A desigualdade isoperimétrica optimal em variedades de Cartan-Hadamard e a conjectura de Aubin

Marcos Agnoletto Forte

2021

Universidade Federal do ABC

Universidade Federal do ABC
Centro de Matemática, Computação e Cognição

Marcos Agnoletto Forte

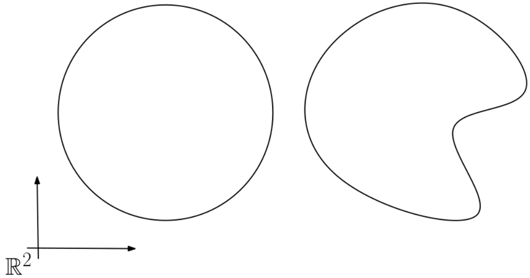
A desigualdade isoperimétrica optimal em variedades de Cartan-Hadamard e a conjectura de Aubin

Orientador: Porf. Dr. Stefano Nardulli
Coorientador: Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva

Universidade Federal do ABC

A conjectura de Cartan-Hadamard

Uma ***variedade de Cartan-Hadamard*** é uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa e com curvatura seccional não-positiva em todo ponto.



A desigualdade isoperimétrica em $\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{L^2 \geq 4\pi A}$$

A conjectura de Cartan-Hadamard

Conjectura de Cartan-Hadamard

Para M uma variedade de Cartan-Hadamard n-dimensional e $\Omega \subset M$ um conjunto limitado, vale a seguinte desigualdade isoperimétrica

$$per(\Omega)^n \geq \frac{per(\mathbb{B}^n)^n}{vol(\mathbb{B}^n)^{n-1}} vol(\Omega)^{n-1}, \tag{1}$$

onde $\mathbb{B}^n$ é uma bola unitária em $\mathbb{R}^n$ e *per* é o perímetro, com igualdade somente se Ω é uma bola em $\mathbb{R}^n$?

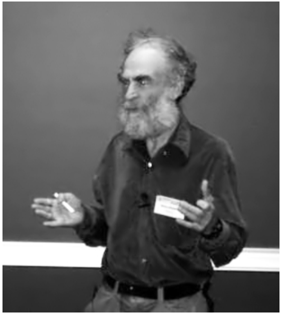
A conjectura de Cartan-Hadamard

Andre Weil (1927)
[Ber02]

Em 1927 Andre Weil, que era estudante de Hadamard nesta época, provou que a desigualdade isoperimétrica vale para variedades de Cartan-Hadamard de dimensão $n = 2$.

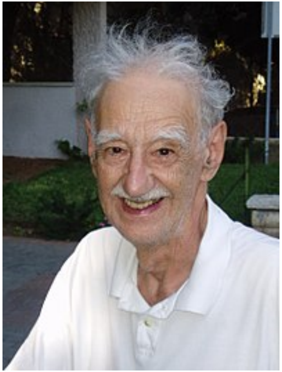
A conjectura de Cartan-Hadamard

Thierry Aubin (1976) [Aub76]



Mikhail Gromov (1981) [Mik81]

Yuri Burago (1988) [BV88]



Viktor Zalgaller (1988) [BV88]

Nos anos 70 e 80 Aubin, Gromov, Burago e Zalgaller conjecturaram que a desigualdade isoperimétrica (1) poderia valer para variedades de Cartan-Hadamard de dimensão $n \geq 2$.

A conjectura de Cartan-Hadamard

Christopher B. Croke (1984)
[Cro84]

O caso $n = 4$ foi provado por Christopher Croke em 1984.

A conjectura de Cartan-Hadamard

Bruce Kleiner (1992)
[Kle92]

O caso $n = 3$ foi provado por Bruce Kleiner em 1992.
A conjectura é um problema em aberto para dimensões $n \geq 5$.

A conjectura de Cartan-Hadamard

Desigualdade para curvatura total

Para M uma variedade de Cartan-Hadamard n-dimensional e $\Gamma \subset M$ uma hipersuperfície convexa de classe $\mathcal{C}^{1,1}$, vale a seguinte desigualdade

$$\mathcal{G}(\Gamma) \geq vol(\mathbb{S}^{n-1}), \tag{2}$$

onde $\mathbb{S}^{n-1}$ denota a esfera unitária em $\mathbb{R}^n$ e *vol* é o volume?

No artigo [Kle92] Kleiner prova que a desigualdade para a curvatura total implica a conjectura de Cartan-Hadamard no caso de dimensão $n = 3$ e então ele prova a desigualdade para a curvatura total no caso de dimensão $n = 3$.

O caso de dimensão 3:

$$\int_\Gamma K_\Gamma d\sigma = 4\pi$$

(Teorema de Gauss-Bonnet)

$$GK = K_\Gamma(E_1, E_2) - K_M(E_1, E_2)$$

(Equação de Gauss)

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{G}(\Gamma) = \int_\Gamma GK d\sigma = \int_\Gamma K_\Gamma d\sigma - \int_\Gamma K_M d\sigma = 4\pi - \int_\Gamma K_M d\sigma \geq 4\pi = vol(\mathbb{S}^2)$$

(Desigualdade para curvatura total 3-dimensional)

O caso de dimensão 2:

$$\int_\Gamma K_\Gamma ds \geq 2\pi.$$

(Teorema de Fenchel ($M = \mathbb{R}^2$))

$$\int_\Gamma K_\Gamma ds \geq 2\pi - \int_T K_M dA$$

(Teorema de Fenchel estendido)

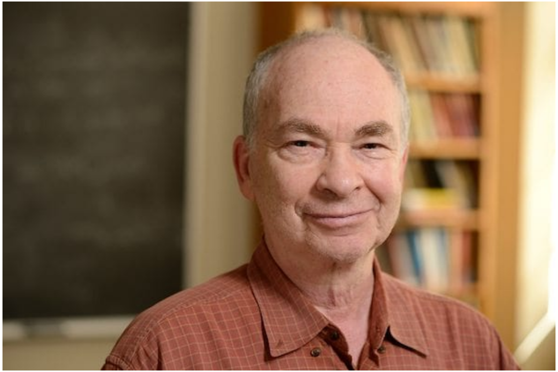
$$\Downarrow$$

$$\mathcal{G}(\Gamma) = \int_\Gamma K_\Gamma ds \geq 2\pi - \int_T K_M dA \geq 2\pi = vol(\mathbb{S}^1).$$

(Desigualdade para curvatura total 2-dimensional)

A conjectura de Cartan-Hadamard

Mohammad Ghomi
[GS21]



Joel Spruck
[GS21]

Desenvolveram avanços na demonstração da conjectura de Cartan-Hadamard, os quais apresentaremos a seguir.

Função distância

Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana e $\Gamma \subset M$ uma hipersuperfície mergulhada em M tal que Γ limita um domínio Ω. Definimos o ***cut locus*** de Γ como o fecho do conjunto de pontos que possuem múltiplos pés da perpendicular.
Definimos a ***distância com sinal*** $d_\Gamma^* : M \to \mathbb{R}$ de Γ (com relação a Ω) por

$$d_\Gamma^*(\cdot) = d_\Omega(\cdot) - d_{M \setminus \Omega}(\cdot).$$

E definimos o ***reach*** de Γ por

$$reach(\Gamma) = d(\Gamma, cut(\Gamma)).$$

Função distância

Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é de ***classe*** $\mathcal{C}^{1,1}$ se f é de classe $\mathcal{C}^1$ e sua diferencial é Lipschitz.
Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio e $\Gamma = \partial\Omega$. Dizemos que Ω e Γ são de classe $\mathcal{C}^{1,1}$ se cada ponto de Γ tem uma vizinhança U de modo que $\Gamma \cap U$ é o gráfico de uma função de classe $\mathcal{C}^{1,1}$.

Função distância

Lema

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e $\Gamma \subset M$ uma hipersuperfície mergulhada em M tal que Γ limita um domínio Ω, isto é, $\partial\Omega = \Gamma$. As seguintes condições são equivalentes:

1. $reach(\Gamma) > 0$.
2. Γ *é* $\mathcal{C}^{1,1}$.
3. d^*_Γ *é* $\mathcal{C}^{1,1}$ *próximo a* Γ.

Proposição

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e $\Gamma \subset M$ uma hipersuperfície mergulhada em M tal que Γ limita um domínio Ω, isto é, $\partial\Omega = \Gamma$. Então d^*_Γ é localmente $\mathcal{C}^{1,1}$ em $M \setminus cut(\Gamma)$. Em particular se Γ é $\mathcal{C}^{1,1}$, então d^*_Γ é localmente $\mathcal{C}^{1,1}$ em $U_r(\Gamma)$ para $r = reach(\Gamma)$.

Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana e $X \subset M$ um subconjunto de M convexo, compacto e com interior não vazio. Chamamos de ***hipersuperfície convexa*** a fronteira ∂X de X.
Dizemos que ∂X é ***d-convexa*** se $d^*_{\partial X}$ é convexa em X.
Dizemos que ∂X é ***h-convexa*** se para cada ponto de ∂X passa uma horoesfera que contém ∂X, isto é, X está contido na respectiva horobola.

Lema

Seja (M, g) uma variedade de Cartan-Hadamard e $X \subset M$ um subconjunto convexo de M. Então d_X é convexa.

Em uma variedade de Cartan-Hadamard as esferas geodésicas são hipersuperfícies convexas.

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e $X \subset M$ um subconjunto de M convexo, limitado e com interior não vazio.

- Se M é uma variedade Riemanniana com curvatura em X é não negativa (≥ 0) então $d^*_{\partial X}$ é convexa em X.
- Se M é uma variedade Riemanniana com curvatura em X estritamente negativa (< 0) então $d^*_{\partial X}$ pode não ser convexa em X; como ilustra a Figura 1.

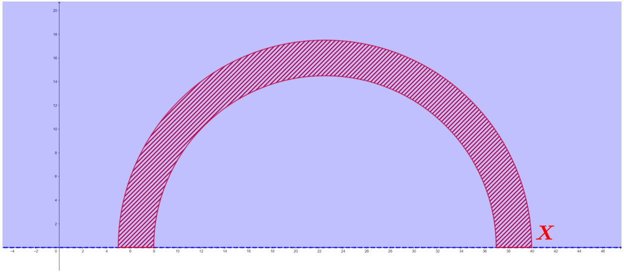


Figura: X não é d-convexo.

Convexidade

Lema

Sejam (M, g) uma variedade de Cartan-Hadamard e $\Gamma \subset M$ uma hipersuperfície mergulhada em M tal que Γ limita um domínio Ω. Se Γ é h-convexa e $\mathcal{C}^{1,1}$ então Γ é d-convexa.

$$\{\text{hs. h} - \text{convexas}\} \subsetneq \{\text{hs. d} - \text{convexas}\} \subsetneq \{\text{hs. convexas}\},$$

onde *hs.* é uma abreviação para *hipersuperfície*.

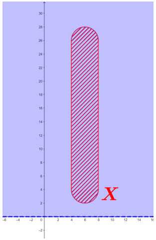


Figura: X é d-convexo mas não é h-convexo.

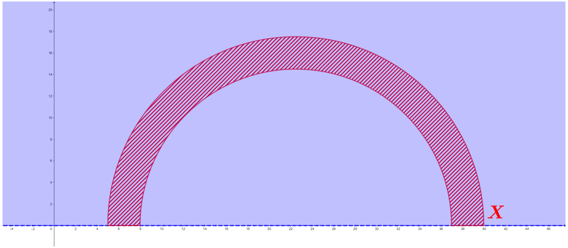


Figura: X é convexo mas não é d-convexo.

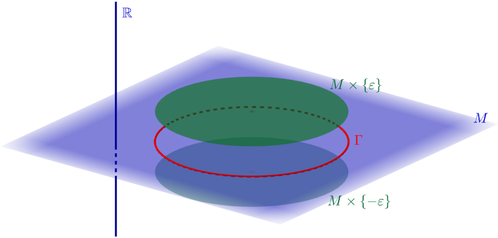
Proposição

Sejam (M, g) *uma variedade de Cartan-Hadamard n-dimensional,* $\Gamma \subset M$ *uma hipersuperfície convexa* $\mathcal{C}^2$ *que limita um domínio convexo* Ω *e* $\widetilde{\Gamma}_\varepsilon$ *a hipersuperfície paralela de* Ω *em* $M \times \mathbb{R}$ *de distância* ε*. Então, quando* $\varepsilon \to 0$,

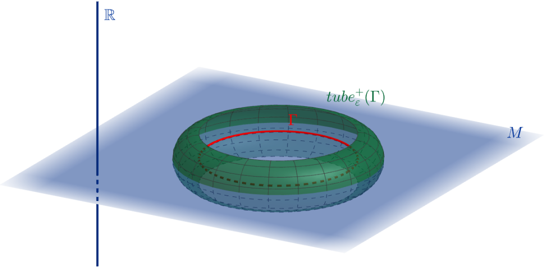
$$\frac{\mathcal{G}\left(\widetilde{\Gamma}_\varepsilon\right)}{vol\left(\mathbb{S}^n\right)} \to \frac{\mathcal{G}\left(\Gamma\right)}{vol\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)}.$$

Em particular, se $\mathcal{G}\left(\widetilde{\Gamma}_\varepsilon\right) \geq vol\left(\mathbb{S}^n\right)$ *então* $\mathcal{G}\left(\Gamma\right) \geq vol\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$

Convexidade



Pontos de $\widetilde{\Gamma}_\varepsilon$ com $GK^\varepsilon(q) = 0$.



Pontos de $\widetilde{\Gamma}_\varepsilon$ com $GK^\varepsilon(q) \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}(tube_\varepsilon^+(\Gamma)) &= \int_{tube_\varepsilon^+(\Gamma)} GK^\varepsilon d\mu_\varepsilon \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{p\in\Gamma} GK^\varepsilon Jac(f^\varepsilon)_{(p,\theta)} d\mu d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{p\in\Gamma} \left(\frac{1}{\varepsilon} det(S_{p,\theta}) + \mathcal{O}(1) + det(S_{p,\theta})\mathcal{O}(\varepsilon) \right) \left(\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right) d\mu d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{p\in\Gamma} det(S_{p,\theta}) + \varepsilon\mathcal{O}(1) + \varepsilon det(S_{p,\theta})\mathcal{O}(\varepsilon) + GK^\varepsilon \mathcal{O}(\varepsilon^2) d\mu d\theta \\
&\to \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{p\in\Gamma} GK(p) cos^{n-1}(\theta) d\mu d\theta \\
&= \frac{vol\left(\mathbb{S}^n\right)}{vol\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)} \mathcal{G}(\Gamma).
\end{aligned}
$$

Uma fórmula de comparação

Estudamos uma fórmula para comparar a curvatura total de conjuntos de nível de uma função de classe $\mathcal{C}^{1,1}$

$$u : M \to \mathbb{R}$$

em variedades Riemannianas. Considere Γ e γ conjuntos de níveis regulares de u, com $\Gamma = \partial\Omega$ e $\gamma = \partial D$, $D \subset \Omega$.
Como podemos comparar $\mathcal{G}(\Gamma)$ com $\mathcal{G}(\gamma)$?

Uma fórmula de comparação

Sejam $p \in M$ um ponto no qual u seja duas vezes diferenciável e E_i, $i = 1, \ldots, n$, um campo referencial ortogonal suave em uma vizinhança V de p.

Definição

*Seja (u_{ij}) dada por $u_{ij} = Hess(u)(E_i, E_j)$. Defina o **operador de cofator** associado a hessiana de u por $\mathcal{T}^u : T_pM \to T_pM$ dado por $(\mathcal{T}^u_{ij}) = (\overline{u}_{ij})$.*

Uma fórmula de comparação

Lema

Sejam (M, g) *uma variedade Riemanniana n-dimensional,* $p \in M$ *um ponto arbitrário e* $u : M \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* $\mathcal{C}^{1,1}$ *em uma vizinhança de* p *tal que* $grad(u) \neq 0$*. Considere* Γ *o conjunto de nível regular de* u *próximo a* p*. Suponha que* Γ *seja duas vezes diferenciável em* p*. Então a curvatura de Gauss-Kronecker de* Γ *em* p *com respeito a* $\dfrac{grad(u)}{|grad(u)|}$ *é dada por*

$$GK = \frac{\langle \mathcal{T}^u(grad(u)), grad(u) \rangle}{|grad(u)|^{n+1}}.$$

Uma fórmula de comparação

Lema

Sejam (M, g) *uma variedade Riemanniana n-dimensional,* $p \in M$ *um ponto arbitrário e* $u : M \to \mathbb{R}$ *uma função três vezes diferenciável em p,* $grad(u)(p) \neq 0$ *e* $\nabla^2(u)(p)$ *não degenerada. Então*

$$div_p\left(\mathcal{T}^u\left(\frac{grad(u)}{|grad(u)|^n}\right)\right) = \left\langle div_p(\mathcal{T}^u), \frac{grad(u)}{|grad(u)|^n}\right\rangle. \tag{3}$$

Lema

Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana, $u : M \to \mathbb{R}$ uma função, $\Gamma \subset M$ um conjunto de nível regular de u que limita um domínio Ω e $\gamma \subset M$ outro conjunto de nível regular de u que limita um domínio D tal que $D \subset \Omega$. Considere que u é de classe $\mathcal{C}^{2,1}$ em $cl(\Omega) \setminus D$ e $grad(u)$ é o normal para fora ao longo de Γ e γ com respeito aos seus correspondentes domínios. Além disso, assuma que $|grad(u)| \neq 0$ e $\nabla^2(u)$ é não degenerada em quase todo ponto $p \in cl(\Omega) \setminus D$. Seja $d\mu$ a medida de volume Riemanniano n-dimensional em M e $d\sigma$ a medida de volume Riemanniana $(n-1)$-dimensional ou a medida de área de uma hipersuperfície. Então

$$\mathcal{G}(\Gamma) - \mathcal{G}(\gamma) = \int_{\Omega \setminus D} \left\langle div(\mathcal{T}^u), \frac{grad(u)}{|grad(u)|^n} \right\rangle d\mu.$$

Uma fórmula de comparação

Lema

Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana, $u : M \to \mathbb{R}$ uma função, $\Gamma \subset M$ um conjunto de nível regular de u que limita um domínio Ω. Considere que u é de classe $\mathcal{C}^{2,1}$ em Ω. Além disso, assuma que $|grad(u)| \neq 0$ e $\nabla^2(u)$ é não degenerada em quase todo ponto $p \in \Omega$. Seja $p \in \Omega$ um ponto no qual u é três vezes diferenciável. Considere E_i um referencial ortogonal em $p \in \Omega$ então

$$\begin{aligned}
\langle div(\mathcal{T}^u), grad(u)\rangle &= \frac{R(\mathcal{T}^u(grad(u)), \mathcal{T}^u(E_i), E_i, grad(u))}{det(\nabla^2(u))} \\
&= \frac{R(\mathcal{T}^u(grad(u)), E_i, \mathcal{T}^u(E_i), grad(u))}{det(\nabla^2(u))}.
\end{aligned}$$

Corolário

Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana, $u : M \to \mathbb{R}$ uma função, $\Gamma \subset M$ um conjunto de nível regular de u que limita um domínio Ω e $\gamma \subset M$ outro conjunto de nível regular de u que limita um domínio D tal que $D \subset \Omega$. Considere que u é de classe $\mathcal{C}^{2,1}$ em $cl(\Omega) \setminus D$ e $grad(u)$ é o normal para fora ao longo de Γ e γ com respeito aos seus correspondentes domínios. Além disso, assuma que $|grad(u)| \neq 0$ e $\nabla^2(u)$ é não degenerada em quase todo ponto $p \in cl(\Omega) \setminus D$. Seja $d\mu$ a medida de volume Riemanniano n-dimensional em M e $d\sigma$ a medida de volume Riemanniana $(n-1)$-dimensional ou a medida de área de uma hipersuperfície. Considere E_i um referencial ortogonal em $p \in \Omega$ então

$$\mathcal{G}(\Gamma) - \mathcal{G}(\gamma) = \int_{\Omega \setminus D} \frac{R(\mathcal{T}^u(grad(u)), \mathcal{T}^u(E_i), E_i, grad(u))}{|grad(u)|^n det(\nabla^2(u))} d\mu.$$

Uma fórmula de comparação

Teorema (Fórmula de comparação, primeira versão)

Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana, $u : M \to \mathbb{R}$ uma função, $\Gamma \subset M$ um conjunto de nível regular de u que limita um domínio Ω e $\gamma \subset M$ outro conjunto de nível regular de u que limita um domínio D tal que $D \subset \Omega$. Suponha que $grad(u)$ é o normal para fora ao longo de Γ e γ com respeito aos seus respectivos domínios. Além disso, suponha que u é de classe $\mathcal{C}^{2,1}$ em $cl(\Omega) \setminus D$ e, em quase todo ponto de $cl(\Omega) \setminus D$, $grad(u) \neq 0$ e $\nabla^2(e^u)$ é não degenerada. Seja $d\mu$ a medida de volume Riemanniano n-dimensional em M. Então,

$$\mathcal{G}(\Gamma) - \mathcal{G}(\gamma) = -\int_{\Omega \setminus D} R_{rnrn} \frac{GK}{\kappa_r} d\mu + \int_{\Omega \setminus D} R_{rkrn} \frac{GK}{\kappa_r \kappa_k} \frac{u_{nk}}{|grad(u)|} d\mu,$$

onde todas as quantidades são calculadas com respeito ao referencial principal de u e $k \leq n-1$.

Uma fórmula de comparação

Em todo ponto $p \in \Omega \setminus D$ podemos tomar um referencial adaptado $E_1, \ldots, E_{n-1}, E_n$ para T_pM tal que

$$E_n = -\frac{grad(u)(p)}{|grad(u)(p)|}$$

e a Hessiana de u é dada por

$$(u_{ij}) = \begin{pmatrix} |grad(u)|\kappa_1 & & 0 & u_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & |grad(u)|\kappa_{n-1} & u_{(n-1)n} \\ u_{1n} & \ldots & u_{(n-1)n} & u_{nn} + h|grad(u)|^2 \end{pmatrix}$$

onde $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$ são as curvaturas principais dos conjuntos de nível de u.

Uma fórmula de comparação

Juntando o que obtivemos até agora concluímos que

$$\mathcal{G}(\Gamma) - \mathcal{G}(\gamma) = -\int_{\Omega \setminus D} R_{rnrn} \frac{GK}{\kappa_r} d\mu + \int_{\Omega \setminus D} R_{rkrn} \frac{GK}{\kappa_r \kappa_k} \frac{u_{nk}}{|grad(u)|} d\mu,$$

onde todas as quantidades são calculadas com respeito ao referencial principal de u e $k \leq n-1$.

Uma fórmula de comparação

Definição

*Sejam (M,g) uma variedade Riemanniana, $A \subset M$ um subconjunto de M e $U_\theta(A)$ a vizinhança tubular de raio θ de A. Definimos uma **função de corte para** $U_\theta(A)$ como uma função contínua $\eta \geq 0$ em M a qual depende somente da distância $\delta(\cdot) = d_A(\cdot)$, é não decrescente em termos de δ, e satisfaz*

$$\eta(p) = \begin{cases} 0 & se\ \delta(p) \leq \theta, \\ 1 & se\ \delta(p) \geq 2\theta. \end{cases}$$

Uma fórmula de comparação

Teorema (Fórmula de comparação, versão geral)

Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana, u, Γ, γ, Ω e D como no Teorema (Fórmula de comparação, primeira versão). Alterando-se que u é de classe $\mathcal{C}^{1,1}$ em $(\Omega \setminus D) \setminus A$, para algum conjunto fechado $A \subset \Omega \setminus D$, e u ou é convexa ou $\nabla^2 e^u$ é não degenerada em quase todo ponto de $(\Omega \setminus D) \setminus A$. Seja $d\mu$ a medida de volume Riemanniano n-dimensional em M. Então, para $\theta > 0$ e η uma função corte para $U_\theta(A)$,

$$\mathcal{G}_\eta(\Gamma) - \mathcal{G}_\eta(\gamma) = \int_{\Omega\setminus D} \left(\eta_k \frac{GK}{\kappa_k} \frac{u_{nk}}{|grad(u)|} - \eta_n GK \right) d\mu + \\ + \int_{\Omega\setminus D} \eta \left(-R_{rnrn} \frac{GK}{\kappa_r} + R_{rkrn} \frac{GK}{\kappa_r \kappa_k} \frac{u_{nk}}{|grad(u)|} \right) d\mu,$$

onde todas as quantidades são calculadas com respeito ao referencial principal de u e $k \leq n-1$.

Aplicações para a fórmula de comparação

Definição

Sejam (M, g) *uma variedade Riemanniana,* $u : M \to \mathbb{R}$ *uma função de* M *e* $p \in M$ *um ponto de* M *onde* u *é duas vezes diferenciável. Considere o conjunto de nível regular* $\Gamma = \{q \in M : u(q) = u(p)\}$ *e* $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$ *as curvaturas principais de* Γ*. Seja* $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1})$*. Definimos a* ***r-ésima curvatura média generalizada de*** Γ *por*

$$\sigma_r(\kappa) = \sigma_r(\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}),$$

onde σ_r *denota as funções simétricas elementares, isto é,* $\sigma_r(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} x_{i_1} \ldots x_{i_r}$.

$$\sigma_{n-1}(\kappa) = GK \text{ e } \sigma_1(\kappa) = (n-1)H$$

Aplicações para a fórmula de comparação

Corolário

Sejam (M, g) *uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante igual a* K_0, u, Γ, γ, Ω *e* D *como no Teorema (Fórmula de comparação, versão geral). Seja* $d\mu$ *a medida de volume Riemanniano n-dimensional em* M*. Então,*

$$\mathcal{G}(\Gamma) - \mathcal{G}(\gamma) = -K_0 \int_{\Omega \setminus D} \sigma_{n-2}(\kappa) d\mu. \tag{4}$$

Em particular, se Γ *e* γ *são convexos e* $K_0 \leq 0$ *então* $\mathcal{G}(\Gamma) \geq \mathcal{G}(\gamma)$*. Além disso, se* Γ *é convexo e* $K_0 \leq 0$ *então*

$$\mathcal{G}(\Gamma) \geq n\omega_n - K_0 \int_{\Omega} \sigma_{n-2}(\kappa) d\mu \geq n\omega_n. \tag{5}$$

Corolário

Sejam (M, g) uma variedade Cartan-Hadamard, $\Gamma \subset M$ uma hipersuperfície mergulhada em M convexa e de classe $\mathcal{C}^{1,1}$ tal que Γ limita um domínio Ω, isto é, $\partial\Omega = \Gamma$. Seja $u = d^*_\Gamma$ e $\gamma \subset M$ um conjunto de nível regular convexo de u que limita um domínio D tal que $D \subset \Omega$ e $\Omega \setminus D \subset U_r(\Gamma)$, com $r = reach(\Gamma)$. Seja $d\mu$ a medida de volume Riemanniano n-dimensional em M. Então,

$$\mathcal{G}(\Gamma) - \mathcal{G}(\gamma) = -\int_{\Omega \setminus D} R_{rnrn} \frac{GK}{\kappa_r} d\mu. \tag{6}$$

Em particular, se $K_M \leq -a \leq 0$ então

$$\mathcal{G}(\Gamma) \geq \mathcal{G}(\gamma) + a \int_{\Omega \setminus D} \sigma_{n-2}(\kappa) d\mu. \tag{7}$$

Por fim, se Γ é uma esfera geodésica e $K_M \leq 0$ então $\mathcal{G}(\Gamma) \geq n\omega_n$.

Corolário

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana n-dimensional, B_ρ uma bola geodésica em M e suponha que $K_M \leq -a \leq 0$. Então

$$\mathcal{G}(\partial B_\rho) \geq n\omega_n + a\int_{B_\rho} \sigma_{n-2}(\kappa)d\mu \geq \mathcal{G}(\partial B_\rho^a), \tag{8}$$

onde B_ρ^a é uma bola geodésica de raio ρ no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n(-a)$. Se temos a igualdade em qualquer uma das duas desigualdades de (8) então B_ρ é isométrica a B_ρ^a.

Definição

Seja (M, g) uma variedade de Cartan-Hadamard, $\Gamma \subset M$ uma hipersuperfície convexa de M e $\varepsilon > 0$. Definimos a ***curvatura total de*** Γ *por*

$$\mathcal{G}(\Gamma) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{G}(\Gamma^\varepsilon), \tag{9}$$

onde Γ^ε é uma hipersuperfície paralela exterior de Γ, isto é, $\Gamma^\varepsilon = (d_\Gamma^*)^{-1}(\varepsilon)$.

Proposição

Sejam (M, g) uma variedade de Cartan-Hadamard e $X \subset M$ um subconjunto compacto de M. Suponha que $\mathrm{conv}(X)$ tem interior não vazio e existe uma vizinhança aberta U de $X_0 = \partial \mathrm{conv}(X)$ em M tal que $X \cap U$ é uma hipersuperfície de classe $\mathcal{C}^{1,1}$. Então

$$\mathcal{G}(X \cap X_0) = \mathcal{G}(X_0).$$

Como os segmentos de geodésica que são perpendiculares a X em pontos distintos nunca se intersectam [BO69, Lema 3.2 item 1, p. 7] temos que

$$\mathcal{G}(X_0^\varepsilon) = \mathcal{G}((X_0 \setminus X)^\varepsilon) + \mathcal{G}((X_0 \cap X)^\varepsilon).$$

Quando $\varepsilon \to 0$ temos que $\mathcal{G}(X_0^\varepsilon) \to \mathcal{G}(X_0)$ então precisamos mostrar que

$$\mathcal{G}((X_0 \setminus X)^\varepsilon) \to 0 \qquad \text{e} \qquad \mathcal{G}((X_0 \cap X)^\varepsilon) \to \mathcal{G}(X_0 \cap X).$$

Curvatura do envoltório convexo

Para mostrarmos que $\mathcal{G}((X_0 \setminus X)^\varepsilon) \to 0$ fixemos $\overline{\varepsilon} > 0$ e consideremos $\overline{p} = p^{\overline{\varepsilon}}$, e para todo $\varepsilon \in [0, \overline{\varepsilon}]$ seja

$$r^\varepsilon : X_0^{\overline{\varepsilon}} \to X_0^\varepsilon$$

a projeção $\overline{p} \mapsto p^\varepsilon$. Note que r^ε é uma aplicação Lipschitz, pois X_0^ε é um conjunto convexo para todo ε no domínio da aplicação.
Consideremos então $J(\varepsilon) = Jac_{\overline{p}}(r^\varepsilon)$ e $GK(\varepsilon) = GK_{X_0^\varepsilon}(p^\varepsilon)$. Assim

$$\mathcal{G}((X_0 \setminus X)^\varepsilon) = \int_{\overline{p} \in (X_0 \setminus X)^{\overline{\varepsilon}}} GK(\varepsilon) J(\varepsilon) d\sigma.$$

Notemos que para quase todo $\overline{p} \in (X_0 \setminus X)^{\overline{\varepsilon}}$

1. $GK(\varepsilon) J(\varepsilon) \leq C$, para $0 < \varepsilon \leq \overline{\varepsilon}$, e
2. $GK(\varepsilon) J(\varepsilon) \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$.

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que $\mathcal{G}((X_0 \setminus X)^\varepsilon) \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.

Curvatura do envoltório convexo

Para mostrarmos que $\mathcal{G}((X_0 \cap X)^{\varepsilon}) \to \mathcal{G}(X_0 \cap X)$ fixemos $\overline{\varepsilon} > 0$ e consideremos $\overline{p}$, r^{ε}, $J(\varepsilon)$ e $GK(\varepsilon)$ como acima. Assim

$$\mathcal{G}((X_0 \cap X)^{\varepsilon}) = \int_{\overline{p} \in (X_0 \cap X)^{\overline{\varepsilon}}} GK(\varepsilon) J(\varepsilon) d\sigma.$$

Notemos que para quase todo $\overline{p} \in (X_0 \cap X)^{\overline{\varepsilon}}$

1. $GK(\varepsilon)J(\varepsilon) \leq C$, para $0 < \varepsilon \leq \overline{\varepsilon}$, e
2. $GK(\varepsilon)J(\varepsilon) \to GK(0)J(0)$, quando $\varepsilon \to 0$.

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que $\mathcal{G}((X_0 \cap X)^{\varepsilon}) \to \mathcal{G}(X_0 \cap X)$ quando $\varepsilon \to 0$.

A desigualdade isoperimétrica

Teorema

Sejam (M, g) *uma variedade de Cartan-Hadamard e* $\Gamma \subset M$ *uma hipersuperfície mergulhada de* M*. Suponha que vale a desigualdade*

$$\mathcal{G}(\Gamma) \geq vol(\mathbb{S}^{n-1}), \tag{10}$$

onde vol é o volume e $\mathbb{S}^{n-1}$ *é a esfera unitária de* $\mathbb{R}^n$*. Então, para* $\Omega \subset M$ *um conjunto limitado de* M*, vale a desigualdade isoperimétrica*

$$per(\Omega)^n \geq \frac{per(\mathbb{B}^n)^n}{vol(\mathbb{B}^n)^{n-1}} vol(\Omega)^{n-1}, \tag{11}$$

onde per é o perímetro e $\mathbb{B}^n$ *é a bola unitária de* $\mathbb{R}^n$*. E vale a igualdade somente para bolas euclideanas.*

Definição

Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana e $U \subset M$ um subconjunto aberto de M. Definimos o ***perfil isoperimétrico de*** *U como a função $\mathcal{I}_U : [0, vol(U)[\to \mathbb{R}$ dada por*

$$\mathcal{I}_U(v) = \inf\{per(\Omega) : \Omega \subset U, vol(\Omega) = v, diam(\Omega) < \infty\},$$

onde diam é o diâmetro, vol a medida de Lebesgue, per o perímetro e $\mathcal{I}_U(0) = 0$.

Note que para provar (11) é suficiente mostrar que $\mathcal{I}_B \geq \mathcal{I}_{\mathbb{R}^n}$ para uma família de bolas geodésicas abertas $B \subset M$ cujo raio cresce arbitrariamente e eventualmente cobre um conjunto limitado $\Omega \subset M$.

Definição

Sejam (M, g) *uma variedade Riemanniana e* $B \subset M$ *uma bola geodésica de* M*. Dizemos que* $\Omega \subset B$ *é uma* ***região isoperimétrica de*** M *se* Ω *tem o menor perímetro dado um volume, ou satisfaz* $per(\Omega) = \mathcal{I}_B(vol(\Omega))$.

A desigualdade isoperimétrica I

Seja $\Omega \subset B$ a região isoperimétrica de volume v. Pela Proposição 6.2 temos que $\mathcal{G}(\Gamma_0) = \mathcal{G}(\Gamma \cap \Gamma_0)$ e consequentemente $\mathcal{G}(\Gamma_0) \geq n\omega_n$. Então temos que

$$n\omega_n \leq \mathcal{G}(\Gamma_0) = \mathcal{G}(\Gamma \cap \Gamma_0) = \int_{\Gamma \cap \Gamma_0} GK d\sigma. \tag{12}$$

Então temos que

$$\begin{aligned} n\omega_n &\leq \int_{\Gamma \cap \Gamma_0} GK d\sigma \\ &\leq \int_{\Gamma \cap \Gamma_0} H^{n-1} d\sigma \\ &= \int_{\Gamma \cap \Gamma_0 \cap \partial B} H^{n-1} d\sigma + \int_{\Gamma \cap \Gamma_0 \cap B} H^{n-1} d\sigma \\ &= \int_{\Gamma \cap \Gamma_0 \cap \partial B} H^{n-1} d\sigma + \int_{\Gamma \cap \Gamma_0 \cap B} H_0^{n-1} d\sigma \end{aligned}$$

A desigualdade isoperimétrica II

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{\Gamma\cap\Gamma_0\cap\partial B} H_0^{n-1} d\sigma + \int_{\Gamma\cap\Gamma_0\cap B} H_0^{n-1} d\sigma \\
&\leq \int_{\Gamma\cap\partial B} H_0^{n-1} d\sigma + \int_{\Gamma\cap B} H_0^{n-1} d\sigma \\
&= H_0^{n-1} per(\Omega). \qquad (13)
\end{aligned}$$

Consequentemente segue-se que

$$H_0(vol(\Omega)) \geq \left(\frac{n\omega_n}{per(\Omega)}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \overline{H}_0(per(\Omega)), \qquad (14)$$

onde $\overline{H}_0(a)$ é a curvatura média de uma bola de perímetro a em $\mathbb{R}^n$.

Por [Hsi92, Lema 4, p. 170] $\mathcal{I}_B'(v) = (n-1)H_0(v)$ em todos os pontos de diferenciabilidade $v \in]0, vol(B)[$. Logo, por (14), temos, em quase todo ponto de $[0, vol(B)]$, que

$$\mathcal{I}_B'(v) = (n-1)H_0(v) \geq (n-1)\overline{H}_0(v) = \mathcal{I}_{\mathbb{R}^n}'(v). \tag{15}$$

Ou ainda,

$$\mathcal{I}_B(v) \geq \mathcal{I}_{\mathbb{R}^n}(v),$$

para todo $v \in [0, vol(B)[$, como desejado.

Bibliografia I

- Thierry Aubin.
  Problemes isoperimetriques et espaces de sobolev.
  J. Differential Geometry, 11, 1976.

- Marcel Berger.
  A panoramic view of Riemannian geometry.
  Springer, Berlin, Germany, 1 edition, 2002.

- Richard L. Bishop and Barrett O'Neill.
  Manifolds of negative curvature.
  Trans. Amer. Math. Soc., 145, 1969.

- Yu. D. Burago and V.A.Zalgaller.
  Geometric inequalities.
  Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1 edition, 1988.

Bibliografia II

Christopher B. Croke.
A sharp four dimensional isoperimetric inequality.
Commentarii Mathematici Helvetici, 59, 1984.

Mohammad Ghomi and Joel Spruck.
Total curvature and the isoperimetric inequality in cartan-hadamard manifolds, 2021.

Wu-Yi Hsiang.
On soap bubbles and isoperimetric regions in noncompact symmetric spaces, i.
Tohoku Mathematical Journal, 44, 1992.

Bruce Kleiner.
An isoperimetric comparison theorem.
Inventiones mathematicae, 108, 1992.

Bibliografia III

Gromov Mikhail.
Structures métriques pour les variétés riemanniennes.
CEDIC F. Nathan, Paris, France, 1 edition, 1981.