

NOTAS DE ATENDIMENTO E EXERCÍCIOS

MARCOS AGNOLETTO FORTE

RESUMO. Estas são notas não oficiais sobre os temas mais importantes discutidos durante os horários de atendimento.

CONTEÚDO

1. Aula do dia 18/09/2023	1
1.1. Revisão de geometria diferencial I	1
1.2. A faixa de Möbius	5
1.3. Um panorama de geometria diferencial II através do SageMath	9
Referências	11

1. AULA DO DIA 18/09/2023

Objetivos da aula:

- Explicar as regras do curso (aproximadamente 10 minutos)
- Fazer uma revisão relâmpago de Geometria Diferencial I (aproximadamente 30 minutos)
- Introdução à faixa de Möbius (aproximadamente 10 minutos)
- Pausa de 10 minutos
- Obter a parametrização da Faixa de Möbius (aproximadamente 20 minutos)
- Calcular os coeficientes da primeira forma fundamental (aproximadamente 20 minutos)
- Um visão panorâmica do curso de Geometria Diferencial II através do SageManifolds (aproximadamente 10 minutos)
- Acabar 10 minutos antes

Tempo de aula (expectativa): 120 minutos.

1.1. **Revisão de geometria diferencial I.** A referência para esta seção é [DC05].

Definição 1.1. Uma **curva diferenciável parametrizada** no \mathbb{R}^3 é uma aplicação diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Escrevemos $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, para $t \in I$, o conjunto $\alpha(I)$ é chamado de **traço da curva** α .

Exemplo 1.1. $\alpha(t) := (\cos(t), \sin(t), t)$, $t \in \mathbb{R}$, é uma curva diferenciável parametrizada no \mathbb{R}^3 (\mathcal{C}^∞) cujo traço é um cilindro.

Definição 1.2. Sejam $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada diferenciável e $t_0 \in I$ tal que $\alpha'(t_0) \neq 0$. Neste caso, dizemos que $\alpha'(t_0)$ é o **vetor tangente a α no ponto $\alpha(t_0)$** e que $\alpha(t_0)$ é um **ponto regular de α** .

Definição 1.3. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada diferenciável. Dizemos que α é **regular** se $\alpha(t_0)$ for um ponto regular de α para todo $t_0 \in I$.

Note que uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é regular se $\alpha'(t_0) \neq 0$ para todo $t_0 \in I$.

Exemplo 1.2. $\alpha(t) := (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, é uma curva diferenciável (\mathcal{C}^∞) que não é regular.

Definição 1.4. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Dizemos que β é uma **reparametrização** de α se existir um difeomorfismo $h : J \subset \mathbb{R} \rightarrow I$ tal que $\beta = \alpha \circ h$.

Definição 1.5. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular. O **comprimento de arco** de α é dado por

$$L_\alpha(I) = L(\alpha(I)) := \int_I \|\alpha'(t)\| dt.$$

Definição 1.6. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Dizemos que α está **parametrizada pelo comprimento de arco (p.p.c.a.)** se

$$L_\alpha([t_0, t_1]) = t_1 - t_0,$$

para todos $t_0, t_1 \in I$ tais que $t_0 < t_1$.

Proposição 1.1. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Então α está p.p.c.a. se, e somente se, $\|\alpha'(t_0)\| = 1$ para todo $t_0 \in I$.

Proposição 1.2. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Então α pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco.

Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular p.p.c.a.. Denotaremos por $\vec{t}(s) := \alpha'(s)$ o vetor tangente de α no ponto $\alpha(s)$ para todo $s \in I$. Como α está p.p.c.a., para todo $s \in I$ temos que

$$\begin{aligned} \|\alpha'(s)\| &= 1 \\ \|\alpha'(s)\|^2 &= 1 \\ \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle &= 1 \\ \langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle + \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle &= 0 \\ \langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Consequentemente, $\alpha''(s) \perp \alpha'(s)$.

Definição 1.7. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular p.p.c.a.. Definimos a **curvatura** de α em $s \in I$ como sendo o número $\kappa(s) := \|\alpha''(s)\|$.

Geometricamente, $\kappa(s)$ mede o quanto uma curva se afasta de uma reta.

Definição 1.8. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular p.p.c.a. tal que $\kappa(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Definimos o **normal (principal)** de α em $s \in I$ como sendo o vetor

$$\vec{n}(s) := \frac{1}{\kappa(s)} \alpha''(s).$$

Note que $\vec{t}(s) \perp \vec{n}(s)$ para todo $s \in I$.

Definição 1.9. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular p.p.c.a. tal que $\kappa(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Definimos o **binormal** de α em $s \in I$ como sendo o vetor

$$\vec{b}(s) := \vec{t}(s) \wedge \vec{n}(s).$$

Note que $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 centrada em $\alpha(s)$ para cada $s \in I$, ou seja, um referencial móvel sobre α , o qual chamamos de **triedro de Frenet-Serret**¹ ou **referencial de Frenet-Serret** ou **referencial TNB**.

Para todo $s \in I$ temos que

$$\begin{aligned} \langle \vec{b}(s), \vec{b}(s) \rangle &= 1 \\ \left\langle \frac{d\vec{b}}{ds}(s), \vec{b}(s) \right\rangle &= 0, \end{aligned}$$

¹Em homenagem aos matemáticos Jean Frédéric Frenet e Joseph Alfred Serret.

e

$$\begin{aligned}
\langle \vec{b}(s), \vec{t}(s) \rangle &= 0 \\
\left\langle \frac{d\vec{b}}{ds}(s), \vec{t}(s) \right\rangle + \left\langle \vec{b}(s), \frac{d\vec{t}}{ds}(s) \right\rangle &= 0 \\
\left\langle \frac{d\vec{b}}{ds}(s), \vec{t}(s) \right\rangle + \kappa(s) \langle \vec{b}(s), \vec{n}(s) \rangle &= 0 \\
\left\langle \frac{d\vec{b}}{ds}(s), \vec{t}(s) \right\rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\frac{d\vec{b}}{ds}(s) \parallel \vec{n}(s),$$

para todo $s \in I$.

Definição 1.10. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular p.p.c.a. tal que $\kappa(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Definimos a **torção de α em $s \in I$** como sendo o numero

$$\tau(s) := \left\langle \frac{d\vec{b}}{ds}(s), \vec{n}(s) \right\rangle.$$

Geometricamente, $\tau(s)$ mede o quanto a curva deixa de ser plana. Além disso, note que

$$\frac{d\vec{b}}{ds}(s) = \left\langle \frac{d\vec{b}}{ds}(s), \vec{t}(s) \right\rangle \vec{t}(s) + \left\langle \frac{d\vec{b}}{ds}(s), \vec{b}(s) \right\rangle \vec{b}(s) + \left\langle \frac{d\vec{b}}{ds}(s), \vec{n}(s) \right\rangle \vec{n}(s) = \tau(s) \vec{n}(s).$$

Proposição 1.3 (Equações de Frenet-Serret). Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular p.p.c.a. tal que $\kappa(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Então, para todo $s \in I$, valem que

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{t}}{ds}(s) &= 0 + \kappa(s) \vec{n}(s) + 0, \\
\frac{d\vec{n}}{ds}(s) &= -\kappa(s) \vec{t}(s) + 0 - \tau(s) \vec{b}(s), \\
\frac{d\vec{b}}{ds}(s) &= 0 + \tau(s) \vec{n}(s) + 0.
\end{aligned}$$

Ou ainda, matricialmente,

$$\begin{pmatrix} \vec{t}' \\ \vec{n}' \\ \vec{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix}.$$

Teorema 1.1 (Teorema fundamental da teoria local de curvas). Dadas duas funções $\kappa, \tau : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\kappa(s) > 0$ para todo $s \in I$, então existe uma curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja curvatura é $\kappa(s)$ e cuja torção é $\tau(s)$. Além disso, qualquer outra curva com a mesma propriedade é congruente a α .

Definição 1.11. Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma **superfície regular** se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap S$ de um aberto U de \mathbb{R}^2 sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que

- (1) X é um homeomorfismo diferenciável.
- (2) A diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva para todo $q \in U$.

Proposição 1.4 (Mudança de parâmetros). Sejam $p \in S$ um ponto de uma superfície regular S , $X_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ e $\psi_2 : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ duas parametrizações de S tais que $p \in X_1(U) \cap X_2(V) =: W$. Então

$$h := X_1^{-1} \circ X_2 : X_2^{-1}(W) \rightarrow X_1^{-1}(W)$$

é um difeomorfismo, isto é, h é diferenciável e tem inversa diferenciável.

Sejam $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de uma superfície regular S e $q \in U$. Chamamos o subespaço vetorial de dimensão 2

$$T_{X(q)}S := dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3,$$

de **espaço tangente a S em $X(q)$** . Este espaço vetorial coincide com o conjunto dos vetores tangentes $\alpha'(0)$ de curvas parametrizadas diferenciáveis $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S$, com $\alpha(0) = X(q)$.

A escolha de uma parametrização X determina uma base

$$\{dX_q(u), dX_q(v)\} = \left\{ \frac{\partial X}{\partial u}(q), \frac{\partial X}{\partial v}(q) \right\} =: \{X_u(q), X_v(q)\}$$

de $T_{X(q)}S$ e um vetor normal unitário em cada ponto $p \in X(U)$ dado por

$$N(p) := \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(q).$$

Nem sempre é possível estender a aplicação diferenciável $N : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ de maneira diferenciável à superfície S .

O produto interno canônico do \mathbb{R}^3 induz em cada plano tangente T_pS de uma superfície regular S um produto interno, que denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. A esse produto interno, que é uma forma bilinear simétrica, corresponde uma forma quadrática $I_p : T_pS \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$I_p(w) := \langle w, w \rangle_p = \|w\|_p^2 \geq 0.$$

Tal forma quadrática em T_pS é chamada de **primeira forma fundamental de S em $p \in S$** .

Vamos, agora, expressar a primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ associada a parametrização $X(u, v)$ em p . Como um vetor $w \in T_pS$ é o vetor tangente a uma curva parametrizada $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, com $p = \alpha(0)$, obtemos

$$\begin{aligned} I_p(w) &= I_p(\alpha'(0)) \\ &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle X_u(u(0), v(0))u'(0) + X_v(u(0), v(0))v'(0), X_u(u(0), v(0))u'(0) + X_v(u(0), v(0))v'(0) \rangle_p \\ &= \langle X_u(q), X_u(q) \rangle_p (u'(0))^2 + 2\langle X_u(q), X_v(q) \rangle_p u'(0)v'(0) + \langle X_v(q), X_v(q) \rangle_p (v'(0))^2 \\ &= E(q) (u'(0))^2 + 2F(q) u'(0)v'(0) + G(q) (v'(0))^2, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{cases} E(q) := \langle X_u(q), X_u(q) \rangle_p, \\ F(q) := \langle X_u(q), X_v(q) \rangle_p, \\ G(q) := \langle X_v(q), X_v(q) \rangle_p \end{cases}$$

são os **coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ de T_pS** . Fazendo q variar numa vizinhança coordenada correspondente à parametrização X , obtemos funções E, F, G que são diferenciáveis nesta vizinhança. Quando não houver ambiguidade, os índices p e q serão omitidos.

Assim, podemos representar a primeira forma fundamental como uma matriz simétrica

$$I(w) = w^\top \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} w = (u'(0)v'(0)) \begin{pmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix}.$$

Definição 1.12. Uma superfície S é **orientável** se ela admite uma cobertura por vizinhanças coordenadas $X_\alpha(U_\alpha)$, em que $X_\alpha : U_\alpha \rightarrow S$, de tal modo que se $p \in X_{\alpha_1}(U_{\alpha_1}) \cap X_{\alpha_2}(U_{\alpha_2})$, com

$(u, v) = U_{\alpha_1}$ e $(\bar{u}, \bar{v}) \in U_{\alpha_2}$, então

$$\text{Jac}((\bar{u}, \bar{v}) \mapsto (u, v)) = \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{pmatrix} > 0.$$

A escolha de uma tal família de vizinhanças coordenadas que cobrem S é chamada de **orientação** de S e S , neste caso, diz-se **orientada**. Se uma tal escolha não é possível, diz-se que S é **não-orientável**. Se S é orientada, uma parametrização local X é compatível com a orientação de S se, unindo X à família de parametrizações dada pela orientação, obtém-se ainda uma (logo, a mesma) orientação.

Proposição 1.5. Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é orientável se, e somente se, existe um campo diferencial $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ de vetores normais em S , isto é, $N(p) \perp T_p S$ para todo $p \in S$.

1.2. A faixa de Möbius. A faixa de Möbius² é obtida tomando-se um retângulo e identificando-se dois lados opostos depois de uma rotação de 180° , como ilustra a Figura 1.

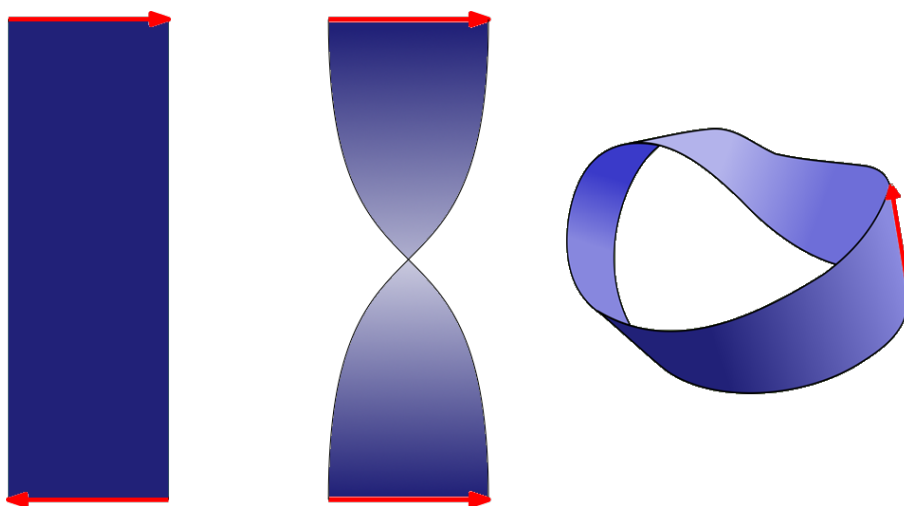


FIGURA 1. Construção de uma faixa de Möbius.

A faixa de Möbius, além de suas inúmeras aplicações artísticas, como em logotipos de centros de estudo de matemática em todo o mundo, também encontra frequentemente uso na engenharia, especialmente na produção de correias que desgastam “ambos” os lados igualmente.

A seguir, apresentaremos uma parametrização da faixa de Möbius e calcularemos os coeficientes de sua primeira forma fundamental.

1.2.1. Parametrização. Considere a faixa de Möbius, denotada por \mathbf{M} , ao redor do eixo z com raio 2 e largura 1. Sejam $(u, v) \in]0, 2\pi[\times]-1, 1]$ e note que para $p = (x, y, z) \in \mathbf{M}$ temos que

$$\begin{cases} x(u, v) &= \left(2 + v \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) \cos(u) \\ y(u, v) &= \left(2 + v \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) \sin(u) \\ z(u, v) &= v \sin\left(\frac{u}{2}\right). \end{cases}$$

²Em homenagem ao matemático August Ferdinand Möbius.

A Figura 2 auxilia a entender as equações acima. Note que cada ponto do segmento que rotacionamos identificamos com um valor de $v \in [-1, 1]$ e esta é uma variável da parametrização, que segue a mesma ideia do Toro.

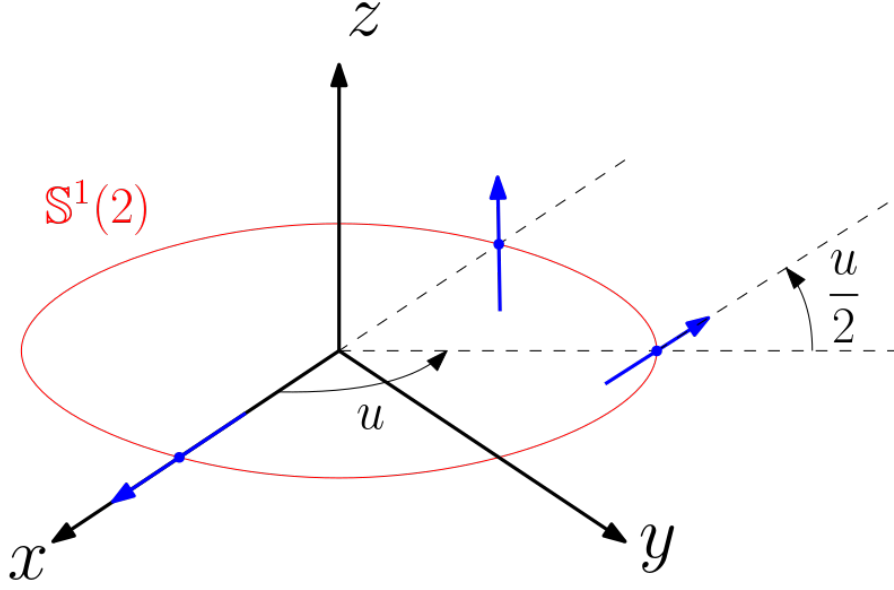


FIGURA 2. Facilitador para a parametrização da faixa de Möbius.

Portanto, um sistema de coordenadas locais para a faixa de Möbius é dado por

$$\begin{aligned} X :]0, 2\pi[\times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbf{M} \subset \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)). \end{aligned}$$

A vizinhança coordenada correspondente omite os pontos $u = 0$, como ilustra a Figura 3.

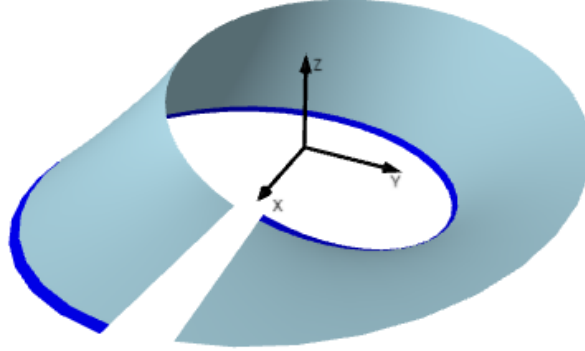


FIGURA 3. Plot de X .

Logo, tomando-se $(\bar{u}, \bar{v}) \in]0, 2\pi[\times [-1, 1]$ de modo que

$$\begin{cases} x(\bar{u}, \bar{v}) &= \left(2 + \bar{v} \cos \left(\frac{\bar{u}}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \cos \left(\bar{u} + \frac{\pi}{2} \right) \\ y(\bar{u}, \bar{v}) &= \left(2 + \bar{v} \cos \left(\frac{\bar{u}}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \sin \left(\bar{u} + \frac{\pi}{2} \right) \\ z(\bar{u}, \bar{v}) &= \bar{v} \sin \left(\frac{\bar{u}}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \end{cases}$$

obtemos outro sistema de coordenadas locais para a faixa de Möbius é dado por

$$\bar{X} :]0, 2\pi[\times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{M} \subset \mathbb{R}^3$$

$$(\bar{u}, \bar{v}) \mapsto (x(\bar{u}, \bar{v}), y(\bar{u}, \bar{v}), z(\bar{u}, \bar{v})).$$

A vizinhança coordenada correspondente omite os pontos no intervalo aberto $u = 0$, como ilustra a Figura 4.

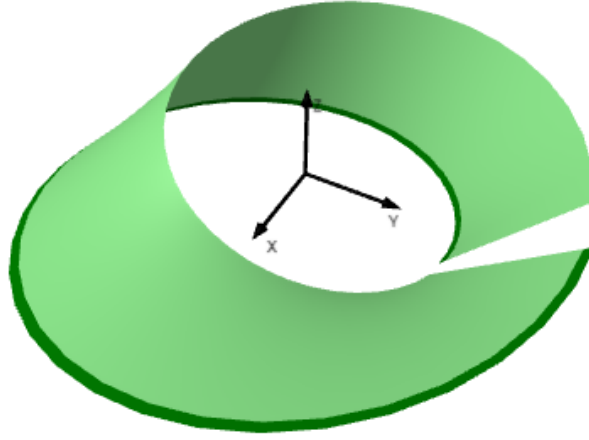


FIGURA 4. Plot de \bar{X} .

Essas duas vizinhanças coordenadas formam uma cobertura para a faixa de Möbius, como ilustra a Figura 5.

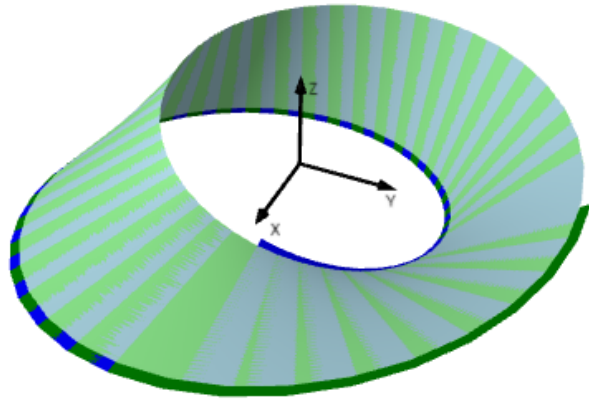


FIGURA 5. Plot de X e \bar{X} juntos.

Assim, temos que a faixa de Möbius é uma superfície regular. De fato, a intersecção dessas duas vizinhanças coordenadas é constituída por duas componentes conexas

$$W_1 := \left\{ X(u, v) : 0 < u < \frac{\pi}{2}, -1 \leq v \leq 1 \right\} \text{ e } W_2 := \left\{ X(u, v) : \frac{\pi}{2} < u < 2\pi, -1 \leq v \leq 1 \right\}.$$

A mudança de coordenada é dada por (a Figura 5 ilustra a mudança de orientação de v em W_1 pela sobreposição ou não das partes mais escuras)

$$\begin{cases} \bar{u} &= u + \frac{\pi}{2} \\ \bar{v} &= -v \end{cases} \text{ em } W_1 \text{ e } \begin{cases} \bar{u} &= u + \frac{\pi}{2} \\ \bar{v} &= v \end{cases} \text{ em } W_2.$$

Donde temos que

$$\text{Jac}((\bar{u}, \bar{v}) \mapsto (u, v)) = \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

em W_1 , e

$$\text{Jac}((\bar{u}, \bar{v}) \mapsto (u, v)) = \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

em W_2 .

1.2.2. *Primeira forma fundamental.* Para obtermos a primeira forma fundamental basta calcularmos as expressões de E, F, G da métrica pelas expressões em coordenadas obtidas anteriormente.

Derivamos $x(u, v)$ com relação a u

$$\begin{aligned} x_u(u, v) &= \frac{\partial}{\partial u} \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \cos(u) + \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \frac{\partial}{\partial u} (\cos(u)) \\ &= -\frac{v}{2} \sin \left(\frac{u}{2} \right) \cos(u) - \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \sin(u), \end{aligned}$$

e com relação a v

$$\begin{aligned} x_v(u, v) &= \frac{\partial}{\partial v} \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \cos(u) + \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \frac{\partial}{\partial v} (\cos(u)) \\ &= \cos \left(\frac{u}{2} \right) \cos(u). \end{aligned}$$

Derivamos $y(u, v)$ com relação a u

$$\begin{aligned} y_u(u, v) &= \frac{\partial}{\partial u} \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \sin(u) + \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \frac{\partial}{\partial u} (\sin(u)) \\ &= -\frac{v}{2} \sin \left(\frac{u}{2} \right) \sin(u) + \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \cos(u), \end{aligned}$$

e com relação a v

$$\begin{aligned} y_v(u, v) &= \frac{\partial}{\partial v} \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \sin(u) + \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \frac{\partial}{\partial v} (\sin(u)) \\ &= \cos \left(\frac{u}{2} \right) \sin(u). \end{aligned}$$

Derivamos $z(u, v)$ com relação a u

$$z_u(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} \left(v \sin \left(\frac{u}{2} \right) \right) = \frac{v}{2} \cos \left(\frac{u}{2} \right),$$

e com relação a v

$$z_v(u, v) = \frac{\partial}{\partial v} \left(v \sin \left(\frac{u}{2} \right) \right) = \sin \left(\frac{u}{2} \right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle \\ &= \langle (x_u, y_u, z_u), (x_u, y_u, z_u) \rangle \\ &= x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \\ &= \left(-\frac{v}{2} \sin \left(\frac{u}{2} \right) \cos(u) - \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \sin(u) \right)^2 \\ &\quad + \left(-\frac{v}{2} \sin \left(\frac{u}{2} \right) \sin(u) + \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \cos(u) \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{v}{2} \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right)^2 \\ &= \frac{v^2}{4} \sin^2 \left(\frac{u}{2} \right) \cos^2(u) + \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right)^2 \sin^2(u) + 2 \frac{v}{2} \sin \left(\frac{u}{2} \right) \cos(u) \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \sin(u) \\ &\quad + \frac{v^2}{4} \sin^2 \left(\frac{u}{2} \right) \sin^2(u) + \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right)^2 \cos^2(u) - 2 \frac{v}{2} \sin \left(\frac{u}{2} \right) \sin(u) \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \cos(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{v^2}{4} \cos^2 \left(\frac{u}{2} \right) \\
& = \frac{v^2}{4} \sin^2 \left(\frac{u}{2} \right) + \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right)^2 + \frac{v^2}{4} \cos^2 \left(\frac{u}{2} \right) \\
& = \frac{v^2}{4} + 4 + v^2 \cos^2 \left(\frac{u}{2} \right) + 4v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \\
& = v^2 \left(\frac{1}{4} + \cos^2 \left(\frac{u}{2} \right) \right) + 4v \cos \left(\frac{u}{2} \right) + 4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F & = \langle X_u, X_v \rangle \\
& = \langle (x_u, y_u, z_u), (x_v, y_v, z_v) \rangle \\
& = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\
& = \left(-\frac{v}{2} \sin \left(\frac{u}{2} \right) \cos(u) - \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \sin(u) \right) \left(\cos \left(\frac{u}{2} \right) \cos(u) \right) \\
& \quad + \left(-\frac{v}{2} \sin \left(\frac{u}{2} \right) \sin(u) + \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \cos(u) \right) \left(\cos \left(\frac{u}{2} \right) \sin(u) \right) \\
& \quad + \left(\frac{v}{2} \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \left(\sin \left(\frac{u}{2} \right) \right) \\
& = -\frac{v}{2} \sin \left(\frac{u}{2} \right) \cos \left(\frac{u}{2} \right) \cos^2(u) - \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \sin(u) \cos \left(\frac{u}{2} \right) \cos(u) \\
& \quad - \frac{v}{2} \sin \left(\frac{u}{2} \right) \cos \left(\frac{u}{2} \right) \sin^2(u) + \left(2 + v \cos \left(\frac{u}{2} \right) \right) \cos(u) \cos \left(\frac{u}{2} \right) \sin(u) \\
& \quad + \frac{v}{2} \sin \left(\frac{u}{2} \right) \cos \left(\frac{u}{2} \right) \\
& = -\frac{v}{2} \sin \left(\frac{u}{2} \right) \cos \left(\frac{u}{2} \right) + \frac{v}{2} \sin \left(\frac{u}{2} \right) \cos \left(\frac{u}{2} \right) \\
& = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G & = \langle X_v, X_v \rangle \\
& = \langle (x_v, y_v, z_v), (x_v, y_v, z_v) \rangle \\
& = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \\
& = \left(\cos \left(\frac{u}{2} \right) \cos(u) \right)^2 + \left(\cos \left(\frac{u}{2} \right) \sin(u) \right)^2 + \left(\sin \left(\frac{u}{2} \right) \right)^2 \\
& = \cos^2 \left(\frac{u}{2} \right) \cos^2(u) + \cos^2 \left(\frac{u}{2} \right) \sin^2(u) + \sin^2 \left(\frac{u}{2} \right) \\
& = \cos^2 \left(\frac{u}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{u}{2} \right) \\
& = 1.
\end{aligned}$$

Donde obtemos a primeira forma fundamental

$$I = \begin{pmatrix} v^2 \left(\frac{1}{4} + \cos^2 \left(\frac{u}{2} \right) \right) + 4v \cos \left(\frac{u}{2} \right) + 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.3. Um panorama de geometria diferencial II através do SageMath. Próximos passos: (confirmar com o professor Márcio)

- Orientabilidade.
- Segunda forma fundamental e consequências geométricas.
- Aplicação normal de Gauss.
- Operador forma, curvatura Gaussiana, média e total.
- Derivada covariante.

- Símbolos de Christoffel³.
- Geodésicas e curvatura geodésica.
- Equações de compatibilidade.
- Teorema egrégio de Gauss.
- Teorema de Bonnet.
- Superfícies mínimas.
- Teorema de Gauss-Bonnet e aplicações.

Apresentar Notebook do SageManifolds com exemplos de cálculos simples (métricas, curvaturas, símbolos de Christoffel, plotagens,...).

³Em homenagem ao matemático e físico Elwin Bruno Christoffel.

REFERÊNCIAS

- [DC05] M. P. Do Carmo, *Geometria diferencial de curvas e superfícies*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2005. [↑1](#)