NOTAS DE ATENDIMENTO

MARCOS AGNOLETTO FORTE

RESUMO. Estas são notas não oficiais sobre os temas mais importantes discutidos durante os horários de atendimento e as aulas dadas durante o estágio de docência.

CONTEÚDO

1. Aula do dia 18/09/2023 2
1.1. Revisão de geometria diferencial I 2
1.2. A faixa de Möbius 5
1.3. Um panorama de geometria diferencial II através do SageMath 10
2. Aula do dia 20/09/2023 12
2.1. Orientabilidade 12
2.2. O gradiente 15
2.3. A segunda forma fundamental 15
2.4. A curvatura normal 17
2.5. Exemplos 17
3. Aula do dia 25/09/2023 21
3.1. A aplicação normal de Gauss 21
3.2. Exemplos 22
3.3. dN_p é uma aplicação autoadjunta 23
3.4. Consequências geométricas 24
3.5. Exemplos 25
3.6. A fórmula de Euler 26
Referências 27

1. Aula do dia 18/09/2023

Objetivos da aula:
- Explicar as regras do curso (aproximadamente 10 minutos)
- Fazer uma revisão relâmpago de Geometria Diferencial I (aproximadamente 30 minutos)
- Introdução à faixa de Möbius (aproximadamente 10 minutos)
- Pausa de 10 minutos
- Obter a parametrização da Faixa de Möbius (aproximadamente 20 minutos)
- Calcular os coeficientes da primeira forma fundamental (aproximadamente 20 minutos)
- Um visão panorâmica do curso de Geometria Diferencial II através do SageManifolds (aproximadamente 10 minutos)
- Acabar 10 minutos antes

Tempo de aula (expectativa): 120 minutos.

1.1. **Revisão de geometria diferencial I.** A referência para esta seção é [DC05].

Definição 1.1. *Uma* **curva diferenciável parametrizada no** $\mathbb{R}^3$ *é uma aplicação diferenciável* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. *Escrevemos* $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, *para* $t \in I$, *o conjunto* $\alpha(I)$ *é chamado de* **traço da curva** α.

Exemplo 1.1. $\alpha(t) := (\cos(t), \sin(t), t)$, $t \in \mathbb{R}$, *é uma curva diferenciável parametrizada no* $\mathbb{R}^3$ *(*$\mathcal{C}^\infty$*) cujo traço está contido em um cilindro.*

Definição 1.2. *Sejam* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *uma curva parametrizada diferenciável e* $t_0 \in I$ *tal que* $\alpha'(t_0) \neq 0$. *Neste caso, dizemos que* $\alpha'(t_0)$ *é o* **vetor tangente a** α **no ponto** $\alpha(t_0)$ *e que* $\alpha(t_0)$ *é um* **ponto regular de** α.

Definição 1.3. *Seja* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *uma curva parametrizada diferenciável. Dizemos que* α *é* **regular** *se* $\alpha(t_0)$ *for um ponto regular de* α *para todo* $t_0 \in I$.

Note que uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ é regular se $\alpha'(t_0) \neq 0$ para todo $t_0 \in I$.

Exemplo 1.2. $\alpha(t) := (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, *é uma curva diferenciável (*$\mathcal{C}^\infty$*) que não é regular.*

Definição 1.4. *Seja* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *uma curva regular. Dizemos que* β *é uma* **reparametrização de** α *se existir um difeomorfismo* $h : J \subset \mathbb{R} \to I$ *tal que* $\beta = \alpha \circ h$.

Definição 1.5. *Seja* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *uma curva regular. O* **comprimento de arco de** α *é dado por*

$$L_\alpha(I) = L(\alpha(I)) := \int_I ||\alpha'(t)||dt.$$

Definição 1.6. *Seja* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *uma curva regular. Dizemos que* α *está* **parametrizada pelo comprimento de arco** *(***p.p.c.a.***) se*

$$L_\alpha([t_0, t_1]) = t_1 - t_0,$$

para todos $t_0, t_1 \in I$ *tais que* $t_0 < t_1$.

Proposição 1.1. *Seja* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *uma curva regular. Então* α *está p.p.c.a. se, e somente se,* $||\alpha'(t_0)||= 1$ *para todo* $t_0 \in I$.

Proposição 1.2. *Seja* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *uma curva regular. Então* α *pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco.*

Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular p.p.c.a.. Denotaremos por $\overrightarrow{t}(s) := \alpha'(s)$ o vetor tangente de α no ponto $\alpha(s)$ para todo $s \in I$. Como α está p.p.c.a., para todo $s \in I$ temos que

$$\begin{aligned}
||\alpha'(s)|| &= 1 \\
||\alpha'(s)||^2 &= 1 \\
\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle &= 1 \\
\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle + \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle &= 0 \\
\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Consequentemente, $\alpha''(s) \perp \alpha'(s)$.

Definição 1.7. *Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular p.p.c.a.. Definimos a* **curvatura de α em** *$s \in I$ como sendo o número $\kappa(s) := ||\alpha''(s)||$.*

Geometricamente, $\kappa(s)$ mede o quanto uma curva se afasta de uma reta.

Definição 1.8. *Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular p.p.c.a. tal que $\kappa(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Definimos o* **normal (principal) de α em** *$s \in I$ como sendo o vetor*

$$\overrightarrow{n}(s) := \frac{1}{\kappa(s)}\alpha''(s).$$

Note que $\overrightarrow{t}(s) \perp \overrightarrow{n}(s)$ para todo $s \in I$.

Definição 1.9. *Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular p.p.c.a. tal que $\kappa(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Definimos o* **binormal de α em** *$s \in I$ como sendo o vetor*

$$\overrightarrow{b}(s) := \overrightarrow{t}(s) \wedge \overrightarrow{n}(s).$$

Note que $\left\{\overrightarrow{t}(s), \overrightarrow{n}(s), \overrightarrow{b}(s)\right\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ centrada em $\alpha(s)$ para cada $s \in I$, ou seja, um referencial móvel sobre α, o qual chamamos de ***triedro de Frenet-Serret***[1] ou ***referencial de Frenet-Serret*** ou ***referencial TNB***.

Para todo $s \in I$ temos que

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{b}(s), \overrightarrow{b}(s) \rangle &= 1 \\
\left\langle \frac{d\overrightarrow{b}}{ds}(s), \overrightarrow{b}(s) \right\rangle &= 0,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{b}(s), \overrightarrow{t}(s) \rangle &= 0 \\
\left\langle \frac{d\overrightarrow{b}}{ds}(s), \overrightarrow{t}(s) \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{b}(s), \frac{d\overrightarrow{t}}{ds}(s) \right\rangle &= 0 \\
\left\langle \frac{d\overrightarrow{b}}{ds}(s), \overrightarrow{t}(s) \right\rangle + \kappa(s) \left\langle \overrightarrow{b}(s), \overrightarrow{n}(s) \right\rangle &= 0 \\
\left\langle \frac{d\overrightarrow{b}}{ds}(s), \overrightarrow{t}(s) \right\rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\frac{d\overrightarrow{b}}{ds}(s) \parallel \overrightarrow{n}(s),$$

para todo $s \in I$.

[1] Em homenagem aos matemáticos Jean Frédéric Frenet e Joseph Alfred Serret.

Definição 1.10. *Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular p.p.c.a. tal que $\kappa(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Definimos a* **torção de α em** $s \in I$ *como sendo o numero*

$$\tau(s) := \left\langle \frac{d\overrightarrow{b}}{ds}(s), \overrightarrow{n}(s) \right\rangle.$$

Geometricamente, $\tau(s)$ mede o quanto a curva deixa de ser plana. Além disso, note que

$$\frac{d\overrightarrow{b}}{ds}(s) = \left\langle \frac{d\overrightarrow{b}}{ds}(s), \overrightarrow{t}(s) \right\rangle \overrightarrow{t}(s) + \left\langle \frac{d\overrightarrow{b}}{ds}(s), \overrightarrow{b}(s) \right\rangle \overrightarrow{b}(s) + \left\langle \frac{d\overrightarrow{b}}{ds}(s), \overrightarrow{n}(s) \right\rangle \overrightarrow{n}(s) = \tau(s)\overrightarrow{n}(s).$$

Proposição 1.3 (Equações de Frenet-Serret)**.** *Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular p.p.c.a. tal que $\kappa(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Então, para todo $s \in I$, valem que*

$$\begin{aligned}
\frac{d\overrightarrow{t}}{ds}(s) &= \quad 0 \quad + \kappa(s)\overrightarrow{n}(s) + \quad 0, \\
\frac{d\overrightarrow{n}}{ds}(s) &= -\kappa(s)\overrightarrow{t}(s) + \quad 0 \quad - \tau(s)\overrightarrow{b}(s), \\
\frac{d\overrightarrow{b}}{ds}(s) &= \quad 0 \quad + \tau(s)\overrightarrow{n}(s) + \quad 0.
\end{aligned}$$

Ou ainda, matricialmente,

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{t}' \\ \overrightarrow{n}' \\ \overrightarrow{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{t} \\ \overrightarrow{n} \\ \overrightarrow{b} \end{pmatrix}.$$

Teorema 1.1 (Teorema fundamental da teoria local de curvas)**.** *Dadas duas funções $\kappa, \tau : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $\kappa(s) > 0$ para todo $s \in I$, então existe uma curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ cuja curvatura é $\kappa(s)$ e cuja torção é $\tau(s)$. Além disso, qualquer outra curva com a mesma propriedade é congruente a α.*

Definição 1.11. *Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma* **superfície regular** *se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $X : U \to V \cap S$ de um aberto U de $\mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que*

(1) X é um homeomorfismo diferenciável.
(2) A diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é injetiva para todo $q \in U$.

Proposição 1.4 (Mudança de parâmetros)**.** *Sejam $p \in S$ um ponto de uma superfície regular S, $X_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ e $X_2 : V \subset \mathbb{R}^2 \to S$ duas parametrizações de S tais que $p \in X_1(U) \cap X_2(V) =: W$. Então*

$$h := X_1^{-1} \circ X_2 : X_2^{-1}(W) \to X_1^{-1}(W)$$

é um difeomorfismo, isto é, h é diferenciável e tem inversa diferenciável.

Sejam $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização de uma superfície regular S e $q \in U$. Chamamos o subespaço vetorial de dimensão 2

$$T_{X(q)}S := dX_q\left(\mathbb{R}^2\right) \subset \mathbb{R}^3,$$

de ***espaço tangente a** S **em** $X(q)$*. Este espaço vetorial coincide com o conjunto dos vetores tangentes $\alpha'(0)$ de curvas parametrizadas diferenciáveis $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\to S$, com $\alpha(0) = X(q)$.

A escolha de uma parametrização X determina uma base

$$\{dX_q(u), dX_q(v)\} = \left\{ \frac{\partial X}{\partial u}(q), \frac{\partial X}{\partial v}(q) \right\} =: \{X_u(q), X_v(q)\}$$

de $T_{X(q)}S$ e um vetor normal unitário em cada ponto $p \in X(U)$ dado por

$$N(p) := \frac{X_u \wedge X_v}{||X_u \wedge X_v||}(q).$$

Nem sempre é possível estender a aplicação diferenciável $N : U \to \mathbb{R}^3$ de maneira diferenciável à superfície S.

O produto interno canônico do $\mathbb{R}^3$ induz em cada plano tangente T_pS de uma superfície regular S um produto interno, que denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. A esse produto interno, que é uma forma bilinear simétrica, corresponde uma forma quadrática $\mathrm{I}_p : T_pS \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mathrm{I}_p(w) := \langle w, w \rangle_p = ||w||_p^2 \geq 0.$$

Tal forma quadrática em T_pS é chamada de ***primeira forma fundamental de*** S ***em*** $p \in S$.

Vamos, agora, expressar a primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ associada a parametrização $X(u, v)$ em p. Como um vetor $w \in T_pS$ é o vetor tangente a uma curva parametrizada $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, com $p = \alpha(0)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_p(w) &= \mathrm{I}_p(\alpha'(0)) \\
&= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\
&= \langle X_u(u(0), v(0))u'(0) + X_v(u(0), v(0))v'(0), X_u(u(0), v(0))u'(0) + X_v(u(0), v(0))v'(0) \rangle_p \\
&= \langle X_u(q), X_u(q) \rangle_p \left(u'(0)\right)^2 + 2\langle X_u(q), X_v(q) \rangle_p u'(0)v'(0) + \langle X_v(q), X_v(q) \rangle_p \left(v'(0)\right)^2 \\
&= E(q) \left(u'(0)\right)^2 + 2F(q)u'(0)v'(0) + G(q) \left(v'(0)\right)^2,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{cases} E(q) := \langle X_u(q), X_u(q) \rangle_p, \\ F(q) := \langle X_u(q), X_v(q) \rangle_p, \\ G(q) := \langle X_v(q), X_v(q) \rangle_p \end{cases}$$

são os ***coeficientes da primeira forma fundamental na base*** $\{X_u, X_v\}$ ***de*** T_pS. Fazendo q variar numa vizinhança coordenada correspondente à parametrização X, obtemos funções E, F, G que são diferenciáveis nesta vizinhança. Quando não houver ambiguidade, os índices p e q serão omitidos.

Assim, podemos representar a primeira forma fundamental como uma matriz simétrica

$$\mathrm{I}(w) = w^\top \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} u'(0)v'(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix}.$$

Definição 1.12. *Uma superfície S é* **orientável** *se ela admite uma cobertura por vizinhanças coordenadas $X_\alpha(U_\alpha)$, em que $X_\alpha : U_\alpha \to S$, de tal modo que se $p \in X_{\alpha_1}(U_{\alpha_1}) \cap X_{\alpha_2}(U_{\alpha_2})$, com $(u, v) \in U_{\alpha_1}$ e $(\overline{u}, \overline{v}) \in U_{\alpha_2}$, então*

$$\mathrm{Jac}((\overline{u}, \overline{v}) \mapsto (u, v)) = \frac{\partial(\overline{u}, \overline{v})}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial u} & \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial u} & \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial v} \end{pmatrix} > 0.$$

A escolha de uma tal família de vizinhanças coordenadas que cobrem S é chamada de **orientação** *de S e S, neste caso, diz-se* **orientada**. *Se uma tal escolha não é possível, diz-se que S é* **não-orientável**. *Se S é orientada, uma parametrização local X é compatível com a orientação de S se, unindo X à família de parametrizações dada pela orientação, obtém-se ainda uma (logo, a mesma) orientação.*

Proposição 1.5. *Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é orientável se, e somente se, existe um campo diferenciável $N : S \to \mathbb{R}^3$ de vetores normais em S, isto é, $N(p) \perp T_pS$ para todo $p \in S$.*

1.2. **A faixa de Möbius.** A faixa de Möbius[2] é obtida tomando-se um retângulo e identificando-se dois lados opostos depois de uma rotação de 180º, como ilustra a Figura 1.

[2]Em homenagem ao matemático August Ferdinand Möbius.

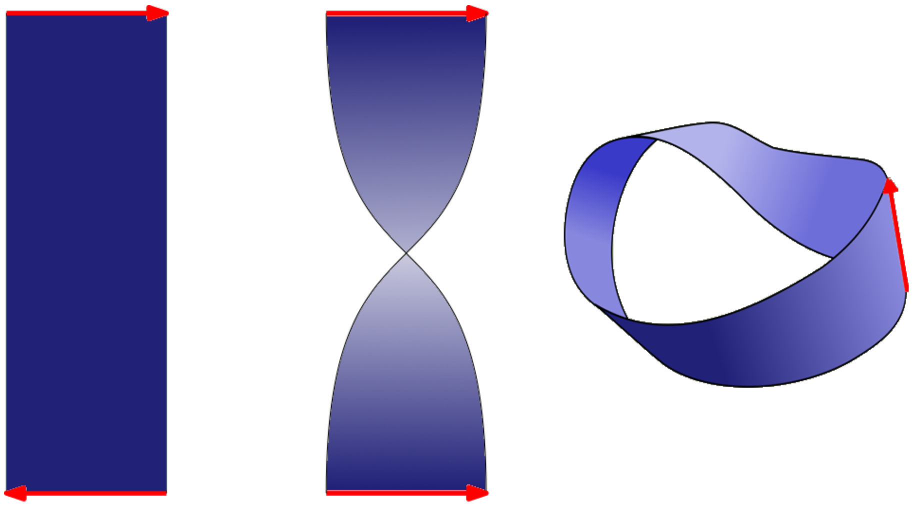

FIGURA 1. Construção de uma faixa de Möbius.

A faixa de Möbius, além de suas inúmeras aplicações artísticas, como em logotipos de centros de estudo de matemática em todo o mundo, também encontra frequentemente uso na engenharia, especialmente na produção de correias que desgastam "ambos" os lados igualmente.

A seguir, apresentaremos uma parametrização da faixa de Möbius e calcularemos os coeficientes de sua primeira forma fundamental.

1.2.1. *Parametrização.* Considere a faixa de Möbius, denotada por $\mathbf{M}$, ao redor do eixo z com raio 2 e largura 1. Sejam $(u,v) \in]0, 2\pi[\times [-1,1]$ e note que para $p = (x,y,z) \in \mathbf{M}$ temos que

$$\begin{cases} x(u,v) &= \left(2 + v\cos\left(\dfrac{u}{2}\right)\right)\cos(u) \\ \\ y(u,v) &= \left(2 + v\cos\left(\dfrac{u}{2}\right)\right)\sin(u) \\ \\ z(u,v) &= v\sin\left(\dfrac{u}{2}\right). \end{cases}$$

A Figura 2 auxilia a entender as equações acima. Note que cada ponto do segmento que rotacionamos identificamos com um valor de $v \in [-1,1]$ e esta é uma variável da parametrização, que segue a mesma ideia do Toro.

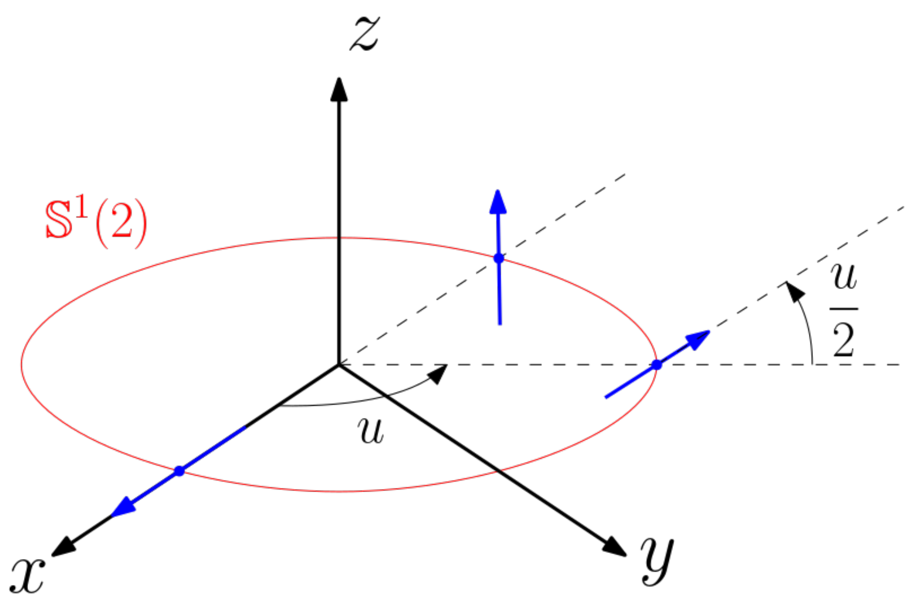

FIGURA 2. Facilitador para a parametrização da faixa de Möbius.

Portanto, um sistema de coordenadas locais para a faixa de Möbius é dado por

$$\begin{aligned} X :]0, 2\pi[\times[-1, 1] \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbf{M} \subset \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) . \end{aligned}$$

A vizinhança coordenada correspondente omite os pontos $u = 0$, como ilustra a Figura 3.

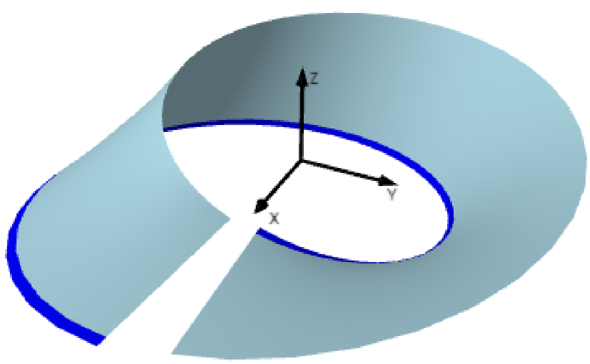

FIGURA 3. Plot de X.

Logo, tomando-se $(\overline{u}, \overline{v}) \in\,]0, 2\pi[\, \times [-1, 1]$ de modo que

$$\begin{cases} x(\overline{u}, \overline{v}) &= \left(2 + \overline{v}\cos\left(\dfrac{\overline{u}}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)\cos\left(\overline{u} + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ y(\overline{u}, \overline{v}) &= \left(2 + \overline{v}\cos\left(\dfrac{\overline{u}}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)\sin\left(\overline{u} + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ z(\overline{u}, \overline{v}) &= \overline{v}\sin\left(\dfrac{\overline{u}}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

obtemos outro sistema de coordenadas locais para a faixa de Möbius é dado por

$$\begin{aligned} \overline{X} :]0, 2\pi[\times[-1, 1] \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbf{M} \subset \mathbb{R}^3 \\ (\overline{u}, \overline{v}) &\mapsto (x(\overline{u}, \overline{v}), y(\overline{u}, \overline{v}), z(\overline{u}, \overline{v})) . \end{aligned}$$

A vizinhança coordenada correspondente omite os pontos no intervalo aberto $u = 0$, como ilustra a Figura 4.

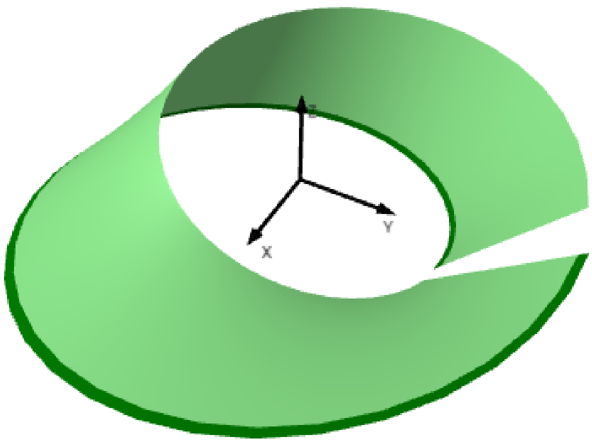

FIGURA 4. Plot de $\overline{X}$.

Essas duas vizinhanças coordenadas formam uma cobertura para a faixa de Möbius, como ilustra a Figura 5.

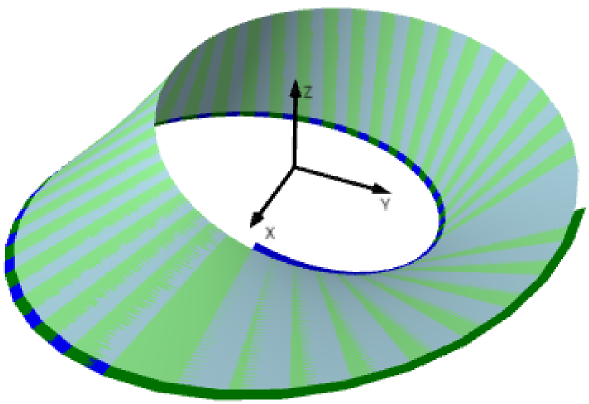

FIGURA 5. Plot de X e $\overline{X}$ juntos.

Assim, temos que a faixa de Möbius é uma superfície regular. De fato, a intersecção dessas duas vizinhanças coordenadas é constituída por duas componentes conexas

$$W_1 := \left\{X(u,v) : 0 < u < \frac{\pi}{2}, -1 \leq v \leq 1\right\} \text{ e } W_2 := \left\{X(u,v) : \frac{\pi}{2} < u < 2\pi, -1 \leq v \leq 1\right\}.$$

A mudança de coordenada é dada por (a Figura 5 ilustra a mudança de orientação de v em W_1 pela sobreposição ou não das partes mais escuras)

$$\begin{cases} \overline{u} & = u + \dfrac{\pi}{2} \\ \overline{v} & = -v \end{cases} \text{ em } W_1 \text{ e } \begin{cases} \overline{u} & = u + \dfrac{\pi}{2} \\ \overline{v} & = v \end{cases} \text{ em } W_2.$$

Donde temos que

$$\mathrm{Jac}((\overline{u},\overline{v}) \mapsto (u,v)) = \frac{\partial(\overline{u},\overline{v})}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial u} & \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial u} & \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial v} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

em W_1, e

$$\mathrm{Jac}((\overline{u},\overline{v}) \mapsto (u,v)) = \frac{\partial(\overline{u},\overline{v})}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial u} & \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial u} & \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial v} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

em W_2.

1.2.2. *Primeira forma fundamental.* Para obtermos a primeira forma fundamental basta calcularmos as expressões de E, F, G da métrica pelas expressões em coordenadas obtidas anteriormente.

Derivamos $x(u,v)$ com relação a u

$$\begin{aligned}x_u(u,v) &= \frac{\partial}{\partial u}\left(2+v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\cos(u)+\left(2+v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\frac{\partial}{\partial u}\left(\cos(u)\right)\\ &= -\frac{v}{2}\sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos(u)-\left(2+v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\sin(u),\end{aligned}$$

e com relação a v

$$\begin{aligned}x_v(u,v) &= \frac{\partial}{\partial v}\left(2+v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\cos(u)+\left(2+v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\frac{\partial}{\partial v}\left(\cos(u)\right)\\ &= \cos\left(\frac{u}{2}\right)\cos(u).\end{aligned}$$

Derivamos $y(u,v)$ com relação a u

$$\begin{aligned}y_u(u,v) &= \frac{\partial}{\partial u}\left(2+v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\sin(u)+\left(2+v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\frac{\partial}{\partial u}\left(\sin(u)\right)\\ &= -\frac{v}{2}\sin\left(\frac{u}{2}\right)\sin(u)+\left(2+v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\cos(u),\end{aligned}$$

e com relação a v

$$\begin{aligned}y_v(u,v) &= \frac{\partial}{\partial v}\left(2+v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\sin(u)+\left(2+v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\frac{\partial}{\partial v}\left(\sin(u)\right)\\ &= \cos\left(\frac{u}{2}\right)\sin(u).\end{aligned}$$

Derivamos $z(u,v)$ com relação a u

$$z_u(u,v)=\frac{\partial}{\partial u}\left(v\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right)=\frac{v}{2}\cos\left(\frac{u}{2}\right),$$

e com relação a v

$$z_v(u,v)=\frac{\partial}{\partial v}\left(v\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right)=\sin\left(\frac{u}{2}\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}E &= \langle X_u, X_u\rangle\\ &= \langle (x_u,y_u,z_u),(x_u,y_u,z_u)\rangle\\ &= x_u^2+y_u^2+z_u^2\\ &= \left(-\frac{v}{2}\sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos(u)-\left(2+v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\sin(u)\right)^2\\ &\quad+\left(-\frac{v}{2}\sin\left(\frac{u}{2}\right)\sin(u)+\left(2+v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\cos(u)\right)^2\\ &\quad+\left(\frac{v}{2}\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)^2\\ &= \frac{v^2}{4}\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)\cos^2(u)+\left(2+v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)^2\sin^2(u)+2\frac{v}{2}\sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos(u)\left(2+v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\sin(u)\\ &\quad+\frac{v^2}{4}\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)\sin^2(u)+\left(2+v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)^2\cos^2(u)-2\frac{v}{2}\sin\left(\frac{u}{2}\right)\sin(u)\left(2+v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\cos(u)\\ &\quad+\frac{v^2}{4}\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)\\ &= \frac{v^2}{4}\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)+\left(2+v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)^2+\frac{v^2}{4}\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)\\ &= \frac{v^2}{4}+4+v^2\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)+4v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\\ &= v^2\left(\frac{1}{4}+\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)\right)+4v\cos\left(\frac{u}{2}\right)+4.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F &= \langle X_u, X_v \rangle \\
&= \langle (x_u, y_u, z_u), (x_v, y_v, z_v) \rangle \\
&= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\
&= \left(-\frac{v}{2}\sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos(u) - \left(2 + v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\sin(u)\right)\left(\cos\left(\frac{u}{2}\right)\cos(u)\right) \\
&\quad + \left(-\frac{v}{2}\sin\left(\frac{u}{2}\right)\sin(u) + \left(2 + v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\cos(u)\right)\left(\cos\left(\frac{u}{2}\right)\sin(u)\right) \\
&\quad + \left(\frac{v}{2}\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\left(\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right) \\
&= -\frac{v}{2}\sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos\left(\frac{u}{2}\right)\cos^2(u) - \left(2 + v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\sin(u)\cos\left(\frac{u}{2}\right)\cos(u) \\
&\quad - \frac{v}{2}\sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos\left(\frac{u}{2}\right)\sin^2(u) + \left(2 + v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)\cos(u)\cos\left(\frac{u}{2}\right)\sin(u) \\
&\quad + \frac{v}{2}\sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos\left(\frac{u}{2}\right) \\
&= -\frac{v}{2}\sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos\left(\frac{u}{2}\right) + \frac{v}{2}\sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos\left(\frac{u}{2}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G &= \langle X_v, X_v \rangle \\
&= \langle (x_v, y_v, z_v), (x_v, y_v, z_v) \rangle \\
&= x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \\
&= \left(\cos\left(\frac{u}{2}\right)\cos(u)\right)^2 + \left(\cos\left(\frac{u}{2}\right)\sin(u)\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right)^2 \\
&= \cos^2\left(\frac{u}{2}\right)\cos^2(u) + \cos^2\left(\frac{u}{2}\right)\sin^2(u) + \sin^2\left(\frac{u}{2}\right) \\
&= \cos^2\left(\frac{u}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{u}{2}\right) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Donde obtemos a primeira forma fundamental

$$
\mathrm{I} = \begin{pmatrix} v^2\left(\frac{1}{4} + \cos^2\left(\frac{u}{2}\right)\right) + 4v\cos\left(\frac{u}{2}\right) + 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

1.3. **Um panorama de geometria diferencial II através do SageMath.** Próximos passos:

- Orientabilidade.
- Segunda forma fundamental e consequências geométricas.
- Aplicação normal de Gauss.
- Operador forma, curvatura Gaussiana, média e total.
- Derivada covariante.
- Símbolos de Christoffel[3].
- Geodésicas e curvatura geodésica.
- Equações de compatibilidade.
- Teorema egrégio de Gauss.
- Teorema de Bonnet.
- Superfícies mínimas.
- Teorema de Gauss-Bonnet e aplicações.

[3]Em homenagem ao matemático e físico Elwin Bruno Christoffel.

Apresentar Notebook do SageManifolds com exemplos de cálculos simples (métricas, curvaturas, símbolos de Christoffel, plotagens,...).

2. Aula do dia 20/09/2023

Objetivos da aula:
- Orientabilidade (aproximadamente 20 minutos)
- O gradiente (aproximadamente 10 minutos)
- A segunda forma fundamental e algumas consequências geométricas (aproximadamente 30 minutos)
- A curvatura normal (aproximadamente 10 minutos)
- Pausa de 10 minutos
- Exemplos (aproximadamente 30 minutos)
- Acabar 10 minutos antes

Tempo de aula (expectativa): 120 minutos.

2.1. **Orientabilidade.** A seguir apresentaremos alguns exemplos de superfícies orientáveis:

Exemplo 2.1. *Superfícies que podem ser cobertas por uma única vizinhança coordenada são trivialmente orientáveis. Por exemplo, superfícies dadas como gráficos de uma função diferenciável.*

Exemplo 2.2 (Esfera unitária ($\mathbb{S}^2$))**.** *Considere $X_1(u,v)$ a projeção estereográfica pelo polo norte, $X_2(u,v)$ a projeção estereográfica pelo polo sul e*

$$W := X_1(\mathbb{R}^2) \cap X_2(\mathbb{R}^2) = \mathbb{S}^2 \setminus \{N := (0,0,2), S := (0,0,0)\}.$$

Note que W é um conjunto conexo e fixe $p \in W$. A Figura 6 ilustra a mudança de parâmetros entre as duas parametrizações da esfera.

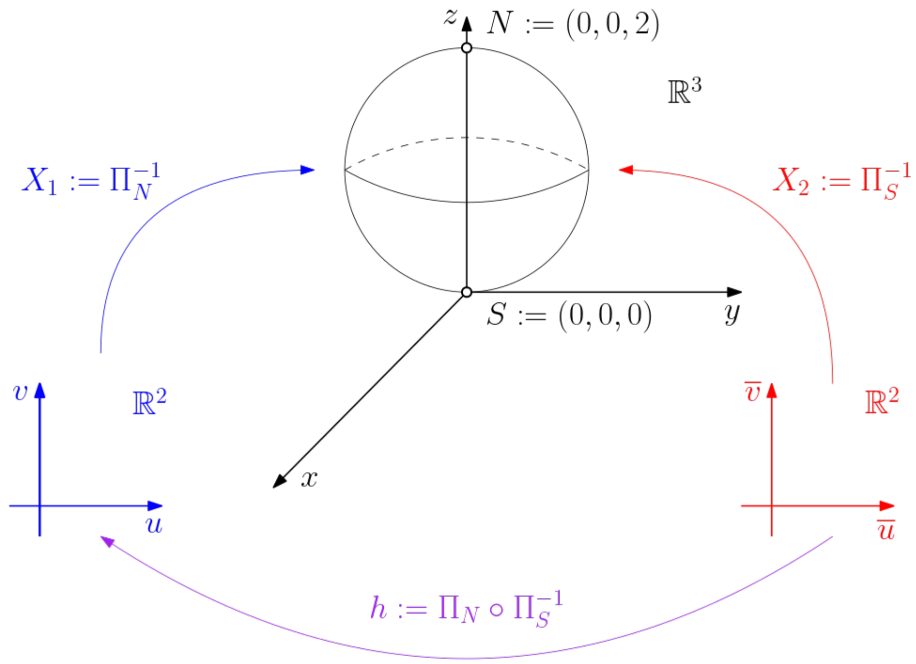

Figura 6. O mapa de transição para as parametrizações estereográficas.

Onde

$$\Pi_N^{-1}(u,v) := \left(\frac{4u}{u^2+v^2+4}, \frac{4v}{u^2+v^2+4}, \frac{2(u^2+v^2)}{u^2+v^2+4}\right),$$

e

$$\Pi_S^{-1}(\overline{u},\overline{v}) := \left(\frac{4\overline{v}}{\overline{u}^2+\overline{v}^2+4}, \frac{4\overline{u}}{\overline{u}^2+\overline{v}^2+4}, \frac{8}{\overline{u}^2+\overline{v}^2+4}\right).$$

Consequentemente,

$$\Pi_N(x,y,z) = \left(\frac{2x}{2-z}, \frac{2y}{2-z}\right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(u,v) = h(\overline{u},\overline{v}) &= \left(\Pi_N \circ \Pi_S^{-1}\right)(\overline{u},\overline{v}) \\
&= \Pi_N\left(\frac{4\overline{v}}{\overline{u}^2+\overline{v}^2+4}, \frac{4\overline{u}}{\overline{u}^2+\overline{v}^2+4}, \frac{8}{\overline{u}^2+\overline{v}^2+4}\right) \\
&= \left(\frac{\dfrac{8\overline{v}}{\overline{u}^2+\overline{v}^2+4}}{2-\dfrac{8}{\overline{u}^2+\overline{v}^2+4}}, \frac{\dfrac{8\overline{u}}{\overline{u}^2+\overline{v}^2+4}}{2-\dfrac{8}{\overline{u}^2+\overline{v}^2+4}}\right) \\
&= \left(\frac{8\overline{v}}{2(\overline{u}^2+\overline{v}^2)}, \frac{8\overline{u}}{2(\overline{u}^2+\overline{v}^2)}\right) \\
&= \left(\frac{4\overline{v}}{\overline{u}^2+\overline{v}^2}, \frac{4\overline{u}}{\overline{u}^2+\overline{v}^2}\right).
\end{aligned}$$

Donde obtemos:

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{u}} = -\frac{8\overline{vu}}{(\overline{u}^2+\overline{v}^2)^2}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{v}} = \frac{4(\overline{u}^2+\overline{v}^2)-4\overline{v}2\overline{v}}{(\overline{u}^2+\overline{v}^2)^2} = \frac{4(\overline{u}^2-\overline{v}^2)}{(\overline{u}^2+\overline{v}^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \overline{v}} = -\frac{8\overline{uv}}{(\overline{u}^2+\overline{v}^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \overline{u}} = \frac{4(\overline{u}^2+\overline{v}^2)-4\overline{u}2\overline{u}}{(\overline{u}^2+\overline{v}^2)^2} = \frac{4(\overline{v}^2-\overline{u}^2)}{(\overline{u}^2+\overline{v}^2)^2} = -\frac{4(\overline{u}^2-\overline{v}^2)}{(\overline{u}^2+\overline{v}^2)^2}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(u,v)}{\partial(\overline{u},\overline{v})} &= \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \overline{u}} & \dfrac{\partial u}{\partial \overline{v}} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial \overline{u}} & \dfrac{\partial v}{\partial \overline{v}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(\overline{u}^2+\overline{v}^2)^4}\det\begin{pmatrix} -8\overline{uv} & 4(\overline{u}^2-\overline{v}^2) \\ -4(\overline{u}^2-\overline{v}^2) & -8\overline{uv} \end{pmatrix} \\
&= \frac{64\overline{u}^2\overline{v}^2+16(\overline{u}^2-\overline{v}^2)^2}{(\overline{u}^2+\overline{v}^2)^4} \\
&> 0
\end{aligned}$$

Como a função de transição $h(\overline{u},\overline{v})$ é um difeomorfismo temos que $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\overline{u},\overline{v})}$ é diferente de zero em W. Além disso, como o Jacobiano $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\overline{u},\overline{v})}$ é uma função contínua, $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\overline{u},\overline{v})}(p) > 0$ e W é conexo, segue do Teorema de Bolzano que $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\overline{u},\overline{v})} > 0$ em W. Portanto, S é orientável. De modo análogo, se uma superfície pode ser coberta por duas vizinhanças coordenadas cuja intersecção é conexa, então a superfície é orientável.

Proposição 2.1. *Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é orientável se, e somente se, existe um campo diferenciável $N : S \to \mathbb{R}^3$ de vetores normais em S, isto é, $N(p) \perp T_pS$ para todo $p \in S$.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) : Como S é orientável, podemos cobri-la com uma família de vizinhanças coordenadas de tal modo que, na vizinhança de duas quaisquer delas, a mudança de coordenadas tenha Jacobiano positivo.

Nos pontos $p = X(u,v)$ de cada vizinhança coordenada, definimos:

$$N(p) := N(u,v) = \frac{X_u \wedge X_v}{||X_u \wedge X_v||}(p).$$

Note que $N(p)$ está bem definido. De fato, sejam $X : U \to S$ e $\overline{X} : \overline{U} \to S$ duas parametrizações tais que $X(U) \cap \overline{X}(\overline{U}) =: W \neq \emptyset$ e $h : U \to \overline{U}$ tal que $h(u,v) = (\overline{u}, \overline{v})$. Assim, $X = \overline{X} \circ h$ e, consequentemente,

$$X_u = \frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial(\overline{X} \circ h)}{\partial u} = \frac{\partial \overline{X}}{\partial \overline{u}}\frac{\partial \overline{u}}{\partial u} + \frac{\partial \overline{X}}{\partial \overline{v}}\frac{\partial \overline{v}}{\partial u} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial u}\overline{X}_{\overline{u}} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial u}\overline{X}_{\overline{v}}.$$

e

$$X_v = \frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial(\overline{X} \circ h)}{\partial v} = \frac{\partial \overline{X}}{\partial \overline{u}}\frac{\partial \overline{u}}{\partial v} + \frac{\partial \overline{X}}{\partial \overline{v}}\frac{\partial \overline{v}}{\partial v} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial v}\overline{X}_{\overline{u}} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial v}\overline{X}_{\overline{v}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
X_u \wedge X_v &= \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial u}\overline{X}_{\overline{u}} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial u}\overline{X}_{\overline{v}}\right) \wedge \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial v}\overline{X}_{\overline{u}} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial v}\overline{X}_{\overline{v}}\right) \\
&= \frac{\partial \overline{u}}{\partial u}\frac{\partial \overline{v}}{\partial v}\overline{X}_{\overline{u}} \wedge \overline{X}_{\overline{v}} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial v}\overline{X}_{\overline{v}} \wedge \overline{X}_{\overline{u}} \\
&= \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial u}\frac{\partial \overline{v}}{\partial v} - \frac{\partial \overline{v}}{\partial u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial v}\right)\overline{X}_{\overline{u}} \wedge \overline{X}_{\overline{v}} \\
&= \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial u} & \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial u} & \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial v} \end{pmatrix} \overline{X}_{\overline{u}} \wedge \overline{X}_{\overline{v}} \\
&= \frac{\partial(\overline{u},\overline{v})}{\partial(u,v)}\overline{X}_{\overline{u}} \wedge \overline{X}_{\overline{v}}.
\end{aligned}$$

Portanto, para $p \in W$ arbitrário, temos que os vetores $N(u,v)$ e $N(\overline{u},\overline{v})$ coincidem, pois

$$\begin{aligned}
N(u,v) &= \frac{X_u \wedge X_v}{||X_u \wedge X_v||} \\
&= \frac{\mathrm{Jac}(h)\overline{X}_{\overline{u}} \wedge \overline{X}_{\overline{v}}}{||\mathrm{Jac}(h)\overline{X}_{\overline{u}} \wedge \overline{X}_{\overline{v}}||} \\
&= \frac{\frac{\partial(\overline{u},\overline{v})}{\partial(u,v)}}{\left|\dfrac{\partial(\overline{u},\overline{v})}{\partial(u,v)}\right|}\frac{\overline{X}_{\overline{u}} \wedge \overline{X}_{\overline{v}}}{||\overline{X}_{\overline{u}} \wedge \overline{X}_{\overline{v}}||} \\
&= \mathrm{sign}\left(\frac{\partial(\overline{u},\overline{v})}{\partial(u,v)}\right) N(\overline{u},\overline{v}) \\
&= N(\overline{u},\overline{v}).
\end{aligned}$$

Além disso, as coordenadas de $N(u,v)$ em $\mathbb{R}^3$ são funções diferenciáveis de (u,v) e, portanto, a aplicação $N : S \to \mathbb{R}^3$ é diferenciável. Por construção $N(p) \perp T_pS$ para todo $p \in S$.

($\Longleftarrow$) : Reciprocamente, seja $N : S \to \mathbb{R}^3$ um campo diferenciável unitário de vetores normais em S, e considere uma família de vizinhanças coordenadas cobrindo S. Para os pontos $p \in X(u,v)$ de cada vizinhança coordenada $X(U)$, $U \subset \mathbb{R}^2$, é possível, pela continuidade de N e, se necessário, intercambiar u e v, fazer com que

$$N(u,v) = \frac{X_u \wedge X_v}{||X_u \wedge X_v||}.$$

De fato, como $||N(p)||= 1$, $\left|\left|\frac{X_u\wedge X_v}{||X_u\wedge X_v||}\right|\right| = 1$, $N(p)\perp T_pS$ e $\frac{X_u\wedge X_v}{||X_u\wedge X_v||}\perp T_pS$, temos que

$$f(p) := \left\langle N(p), \frac{X_u\wedge X_v}{||X_u\wedge X_v||}\right\rangle = \pm 1.$$

Como $f(p)$ é uma função contínua em $X(U)$ e $X(U)$ é um conjunto conexo, então o sinal de f é constante em $X(U)$. Se $f(p) = -1$, podemos intercambiar o u, v na parametrização, e então $f(p) = 1$.

Procedendo desse modo com todas as vizinhanças coordenadas, teremos que na intersecção de duas quaisquer delas, digamos $X(u, v)$ e $\overline{X}(\overline{u}, \overline{v})$ o Jacobiano $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\overline{u},\overline{v})}$ é positivo.

De fato, suponha por absurdo que $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\overline{u},\overline{v})} < 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
N(u, v) &= \frac{X_u\wedge X_v}{||X_u\wedge X_v||}\\
&= \frac{\frac{\partial(u,v)}{\partial(\overline{u},\overline{v})}\overline{X}_{\overline{u}}\wedge\overline{X}_{\overline{v}}}{\left|\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(\overline{u},\overline{v})}\overline{X}_{\overline{u}}\wedge\overline{X}_{\overline{v}}\right|\right|}\\
&= \frac{\frac{\partial(u,v)}{\partial(\overline{u},\overline{v})}}{\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(\overline{u},\overline{v})}\right|}\frac{\overline{X}_{\overline{u}}\wedge\overline{X}_{\overline{v}}}{||\overline{X}_{\overline{u}}\wedge\overline{X}_{\overline{v}}||}\\
&= \operatorname{sign}\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(\overline{u},\overline{v})}\right)N(\overline{u},\overline{v})\\
&= -N(\overline{u},\overline{v}).
\end{aligned}$$

Absurdo! Portanto, a dada família de vizinhanças coordenadas, com eventuais intercâmbios de u, v, torna S orientável. □

Exemplo 2.3 (Esfera unitária ($\mathbb{S}^2$))**.** *Note que a aplicação $N(x, y, z) := (x, y, z)$ quando restrita aos pontos de $\mathbb{S}^2$ é uma campo normal diferenciável (prova usando coordenadas). Além disso, sua diferencial em $p\in\mathbb{S}^2$ aplicada ao vetor $v\in T_p\mathbb{S}^2$ é dada por*

$$dN_p(v) = v.$$

2.2. **O gradiente.**

Definição 2.1. *Seja $S\subset\mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $f : S\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável. Definimos o* **gradiente de f em** *$p\in S$ como o campo de vetores $\nabla f : S\to\mathbb{R}^3$ tal que*

$$\langle\nabla f(p), v\rangle = df_p(v),$$

para todo $v\in T_pS$.

Lema 2.1. *Seja $f : \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável (pelo menos $\mathcal{C}^2$) e $a\in\mathbb{R}$ um valor regular de f. Então $S := f^{-1}(a)$ é uma superfície regular orientável.*

Rascunho da Demonstração. Use o Teorema da função inversa para mostrar que S é uma superfície regular. Para mostrar que S é orientável mostre que $N(p) := \frac{\nabla f(p)}{||\nabla f(p)||}$ é um campo normal unitário em S e, pela 2.1 temos que S é orientável. □

FIM DO CAPÍTULO 2 DO LIVRO [DC05].

2.3. **A segunda forma fundamental.**

Sejam $S = X(U)$, $U\subset\mathbb{R}^2$, uma superfície parametrizada regular, $p = X(u, v)$, $v\in T_pS$ e $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva em S tal que $\alpha(t_0) = p$ e $\alpha'(t_0) = v$.

Primeiramente, note que

$$v = \alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{dX(u(t),v(t))}{dt}\\
&= \frac{\partial X}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial X}{\partial v}\frac{dv}{dt}\\
&= u'(t)X_u(u(t),v(t)) + v'(t)X_v(u(t),v(t)),
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\alpha''(t) &= \frac{d^2\alpha}{dt^2}\\
&= \frac{d}{dt}\left(u'(t)X_u(u(t),v(t)) + v'(t)X_v(u(t),v(t))\right)\\
&= u''(t)X_u(u(t),v(t)) + u'(t)\frac{dX_u(u(t),v(t))}{dt} + v''(t)X_v(u(t),v(t)) + v'(t)\frac{dX_v(u(t),v(t))}{dt}\\
&= u''(t)X_u(u(t),v(t)) + u'(t)\left(\frac{dX_u}{du}\frac{du}{dt} + \frac{dX_u}{dv}\frac{dv}{dt}\right) + v''(t)X_v(u(t),v(t)) + v'(t)\left(\frac{dX_v}{du}\frac{du}{dt} + \frac{dX_v}{dv}\frac{dv}{dt}\right)\\
&= u''(t)X_u(u(t),v(t)) + (u'(t))^2X_{uu}(u(t),v(t)) + u'(t)v'(t)X_{uv}(u(t),v(t))\\
&\qquad + v''(t)X_v(u(t),v(t)) + v'(t)u'(t)X_{vu}(u(t),v(t)) + (v'(t))^2X_{vv}(u(t),v(t))\\
&= u''(t)X_u(u(t),v(t)) + v''(t)X_v(u(t),v(t))\\
&\qquad + (u'(t))^2X_{uu}(u(t),v(t)) + 2u'(t)v'(t)X_{uv}(u(t),v(t)) + (v'(t))^2X_{vv}(u(t),v(t)).
\end{aligned}
$$

No ponto $p = \alpha(t_0)$ temos que $\{X_u(u_0,v_0), X_v(u_0,v_0), N(u_0,v_0)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$, onde $(u_0,v_0) = (u(t_0),v(t_0))$. Calculemos a componente de $\alpha''(t_0)$ na direção $N(u_0,v_0)$.

Observação 2.1. *As componentes de $\alpha''(t_0)$ nas direções $X_u(u_0,v_0)$ e $X_v(u_0,v_0)$ serão calculadas posteriormente e levarão aos símbolos de Christoffel.*

$$
\begin{aligned}
\langle \alpha''(t_0), N(u_0,v_0)\rangle &= u''(t_0)\langle X_u, N\rangle + v''(t_0)\langle X_v, N\rangle\\
&\qquad + (u'(t_0))^2\langle X_{uu}, N\rangle + 2u'(t_0)v'(t_0)\langle X_{uv}, N\rangle + (v'(t_0))^2\langle X_{vv}, N\rangle\\
&= (u'(t_0))^2\langle X_{uu}, N\rangle + 2u'(t_0)v'(t_0)\langle X_{uv}, N\rangle + (v'(t_0))^2\langle X_{vv}, N\rangle\\
&= \langle v, X_u\rangle^2\langle X_{uu}, N\rangle + 2\langle v, X_u\rangle\langle v, X_v\rangle\langle X_{uv}, N\rangle + \langle v, X_v\rangle^2\langle X_{vv}, N\rangle.
\end{aligned}
$$

Observação 2.2 (Exercício)**.** *O número $\langle \alpha''(t_0), N(u_0,v_0)\rangle$ não depende da parametrização da curva $\alpha(t)$.*

Definição 2.2. *Seja $S = X(U)$, $U \subset \mathbb{R}^3$, uma superfície parametrizada regular e $p \in S$. Definimos a* **segunda forma fundamental de** S **em** p *como sendo a forma quadrática $\mathrm{II}_p : T_pS \to \mathbb{R}$ dada por*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{II}_p(v) &:= a^2\langle X_{uu}, N\rangle + 2ab\langle X_{uv}, N\rangle + b^2\langle X_{vv}, N\rangle\\
&= a^2e(u,v) + 2abf(u,v) + b^2g(u,v).
\end{aligned}
$$

onde $v = aX_u + bX_v$ e

$$
\begin{cases}
e(u,v) & := \langle X_{uu}(u,v), N(u,v)\rangle\\
f(u,v) & := \langle X_{uv}(u,v), N(u,v)\rangle\\
g(u,v) & := \langle X_{vv}(u,v), N(u,v)\rangle
\end{cases}.
$$

Chamamos as funções $e, f, g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de **coeficientes da segunda forma fundamental de** S.

2.3.1. *Consequências geométricas.* Sejam $S = X(U)$, $U \subset \mathbb{R}^2$, uma superfície parametrizada regular, $p = X(u,v)$, $v \in T_pS$ e $\alpha(s) = X(u(s),v(s))$ uma curva p.p.c.a. em S tal que $\alpha(s_0) = p$ e $\alpha'(s_0) = v$.

Considere $\left\{\overrightarrow{t}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{b}\right\}$ o triedro de Frenet-Serret de α. Neste caso,

$$
\langle \alpha''(s), N(\alpha(s))\rangle = \langle \kappa(s)\overrightarrow{n}(s), N(\alpha(s))\rangle = \kappa(s)\langle \overrightarrow{n}(s), N(\alpha(s))\rangle = \kappa(s)\cos(\theta(s)),
$$

onde $\theta(s) := \angle(\overrightarrow{n}(s), N(\alpha(s)))$.

Suponha que o traço de α seja uma seção normal de S em p, isto é, $\alpha = \Pi \cap S$, em que Π é o plano nas direções $\alpha'(s)$ e $N(\alpha(s))$ em p.

Como α é uma curva plana então Π é o plano osculador que passa por p e cujos vetores vetores diretores são $\alpha'(s)$ e $\overrightarrow{n}(s)$. Mas como $\alpha'(s) \perp N(\alpha(s))$ e $\alpha'(s) \perp \overrightarrow{n}(s)$ temos que $\overrightarrow{n}(s) = \pm N(\alpha(s))$ e daí

$$\langle \alpha''(s), N(\alpha(s))\rangle = \pm\kappa(s).$$

2.4. **A curvatura normal.**

Definição 2.3. *Sejam $S = X(U)$, $U \subset \mathbb{R}^2$, uma superfície parametrizada regular, $p \in S$ e $v \in T_pS$. Definimos a* **curvatura normal de S em p na direção** *v por*

$$\kappa_{\mathrm{n},p}(v) := \frac{\mathrm{II}_p(v)}{\mathrm{I}_p(v)}.$$

Note que a curvatura normal de uma superfície S em um ponto p depende somente da direção de v. De fato, para $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\kappa_{\mathrm{n},p}(\lambda v) &= \frac{\mathrm{II}_p(\lambda v)}{\mathrm{I}_p(\lambda v)}\\
&= \frac{(\lambda a)^2 e + 2(\lambda a)(\lambda b) f + (\lambda b)^2 g}{(\lambda a)^2 E + 2(\lambda a)(\lambda b) F + (\lambda b)^2 G}\\
&= \frac{\mathrm{II}_p(v)}{\mathrm{I}_p(v)}\\
&= \kappa_{\mathrm{n},p}(v).
\end{aligned}$$

2.5. **Exemplos.**

Agora faremos alguns exemplos de como calcular a segunda forma fundamental e a curvatura normal.

Exemplo 2.4 (Esfera)**.** *Valos calcular a primeira e a segunda formas fundamentais de uma esfera em um ponto da vizinhança coordenada pela parametrização*

$$X(u, v) = (a\cos(u)\sin(v), a\sin(u)\sin(v), a\cos(v)),$$

com $a > 0$. Primeiro observe que

$$\begin{aligned}
X_u(u, v) &= (-a\sin(u)\sin(v), a\cos(u)\sin(v), 0),\\
X_v(u, v) &= (a\cos(u)\cos(v), a\sin(u)\cos(v), -a\sin(v)),\\
X_{uu}(u, v) &= (-a\cos(u)\sin(v), -a\sin(u)\sin(v), 0),\\
X_{uv}(u, v) &= (-a\sin(u)\cos(v), a\cos(u)\cos(v), 0),\\
X_{vv}(u, v) &= (-a\cos(u)\sin(v), -a\sin(u)\sin(v), -a\cos(v)).
\end{aligned}$$

Agora calculemos o vetor normal em p:

$$\begin{aligned}
N(p) &= \frac{X_u \wedge X_v}{||X_u \wedge X_v||}\\
&= \frac{\begin{pmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k}\\ -a\sin(u)\sin(v) & a\cos(u)\sin(v) & 0\\ a\cos(u)\cos(v) & a\sin(u)\cos(v) & -a\sin(v)\end{pmatrix}}{||X_u \wedge X_v||}\\
&= \frac{(-a\sin(v)a\cos(u)\sin(v))\,\widehat{i} + (-a\sin(v)a\sin(u)\sin(v))\,\widehat{j} + (-a\sin(u)\cos(v)a\sin(u)\sin(v) - a\cos(u)\sin(v)a\cos(u)\cos(v))\,\widehat{k}}{||X_u \wedge X_v||}\\
&= \frac{\left(-a^2\sin^2(v)\cos(u)\right)\widehat{i} + \left(-a^2\sin^2(v)\sin(u)\right)\widehat{j} + \left(-a^2\sin^2(u)\cos(v)\sin(v) - a^2\cos^2(u)\sin(v)\cos(v)\right)\widehat{k}}{||X_u \wedge X_v||}\\
&= \frac{\left(-a^2\sin^2(v)\cos(u)\right)\widehat{i} + \left(-a^2\sin^2(v)\sin(u)\right)\widehat{j} + \left(-a^2\cos(v)\sin(v)(\sin^2(v) + \cos^2(v))\right)\widehat{k}}{||X_u \wedge X_v||}\\
&= \frac{\left(-a^2\sin^2(v)\cos(u)\right)\widehat{i} + \left(-a^2\sin^2(v)\sin(u)\right)\widehat{j} + \left(-a^2\cos(v)\sin(v)\right)\widehat{k}}{||X_u \wedge X_v||}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\left(-a^2\sin^2(v)\cos(u)\right)\widehat{\imath} + \left(-a^2\sin^2(v)\sin(u)\right)\widehat{\jmath} + \left(-a^2\cos(v)\sin(v)\right)\widehat{k}}{\sqrt{(-a^2\sin^2(v)\cos(u))^2 + (-a^2\sin^2(v)\sin(u))^2 + (-a^2\cos(v)\sin(v))^2}}\\
&= \frac{\left(-a^2\sin^2(v)\cos(u)\right)\widehat{\imath} + \left(-a^2\sin^2(v)\sin(u)\right)\widehat{\jmath} + \left(-a^2\cos(v)\sin(v)\right)\widehat{k}}{\sqrt{a^4\sin^4(v)\cos^2(u) + a^4\sin^4(v)\sin^2(u) + a^4\cos^2(v)\sin^2(v)}}\\
&= \frac{\left(-a^2\sin^2(v)\cos(u)\right)\widehat{\imath} + \left(-a^2\sin^2(v)\sin(u)\right)\widehat{\jmath} + \left(-a^2\cos(v)\sin(v)\right)\widehat{k}}{\sqrt{a^4\sin^4(v) + a^4\cos^2(v)\sin^2(v)}}\\
&= \frac{\left(-a^2\sin^2(v)\cos(u)\right)\widehat{\imath} + \left(-a^2\sin^2(v)\sin(u)\right)\widehat{\jmath} + \left(-a^2\cos(v)\sin(v)\right)\widehat{k}}{\sqrt{a^4\sin^2(v)}}\\
&= \frac{\left(-a^2\sqrt{\sin^4(v)}\cos(u)\right)\widehat{\imath} + \left(-a^2\sqrt{\sin^4(v)}\sin(u)\right)\widehat{\jmath} + \left(-a^2\cos(v)\sqrt{\sin^2(v)}\right)\widehat{k}}{a^2\sqrt{\sin^2(v)}}\\
&= \left(-|\sin(v)|\cos(u), -|\sin(v)|\sin(u), \cos(v)\right).
\end{aligned}
$$

Finalmente podemos calcular os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais:

$$
\begin{aligned}
E(u,v) &= \langle X_u, X_u\rangle = a^2\sin^2(v)\\
F(u,v) &= \langle X_u, X_v\rangle = 0\\
G(u,v) &= \langle X_v, X_v\rangle = a^2\\
e(u,v) &= \langle X_{uu}, N\rangle = a\sin^2(v)\\
f(u,v) &= \langle X_{uv}, N\rangle = 0\\
g(u,v) &= \langle X_{vv}, N\rangle = a.
\end{aligned}
$$

Obteremos a primeira e segunda formas fundamentais para v, um vetor tangente a esfera no ponto p, dado na base associada a $X(u,v)$ por

$$v = v_1X_u + v_2X_v.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_p(v) &= v_1^2(a^2\sin^2(v)) + v_2^2a^2\\
\mathrm{II}_p(v) &= v_1^2(a\sin^2(v)) + v_2^2a.
\end{aligned}
$$

Por fim, calculamos a curatura normal:

$$\kappa_{\mathrm{n},p}(v) = \frac{\mathrm{II}_p(v)}{\mathrm{I}_p(v)} = \frac{v_1^2(a\sin^2(v)) + v_2^2a}{v_1^2(a^2\sin^2(v)) + v_2^2a^2} = \frac{1}{a}.$$

$\kappa_{\mathrm{n},p}(v)$ é a curvatura do círculo máximo determinado por p, N, v.

Exemplo 2.5 (Plano)**.** *Vamos calcular a primeira e segunda formas fundamentais do plano $S = X(U)$ cuja equação é $ax + by + cz + d = 0$, com $c \neq 0$, em um ponto da vizinhança coordenada pela parametrização*

$$X(u,v) = \left(u, v, \frac{-d - au - bv}{c}\right).$$

Primeiro observe que

$$
\begin{aligned}
X_u(u,v) &= \left(1, 0, -\frac{a}{c}\right),\\
X_v(u,v) &= \left(0, 1, -\frac{b}{c}\right),\\
X_{uu}(u,v) &= (0,0,0),\\
X_{uv}(u,v) &= 0,0,0),\\
X_{vv}(u,v) &= (0,0,0).
\end{aligned}
$$

Agora calculamos o vetor normal em p:

$$N(p) = \frac{X_u \wedge X_v}{||X_u \wedge X_v||}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\begin{pmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ 1 & 0 & -\frac{a}{c} \\ 0 & 1 & -\frac{b}{c} \end{pmatrix}}{||X_u \wedge X_v||} \\
&= \frac{\left(\frac{a}{c}\right)\widehat{i} + \left(\frac{b}{c}\right)\widehat{j} + (1)\,\widehat{k}}{||X_u \wedge X_v||} \\
&= \frac{\left(\frac{a}{c}\right)\widehat{i} + \left(\frac{b}{c}\right)\widehat{j} + (1)\,\widehat{k}}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + 1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + 1}} \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1\right).
\end{aligned}
$$

Finalmente podemos calcular os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais:

$$
\begin{aligned}
E(u, v) &= \langle X_u, X_u \rangle = 1 + \frac{a^2}{b^2} \\
F(u, v) &= \langle X_u, X_v \rangle = \frac{ab}{c^2} \\
G(u, v) &= \langle X_v, X_v \rangle = 1 + \frac{b^2}{c^2} \\
e(u, v) &= \langle X_{uu}, N \rangle = 0 \\
f(u, v) &= \langle X_{uv}, N \rangle = 0 \\
g(u, v) &= \langle X_{vv}, N \rangle = 0.
\end{aligned}
$$

Obteremos a primeira e segunda formas fundamentais para v, um vetor tangente ao plano no ponto p, dado na base associada a $X(u, v)$ por

$$v = v_1 X_u + v_2 X_v.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_p(v) &= v_1^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) + 2v_1 v_2 \left(\frac{ab}{c^2}\right) v_2^2 \left(1 + \frac{b^2}{c^2}\right) \\
\mathrm{II}_p(v) &= 0.
\end{aligned}
$$

Por fim, calculamos a curvatura normal:

$$\kappa_{\mathrm{n},p}(v) = \frac{\mathrm{II}_p(v)}{\mathrm{I}_p(v)} = \frac{0}{v_1^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) + 2v_1 v_2 \left(\frac{ab}{c^2}\right) v_2^2 \left(1 + \frac{b^2}{c^2}\right)} = 0.$$

A curvatura de qualquer seção normal do plano é igual a 0, pois são retas.

Exemplo 2.6 (Cilindro circular)**.** *Vamos calcular a primeira e segunda formas fundamentais de um cilindro circular em um ponto da vizinhança coordenada pela parametrização*

$$X(u, v) = (r\cos(u), r\sin(u), v),$$

com $r > 0$. Valos calcular a primeira e a segunda formas fundamentais de uma esfera em um ponto da vizinhança coordenada pela parametrização

$$X(u, v) = (a\cos(u)\sin(v), a\sin(u)\sin(v), a\cos(v)),$$

com $a > 0$. Primeiro observe que

$$
\begin{aligned}
X_u(u, v) &= (-r\sin(u), r\cos(u), 0), \\
X_v(u, v) &= (0, 0, 1), \\
X_{uu}(u, v) &= (-r\cos(u), -r\sin(u), 0),
\end{aligned}
$$

$$X_{uv}(u,v) = (0,0,0),$$
$$X_{vv}(u,v) = (0,0,0).$$

Agora calculemos o vetor normal em p:

$$\begin{aligned}
N(p) &= \frac{X_u \wedge X_v}{||X_u \wedge X_v||} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ -r\sin(u) & r\cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{||X_u \wedge X_v||} \\
&= \frac{(r\cos(u))\,\widehat{i} + (r\sin(u))\,\widehat{j} + (0)\,\widehat{k}}{||X_u \wedge X_v||} \\
&= \frac{(r\cos(u))\,\widehat{i} + (r\sin(u))\,\widehat{j} + (0)\,\widehat{k}}{\sqrt{(r\cos(u))^2 + (r\sin(u))^2 + 0}} \\
&= \frac{(r\cos(u))\,\widehat{i} + (r\sin(u))\,\widehat{j} + (0)\,\widehat{k}}{r} \\
&= (\cos(u), \sin(u), 0).
\end{aligned}$$

Finalmente podemos calcular os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais:

$$\begin{aligned}
E(u,v) &= \langle X_u, X_u \rangle = r^2 \\
F(u,v) &= \langle X_u, X_v \rangle = 0 \\
G(u,v) &= \langle X_v, X_v \rangle = 1 \\
e(u,v) &= \langle X_{uu}, N \rangle = -r \\
f(u,v) &= \langle X_{uv}, N \rangle = 0 \\
g(u,v) &= \langle X_{vv}, N \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Obteremos a primeira e segunda formas fundamentais para v, um vetor tangente a esfera no ponto p, dado na base associada a $X(u,v)$ por

$$v = v_1 X_u + v_2 X_v.$$

Logo,

$$\mathrm{I}_p(v) = v_1^2(r^2) + v_2^2 1$$
$$\mathrm{II}_p(v) = v_1^2(-r).$$

Por fim, calculamos a curvatura normal:

$$\kappa_{\mathrm{n},p}(v) = \frac{\mathrm{II}_p(v)}{\mathrm{I}_p(v)} = \frac{-v_1^2 r}{v_1^2(r^2) + v_2^2} \leq 0.$$

O máximo de $\kappa_{\mathrm{n},p}(v)$ ocorre para $v_1 = 0$, isto é, $v = v_2 X_v$ e neste caso $\kappa_{\mathrm{n},p}(v) = 0$.
O mínimo de $\kappa_{\mathrm{n},p}(v)$ ocorre para $v_2 = 0$, isto é, $v = v_1 X_u$ e neste caso $\kappa_{\mathrm{n},p}(v) = -\frac{1}{r}$.

3. Aula do dia 25/09/2023

Objetivos da aula:

- A aplicação normal de Gauss (aproximadamente 15 minutos)
- Exemplos (aproximadamente 15 minutos)
- Diferencial da aplicação normal de Gauss (aproximadamente 20 minutos)
- Pausa de 10 minutos
- Consequências geométricas (aproximadamente 30 minutos)
- Exemplos (aproximadamente 10 minutos)
- A fórmula de Euler (aproximadamente 10 minutos)
- Acabar 10 minutos antes

Tempo de aula (expectativa): 120 minutos.

3.1. **A aplicação normal de Gauss.** Como medir a taxa de variação do plano tangente em um ponto p de uma superfície regular S?

Isso será feito a partir da aplicação linear de T_pS em T_pS dada pela variação do campo normal N, ilustrado na Figura 7 no caso em que S é a esfera de centro na origem e raio 5.

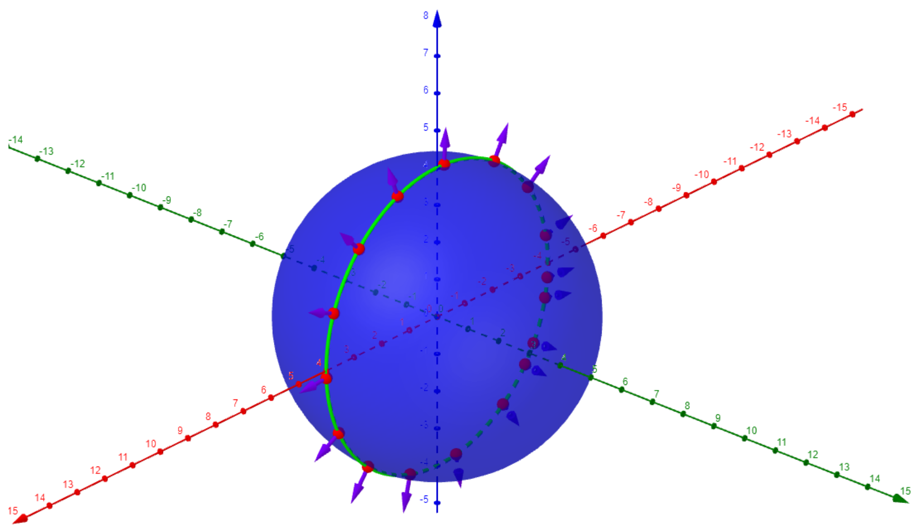

FIGURA 7. Campo normal unitário sobre um meridiano da esfera de centro na origem e raio 5.

Note que a escolha de um vetor normal $N(p) \in T_pS^{\perp}$ determina uma orientação de T_pS. Neste caso, dizemos que ***a base*** $\{u, v\}$ ***de*** T_pS ***está orientada positivamente (resp. negativamente) em relação ao normal*** $N(p)$ se $\{u, v, N(p)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ orientada positivamente (resp. negativamente), isto é, $\langle u \wedge v, N(p)\rangle > 0$ (resp. $\langle u \wedge v, N(p)\rangle < 0$).

Definição 3.1. *Uma* **superfície orientada** *é um par* (S, N) *em que* S *é uma superfície orientável e* $N : S \to \mathbb{R}^3$ *é uma aplicação diferenciável tais que* $N(p) \in T_pS^{\perp}$ *e* $||N(p)||= 1$ *para todo* $p \in S$.

Definição 3.2. *Seja* (S, N) *uma superfície orientada. A* **aplicação normal de Gauss de** (S, N) *é a aplicação* $\mathbf{N} : S \to \mathbb{S}^2$ *que associa a casa ponto* $p \in S$ *o representante de* $N(p)$ *com origem na origem de* $\mathbb{R}^3$.

A Figura 8 ilustra a aplicação normal de Gauss $\mathbf{N}$.

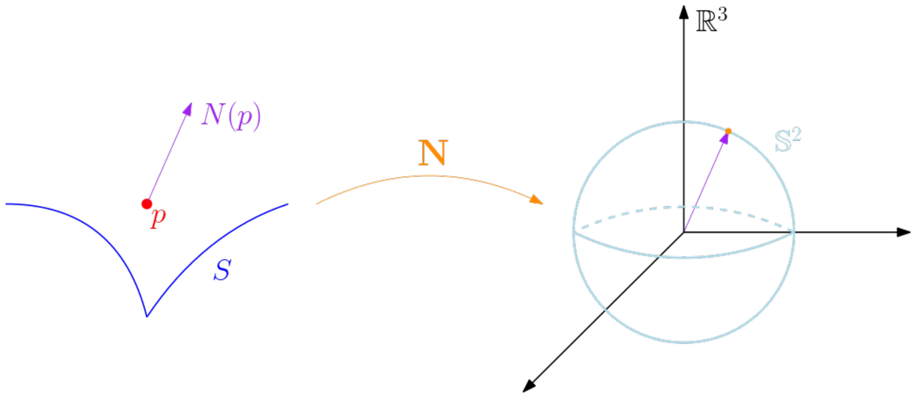

FIGURA 8. A aplicação normal de Gauss $\mathbf{N}$.

Observação 3.1. *Note que como N é diferenciável por definição, temos que a aplicação normal de Gauss $\mathbf{N}$ é diferenciável. Além disso, como $T_pS \parallel T_{\mathbf{N}(p)}\mathbb{S}^2$ temos que $T_pS \sim T_{\mathbf{N}(p)}\mathbb{S}^2$. Assim, através desta identificação, podemos olhar a diferencial da aplicação normal de Gauss dN_p como uma aplicação linear em T_pS.*

Sejam S_1, S_2 duas superfícies regulares e $f : S_1 \to S_2$ uma aplicação diferenciável. Para $p \in S_1$ e $v \in T_pS_1$, assim calculamos $df_p(v)$:
Seja $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\to S_1$ uma curva em S_1 tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha_1'(0) = v$. Assim,

$$df_p(v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ \alpha) = \beta'(0),$$

onde $\beta(t) = f(\alpha(t))$ é uma curva em S_2 tal que $\beta(0) = f(p)$.

3.2. **Exemplos.** Agora faremos alguns exemplos de como calcular a diferencial da aplicação normal de Gauss.

Exemplo 3.1 (Esfera)**.** *Vamos calcular a diferencial da aplicação normal de Gauss da esfera $\mathbb{S}^2$. Note que a aplicação $N : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$, dada por $N(p) = -p$ para todo $p \in \mathbb{S}^2$ é a aplicação normal de Gauss na esfera. Em coordenadas,*

$$N(x, y, z) := (-x, -y, -z).$$

Sejam $p \in \mathbb{S}^2$, $v \in T_p\mathbb{S}^2$ arbitrários e $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{S}^2$ uma curva na esfera dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tal que $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Logo,

$$\begin{aligned} dN_p(v) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (N \circ \alpha)(t) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} N(x(t), y(t), z(t)) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (-x(t), -y(t), -z(t)) \\ &= -(x'(0), y'(0), z'(0)) \\ &= -\alpha'(0) \\ &= -v. \end{aligned}$$

Portanto, $dN_p : T_p\mathbb{S}^2 \to T_p\mathbb{S}^2$ é menos a aplicação identidade. Em breve, interpretaremos geometricamente esta relação.

Exemplo 3.2 (Plano). *Vamos calcular a diferencial da aplicação normal de Gauss do plano S cuja equação é $ax + by + cz + d = 0$, com $c \neq 0$. Note que a aplicação $N : S \to \mathbb{S}^2$, dada por*

$$N(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + 1}} \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1\right),$$

é a aplicação normal de Gauss de S. Sejam $p \in S$, $v \in T_pS$ arbitrários e $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\to S$ uma curva no plano dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tal que $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Logo,

$$dN_p(v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (N \circ \alpha)(t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} N(x(t), y(t), z(t)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + 1}} \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1\right) = 0.$$

Portanto, $dN_p : T_pS \to T_pS$ é a aplicação identicamente nula.

Exemplo 3.3 (Cilindro circular). *Vamos calcular a diferencial da aplicação normal de Gauss do cilindro circular S dado por $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$. Note que a aplicação $N : S \to \mathbb{S}^2$, dada por*

$$N(x, y, z) = (x, y, 0),$$

é a aplicação normal de Gauss de S. Sejam $p \in S$, $v \in T_pS$ arbitrários e $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\to S$ uma curva no cilindro circular dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tal que $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Logo,

$$dN_p(v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (N \circ \alpha)(t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} N(x(t), y(t), z(t)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (x(t), y(t), 0) = (x'(0), y'(0), 0).$$

Portanto, $dN_p : T_pS \to T_pS$ é a projeção sobre o plano Oxy.

3.3. dN_p é uma aplicação autoadjunta.

Definição 3.3. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $T : V \to V$ uma aplicação linear. Dizemos que T* **é autoadjunta** *se*

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, Tw \rangle,$$

para todos $v, w \in V$.

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $T : V \to V$ uma aplicação linear autoadjunta. Associamos T à forma bilinear simétrica

$$B_T(v, w) = \langle Tv, w \rangle,$$

e à forma quadrática

$$Q_T(v) = \langle Tv, v \rangle,$$

que estão relacionadas pela seguinte identidade:

$$B_T(v, w) = \frac{1}{4}(Q_T(v + w) - Q_T(v - w)).$$

Proposição 3.1. *Sejam (S, N) uma superfície orientada e $\mathbf{N}$ a aplicação normal de Gauss de (S, N). A diferencial $d\mathbf{N}_p$ da aplicação normal de Gauss é uma aplicação linear autoadjunta para todo $p \in S$.*

Demonstração. Sejam $p \in S$, $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ uma carta de S tal que $p \in X(U)$, $v, w \in T_pS$ arbitrários e $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\to S$ e $\beta :]-\delta, \delta[\to S$ curvas em S dadas por $\alpha(t) = X(u_1(t), v_1(t))$ e $\beta(t) = X(u_2(t), v_2(t))$ tais que $\alpha(0) = \beta(0) = p$, $\alpha'(0) = v$ e $\beta'(0) = w$. Assim,

$$\begin{aligned} d\mathbf{N}_p(v) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\mathbf{N} \circ \alpha)(t) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\mathbf{N} \circ X(u_1(t), u_2(t))) \\ &= \frac{\partial}{\partial u}(\mathbf{N} \circ X)(p)u_1'(0) + \frac{\partial}{\partial v}(\mathbf{N} \circ X)(p)v_1'(0) \end{aligned}$$

$$= u_1'(0)\mathbf{N}_u + v_1'(0)\mathbf{N}_v.$$

Analogamente, $d\mathbf{N}_p(w) = u_2'(0)\mathbf{N}_u + v_2'(0)\mathbf{N}_v$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}\langle d\mathbf{N}_p(v), w\rangle &= \langle u_1'(0)\mathbf{N}_u + v_1'(0)\mathbf{N}_v, u_2'(0)X_u + v_2'(0)X_v\rangle \\ &= u_1'(0)u_2'(0)\langle \mathbf{N}_u, X_u\rangle + u_1'(0)v_2'(0)\langle \mathbf{N}_u, X_v\rangle \\ &\quad + v_1'(0)u_2'(0)\langle \mathbf{N}_v, X_u\rangle + v_1'(0)v_2'(0)\langle \mathbf{N}_v, X_v\rangle\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle v, d\mathbf{N}_p(w)\rangle &= \langle u_1'(0)X_u + v_1'(0)X_v, u_2'(0)\mathbf{N}_u + v_2'(0)\mathbf{N}_v\rangle \\ &= u_1'(0)u_2'(0)\langle \mathbf{N}_u, X_u\rangle + u_1'(0)v_2'(0)\langle \mathbf{N}_v, X_u\rangle \\ &\quad + v_1'(0)u_2'(0)\langle \mathbf{N}_u, X_v\rangle + v_1'(0)v_2'(0)\langle \mathbf{N}_v, X_v\rangle\end{aligned}$$

Portanto, se $\langle \mathbf{N}_u, X_v\rangle = \langle \mathbf{N}_v, X_u\rangle$ então temos que

$$\langle d\mathbf{N}_p(v), w\rangle = \langle v, d\mathbf{N}_p(w)\rangle.$$

Portanto, pela arbitrariedade de p, v e w, temos que $d\mathbf{N}_p$ é uma aplicação linear autoadjunta.

Agora vamos mostrar que $\langle \mathbf{N}_u, X_v\rangle = \langle \mathbf{N}_v, X_u\rangle$. Para ver isso derivamos $\langle N, X_u\rangle = 0$ com relação a v, donde obtemos

$$\langle N_v, X_u\rangle = -\langle N, X_{uv}\rangle.$$

E derivamos $\langle N, X_v\rangle = 0$ com relação a u, donde obtemos

$$\langle N_u, X_v\rangle = -\langle N, X_{vu}\rangle = -\langle N, X_{uv}\rangle.$$

Portanto, $\langle N_v, X_u\rangle = \langle N_u, X_v\rangle$ como requerido. □

3.4. **Consequências geométricas.** Com o resultado obtido para a diferencial da aplicação normal de Gauss de uma superfície orientada podemos ter uma nova caracterização para a segunda forma fundamental desta superfície.

Sejam (S, N) uma superfície orientada e $\mathbf{N}$ a aplicação normal de Gauss de (S, N). Afirmamos que

$$\mathrm{II}_p(v) = -Q_{d\mathbf{N}_p}(v) = \langle -d\mathbf{N}_p(v), v\rangle,$$

onde $Q_{d\mathbf{N}_p}$ é a forma quadrática associada a diferencial $d\mathbf{N}_p$ da aplicação normal de Gauss.

De fato, sejam $p \in S$, $v \in T_pS$ arbitrários e $\alpha :] - \varepsilon, \varepsilon[\to S$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Como $\langle \mathbf{N}(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle = 0$ para todo $t \in] - \varepsilon, \varepsilon[$ temos que

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \langle \mathbf{N}(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle &= 0 \\ \left\langle \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathbf{N}(\alpha(t)), \alpha'(0)\right\rangle + \left\langle \mathbf{N}(\alpha(0)), \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \alpha'(t)\right\rangle &= 0 \\ \langle d\mathbf{N}_p(v), v\rangle + \langle \mathbf{N}(p), \alpha''(0)\rangle &= 0 \\ Q_{d\mathbf{N}_p}(v) + \mathrm{II}_p(v) &= 0.\end{aligned}$$

Teorema 3.1 (Teorema espectral). *Sejam V um espaço vetorial bidimensional com produto interno e $T : V \to V$ uma aplicação linear autoadjunta. Então existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de V tal que $T(e_1) = \lambda_1 e_1$, $T(e_2) = \lambda_2 e_2$ e os autovalores λ_1, λ_2 são o máximo e o mínimo da forma quadrática Q_T no círculo unitário de V.*

Como $-d\mathbf{N}_p$ é autoadjunta então existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ tal que

$$\begin{cases} -d\mathbf{N}_p(e_1) &= \kappa_1 e_1 \\ -d\mathbf{N}_p(e_2) &= \kappa_2 e_2 \end{cases},$$

onde κ_1, κ_2 são o mínimo e o máximo de $\mathrm{II}_p(v)$ com $||v||= 1$, respectivamente. Chamamos κ_1,κ_2 de ***curvaturas principais de S em p*** e os respectivos e_1,e_2 de ***direções principais de S em p***.

Chamamos de ***operador de Weingarten de*** S ***em*** p (ou ***operador forma de*** S ***em*** p) o operador linear $\mathcal{S} := -d\mathbf{N}_p$.

Definição 3.4. *Sejam* S *uma superfície orientada e* $p \in S$. *Definimos a* **curvatura Gaussiana de** S **em** p *por*

$$K(p) := \det(\mathcal{S}).$$

Definimos também a **curvatura média de** S **em** p *por*

$$H(p) := \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathcal{S}).$$

Seja $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ uma base de direções principais de S em p com respectivas curvaturas principais κ_1, κ_2 ($\kappa_1 \leq \kappa_2$). Assim, a matriz de $\mathcal{S}$ na base $\mathcal{B}$ é dada por

$$[\mathcal{S}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}.$$

E as curvaturas Gaussiana e média são dadas por

$$K(p) = \kappa_1\kappa_2 \qquad \text{e} \qquad H(p) = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

3.5. **Exemplos.** Agora faremos alguns exemplos de como calcular as curvaturas principais, Gaussiana e normal.

Exemplo 3.4 (Esfera)**.** *Sejam* S *a esfera de centro na origem e raio* r, $p \in S$ *e* $v \in T_pS$ *arbitrários tais que* $||v||= 1$ *(isto é,* v *está no círculo unitário de* T_pS*). Note que*

$$\mathrm{II}_p(v) = \frac{\mathrm{II}_p(v)}{\mathrm{I}_p(v)} = \kappa_{\mathrm{n},p}(v) = \frac{1}{r}.$$

Portanto o mínimo e o máximo da forma quadrática II_p *no círculo unitário de* T_pS *são dados por* $\kappa_1 = \frac{1}{r}$ *e* $\kappa_2 = \frac{1}{r}$. *Portanto,*

$$K(p) = \frac{1}{r^2} \qquad e \qquad H(p) = \frac{1}{r}.$$

Exemplo 3.5 (Plano)**.** *Seja* S *o plano cuja equação é* $ax + by + cz + d = 0$, *com* $c \neq 0$,$p \in S$ *e* $v \in T_pS$ *arbitrários tais que* $||v||= 1$ *(isto é,* v *está no círculo unitário de* T_pS*). Note que*

$$\mathrm{II}_p(v) = \frac{\mathrm{II}_p(v)}{\mathrm{I}_p(v)} = \kappa_{\mathrm{n},p}(v) = 0.$$

Portanto o mínimo e o máximo da forma quadrática II_p *no círculo unitário de* T_pS *são dados por* $\kappa_1 = 0$ *e* $\kappa_2 = 0$. *Portanto,*

$$K(p) = 0 \qquad e \qquad H(p) = 0.$$

Exemplo 3.6 (Cilindro circular)**.** *Seja* $S = X(U)$ *o cilindro circular de raio* r, $p \in S$ *e* $v \in T_pS$ *arbitrários tais que* $||v||= 1$ *(isto é,* v *está no círculo unitário de* T_pS*). Note que*

$$\mathrm{II}_p(v) = \frac{\mathrm{II}_p(v)}{\mathrm{I}_p(v)} = \kappa_{\mathrm{n},p}(v) = \frac{-v_1^2 r}{v_1^2(r^2) + v_2^2} \leq 0,$$

onde $v = v_1X_u + v_2X_v$. *Portanto o mínimo e o máximo da forma quadrática* II_p *no círculo unitário de* T_pS *são dados por* $\kappa_1 = -\frac{1}{r}$ *e* $\kappa_2 = 0$ *(para ver isso basta usar a identidade* $v_1^2 + v_2^2 = 1$ *na curvatura normal e maximizar e minimizar as funções para* v_1 *e* v_2*). Portanto,*

$$K(p) = 0 \qquad e \qquad H(p) = -\frac{1}{2r}.$$

3.6. **A fórmula de Euler.** A fórmula de Euler calcula a curvatura normal de um vetor unitário no espaço tangente através das curvaturas principais.

Proposição 3.2 (Fórmula de Euler)**.** *Sejam κ_1 e κ_2 as curvaturas principais de $S = X(U)$ em p, e_1 e e_2 as direções principais correspondentes. Se $w \in T_pS$, $||w||= 1$ e θ é o ângulo entre w e e_1, então*

$$\kappa_{\mathrm{n},p}(w) = \kappa_1 \cos^2(\theta) + \kappa_2 \sin^2(\theta).$$

Demonstração. Note que $w = \langle w, e_1\rangle e_1 + \langle w, e_2\rangle e_2 = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$. Assim,

$$\begin{aligned}
\kappa_{\mathrm{n},p}(w) &= \frac{\mathrm{II}_p(w)}{\mathrm{I}_p(w)} \\
&= \mathrm{II}_p(w) \\
&= -\langle d\mathbf{N}_p(w), w\rangle \\
&= -\langle d\mathbf{N}_p(\cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2), \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2\rangle \\
&= \langle -\cos(\theta)d\mathbf{N}_p(e_1) - \sin(\theta)d\mathbf{N}_p(e_2), \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2\rangle \\
&= \langle \cos(\theta)\kappa_1 e_1 + \sin(\theta)\kappa_2 e_2, \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2\rangle \\
&= \kappa_1 \cos^2(\theta) + \kappa_2 \sin^2(\theta).
\end{aligned}$$

□

Referências

[DC05] M. P. Do Carmo, *Geometria diferencial de curvas e superfícies*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2005. ↑2, 15