

TRATAMIENTO DE SEÑALES EN DOMINIOS FRACCIONARIOS DE FOURIER

Marcos Amaris Gonzalez*
Universidad del Magdalena
marcos.amaris@gmail.com

Dr. Rafael Ángel Torres †
Universidad Industrial de Santander
rantoram@uis.edu.co

Marzo de 2008

Resumen

En 1980 V. Namias inventó una expresión (Ecuación 1) llamada Transformación de Fourier Fraccionaria (FrFT por sus siglas en inglés), esta despertó mucho interés en la comunidad científica, la cual al realizar muchas operaciones y hallar las propiedades en su dominio, encontraron una representación de señales en tiempo-frecuencia de mucha utilidad. Aquí se muestra un nuevo algoritmo de esta función implementando el teorema de muestreo en dominios fraccionarios, se comprueban propiedades y características de la misma, una de las más importantes es que esta transformación es una rotación de la distribución de Wigner asociada a una función en un ángulo $\alpha = a\pi/2$ (a es el orden fraccionario de la transformación), y se implementa un filtro en este dominio llamado filtro de Wiener fraccionario.

En la sección 2 se presenta la ecuación propuesta por Namías, sus casos particulares, propiedades, relación con la distribución de Wigner y la convolución fraccionaria, en la sección 3 se formula un nuevo algoritmo de la transformación de Fourier fraccionaria discreta usando el teorema de muestreo en dominios fraccionarios, en la sección 4 la implementación del filtro de Wiener fraccionario, en la sección 5 los resultados computacionales y finalmente las conclusiones en la sección 6.

Palabras claves

Transformación de Fourier fraccionaria, teorema de muestreo en dominios fraccionarios y filtro de Wiener fraccionario.

Abstract

In 1980 V. Namias invented an expression (Equation 1) called Fractional Fourier Transform (FrFT), which has been of increasing interest for the scientific community, because of several unique properties of this transform. In particular, it has been found very useful for the analysis of signals in time-frequency space. Here we are proposing an algorithm of this transform which implement the sampling theorem in a fractional domain. The properties and characteristics of this transform are tested. One of the most important characteristics of this analysis is that the FrFT can be interpreted as a rotation of the Wigner distribution associated to a function for a determined angle $\alpha = a\pi/2$ (a is the order fractional of the transformation). A filter implemented in this domain is called fractional Wiener filter.

In the section 2 the equation proposed by Namías is introduced, and some for particular cases, relation with the Wigner distribution and the fractional convolution is given. In the section 3 an algorithm of the discrete fractional Fourier transform with the sampling theorem in fractional domains is presented. The implementation of the fractional Wiener filter is in the section 4. The computational results are in the section 5, and finally the conclusions in the section 6.

Keywords

Fractional Fourier transform, sampling theorem in fractional Fourier domains and fractional Wiener filter.

*Grupo IDETISUM, Programa de Ingeniería de Sistemas, Universidad del Magdalena

†Grupo de Óptica y Tratamiento de Señales (GOTS), Escuela de Física, UIS.

1. INTRODUCCIÓN

La idea de realizar una “fracción” de la transformación de Fourier aparece por primera vez en 1929 con Norbert Wiener [1]. No obstante, se tuvo que esperar hasta 1980 a que Victor Namías propusiera una nueva ecuación que pudiera dar soluciones a situaciones más generales y que pudiera ser evaluada computacionalmente, ya que la primera tenía un alto grado de dificultad por las relaciones entre sus variables [2].

Muchos científicos al ver la utilidad de la nueva propuesta de la transformación de Fourier fraccionaria se colocaron la tarea de hallar sus propiedades y principales características, y no fue sino hasta comienzos de la década de los 90’, en el año de 1993 que “reinventaron” la *FrFT* como operación para la representación de señales en tiempo-frecuencia [3, 4] la representación tiempo-frecuencia provee de un puente entre estas representaciones simultáneamente, así en cualquier instante de tiempo se puede tener información del espectro frecuencial de la señal.

Como se menciona anteriormente una las aportaciones que el grupo de científicos encontró, es que la ecuación 1 es una representación de señales en tiempo-frecuencia, siendo esta una rotación de la distribución de Wigner-Ville asociada a una señal [5, 6], esto ha traído muchas aportaciones al tratamiento de señales de muchas clases entre ellas las no estacionarias y ha sido de gran utilidad para el avance en el área del análisis de Fourier en los últimos años [5, 7], uno de estos avances es el teorema de muestreo en dominios fraccionarios [8, 9] y también nuevos filtros para marca de agua, restauración de imágenes, entre otros [7].

Con la *FrFT* surgieron también nuevas operaciones como la convolución y la correlación fraccionaria [10] las cuales han servido para la generación de nuevos enfoques y filtrados en el dominio fraccionario uno de ellos es el filtro de Wiener fraccionario [11, 12].

2. $\mathfrak{F}_\alpha[f(x)]$

La expresión propuesta por Namías en [2] está dada por la siguiente ecuación:

$$F_\alpha(y) = C_\alpha e^{i\pi y^2 \cot \alpha} \int f(x) e^{i\pi x^2 \cot \alpha} e^{-i\frac{2\pi}{\sin \alpha} xy} dx. \quad (1)$$

donde $\alpha = a\pi/2$, a es un número real que determina el orden fraccionario de la transformación (en otras

soluciones puede ser complejo), C_α es una constante que está dada por la siguiente expresión:

$$C_\alpha = \frac{e^{i(s(\alpha)\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{|\sin \alpha|}} \quad (2)$$

Donde $s(\alpha)$ representa una función sign.

La *FrFT* puede verse como una generalización de la transformación de Fourier estándar, ya que la segunda se encuentra inmersa como un caso particular de la primera [3, 4], cuando $a = 1$ entonces $\alpha = \pi/2$ y se obtendría como resultado una transformada de Fourier estándar, ver la tabla 1, en esta tabla se exponen algunas operaciones desarrolladas por la *FrFT*, las cuales corresponden a casos particulares que esta presenta según el valor del operador fraccionario a y la rotación que este produce en α .

a	$\alpha = a\pi/2$	Operador	Operación
0 ó 4	0 ó 2π	$F^0 = F^4 = I$	Identidad
1	$\pi/2$	$F^1 = F$	FT
2	π	$F^2 = FF = P$	Reflexión
3	$3\pi/2$	$F^3 = FF^2 = F^{-1}$	FT inversa

Tabla 1: Casos particulares de la *FrFT*

Se pueden encontrar varias notaciones de la transformación de Fourier fraccionaria, las cuales pueden ser utilizadas según sea el caso más conveniente al momento de utilizarla.

$$f_\alpha = \mathfrak{F}_\alpha = \mathfrak{F}_\alpha[f(x)] = \mathfrak{F}_\alpha[f].$$

2.1. Propiedades

Entre las propiedades más importantes de la *FrFT* están:

▷ P. de Linealidad. c_1 y c_2 son constantes.

$$\mathfrak{F}_\alpha[c_1 f(x) + c_2 g(x)] = c_1 \mathfrak{F}_\alpha[f(x)] + c_2 \mathfrak{F}_\alpha[g(x)] \quad (3)$$

▷ P. de la conservación de la energía

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) g^*(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_\alpha(y) g_\alpha^*(y) dy \quad (4)$$

▷ P. de corrimiento. ς variable de corrimiento.

$$\mathfrak{F}_\alpha[f(x - \varsigma)] = \mathfrak{F}_\alpha(y - \varsigma \cot \alpha) e^{i\pi \sin \alpha (\varsigma^2 \cos \alpha - 2y\varsigma)} \quad (5)$$

▷ P. de modulación

$$\mathfrak{F}_\alpha[f(x)e^{i2\pi\delta x}] = \mathfrak{F}_\alpha(y - \delta \sin \alpha) e^{-i\pi \cos \alpha (\delta^2 \sin \alpha - 2\delta y)} \quad (6)$$

▷ P. de escala. m variable de escala.

$$\mathfrak{F}_\alpha[f(mx)] = \sqrt{\cos \beta / \cos \alpha} e^{\frac{1}{2}(\alpha - \beta)} e^{i\pi y^2 \cot \alpha (1 - \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha})} f_\beta(y \frac{\sin \beta}{m \sin \alpha}), \quad (7)$$

$$\text{donde } \tan \beta = c^2 \tan \alpha.$$

2.2. Distribución de Wigner

Una de las características más importantes encontradas en la nueva expresión de la *FrFT*, es que la potencia de esta función puede ser interpretada como una rotación en un ángulo $\alpha = a\pi/2$ de la distribución de Wigner que se encuentra asociada a una señal [5]. la distribución de Wigner se halla como se muestra en la ecuación 8.

$$\mathcal{W}_f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \frac{x'}{2}) \overline{f(x - \frac{x'}{2})} e^{-2\pi i x' y} dx' \quad (8)$$

x' es una variable que se encuentra en el dominio directo x de la señal f , La distribución de Wigner es una función bidimensional que puede ser expresada como la autocorrelación de una función $f(x)$ con su transformada de Fourier $F(y)$ [6], por analogía estas dos funciones tienen el mismo número de muestras, ver figura 1. Ahora si se integra el resultado de la distribución de Wigner, quedarían las siguientes funciones:

$$|f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}_f(x, y) dy \quad (9)$$

siendo $|f(x)|^2$ la sumatoria de la variable en el dominio directo de la función f al cuadrado,

$$|F(y)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}_f(x, y) dx \quad (10)$$

$|F(y)|^2$ la sumatoria de la variable en el dominio de la frecuencia de la señal al cuadrado,

$$|f_\alpha(x_\alpha)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}_f(x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha) dy \quad (11)$$

y $|f_\alpha(x_\alpha)|^2$ es la sumatoria del valor absoluto las frecuencias de la señal en un ángulo α , siendo esta la transformada de Fourier fraccional de una función.

La transformación de Fourier fraccional representa un análisis en un ángulo α de esta correlación bidimensional pudiendo saber así el tiempo y la frecuencia de una señal en cualquier instante [3].

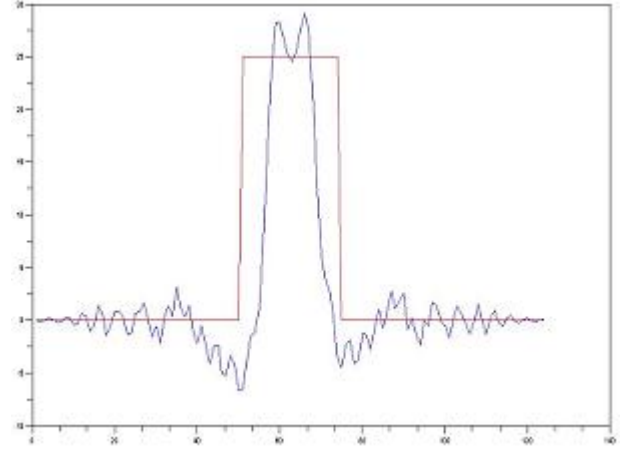


Figura 1: Tamaño de la Señal y de su Transformada son iguales

Gracias a esta relación en la actualidad la transformación de Fourier fraccional ha suplido muchas falencias que se venían realizando con otros métodos de representación de señales en tiempo-frecuencia [5], una de sus grandes utilidades es el estudio y análisis de señales no estacionarias, ver figura 2, las cuales su amplitud y frecuencia varían mucho durante un intervalo de tiempo estimado. Otros métodos de representación de señales en tiempo-frecuencia tienen como condición principal que la señal sea periódica, además, sus resultados no arrojan un espectro frecuencial útil para el análisis de señales no estacionarias.

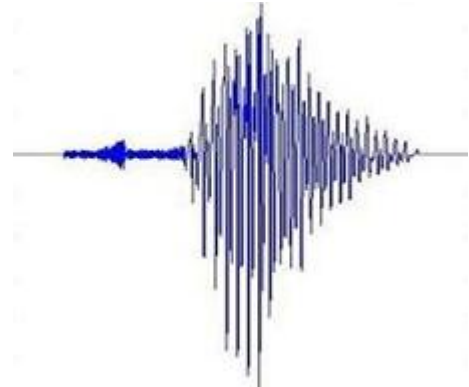


Figura 2: Señal no estacionaria

2.3. Convolución fraccionaria

Con el advenimiento del tratamiento de señales en el dominio fraccionario llegaron nuevas operaciones como la convolución y la correlación fraccionaria [7], la convolución fraccionaria de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ se denota de la siguiente manera:

$$[f \overset{*}{\alpha} g] = \mathfrak{F}_{-\alpha}[\mathfrak{F}_{\alpha}[f]\mathfrak{F}_{\alpha}[g]]$$

Teniendo en cuenta la tabla 1 se deduce que cuando el ángulo de la $FrFT$ es $\pi/2$ se realiza una transformación de Fourier estándar, por lo cual la convolución fraccionaria será una convolución estándar también, y si $\alpha = 0$ entonces se cumplirá el caso del operador identidad para ambas funciones y se realizará un simple producto entre estas dos funciones [8]. La Convolución fraccionaria se soluciona en forma de operadores aplicando la $FrFT$ como se muestra en la ecuación 12.

$$[f \overset{*}{\alpha} g](x) = \mathfrak{F}_{-\alpha}[\mathfrak{F}_{\alpha}[f](x_{\alpha})\mathfrak{F}_{\alpha}[g](x_{\alpha})e^{i\pi x^2 \cot \alpha}](x). \quad (12)$$

3. DFrFT

Con el fin de implementar el algoritmo de la $FrFT$ se discretiza la ecuación 1 y mediante un cambio de variables denotado $\hat{F}_a(k) = \mathfrak{F}^a[\hat{f}(n)]$ se obtiene la $FrFT$ de una señal f .

$$x = n\Delta x \quad y = k\Delta y$$

Δx es el espacio que hay entre cada una de la muestras de la señal f , este Δ debe ser igual o menor a 1 para que cumpla con el teorema de muestreo estándar de Shannon-Whittaker.

$$\Delta x = \frac{\xi}{N} \quad \Delta y = \frac{\zeta}{N}$$

Según lo anterior obtenemos la siguiente expresión:

$$f_{\alpha}(k) = C_{\alpha} e^{\frac{i\pi k^2 \zeta^2 \cot \alpha}{N^2}} \sum_{n=N/2}^{n=N/2-1} f(n) e^{\frac{i\pi n^2 \xi^2 \cot \alpha}{N^2}} e^{\frac{-2i\pi n k \xi \zeta}{N^2 \sin \alpha}} \quad (13)$$

Teorema 1 (Muestreo en Dominios fraccionarios)

Sea $f(x)$ una función tal que su $F_{\alpha}(y)$ tiene soporte compacto finito ζ , $f(x)$ puede ser muestreada y reconstruida perfectamente si las muestras se toman a una tasa $\Delta x \leq \sin \alpha / \zeta$.

El teorema 1 puede verse como un caso general del teorema de muestreo de Shannon-Whittaker, ya que este último se aplica cuando $a = 1$ [8]; el teorema en dominios fraccionarios permite muestrear una señal, procesarla en el dominio fraccionario y volverla a reconstruir perfectamente.

Al utilizar el teorema de muestreo en dominios fraccionarios se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{\xi}{N} = \frac{\sin \alpha}{\zeta} \Rightarrow \xi \zeta = N \sin \alpha \quad \xi = \zeta = \sqrt{N \sin \alpha}$$

y al implementar esto en la ecuación 13,

$$f_{\alpha}(k) = C_{\alpha} e^{\frac{i\pi k^2 \cos \alpha}{N}} \sum_{n=N/2}^{n=N/2-1} f(n) e^{\frac{i\pi n^2 \cos \alpha}{N}} e^{\frac{-2i\pi n k}{N}} \quad (14)$$

El kernel discreto en la ecuación 14 realiza el cálculo de la $FrFT$ en el intervalo $0,5 \leq |a| \leq 1,5$, por lo cual para hallar los valores que no están en este intervalo y forman parte del dominio fraccionario, se hace uso de la propiedad de aditividad y así llegar a la solución que se necesita.

Se observa que el kernel de la ecuación anterior también presenta el kernel de la transformación de Fourier estándar, permitiendo hacer los cálculos con base en algoritmos planteados para evaluar esta transformación. La ecuación 14 relaciona las muestras en el dominio directo de la señal f , con cada una de las muestras de su transformada en el dominio fraccionario, ya que cumple el teorema de muestreo en dominios fraccionarios en el tiempo y en la frecuencia [9].

4. FILTRO DE WIENER FRACCIONARIO

Cuando una señal es captada, esta siempre se ve distorsionada por algún ruido que intervenga en la puesta en escena de la señal, este hecho se define matemáticamente de la siguiente manera:

$$s(x) = e(x) + r(x)$$

donde $s(x)$ es la señal, $e(x)$ la escena y $r(x)$ el ruido presente. El filtro de Wiener fraccionario ha sido tratado en [7, 12], y según [11] en estos trabajos no se llegan a las expresiones explícitas ni para el filtro ni para el error. Por lo cual se hace uso de funciones de correlación y convolución fraccionaria con el fin de llegar a estas

expresiones.

En esta sección se plantea un filtro $g(x)$, de modo que la salida $h(x)$ al final del proceso de filtrado sea lo más parecidamente posible a una señal de referencia. Sea $f(x)$ una señal que presenta un ruido aditivo aleatorio en el dominio fraccionario, ver figura 3, entonces se puede extraer este ruido a través de la operación de convolución fraccionaria y el filtro que se describe en la ecuación 15.

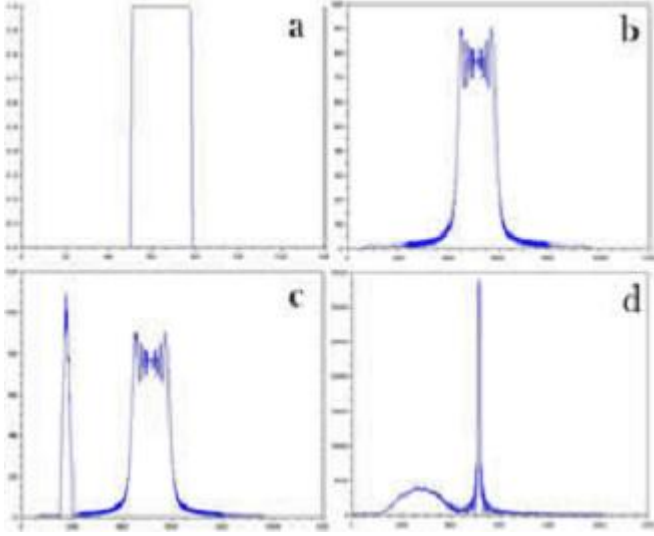


Figura 3: ruido en el dominio fraccionario

En la figura 3 en a) se muestra una función rectángulo, en b) la transformada de Fourier fraccionaria de a) con un valor fraccionario de $a = 0,5$, en c) se le agrega un ruido aditivo aleatorio a b) de manera que su espectro frecuencial en el dominio fraccionario no se vea tan afectado y en d) se regresa al dominio directo de la señal aplicando la $FrFT$ a un valor fraccionario de $a = -0,5$, la ejecución del presente trabajo se realizó en la plataforma de cálculo numérico Scilab.

Entonces el filtro estaría dado por la siguiente expresión:

$$G^\alpha(v_\alpha) = \frac{E_S^\alpha(v_\alpha)}{E_S^\alpha(v_\alpha) + R_R^\alpha(v_\alpha)} e^{-i\pi v_\alpha^2 \cot \alpha} \quad (15)$$

donde E_S^α es la transformada de Fourier fraccionaria de la señal de entrada, R_R^α es la transformada de Fourier fraccionaria del ruido que distorsiona la señal; este filtro debe ser implementado usando la convolución fraccionaria de la siguiente forma:

$$\hat{H}_y(x) = [F_y \hat{\alpha}^* g](x) \quad (16)$$

Así, este tratamiento consigue un filtrado de menor error cuadrático medio, con relación al filtrado de Wiener estándar, y eso se debe principalmente al hecho que el estimado presenta rotaciones en la distribución de Wigner de la señal y aquí se realiza el proceso de filtrado.

5. SIMULACIONES

En la figura 4 se puede observar que al aplicar la transformación de Fourier fraccionaria a una señal, el operador entre más tiende a 0, se obtiene un espectro frecuencial muy parecido a la función de entrada y entre más tiende a 1 su espectro es parecido al de la transformada de Fourier estándar, hasta llegar a 1 donde sus espectros serían los mismos, de esta forma se nota la universalidad de la $FrFT$ y la infinidad de transformaciones que se pueden obtener en el dominio fraccionario, al incrementar el valor fraccionario a en fracciones tan pequeñas como el número ϵ de los computadores modernos y utilizar la computación en paralelo, la cual permite la plataforma de cálculo Scilab de manera transparente, cuando hay un ambiente distribuido configurado.

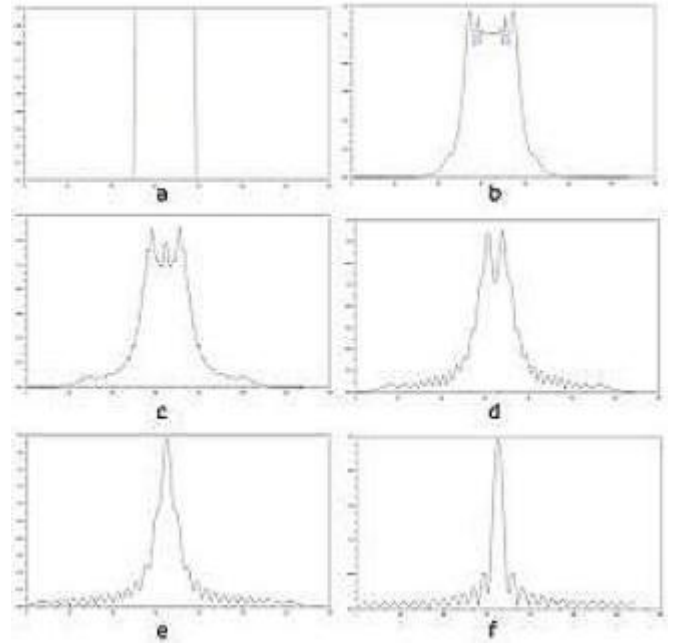


Figura 4: a) Función Rectángulo; b) $\mathfrak{F}_{0,1}$; c) $\mathfrak{F}_{0,3}$; d) $\mathfrak{F}_{0,5}$; e) $\mathfrak{F}_{0,7}$; f) $\mathfrak{F}_{0,9}$

En la figura 5 se muestra la distribución de Wigner de una señal rectángulo de 1024 muestras, la parte con luz

se llama energía frecuencial, el intervalo con más luz es donde el rectángulo tiene su base.

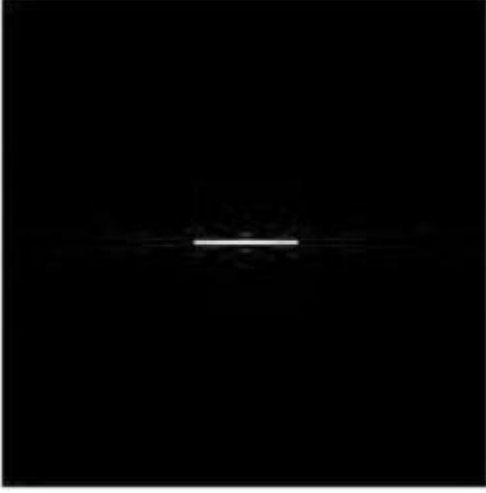


Figura 5: Distribución de Wigner de la señal rectángulo de 1024 muestras

En la figura 6 se visualizan distribuciones de Wigner de transformaciones de Fourier fraccionarias de una función rectángulo de 1024 muestras, se nota que al incrementar desde 0,1 hasta 2 el operador fraccionario a de la $FrFT$ hace que la energía frecuencial de la distribución de Wigner realice rotaciones en un ángulo $\alpha = a\pi/2$ y al final esta sigue siendo la misma, así al hallar todos estos valores la energía frecuencial de la distribución de Wigner asociada a una función rectángulo, realiza una rotación de 2π ó 360° en contra de las manecillas del reloj, las imágenes están ordenadas de izquierda a derecha y de arriba a abajo.

De la misma forma se implementa la $FrFT$ para el tratamiento señales bidimensionales aplicando el algoritmo de la transformación de Fourier fraccionaria discreta en cada una de las filas y columnas de la matriz de la imagen.

En la figura 9 se halla la transformada de Fourier estándar valiéndose de la propiedad de aditividad de la $FrFT$ y se le aplica esta función a la imagen de la figura 8 a una potencia fraccionaria de $a = 0.5$, siendo la imagen de la figura 8 la transformada de 7 en un orden fraccionario de $a = 0.5$, la propiedad de aditividad realizada en estos pasos está dada por: $\mathfrak{F}_{0,5+0,5} = \mathfrak{F}_1$.

Para el filtro de Wiener fraccionario, luego de hacer los cálculos de la ecuación 15 se obtiene la función filtro, la cual se muestra en la figura 10, se ve que esta función mantiene sus valores entre 0 y 0.006, también se nota que

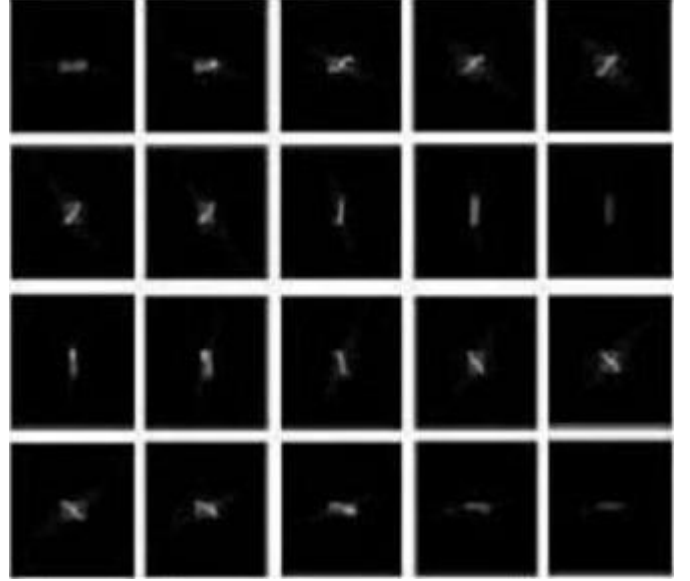


Figura 6: Rotación de Dist. Wigner de una señal rectángulo por medio de la $FrFT$

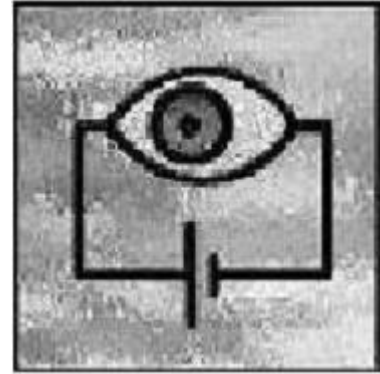


Figura 7: Imagen Tru.jpg de Scilab Image Processing

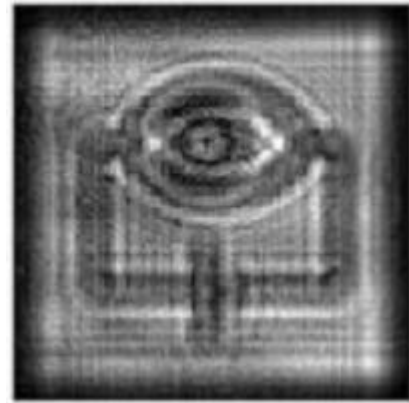


Figura 8: $FrFT$ con $a = 0,5$ en las filas y columnas



Figura 9: $FrFT$ de Tru.jpg con $a = 1 FT$

es constante donde la señal rectángulo tiene su base, este debe ser implementado como se muestra en la ecuación 16, y al realizar esta operación se obtiene lo mostrado en la figura 11.

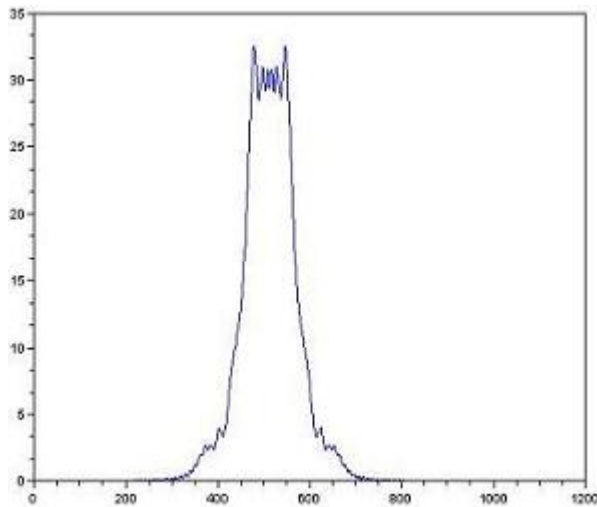


Figura 10: Filtro obtenido según ecuación 15

6. CONCLUSIONES

El estudio de señales no estacionarias siempre ha representado mayor preocupación en las ciencias y las ingenierías, ya que la mayoría de las señales en su estado natural suelen tener un comportamiento no estacionario, poder hacer una rotación de la distribución de Wigner asociada a una función [6] y utilizar esta información para el análisis, estudio y tratamiento de señales son muchas de las ventajas que tiene la Transformación de

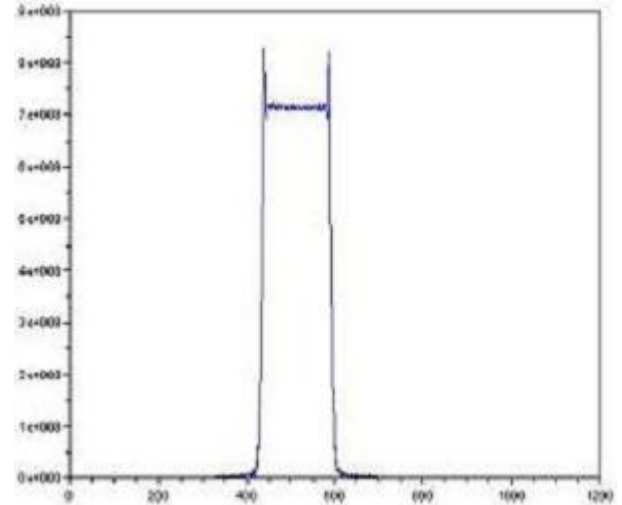


Figura 11: Después de la operación de la Ec. 16

Fourier fraccionaria.

La dependencia del filtro con el orden fraccionario a lo convierte en un filtro adaptativo y por consiguiente lo hace ideal para la restauración de señales [9], también el ángulo α se adapta a la estadística de la señal, dado que el orden a permanece como un parámetro adaptativo, esto constituye una mejora al filtro de Wiener estándar [11].

Bibliografía

- [1] Wiener. N. Hermitian polynomials and Fourier analysis. J. Math. Phys. (MIT), 8, 70-73, (1929).
- [2] V. Namias. The Fractional Order Fourier Transform and its Applications to Quantum Mechanics, J. Inst. Maths. Applies. 1980 Vol. 25: 241-265.
- [3] L. Almeida. The fractional Fourier transform and time-frequency representation. IEEE Trans. Sig. Proc. 1994. vol 42:3084-3091.
- [4] H. Ozaktas, Z. Zalevsky, et al. The Fractional Fourier Transform Applications in Optics and Signal Processing, 2001. John Wiley & Sons.
- [5] R. Saxena y S. Kulbir. Fractional Fourier transform: A novel tool for signal processing. J. Indian Inst. Sci., ene-feb 2005, Vol 85: 11-26.
- [6] D. Dragoman . Applications of the Wigner Distribution Function in signal Processing. EURASIP

Journal on Applied Signal Processing 2005 Hindawi Publishing Corporation. Vol. 10. Pág 1520-1534.

- [7] H. Ozaktas y B. Billur. Convolution, filtering, and multiplexing in fractional Fourier domains and their relation to chirp and wavelet transform. Sociedad de Óptica de América. J. Opt. Soc. Am. A Vol. 11, No. 2/February 1994. Pág. 547-559
- [8] R. Torres, P. Pellat, Y. Torres. Sampling theorem in fractional fourier domains. En «5th Iberoamerican Meeting on Optics and 8th Latin American Meeting on Optics, Lasers, and Their Applications», tomo 5622 de «Presented at the Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference». Pág1188-1192. A. Marcano O. and J. L. Paz (oct 2004).
- [9] R. Torres, P. Pellat e Y. Torres. Sampling Theorem for Fractional Bandlimited Signals: A Self-Contained Proof. Application to Digital Holography. IEEE Signal Processing Letters, Vol. 13, No. 11, Noviembre de 2006. Pág. 676-679.
- [10] R. Torres, P. Pellat-Finet e Y. Torres. Fractional convolution, fractional correlation and their translation invariance properties. Soumis 'a *Signal Processing. An International Journal of the European Association for Signal Processing (EURASIP)* (2008).
- [11] R. Torres. Tratamiento de señales por transformación de Fourier fraccionaria. Aplicaciones a la holografía sintética y al filtrado óptico. [Tesis Doctoral]. Bucaramanga, Colombia. Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander. Agosto de 2008. 134 Páginas.
- [12] Z. Zalevsky y D. Mendlovic, Fractional Wiener filter. 1996. Appl. Opt. Vol. 35, Publicación 20. Pág. 3930-3936.

Curriculos

Marcos Amaris González: Actualmente estudiante de grado del programa de Ingeniería de Sistemas de la Universidad del Magdalena, miembro del Grupo de Investigación IDETISUM. Bachiller Académico en Humanidades del Iném "Simón Bolívar" de Santa Marta. Investigador con espíritu de innovación y muchas ganas de ahondar en el porqué y cómo de las cosas.



Dr. Rafel Ángel Torres Amaris: Doctor en ciencias naturales Física (2004-2008), (Mención: Óptica y tratamiento de señales), Tesis en co-tutela Université de Bretagne Sud (Lorient, Francia) y Universidad Industrial de Santander (Bucaramanga, Colombia). Magíster y Físico de la UIS en (02/2002-12/2004) y (1995-2001) respectivamente. Publicación en curso R. Torres, P. Pellat and Y. Torres. Fractional convolution, fractional correlation and their translation invariance properties. Soumis 'a *Signal Processing. An International Journal of the European Association for Signal Processing (EURASIP)*. Docente universitario en la UIS desde el 2002.

