O teorema de regularidade de Allard

Marcos Agnoletto Forte
Universidade Federal do ABC
marcos.forte@ufabc.edu.br
https://marcosagnoletto.github.io/

14 de novembro de 2024

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 88887.667684/2022-00

Universidade Federal do ABC

C A P E S

Sumário

O problema de Plateau

Universidade Federal do ABC
C A P E S

Problema (O problema de Plateau clássico)

Encontre a superfície de menor área com uma fronteira prescrita.

Problema (O problema de Plateau clássico)

Encontre a superfície de menor área com uma fronteira prescrita.

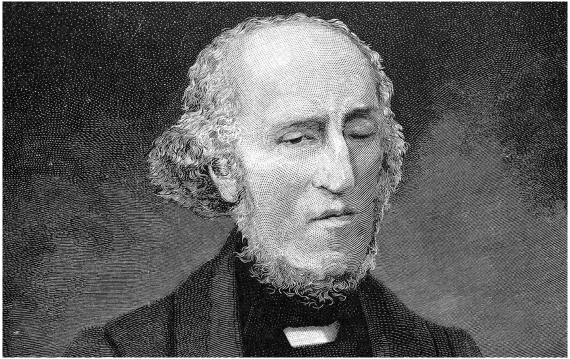


Figura: Disponível em New Scientist

- Joseph Antoine Ferdinand Plateau.

Problema (O problema de Plateau clássico)

Encontre a superfície de menor área com uma fronteira prescrita.

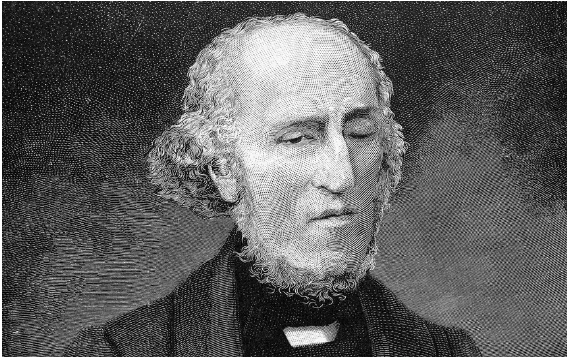


Figura: Disponível em New Scientist

- Joseph Antoine Ferdinand Plateau.
- Físico e matemático Belga.

Problema (O problema de Plateau clássico)

Encontre a superfície de menor área com uma fronteira prescrita.

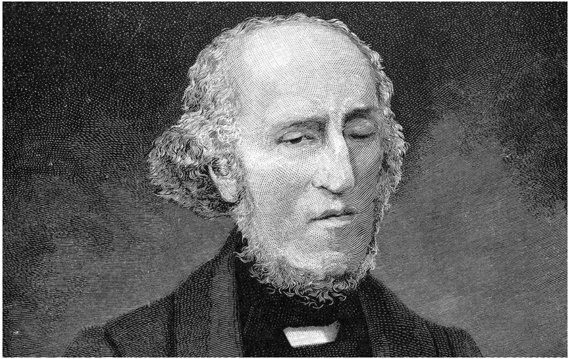


Figura: Disponível em New Scientist

- Joseph Antoine Ferdinand Plateau.
- Físico e matemático Belga.
- Outubro de 1801 - Setembro de 1883.

Problema (O problema de Plateau clássico)

Encontre a superfície de menor área com uma fronteira prescrita.

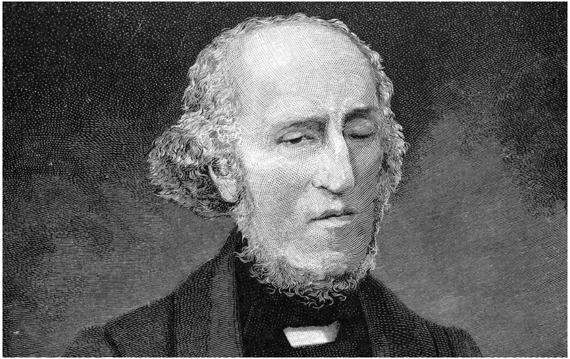


Figura: Disponível em New Scientist

- Joseph Antoine Ferdinand Plateau.
- Físico e matemático Belga.
- Outubro de 1801 - Setembro de 1883.
- Inventor do fenacistoscópio.

Problema (O problema de Plateau clássico)

Encontre a superfície de menor área com uma fronteira prescrita.

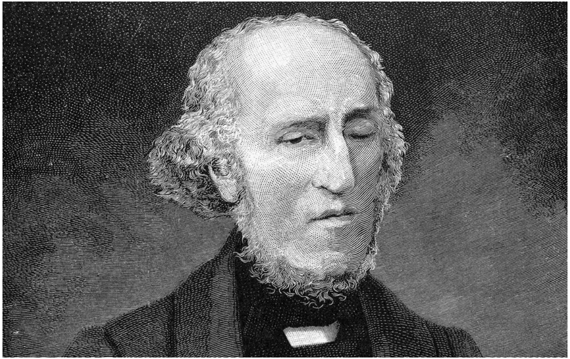


Figura: Disponível em New Scientist

- Joseph Antoine Ferdinand Plateau.
- Físico e matemático Belga.
- Outubro de 1801 - Setembro de 1883.
- Inventor do fenacistoscópio.
- Estudou o fenômeno de capilaridade e tensão superficial de superfícies [Pla73].

Problema (O problema de Plateau clássico)

Encontre a **superfície** de menor **área** com uma **fronteira prescrita**.

Problema (O problema de Plateau clássico)

Encontre a **superfície** de menor **área** com uma **fronteira prescrita**.

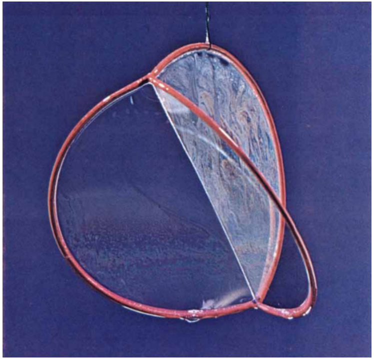


Figura: Disponível em [AT76]

Problema (O problema de Plateau clássico)

Encontre a **superfície** de menor **área** com uma **fronteira prescrita**.

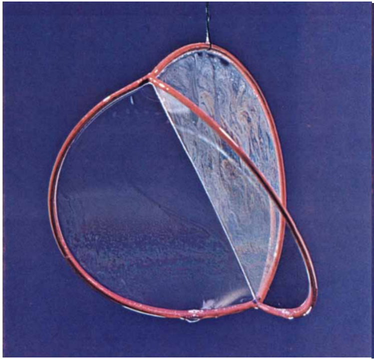


Figura: Disponível em [AT76]

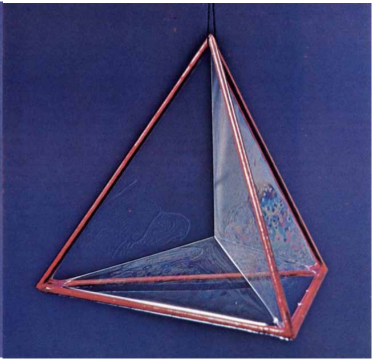


Figura: Disponível em [AT76]

Problema (O problema de Plateau clássico)

Encontre a **superfície** de menor **área** com uma **fronteira prescrita**.

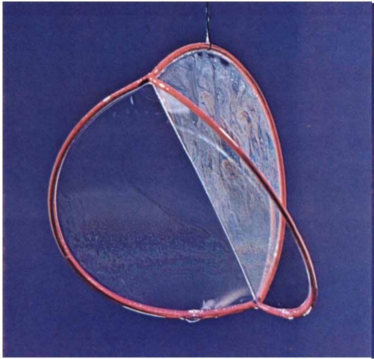


Figura: Disponível em [AT76]

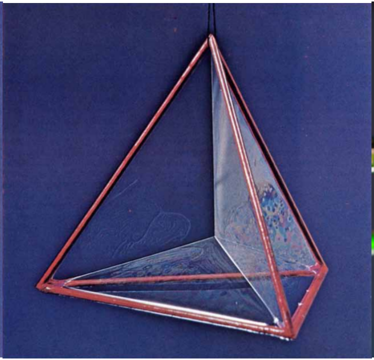


Figura: Disponível em [AT76]

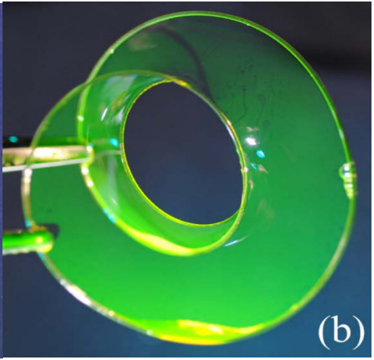
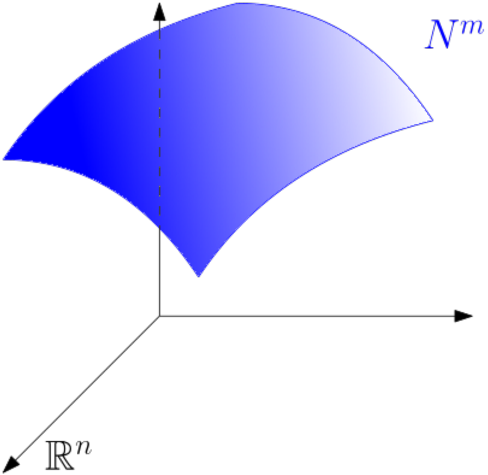
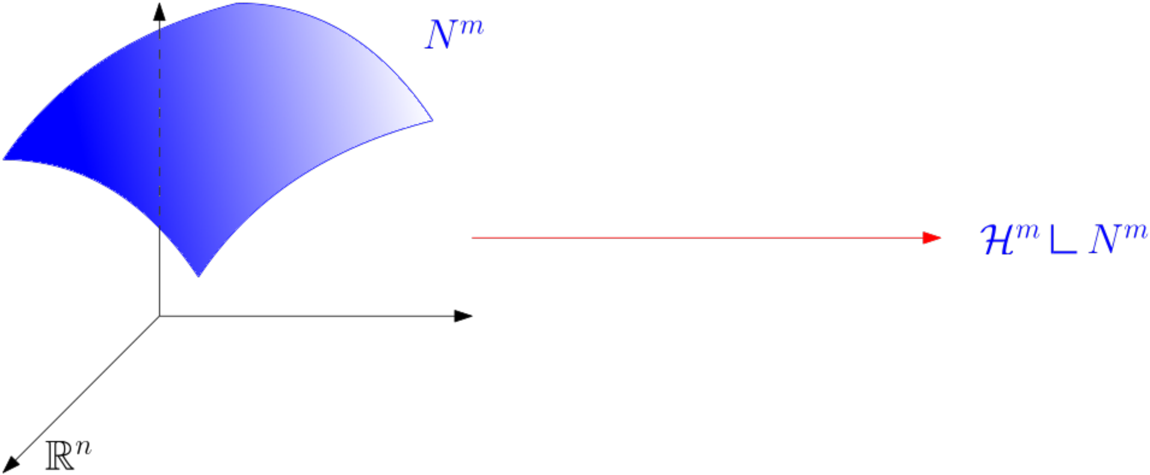


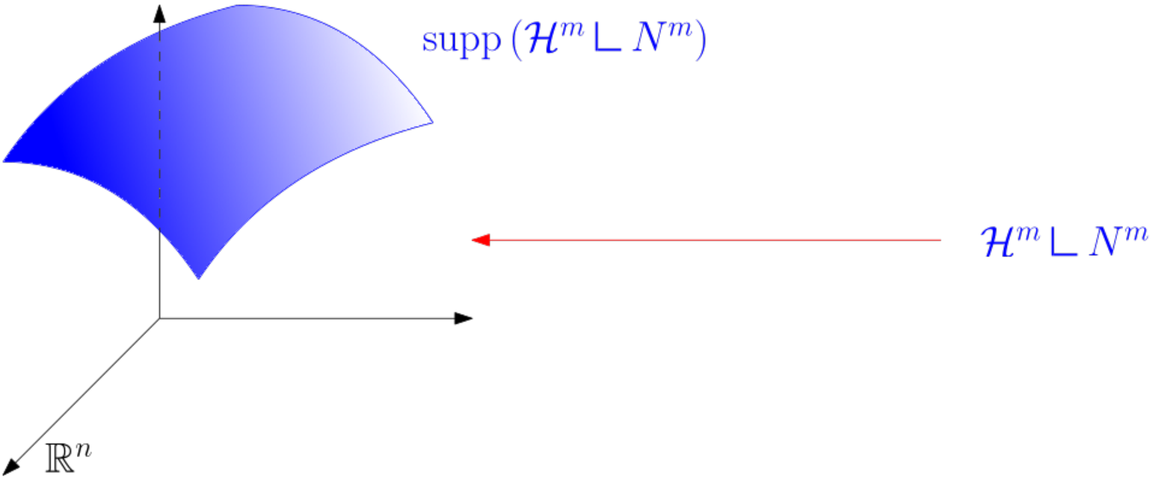
Figura: Disponível em [GMPR10]

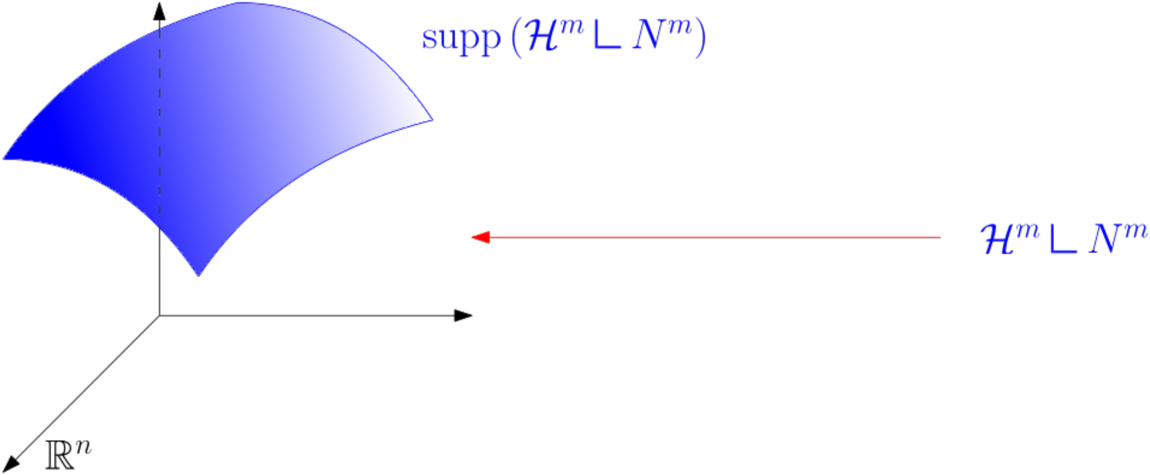
Varifolds


N^m
$\mathbb{R}^n$

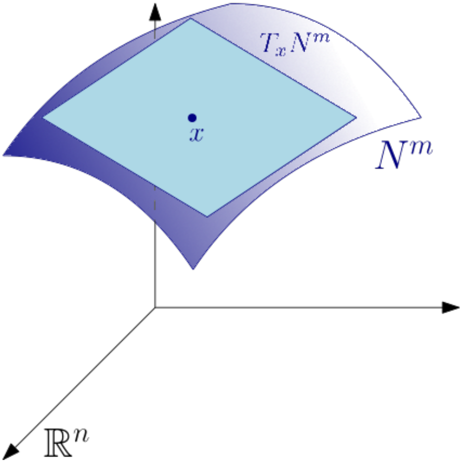

N^m
$\mathcal{H}^m \llcorner N^m$
$\mathbb{R}^n$

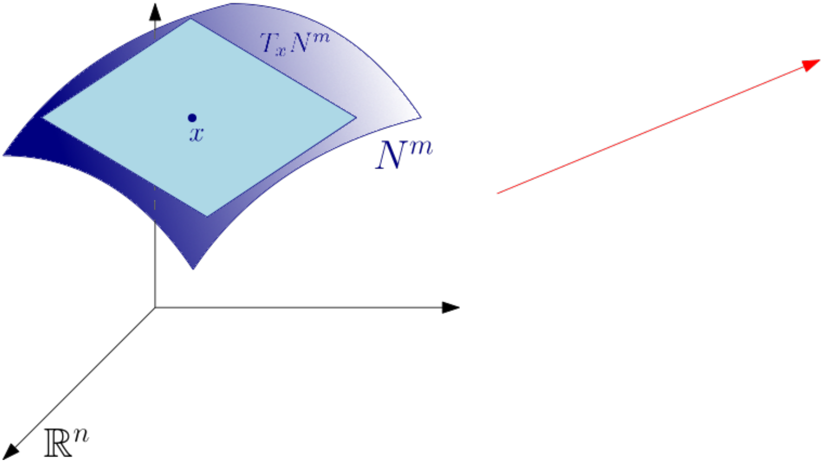
$$\mathcal{H}^m \llcorner N^m$$


$\operatorname{supp}(\mathcal{H}^m \llcorner N^m)$
$\mathcal{H}^m \llcorner N^m$
$\mathbb{R}^n$



- Mas isso não é uma varifold! Precisamos também de informações de primeira ordem!

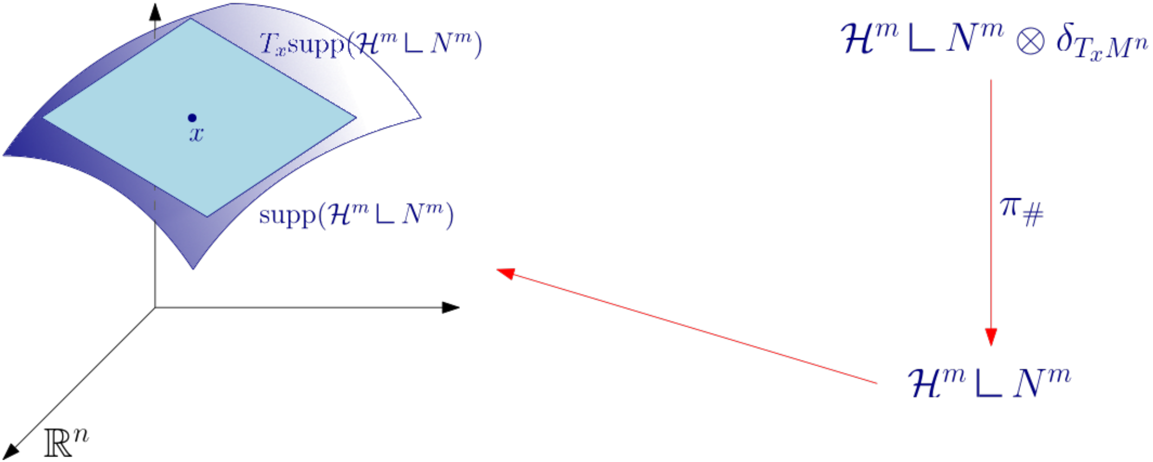

$T_x N^m$
x
N^m
$\mathbb{R}^n$



$$\mathcal{H}^m \llcorner N^m \otimes \delta_{T_xM^n}$$

$$\mathcal{H}^m \llcorner N^m \otimes \delta_{T_x M^n}$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{H}^m \llcorner N^m \otimes \delta_{T_x M^n} \arrow[d, "\pi_\#"] \\
\mathcal{H}^m \llcorner N^m
\end{tikzcd}
$$


$T_x\mathrm{supp}(\mathcal{H}^m \llcorner N^m)$
x
$\mathrm{supp}(\mathcal{H}^m \llcorner N^m)$
$\mathbb{R}^n$
$\mathcal{H}^m \llcorner N^m \otimes \delta_{T_x M^n}$
$\pi_\#$
$\mathcal{H}^m \llcorner N^m$

- $0 < m < n$.

- $0 < m < n$.
- $\mathrm{Gr}(m, \mathbb{R}^n)$ denota o conjunto de todos os subespaços de $\mathbb{R}^n$ de dimensão m.

- $0 < m < n$.
- $\mathrm{Gr}(m, \mathbb{R}^n)$ denota o conjunto de todos os subespaços de $\mathbb{R}^n$ de dimensão m.
- Uma **varifold** m**-dimensional em** $\mathbb{R}^n$ é uma medida de Radon

$$V : \mathbb{R}^n \times \mathrm{Gr}(m, \mathbb{R}^n) \to [0, \infty].$$

- $0 < m < n$.
- $\mathrm{Gr}(m, \mathbb{R}^n)$ denota o conjunto de todos os subespaços de $\mathbb{R}^n$ de dimensão m.
- Uma **varifold** m**-dimensional em** $\mathbb{R}^n$ é uma medida de Radon

$$V : \mathbb{R}^n \times \mathrm{Gr}(m, \mathbb{R}^n) \to [0, \infty].$$

Observação

Considere a seguinte métrica em $\mathrm{Gr}(m, \mathbb{R}^n)$

$$d(S, T) := ||P_S - P_T|| \, ,$$

onde $P_T, P_S \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ são as matrizes da projeção ortogonal em T e S, respectivamente, e $||\cdot||$ é qualquer norma em $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- $0 < m < n$.
- $\mathrm{Gr}(m, \mathbb{R}^n)$ denota o conjunto de todos os subespaços de $\mathbb{R}^n$ de dimensão m.
- Uma **varifold** ***m*-dimensional em** $\mathbb{R}^n$ é uma medida de Radon

$$V : \mathbb{R}^n \times \mathrm{Gr}(m, \mathbb{R}^n) \to [0, \infty].$$

Observação

Considere a seguinte métrica em $\mathrm{Gr}(m, \mathbb{R}^n)$

$$d(S, T) := ||P_S - P_T|| \,,$$

onde $P_T, P_S \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ são as matrizes da projeção ortogonal em T e S, respectivamente, e $||\cdot||$ é qualquer norma em $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.Assim, consideramos a σ-álgebra de Borel em $\mathrm{Gr}(m, \mathbb{R}^n)$.

Exemplo

Seja $S \subset \mathbb{R}^2$ uma reta.

Exemplo

Seja $S \subset \mathbb{R}^2$ uma reta. A função

$$V_S : \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2 \times \mathrm{Gr}(1, \mathbb{R}^2)\right) \to [0, \infty]$$

$$B \mapsto V_S(B) := \begin{cases} \mathcal{H}^1(\pi_1(B)), & \text{se } S \in \pi_2(B), \\ 0, & \text{se } S \notin \pi_2(B), \end{cases}$$

Exemplo

Seja $S \subset \mathbb{R}^2$ uma reta. A função

$$\begin{aligned} V_S : \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2 \times \mathrm{Gr}(1,\mathbb{R}^2)\right) &\to [0,\infty] \\ B \mapsto V_S(B) &:= \begin{cases} \mathcal{H}^1(\pi_1(B)), & \text{se } S \in \pi_2(B), \\ 0, & \text{se } S \notin \pi_2(B), \end{cases} \end{aligned}$$

onde $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathrm{Gr}(1,\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$, $(x, T) \mapsto x$,

Exemplo

Seja $S \subset \mathbb{R}^2$ uma reta. A função

$$V_S : \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2 \times \mathrm{Gr}(1,\mathbb{R}^2)\right) \to [0,\infty]$$

$$B \mapsto V_S(B) := \begin{cases} \mathcal{H}^1(\pi_1(B)), & \text{se } S \in \pi_2(B), \\ 0, & \text{se } S \notin \pi_2(B), \end{cases}$$

onde $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathrm{Gr}(1,\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$, $(x, T) \mapsto x$, e $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathrm{Gr}(1,\mathbb{R}^2) \to \mathrm{Gr}(1,\mathbb{R}^2)$, $(x, T) \mapsto T$, são as projeções sobre $\mathbb{R}^2$ e $\mathrm{Gr}(1,\mathbb{R}^2)$,

Exemplo

Seja $S \subset \mathbb{R}^2$ uma reta. A função

$$V_S : \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2 \times \mathrm{Gr}(1, \mathbb{R}^2)\right) \to [0, \infty]$$
$$B \mapsto V_S(B) := \begin{cases} \mathcal{H}^1(\pi_1(B)), & \text{se } S \in \pi_2(B), \\ 0, & \text{se } S \notin \pi_2(B), \end{cases}$$

onde $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathrm{Gr}(1, \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$, $(x, T) \mapsto x$, e $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathrm{Gr}(1, \mathbb{R}^2) \to \mathrm{Gr}(1, \mathbb{R}^2)$, $(x, T) \mapsto T$, são as projeções sobre $\mathbb{R}^2$ e $\mathrm{Gr}(1, \mathbb{R}^2)$, é uma **varifold** 1-**dimensional em** $\mathbb{R}^2$. Simbolicamente

$$V_S = \mathcal{H}^1 \llcorner S \otimes \delta_S.$$

Exemplo

Seja $N^m \subset \mathbb{R}^n$ uma subvariedade m-dimensional.

Exemplo

Seja $N^m \subset \mathbb{R}^n$ uma subvariedade m-dimensional. Considere o funcional linear $\mathcal{F}$ em $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n \times \mathrm{Gr}(m, \mathbb{R}^n), \mathbb{R})$ dado por

$$\int_{N^m} \varphi(x, T_x N^m) d\mathcal{H}^m(x) =: \mathcal{F}(\phi)$$

Exemplo

Seja $N^m \subset \mathbb{R}^n$ uma subvariedade m-dimensional. Considere o funcional linear $\mathcal{F}$ em $\mathcal{C}^0_c(\mathbb{R}^n \times \mathrm{Gr}(m, \mathbb{R}^n), \mathbb{R})$ dado por

$$\int_{N^m} \varphi(x, T_x N^m) d\mathcal{H}^m(x) =: \mathcal{F}(\phi) \overset{\text{Riesz}}{=} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathrm{Gr}(m,\mathbb{R}^n)} \varphi(x, S) dV_{N^m}(x, S).$$

Exemplo

Seja $N^m \subset \mathbb{R}^n$ uma subvariedade m-dimensional. Considere o funcional linear $\mathcal{F}$ em $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n \times \mathrm{Gr}(m, \mathbb{R}^n), \mathbb{R})$ dado por

$$\int_{N^m} \varphi(x, T_x N^m) d\mathcal{H}^m(x) =: \mathcal{F}(\phi) \overset{\text{Riesz}}{=} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathrm{Gr}(m, \mathbb{R}^n)} \varphi(x, S) dV_{N^m}(x, S).$$

Assim, V_{N^m} é uma **varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$**, a qual chamamos de **varifold canônica associada a N^m**. Simbolicamente

$$V_{N^m} = \mathcal{H}^m \llcorner N^m \otimes [\delta_{T_x N^m}]_{x \in N^m}.$$

- Dizemos que uma varifold $V \in \mathbf{V}_m(\mathbb{R}^n)$ é uma **varifold rectifiável** m**-dimensional**

- Dizemos que uma varifold $V \in \mathbf{V}_m(\mathbb{R}^n)$ é uma **varifold rectifiável** m**-dimensional** se existem um conjunto m-rectifiável $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ e uma aplicação Borel-mensurável $\theta : \Gamma \to]0, \infty[$ tais que
$$V \equiv \theta \mathcal{H}^m \llcorner \Gamma \otimes \delta_{T_x \Gamma},$$

- Dizemos que uma varifold $V \in \mathbf{V}_m(\mathbb{R}^n)$ é uma **varifold rectifiável** m**-dimensional** se existem um conjunto m-rectifiável $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ e uma aplicação Borel-mensurável $\theta : \Gamma \to]0, \infty[$ tais que
$$V \equiv \theta \mathcal{H}^m \llcorner \Gamma \otimes \delta_{T_x\Gamma},$$
isto é,
$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathrm{Gr}(m,\mathbb{R}^n)} \varphi(x, S) dV(x, S) = \int_\Gamma \varphi(x, T_x\Gamma)\theta(x) d\mathcal{H}^m(x),$$
$\forall \varphi \in \mathcal{C}^0_c(\mathbb{R}^n \times \mathrm{Gr}(m, \mathbb{R}^n), \mathbb{R})$,

- Dizemos que uma varifold $V \in \mathbf{V}_m(\mathbb{R}^n)$ é uma **varifold rectifiável m-dimensional** se existem um conjunto m-rectifiável $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ e uma aplicação Borel-mensurável $\theta : \Gamma \to]0, \infty[$ tais que
$$V \equiv \theta \mathcal{H}^m \llcorner \Gamma \otimes \delta_{T_x\Gamma},$$

  isto é,
$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathrm{Gr}(m,\mathbb{R}^n)} \varphi(x, S) dV(x, S) = \int_\Gamma \varphi(x, T_x\Gamma)\theta(x) d\mathcal{H}^m(x),$$
  $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n \times \mathrm{Gr}(m, \mathbb{R}^n), \mathbb{R})$, ou ainda
$$V(B) = \int_{\{x \in \Gamma : (x, T_x\Gamma) \in B\}} \theta(x) d\mathcal{H}^m(x),$$
  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathrm{Gr}(m, \mathbb{R}^n))$.

- Dizemos que uma varifold $V \in \mathbf{V}_m(\mathbb{R}^n)$ é uma **varifold rectifiável** m**-dimensional** se existem um conjunto m-rectifiável $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ e uma aplicação Borel-mensurável $\theta : \Gamma \to]0, \infty[$ tais que

$$V \equiv \theta \mathcal{H}^m \llcorner \Gamma \otimes \delta_{T_x\Gamma},$$

  isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathrm{Gr}(m,\mathbb{R}^n)} \varphi(x,S) dV(x,S) = \int_\Gamma \varphi(x, T_x\Gamma)\theta(x) d\mathcal{H}^m(x),$$

  $\forall \varphi \in \mathcal{C}^0_c(\mathbb{R}^n \times \mathrm{Gr}(m,\mathbb{R}^n), \mathbb{R})$, ou ainda

$$V(B) = \int_{\{x \in \Gamma : (x, T_x\Gamma) \in B\}} \theta(x) d\mathcal{H}^m(x),$$

  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathrm{Gr}(m,\mathbb{R}^n))$.
- Se $\theta(x) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ então dizemos que V é uma **varifold integral** m**-dimensional**.

- Quais hipóteses temos que ter sobre uma varifold para garantir que ela seja uma varifold rectifiável?

- Quais hipóteses temos que ter sobre uma varifold para garantir que ela seja uma varifold rectifiável?

Exemplo

Seja $P \subset \mathbb{R}^3$ dado por $P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$.

- Quais hipóteses temos que ter sobre uma varifold para garantir que ela seja uma varifold rectifiável?

Exemplo

Seja $P \subset \mathbb{R}^3$ dado por $P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$. Podemos associar a P a varifold canônica 2-dimensional, isto é,

$$V_P := \mathcal{H}^2 \llcorner P \otimes \delta_P.$$

- Quais hipóteses temos que ter sobre uma varifold para garantir que ela seja uma varifold rectifiável?

Exemplo

Seja $P \subset \mathbb{R}^3$ dado por $P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$. Podemos associar a P a varifold canônica 2-dimensional, isto é,

$$V_P := \mathcal{H}^2 \llcorner P \otimes \delta_P.$$

Por outro lado, seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma reta e considere a seguinte varifold 1-dimensional associada a P:

$$\overline{V_P} := \mathcal{H}^2 \llcorner P \otimes \delta_S.$$

- Quais hipóteses temos que ter sobre uma varifold para garantir que ela seja uma varifold rectifiável?

Exemplo

Seja $P \subset \mathbb{R}^3$ dado por $P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$. Podemos associar a P a varifold canônica 2-dimensional, isto é,

$$V_P := \mathcal{H}^2 \llcorner P \otimes \delta_P.$$

Por outro lado, seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma reta e considere a seguinte varifold 1-dimensional associada a P:

$$\overline{V_P} := \mathcal{H}^2 \llcorner P \otimes \delta_S.$$

Note que V_P **é uma varifold rectifiável** enquanto que $\overline{V_P}$ **não é rectifiável**.

- Quais hipóteses temos que ter sobre uma varifold para garantir que ela seja uma varifold rectifiável?

Exemplo

Seja $P \subset \mathbb{R}^3$ dado por $P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$. Podemos associar a P a varifold canônica 2-dimensional, isto é,

$$V_P := \mathcal{H}^2 \llcorner P \otimes \delta_P.$$

Por outro lado, seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma reta e considere a seguinte varifold 1-dimensional associada a P:

$$\overline{V_P} := \mathcal{H}^2 \llcorner P \otimes \delta_S.$$

Note que V_P **é uma varifold rectifiável** enquanto que $\overline{V_P}$ **não é rectifiável**.

- Antes de respondermos esta pergunta precisamos de algumas definições.

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto.

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto.
- $N^m \subset \Omega$ uma subvariedade m-dimensional.

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto.
- $N^m \subset \Omega$ uma subvariedade m-dimensional.
- Definimos o funcional área $\mathcal{A}$ em Ω por

$$\mathcal{A}(N^m) := \mathcal{H}^m(N^m).$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto.
- $N^m \subset \Omega$ uma subvariedade m-dimensional.
- Definimos o funcional área $\mathcal{A}$ em Ω por

$$\mathcal{A}(N^m) := \mathcal{H}^m(N^m).$$

- $X \in \mathfrak{X}_c^1(\Omega)$ um campo de vetores e

$$\begin{aligned} \Psi_X : \mathbb{R} \times \Omega &\to \Omega \\ (t, x) &\mapsto \psi_t^X(x) := x + tX(x). \end{aligned} \tag{1}$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto.
- $N^m \subset \Omega$ uma subvariedade m-dimensional.
- Definimos o funcional área $\mathcal{A}$ em Ω por

$$\mathcal{A}(N^m) := \mathcal{H}^m(N^m).$$

- $X \in \mathfrak{X}_c^1(\Omega)$ um campo de vetores e

$$\begin{aligned} \Psi_X : \mathbb{R} \times \Omega &\to \Omega \\ (t, x) &\mapsto \psi_t^X(x) := x + tX(x). \end{aligned} \tag{1}$$

- Para t pequeno, temos que ψ_t^X é um difeomorfismo de Ω. $\left(D(\psi_t^X)_x = Id + tDX_x\right)$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto.
- $N^m \subset \Omega$ uma subvariedade m-dimensional.
- Definimos o funcional área $\mathcal{A}$ em Ω por

$$\mathcal{A}(N^m) := \mathcal{H}^m(N^m).$$

- $X \in \mathfrak{X}_c^1(\Omega)$ um campo de vetores e

$$\begin{aligned} \Psi_X : \mathbb{R} \times \Omega &\to \Omega \\ (t, x) &\mapsto \psi_t^X(x) := x + tX(x). \end{aligned} \tag{1}$$

- Para t pequeno, temos que ψ_t^X é um difeomorfismo de Ω. $\left(D(\psi_t^X)_x = Id + tDX_x\right)$
- N^m é um **ponto crítico do funcional área** se, para todo $X \in \mathfrak{X}_x^1(\Omega)$,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathcal{A}\left(\psi_t^X(N^m)\right) = 0.$$

- Pela fórmula da coárea e o Teorema da divergência obtemos que

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathcal{A}\left(\psi_t^X(N^m)\right) = \int_{N^m} \operatorname{div}_{N^m}(X)(x) d\mathcal{H}^m(x) = -\int_{N^m} \left\langle \overrightarrow{H}(x), X(x) \right\rangle d\mathcal{H}^m(x),$$

- Pela fórmula da coárea e o Teorema da divergência obtemos que

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathcal{A}\left(\psi_t^X(N^m)\right) = \int_{N^m} \mathrm{div}_{N^m}(X)(x) d\mathcal{H}^m(x) = -\int_{N^m} \left\langle \overrightarrow{H}(x), X(x) \right\rangle d\mathcal{H}^m(x),$$

onde $\overrightarrow{H}$ denota o vetor curvatura média e o operador diferencial div_{N^m} (divergência parcial) é definido, para todo $x \in N^m$, por

$$\mathrm{div}_{N^m}(X)(x) := \sum_{i=1}^{m} \left\langle \nabla_{e_i^x} X(x), e_i^x \right\rangle,$$

onde $\{e_1^x, \dots, e_m^x\}$ é uma base ortonormal para $T_x N^m$ e ∇ é a conexão de Levi-Civita da métrica Euclidiana.

- Pela fórmula da coárea e o Teorema da divergência obtemos que

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathcal{A}\left(\psi_t^X(N^m)\right) = \int_{N^m} \mathrm{div}_{N^m}(X)(x) d\mathcal{H}^m(x) = -\int_{N^m} \left\langle \overrightarrow{H}(x), X(x) \right\rangle d\mathcal{H}^m(x),$$

onde $\overrightarrow{H}$ denota o vetor curvatura média e o operador diferencial div_{N^m} (divergência parcial) é definido, para todo $x \in N^m$, por

$$\mathrm{div}_{N^m}(X)(x) := \sum_{i=1}^{m} \left\langle \nabla_{e_i^x} X(x), e_i^x \right\rangle,$$

onde $\{e_1^x, \ldots, e_m^x\}$ é uma base ortonormal para $T_x N^m$ e ∇ é a conexão de Levi-Civita da métrica Euclidiana.

Proposição ([dC76, Proposition 1, p. 199])

N^m é um ponto crítico do funcional área se, e somente se, sua curvatura média é identicamente nula. Tais tipos de subvariedades são chamadas de **superfícies mínimas**.

- Pela fórmula da coárea e o Teorema da divergência obtemos que

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mathcal{A}\left(\psi_t^X(N^m)\right) = \int_{N^m} \operatorname{div}_{N^m}(X)(x) d\mathcal{H}^m(x) = -\int_{N^m} \left\langle \overrightarrow{H}(x), X(x) \right\rangle d\mathcal{H}^m(x),$$

onde $\overrightarrow{H}$ denota o vetor curvatura média e o operador diferencial div_{N^m} (divergência parcial) é definido, para todo $x \in N^m$, por

$$\operatorname{div}_{N^m}(X)(x) := \sum_{i=1}^{m} \left\langle \nabla_{e_i^x} X(x), e_i^x \right\rangle,$$

onde $\{e_1^x, \ldots, e_m^x\}$ é uma base ortonormal para $T_x N^m$ e ∇ é a conexão de Levi-Civita da métrica Euclidiana.

Proposição ([dC76, Proposition 1, p. 199])

N^m é um ponto crítico do funcional área se, e somente se, sua curvatura média é identicamente nula. Tais tipos de subvariedades são chamadas de **superfícies mínimas**.

- Note que nem toda subvariedade que é um ponto crítico do funcional área é um **mínimo** do funcional área, mas mesmo assim é chamada de superfície mínima.

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto.

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto.
- V uma varifold m-dimensional em Ω.

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto.
- V uma varifold m-dimensional em Ω.
- A **primeira variação de** V é um funcional linear

$$\begin{aligned}\delta V : \mathfrak{X}^1_c(\Omega) &\to \mathbb{R}\\ X &\mapsto \delta V(X) := \int_{\Omega\times \mathrm{Gr}(m,\mathbb{R}^n)} \mathrm{div}_S(X)(x)\, dV(x,S),\end{aligned}$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto.
- V uma varifold m-dimensional em Ω.
- A **primeira variação de** V é um funcional linear

$$\begin{aligned} \delta V : \mathfrak{X}_c^1(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ X &\mapsto \delta V(X) := \int_{\Omega \times \mathrm{Gr}(m, \mathbb{R}^n)} \mathrm{div}_S(X)(x) dV(x, S), \end{aligned}$$

onde $\mathrm{div}_S(X)(x) := \sum_{i=1}^m \langle \nabla_{e_i^S} X(x), e_i^S \rangle$, onde $\{e_1^S, \ldots, e_m^S\}$ é uma base ortonormal para S.

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto.
- V uma varifold m-dimensional em Ω.
- A **primeira variação de** V é um funcional linear

$$\begin{aligned} \delta V : \mathfrak{X}_c^1(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ X &\mapsto \delta V(X) := \int_{\Omega \times \mathrm{Gr}(m, \mathbb{R}^n)} \mathrm{div}_S(X)(x) dV(x, S), \end{aligned}$$

  onde $\mathrm{div}_S(X)(x) := \sum_{i=1}^m \langle \nabla_{e_i^S} X(x), e_i^S \rangle$, onde $\{e_1^S, \ldots, e_m^S\}$ é uma base ortonormal para S.
- $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathrm{Gr}(m, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ dada por $\pi(x, S) := x$.

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto.
- V uma varifold m-dimensional em Ω.
- A **primeira variação de** V é um funcional linear

$$\begin{aligned} \delta V : \mathfrak{X}^1_c(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ X &\mapsto \delta V(X) := \int_{\Omega \times \mathrm{Gr}(m,\mathbb{R}^n)} \mathrm{div}_S(X)(x) dV(x,S), \end{aligned}$$

  onde $\mathrm{div}_S(X)(x) := \sum_{i=1}^m \langle \nabla_{e_i^S} X(x), e_i^S \rangle$, onde $\{e_1^S, \ldots, e_m^S\}$ é uma base ortonormal para S.
- $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathrm{Gr}(m,\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ dada por $\pi(x,S) := x$.
- Definimos o **weight de** V como a medida de Radon em $\mathbb{R}^n$ a valores reais estendidos dada por

$$\begin{aligned} ||V|| : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) &\to [0,\infty] \\ B &\mapsto ||V||(B) := (\pi_\# V)(B) = V(\pi^{-1}(B)). \end{aligned}$$

- $f \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e $f_{\restriction \mathrm{supp}(||V||)}$ é uma aplicação própria.

- $f \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e $f_{\restriction \mathrm{supp}(||V||)}$ é uma aplicação própria.
- Definimos o push-forward da varifold V pela aplicação f para todo $B \in \mathcal{B}(V)$ por

$$f^{\#}V(B) := \int_{\{(x,S):(f(x),Df_x(S))\in B\}} \sqrt{\det\left((Df_x \circ P_S)^*(Df_x \circ P_S)\right)}dV(x,S).$$

- $f \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e $f_{\restriction \mathrm{supp}(||V||)}$ é uma aplicação própria.
- Definimos o push-forward da varifold V pela aplicação f para todo $B \in \mathcal{B}(V)$ por

$$f^{\#}V(B) := \int_{\{(x,S):(f(x),Df_x(S))\in B\}} \sqrt{\det\left((Df_x \circ P_S)^*(Df_x \circ P_S)\right)} dV(x,S).$$

- Definimos o funcional área para varifolds por $\mathcal{A}(V) := ||V||(\Omega)$ (na literatura isso é chamado de **massa** e denotado por $\mathbf{M}$).

- $f \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e $f_{\restriction \mathrm{supp}(||V||)}$ é uma aplicação própria.
- Definimos o push-forward da varifold V pela aplicação f para todo $B \in \mathcal{B}(V)$ por

$$f^{\#}V(B) := \int_{\{(x,S):(f(x),Df_x(S))\in B\}} \sqrt{\det\left((Df_x \circ P_S)^*(Df_x \circ P_S)\right)}dV(x,S).$$

- Definimos o funcional área para varifolds por $\mathcal{A}(V) := ||V||(\Omega)$ (na literatura isso é chamado de **massa** e denotado por **M**).

Proposição ([Sim18, Equation 2.3, p. 239])

Sejam $X \in \mathfrak{X}_c^1(\mathbb{R}^n)$ e ψ_t^X como em (1). Então

$$\delta V(X) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mathcal{A}\left((\psi_t^X)^{\#}V\right).$$

- $f \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e $f_{\restriction \mathrm{supp}(||V||)}$ é uma aplicação própria.
- Definimos o push-forward da varifold V pela aplicação f para todo $B \in \mathcal{B}(V)$ por

$$f^{\#}V(B) := \int_{\{(x,S):(f(x),Df_x(S))\in B\}} \sqrt{\det\left((Df_x \circ P_S)^*(Df_x \circ P_S)\right)} dV(x,S).$$

- Definimos o funcional área para varifolds por $\mathcal{A}(V) := ||V||(\Omega)$ (na literatura isso é chamado de **massa** e denotado por $\mathbf{M}$).

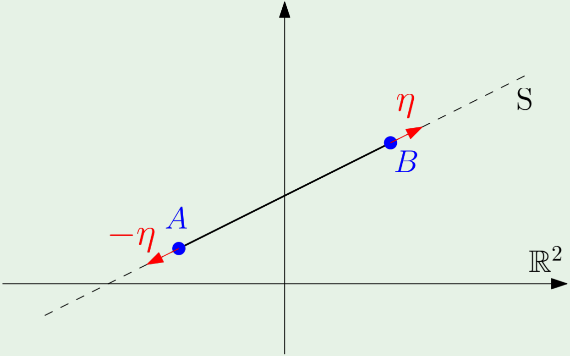
Proposição ([Sim18, Equation 2.3, p. 239])

Sejam $X \in \mathfrak{X}^1_c(\mathbb{R}^n)$ e ψ^X_t como em (1). Então

$$\delta V(X) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathcal{A}\left((\psi^X_t)^{\#}V\right).$$

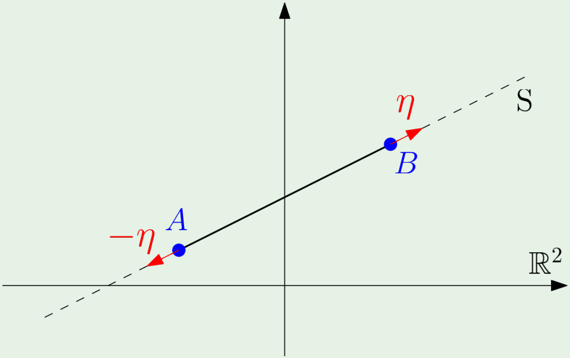
- Se $\delta V \equiv 0$ então dizemos que V **é estacionária**.

Exemplo



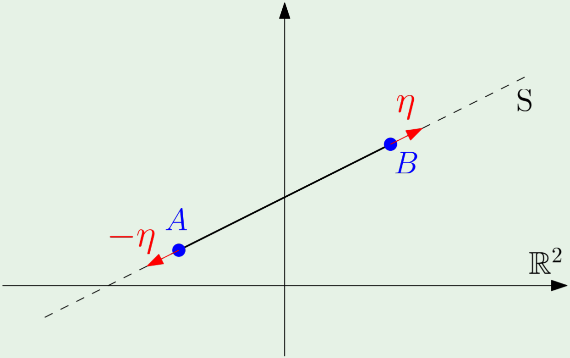
- $A, B \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo



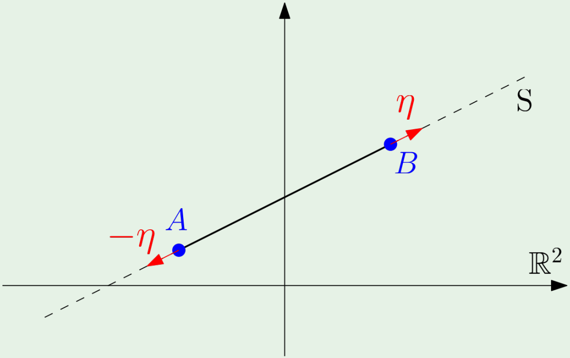
- $A, B \in \mathbb{R}^2$.
- $\overline{AB} \subset \mathbb{R}^2$ segmento de reta de A a B.

Exemplo



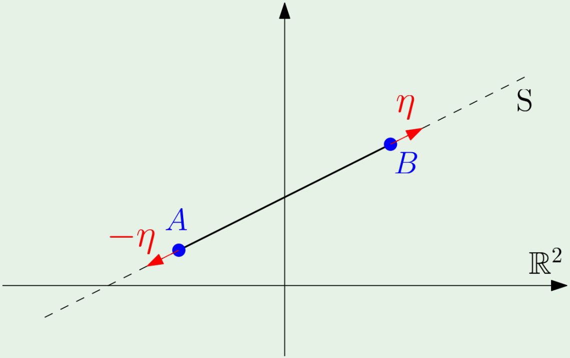
- $A, B \in \mathbb{R}^2$.
- $\overline{AB} \subset \mathbb{R}^2$ segmento de reta de A a B.
- $S \in \mathrm{Gr}(1, \mathbb{R}^2)$.

Exemplo



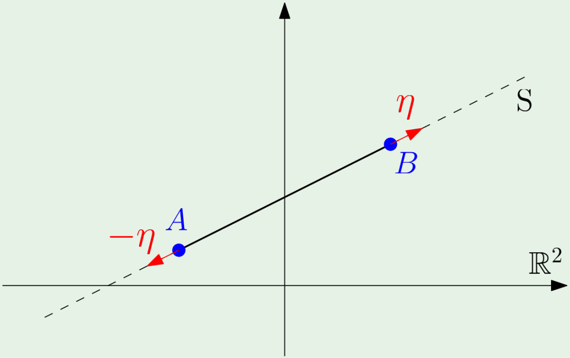
- $A, B \in \mathbb{R}^2$.
- $\overline{AB} \subset \mathbb{R}^2$ segmento de reta de A a B.
- $S \in \mathrm{Gr}(1, \mathbb{R}^2)$.
- $\eta := \dfrac{B - A}{||B - A||}$.

Exemplo



- $A, B \in \mathbb{R}^2$.
- $\overline{AB} \subset \mathbb{R}^2$ segmento de reta de A a B.
- $S \in \mathrm{Gr}(1, \mathbb{R}^2)$.
- $\eta := \dfrac{B - A}{||B - A||}$.
- $V := \mathcal{H}^1 \llcorner \overline{AB} \otimes \delta_S$.

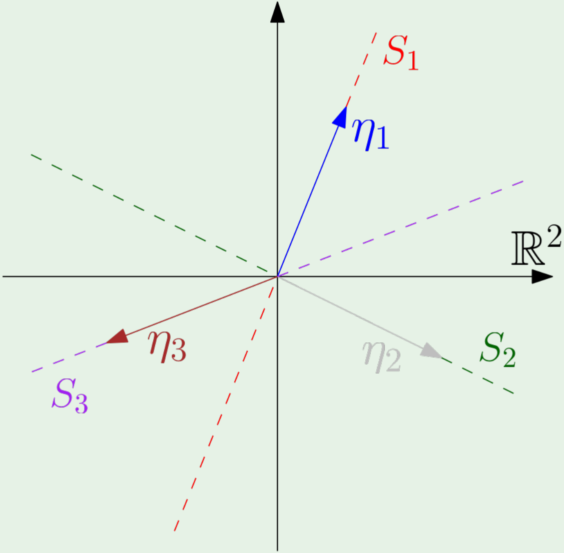
Exemplo



- $A, B \in \mathbb{R}^2$.
- $\overline{AB} \subset \mathbb{R}^2$ segmento de reta de A a B.
- $S \in \mathrm{Gr}(1, \mathbb{R}^2)$.
- $\eta := \dfrac{B - A}{||B - A||}$.
- $V := \mathcal{H}^1 \llcorner \overline{AB} \otimes \delta_S$.
- Para $X \in \mathfrak{X}_c^1(\mathbb{R}^2)$ temos que

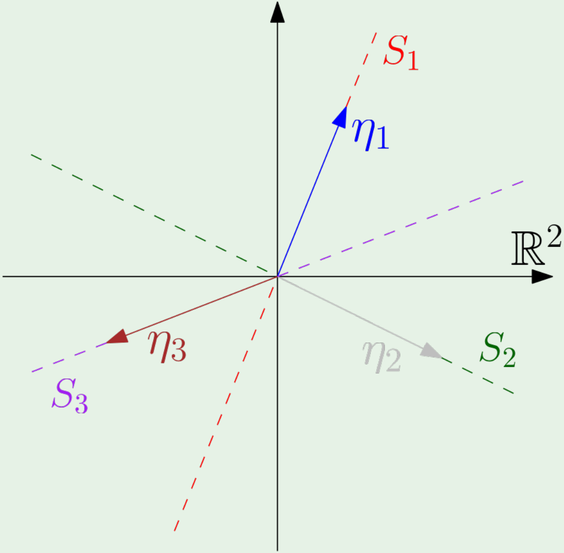
$$\delta V(X) = \langle X(B) - X(A), \eta \rangle.$$

Exemplo



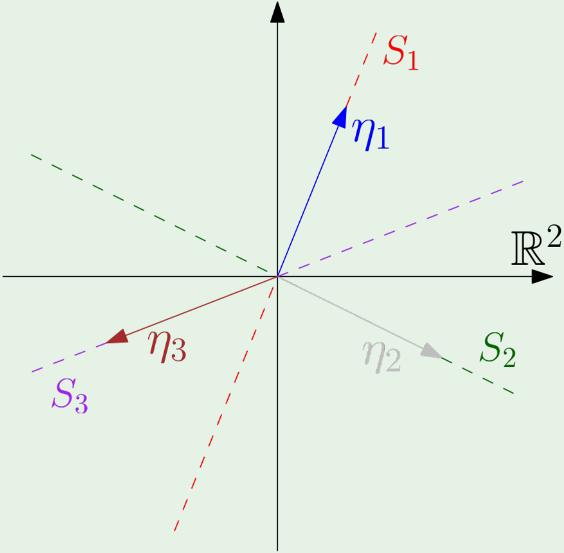
- $\eta_i \in \mathbb{R}^2$ tal que $||\eta_i|| = 1$, para $i = 1, 2, 3$.

Exemplo



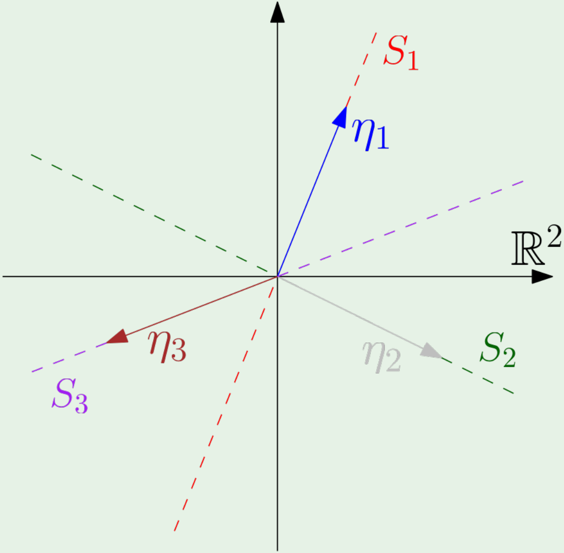
- $\eta_i \in \mathbb{R}^2$ tal que $||\eta_i|| = 1$, para $i = 1, 2, 3$.
- $S_1, S_2, S_3 \in \mathrm{Gr}(1, \mathbb{R}^2)$.

Exemplo



- $\eta_i \in \mathbb{R}^2$ tal que $||\eta_i|| = 1$, para $i = 1, 2, 3$.
- $S_1, S_2, S_3 \in \mathrm{Gr}(1, \mathbb{R}^2)$.
- $V := \mathcal{H}^1 \llcorner (\eta_1 \cup \eta_2 \cup \eta_3) \otimes (\delta_{S_1} + \delta_{S_2} + \delta_{S_3})$.

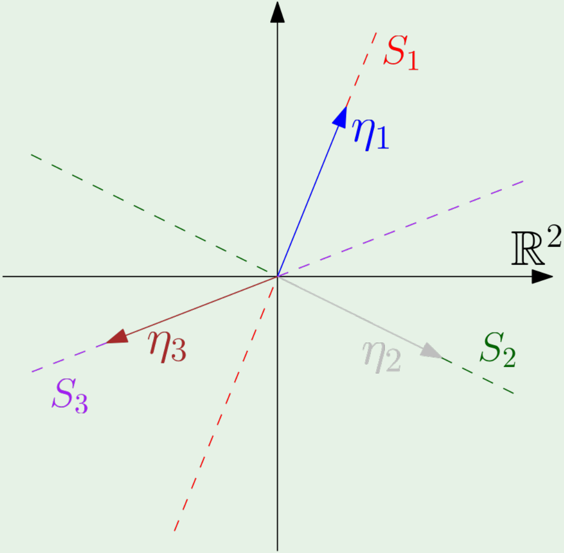
Exemplo



- $\eta_i \in \mathbb{R}^2$ tal que $||\eta_i|| = 1$, para $i = 1, 2, 3$.
- $S_1, S_2, S_3 \in \mathrm{Gr}(1, \mathbb{R}^2)$.
- $V := \mathcal{H}^1 \llcorner (\eta_1 \cup \eta_2 \cup \eta_3) \otimes (\delta_{S_1} + \delta_{S_2} + \delta_{S_3})$.
- Para $X \in \mathfrak{X}^1_c(\mathbb{R}^2)$ temos que

$$\delta V(X) = -\langle X(0), \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 \rangle.$$

Exemplo

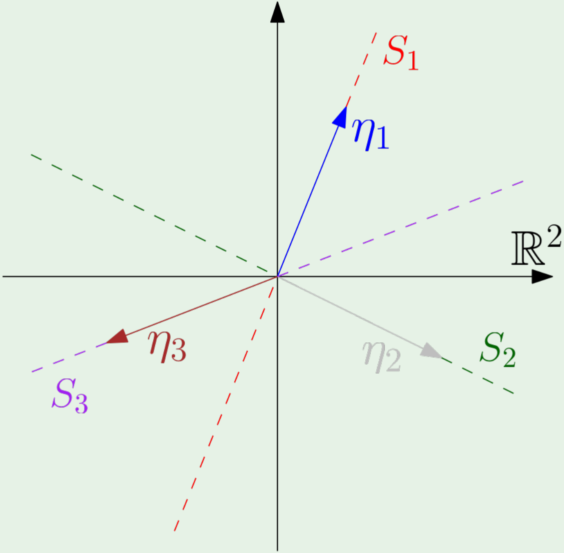


- $\eta_i \in \mathbb{R}^2$ tal que $||\eta_i|| = 1$, para $i = 1, 2, 3$.
- $S_1, S_2, S_3 \in \mathrm{Gr}(1, \mathbb{R}^2)$.
- $V := \mathcal{H}^1 \llcorner (\eta_1 \cup \eta_2 \cup \eta_3) \otimes (\delta_{S_1} + \delta_{S_2} + \delta_{S_3})$.
- Para $X \in \mathfrak{X}^1_c(\mathbb{R}^2)$ temos que

$$\delta V(X) = -\langle X(0), \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 \rangle.$$

- Se $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0$ então V é estacionária.

Exemplo



- $\eta_i \in \mathbb{R}^2$ tal que $||\eta_i|| = 1$, para $i = 1, 2, 3$.
- $S_1, S_2, S_3 \in \mathrm{Gr}(1, \mathbb{R}^2)$.
- $V := \mathcal{H}^1 \llcorner (\eta_1 \cup \eta_2 \cup \eta_3) \otimes (\delta_{S_1} + \delta_{S_2} + \delta_{S_3})$.
- Para $X \in \mathfrak{X}_c^1(\mathbb{R}^2)$ temos que

$$\delta V(X) = -\langle X(0), \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 \rangle.$$

- Se $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0$ então V é estacionária.
- Se $\measuredangle(\eta_i, \eta_j) = 120^\circ$, para $i, j = 1, 2, 3$ com $i \neq j$, então V é estacionária.

Proposição ([Sim18, Equation 2.10, p. 240])

Seja V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

Proposição ([Sim18, Equation 2.10, p. 240])

Seja V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. Para todo aberto $W \subset\subset \mathbb{R}^n$, existe uma constante real $C(W) > 0$ tal que

$$|\delta V(X)| \leq C(W) ||X||_{L^\infty(W, ||V||)}$$

   vale para todo $X \in \mathfrak{X}^1_c(W)$

Proposição ([Sim18, Equation 2.10, p. 240])

Seja V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. Para todo aberto $W \subset\subset \mathbb{R}^n$, existe uma constante real $C(W) > 0$ tal que

$$|\delta V(X)| \leq C(W)||X||_{L^\infty(W,||V||)}$$

vale para todo $X \in \mathfrak{X}^1_c(W)$ (chamamos as varifolds que satisfazem esta condição de **varifolds com primeira variação localmente limitada em** $\mathbb{R}^n$).

Proposição ([Sim18, Equation 2.10, p. 240])

Seja V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. Para todo aberto $W \subset\subset \mathbb{R}^n$, existe uma constante real $C(W) > 0$ tal que

   $$|\delta V(X)| \leq C(W)||X||_{L^\infty(W,||V||)}$$

   vale para todo $X \in \mathfrak{X}_c^1(W)$ (chamamos as varifolds que satisfazem esta condição de **varifolds com primeira variação localmente limitada em $\mathbb{R}^n$**).
2. A variação total da primeira variação de V, denotada por $||\delta V||_{\mathrm{TV}}$, é uma medida de Radon.

Proposição ([Sim18, Equation 2.10, p. 240])

Seja V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. Para todo aberto $W \subset\subset \mathbb{R}^n$, existe uma constante real $C(W) > 0$ tal que

$$|\delta V(X)| \leq C(W)||X||_{L^\infty(W,||V||)}$$

   vale para todo $X \in \mathfrak{X}^1_c(W)$ (chamamos as varifolds que satisfazem esta condição de **varifolds com primeira variação localmente limitada em $\mathbb{R}^n$**).
2. A variação total da primeira variação de V, denotada por $||\delta V||_{\mathrm{TV}}$, é uma medida de Radon. Além disso, para cada $W \subset\subset \mathbb{R}^n$ e $X \in \mathfrak{X}^1_c(W)$ existem uma função $||V||$-mensurável $\overrightarrow{H} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

Proposição ([Sim18, Equation 2.10, p. 240])

Seja V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. Para todo aberto $W \subset\subset \mathbb{R}^n$, existe uma constante real $C(W) > 0$ tal que
$$|\delta V(X)| \leq C(W)||X||_{L^\infty(W,||V||)}$$
vale para todo $X \in \mathfrak{X}_c^1(W)$ (chamamos as varifolds que satisfazem esta condição de **varifolds com primeira variação localmente limitada em $\mathbb{R}^n$**).
2. A variação total da primeira variação de V, denotada por $||\delta V||_{\mathrm{TV}}$, é uma medida de Radon. Além disso, para cada $W \subset\subset \mathbb{R}^n$ e $X \in \mathfrak{X}_c^1(W)$ existem uma função $||V||$-mensurável $\overrightarrow{H} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, uma função $||\delta V||_{\mathrm{TV}}$-mensurável $\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

Proposição ([Sim18, Equation 2.10, p. 240])

Seja V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. Para todo aberto $W \subset\subset \mathbb{R}^n$, existe uma constante real $C(W) > 0$ tal que

$$|\delta V(X)| \leq C(W)||X||_{L^\infty(W,||V||)}$$

   vale para todo $X \in \mathfrak{X}^1_c(W)$ (chamamos as varifolds que satisfazem esta condição de **varifolds com primeira variação localmente limitada em** $\mathbb{R}^n$).

2. A variação total da primeira variação de V, denotada por $||\delta V||_{\mathrm{TV}}$, é uma medida de Radon. Além disso, para cada $W \subset\subset \mathbb{R}^n$ e $X \in \mathfrak{X}^1_c(W)$ existem uma função $||V||$-mensurável $\overrightarrow{H} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, uma função $||\delta V||_{\mathrm{TV}}$-mensurável $\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, uma constante real $C(W) > 0$,

Proposição ([Sim18, Equation 2.10, p. 240])

Seja V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. Para todo aberto $W \subset\subset \mathbb{R}^n$, existe uma constante real $C(W) > 0$ tal que

$$|\delta V(X)| \leq C(W)||X||_{L^\infty(W,||V||)}$$

   vale para todo $X \in \mathfrak{X}_c^1(W)$ (chamamos as varifolds que satisfazem esta condição de **varifolds com primeira variação localmente limitada em** $\mathbb{R}^n$).
2. A variação total da primeira variação de V, denotada por $||\delta V||_{\mathrm{TV}}$, é uma medida de Radon. Além disso, para cada $W \subset\subset \mathbb{R}^n$ e $X \in \mathfrak{X}_c^1(W)$ existem uma função $||V||$-mensurável $\overrightarrow{H} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, uma função $||\delta V||_{\mathrm{TV}}$-mensurável $\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, uma constante real $C(W) > 0$, e um conjunto $Z \subset \mathbb{R}^n$ com $||V||(Z) = 0$, tais que

Proposição ([Sim18, Equation 2.10, p. 240])

Seja V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. Para todo aberto $W \subset\subset \mathbb{R}^n$, existe uma constante real $C(W) > 0$ tal que

$$|\delta V(X)| \leq C(W)||X||_{L^\infty(W,||V||)}$$

vale para todo $X \in \mathfrak{X}_c^1(W)$ (chamamos as varifolds que satisfazem esta condição de **varifolds com primeira variação localmente limitada em** $\mathbb{R}^n$).

2. A variação total da primeira variação de V, denotada por $||\delta V||_{\mathrm{TV}}$, é uma medida de Radon. Além disso, para cada $W \subset\subset \mathbb{R}^n$ e $X \in \mathfrak{X}_c^1(W)$ existem uma função $||V||$-mensurável $\overrightarrow{H} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, uma função $||\delta V||_{\mathrm{TV}}$-mensurável $\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, uma constante real $C(W) > 0$, e um conjunto $Z \subset \mathbb{R}^n$ com $||V||(Z) = 0$, tais que

$$\delta V(X) = -\int_{\mathbb{R}^n} \left\langle \overrightarrow{H}(x), X(x) \right\rangle d||V||(x) + \int_Z \langle \nu(x), X(x) \rangle \, d||\delta V||_{\mathrm{TV}}(x)$$

Proposição ([Sim18, Equation 2.10, p. 240])

Seja V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. Para todo aberto $W \subset\subset \mathbb{R}^n$, existe uma constante real $C(W) > 0$ tal que

$$|\delta V(X)| \leq C(W) ||X||_{L^\infty(W,||V||)}$$

vale para todo $X \in \mathfrak{X}^1_c(W)$ (chamamos as varifolds que satisfazem esta condição de **varifolds com primeira variação localmente limitada em $\mathbb{R}^n$**).

2. A variação total da primeira variação de V, denotada por $||\delta V||_{\mathrm{TV}}$, é uma medida de Radon. Além disso, para cada $W \subset\subset \mathbb{R}^n$ e $X \in \mathfrak{X}^1_c(W)$ existem uma função $||V||$-mensurável $\overrightarrow{H} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, uma função $||\delta V||_{\mathrm{TV}}$-mensurável $\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, uma constante real $C(W) > 0$, e um conjunto $Z \subset \mathbb{R}^n$ com $||V||(Z) = 0$, tais que

$$\delta V(X) = -\int_{\mathbb{R}^n} \left\langle \overrightarrow{H}(x), X(x) \right\rangle d||V||(x) + \int_Z \langle \nu(x), X(x) \rangle \, d||\delta V||_{\mathrm{TV}}(x)$$

e $\left|\left|\overrightarrow{H}\right|\right|_{L^1(W,||V||)} \leq C(W)$ e $||\nu(x)|| = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Proposição ([Sim18, Equation 2.10, p. 240])

Seja $1 \leq p < \infty$ e V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

Proposição ([Sim18, Equation 2.10, p. 240])

Seja $1 \leq p < \infty$ e V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. Para todo aberto $W \subset\subset \mathbb{R}^n$, existe uma constante real $C(W) > 0$ tal que

$$|\delta V(X)| \leq C(W) ||X||_{L^p(W,||V||)}$$

vale para todo $X \in \mathfrak{X}_c^1(W)$.

Proposição ([Sim18, Equation 2.10, p. 240])

Seja $1 \leq p < \infty$ e V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. Para todo aberto $W \subset\subset \mathbb{R}^n$, existe uma constante real $C(W) > 0$ tal que
$$|\delta V(X)| \leq C(W) ||X||_{L^p(W, ||V||)}$$
vale para todo $X \in \mathfrak{X}_c^1(W)$.
2. A variação total da primeira variação de V, denotada por $||\delta V||_{\mathrm{TV}}$, é uma medida de Radon.

Proposição ([Sim18, Equation 2.10, p. 240])

Seja $1 \leq p < \infty$ e V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. Para todo aberto $W \subset\subset \mathbb{R}^n$, existe uma constante real $C(W) > 0$ tal que
$$|\delta V(X)| \leq C(W) ||X||_{L^p(W,||V||)}$$
vale para todo $X \in \mathfrak{X}_c^1(W)$.
2. A variação total da primeira variação de V, denotada por $||\delta V||_{\mathrm{TV}}$, é uma medida de Radon. Além disso, para cada $W \subset\subset \mathbb{R}^n$ e $X \in \mathfrak{X}_c^1(W)$ existem uma função $||V||$-mensurável $\overrightarrow{H} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Proposição ([Sim18, Equation 2.10, p. 240])

Seja $1 \leq p < \infty$ e V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. Para todo aberto $W \subset\subset \mathbb{R}^n$, existe uma constante real $C(W) > 0$ tal que
$$|\delta V(X)| \leq C(W)||X||_{L^p(W,||V||)}$$
vale para todo $X \in \mathfrak{X}^1_c(W)$.
2. A variação total da primeira variação de V, denotada por $||\delta V||_{\mathrm{TV}}$, é uma medida de Radon. Além disso, para cada $W \subset\subset \mathbb{R}^n$ e $X \in \mathfrak{X}^1_c(W)$ existem uma função $||V||$-mensurável $\overrightarrow{H} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e uma constante real $C(W) > 0$ tal que

Proposição ([Sim18, Equation 2.10, p. 240])

Seja $1 \leq p < \infty$ e V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. Para todo aberto $W \subset\subset \mathbb{R}^n$, existe uma constante real $C(W) > 0$ tal que
$$|\delta V(X)| \leq C(W)||X||_{L^p(W,||V||)}$$
vale para todo $X \in \mathfrak{X}_c^1(W)$.
2. A variação total da primeira variação de V, denotada por $||\delta V||_{\mathrm{TV}}$, é uma medida de Radon. Além disso, para cada $W \subset\subset \mathbb{R}^n$ e $X \in \mathfrak{X}_c^1(W)$ existem uma função $||V||$-mensurável $\overrightarrow{H} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e uma constante real $C(W) > 0$ tal que
$$\delta V(X) = -\int_{\mathbb{R}^n} \left\langle \overrightarrow{H}(x), X(x) \right\rangle d||V||(x)$$

Proposição ([Sim18, Equation 2.10, p. 240])

Seja $1 \leq p < \infty$ e V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. Para todo aberto $W \subset\subset \mathbb{R}^n$, existe uma constante real $C(W) > 0$ tal que
$$|\delta V(X)| \leq C(W) ||X||_{L^p(W,||V||)}$$
vale para todo $X \in \mathfrak{X}_c^1(W)$.
2. A variação total da primeira variação de V, denotada por $||\delta V||_{\mathrm{TV}}$, é uma medida de Radon. Além disso, para cada $W \subset\subset \mathbb{R}^n$ e $X \in \mathfrak{X}_c^1(W)$ existem uma função $||V||$-mensurável $\overrightarrow{H} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e uma constante real $C(W) > 0$ tal que
$$\delta V(X) = -\int_{\mathbb{R}^n} \left\langle \overrightarrow{H}(x), X(x) \right\rangle d||V||(x)$$
e $\left|\left|\overrightarrow{H}\right|\right|_{L^{\frac{p}{p-1}}(W,||V||)} \leq C(W)$.

- A partir da escolha de um campo de vetores X específico podemos obter informações importantes sobre as varifolds.

- A partir da escolha de um campo de vetores X específico podemos obter informações importantes sobre as varifolds. Um exemplo disso é a fórmula de monotonicidade para varifolds estacionárias.

- A partir da escolha de um campo de vetores X específico podemos obter informações importantes sobre as varifolds. Um exemplo disso é a fórmula de monotonicidade para varifolds estacionárias.
  - $y \in \mathbb{R}^n$.

- A partir da escolha de um campo de vetores X específico podemos obter informações importantes sobre as varifolds. Um exemplo disso é a fórmula de monotonicidade para varifolds estacionárias.
    - $y \in \mathbb{R}^n$.
    - $u_y : \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$ dada por $u_y(x) := d(x, y)$.

- A partir da escolha de um campo de vetores X específico podemos obter informações importantes sobre as varifolds. Um exemplo disso é a fórmula de monotonicidade para varifolds estacionárias.
  - $y \in \mathbb{R}^n$.
  - $u_y : \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$ dada por $u_y(x) := d(x, y)$.
  - $h \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

- A partir da escolha de um campo de vetores X específico podemos obter informações importantes sobre as varifolds. Um exemplo disso é a fórmula de monotonicidade para varifolds estacionárias.
    - $y \in \mathbb{R}^n$.
    - $u_y : \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$ dada por $u_y(x) := d(x, y)$.
    - $h \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
    - $s > 0$.

- A partir da escolha de um campo de vetores X específico podemos obter informações importantes sobre as varifolds. Um exemplo disso é a fórmula de monotonicidade para varifolds estacionárias.
    - $y \in \mathbb{R}^n$.
    - $u_y : \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$ dada por $u_y(x) := d(x, y)$.
    - $h \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
    - $s > 0$.
    - V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$ estacionária.

- A partir da escolha de um campo de vetores X específico podemos obter informações importantes sobre as varifolds. Um exemplo disso é a fórmula de monotonicidade para varifolds estacionárias.
  - $y \in \mathbb{R}^n$.
  - $u_y : \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$ dada por $u_y(x) := d(x, y)$.
  - $h \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
  - $s > 0$.
  - V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$ estacionária.
- Assim, temos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^m}\int_{B(y,s)} h(x)d||V||(x)\right) = \\
&\quad \frac{1}{s^{m+1}}\int_{B(y,s)\times \mathrm{Gr}(m,\mathbb{R}^n)} \left\langle u_y(x)\vec{\nabla}(u_y)(x), P_S\left(\vec{\nabla}(h)(x)\right)\right\rangle dV(x,S)+ \\
&\quad \frac{d}{ds}\left(\int_{B(y,s)\times \mathrm{Gr}(m,\mathbb{R}^n)} \frac{h(x)}{(u_y(x))^m}\left|\left|P_{S^\perp}\left(\vec{\nabla}(u_y)(x)\right)\right|\right|^2 dV(x,S)\right).
\end{aligned}
$$

- A partir de hipóteses diferentes sobre V podemos obter diferentes fórmulas de monotonicidade e como consequência temos:

- A partir de hipóteses diferentes sobre V podemos obter diferentes fórmulas de monotonicidade e como consequência temos:

Teorema ([All72, Theorem 5.5(1), p. 450-451])

Seja V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$ tal que $||\delta V||_{\mathrm{TV}}$ é uma medida de Radon. Então

$$V \llcorner (\{y : \Theta^{*m}(||V||, y) > 0\} \times \mathrm{Gr}(m, \mathbb{R}^n))$$

é uma varifold rectifiável.

Teorema ([All72, Theorem 6.4, p. 458])

Seja $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de varifolds rectifiáveis m-dimensionais com primeira variação localmente limitada em um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Teorema ([All72, Theorem 6.4, p. 458])

Seja $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de varifolds rectifiáveis m-dimensionais com primeira variação localmente limitada em um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\theta_j \geq 1$ para $||V_j||$-quase todo ponto.

Teorema ([All72, Theorem 6.4, p. 458])

Seja $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de varifolds rectifiáveis m-dimensionais com primeira variação localmente limitada em um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\theta_j \geq 1$ para $||V_j||$-quase todo ponto. Se

$$\sup_j \{||V_j||(W) + ||\delta V_j||_{\mathrm{TV}}(W)\} \leq C(W) < +\infty$$

para todo aberto $W \subset\subset \Omega$,

Teorema ([All72, Theorem 6.4, p. 458])

Seja $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de varifolds rectifiáveis m-dimensionais com primeira variação localmente limitada em um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\theta_j \geq 1$ para $||V_j||$-quase todo ponto. Se

$$\sup_j \{||V_j||(W) + ||\delta V_j||_{\mathrm{TV}}(W)\} \leq C(W) < +\infty$$

para todo aberto $W \subset\subset \Omega$, então existe uma subsequência $(V_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ que converge no sentido fraco* para uma varifold rectifiável m-dimensional com primeira variação localmente limitada em Ω,

Teorema ([All72, Theorem 6.4, p. 458])

Seja $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de varifolds rectifiáveis m-dimensionais com primeira variação localmente limitada em um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\theta_j \geq 1$ para $||V_j||$-quase todo ponto. Se

$$\sup_j \{||V_j||(W) + ||\delta V_j||_{\mathrm{TV}}(W)\} \leq C(W) < +\infty$$

para todo aberto $W \subset\subset \Omega$, então existe uma subsequência $(V_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ que converge no sentido fraco* para uma varifold rectifiável m-dimensional com primeira variação localmente limitada em Ω, $\theta \geq 1$ e

$$||\delta V||_{\mathrm{TV}}(W) \leq \liminf_{n\uparrow\infty} ||\delta V_{j_n}||_{\mathrm{TV}}(W) \qquad \forall W \subset\subset \Omega.$$

Teorema ([All72, Theorem 6.4, p. 458])

Seja $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de varifolds rectifiáveis m-dimensionais com primeira variação localmente limitada em um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\theta_j \geq 1$ para $||V_j||$-quase todo ponto. Se

$$\sup_j \{||V_j||(W) + ||\delta V_j||_{\mathrm{TV}}(W)\} \leq C(W) < +\infty$$

para todo aberto $W \subset\subset \Omega$, então existe uma subsequência $(V_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ que converge no sentido fraco* para uma varifold rectifiável m-dimensional com primeira variação localmente limitada em Ω, $\theta \geq 1$ e

$$||\delta V||_{\mathrm{TV}}(W) \leq \liminf_{n\uparrow\infty} ||\delta V_{j_n}||_{\mathrm{TV}}(W) \qquad \forall W \subset\subset \Omega.$$

Além disso, se V_j é integral para todo $j \in \mathbb{N}$ então V é integral também.

Teorema da regularidade de Allard

- $m < p < +\infty$.

- $m < p < +\infty$.
- V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$.

- $m < p < +\infty$.
- V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$.
- $\xi \in \operatorname{supp}(||V||)$.

- $m < p < +\infty$.
- V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$.
- $\xi \in \operatorname{supp}(||V||)$.
- $0 < \delta < 1$.

- $m < p < +\infty$.
- V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$.
- $\xi \in \mathrm{supp}(||V||)$.
- $0 < \delta < 1$.
- $\rho < +\infty$.

- $m < p < +\infty$.
- V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$.
- $\xi \in \operatorname{supp}(||V||)$.
- $0 < \delta < 1$.
- $\rho < +\infty$.
- Dizemos que V **satisfaz a condição de regularidade de Allard em** $B(\xi, \rho)$ **com constantes** δ **e** p se

- $m < p < +\infty$.
- V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$.
- $\xi \in \operatorname{supp}(||V||)$.
- $0 < \delta < 1$.
- $\rho < +\infty$.
- Dizemos que V **satisfaz a condição de regularidade de Allard em** $B(\xi, \rho)$ **com constantes** δ **e** p se

$$\Theta^m(||V||, x) \geq 1, \tag{2}$$

para $||V||$-quase todo $x \in B(\xi, \rho)$,

- $m < p < +\infty$.
- V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$.
- $\xi \in \operatorname{supp}(||V||)$.
- $0 < \delta < 1$.
- $\rho < +\infty$.
- Dizemos que V **satisfaz a condição de regularidade de Allard em** $B(\xi, \rho)$ **com constantes** δ **e** p se

$$\Theta^m(||V||, x) \geq 1, \tag{2}$$

para $||V||$-quase todo $x \in B(\xi, \rho)$,

$$\frac{||V||(B(\xi, \rho))}{\omega_m \rho^m} \leq 1 + \delta, \tag{3}$$

- $m < p < +\infty$.
- V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$.
- $\xi \in \operatorname{supp}(||V||)$.
- $0 < \delta < 1$.
- $\rho < +\infty$.
- Dizemos que V **satisfaz a condição de regularidade de Allard em** $B(\xi, \rho)$ **com constantes** δ **e** p se

$$\Theta^m(||V||, x) \geq 1, \tag{2}$$

para $||V||$-quase todo $x \in B(\xi, \rho)$,

$$\frac{||V||(B(\xi, \rho))}{\omega_m \rho^m} \leq 1 + \delta, \tag{3}$$

e

$$|\delta V(X)| \leq \frac{\delta}{\rho^{1-\frac{m}{p}}} ||X||_{L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^n, ||V||)}, \tag{4}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}_c^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\operatorname{supp}(X) \subset B(\xi, \rho)$.

Teorema ([All72, Regularity Theorem, p. 466])

Seja $m < p < +\infty$, V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$ e $\xi \in \operatorname{supp}(||V||)$.

Teorema ([All72, Regularity Theorem, p. 466])

Seja $m < p < +\infty$, V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$ e $\xi \in \operatorname{supp}(||V||)$. Para todo $\varepsilon \in]0, 1[$

Teorema ([All72, Regularity Theorem, p. 466])

Seja $m < p < +\infty$, V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$ e $\xi \in \operatorname{supp}(||V||)$. Para todo $\varepsilon \in]0,1[$ existe $\delta = \delta(m,n,p,\varepsilon) \in]0,1[$

Teorema ([All72, Regularity Theorem, p. 466])

Seja $m < p < +\infty$, V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$ e $\xi \in \operatorname{supp}(||V||)$. Para todo $\varepsilon \in]0,1[$ existe $\delta = \delta(m,n,p,\varepsilon) \in]0,1[$ tal que se V satisfaz a condição de regularidade de Allard em $B(\xi,\rho)$ com constantes δ e p, para algum $\rho > 0$,

Teorema ([All72, Regularity Theorem, p. 466])

Seja $m < p < +\infty$, V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$ e $\xi \in \mathrm{supp}(||V||)$. Para todo $\varepsilon \in]0,1[$ existe $\delta = \delta(m,n,p,\varepsilon) \in]0,1[$ tal que se V satisfaz a condição de regularidade de Allard em $B(\xi,\rho)$ com constantes δ e p, para algum $\rho > 0$, então existem $T \in \mathrm{Gr}(m,\mathbb{R}^n)$ e uma função $f : T \to \mathbb{R}^n$ tais que

Teorema ([All72, Regularity Theorem, p. 466])

Seja $m < p < +\infty$, V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$ e $\xi \in \operatorname{supp}(||V||)$. Para todo $\varepsilon \in]0,1[$ existe $\delta = \delta(m,n,p,\varepsilon) \in]0,1[$ tal que se V satisfaz a condição de regularidade de Allard em $B(\xi,\rho)$ com constantes δ e p, para algum $\rho > 0$, então existem $T \in \mathrm{Gr}(m,\mathbb{R}^n)$ e uma função $f : T \to \mathbb{R}^n$ tais que

1. $f \in \mathcal{C}^{1,1-\frac{m}{p}}(T,\mathbb{R}^n)$ e $P_T \circ f = Id_T$,

Teorema ([All72, Regularity Theorem, p. 466])

Seja $m < p < +\infty$, V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$ e $\xi \in \operatorname{supp}(||V||)$. Para todo $\varepsilon \in]0,1[$ existe $\delta = \delta(m,n,p,\varepsilon) \in]0,1[$ tal que se V satisfaz a condição de regularidade de Allard em $B(\xi,\rho)$ com constantes δ e p, para algum $\rho > 0$, então existem $T \in \mathrm{Gr}(m,\mathbb{R}^n)$ e uma função $f : T \to \mathbb{R}^n$ tais que

1. $f \in \mathcal{C}^{1,1-\frac{m}{p}}(T,\mathbb{R}^n)$ e $P_T \circ f = Id_T$,
2. $B(\xi,(1-\varepsilon)\rho) \cap \operatorname{supp}(||V||) = B(\xi,(1-\varepsilon)\rho) \cap f(T)$,

Teorema ([All72, Regularity Theorem, p. 466])

Seja $m < p < +\infty$, V uma varifold m-dimensional em $\mathbb{R}^n$ e $\xi \in \operatorname{supp}(||V||)$. Para todo $\varepsilon \in]0,1[$ existe $\delta = \delta(m,n,p,\varepsilon) \in]0,1[$ tal que se V satisfaz a condição de regularidade de Allard em $B(\xi,\rho)$ com constantes δ e p, para algum $\rho > 0$, então existem $T \in \operatorname{Gr}(m,\mathbb{R}^n)$ e uma função $f : T \to \mathbb{R}^n$ tais que

1. $f \in \mathcal{C}^{1,1-\frac{m}{p}}(T,\mathbb{R}^n)$ e $P_T \circ f = Id_T$,
2. $B(\xi,(1-\varepsilon)\rho) \cap \operatorname{supp}(||V||) = B(\xi,(1-\varepsilon)\rho) \cap f(T)$,
3. $\forall y,z \in T$ temos que $\dfrac{||Df_y - Df_z||_{\mathrm{HS}}}{||y-z||^{1-\frac{m}{p}}} \leq \dfrac{\varepsilon}{\rho^{1-\frac{m}{p}}}$.

- V uma varifold rectifiável m-dimensional do $\mathbb{R}^n$.

- V uma varifold rectifiável m-dimensional do $\mathbb{R}^n$.
- Dizemos que $\xi \in \operatorname{supp}(||V||)$ é um **ponto regular interior de** V se existe $\rho > 0$ tal que $B(\xi, \rho) \cap \operatorname{supp}(||V||)$ é uma subvariedade m-dimensional de classe $\mathcal{C}^1$ do $\mathbb{R}^n$.

- V uma varifold rectifiável m-dimensional do $\mathbb{R}^n$.
- Dizemos que $\xi \in \operatorname{supp}(||V||)$ é um **ponto regular interior de** V se existe $\rho > 0$ tal que $B(\xi, \rho) \cap \operatorname{supp}(||V||)$ é uma subvariedade m-dimensional de classe $\mathcal{C}^1$ do $\mathbb{R}^n$.
- $\operatorname{reg}(||V||) := \{\xi \in \operatorname{supp}(||V||) : \xi$ é um ponto regular interior de $V\}$.

- V uma varifold rectifiável m-dimensional do $\mathbb{R}^n$.
- Dizemos que $\xi \in \operatorname{supp}(||V||)$ é um **ponto regular interior de** V se existe $\rho > 0$ tal que $B(\xi, \rho) \cap \operatorname{supp}(||V||)$ é uma subvariedade m-dimensional de classe $\mathcal{C}^1$ do $\mathbb{R}^n$.
- $\operatorname{reg}(||V||) := \{\xi \in \operatorname{supp}(||V||) : \xi$ é um ponto regular interior de $V\}$.
- $\operatorname{sing}(||V||) := \operatorname{supp}(||V||) \setminus \operatorname{reg}(||V||)$.

- V uma varifold rectifiável m-dimensional do $\mathbb{R}^n$.
- Dizemos que $\xi \in \operatorname{supp}(||V||)$ é um **ponto regular interior de** V se existe $\rho > 0$ tal que $B(\xi, \rho) \cap \operatorname{supp}(||V||)$ é uma subvariedade m-dimensional de classe $\mathcal{C}^1$ do $\mathbb{R}^n$.
- $\operatorname{reg}(||V||) := \{\xi \in \operatorname{supp}(||V||) : \xi$ é um ponto regular interior de $V\}$.
- $\operatorname{sing}(||V||) := \operatorname{supp}(||V||) \setminus \operatorname{reg}(||V||)$.

Corolário ([Sim18, Corollary 6.3, p. 152])

Seja V uma varifold rectifiável m-dimensional do $\mathbb{R}^n$ tal que $H \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, ||V||)$ para algum $p > m$ e $\theta(x) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ para $||V||$-quase todo $x \in \operatorname{supp}(||V||)$. Então $\operatorname{reg}(||V||)$ é aberto e denso em $\operatorname{supp}(||V||)$.

- V uma varifold rectifiável m-dimensional do $\mathbb{R}^n$.
- Dizemos que $\xi \in \operatorname{supp}(||V||)$ é um **ponto regular interior de** V se existe $\rho > 0$ tal que $B(\xi, \rho) \cap \operatorname{supp}(||V||)$ é uma subvariedade m-dimensional de classe $\mathcal{C}^1$ do $\mathbb{R}^n$.
- $\operatorname{reg}(||V||) := \{\xi \in \operatorname{supp}(||V||) : \xi$ é um ponto regular interior de $V\}$.
- $\operatorname{sing}(||V||) := \operatorname{supp}(||V||) \setminus \operatorname{reg}(||V||)$.

Corolário ([Sim18, Corollary 6.3, p. 152])

Seja V uma varifold rectifiável m-dimensional do $\mathbb{R}^n$ tal que $H \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, ||V||)$ para algum $p > m$ e $\theta(x) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ para $||V||$-quase todo $x \in \operatorname{supp}(||V||)$. Então $\operatorname{reg}(||V||)$ é aberto e denso em $\operatorname{supp}(||V||)$.

Observação

É uma questão aberta quando ou não $\operatorname{sing}(||V||)$ tem $\mathcal{H}^m$-medida nula sob as condições do Corolário acima, mesmo quando $H \equiv 0$ (em [AA76, Chapter 3] Allard e Almgren provam que para $m = 1$ e $H \equiv 0$ temos que $\mathcal{H}^1(\operatorname{sing}(||V||)) = 0$). Tais resultados (e muitos outros) são verdade no caso em que V é uma varifold associada e uma corrente minimizante.

- O primeiro passo para provarmos o Teorema de regularidade de Allard é definirmos o tilt-excess de uma varifold.

- O primeiro passo para provarmos o Teorema de regularidade de Allard é definirmos o tilt-excess de uma varifold.
  - $\xi \in \mathbb{R}^n$.

- O primeiro passo para provarmos o Teorema de regularidade de Allard é definirmos o tilt-excess de uma varifold.
    - $\xi \in \mathbb{R}^n$.
    - $S \in \mathrm{Gr}(m, \mathbb{R}^n)$.

- O primeiro passo para provarmos o Teorema de regularidade de Allard é definirmos o tilt-excess de uma varifold.
  - $\xi \in \mathbb{R}^n$.
  - $S \in \mathrm{Gr}(m, \mathbb{R}^n)$.
  - $\sigma > 0$.

- O primeiro passo para provarmos o Teorema de regularidade de Allard é definirmos o tilt-excess de uma varifold.
  - $\xi \in \mathbb{R}^n$.
  - $S \in \mathrm{Gr}(m, \mathbb{R}^n)$.
  - $\sigma > 0$.
  - V uma varifold rectifiável m-dimensional em $\mathbb{R}^n$.

- O primeiro passo para provarmos o Teorema de regularidade de Allard é definirmos o tilt-excess de uma varifold.
  - $\xi \in \mathbb{R}^n$.
  - $S \in \mathrm{Gr}(m, \mathbb{R}^n)$.
  - $\sigma > 0$.
  - V uma varifold rectifiável m-dimensional em $\mathbb{R}^n$.
  - Definimos o **tilt-excess de V na bola $B(\xi, \sigma)$ relativo ao espaço S** por

- O primeiro passo para provarmos o Teorema de regularidade de Allard é definirmos o tilt-excess de uma varifold.
  - $\xi \in \mathbb{R}^n$.
  - $S \in \mathrm{Gr}(m, \mathbb{R}^n)$.
  - $\sigma > 0$.
  - V uma varifold rectifiável m-dimensional em $\mathbb{R}^n$.
  - Definimos o **tilt-excess de V na bola $B(\xi, \sigma)$ relativo ao espaço S** por

$$E(\xi, \sigma, S, V) := \frac{1}{\sigma^m} \int_{B(\xi,\sigma)} ||P_{T_x||V||} - P_S||^2_{\mathrm{HS}} \, d||V||(x).$$

- O primeiro passo para provarmos o Teorema de regularidade de Allard é definirmos o tilt-excess de uma varifold.
  - $\xi \in \mathbb{R}^n$.
  - $S \in \mathrm{Gr}(m, \mathbb{R}^n)$.
  - $\sigma > 0$.
  - V uma varifold rectifiável m-dimensional em $\mathbb{R}^n$.
  - Definimos o **tilt-excess de V na bola $B(\xi,\sigma)$ relativo ao espaço S** por

$$E(\xi, \sigma, S, V) := \frac{1}{\sigma^m} \int_{B(\xi,\sigma)} ||P_{T_x||V||} - P_S||_{\mathrm{HS}}^2 \, d||V||(x).$$

- Quais dificuldades surgem no caso Riemanniano?

Bibliografia

Bibliografia I

[AA76] W. K. Allard and F. J. Almgren Jr., *The structure of stationary one dimensional varifolds with positive density*, Invent. Math. **34** (1976), no. 2, 83–97. MR425741

[All72] W. K. Allard, *On the first variation of a varifold*, Ann. of Math. (2) **95** (1972), 417–491. MR0307015

[AT76] F. J. Almgren and J. E. Taylor, *The geometry of soap films and soap bubbles*, Scientific American **235** (1976), no. 1, 82–93.

[dC76] M. P. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1976. Translated from the Portuguese. MR394451

[GMPR10] R. E. Goldstein, H. K. Moffatt, A. I. Pesci, and R. L. Ricca, *Soap-film Möbius strip changes topology with a twist singularity*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **107** (2010), no. 51, 21979–21984. MR2755725

[Pla73] J. A. F. Plateau, *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires, Gauthier-Villars, 1873.

[Sim18] L. Simon, *Introduction to geometric measure theory*, NTU Lectures (2018).