NOTAS DE ATENDIMENTO E EXERCÍCIOS

MARCOS AGNOLETTO FORTE

RESUMO. Estas são notas não oficiais sobre os temas mais importantes discutidos durante os horários de atendimento.

CONTEÚDO

1. AULA DO DIA 18/09/2023

Objetivos da aula:

- Explicar as regras do curso (aproximadamente 10 minutos)
- Fazer uma revisão relâmpago de Geometria Diferencial I (aproximadamente 30 minutos)
- Introdução à faixa de Möbius (aproximadamente 10 minutos)
- Pausa de 10 minutos
- Obter a parametrização da Faixa de Möbius (aproximadamente 20 minutos)
- Calcular os coeficientes da primeira forma fundamental (aproximadamente 20 minutos)
- Um visão panorâmica do curso de Geometria Diferencial II através do SageManifolds (aproximadamente 10 minutos)
- Acabar 10 minutos antes

Tempo de aula (expectativa): 120 minutos.

1.1. Revisão de geometria diferencial I.

A referência para esta seção é [DC05].

Definição 1.1. *Uma* **curva diferenciável parametrizada no** $\mathbb{R}^3$ *é uma aplicação diferenciável* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. *Escrevemos* $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, *para* $t \in I$, *o conjunto* $\alpha(I)$ *é chamado de* **traço da curva** α.

Exemplo 1.1. $\alpha(t) := (\cos(t), \sin(t), t)$, $t \in \mathbb{R}$, *é uma curva diferenciável parametrizada no* $\mathbb{R}^3$ *(*$\mathcal{C}^\infty$*) cujo traço é um cilindro.*

Definição 1.2. *Sejam* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *uma curva parametrizada diferenciável e* $t_0 \in I$ *tal que* $\alpha'(t_0) \neq 0$. *Neste caso, dizemos que* $\alpha'(t_0)$ *é o* **vetor tangente a** α **no ponto** $\alpha(t_0)$ *e que* $\alpha(t_0)$ *é um* **ponto regular de** α.

Definição 1.3. *Seja* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *uma curva parametrizada diferenciável. Dizemos que* α *é* **regular** *se* $\alpha(t_0)$ *for um ponto regular de* α *para todo* $t_0 \in I$.

Note que uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ é regular se $\alpha'(t_0) \neq 0$ para todo $t_0 \in I$.

Exemplo 1.2. $\alpha(t) := (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, *é uma curva diferenciável (*$\mathcal{C}^\infty$*) que não é regular.*

Definição 1.4. *Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Dizemos que β é uma* **reparametrização de** α *se existir um difeomorfismo $h : J \subset \mathbb{R} \to I$ tal que $\beta = \alpha \circ h$.*

Definição 1.5. *Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular. O* **comprimento de arco de** α *é dado por*

$$L_\alpha(I) = L(\alpha(I)) := \int_I ||\alpha'(t)||dt.$$

Definição 1.6. *Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Dizemos que α está* **parametrizada pelo comprimento de arco** *(***p.p.c.a.***) se*

$$L_\alpha([t_0, t_1]) = t_1 - t_0,$$

para todos $t_0, t_1 \in I$ tais que $t_0 < t_1$.

Proposição 1.1. *Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Então α está p.p.c.a. se, e somente se, $||\alpha'(t_0)|| = 1$ para todo $t_0 \in I$.*

Proposição 1.2. *Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Então α pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco.*

Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular p.p.c.a.. Denotaremos por $\overrightarrow{t}(s) := \alpha'(s)$ o vetor tangente de α no ponto $\alpha(s)$ para todo $s \in I$. Como α está p.p.c.a., para todo $s \in I$ temos que

$$\begin{aligned} ||\alpha'(s)|| &= 1 \\ ||\alpha'(s)||^2 &= 1 \\ \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle &= 1 \\ \langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle + \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle &= 0 \\ \langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Consequentemente, $\alpha''(s) \perp \alpha'(s)$.

Definição 1.7. *Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular p.p.c.a.. Definimos a* **curvatura de** α **em** *$s \in I$ como sendo o número $\kappa(s) := ||\alpha''(s)||$.*

Geometricamente, $\kappa(s)$ mede o quanto uma curva se afasta de uma reta.

Definição 1.8. *Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular p.p.c.a. tal que $\kappa(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Definimos o* **normal (principal) de** α **em** *$s \in I$ como sendo o vetor*

$$\overrightarrow{n}(s) := \frac{1}{\kappa(s)}\alpha''(s).$$

Note que $\overrightarrow{t}(s) \perp \overrightarrow{n}(s)$ para todo $s \in I$.

Definição 1.9. *Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular p.p.c.a. tal que $\kappa(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Definimos o* **binormal de** α **em** *$s \in I$ como sendo o vetor*

$$\overrightarrow{b}(s) := \overrightarrow{t}(s) \wedge \overrightarrow{n}(s).$$

Note que $\left\{\overrightarrow{t}(s), \overrightarrow{n}(s), \overrightarrow{b}(s)\right\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ centrada em $\alpha(s)$ para cada $s \in I$, ou seja, um referencial móvel sobre α, o qual chamamos de ***triedro de Frenet-Serret***[1] ou ***referencial de Frenet-Serret*** ou ***referencial TNB***.

Para todo $s \in I$ temos que

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{b}(s), \overrightarrow{b}(s) \rangle &= 1 \\ \left\langle \frac{d\overrightarrow{b}}{ds}(s), \overrightarrow{b}(s) \right\rangle &= 0, \end{aligned}$$

[1]Em homenagem aos matemáticos Jean Frédéric Frenet e Joseph Alfred Serret.

e

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{b}(s), \overrightarrow{t}(s)\rangle &= 0\\ \left\langle \frac{d\overrightarrow{b}}{ds}(s), \overrightarrow{t}(s)\right\rangle + \left\langle \overrightarrow{b}(s), \frac{d\overrightarrow{t}}{ds}(s)\right\rangle &= 0\\ \left\langle \frac{d\overrightarrow{b}}{ds}(s), \overrightarrow{t}(s)\right\rangle + \kappa(s)\left\langle \overrightarrow{b}(s), \overrightarrow{n}(s)\right\rangle &= 0\\ \left\langle \frac{d\overrightarrow{b}}{ds}(s), \overrightarrow{t}(s)\right\rangle &= 0.\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\frac{d\overrightarrow{b}}{ds}(s) \parallel \overrightarrow{n}(s),$$

para todo $s \in I$.

Definição 1.10. *Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular p.p.c.a. tal que $\kappa(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Definimos a* **torção de** α **em** $s \in I$ *como sendo o numero*

$$\tau(s) := \left\langle \frac{d\overrightarrow{b}}{ds}(s), \overrightarrow{n}(s)\right\rangle.$$

Geometricamente, $\tau(s)$ mede o quanto a curva deixa de ser plana. Além disso, note que

$$\frac{d\overrightarrow{b}}{ds}(s) = \left\langle \frac{d\overrightarrow{b}}{ds}(s), \overrightarrow{t}(s)\right\rangle \overrightarrow{t}(s) + \left\langle \frac{d\overrightarrow{b}}{ds}(s), \overrightarrow{b}(s)\right\rangle \overrightarrow{b}(s) + \left\langle \frac{d\overrightarrow{b}}{ds}(s), \overrightarrow{n}(s)\right\rangle \overrightarrow{n}(s) = \tau(s)\overrightarrow{n}(s).$$

Proposição 1.3 (Equações de Frenet-Serret)**.** *Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular p.p.c.a. tal que $\kappa(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Então, para todo $s \in I$, valem que*

$$\begin{aligned}\frac{d\overrightarrow{t}}{ds}(s) &= 0 + \kappa(s)\overrightarrow{n}(s) + 0,\\ \frac{d\overrightarrow{n}}{ds}(s) &= -\kappa(s)\overrightarrow{t}(s) + 0 - \tau(s)\overrightarrow{b}(s),\\ \frac{d\overrightarrow{b}}{ds}(s) &= 0 + \tau(s)\overrightarrow{n}(s) + 0.\end{aligned}$$

Ou ainda, matricialmente,

$$\begin{pmatrix}\overrightarrow{t}'\\ \overrightarrow{n}'\\ \overrightarrow{b}'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & -\tau\\ 0 & \tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overrightarrow{t}\\ \overrightarrow{n}\\ \overrightarrow{b}\end{pmatrix}.$$

Teorema 1.1 (Teorema fundamental da teoria local de curvas)**.** *Dadas duas funções $\kappa, \tau : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $\kappa(s) > 0$ para todo $s \in I$, então existe uma curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ cuja curvatura é $\kappa(s)$ e cuja torção é $\tau(s)$. Além disso, qualquer outra curva com a mesma propriedade é congruente a α.*

Definição 1.11. *Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma* **superfície regular** *se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $\phi : U \to V \cap S$ de um aberto U de $\mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que*

(1) ϕ é um homeomorfismo diferenciável.
(2) A diferencial $d\phi_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é injetiva para todo $q \in U$.

Proposição 1.4 (Mudança de parâmetros)**.** *Sejam $p \in S$ um ponto de uma superfície regular S, $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ e $\psi : V \subset \mathbb{R}^2 \to S$ duas parametrizações de S tais que $p \in \phi(U) \cap \psi(V) =: W$. Então*

$$h := \phi^{-1} \circ \psi : \psi^{-1}(W) \to \phi^{-1}(W)$$

é um difeomorfismo, isto é, h é diferenciável e tem inversa diferenciável.

Sejam $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização de uma superfície regular S e $q \in U$. Chamamos o subespaço vetorial de dimensão 2

$$T_{\phi(q)}S := d\phi_q\left(\mathbb{R}^2\right) \subset \mathbb{R}^3,$$

de ***espaço tangente a*** S ***em*** $\phi(q)$. Este espaço vetorial coincide com o conjunto dos vetores tangentes $\alpha'(0)$ de curvas parametrizadas diferenciáveis $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\to S$, com $\alpha(0) = \phi(q)$.

A escolha de uma parametrização ϕ determina uma base

$$\{d\phi_q(u), d\phi_q(v)\} = \left\{\frac{\partial\phi}{\partial u}(q), \frac{\partial\phi}{\partial v}(q)\right\} =: \{\phi_u(q), \phi_v(q)\}$$

de $T_{\phi(q)}S$ e um vetor normal unitário em cada ponto $p \in \phi(U)$ dado por

$$N(p) := \frac{\phi_u \wedge \phi_v}{||\phi_u \wedge \phi_v||}(q).$$

Nem sempre é possível estender a aplicação diferenciável $N : U \to \mathbb{R}^3$ de maneira diferenciável à superfície S.

O produto interno canônico do $\mathbb{R}^3$ induz em cada plano tangente T_pS de uma superfície regular S um produto interno, que denotaremos por $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$. A esse produto interno, que é uma forma bilinear simétrica, corresponde uma forma quadrática $\mathrm{I}_p : T_pS \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mathrm{I}_p(w) := \langle w, w\rangle_p = ||w||_p^2 \geq 0.$$

Tal forma quadrática em T_pS é chamada de ***primeira forma fundamental de*** S ***em*** $p \in S$.

Vamos, agora, expressar a primeira forma fundamental na base $\{\phi_u, \phi_v\}$ associada a parametrização $\phi(u, v)$ em p. Como um vetor $w \in T_pS$ é o vetor tangente a uma curva parametrizada $\alpha(t) = \phi(u(t), v(t))$, $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, com $p = \alpha(0)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_p(w) &= \mathrm{I}_p(\alpha'(0)) \\
&= \langle\alpha'(0), \alpha'(0)\rangle_p \\
&= \langle\phi_u(u(0), v(0))u'(0) + \phi_v(u(0), v(0))v'(0), \phi_u(u(0), v(0))u'(0) + \phi_v(u(0), v(0))v'(0)\rangle_p \\
&= \langle\phi_u(q), \phi_u(q)\rangle_p \left(u'(0)\right)^2 + 2\langle\phi_u(q), \phi_v(q)\rangle_p u'(0)v'(0) + \langle\phi_v(q), \phi_v(q)\rangle_p \left(v'(0)\right)^2 \\
&= E(q)\left(u'(0)\right)^2 + 2F(q)u'(0)v'(0) + G(q)\left(v'(0)\right)^2,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{cases}
E(q) := \langle\phi_u(q), \phi_u(q)\rangle_p, \\
F(q) := \langle\phi_u(q), \phi_v(q)\rangle_p, \\
G(q) := \langle\phi_v(q), \phi_v(q)\rangle_p
\end{cases}$$

são os ***coeficientes da primeira forma fundamental na base*** $\{\phi_u, \phi_v\}$ ***de*** T_pS. Fazendo q variar numa vizinhança coordenada correspondente à parametrização ϕ, obtemos funções E, F, G que são diferenciáveis nesta vizinhança. Quando não houver ambiguidade, os índices p e q serão omitidos.

Assim, podemos representar a primeira forma fundamental como uma matriz simétrica

$$\mathrm{I}(w) = w^\top \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} w = \left(u'(0)v'(0)\right) \begin{pmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix}.$$

Definição 1.12. *Uma superfície S é* **orientável** *se ela admite uma cobertura por vizinhanças coordenadas $\phi_\alpha(U_\alpha)$, em que $\phi_\alpha : U_\alpha \to S$, de tal modo que se $p \in X_{\alpha_1}(U_{\alpha_1}) \cap X_{\alpha_2}(U_{\alpha_2})$, com*

$(u,v) = U_{\alpha_1}$ *e* $(\overline{u},\overline{v}) \in U_{\alpha_2}$, *então*

$$\operatorname{Jac}((\overline{u},\overline{v}) \mapsto (u,v)) = \frac{\partial(\overline{u},\overline{v})}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial u} & \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial u} & \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial v} \end{pmatrix} > 0.$$

A escolha de uma tal família de vizinhanças coordenadas que cobrem S é chamada de **orientação** *de S e S, neste caso, diz-se* **orientada**. *Se uma tal escolha não é possível, diz-se que S é* **não-orientável**. *Se S é orientada, uma parametrização local ϕ é compatível com a orientação de S se, unindo ϕ à família de parametrizações dada pela orientação, obtém-se ainda uma (logo, a mesma) orientação.*

Proposição 1.5. *Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é orientável se, e somente se, existe um campo diferencial $N : S \to \mathbb{R}^3$ de vetores normais em S, isto é, $N(p) \perp T_pS$ para todo $p \in S$.*

1.2. **A faixa de Möbius.** A faixa de Möbius[2] é obtida tomando-se um retângulo e identificando-se dois lados opostos depois de uma rotação de 180º, como ilustra a Figura 1.

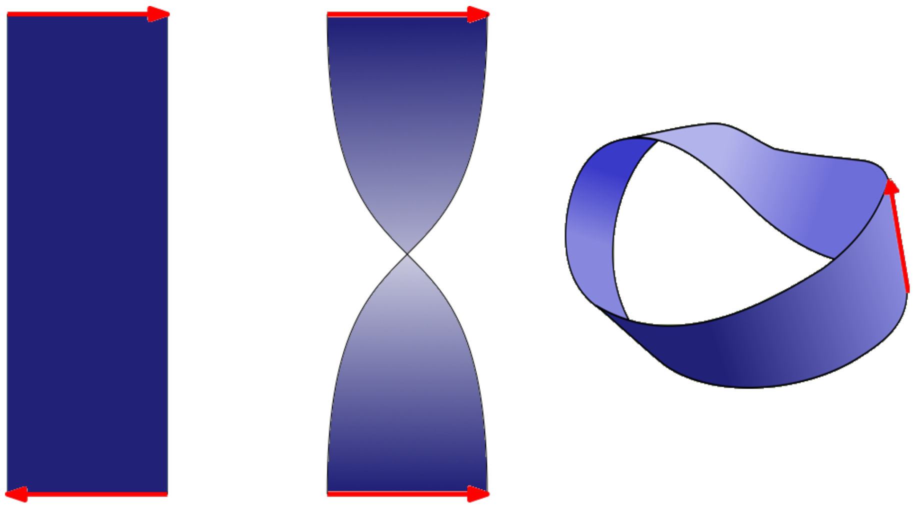

FIGURA 1. Construção de uma faixa de Möbius.

A faixa de Möbius, além de suas inúmeras aplicações artísticas, como em logotipos de centros de estudo de matemática em todo o mundo, também encontra frequentemente uso na engenharia, especialmente na produção de correias que desgastam "ambos" os lados igualmente.

A seguir, apresentaremos uma parametrização da faixa de Möbius e calcularemos os coeficientes de sua primeira forma fundamental.

1.2.1. *Parametrização.* Considere a faixa de Möbius, denotada por $\mathbf{M}$, ao redor do eixo z com raio 2 e largura 1. Sejam $(u,v) \in]0,2\pi[\times [-1,1]$ e note que para $p = (x,y,z) \in \mathbf{M}$ temos que

$$\begin{cases} x(u,v) &= \left(2 + v\cos\left(\dfrac{u}{2}\right)\right)\cos(u) \\ y(u,v) &= \left(2 + v\cos\left(\dfrac{u}{2}\right)\right)\sin(u) \\ z(u,v) &= v\sin\left(\dfrac{u}{2}\right). \end{cases}$$

[2]Em homenagem ao matemático August Ferdinand Möbius.

A Figura 2 auxilia a entender as equações acima. Note que cada ponto do segmento que rotacionamos identificamos com um valor de $v \in [-1,1]$ e esta é uma variável da parametrização, que segue a mesma ideia do Toro.

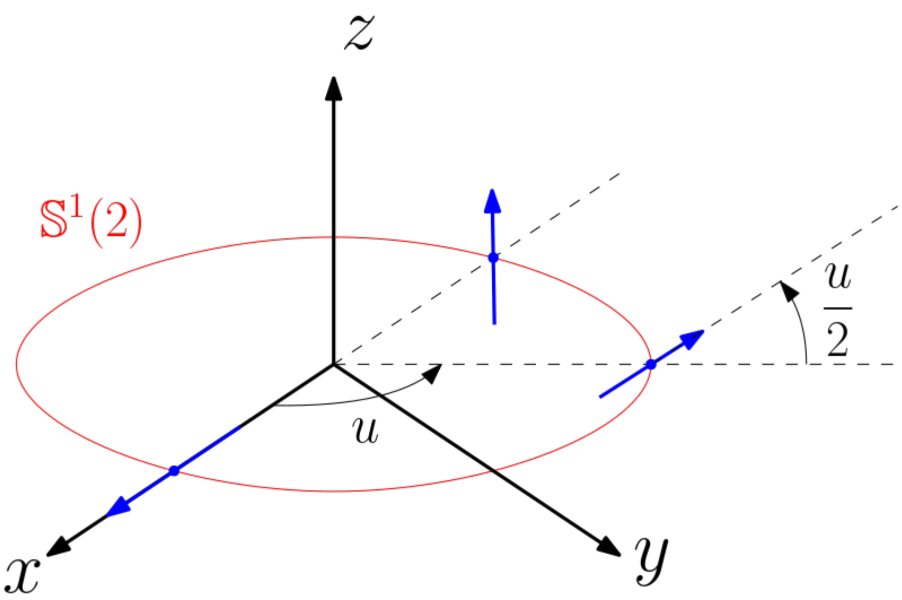

FIGURA 2. Facilitador para a parametrização da faixa de Möbius.

Portanto, um sistema de coordenadas locais para a faixa de Möbius é dado por

$$\phi :]0, 2\pi[\times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbf{M} \subset \mathbb{R}^3$$
$$(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) .$$

A vizinhança coordenada correspondente omite os pontos $u = 0$, como ilustra a Figura 3.

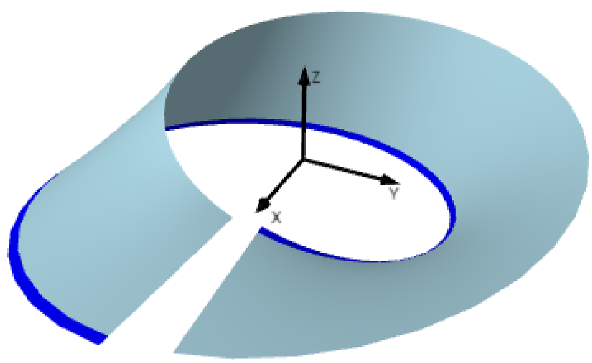

FIGURA 3. Plot de ϕ.

Logo, tomando-se $(\overline{u}, \overline{v}) \in \,]0, 2\pi[\, \times [-1,1]$ de modo que

$$\begin{cases} x(\overline{u},\overline{v}) &= \left(2 + \overline{v}\cos\left(\dfrac{\overline{u}}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)\cos\left(\overline{u} + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ y(\overline{u},\overline{v}) &= \left(2 + \overline{v}\cos\left(\dfrac{\overline{u}}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)\sin\left(\overline{u} + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ z(\overline{u},\overline{v}) &= \overline{v}\sin\left(\dfrac{\overline{u}}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

obtemos outro sistema de coordenadas locais para a faixa de Möbius é dado por

$$\psi :]0, 2\pi[\times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbf{M} \subset \mathbb{R}^3$$

$$(\overline{u},\overline{v}) \mapsto (x(\overline{u},\overline{v}), y(\overline{u},\overline{v}), z(\overline{u},\overline{v}))\,.$$

A vizinhança coordenada correspondente omite os pontos no intervalo aberto $u = 0$, como ilustra a Figura 4.

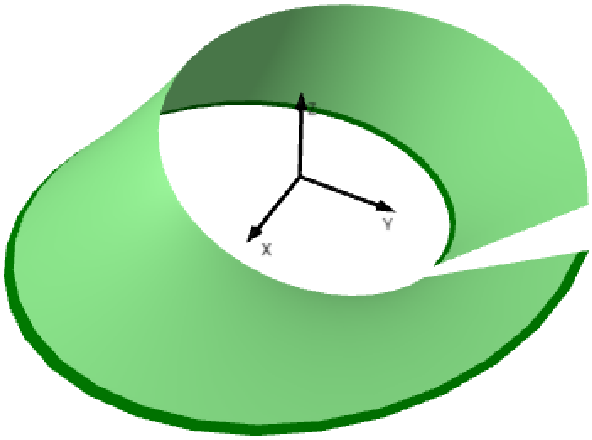

FIGURA 4. Plot de ψ.

Essas duas vizinhanças coordenadas formam uma cobertura para a faixa de Möbius, como ilustra a Figura 5.

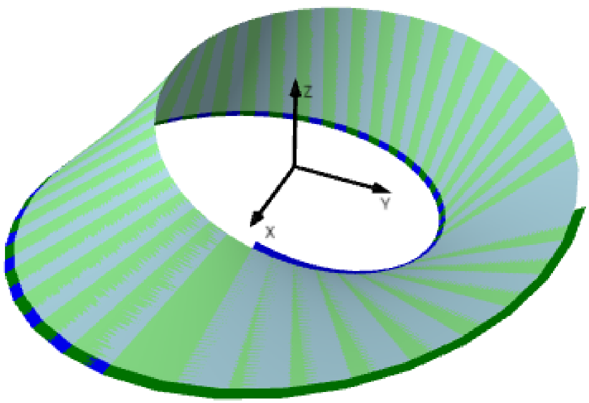

FIGURA 5. Plot de ϕ e ψ juntos.

Assim, temos que a faixa de Möbius é uma superfície regular. De fato, a intersecção dessas duas vizinhanças coordenadas é constituída por duas componentes conexas

$$W_1 := \left\{\phi(u,v) : 0 < u < \frac{\pi}{2}, -1 \le v \le 1\right\} \text{ e } W_2 := \left\{\phi(u,v) : \frac{\pi}{2} < u < 2\pi, -1 \le v \le 1\right\}.$$

A mudança de coordenada é dada por (a Figura 5 ilustra a mudança de orientação de v em W_1 pela sobreposição ou não das partes mais escuras)

$$\begin{cases} \overline{u} &= u + \dfrac{\pi}{2} \\ \overline{v} &= -v \end{cases} \text{ em } W_1 \text{ e } \begin{cases} \overline{u} &= u + \dfrac{\pi}{2} \\ \overline{v} &= v \end{cases} \text{ em } W_2.$$

Donde temos que

$$\operatorname{Jac}((\overline{u},\overline{v}) \mapsto (u,v)) = \frac{\partial(\overline{u},\overline{v})}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial u} & \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial u} & \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial v} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

em W_1, e

$$\mathrm{Jac}((\overline{u},\overline{v}) \mapsto (u,v)) = \frac{\partial(\overline{u},\overline{v})}{\partial(u,v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \overline{u}}{\partial u} & \frac{\partial \overline{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \overline{v}}{\partial u} & \frac{\partial \overline{v}}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

em W_2.

1.2.2. *Primeira forma fundamental.* Para obtermos a primeira forma fundamental basta calcularmos as expressões de E, F, G da métrica pelas expressões em coordenadas obtidas anteriormente.

Derivamos $x(u,v)$ com relação a u

$$\begin{aligned} x_u(u,v) &= \frac{\partial}{\partial u}\left(2 + v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\cos(u) + \left(2 + v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\frac{\partial}{\partial u}(\cos(u)) \\ &= -\frac{v}{2}\sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos(u) - \left(2 + v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\sin(u), \end{aligned}$$

e com relação a v

$$\begin{aligned} x_v(u,v) &= \frac{\partial}{\partial v}\left(2 + v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\cos(u) + \left(2 + v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\frac{\partial}{\partial v}(\cos(u)) \\ &= \cos\left(\frac{u}{2}\right)\cos(u). \end{aligned}$$

Derivamos $y(u,v)$ com relação a u

$$\begin{aligned} y_u(u,v) &= \frac{\partial}{\partial u}\left(2 + v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\sin(u) + \left(2 + v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\frac{\partial}{\partial u}(\sin(u)) \\ &= -\frac{v}{2}\sin\left(\frac{u}{2}\right)\sin(u) + \left(2 + v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\cos(u), \end{aligned}$$

e com relação a v

$$\begin{aligned} y_v(u,v) &= \frac{\partial}{\partial v}\left(2 + v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\sin(u) + \left(2 + v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\frac{\partial}{\partial v}(\sin(u)) \\ &= \cos\left(\frac{u}{2}\right)\sin(u). \end{aligned}$$

Derivamos $z(u,v)$ com relação a u

$$z_u(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}\left(v\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right) = \frac{v}{2}\cos\left(\frac{u}{2}\right),$$

e com relação a v

$$z_v(u,v) = \frac{\partial}{\partial v}\left(v\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right) = \sin\left(\frac{u}{2}\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} E &= \langle \phi_u, \phi_u \rangle \\ &= \langle (x_u, y_u, z_u), (x_u, y_u, z_u) \rangle \\ &= x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \\ &= \left(-\frac{v}{2}\sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos(u) - \left(2 + v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\sin(u)\right)^2 \\ &\quad + \left(-\frac{v}{2}\sin\left(\frac{u}{2}\right)\sin(u) + \left(2 + v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\cos(u)\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{v}{2}\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)^2 \\ &= \frac{v^2}{4}\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)\cos^2(u) + \left(2 + v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)^2\sin^2(u) + 2\frac{v}{2}\sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos(u)\left(2 + v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\sin(u) \\ &\quad + \frac{v^2}{4}\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)\sin^2(u) + \left(2 + v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)^2\cos^2(u) - 2\frac{v}{2}\sin\left(\frac{u}{2}\right)\sin(u)\left(2 + v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\cos(u) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{v^2}{4}\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)\\
&=\frac{v^2}{4}\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)+\left(2+v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)^2+\frac{v^2}{4}\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)\\
&=\frac{v^2}{4}+4+v^2\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)+4v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\\
&=v^2\left(\frac{1}{4}+\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)\right)+4v\cos\left(\frac{u}{2}\right)+4.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F &= \langle \phi_u, \phi_v\rangle\\
&= \langle (x_u, y_u, z_u), (x_v, y_v, z_v)\rangle\\
&= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v\\
&= \left(-\frac{v}{2}\sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos(u)-\left(2+v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\sin(u)\right)\left(\cos\left(\frac{u}{2}\right)\cos(u)\right)\\
&\quad+\left(-\frac{v}{2}\sin\left(\frac{u}{2}\right)\sin(u)+\left(2+v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\cos(u)\right)\left(\cos\left(\frac{u}{2}\right)\sin(u)\right)\\
&\quad+\left(\frac{v}{2}\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\left(\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right)\\
&= -\frac{v}{2}\sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos\left(\frac{u}{2}\right)\cos^2(u)-\left(2+v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\sin(u)\cos\left(\frac{u}{2}\right)\cos(u)\\
&\quad-\frac{v}{2}\sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos\left(\frac{u}{2}\right)\sin^2(u)+\left(2+v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\cos(u)\cos\left(\frac{u}{2}\right)\sin(u)\\
&\quad+\frac{v}{2}\sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos\left(\frac{u}{2}\right)\\
&= -\frac{v}{2}\sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos\left(\frac{u}{2}\right)+\frac{v}{2}\sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos\left(\frac{u}{2}\right)\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G &= \langle \phi_v, \phi_v\rangle\\
&= \langle (x_v, y_v, z_v), (x_v, y_v, z_v)\rangle\\
&= x_v^2 + y_v^2 + z_v^2\\
&= \left(\cos\left(\frac{u}{2}\right)\cos(u)\right)^2+\left(\cos\left(\frac{u}{2}\right)\sin(u)\right)^2+\left(\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right)^2\\
&= \cos^2\left(\frac{u}{2}\right)\cos^2(u)+\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)\sin^2(u)+\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)\\
&= \cos^2\left(\frac{u}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)\\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Donde obtemos a primeira forma fundamental

$$
\mathrm{I} = \begin{pmatrix} v^2\left(\frac{1}{4}+\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)\right)+4v\cos\left(\frac{u}{2}\right)+4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.
$$

1.3. **Um panorama de geometria diferencial II através do SageMath.** Próximos passos: (confirmar com o professor Márcio)

- Orientabilidade.
- Segunda forma fundamental e consequências geométricas.
- Aplicação normal de Gauss.
- Operador forma, curvatura Gaussiana, média e total.
- Derivada covariante.

- Símbolos de Christoffel[3].
- Geodésicas e curvatura geodésica.
- Equações de compatibilidade.
- Teorema egrégio de Gauss.
- Teorema de Bonnet.
- Superfícies mínimas.
- Teorema de Gauss-Bonnet e aplicações.

Apresentar Notebook do SageManifolds com exemplos de cálculos simples (métricas, curvaturas, símbolos de Christoffel, plotagens,...).

[3]Em homenagem ao matemático e físico Elwin Bruno Christoffel.

Referências

[DC05] M. P. Do Carmo, *Geometria diferencial de curvas e superfícies*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2005. ↑1