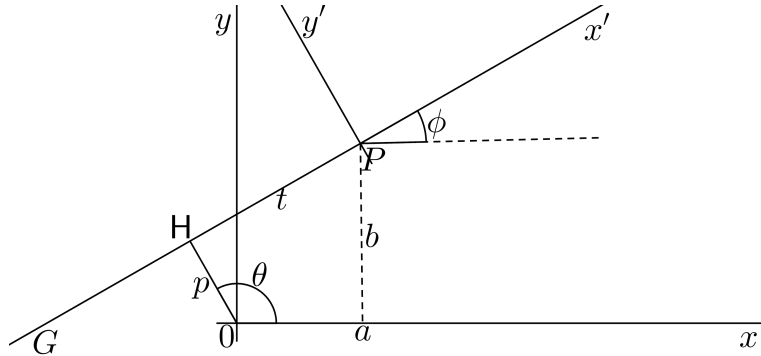


Figura 3.3: Posições do retângulo  $K$  e domínio  $K_0$

**Lema 3.22** *Sejam  $(P; x', y')$  um referencial móvel,  $\overrightarrow{Px'}$  uma reta orientada que denotaremos por  $G(p, \theta)$ , onde  $p$  é a distância da reta  $\overrightarrow{Px'}$  à origem do sistema de coordenadas  $(0; x, y)$  e  $\phi$  o ângulo desta reta com o eixo  $x$ , e  $t = \overline{PH}$ , onde  $P$  é o ponto da reta  $\overrightarrow{Px'}$  com sua perpendicular que passa por  $0$ . Assim as fórmulas para a transformação  $(p, \theta, t) \rightarrow (a, b, \phi)$ , onde  $\theta$  é o ângulo do segmento  $p$  com o eixo  $x$ , são dadas por:*

$$a = p.\cos\theta + t.\sin\theta \quad (3.2) \quad b = p.\sin\theta - t.\cos\theta \quad (3.3) \quad \phi = \theta - \frac{\pi}{2} \quad (3.4)$$



**Demonstração:** Obtemos as transformações 3.2 e 3.3 diretamente da transformação 3.4 e de que  $a = p.\cos\theta + t.\cos\phi$  e  $b = p.\sin\theta + t.\sin\phi$ . A transformação 3.3 é obtida diretamente à partir de observações geométricas tomadas as hipóteses.  $\square$

**Proposição 3.23** *Seja a densidade cinemática dada pela Observação 3.16 ( $dK = da \wedge db \wedge d\phi$ ) temos que*

$$dK = dG^* \wedge dt, \quad (3.5)$$

onde  $G^*$  denota que a reta  $G$  deve ser considerada com orientação.

### 3 Resultados

**Demonstração:** A demonstração segue diretamente do Lema 3.22, diferenciando-se as equações 3.2, 3.3 e 3.4 e calculando o produto exterior. Além disso, note que  $dG^* = dp \wedge d\theta$  e, assim, obtemos:

$$dK = da \wedge db \wedge d\phi = dp \wedge d\theta \wedge dt = dG^* \wedge dt$$

□

**Proposição 3.24** *Sejam um conjunto convexo  $K_0$  cuja área é dada por  $F_0$  e perímetro  $L_0$  e  $K$  um segmento orientado de comprimento  $l$ . A medida do conjunto de segmentos congruentes a  $K$  que interceptam  $K_0$ , ou seja, o grupo de movimentos aplicados em  $K$  de modo que  $u.K \cap K_0 \neq \emptyset$ , é dada por*

$$m(K; K \cap K_0 \neq \emptyset) = 2.\pi.F_0 + 2.l.L_0$$

**Demonstração:** Para a demonstração escolheremos a equação 3.5 obtida na Proposição 3.23 para densidade cinemática, assim temos que

$$dK = dG^* \wedge dt$$

Pela Definição 3.19 temos que a medida para esse grupo de movimentos é a integral da equação acima sobre as restrições do seu problema. Portanto,

$$m(K; K \cap K_0 \neq \emptyset) = \int_{K \cap K_0 \neq \emptyset} dK = \int_{K \cap K_0 \neq \emptyset} dG^* \wedge dt = 2 \int_{K \cap K_0 \neq \emptyset} dG \wedge dt \quad (3.6)$$

Para calcularmos explicitamente essa integral, vamos utilizar a seguinte expressão para  $dt$ :

$$dt = ds + p.d\theta, \quad (3.7)$$

onde  $ds$  representa uma variação infinitesimal de  $da$  e  $db$  na direção  $\phi$ . Seja  $\sigma$  o comprimento da corda de  $K$  que intercepta  $K_0$ . Logo, substituindo a equação 3.7 em

### 3 Resultados

3.6, temos que

$$\begin{aligned}
 m(K; K \cap K_0 \neq \emptyset) &= 2 \left( \int_{K \cap K_0 \neq \emptyset} ds dG + p d\phi dG \right) \\
 &= 2 \left[ \left( \int_{G \cap K_0 \neq \emptyset} ds dG \right) + \left( \int_{G \cap K_0 \neq \emptyset} p d\phi dG \right) \right] \\
 &= 2 \left[ \left( \int_{G \cap K_0 \neq \emptyset} \sigma dG \right) + \left( \int_{G \cap K_0 \neq \emptyset} l dG \right) \right] \\
 &= 2 \left[ \left( \int_{G \cap K_0 \neq \emptyset} \sigma dp \wedge d\theta \right) + \left( l \int_{G \cap K_0 \neq \emptyset} dG \right) \right] \\
 &= 2 \left[ \left( \int_0^\pi \int_{G \cap K_0 \neq \emptyset} \sigma dp \wedge d\theta \right) + (l.L_0) \right] \\
 &= 2[(\pi.F_0) + (l.L_0)] \\
 &= 2.\pi.F_0 + 2.l.L_0
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

□

A equação 3.7 desta demonstração será demonstrada detalhadamente no Apêndice deste relatório.

**Exemplo 3.25** *Vamos avaliar a medida de um conjunto  $K$ , de segmentos orientados, de comprimento  $l$  que não podem interceptar dois lados não-consecutivos e interceptam exatamente  $i$  lados de um polígono convexo  $K_0$ . Seja  $m_0$  a medida de um conjunto de segmentos  $K$  que não interceptam nenhum dos lados de  $K_0$ . Seja  $m_1$  a medida de um conjunto de segmentos  $K$  que interceptam exatamente 1 dos lados de  $K_0$ . Seja  $m_2$  a medida de um conjunto de segmentos  $K$  que interceptam exatamente 2 dos lados de  $K_0$ . Temos que  $m_0, m_1$  e  $m_2$  caracterizam todas as possibilidades de posições dos segmentos de  $K$ . Pois, suponha, por absurdo, que consideremos a medida  $m_3$ , de modo que fosse a medida de um conjunto  $K$  que interceptam exatamente 3 dos lados de  $K_0$ . Mas, por hipótese, os segmentos não podem interceptar dois lados não-consecutivos, o que excluiu caso em que ocorre  $m_3$ . Podemos generalizar o raciocínio para  $m_n$  e, pela hipótese obteremos que é necessário e suficiente  $n \leq 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , para caracterizar todas as possibilidades de posições dos segmentos de  $K$ . Assim, temos que:*

$$\begin{cases} m_0 + m_1 + m_2 &= 2.\pi.F_0 + 2.l.L_0 \\ m_1 + 2.m_2 &= 4.l.L_0 \\ m_2 &= \frac{l^2}{2} \sum_{A_i} ((\pi - A_i).cotg A_i - 1) \end{cases} \tag{3.9}$$

### 3 Resultados

onde  $A_i$ 's representam cada um dos ângulos entre os lados de  $K_0$ . Resolvendo o sistema 3.6 temos que

$$\begin{cases} m_0 = 2.\pi.F_0 - 2.l.L_0 + \frac{l^2}{2} \sum_{A_i} ((\pi - A_i).cotg A_i - 1) \\ m_1 = 4.l.L_0 - l^2 \sum_{A_i} ((\pi - A_i).cotg A_i - 1) \\ m_2 = \frac{l^2}{2} \sum_{A_i} ((\pi - A_i).cotg A_i - 1) \end{cases} \quad (3.10)$$

As equações utilizadas no sistema 3.9 serão demonstradas no Apêndice deste relatório.

Algumas fórmulas integrais são obtidas analisando como conjuntos convexos se interceptam, o desenvolvimento dessas fórmulas não são necessárias para a resolução do problema que será proposto na Conclusão deste relatório, entretando são de grande importância para outros problemas, portanto serão apresentadas no Apêndice deste relatório.

Nesta seção destacamos um problema importante da Geometria Integral que fez parte do nosso estudo.

**Exemplo 4.1** (*Problema da Agulha de Buffon*) Considere sobre um plano  $\Pi$  um conjunto  $C$  de retas paralelas que distam  $D$  uma da outra. Qual é a probabilidade de que uma agulha de tamanho  $l < D$ , jogada aleatoriamente sobre  $\Pi$  intersepte uma das retas de  $C$ ?

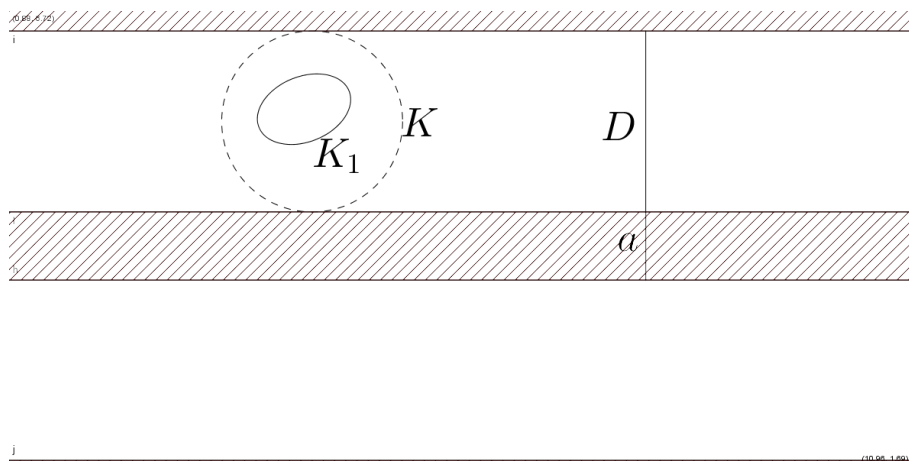


Figura 4.1: Problema Agulha de Buffon

**Demonstração:** Tome aleatoriamente um conjunto convexo  $K$  de largura constante igual a  $D$  e um conjunto convexo  $K_1$  contido em  $K$  sobre um plano no qual são consideradas faixas  $B$  de largura  $a$ , distantes  $D$  uma da outra. Assim  $K$  encontrará uma única faixa  $B$  e a probabilidade de que  $K_1$  encontre uma destas faixas é

$$p = \frac{L_1 + \pi \cdot a}{L + \pi \cdot a},$$

onde  $L$  e  $L_1$  denotam os comprimentos de  $K$  e  $K_1$ , respectivamente. Como  $L = \pi \cdot D$  então

$$p = \frac{L_1 + \pi \cdot a}{\pi(D + a)}.$$



## 4 Conclusões

O problema da agulha de Buffon pode ser então resolvido tomando-se  $a = 0$  (as faixas reduzem-se a retas) e  $K_1$  como um segmento de reta de comprimento  $L_1 = 2.s$ . Consequentemente

$$p = \frac{2.s}{\pi.D}$$

□

**Exemplo 4.2** (*Probabilidade de detectar um domínio convexo por uma procura linear*)  
Seja  $K_0$  um domínio convexo dentro do qual está outro domínio convexo  $K$ . O processo de fazer um corte aleatório em  $K_0$  encontrar  $K$  é chamado de **procura linear**. Para o problema em questão suponha  $K$  um retângulo de lados  $a, b (a > s, b > s)$ , onde  $s$  é o comprimento das retas em  $K_0$ . Qual a probabilidade desse reta em  $K_0$  interceptar o retângulo  $K$ .

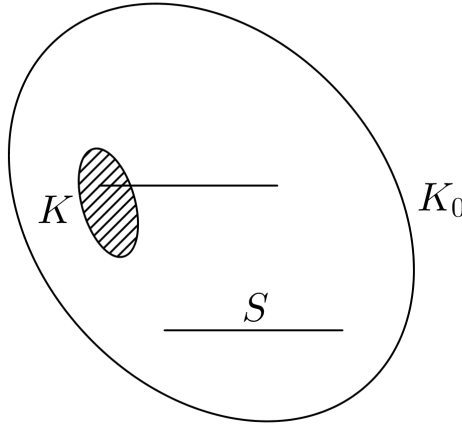


Figura 4.2: Problema da Procura Linear

**Demonstração:** Suponha que todas as retas que estão em  $K_0$  formem um conjunto  $S$ . Por definição de probabilidade temos que

$$p = \frac{m(S; S \cap K \neq \emptyset)}{m(s \subset K_0)} \quad (4.1)$$

Segue da equação 3.8 da Proposição 3.24 que

$$m(S; S \cap K \neq \emptyset) = 2.\pi.F + 2.s.L, \quad (4.2)$$

onde  $F$  denota a área de  $K$ ,  $s$  o comprimento das retas de  $S$  e  $L$  o perímetro de  $K$ .

#### 4 Conclusões

Note que,  $m(s \subset K_0) = m_0$ , onde  $m_0$  está bem definido no Exemplo 3.25, logo

$$\begin{aligned}
 m(s \subset K_0) &= m_0 \\
 &= 2.\pi.F_0 - 2.l.L_0 + \frac{l^2}{2} \sum_{A_i} ((\pi - A_i).cotg A_i - 1) \\
 &= 2.\pi.a.b - 2.l.(2.a + 2.b) + \frac{l^2}{2}.4.\left(\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right).cotg \frac{\pi}{2} - 1\right) \\
 &= 2.\left[\pi.a.b - l.(2.a + 2.b) + l^2\left(\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right).\frac{cos \pi/2}{sin \pi/2} - 1\right)\right] \\
 &= 2.\left[\pi.a.b - 2.l.(a + b) + l^2(-1)\right] \\
 &= 2.\left(\pi.a.b - 2.l.(a + b) - l^2\right)
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Agora, usando 4.3 e 4.2 em 4.1 segue que

$$p = \frac{\pi.F + s.L}{\pi.a.b - 2.l.(a + b) - l^2}$$

□

## 5.1 As formas explícitas para $L_s$ e $R_s$

De acordo com a Definição 3.11 temos que a transformação a esquerda é dada por  $L_s : u \rightarrow s \cdot u$ . Sejam as seguintes matrizes que representam  $u$ , uma transformação arbitrária, e  $s$  como na Definição 3.11

$$u = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & a \\ \sin\phi & \cos\phi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad s = \begin{pmatrix} \cos\phi_0 & -\sin\phi_0 & a_0 \\ \sin\phi_0 & \cos\phi_0 & b_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos então que

$$\begin{aligned} L_s : \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & a \\ \sin\phi & \cos\phi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} \cos\phi_0 & -\sin\phi_0 & a_0 \\ \sin\phi_0 & \cos\phi_0 & b_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & a \\ \sin\phi & \cos\phi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\phi + \phi_0) & -\sin(\phi + \phi_0) & a.\cos\phi_0 - b.\sin\phi_0 + a_0 \\ \sin(\phi + \phi_0) & \cos(\phi + \phi_0) & a.\sin\phi_0 + b.\cos\phi_0 + b_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Portanto, concluímos o que queríamos, ou seja, a transformação a esquerda pode ser dada explicitamente da seguinte maneira

$$L_s \begin{cases} a \rightarrow a.\cos(\phi_0) - b.\sin(\phi_0) + a_0 \\ b \rightarrow a.\sin(\phi_0) + b.\cos(\phi_0) + b_0 \\ \phi \rightarrow \phi + \phi_0 \end{cases}$$

Analogamente, temos a transformação a direita dada por  $R_s : u \rightarrow u \cdot s$ . Sejam  $s$  e  $u$  da maneira que expressamos acima, logo

$$R_s : \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & a \\ \sin\phi & \cos\phi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & a \\ \sin\phi & \cos\phi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\phi_0 & -\sin\phi_0 & a_0 \\ \sin\phi_0 & \cos\phi_0 & b_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\phi_0 + \phi) & -\sin(\phi_0 + \phi) & a_0 \cos \phi - b_0 \sin \phi + a \\ \sin(\phi_0 + \phi) & \cos(\phi_0 + \phi) & a_0 \sin \phi + b_0 \cos \phi + b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto, concluímos o que queríamos, ou seja, a transformação a direita pode ser dada explicitamente da seguinte maneira

$$R_s \begin{cases} a \rightarrow a_0 \cos(\phi) - b \sin(\phi) + a \\ b \rightarrow a_0 \sin(\phi) + b \cos(\phi) + b \\ \phi \rightarrow \phi_0 + \phi \end{cases}$$

## 5.2 As expressões para as 1 – formas em $\mathfrak{N}$

Para encontrar uma forma explicita para as 1 – formas invariantes a aplicação  $L_s^* : \omega(u) \rightarrow \omega(s \cdot u)$  considere a matriz  $\Omega_L := u^{-1} du$ . Vamos verificar que  $\Omega_L$  é realmente invariante a  $L_s^*$

$$L_s^* \Omega_L = (s \cdot u)^{-1} d(s \cdot u) = u^{-1} \cdot s^{-1} \cdot s \cdot du = u^{-1} du = \Omega_L$$

Assim, os elementos de  $\Omega_L$  são 1 – formas invariantes a aplicação  $L_s^*$ . Para definir explicitamente os elementos de  $\Omega_L$  considere a matriz  $u \in \mathfrak{N}$ , sua inversa e sua diferencial.

$$u = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & a \\ \sin \phi & \cos \phi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad u^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & -a \cos \phi - b \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi & a \sin \phi - b \cos \phi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$du = \begin{pmatrix} -\sin \phi \cdot d\phi & -\cos \phi \cdot d\phi & da \\ \cos \phi \cdot d\phi & -\sin \phi \cdot d\phi & db \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Temos então que

$$\Omega_L = u^{-1} du = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & -a \cos \phi - b \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi & a \sin \phi - b \cos \phi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \phi \cdot d\phi & -\cos \phi \cdot d\phi & da \\ \cos \phi \cdot d\phi & -\sin \phi \cdot d\phi & db \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

## 5 Apêndice

$$= \begin{pmatrix} 0 & -d\phi & \cos\phi.da + \sin\phi.db \\ d\phi & 0 & -\sin\phi.da + \cos\phi.db \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, concluímos o que queríamos, ou seja, as 1 – formas invariantes a aplicação  $L_s^*$  podem ser dadas explicitamente da seguinte maneira

$$L_s^* \begin{cases} \omega_1 = \cos(\phi).da + \sin(\phi).db \\ \omega_2 = -\sin(\phi).da + \cos(\phi).db \\ \omega_3 = d\phi \end{cases}$$

Analogamente, para encontrar as 1 – formas invariantes a aplicação  $R_s^* : \omega(u) \rightarrow \omega(u \cdot s)$  considere a matriz  $\Omega_R := duu^{-1}$ . Vamos verificar que  $\Omega_R$  é realmente invariante a  $R_s^*$

$$R_s^* \Omega_R = d(u \cdot s)(u \cdot s)^{-1} = du \cdot s \cdot s^{-1} \cdot u^{-1} = duu^{-1} = \Omega_R$$

Assim, os elementos de  $\Omega_R$  são 1 – formas invariantes a aplicação  $R_s^*$ . Para definir explicitamente os elementos de  $\Omega_R$  considere a matriz  $u \in \mathfrak{M}$ , sua inversa e sua diferencial dadas acima. Temos então que

$$\Omega_R = duu^{-1} = \begin{pmatrix} -\sin\phi.d\phi & -\cos\phi.d\phi & da \\ \cos\phi.d\phi & -\sin\phi.d\phi & db \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & -a.\cos\phi - b.\sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi & a.\sin\phi - b.\cos\phi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & d\phi & b.d\phi + da \\ d\phi & 0 & -a.d\phi + db \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, concluímos o que queríamos, ou seja, as 1 – formas invariantes a aplicação  $R_s^*$  podem ser dadas explicitamente da seguinte maneira

$$R_s^* \begin{cases} \omega^1 = b.d\phi + da \\ \omega^2 = -a.d\phi + db \\ \omega^3 = d\phi \end{cases}$$

### 5.3 A equação 3.7

Considere as equações 3.2 e 3.3 do Lema 3.22. Vamos considerar o seguinte sistema

$$\begin{cases} a = p.\cos\theta + t.\sin\theta \\ b = p.\sin\theta - t.\cos\theta \end{cases} \quad (5.1)$$

Multipliquemos as equações do sistema 5.1 por  $(\sin\theta)$  e  $(-\cos\theta)$ , respectivamente. Assim, obtemos

$$\begin{cases} \sin\theta.a = p.\cos\theta.\sin\theta + t.\sin^2\theta \\ -\cos\theta.b = -p.\sin\theta.\cos\theta + t.\cos^2\theta \end{cases}$$


---


$$\sin\theta.a - \cos\theta.b = t \quad (5.2)$$

Diferenciando a equação 5.2 obtemos

$$dt = \sin\theta.da - \cos\theta.db + (a.\cos\theta + b.\sin\theta).d\theta \quad (5.3)$$

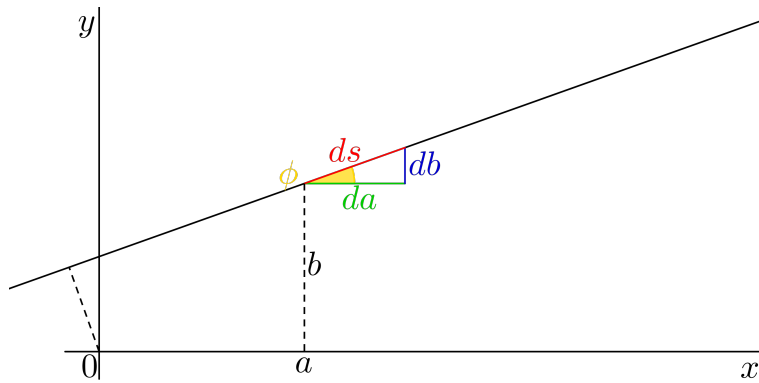
Multipliquemos, novamente, as equações do sistema 5.1 por  $(\cos\theta)$  e  $(\sin\theta)$ , respectivamente. Assim, obtemos

$$\begin{cases} \cos\theta.a = p.\cos^2\theta + t.\sin\theta.\cos\theta \\ \sin\theta.b = p.\sin^2\theta - t.\cos\theta.\sin\theta \end{cases}$$


---


$$\cos\theta.a + \sin\theta.b = p \quad (5.4)$$

Observe também que podemos considerar infinitésimos  $da$  e  $db$  na direção  $\phi$ , tendo somente como restrição que  $K \cap K_0 \neq \emptyset$  e  $K$  é determinado pela reta  $G$ . Como mostra a figura a seguir



## 5 Apêndice

Desta maneira, considerando os movimentos de  $K$ . Temos:

$$\begin{cases} da = \cos\phi.ds \\ db = \sin\phi.ds \end{cases}$$

Utilizando a equação 3.4 do Lema 3.22. Temos que

$$\begin{cases} da = \sin\theta.ds \\ db = -\cos\theta.ds \end{cases} \quad (5.5)$$

Multiplicamos as equações do sistema 5.5 por  $(\sin\theta)$  e  $(-\cos\theta)$ , respectivamente. Assim, obtemos

$$\begin{array}{l} \begin{cases} \sin\theta.da = \sin^2\theta.ds \\ -\cos\theta.db = \cos^2\theta.ds \end{cases} \\ \hline \sin\theta.da - \cos\theta.db = ds \end{array} \quad (5.6)$$

Finalmente, substituindo as equações 5.4 e 5.6 na equação 5.3 obtemos o que queríamos, ou seja, a seguinte equação para  $dt$

$$dt = ds + p.d\theta,$$

## 5.4 O sistema de equações 3.9

As equações do sistema 3.9 serão detalhadas nas próximas seções uma a uma.

### 5.4.1 Primeira equação

$$m_0 + m_1 + m_2 = 2.\pi.F_0 + 2.l.L_0$$

Para entender essa equação vamos considerar a medida para um conjunto de segmentos orientados que interceptam um conjunto convexo. Essa medida foi obtida na proposição 3.24 e é dada por

$$m(K; K \cap K_0 \neq \emptyset) = 2.\pi.F_0 + 2.l.L_0$$

Para essa medida são considerados os segmentos que estão no interior do conjunto convexo  $m_0$ , os segmentos que interceptam o bordo 1 vez  $m_1$  e os que interceptam 2 vezes o bordo  $m_2$ . Não existem segmentos que interceptem o bordo do convexo 3

## 5 Apêndice

vezes justamente pois ele é um convexo. Assim concluimos que

$$m_0 + m_1 + m_2 = m(K; K \cap K_0 \neq \emptyset) = 2.\pi.F_0 + 2.l.L_0$$

Portanto, a primeira equação do sistema 3.9 segue como queríamos.

### 5.4.2 Segunda equação

$$m_1 + 2.m_2 = 4.l.L_0$$

Para essa equação vamos enunciar o seguinte exemplo

**Exemplo 5.1** *Vamos avaliar a medida de um conjunto de segmentos orientados  $K$ , de comprimento  $l$ , que interceptam os lados de uma curva poligonal  $\Gamma$ , de comprimento  $L_0$  e sem auto-intersecções. Pela Definição 3.19 temos que a medida para esse grupo de movimentos é a integral da densidade cinemática sobre as restrições do seu problema. Portanto*

$$m(K; K \cap \Gamma \neq \emptyset) = \int_{K \cap \Gamma \neq \emptyset} dK$$

*Suponha agora que a poligonal  $\Gamma$  seja composta de  $n$  lados, pela equação 3.8 da Proposição 3.24, considerando que temos duas orientações para a curva  $\Gamma$  e a área  $F_0$  de  $\Gamma$  é nula, temos que*

$$\int_{K \cap \Gamma \neq \emptyset} dK = \int_{K \cap \Gamma_i} ndK = 2.(2.\pi.F_0 + 2.l.L_0) = 4.l.L_0$$

*Ou seja,*

$$m(K; K \cap \Gamma \neq \emptyset) = 4.l.L_0$$

Para a medida obtida no exemplo 5.1 temos que serão considerados os segmentos que interceptam o bordo 1 vez  $m_1$  e duas vezes os segmentos que interceptam o bordo  $2.m_2$ , pois a curva  $\Gamma$  não possui interior logo  $m_0 = 0$ . Assim concluimos que

$$m_1 + 2.m_2 = m(K; K \cap \Gamma \neq \emptyset) = 4.l.L_0$$

Portanto, a segunda equação do sistema 3.9 segue como queríamos.

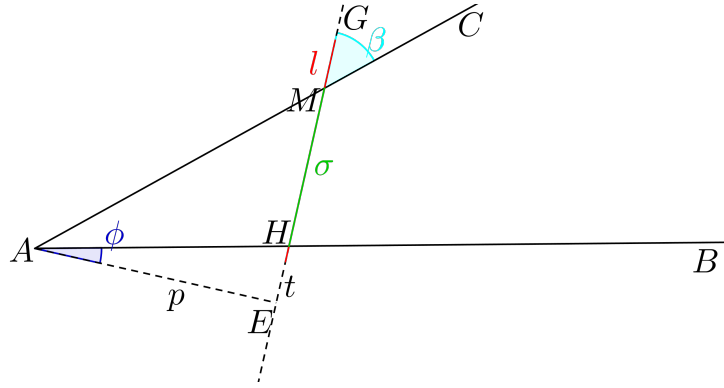


### 5.4.3 Terceira equação

$$m_2 = \frac{l^2}{2} \sum_{A_i} ((\pi - A_i) \cdot \cot g A_i - 1)$$

Para essa equação vamos enunciar o seguinte exemplo

**Exemplo 5.2** Vamos avaliar a medida de um conjunto de segmentos orientados  $K$ , de comprimento  $l$ , que interceptem ambos os lados de um ângulo dado  $A$  (será denotado da mesma maneira o vértice  $A$  do ângulo e sua medida). Denotaremos por  $\sigma$  a corda que corte o ângulo  $A$  por uma reta  $G$  que contem  $K$ .



Pela Definição 3.19 temos que a medida para esse grupo de movimentos é a integral da densidade cinemática sobre as restrições do seu problema. Portanto

$$\begin{aligned} m(K; K \cap \overline{AB} \neq \emptyset, K \cap \overline{AC} \neq \emptyset) &= \int_{K \cap \overline{AB} \neq \emptyset, K \cap \overline{AC} \neq \emptyset} dK \\ &= \int_{K \cap \overline{AB} \neq \emptyset, K \cap \overline{AC} \neq \emptyset} dG^* \wedge dt \\ &= 2. \int_{K \cap \overline{AB} \neq \emptyset, K \cap \overline{AC} \neq \emptyset} dt dG \\ &= 2. \int_{K \cap \overline{AB} \neq \emptyset, K \cap \overline{AC} \neq \emptyset} (l - \sigma) dG \\ &= 2. \left( \int_{K \cap \overline{AB} \neq \emptyset, K \cap \overline{AC} \neq \emptyset} l dG - \int_{K \cap \overline{AB} \neq \emptyset, K \cap \overline{AC} \neq \emptyset} \sigma dG \right) \\ &= 2. \left( \int_{\sigma \leq l} l dG - \int_{\sigma \leq l} \sigma dG \right) \\ &= 2. \left( l. \int_{\sigma \leq l} dp \wedge d\phi - \int_{\sigma \leq l} \sigma dp \wedge \phi \right) \end{aligned}$$

## 5 Apêndice

$$\begin{aligned}
&= 2. \left( l. \int_{\sigma \leq l} |\overline{AE}| d\phi - \int_{\sigma \leq l} \sigma dp\phi \right) \\
&= 2. \left( 2. \int_A^\pi T d\phi - \int_A^\pi T d\phi \right) \\
&= \int_A^\pi 2.T d\phi \\
&= \int_0^{\pi-A} 2.T d\phi
\end{aligned} \tag{5.7}$$

onde  $T$  representa a área do triângulo  $AHM$ . Para podermos avaliar 5.7 vamos tentar construir uma função  $T(\phi)$ . Temos que  $\beta = \frac{\pi}{2} - (\phi + A)$ . Assim pela lei dos senos temos que

$$\frac{l}{\sin A} = \frac{|\overline{AH}|}{\sin \beta} = \frac{|\overline{AH}|}{\cos(\phi + A)} \tag{5.8}$$

Definamos  $h$  como a altura do triângulo  $AHM$  com relação a base  $\overline{AH}$ . Temos que

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \frac{h}{l} \Leftrightarrow h = l.\cos\phi \tag{5.9}$$

Multiplicando a equação 5.8 por  $h$  e, posteriormente, utilizando a equação 5.9, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{l.h}{\sin A} &= \frac{|\overline{AH}|.h}{\cos(\phi + A)} \\
\frac{l^2.\cos\phi}{\sin A} &= \frac{2.T}{\cos(\phi + A)} \\
2.T &= \frac{l^2}{\sin A}.\cos\phi.\cos(\phi + A)
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Assim, obtemos uma função  $T(\phi)$  conveniente, da substituição de 5.10 em 5.7 segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi-A} 2.T d\phi &= \int_0^{\pi-A} \frac{l^2}{\sin A}.\cos\phi.\cos(\phi + A) d\phi \\
&= \frac{l^2}{\sin A} \left\{ \int_0^{\pi-A} \cos\phi.(\cos A.\cos\phi - \sin A.\sin\phi) d\phi \right\} \\
&= \frac{l^2}{\sin A} \left\{ \int_0^{\pi-A} \cos A.\cos^2\phi d\phi - \int_0^{\pi-A} \sin A.\sin\phi.\cos\phi d\phi \right\} \\
&= \frac{l^2}{\sin A} \left\{ \cos A. \int_0^{\pi-A} \cos^2\phi d\phi - \sin A \int_0^{\pi-A} \sin\phi.\cos\phi d\phi \right\}
\end{aligned}$$

## 5 Apêndice

$$\begin{aligned}
&= \frac{l^2}{\sin A} \left\{ \cos A \cdot \int_0^{\pi-A} \frac{1 + \cos(2\phi)}{2} d\phi - \sin A \int_0^{\pi-A} \sin \phi \cdot \cos \phi d\phi \right\} \\
&= \frac{l^2}{\sin A} \left\{ \frac{\cos A}{2} \cdot \left[ \int_0^{\pi-A} 1 d\phi + \int_0^{\pi-A} \cos(2\phi) d\phi \right] - \sin A \int_0^{\pi-A} \sin \phi \cdot \cos \phi d\phi \right\} \\
&= \frac{l^2}{\sin A} \left\{ \frac{\cos A}{2} \cdot \left[ (\pi - A) + \frac{\sin(2\phi)}{2} \right]_0^{\pi-A} - \sin A \cdot \left( \frac{\sin^2 \phi}{2} \right)_0^{\pi-A} \right\} \\
&= \frac{l^2}{\sin A} \left\{ \frac{\cos A}{2} \cdot \left[ (\pi - A) + \frac{\sin(2(\pi - A))}{2} \right] - \sin A \cdot \frac{\sin^2(\pi - A)}{2} \right\} \\
&= \frac{l^2}{2 \cdot \sin A} [(\pi - A) \cdot \cos A - \sin A \cdot \cos^2 A - \sin A \cdot \sin^2 A] \\
&= \frac{l^2}{\sin A} ((\pi - A) \cdot \cot A - 1) \tag{5.11}
\end{aligned}$$

Segue da equação 5.7 e da equação 5.11 que

$$m(K; K \cap \overline{AB} \neq \emptyset, K \cap \overline{AC} \neq \emptyset) = \frac{l^2}{\sin A} ((\pi - A) \cdot \cot A - 1)$$

Para a medida obtida no exemplo 5.2 temos que serão considerados somente os segmentos que interceptam o bordo duas vezes, assim sendo um convexo cujo bordo é uma poligonal, para  $m_2$  teremos um somatório de cada ângulo sobre a medida obtida no exemplo 5.2. Assim concluímos que

$$m_2 = \sum_{A_i} m(K; K \cap \overline{AB} \neq \emptyset, K \cap \overline{AC} \neq \emptyset) = \frac{l^2}{2} \sum_{A_i} ((\pi - A_i) \cdot \cot A_i - 1)$$

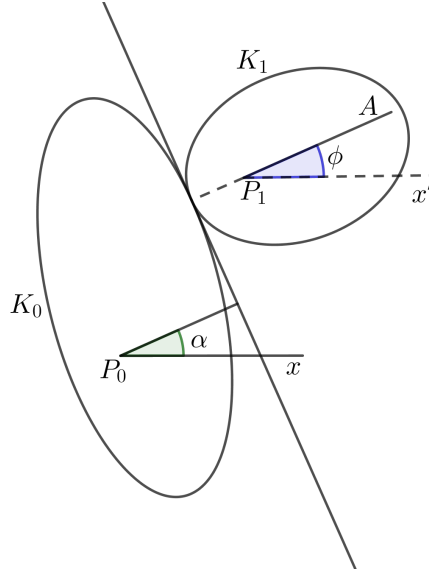
Portanto, a terceira equação do sistema 3.9 segue como queríamos.

## 5.5 Algumas fórmulas integrais

**Proposição 5.3** *Sejam  $K_1$  um conjunto convexo de área  $F_1$  e perímetro  $L_1$  e  $K_0$  um conjunto convexo de área  $F_0$  e perímetro  $L_0$ . A posição de  $K_1$  é definida pelas coordenadas de  $P_1 = (x_1, y_1)$ , tal que  $P_1 \in K_1$ , e pelo ângulo  $\phi$ , que é o ângulo da direção  $P_1A$  com a direção  $P_0x$ . Tomando a densidade cinemática de  $K_1$  tal que  $dK_1 = dx_1 \wedge dy_1 \wedge d\phi$ . Temos então que*

$$m(K_1; K_1 \cap K_0 \neq \emptyset) = 2 \cdot \pi \cdot (F_0 + F_1) + L_0 \cdot L_1 \tag{5.12}$$

**Demonstração:** Seja  $u \in \mathfrak{M}$  um movimento tal que  $u \cdot K_1 \cap K_0 \neq \emptyset$ . Queremos calcular a medida das posições de  $K_1$ , onde  $K_1$  intercepta  $K_0$ . Seja  $dK_1 = dx_1 \wedge dy_1 \wedge d\phi$



a densidade cinemática referente ao convexo  $K_1$ . Pela Definição 3.19 temos que a medida para esse grupo de movimentos é a integral da densidade cinemática sobre as restrições do seu problema. Portanto

$$m(K_1; K_1 \cap K_0 \neq \emptyset) = \int_{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset} dK_1 = \int_{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset} dx_1 \wedge dy_1 \wedge d\phi$$

Seja  $dP_1 = dx_1 \wedge dy_1$ , note que  $\int_{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset} dP_1 = F_{01}$ , onde  $F_{01}$  é a área mista de Minkowski. De acordo com [3] capítulo 1 seção 3 temos que  $F_{01} = F_0 + F_1 + 2.F_{01}^*$ , onde  $F_{01}^*$  é a área mista de  $K_0$  e  $K_1$ . Portanto

$$\int_{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset} dx_1 \wedge dy_1 \wedge d\phi = \int_{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset} dP_1 \wedge d\phi = \int_0^{2\pi} (F_0 + F_1 + 2.F_{01}^*) d\phi$$

De acordo com [3] capítulo 1 seção 3 temos também que  $\int_0^{2\pi} F_{01}^* d\phi = \frac{1}{2} \cdot L_0 \cdot L_1$ . Portanto

$$\int_0^{2\pi} (F_0 + F_1 + 2.F_{01}^*) d\phi = 2\pi \cdot (F_0 + F_1) + L_0 \cdot L_1$$

Portanto, a medida de todas posições de um conjunto convexo  $K_1$  nas quais ele intercepta outro conjunto convexo fixado  $K_0$  é

$$m(K_1; K_1 \cap K_0 \neq \emptyset) = \int_{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset} dK_1 = 2\pi \cdot (F_0 + F_1) + L_0 \cdot L_1$$

□

## 5 Apêndice

**Exemplo 5.4** Considere as mesmas condições da Proposição 5.3. Se  $K_1$  é um segmento de comprimento  $l$ , então  $F_1 = 0$  e  $L_1 = 2.l$ . Assim a equação 5.12 produz a equação 3.8.

**Exemplo 5.5** Tome  $K_0$  e  $K_1$  dois domínios planos, não necessariamente convexos, de áreas  $F_0$  e  $F_1$ , respectivamente. Assuma que  $K_0$  está fixo e  $K_1$  está em movimento. Tome-mos  $dK_1$  a densidade cinemática de  $K_1$ . Se  $P(x, y)$  é um ponto no plano tal que  $P \in K_0 \cap K_1$  e  $dP = dx \wedge dy$  sua densidade. Vamos considerar a integral

$$I = m(P, K_1; P \in K_0 \cap K_1) = \int_{P \in K_0 \cap K_1} dP \wedge dK_1$$

Vamos calcular essa integral de duas maneiras. Primeiramente, vamos deixar  $P$  fixo, então temos

$$\begin{aligned} I &= \int_{P \in K_0 \cap K_1} dP \wedge dK_1 \\ &= \int_{P \in K_0} dP \int_{P \in K_1} dK_1 \\ &= F_0 \cdot \int_{P \in K_1} dx \wedge dy \wedge d\phi \\ &= 2\pi \cdot F_0 \cdot \int_{P \in K_1} dx \wedge dy \\ &= 2\pi \cdot F_0 \cdot \int_{P \in K_1} dP \\ &= 2\pi \cdot F_0 \cdot F_1 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Podemos também fixar  $K_1$ , então teríamos

$$I = \int_{P \in K_0 \cap K_1} dP \wedge dK_1 = \int_{P \in K_0 \cap K_1} dP dK_1 = \int_{P \in K_0 \cap K_1} f_{01} dK_1, \tag{5.14}$$

onde  $f_{01}$  é a área de  $K_0 \cap K_1$ . Logo, por 5.13 e 5.14

$$\int_{P \in K_0 \cap K_1} f_{01} dK_1 = I = 2\pi \cdot F_0 \cdot F_1 \tag{5.15}$$

**Exemplo 5.6** Tome  $K_0$  e  $K_1$  dois domínios planos, não necessariamente convexos, de áreas  $F_0$  e  $F_1$ , respectivamente, de modo que suas fronteiras são curvas de comprimento finito  $L_0$  e  $L_1$ , respectivamente. Tome  $\alpha(s_0)$  e  $\alpha(s_1)$  pontos de  $\partial K_0$  e  $\partial K_1$ , respectivamente.

## 5 Apêndice

Vamos considerar a integral

$$J_1 = \int_{\alpha(s_0) \in K_1} ds_0 \wedge dK_1$$

Vamos calcular essa integral de duas maneiras. Primeiramente, vamos deixar  $\alpha(s_0)$  fixo, então temos

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{\alpha(s_0) \in K_1} ds_0 \wedge dK_1 \\ &= \int_{\partial K_0} ds_0 \int_{\alpha(s_0) \in K_1} dK_1 \\ &= L_0 \cdot \int_{\alpha(s_0) \in K_1} dx \wedge dy \wedge d\phi \\ &= 2\pi \cdot L_0 \cdot \int_{\alpha(s_0) \in K_1} dx \wedge dy \\ &= 2\pi \cdot L_0 \cdot \int_{\alpha(s_0) \in K_1} dP \\ &= 2\pi \cdot L_0 \cdot F_1 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Podemos também fixar  $K_1$ , então teríamos

$$J_1 = \int_{\alpha(s_0) \in K_1} ds_0 \wedge dK_1 = \int_{\alpha(s_0) \in K_1} ds_0 dK_1 = \int_{\alpha(s_0) \in K_1} l_{01} dK_1, \tag{5.17}$$

onde  $l_{01}$  é o comprimento da curva  $\partial K_0 \cap K_1$ . Logo, por 5.16 e 5.17

$$\int_{\alpha(s_0) \in K_1} l_{01} dK_1 = J_1 = 2\pi \cdot L_0 \cdot F_1 \tag{5.18}$$

Vamos considerar agora a seguinte integral

$$J_2 = \int_{\alpha(s_1) \in K_0} ds_1 \wedge dK_0$$

Vamos calcular essa integral de duas maneiras. Primeiramente, vamos deixar  $\alpha(s_1)$  fixo,

## 5 Apêndice

então temos

$$\begin{aligned}
 J_2 &= \int_{\alpha(s_1) \in K_0} ds_1 \wedge dK_0 \\
 &= \int_{\partial K_0} ds_1 \int_{\alpha(s_1) \in K_0} dK_0 \\
 &= L_1 \cdot \int_{\alpha(s_1) \in K_0} dx \wedge dy \wedge d\phi \\
 &= 2\pi \cdot L_1 \cdot \int_{\alpha(s_1) \in K_0} dx \wedge dy \\
 &= 2\pi \cdot L_1 \cdot \int_{\alpha(s_1) \in K_0} dP \\
 &= 2\pi \cdot L_1 \cdot F_0
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Podemos também fixar  $K_0$ , então teríamos

$$J_2 = \int_{\alpha(s_1) \in K_0} ds_1 \wedge dK_0 = \int_{\alpha(s_1) \in K_0} ds_1 dK_0 = \int_{\alpha(s_1) \in K_0} l_{10} dK_0, \tag{5.20}$$

onde  $l_{10}$  é o comprimento da curva  $\partial K_1 \cap K_0$ . Logo, por 5.19 e 5.20

$$\int_{\alpha(s_1) \in K_0} l_{10} dK_0 = J_2 = 2\pi \cdot L_1 \cdot F_0 \tag{5.21}$$

Mas para a equação 5.20 podemos simplesmente fazer uma mudança de índices, ou seja, para 5.20 podemos trocar  $K_0$  por  $K_1$  e o inverso, pois não há distinções entre os domínios. Portanto, 5.20 torna-se

$$\int_{\alpha(s_0) \in K_1} l_{10} dK_1 = J_2 = 2\pi \cdot L_1 \cdot F_0 \tag{5.22}$$

Finalmente, somando 5.18 e 5.22 temos que

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha(s_0) \in K_1} l_{10} dK_1 + \int_{\alpha(s_0) \in K_1} l_{01} dK_1 &= 2\pi \cdot L_1 \cdot F_0 + 2\pi \cdot L_0 \cdot F_1 \\
 \int_{\alpha(s_0) \in K_1} L_{01} dK_1 &= 2\pi \cdot (L_1 \cdot F_0 + L_0 \cdot F_1),
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

onde  $L_{01}$  é a fronteira de  $K_0 \cap K_1$ .

**Exemplo 5.7** Tome  $K_0$ ,  $K_1$  e  $K_2$  três conjuntos convexos fechados no plano. Queremos calcular a medida  $m(K_1, K_2; K_0 \cap K_1 \cap K_2 \neq \emptyset)$ . Sejam  $dK_1$  e  $dK_2$  as densidades cinemática

## 5 Apêndice

de  $K_1$  e  $K_2$ , respectivamente. Suponha  $K_0$  fixo, pela Definição 3.19 temos que a medida é a integral da densidade cinemática sobre as restrições do seu problema, portanto

$$m(K_1, K_2; K_0 \cap K_1 \cap K_2 \neq \emptyset) = \int_{K_0 \cap K_1 \cap K_2 \neq \emptyset} dK_1 \wedge dK_2$$

mantendo  $K_1$  também fixo temos que pela equação 5.12 da Proposição 5.3

$$\begin{aligned} \int_{K_0 \cap K_1 \cap K_2 \neq \emptyset} dK_1 \wedge dK_2 &= \int_{K_0 \cap K_1 \cap K_2 \neq \emptyset} [2\pi \cdot (F_2 + f_{01}) + L_2 \cdot L_{01}] dK_2 \\ &= 2\pi \cdot F_2 \cdot \int_{K_0 \cap K_1 \cap K_2 \neq \emptyset} dK_1 + 2\pi \cdot \int_{K_0 \cap K_1 \cap K_2 \neq \emptyset} f_{01} dK_1 + L_2 \cdot \int_{K_0 \cap K_1 \cap K_2 \neq \emptyset} L_{01} dK_1 \end{aligned}$$

pelas equações 5.12, 5.15 e 5.23 temos que

$$\begin{aligned} &2\pi \cdot F_2 \cdot \int_{K_0 \cap K_1 \cap K_2 \neq \emptyset} dK_1 + 2\pi \cdot \int_{K_0 \cap K_1 \cap K_2 \neq \emptyset} f_{01} dK_1 + L_2 \cdot \int_{K_0 \cap K_1 \cap K_2 \neq \emptyset} L_{01} dK_1 \\ &= 2\pi \cdot F_2 (2\pi(F_0 + F_1) + L_0 \cdot L_1) + 2\pi \cdot (2\pi \cdot F_0 \cdot F_1) + L_2 (2\pi \cdot (F_1 \cdot L_0 + L_1 \cdot F_0)) \\ &= (2\pi)^2 \cdot (F_0 \cdot F_2 + F_0 \cdot F_1 + F_1 \cdot F - 2) + 2\pi \cdot (F_0 \cdot L_1 \cdot L_2 + F_1 \cdot L_0 \cdot L_2 + F_2 \cdot L_0 \cdot L_1) \end{aligned}$$

**Exemplo 5.8** (Valores médios e cobertura) seja  $K_0$  um conjunto convexo de área  $F_0$  e perímetro  $L_0$ . Sejam  $K_1, K_2, \dots, K_n$   $n$  conjuntos convexos de área  $F$  e perímetro  $L$ . Suponha que  $K_i \cap K_0 \neq \emptyset$ . Seja  $f_r$  a área de  $K_0$  que tem cobertura por exatamente  $r$  conjuntos  $K_i$ . Vamos considerar a integral sobre todos os pontos  $P \in K_0$  que são cobertos exatamente por  $r$  conjuntos  $K_i$ .

$$I_r = \int dK_1 \wedge \dots \wedge dK_n \wedge dP$$

Vamos calcular essa integral de duas maneiras. Primeiramente, vamos manter  $P$  fixo, então temos

$$\begin{aligned} I_r &= \int dK_1 \wedge \dots \wedge dK_n \wedge dP \\ &= \int [2\pi \cdot (F_0 + F) + L \cdot L_0] dK_2 \wedge \dots \wedge dK_n \wedge dP \end{aligned}$$



## 5 Apêndice

$$\begin{aligned}
&= \int [(2.\pi.F) + (2.\pi.F_0 + L.L_0)] dK_2 \wedge \cdots \wedge dK_n \wedge dP \\
&= \int [(2.\pi.F) + (2.\pi.F_0 + L.L_0)] \cdot [(2.\pi.F) + (2.\pi.F_0 + L.L_0)] dK_3 \wedge \cdots \wedge dK_n \wedge dP \\
&= \int [(2.\pi.F) + (2.\pi.F_0 + L.L_0)]^n dP \\
&= \int \binom{n}{r} (2.\pi.F)^r \cdot (2.\pi.F_0 + L.L_0)^{n-r} dP \\
&= \binom{n}{r} (2.\pi.F)^r \cdot (2.\pi.F_0 + L.L_0)^{n-r} \int dP \\
&= \binom{n}{r} (2.\pi.F)^r \cdot (2.\pi.F_0 + L.L_0)^{n-r} \cdot F_0 \tag{5.24}
\end{aligned}$$

Por outro lado, se deixarmos  $K_1, K_2, \dots, K_n$  fixados, temos que

$$I_r = \int dK_1 \wedge \cdots \wedge dK_n \wedge dP = \int dP dK_1 \dots dK_n = \int f_r dK_1 \dots dK_n \tag{5.25}$$

Portanto, de 5.24 e 5.25, segue que

$$\int f_r dK_1 \dots dK_n = I_r = \binom{n}{r} (2.\pi.F)^r \cdot (2.\pi.F_0 + L.L_0)^{n-r} \cdot F_0$$

Se quisermos calcular o valor esperado para  $f_r$ , temos que

$$\begin{aligned}
E(f_r) &= \frac{m(K_1, \dots, K_n; \bigcap_{i=1}^n K_i \cap K_0 \neq \emptyset)}{m(K_1; K_1 \cap K_0 \neq \emptyset) \dots m(K_n; K_n \cap K_0 \neq \emptyset)} \\
&= \frac{\binom{n}{r} (2.\pi.F)^r \cdot (2.\pi.F_0 + L.L_0)^{n-r} \cdot F_0}{[2.\pi.(F + F_0) + L.L_0]^n}
\end{aligned}$$

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ARNAU, José J. G., *La Estereología como puente entre las matemáticas y otras ciencias*, Sociedad, Ciencia, Tecnología y matemáticas (2006).
- [2] BEHRENDTS, Ehrhard, BUESCU, Jorge, *Terá Buffon realmente lançado agulhas?*, Boletim da SPM 71, Dezembro 2014, p. 123-132.
- [3] SANTALÓ, Luis A., *Integral Geometry and Geometric Probability*, Cambridge University Press, 2004.