Uma versão estereológica da fórmula de Gauss-Bonnet

Marcos Agnoletto Forte

2021

Universidade Federal do ABC

Universidade Federal do ABC
Centro de Matemática, Computação e Cognição

Marcos Agnoletto Forte

Uma versão estereológica da fórmula de Gauss-Bonnet

Orientador: Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva

Estereologia

- $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular.
- Para $u \in \mathbb{S}^2$ definimos $h_u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ por $h_u(p) = \langle p, u \rangle$ ***(função altura)***.
- Para $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos $\pi_{u,\lambda} = h_u^{-1}(\lambda)$ ***(planos de varredura)***.

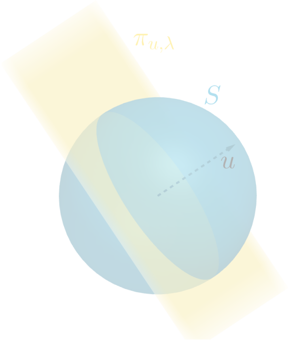


Figura: Planos de varredura na esfera $\mathbb{S}^2$.

Estereologia

- $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular.
- Para $u \in \mathbb{S}^2$ definimos $h_u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ por $h_u(p) = \langle p, u \rangle$ ***(função altura)***.
- Para $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos $\pi_{u,\lambda} = h_u^{-1}(\lambda)$ ***(planos de varredura)***.

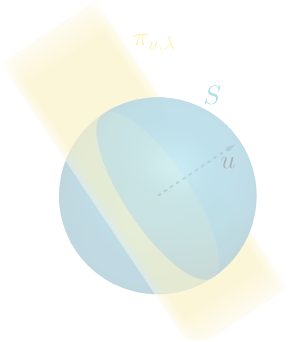


Figura: Planos de varredura na esfera $\mathbb{S}^2$.

Estereologia

- $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular.
- Para $u \in \mathbb{S}^2$ definimos $h_u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ por $h_u(p) = \langle p, u \rangle$ ***(função altura)***.
- Para $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos $\pi_{u,\lambda} = h_u^{-1}(\lambda)$ ***(planos de varredura)***.

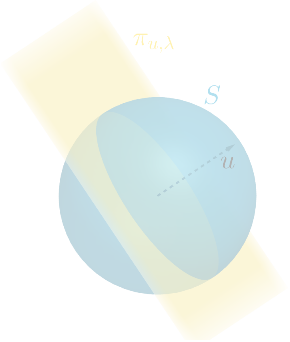


Figura: Planos de varredura na esfera $\mathbb{S}^2$.

Estereologia

- $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular.
- Para $u \in \mathbb{S}^2$ definimos $h_u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ por $h_u(p) = \langle p, u \rangle$ ***(função altura)***.
- Para $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos $\pi_{u,\lambda} = h_u^{-1}(\lambda)$ ***(planos de varredura)***.

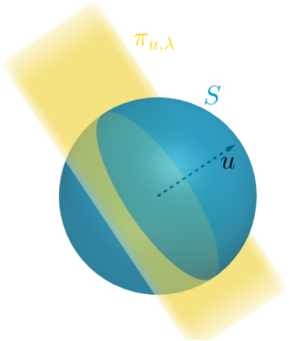


Figura: Planos de varredura na esfera $\mathbb{S}^2$.

Estereologia

- ***Princípio de Cavalieri***.
- Neste estudo estereológico a informação geométrica desejada é o ***volume***.

Figura: O princípio de Cavalieri.

Estereologia

- ***Princípio de Cavalieri***.
- Neste estudo estereológico a informação geométrica desejada é o ***volume***.

Figura: O princípio de Cavalieri.

Estereologia

- ***Princípio de Cavalieri***.
- Neste estudo estereológico a informação geométrica desejada é o ***volume***.

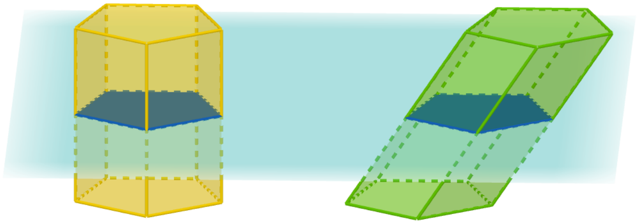


Figura: O princípio de Cavalieri.

Estereologia

- ***Problema da agulha de Buffon***.

Figura: Georges-Louis Leclerc, Conde de Buffon (1707–1788) [Buf].

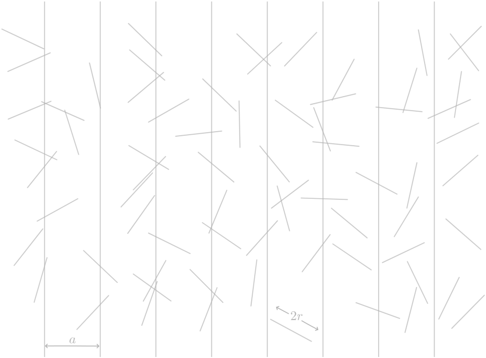


Figura: O Problema da agulha de Buffon.

Estereologia

- ***Problema da agulha de Buffon.***

Figura: Georges-Louis Leclerc, Conde de Buffon (1707–1788) [Buf].

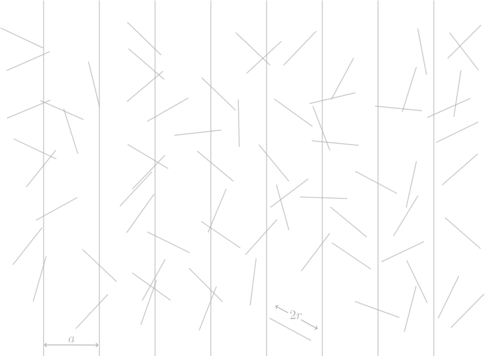


Figura: O Problema da agulha de Buffon.

Estereologia

- ***Problema da agulha de Buffon.***

Figura: Georges-Louis Leclerc, Conde de Buffon (1707–1788) [Buf].

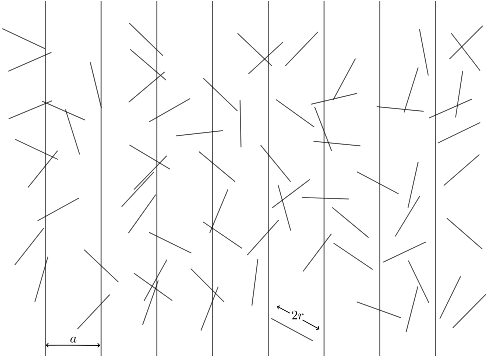


Figura: O Problema da agulha de Buffon.

Estereologia

- ***A característica de Euler-Poincaré de um domínio com fronteira***.
- $\mathbb{T}^2$ um toro em $\mathbb{R}^3$ e $D \subset \mathbb{T}^2$ um domínio com fronteira em $\mathbb{T}^2$, como ilustra a Figura 5.

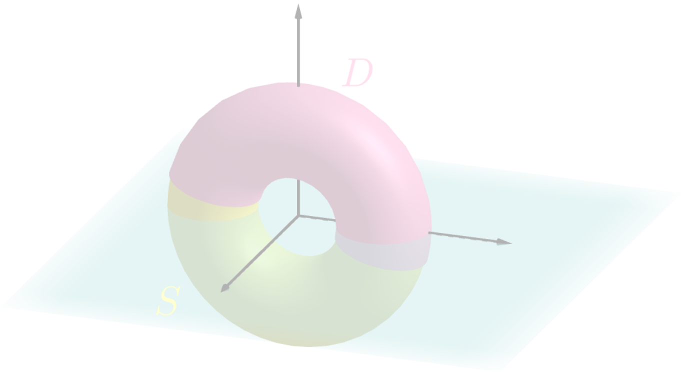


Figura: Toro $\mathbb{T}^2$ e o domínio $D \subset \mathbb{T}^2$ descritos acima.

Estereologia

- ***A característica de Euler-Poincaré de um domínio com fronteira.***
- $\mathbb{T}^2$ um toro em $\mathbb{R}^3$ e $D \subset \mathbb{T}^2$ um domínio com fronteira em $\mathbb{T}^2$, como ilustra a Figura 5.

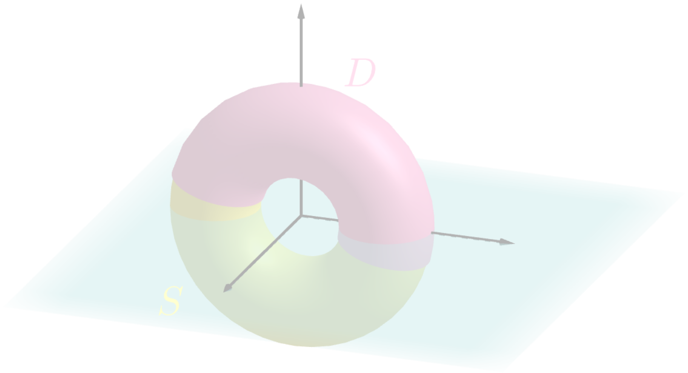


Figura: Toro $\mathbb{T}^2$ e o domínio $D \subset \mathbb{T}^2$ descritos acima.

Estereologia

- ***A característica de Euler-Poincaré de um domínio com fronteira***.
- $\mathbb{T}^2$ um toro em $\mathbb{R}^3$ e $D \subset \mathbb{T}^2$ um domínio com fronteira em $\mathbb{T}^2$, como ilustra a Figura 5.

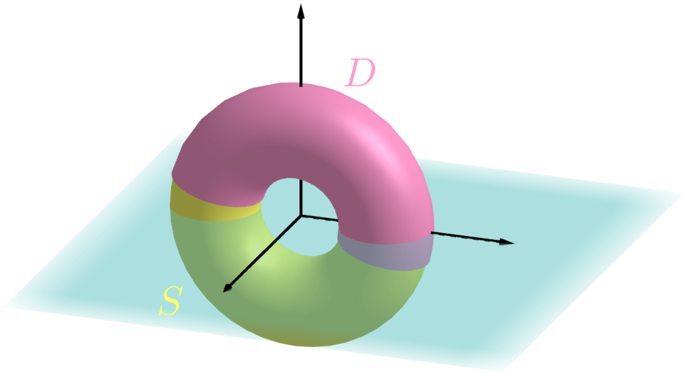
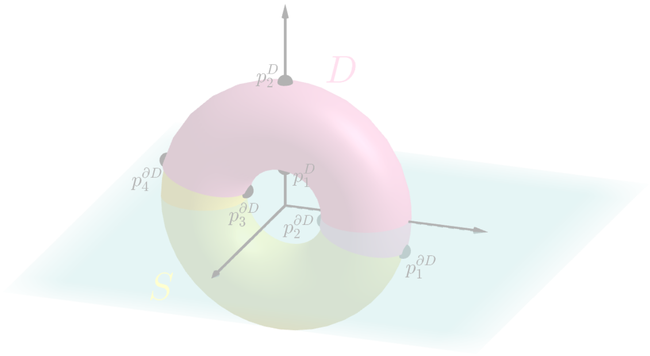


Figura: Toro $\mathbb{T}^2$ e o domínio $D \subset \mathbb{T}^2$ descritos acima.

Estereologia

- Tomemos $u = (0, 0, 1)$.
- Os pontos p_1^D e p_2^D são os pontos críticos de $h_u|_D$ em D.
- Os pontos $p_1^{\partial D}$, $p_2^{\partial D}$, $p_3^{\partial D}$ e $p_4^{\partial D}$ são os pontos críticos de $h_u|_{\partial D}$ em ∂D.



Disto temos

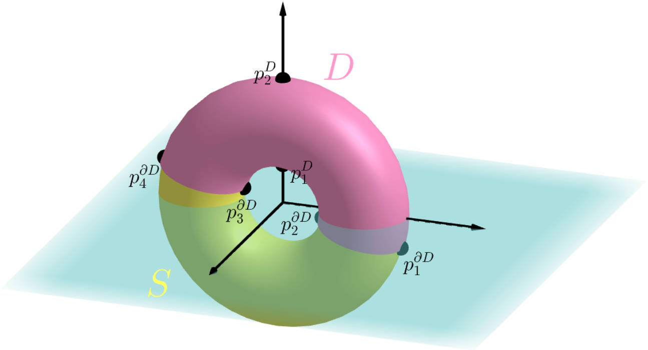
$$\mathcal{X}(D) = (1-1) + \frac{1}{2}(2-2) = 0$$

.

Figura: Os pontos p_1^D, p_2^D, $p_1^{\partial D}$, $p_2^{\partial D}$, $p_3^{\partial D}$ e $p_4^{\partial D}$ em $\mathbb{T}^2$.

Estereologia

- Tomemos $u = (0, 0, 1)$.
- Os pontos p_1^D e p_2^D são os pontos críticos de $h_u|_D$ em D.
- Os pontos $p_1^{\partial D}$, $p_2^{\partial D}$, $p_3^{\partial D}$ e $p_4^{\partial D}$ são os pontos críticos de $h_u|_{\partial D}$ em ∂D.



Disto temos

$$\mathcal{X}(D) = (1 - 1) + \frac{1}{2}(2 - 2) = 0$$

.

Figura: Os pontos p_1^D, p_2^D, $p_1^{\partial D}$, $p_2^{\partial D}$, $p_3^{\partial D}$ e $p_4^{\partial D}$ em $\mathbb{T}^2$.

Estereologia

- Tomemos $u = (0, 0, 1)$.
- Os pontos p_1^D e p_2^D são os pontos críticos de $h_u|_D$ em D.
- Os pontos $p_1^{\partial D}$, $p_2^{\partial D}$, $p_3^{\partial D}$ e $p_4^{\partial D}$ são os pontos críticos de $h_u|_{\partial D}$ em ∂D.

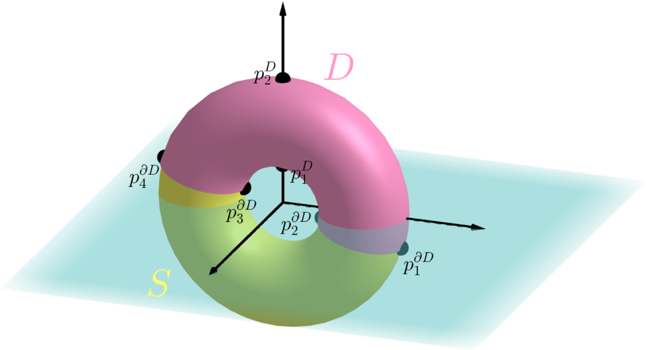


Figura: Os pontos p_1^D, p_2^D, $p_1^{\partial D}$, $p_2^{\partial D}$, $p_3^{\partial D}$ e $p_4^{\partial D}$ em $\mathbb{T}^2$.

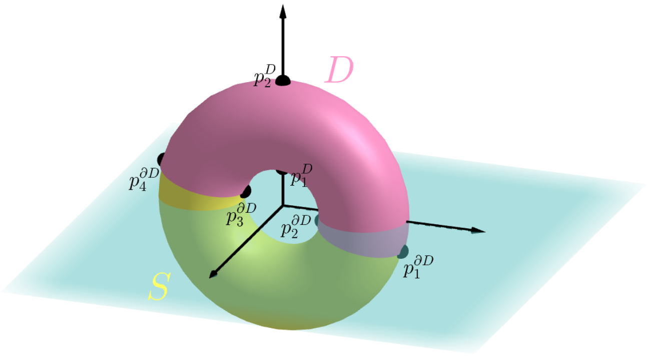
Disto temos

$$\mathcal{X}(D) = (1 - 1) + \frac{1}{2}(2 - 2) = 0$$

.

Estereologia

- Tomemos $u = (0, 0, 1)$.
- Os pontos p_1^D e p_2^D são os pontos críticos de $h_u|_D$ em D.
- Os pontos $p_1^{\partial D}$, $p_2^{\partial D}$, $p_3^{\partial D}$ e $p_4^{\partial D}$ são os pontos críticos de $h_u|_{\partial D}$ em ∂D.



Disto temos

$$\mathcal{X}(D) = (1 - 1) + \frac{1}{2}(2 - 2) = 0$$

.

Figura: Os pontos p_1^D, p_2^D, $p_1^{\partial D}$, $p_2^{\partial D}$, $p_3^{\partial D}$ e $p_4^{\partial D}$ em $\mathbb{T}^2$.

Estereologia

- Aplicações:
  - Obter a característica de Euler de microestruturas a partir de seções transversais [DeH87, ON08].
  - A característica de Euler para identificar baixa densidade óssea [RdSB09].
  - Obter uma estimativa de concavidade a partir de seções transversais [GBNO93].

Estereologia

- Aplicações:
  - Obter a característica de Euler de microestruturas a partir de seções transversais [DeH87, ON08].
  - A característica de Euler para identificar baixa densidade óssea [RdSB09].
  - Obter uma estimativa de concavidade a partir de seções transversais [GBNO93].

Estereologia

- Aplicações:
  - Obter a característica de Euler de microestruturas a partir de seções transversais [DeH87, ON08].
  - A característica de Euler para identificar baixa densidade óssea [RdSB09].
  - Obter uma estimativa de concavidade a partir de seções transversais [GBNO93].

Estereologia

- Aplicações:
  - Obter a característica de Euler de microestruturas a partir de seções transversais [DeH87, ON08].
  - A característica de Euler para identificar baixa densidade óssea [RdSB09].
  - Obter uma estimativa de concavidade a partir de seções transversais [GBNO93].

Teorema de Gauss-Bonnet e Teorema de Poincaré-Hopf

Teorema (Teorema de Gauss-Bonnet, versão global)

Seja $R \subset S$ uma região regular de uma superfície regular orientada S com fronteira ∂R orientada positivamente. Consideremos $C_1, \ldots, C_k$ as componentes conexas da fronteira de R parametrizadas, para $j = 1, \ldots, k$, por curvas $\alpha_j : [a_j, b_j] \to S$ com curvaturas geodésicas κ_g^j. Denotemos por $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p\}$ o conjunto dos ângulos externos das curvas $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Então

$$\iint_R K d\sigma + \sum_{j=1}^{k} \int_{a_j}^{b_j} \kappa_g^j ds + \sum_{h=1}^{p} \varepsilon_h = 2\pi \mathcal{X}(R), \tag{1}$$

onde K é a curvatura Gaussiana de S, $d\sigma$ é o elemento de área de R e ds é o elemento de comprimento de α_j.

Teorema de Gauss-Bonnet e Teorema de Poincaré-Hopf

Sejam $X \in \mathcal{T}(S)$ um campo de vetores em uma superfície regular S e $p \in S$ um ponto de S que é um ponto singular isolado de X. Então

$$ind_p(X) = \begin{cases} +1, \textit{se} \det dX_p > 0, \\ -1, \textit{se} \det dX_p < 0. \end{cases}$$

Teorema (Teorema de Poincaré-Hopf)

Seja $X \in \mathcal{T}(S)$ um campo de vetores cujos pontos singulares são todos isolados em uma superfície regular compacta orientável S. Então

$$\sum_{p \in Sing(X)} ind_p(X) = \mathcal{X}(S).$$

Teorema de Gauss-Bonnet e Teorema de Poincaré-Hopf

Sejam $X \in \mathcal{T}(S)$ um campo de vetores em uma superfície regular S e $p \in S$ um ponto de S que é um ponto singular isolado de X. Então

$$ind_p(X) = \begin{cases} +1, \textit{se} \det dX_p > 0, \\ -1, \textit{se} \det dX_p < 0. \end{cases}$$

Teorema (Teorema de Poincaré-Hopf)

Seja $X \in \mathcal{T}(S)$ um campo de vetores cujos pontos singulares são todos isolados em uma superfície regular compacta orientável S. Então

$$\sum_{p \in Sing(X)} ind_p(X) = \mathcal{X}(S).$$

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

- $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular.
- $f : S \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- f é uma ***função de Morse*** se todos os seus pontos críticos são não-degenerados.

A partir de agora tomaremos f como sendo uma função de Morse.

- $p \in S$ um ponto crítico de f. Definimos o ***índice de f em p*** da seguinte maneira:

$$ind_p(f) = \begin{cases} +1, & \text{se } p \text{ é ponto de extremo local,} \\ -1, & \text{se } p \text{ é ponto de sela.} \end{cases}$$

- $Crit(f) = Sing(grad(f))$.
- $ind_p(f) = ind_p(grad(f))$.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

- $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular.
- $f : S \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- f é uma ***função de Morse*** se todos os seus pontos críticos são não-degenerados.

A partir de agora tomaremos f como sendo uma função de Morse.

- $p \in S$ um ponto crítico de f. Definimos o ***índice de f em p*** da seguinte maneira:

$$ind_p(f) = \begin{cases} +1, & \text{se } p \text{ é ponto de extremo local,} \\ -1, & \text{se } p \text{ é ponto de sela.} \end{cases}$$

- $Crit(f) = Sing(grad(f))$.
- $ind_p(f) = ind_p(grad(f))$.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

- $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular.
- $f : S \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- f é uma ***função de Morse*** se todos os seus pontos críticos são não-degenerados.

A partir de agora tomaremos f como sendo uma função de Morse.

- $p \in S$ um ponto crítico de f. Definimos o ***índice de** f **em** p* da seguinte maneira:

$$ind_p(f) = \begin{cases} +1, & \text{se } p \text{ é ponto de extremo local,} \\ -1, & \text{se } p \text{ é ponto de sela.} \end{cases}$$

- $Crit(f) = Sing(grad(f))$.
- $ind_p(f) = ind_p(grad(f))$.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

- $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular.
- $f : S \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- f é uma ***função de Morse*** se todos os seus pontos críticos são não-degenerados.

A partir de agora tomaremos f como sendo uma função de Morse.

- $p \in S$ um ponto crítico de f. Definimos o ***índice de f em p*** da seguinte maneira:

$$ind_p(f) = \begin{cases} +1, & \text{se } p \text{ é ponto de extremo local,} \\ -1, & \text{se } p \text{ é ponto de sela.} \end{cases}$$

- $Crit(f) = Sing(grad(f))$.
- $ind_p(f) = ind_p(grad(f))$.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

- $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular.
- $f : S \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- f é uma ***função de Morse*** se todos os seus pontos críticos são não-degenerados.

A partir de agora tomaremos f como sendo uma função de Morse.

- $p \in S$ um ponto crítico de f. Definimos o ***índice de f em p*** da seguinte maneira:

$$ind_p(f) = \begin{cases} +1, & \text{se } p \text{ é ponto de extremo local,} \\ -1, & \text{se } p \text{ é ponto de sela.} \end{cases}$$

- $Crit(f) = Sing(grad(f))$.
- $ind_p(f) = ind_p(grad(f))$.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

- $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular.
- $f : S \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- f é uma ***função de Morse*** se todos os seus pontos críticos são não-degenerados.

A partir de agora tomaremos f como sendo uma função de Morse.

- $p \in S$ um ponto crítico de f. Definimos o ***índice de f em p*** da seguinte maneira:

$$ind_p(f) = \begin{cases} +1, & \text{se } p \text{ é ponto de extremo local,} \\ -1, & \text{se } p \text{ é ponto de sela.} \end{cases}$$

- $Crit(f) = Sing(grad(f))$.
- $ind_p(f) = ind_p(grad(f))$.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

- $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular.
- $f : S \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- f é uma ***função de Morse*** se todos os seus pontos críticos são não-degenerados.

A partir de agora tomaremos f como sendo uma função de Morse.

- $p \in S$ um ponto crítico de f. Definimos o ***índice de*** f ***em*** p da seguinte maneira:

$$ind_p(f) = \begin{cases} +1, & \text{se } p \text{ é ponto de extremo local,} \\ -1, & \text{se } p \text{ é ponto de sela.} \end{cases}$$

- $Crit(f) = Sing(grad(f))$.
- $ind_p(f) = ind_p(grad(f))$.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

Teorema (Teorema de Poincaré-Hopf para funções de Morse)

Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular compacta orientável e $f : S \to \mathbb{R}$ uma função de Morse. Então

$$\sum_{p \in Crit(f)} ind_p(f) = \mathcal{X}(S),$$

onde $Crit(f)$ é o conjunto dos pontos críticos de f.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

- $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular compacta e orientável.
- $D \subset S$ um domínio em S com fronteira.
- $X \in \mathcal{T}(D)$ um campo de vetores suave em D tal que:
  1. X tem singularidades isoladas em D;
  2. X não tem singularidades em ∂D;
  3. X é ortogonal a ∂D somente em um número finito de pontos.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

- $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular compacta e orientável.
- $D \subset S$ um domínio em S com fronteira.
- $X \in \mathcal{T}(D)$ um campo de vetores suave em D tal que:
  1. X tem singularidades isoladas em D;
  2. X não tem singularidades em ∂D;
  3. X é ortogonal a ∂D somente em um número finito de pontos.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

- $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular compacta e orientável.
- $D \subset S$ um domínio em S com fronteira.
- $X \in \mathcal{T}(D)$ um campo de vetores suave em D tal que:
  1. X tem singularidades isoladas em D;
  2. X não tem singularidades em ∂D;
  3. X é ortogonal a ∂D somente em um número finito de pontos.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

- $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular compacta e orientável.
- $D \subset S$ um domínio em S com fronteira.
- $X \in \mathcal{T}(D)$ um campo de vetores suave em D tal que:
  1. X tem singularidades isoladas em D;
  2. X não tem singularidades em ∂D;
  3. X é ortogonal a ∂D somente em um número finito de pontos.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

- $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular compacta e orientável.
- $D \subset S$ um domínio em S com fronteira.
- $X \in \mathcal{T}(D)$ um campo de vetores suave em D tal que:
  1. X tem singularidades isoladas em D;
  2. X não tem singularidades em ∂D;
  3. X é ortogonal a ∂D somente em um número finito de pontos.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

- $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular compacta e orientável.
- $D \subset S$ um domínio em S com fronteira.
- $X \in \mathcal{T}(D)$ um campo de vetores suave em D tal que:
  1. X tem singularidades isoladas em D;
  2. X não tem singularidades em ∂D;
  3. X é ortogonal a ∂D somente em um número finito de pontos.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

- $p \in D$ é uma singularidade isolada de X, definimos o índice de X em p como o número $ind_p(X)$.
- $p \in \partial D$ é um ponto de ∂D onde X é ortogonal a ∂D.

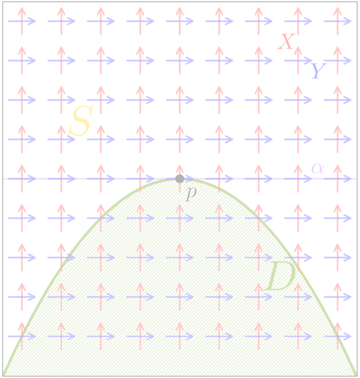


Figura: $\mathrm{ind}_p(X) = +1$.

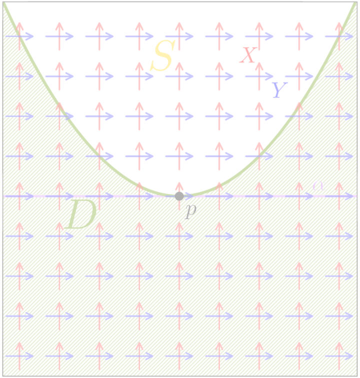


Figura: $\mathrm{ind}_p(X) = -1$.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

- $p \in D$ é uma singularidade isolada de X, definimos o índice de X em p como o número $ind_p(X)$.
- $p \in \partial D$ é um ponto de ∂D onde X é ortogonal a ∂D.

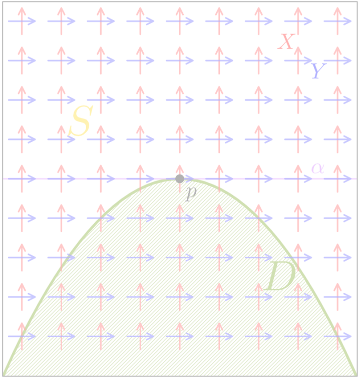


Figura: $\mathrm{ind}_p(X) = +1$.

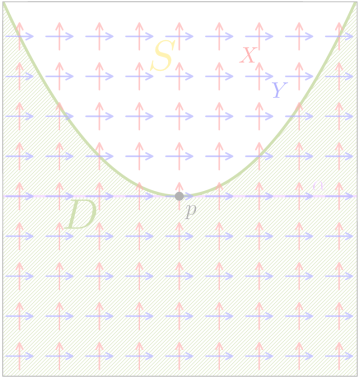


Figura: $\mathrm{ind}_p(X) = -1$.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

- $p \in D$ é uma singularidade isolada de X, definimos o índice de X em p como o número $ind_p(X)$.
- $p \in \partial D$ é um ponto de ∂D onde X é ortogonal a ∂D.

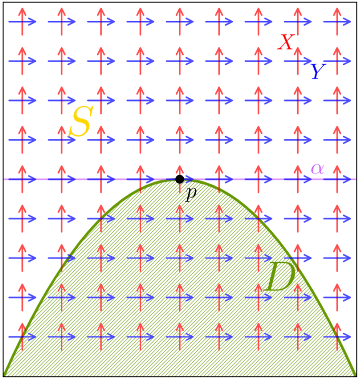


Figura: $\mathrm{ind}_p(X) = +1$.

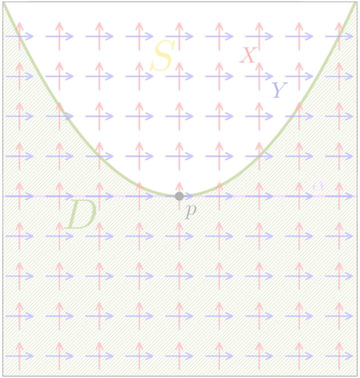


Figura: $\mathrm{ind}_p(X) = -1$.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

- $p \in D$ é uma singularidade isolada de X, definimos o índice de X em p como o número $ind_p(X)$.
- $p \in \partial D$ é um ponto de ∂D onde X é ortogonal a ∂D.

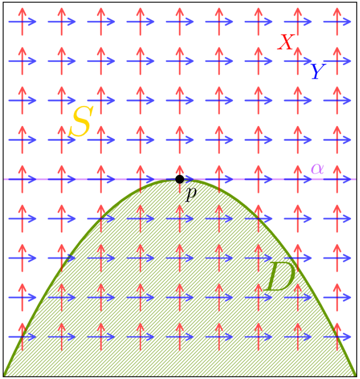


Figura: $\mathrm{ind}_p(X) = +1$.

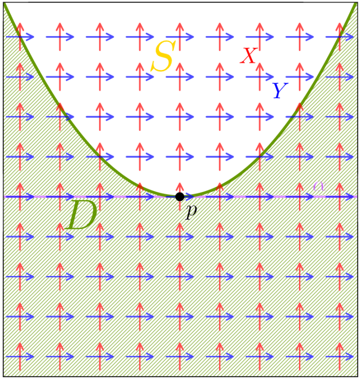


Figura: $\mathrm{ind}_p(X) = -1$.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

Teorema (Teorema de Poincaré-Hopf generalizado)

Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ *um domínio com fronteira em uma superfície regular orientável* S *e* $X \in \mathcal{T}(D)$ *um campo de vetores suave em* D *tal que* X *tem singularidades isoladas em* D*, não tem singularidades em* ∂D *e é ortogonal a* ∂D *somente em um número finito de pontos. Então*

$$\sum_{p \in Sing(X)} ind_p(X) + \frac{1}{2} \sum_{X(p) \perp T_p \partial D} ind_p(X) = \mathcal{X}(D).$$

Demonstração.

A demonstração pode ser vista em [Mor29, Teorema A_0, p. 170] ou em [Jub09, Teorema 12, p. 5]. $\square$

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

- $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular orientável S.
- $f : D \to \mathbb{R}$ uma função tal que:
  1. f é uma função de Morse em D;
  2. f não tem pontos críticos em ∂D;
  3. A restrição $f|_{\partial D}\colon \partial D \to \mathbb{R}$ é uma função de Morse.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

- $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular orientável S.
- $f : D \to \mathbb{R}$ uma função tal que:
  1. f é uma função de Morse em D;
  2. f não tem pontos críticos em ∂D;
  3. A restrição $f|_{\partial D}: \partial D \to \mathbb{R}$ é uma função de Morse.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

- $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular orientável S.
- $f : D \to \mathbb{R}$ uma função tal que:
  1. f é uma função de Morse em D;
  2. f não tem pontos críticos em ∂D;
  3. A restrição $f|_{\partial D}: \partial D \to \mathbb{R}$ é uma função de Morse.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

- $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular orientável S.
- $f : D \to \mathbb{R}$ uma função tal que:
  1. f é uma função de Morse em D;
  2. f não tem pontos críticos em ∂D;
  3. A restrição $f|_{\partial D}$: $\partial D \to \mathbb{R}$ é uma função de Morse.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

- $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular orientável S.
- $f : D \to \mathbb{R}$ uma função tal que:
  1. f é uma função de Morse em D;
  2. f não tem pontos críticos em ∂D;
  3. A restrição $f|_{\partial D} \colon \partial D \to \mathbb{R}$ é uma função de Morse.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

- $p \in D$ é um ponto crítico de f definimos o índice de f em p como o número $ind_p(f)$.
- $p \in \partial D$ é um ponto crítico de $f|_{\partial D}$.

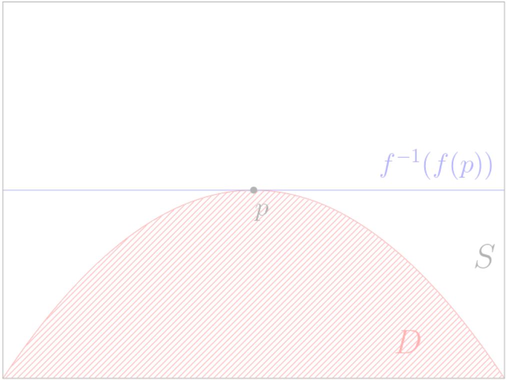


Figura: "Ilha" e $\mathrm{ind}_p(f) = +1$.

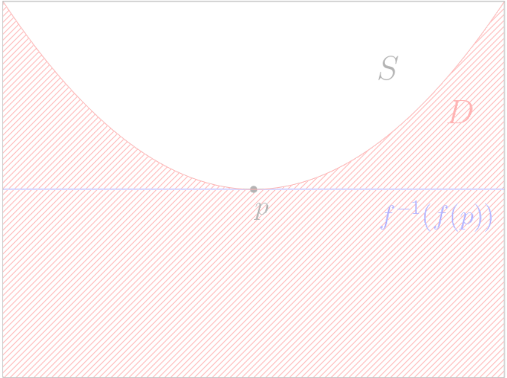


Figura: "Ponte" e $\mathrm{ind}_p(f) = -1$.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

- $p \in D$ é um ponto crítico de f definimos o índice de f em p como o número $ind_p(f)$.
- $p \in \partial D$ é um ponto crítico de $f|_{\partial D}$.

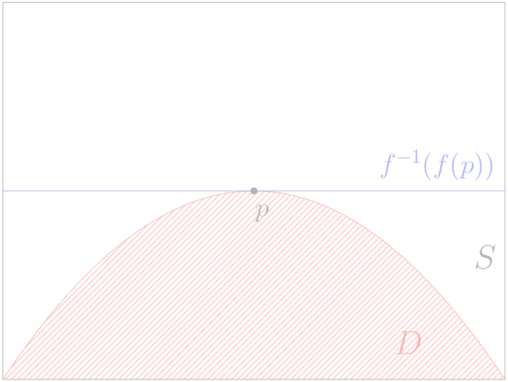


Figura: "Ilha" e $\mathrm{ind}_p(f) = +1$.

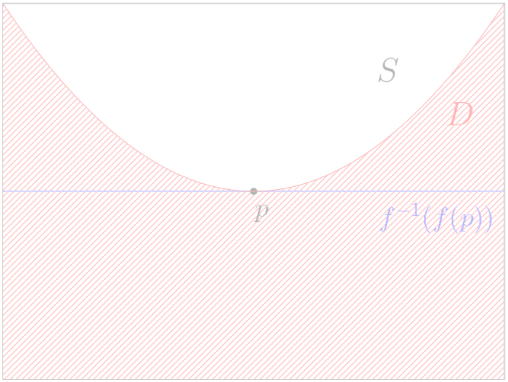


Figura: "Ponte" e $\mathrm{ind}_p(f) = -1$.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

- $p \in D$ é um ponto crítico de f definimos o índice de f em p como o número $ind_p(f)$.
- $p \in \partial D$ é um ponto crítico de $f|_{\partial D}$.

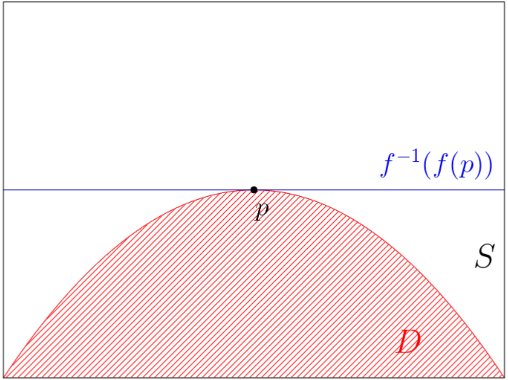


Figura: "Ilha" e $\mathrm{ind}_p(f) = +1$.

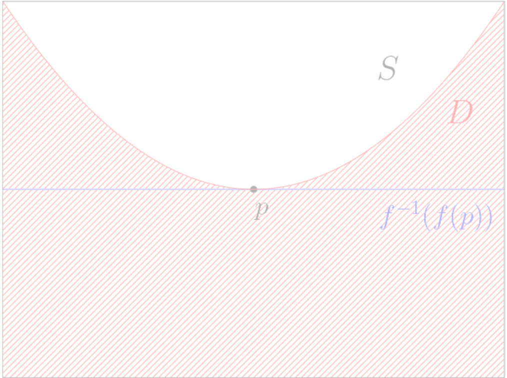


Figura: "Ponte" e $\mathrm{ind}_p(f) = -1$.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

- $p \in D$ é um ponto crítico de f definimos o índice de f em p como o número $ind_p(f)$.
- $p \in \partial D$ é um ponto crítico de $f|_{\partial D}$.

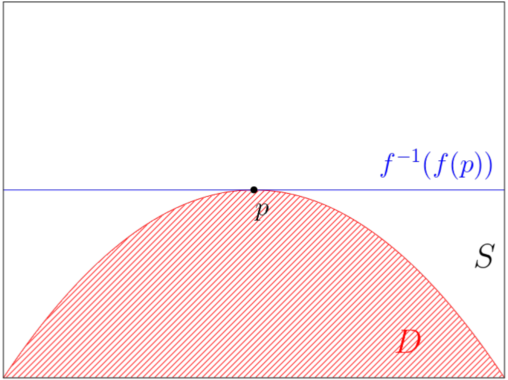


Figura: "Ilha" e $\mathrm{ind}_p(f) = +1$.

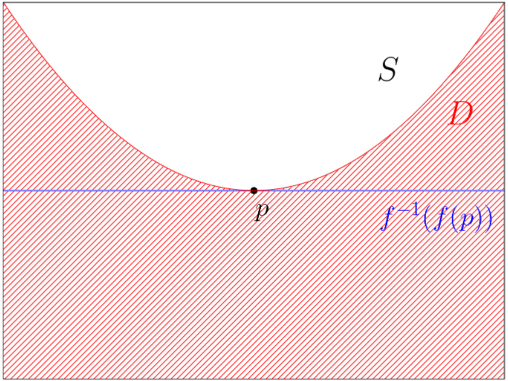


Figura: "Ponte" e $\mathrm{ind}_p(f) = -1$.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

Lema

Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ *um domínio com fronteira em uma superfície regular orientável* S, $p \in \partial D$ *e* $f : D \to \mathbb{R}$ *uma função tal que a restrição* $f|_{\partial D}: \partial D \to \mathbb{R}$ *é uma função de Morse. Então valem as seguintes afirmações:*

1. $Crit(f|_{\partial D}) = \{p \in \partial D : grad(f)(p) \perp T_p\partial D\}$;
2. $grad(f)$ *é ortogonal a* ∂D *somente em um número finito de pontos;*
3. $ind_p(f) = ind_p(grad(f))$.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

Teorema (Teorema de Poincaré-Hopf generalizado para funções de Morse)

Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular orientável S e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função tal que f é uma função de Morse em D, f não tem pontos críticos em ∂D e a restrição $f|_{\partial D} \colon \partial D \to \mathbb{R}$ é uma função de Morse. Então

$$\sum_{p \in Crit(f)} ind_p(f) + \frac{1}{2} \sum_{p \in Crit(f|_{\partial D})} ind_p(f) = \mathcal{X}(D).$$

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

- $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular suave orientável S.
- Os conjuntos de nível $\pi_{u,\lambda} \cap S$ são curvas planas.
- Se λ é um valor regular de $h_u|_S$ então $\pi_{u,\lambda} \cap S$ é uma curva suave em S.
- $p \in D$, denotaremos por $N(p)$ o vetor normal unitário de D em p e $K(p)$ a curvatura Gaussiana de D em p.
- $q \in \partial D$, denotaremos por $n(q)$ o vetor conormal unitário de ∂D em q e $\kappa_g(q)$ a curvatura geodésica de ∂D em D no ponto q.
- $\kappa_g^u(p)$ a curvatura geodésica da curva $\pi_{u,\lambda} \cap S$ no ponto p.

Nestas condições, temos os seguintes resultados.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

- $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular suave orientável S.
- Os conjuntos de nível $\pi_{u,\lambda} \cap S$ são curvas planas.
- Se λ é um valor regular de $h_u|_S$ então $\pi_{u,\lambda} \cap S$ é uma curva suave em S.
- $p \in D$, denotaremos por $N(p)$ o vetor normal unitário de D em p e $K(p)$ a curvatura Gaussiana de D em p.
- $q \in \partial D$, denotaremos por $n(q)$ o vetor conormal unitário de ∂D em q e $\kappa_g(q)$ a curvatura geodésica de ∂D em D no ponto q.
- $\kappa_g^u(p)$ a curvatura geodésica da curva $\pi_{u,\lambda} \cap S$ no ponto p.

Nestas condições, temos os seguintes resultados.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

- $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular suave orientável S.
- Os conjuntos de nível $\pi_{u,\lambda} \cap S$ são curvas planas.
- Se λ é um valor regular de $h_u|_S$ então $\pi_{u,\lambda} \cap S$ é uma curva suave em S.
- $p \in D$, denotaremos por $N(p)$ o vetor normal unitário de D em p e $K(p)$ a curvatura Gaussiana de D em p.
- $q \in \partial D$, denotaremos por $n(q)$ o vetor conormal unitário de ∂D em q e $\kappa_g(q)$ a curvatura geodésica de ∂D em D no ponto q.
- $\kappa_g^u(p)$ a curvatura geodésica da curva $\pi_{u,\lambda} \cap S$ no ponto p.

Nestas condições, temos os seguintes resultados.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

- $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular suave orientável S.
- Os conjuntos de nível $\pi_{u,\lambda} \cap S$ são curvas planas.
- Se λ é um valor regular de $h_u|_S$ então $\pi_{u,\lambda} \cap S$ é uma curva suave em S.
- $p \in D$, denotaremos por $N(p)$ o vetor normal unitário de D em p e $K(p)$ a curvatura Gaussiana de D em p.
- $q \in \partial D$, denotaremos por $n(q)$ o vetor conormal unitário de ∂D em q e $\kappa_g(q)$ a curvatura geodésica de ∂D em D no ponto q.
- $\kappa_g^u(p)$ a curvatura geodésica da curva $\pi_{u,\lambda} \cap S$ no ponto p.

Nestas condições, temos os seguintes resultados.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

- $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular suave orientável S.
- Os conjuntos de nível $\pi_{u,\lambda} \cap S$ são curvas planas.
- Se λ é um valor regular de $h_u|_S$ então $\pi_{u,\lambda} \cap S$ é uma curva suave em S.
- $p \in D$, denotaremos por $N(p)$ o vetor normal unitário de D em p e $K(p)$ a curvatura Gaussiana de D em p.
- $q \in \partial D$, denotaremos por $n(q)$ o vetor conormal unitário de ∂D em q e $\kappa_g(q)$ a curvatura geodésica de ∂D em D no ponto q.
- $\kappa_g^u(p)$ a curvatura geodésica da curva $\pi_{u,\lambda} \cap S$ no ponto p.

Nestas condições, temos os seguintes resultados.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

- $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular suave orientável S.
- Os conjuntos de nível $\pi_{u,\lambda} \cap S$ são curvas planas.
- Se λ é um valor regular de $h_u|_S$ então $\pi_{u,\lambda} \cap S$ é uma curva suave em S.
- $p \in D$, denotaremos por $N(p)$ o vetor normal unitário de D em p e $K(p)$ a curvatura Gaussiana de D em p.
- $q \in \partial D$, denotaremos por $n(q)$ o vetor conormal unitário de ∂D em q e $\kappa_g(q)$ a curvatura geodésica de ∂D em D no ponto q.
- $\kappa_g^u(p)$ a curvatura geodésica da curva $\pi_{u,\lambda} \cap S$ no ponto p.

Nestas condições, temos os seguintes resultados.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

- $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular suave orientável S.
- Os conjuntos de nível $\pi_{u,\lambda} \cap S$ são curvas planas.
- Se λ é um valor regular de $h_u|_S$ então $\pi_{u,\lambda} \cap S$ é uma curva suave em S.
- $p \in D$, denotaremos por $N(p)$ o vetor normal unitário de D em p e $K(p)$ a curvatura Gaussiana de D em p.
- $q \in \partial D$, denotaremos por $n(q)$ o vetor conormal unitário de ∂D em q e $\kappa_g(q)$ a curvatura geodésica de ∂D em D no ponto q.
- $\kappa_g^u(p)$ a curvatura geodésica da curva $\pi_{u,\lambda} \cap S$ no ponto p.

Nestas condições, temos os seguintes resultados.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

Teorema

Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular suave e orientável S em $\mathbb{R}^3$ e $u \in \mathbb{S}^2$.

- *$p \in D$ é um ponto crítico de $h_u|_D$ se, e somente se, $\pi_{u,\lambda}$ é tangente a D em p se, e somente se, $u = \pm N(p)$.*

- $v \in T_pD$ e
- $\alpha :] -\varepsilon, \varepsilon[\to D \subset S$ uma curva p.p.c.a. tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$.

$$d\left(h_u|_D\right)_p(v) = \langle v, u\rangle.$$

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

Teorema

Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular suave e orientável S em $\mathbb{R}^3$ e $u \in \mathbb{S}^2$.

- *$p \in D$ é um ponto crítico de $h_u|_D$ se, e somente se, $\pi_{u,\lambda}$ é tangente a D em p se, e somente se, $u = \pm N(p)$.*

- $v \in T_pD$ e
- $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\to D \subset S$ uma curva p.p.c.a. tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$.

$$d\left(h_u|_D\right)_p(v) = \langle v, u \rangle.$$

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

Teorema

Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular suave e orientável S em $\mathbb{R}^3$ e $u \in \mathbb{S}^2$.

- *$p \in D$ é um ponto crítico de $h_u|_D$ se, e somente se, $\pi_{u,\lambda}$ é tangente a D em p se, e somente se, $u = \pm N(p)$.*

- $v \in T_pD$ e
- $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\to D \subset S$ uma curva p.p.c.a. tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$.

$$d\left(h_u|_D\right)_p(v) = \langle v, u \rangle.$$

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

Teorema

Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular suave e orientável S em $\mathbb{R}^3$ e $u \in \mathbb{S}^2$.

- *$p \in D$ é um ponto crítico de $h_u|_D$ se, e somente se, $\pi_{u,\lambda}$ é tangente a D em p se, e somente se, $u = \pm N(p)$.*

- $v \in T_pD$ e
- $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\to D \subset S$ uma curva p.p.c.a. tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$.

$$d\left(h_u|_D\right)_p(v) = \langle v, u \rangle.$$

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

Teorema

Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular suave e orientável S em $\mathbb{R}^3$ e $u \in \mathbb{S}^2$.

- *$p \in D$ é um ponto crítico não-degenerado de $h_u|_D$ se, e somente se, $K(p) \neq 0$. Além disso, p é um extremo local de $h_u|_D$ quando $K(p) > 0$ e um ponto de sela quando $K(p) < 0$.*

Considere $\{v_1, v_2\}$ um referencial ortonormal principal em p com curvaturas principais κ_1, κ_2. Matricialmente obtemos:

$$Hess_p\left(h_u|_D\right)(v) = \mathrm{II}_p(v) = v \begin{pmatrix} -\kappa_1 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 \end{pmatrix} v^T.$$

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

Teorema

Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular suave e orientável S em $\mathbb{R}^3$ e $u \in \mathbb{S}^2$.

- *$p \in D$ é um ponto crítico não-degenerado de $h_u|_D$ se, e somente se, $K(p) \neq 0$. Além disso, p é um extremo local de $h_u|_D$ quando $K(p) > 0$ e um ponto de sela quando $K(p) < 0$.*

Considere $\{v_1, v_2\}$ um referencial ortonormal principal em p com curvaturas principais κ_1, κ_2. Matricialmente obtemos:

$$Hess_p\left(h_u|_D\right)(v) = \mathrm{II}_p(v) = v \begin{pmatrix} -\kappa_1 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 \end{pmatrix} v^T.$$

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

Teorema

Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular suave e orientável S em $\mathbb{R}^3$, $u \in \mathbb{S}^2$ e $\tilde{u}$ a projeção ortogonal normalizada de u em T_pD, para $p \in D$.

- *Se $p \in \partial D$ é um ponto regular de $h_u|_D$ então p é um ponto crítico de $h_u|_{\partial D}$ se, e somente se, $\pi_{u,\lambda} \cap S$ é tangente a ∂D em p se, e somente se, $\tilde{u} = \pm n(p)$.*

- $\alpha : I \to \partial D \subset S$ uma p.p.c.a. de ∂D tal que $\alpha(t_0) = p$ e $n(p) = N(p) \wedge \alpha'(t_0)$.
- $\{N(p), \alpha'(t_0), n(p)\}$ é uma base ortonormal.

$$u = \langle u, N(p)\rangle N(p) + \langle u, \alpha'(t_0)\rangle \alpha'(t_0) + \langle u, n(p)\rangle n(p).$$

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

Teorema

Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular suave e orientável S em $\mathbb{R}^3$, $u \in \mathbb{S}^2$ e $\tilde{u}$ a projeção ortogonal normalizada de u em T_pD, para $p \in D$.

- *Se $p \in \partial D$ é um ponto regular de $h_u|_D$ então p é um ponto crítico de $h_u|_{\partial D}$ se, e somente se, $\pi_{u,\lambda} \cap S$ é tangente a ∂D em p se, e somente se, $\tilde{u} = \pm n(p)$.*

- $\alpha : I \to \partial D \subset S$ uma p.p.c.a. de ∂D tal que $\alpha(t_0) = p$ e $n(p) = N(p) \wedge \alpha'(t_0)$.
- $\{N(p), \alpha'(t_0), n(p)\}$ é uma base ortonormal.

$$u = \langle u, N(p)\rangle N(p) + \langle u, \alpha'(t_0)\rangle \alpha'(t_0) + \langle u, n(p)\rangle n(p).$$

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

Teorema

Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular suave e orientável S em $\mathbb{R}^3$, $u \in \mathbb{S}^2$ e $\tilde{u}$ a projeção ortogonal normalizada de u em T_pD, para $p \in D$.

- *Se $p \in \partial D$ é um ponto regular de $h_u|_D$ então p é um ponto crítico de $h_u|_{\partial D}$ se, e somente se, $\pi_{u,\lambda} \cap S$ é tangente a ∂D em p se, e somente se, $\tilde{u} = \pm n(p)$.*

- $\alpha : I \to \partial D \subset S$ uma p.p.c.a. de ∂D tal que $\alpha(t_0) = p$ e $n(p) = N(p) \wedge \alpha'(t_0)$.
- $\{N(p), \alpha'(t_0), n(p)\}$ é uma base ortonormal.

$$u = \langle u, N(p)\rangle N(p) + \langle u, \alpha'(t_0)\rangle \alpha'(t_0) + \langle u, n(p)\rangle n(p).$$

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

Teorema

Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular suave e orientável S em $\mathbb{R}^3$, $u \in \mathbb{S}^2$ e $\tilde{u}$ a projeção ortogonal normalizada de u em T_pD, para $p \in D$.

- *Se $p \in \partial D$ é um ponto regular de $h_u|_D$ então p é um ponto crítico de $h_u|_{\partial D}$ se, e somente se, $\pi_{u,\lambda} \cap S$ é tangente a ∂D em p se, e somente se, $\tilde{u} = \pm n(p)$.*

- $\alpha : I \to \partial D \subset S$ uma p.p.c.a. de ∂D tal que $\alpha(t_0) = p$ e $n(p) = N(p) \wedge \alpha'(t_0)$.
- $\{N(p), \alpha'(t_0), n(p)\}$ é uma base ortonormal.

$$u = \langle u, N(p)\rangle N(p) + \langle u, \alpha'(t_0)\rangle \alpha'(t_0) + \langle u, n(p)\rangle n(p).$$

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

Teorema

Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular suave e orientável S em $\mathbb{R}^3$, $u \in \mathbb{S}^2$ e $\tilde{u}$ a projeção ortogonal normalizada de u em T_pD, para $p \in D$.

- *Se $p \in \partial D$ é um ponto regular de $h_u|_D$ e um ponto crítico de $h_u|_{\partial D}$ então $p \in \partial D$ é não degenerado se, e somente se, $\kappa_g(p) \neq \kappa_g^u(p)$. Além disso, p é uma ilha quando $\kappa_g(p) > \kappa_g^u(p)$ e uma ponte quando $\kappa_g(p) < \kappa_g^u(p)$.*

- $\alpha : I \to \partial D \subset S$ uma p.p.c.a. de ∂D tal que $\alpha(t_0) = p$ e $n(p) = N(p) \wedge \alpha'(t_0)$.
- $\beta : I \to \pi_{u,\lambda} \cap S \subset S$ uma p.p.c.a de $\pi_{u,\lambda} \cap S$ tal que $\beta(s_0) = p$.
- $\langle u, \beta(s) \rangle = \lambda \implies \langle u, \beta'(s) \rangle = 0 \implies \langle u, \beta''(s) \rangle = 0$, para todo $s \in I$.
- As curvas α e β são tangentes em p.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

Teorema

Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular suave e orientável S em $\mathbb{R}^3$, $u \in \mathbb{S}^2$ e $\tilde{u}$ a projeção ortogonal normalizada de u em T_pD, para $p \in D$.

- *Se $p \in \partial D$ é um ponto regular de $h_u|_D$ e um ponto crítico de $h_u|_{\partial D}$ então $p \in \partial D$ é não degenerado se, e somente se, $\kappa_g(p) \neq \kappa_g^u(p)$. Além disso, p é uma ilha quando $\kappa_g(p) > \kappa_g^u(p)$ e uma ponte quando $\kappa_g(p) < \kappa_g^u(p)$.*

- $\alpha : I \to \partial D \subset S$ uma p.p.c.a. de ∂D tal que $\alpha(t_0) = p$ e $n(p) = N(p) \wedge \alpha'(t_0)$.
- $\beta : I \to \pi_{u,\lambda} \cap S \subset S$ uma p.p.c.a de $\pi_{u,\lambda} \cap S$ tal que $\beta(s_0) = p$.
- $\langle u, \beta(s) \rangle = \lambda \implies \langle u, \beta'(s) \rangle = 0 \implies \langle u, \beta''(s) \rangle = 0$, para todo $s \in I$.
- As curvas α e β são tangentes em p.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

Teorema

Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular suave e orientável S em $\mathbb{R}^3$, $u \in \mathbb{S}^2$ e $\tilde{u}$ a projeção ortogonal normalizada de u em T_pD, para $p \in D$.

- *Se $p \in \partial D$ é um ponto regular de $h_u|_D$ e um ponto crítico de $h_u|_{\partial D}$ então $p \in \partial D$ é não degenerado se, e somente se, $\kappa_g(p) \neq \kappa_g^u(p)$. Além disso, p é uma ilha quando $\kappa_g(p) > \kappa_g^u(p)$ e uma ponte quando $\kappa_g(p) < \kappa_g^u(p)$.*

- $\alpha : I \to \partial D \subset S$ uma p.p.c.a. de ∂D tal que $\alpha(t_0) = p$ e $n(p) = N(p) \wedge \alpha'(t_0)$.
- $\beta : I \to \pi_{u,\lambda} \cap S \subset S$ uma p.p.c.a de $\pi_{u,\lambda} \cap S$ tal que $\beta(s_0) = p$.
- $\langle u, \beta(s) \rangle = \lambda \implies \langle u, \beta'(s) \rangle = 0 \implies \langle u, \beta''(s) \rangle = 0$, para todo $s \in I$.
- As curvas α e β são tangentes em p.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

Teorema

Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular suave e orientável S em $\mathbb{R}^3$, $u \in \mathbb{S}^2$ e $\tilde{u}$ a projeção ortogonal normalizada de u em T_pD, para $p \in D$.

- *Se $p \in \partial D$ é um ponto regular de $h_u|_D$ e um ponto crítico de $h_u|_{\partial D}$ então $p \in \partial D$ é não degenerado se, e somente se, $\kappa_g(p) \neq \kappa_g^u(p)$. Além disso, p é uma ilha quando $\kappa_g(p) > \kappa_g^u(p)$ e uma ponte quando $\kappa_g(p) < \kappa_g^u(p)$.*

- $\alpha : I \to \partial D \subset S$ uma p.p.c.a. de ∂D tal que $\alpha(t_0) = p$ e $n(p) = N(p) \wedge \alpha'(t_0)$.
- $\beta : I \to \pi_{u,\lambda} \cap S \subset S$ uma p.p.c.a de $\pi_{u,\lambda} \cap S$ tal que $\beta(s_0) = p$.
- $\langle u, \beta(s) \rangle = \lambda \implies \langle u, \beta'(s) \rangle = 0 \implies \langle u, \beta''(s) \rangle = 0$, para todo $s \in I$.
- As curvas α e β são tangentes em p.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

Teorema

Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular suave e orientável S em $\mathbb{R}^3$, $u \in \mathbb{S}^2$ e $\tilde{u}$ a projeção ortogonal normalizada de u em T_pD, para $p \in D$.

- *Se $p \in \partial D$ é um ponto regular de $h_u|_D$ e um ponto crítico de $h_u|_{\partial D}$ então $p \in \partial D$ é não degenerado se, e somente se, $\kappa_g(p) \neq \kappa_g^u(p)$. Além disso, p é uma ilha quando $\kappa_g(p) > \kappa_g^u(p)$ e uma ponte quando $\kappa_g(p) < \kappa_g^u(p)$.*

- $\alpha : I \to \partial D \subset S$ uma p.p.c.a. de ∂D tal que $\alpha(t_0) = p$ e $n(p) = N(p) \wedge \alpha'(t_0)$.
- $\beta : I \to \pi_{u,\lambda} \cap S \subset S$ uma p.p.c.a de $\pi_{u,\lambda} \cap S$ tal que $\beta(s_0) = p$.
- $\langle u, \beta(s) \rangle = \lambda \implies \langle u, \beta'(s) \rangle = 0 \implies \langle u, \beta''(s) \rangle = 0$, para todo $s \in I$.
- As curvas α e β são tangentes em p.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

Como α e β são parametrizadas pelo comprimento de arco, temos

$$\alpha''(t_0) = \kappa_n(p)N(p) + \kappa_g(p)n(p),$$
$$\beta''(s_0) = \kappa_n^u(p)N(p) + \kappa_g^u(p)n(p),$$

donde concluímos que

$$\langle u, \alpha''(t_0)\rangle = \kappa_n(p)\langle u, N(p)\rangle + \kappa_g(p)\langle u, n(p)\rangle.$$
$$0 = \langle u, \beta''(s_0)\rangle = \kappa_n^u(p)\langle u, N(p)\rangle + \kappa_g^u(p)\langle u, n(p)\rangle.$$

Pelo Teorema de Meusnier temos que $\kappa_n^u(p) = \kappa_n(p)$. Logo,

$$\langle u, \alpha''(t_0)\rangle = \left(\kappa_g(p) - \kappa_g^u(p)\right)\langle u, n(p)\rangle.$$

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

Como α e β são parametrizadas pelo comprimento de arco,temos

$$\alpha''(t_0) = \kappa_n(p)N(p) + \kappa_g(p)n(p),$$
$$\beta''(s_0) = \kappa_n^u(p)N(p) + \kappa_g^u(p)n(p),$$

donde concluímos que

$$\langle u, \alpha''(t_0)\rangle = \kappa_n(p)\langle u, N(p)\rangle + \kappa_g(p)\langle u, n(p)\rangle.$$
$$0 = \langle u, \beta''(s_0)\rangle = \kappa_n^u(p)\langle u, N(p)\rangle + \kappa_g^u(p)\langle u, n(p)\rangle.$$

Pelo Teorema de Meusnier temos que $\kappa_n^u(p) = \kappa_n(p)$. Logo,

$$\langle u, \alpha''(t_0)\rangle = \left(\kappa_g(p) - \kappa_g^u(p)\right)\langle u, n(p)\rangle.$$

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

Como α e β são parametrizadas pelo comprimento de arco,temos

$$\alpha''(t_0) = \kappa_n(p)N(p) + \kappa_g(p)n(p),$$
$$\beta''(s_0) = \kappa_n^u(p)N(p) + \kappa_g^u(p)n(p),$$

donde concluímos que

$$\langle u, \alpha''(t_0)\rangle = \kappa_n(p)\langle u, N(p)\rangle + \kappa_g(p)\langle u, n(p)\rangle.$$
$$0 = \langle u, \beta''(s_0)\rangle = \kappa_n^u(p)\langle u, N(p)\rangle + \kappa_g^u(p)\langle u, n(p)\rangle.$$

Pelo Teorema de Meusnier temos que $\kappa_n^u(p) = \kappa_n(p)$. Logo,

$$\langle u, \alpha''(t_0)\rangle = \left(\kappa_g(p) - \kappa_g^u(p)\right)\langle u, n(p)\rangle.$$

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

Como α e β são parametrizadas pelo comprimento de arco,temos

$$\alpha''(t_0) = \kappa_n(p)N(p) + \kappa_g(p)n(p),$$
$$\beta''(s_0) = \kappa_n^u(p)N(p) + \kappa_g^u(p)n(p),$$

donde concluímos que

$$\langle u, \alpha''(t_0)\rangle = \kappa_n(p)\langle u, N(p)\rangle + \kappa_g(p)\langle u, n(p)\rangle.$$
$$0 = \langle u, \beta''(s_0)\rangle = \kappa_n^u(p)\langle u, N(p)\rangle + \kappa_g^u(p)\langle u, n(p)\rangle.$$

Pelo Teorema de Meusnier temos que $\kappa_n^u(p) = \kappa_n(p)$. Logo,

$$\langle u, \alpha''(t_0)\rangle = \left(\kappa_g(p) - \kappa_g^u(p)\right)\langle u, n(p)\rangle.$$

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

Como α e β são parametrizadas pelo comprimento de arco,temos

$$\alpha''(t_0) = \kappa_n(p)N(p) + \kappa_g(p)n(p),$$
$$\beta''(s_0) = \kappa_n^u(p)N(p) + \kappa_g^u(p)n(p),$$

donde concluímos que

$$\langle u, \alpha''(t_0)\rangle = \kappa_n(p)\langle u, N(p)\rangle + \kappa_g(p)\langle u, n(p)\rangle.$$
$$0 = \langle u, \beta''(s_0)\rangle = \kappa_n^u(p)\langle u, N(p)\rangle + \kappa_g^u(p)\langle u, n(p)\rangle.$$

Pelo Teorema de Meusnier temos que $\kappa_n^u(p) = \kappa_n(p)$. Logo,

$$\langle u, \alpha''(t_0)\rangle = \left(\kappa_g(p) - \kappa_g^u(p)\right)\langle u, n(p)\rangle.$$

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

Corolário

Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular orientável S e $u \in \mathbb{S}^2$ um vetor arbitrário. Então a função altura $h_u|_D$ é uma função de Morse, não tem pontos críticos em ∂D e a restrição $h_u|_{\partial D}$ é também uma função de Morse. Em particular temos que

$$\mathcal{X}(D) = \sum_{p \in D : N(p) = \pm u} \operatorname{sign}(K(p)) + \frac{1}{2} \sum_{q \in \partial D : n(q) = \pm \tilde{u}} \operatorname{sign}\left(\kappa_g(q) - \kappa_g^u(q)\right).$$

$$h_u|_D(p) = \frac{|p|^2 - |p-u|^2 + |u|^2}{2}.$$

Por [Mil63, Teorema 6.6, p.36] temos que para quase todo $p \in \mathbb{R}^3$ a função $L_p : S \to \mathbb{R}$, dada por $L_p(q) = |p - q|^2$, não tem pontos críticos degenerados.

$h_u|_D$ não tem pontos críticos em ∂D se, e somente se, u é valor regular de N.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

Corolário

Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular orientável S e $u \in \mathbb{S}^2$ um vetor arbitrário. Então a função altura $h_u|_D$ é uma função de Morse, não tem pontos críticos em ∂D e a restrição $h_u|_{\partial D}$ é também uma função de Morse. Em particular temos que

$$\mathcal{X}(D) = \sum_{p \in D : N(p) = \pm u} \operatorname{sign}(K(p)) + \frac{1}{2} \sum_{q \in \partial D : n(q) = \pm \tilde{u}} \operatorname{sign}\left(\kappa_g(q) - \kappa_g^u(q)\right).$$

$$h_u|_D(p) = \frac{|p|^2 - |p-u|^2 + |u|^2}{2}.$$

Por [Mil63, Teorema 6.6, p.36] temos que para quase todo $p \in \mathbb{R}^3$ a função $L_p : S \to \mathbb{R}$, dada por $L_p(q) = |p-q|^2$, não tem pontos críticos degenerados.

$h_u|_D$ não tem pontos críticos em ∂D se, e somente se, u é valor regular de N.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

Corolário

Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular orientável S e $u \in \mathbb{S}^2$ um vetor arbitrário. Então a função altura $h_u|_D$ é uma função de Morse, não tem pontos críticos em ∂D e a restrição $h_u|_{\partial D}$ é também uma função de Morse. Em particular temos que

$$\mathcal{X}(D) = \sum_{p \in D : N(p) = \pm u} \operatorname{sign}(K(p)) + \frac{1}{2} \sum_{q \in \partial D : n(q) = \pm \tilde{u}} \operatorname{sign}\left(\kappa_g(q) - \kappa_g^u(q)\right).$$

$$h_u|_D(p) = \frac{|p|^2 - |p-u|^2 + |u|^2}{2}.$$

Por [Mil63, Teorema 6.6, p.36] temos que para quase todo $p \in \mathbb{R}^3$ a função $L_p : S \to \mathbb{R}$, dada por $L_p(q) = |p-q|^2$, não tem pontos críticos degenerados.

$h_u|_D$ não tem pontos críticos em ∂D se, e somente se, u é valor regular de N.

Uma fórmula de Gauss-Bonnet estereológica

Corolário

Sejam $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular orientável S e $u \in \mathbb{S}^2$ um vetor arbitrário. Então a função altura $h_u|_D$ é uma função de Morse, não tem pontos críticos em ∂D e a restrição $h_u|_{\partial D}$ é também uma função de Morse. Em particular temos que

$$\mathcal{X}(D) = \sum_{p\in D:N(p)=\pm u} \operatorname{sign}\left(K(p)\right) + \frac{1}{2} \sum_{q\in\partial D:n(q)=\pm\tilde{u}} \operatorname{sign}\left(\kappa_g(q) - \kappa_g^u(q)\right).$$

$$h_u|_D(p) = \frac{|p|^2 - |p-u|^2 + |u|^2}{2}.$$

Por [Mil63, Teorema 6.6, p.36] temos que para quase todo $p \in \mathbb{R}^3$ a função $L_p : S \to \mathbb{R}$, dada por $L_p(q) = |p-q|^2$, não tem pontos críticos degenerados.

$h_u|_D$ não tem pontos críticos em ∂D se, e somente se, u é valor regular de N.

Casos particulares

- $S = \mathbb{R}^2$.
- $h_u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ para $u \in \mathbb{S}^1$.
- As curvas de nível são retas ortogonais a u, as quais tem curvatura nula.
- h_u não tem pontos críticos em $\mathbb{R}^2$ e a curvatura geodésica é igual curvatura de uma curva plana.

Corolário

Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio com fronteira e $u \in \mathbb{S}^1$ um vetor arbitrário. Então a restrição da função altura $h_u|_{\partial D}$ é uma função de Morse e

$$\mathcal{X}(D) = \frac{1}{2} \sum_{p \in \partial D : n(p) = \pm \tilde{u}} \operatorname{sign} \kappa(p).$$

Casos particulares

- $S = \mathbb{R}^2$.
- $h_u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ para $u \in \mathbb{S}^1$.
- As curvas de nível são retas ortogonais a u, as quais tem curvatura nula.
- h_u não tem pontos críticos em $\mathbb{R}^2$ e a curvatura geodésica é igual curvatura de uma curva plana.

Corolário

Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio com fronteira e $u \in \mathbb{S}^1$ um vetor arbitrário. Então a restrição da função altura $h_u|_{\partial D}$ é uma função de Morse e

$$\mathcal{X}(D) = \frac{1}{2} \sum_{p \in \partial D : n(p) = \pm \tilde{u}} \operatorname{sign} \kappa(p).$$

Casos particulares

- $S = \mathbb{R}^2$.
- $h_u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ para $u \in \mathbb{S}^1$.
- As curvas de nível são retas ortogonais a u, as quais tem curvatura nula.
- h_u não tem pontos críticos em $\mathbb{R}^2$ e a curvatura geodésica é igual curvatura de uma curva plana.

Corolário

Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio com fronteira e $u \in \mathbb{S}^1$ um vetor arbitrário. Então a restrição da função altura $h_u|_{\partial D}$ é uma função de Morse e

$$\mathcal{X}(D) = \frac{1}{2} \sum_{p \in \partial D : n(p) = \pm \tilde{u}} \operatorname{sign} \kappa(p).$$

Casos particulares

- $S = \mathbb{R}^2$.
- $h_u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ para $u \in \mathbb{S}^1$.
- As curvas de nível são retas ortogonais a u, as quais tem curvatura nula.
- h_u não tem pontos críticos em $\mathbb{R}^2$ e a curvatura geodésica é igual curvatura de uma curva plana.

Corolário

Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio com fronteira e $u \in \mathbb{S}^1$ um vetor arbitrário. Então a restrição da função altura $h_u|_{\partial D}$ é uma função de Morse e

$$\mathcal{X}(D) = \frac{1}{2} \sum_{p \in \partial D : n(p) = \pm \tilde{u}} \mathrm{sign} \kappa(p).$$

Casos particulares

- $S = \mathbb{R}^2$.
- $h_u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ para $u \in \mathbb{S}^1$.
- As curvas de nível são retas ortogonais a u, as quais tem curvatura nula.
- h_u não tem pontos críticos em $\mathbb{R}^2$ e a curvatura geodésica é igual curvatura de uma curva plana.

Corolário

Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio com fronteira e $u \in \mathbb{S}^1$ um vetor arbitrário. Então a restrição da função altura $h_u|_{\partial D}$ é uma função de Morse e

$$\mathcal{X}(D) = \frac{1}{2} \sum_{p \in \partial D : n(p) = \pm \tilde{u}} \operatorname{sign} \kappa(p).$$

Casos particulares

- $S = \mathbb{S}^2$.
- As curvas de nível associadas a função altura $h_u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ são os paralelos cuja curvatura geodésica é dada por $-\tan \gamma_u$.

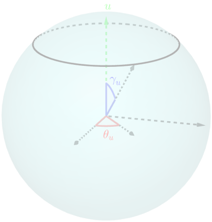


Figura: Coordenadas esféricas relativas a u.

- $h_u|_{\mathbb{S}^2}$ é uma função de Morse com dois pontos críticos, u e $-u$.

Casos particulares

- $S = \mathbb{S}^2$.
- As curvas de nível associadas a função altura $h_u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ são os paralelos cuja curvatura geodésica é dada por $-\tan \gamma_u$.

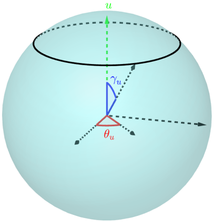


Figura: Coordenadas esféricas relativas a u.

- $h_u|_{\mathbb{S}^2}$ é uma função de Morse com dois pontos críticos, u e $-u$.

Casos particulares

- $S = \mathbb{S}^2$.
- As curvas de nível associadas a função altura $h_u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ são os paralelos cuja curvatura geodésica é dada por $-\tan \gamma_u$.

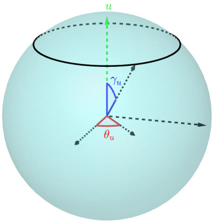


Figura: Coordenadas esféricas relativas a u.

- $h_u|_{\mathbb{S}^2}$ é uma função de Morse com dois pontos críticos, u e $-u$.

Casos particulares

Corolário

Sejam $D \subset \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira e $u \in \mathbb{S}^2$ um vetor arbitrário. Então

$$\mathcal{X}(D) = \frac{1}{2} \sum_{p \in \partial D : n(p) = \pm \tilde{u}} sing\left(\kappa_g(p) + \tan \gamma_u(p)\right) + \#\left(\{u, -u\} \cap D\right),$$

onde $\#\left(\{u, -u\} \cap D\right)$ é o número de vezes que u ou $-u$ pertencem a D.

Casos particulares

- $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular orientável $S \subset \mathbb{R}^3$.
- $u \in \mathbb{S}^2$.
- Quando λ varia em $\mathbb{R}$, os diferentes planos $\pi_{u,\lambda}$ podem ser considerados como planos de "varredura" do $\mathbb{R}^3$.

$$\mathcal{X}(D) = (I_2 - P_2) + \frac{1}{2}(I_1 - P_1)$$

onde I_1, P_1 denotam o número de "ilhas" e "pontes", respectivamente, observados nas curvas de nível $\pi_{u,\lambda} \cap S$ e I_2, P_2 denotam o número de "bases" e "topos", respectivamente, observadas no plano de "varredura" $\pi_{u,\lambda}$, que contribuem para a soma $\sum_{p \in Crit(h_u)} ind_p(h_u)$.

Casos particulares

- $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular orientável $S \subset \mathbb{R}^3$.
- $u \in \mathbb{S}^2$.
- Quando λ varia em $\mathbb{R}$, os diferentes planos $\pi_{u,\lambda}$ podem ser considerados como planos de "varredura" do $\mathbb{R}^3$.

$$\mathcal{X}(D) = (I_2 - P_2) + \frac{1}{2}(I_1 - P_1)$$

onde I_1, P_1 denotam o número de "ilhas" e "pontes", respectivamente, observados nas curvas de nível $\pi_{u,\lambda} \cap S$ e I_2, P_2 denotam o número de "bases" e "topos", respectivamente, observadas no plano de "varredura" $\pi_{u,\lambda}$, que contribuem para a soma $\sum_{p \in Crit(h_u)} ind_p(h_u)$.

Casos particulares

- $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular orientável $S \subset \mathbb{R}^3$.
- $u \in \mathbb{S}^2$.
- Quando λ varia em $\mathbb{R}$, os diferentes planos $\pi_{u,\lambda}$ podem ser considerados como planos de "varredura" do $\mathbb{R}^3$.

$$\mathcal{X}(D) = (I_2 - P_2) + \frac{1}{2}(I_1 - P_1)$$

onde I_1, P_1 denotam o número de "ilhas" e "pontes", respectivamente, observados nas curvas de nível $\pi_{u,\lambda} \cap S$ e I_2, P_2 denotam o número de "bases" e "topos", respectivamente, observadas no plano de "varredura" $\pi_{u,\lambda}$, que contribuem para a soma $\sum_{p \in Crit(h_u)} ind_p(h_u)$.

Casos particulares

- $D \subset S \subset \mathbb{R}^3$ um domínio com fronteira em uma superfície regular orientável $S \subset \mathbb{R}^3$.
- $u \in \mathbb{S}^2$.
- Quando λ varia em $\mathbb{R}$, os diferentes planos $\pi_{u,\lambda}$ podem ser considerados como planos de "varredura" do $\mathbb{R}^3$.

$$\mathcal{X}(D) = (I_2 - P_2) + \frac{1}{2}(I_1 - P_1)$$

onde I_1, P_1 denotam o número de "ilhas" e "pontes", respectivamente, observados nas curvas de nível $\pi_{u,\lambda} \cap S$ e I_2, P_2 denotam o número de "bases" e "topos", respectivamente, observadas no plano de "varredura" $\pi_{u,\lambda}$, que contribuem para a soma $\sum_{p \in Crit(h_u)} ind_p(h_u)$.

Casos particulares

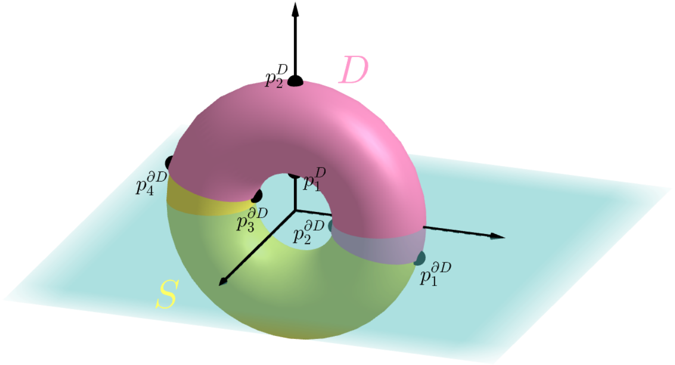


Figura: Exemplo para os índices I_1, I_2, P_1, P_2.

$$I_1 = 2,\ P_1 = 2,\ I_2 = 1 \text{ e } P_2 = 1.$$

$$\text{Logo, } \mathcal{X}(D) = (1 - 1) + \frac{1}{2}(2 - 2) = 0.$$

Bibliografia I

Georges-Louis Leclerc, conde de Buffon.
https://pt.wikipedia.org/wiki/Georges-Louis_Leclerc,_conde_de_Buffon#/media/Ficheiro:Georges-Louis_Leclerc_de_Buffon.jpg.
Acesso: 29/04/2022.

Robert T. DeHoff.
Use of the disector to estimate the euler characteristic of three dimensional microstructures.
Acta Stereologica, 1987.

H.J.G. Gundersen, R.W. Boyce, J.R. Nyengaard, and A. Odgaard.
The conneulor: Unbiased estimation of connectivity using physical disectors under projection.
Bone, 14(3):217–222, 1993.
Bone Morphometry 1992 Sixth International Congress Proceedings.

Bibliografia II

Benoît Jubin.
A generalized poincaré-hopf index theorem, 2009.

J. Milnor.
Morse theory.
Annals of Mathematics Studies, No. 51. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.
Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells.

Marston Morse.
Singular Points of Vector Fields Under General Boundary Conditions.
Amer. J. Math., 51(2):165–178, 1929.

J. OHSER and Werner Nagel.
The estimation of the euler-poincare characteristic from observations on parallel sections.
Journal of Microscopy, 184:117 – 126, 06 2008.

Bibliografia III

Waldir L. Roque, Antonio Carlos A. de Souza, and Denis X. Barbieri.
Característica de euler-poincaré aplicada para identificar baixa densidade óssea a partir de imagens tomográficas de vértebras.
Revista Brasileira de Reumatologia, 04 2009.