

# Tratamiento de señales en el dominio fraccionario de Fourier

Marcos Amaris Gonzalez  
Universidad del Magdalena  
marcos.amaris@gmail.com

Dr. Rafael Ángel Torres \*  
Universidad Industrial de Santander  
rafftorr@gmail.com

Febrero de 2009

## Abstract

Fourier optics is a branch of the physics based specifically in the Fourier Transform, it is of important applicability in signal processing of periodic phenomena in optics. However, it fails to find a value of the frequency for a function  $f(x)$  in a time estimated.

V. Namias in 1980 proposed a new transform (equation 1) called Fractional Fourier Transform [2], which has been of increasing interest for the scientific community because of several interesting properties [3, 4]; in particular, it has been found very useful for the representation of functions, this has arisen many special implementations for the signal processing [5, 6, 8]. In the Section 2 the equation proposed by Namias is presented and some of particular cases, in the Section 3 some properties given, in the Section 4 a algorithm of the theorem in fractional Fourier domains, and the implementation based on the fractional Wiener filter 5, in the section 6 the computational result and finally the conclusions section 7.

**Keywords:** fractional Fourier transform, sampling theorem in fractional Fourier domains, fractional Wiener filter.

## Resumen

La óptica de Fourier es una rama de la física basada concretamente en la Transformación de Fourier, esta resulta de gran ayuda para describir muchos fenómenos ópticos en el tratamiento de señales que sean periódicas. No obstante, esta no puede saber un valor de la frecuencia de la función  $f(x)$  en un tiempo estimado.

V. Namias en 1980 propuso una ecuación, [2] llamada Transformación de Fourier fraccionaria ( $FrFT$ ), esta despertó mucho interés en la comunidad científica la cual al realizar muchas operaciones y hallar las propiedades en su dominio [3, 4]; encontraron una representación de señales de mucha utilidad, debido a esto han surgido muchas implementaciones para el tratamiento de señales [5, 6, 8]. En la sección 2 se muestra la ecuación propuesta por Namias y algunos casos particulares que esta tiene, en la 3 algunas de sus propiedades, en la 4 se propone un algoritmo implementando el teorema de muestreo fraccionario y su implementación en el filtro de Wiener fraccionario 5, en la sección 6 su simulación computacional y al final las conclusiones sección 7.

**Palabras claves:** Transformación de Fourier fraccionaria, teorema de muestreo en dominios fraccionarios, filtro de Wiener fraccionario.

---

\*Grupo de Óptica y Procesamiento de Señales, escuela de Física, UIS.

## 1 Introducción

La idea de realizar una “fracción” de la Transformación de Fourier aparece por primera vez en 1929 con Norbert Wiener [1]. Pero se tuvo que esperar hasta 1980 a que Victor Namías propusiera una nueva ecuación, ya que la primera tenía un alto grado de dificultad por las relaciones entre sus variables [2], muchos científicos al ver la utilidad de la nueva propuesta de esta expresión se dieron a la tarea de investigar para hallar las propiedades y características y a comienzos de la década de los 90’ “reinventaron” la  $FrFT$  [3], entre ellas una interpretación de señales en tiempo frecuencia, siendo esta una rotación de la Distribución de Wigner-Ville asociada a una señal  $f(x)$  [4], esto ha traído muchas aportaciones al tratamiento de señales de muchas clases entre ellas las no estacionarias y ha servido para un gran avance en los últimos años [5].

Con la  $FrFT$  surgieron también nuevas operaciones como la convolución y la correlación fraccionaria [6] las cuales han servido para la generación de nuevos enfoques y filtrado en el dominio fraccionario entre ellos el teorema de muestreo en dominios fraccionarios [8] y el filtro de Wiener fraccionario [7] respectivamente.

## 2 $\mathfrak{F}_\alpha[f(x)]$

La expresión propuesta por Namías en [2] la cual da como resultado una transformada de Fourier fraccionaria  $F_\alpha(y)$  de una función  $f(x)$ ; está dada por la siguiente ecuación:

$$\mathfrak{F}_\alpha(y) = C_\alpha e^{i\pi y^2 \cot \alpha} \int f(x) e^{i\pi x^2 \cot \alpha} e^{-i \frac{2\pi}{\sin \alpha} xy} dx. \quad (1)$$

donde  $\alpha = a\pi/2$ ,  $a$  es un número real (para algunos casos puede ser complejo) que determina el orden fraccionario de la transformación,  $C_\alpha$  está dada por la siguiente función:

$$C_\alpha = \frac{e^{i(s(\alpha)\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{|\sin \alpha|}} \quad (2)$$

Donde  $s(\alpha)$  representa una función sign.

La  $FrFT$  puede verse como una generalización de

la Transformación de Fourier donde esta última se encuentra inmersa como un caso particular de la ecuación propuesta por Namías cuando  $a = 1$  entonces  $\alpha = \pi/2$ , ver tabla 1; se pueden encontrar varias notaciones las cuales pueden ser utilizadas según sea el caso más conveniente:

$$f_\alpha = \mathfrak{F}_\alpha = \mathfrak{F}_\alpha[f(x)] = \mathfrak{F}_\alpha[f]. \quad (3)$$

así la potencia de la fracción realizada en  $\mathfrak{F}^a$  consiste

a	$\alpha = a\pi/2$	Operador	Operación
0 ó 4	0 ó $2\pi$	$F^0 = F^4 = I$	Identidad
1	$\pi/2$	$F^1 = F$	$FT$
2	$\pi$	$F^2 = FF = P$	Reflexión
3	$3\pi/2$	$F^3 = FF^2 = F^{-1}$	$FT$ inversa

Table 1: Casos Particulares de la  $FrFT$ , según el valor del operador  $a$

en la rotación de la distribución de Wigner que se encuentra asociada a la señal en un ángulo  $\alpha = a\pi/2$  [4]. De ahí la gran relación que tiene la  $FrFT$  con la distribución de Wigner la cual se halla como se muestra en la ecuación 4.

$$\mathcal{W}_f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{x'}{2}\right) \overline{f\left(x - \frac{x'}{2}\right)} e^{-2\pi i x' y} dx' \quad (4)$$

Debido a esta relación en la actualidad la Transformación de Fourier fraccionaria ha sido implementada en el tratamiento de señales [4], y ha suplido muchas falencias que se venían realizando con los métodos anteriores, una de sus grandes utilidades es el estudio y análisis de señales no estacionarias, ver Figura 1, las cuales su amplitud y frecuencia varían mucho durante un intervalo de tiempo estimado, ya que una condición principal de la Transformación de Fourier estándar es que la información que contiene la señal en su dominio directo sea periódica en amplitud y frecuencia.

## 3 Propiedades

Entre las propiedades más importantes de la  $FrFT$  están:

**Propiedad de Linealidad**  $c_1$  y  $c_2$  son constantes.

$$\mathfrak{F}_\alpha[c_1 f(x) + c_2 g(x)] = c_1 \mathfrak{F}_\alpha[f(x)] + c_2 \mathfrak{F}_\alpha[g(x)] \quad (5)$$

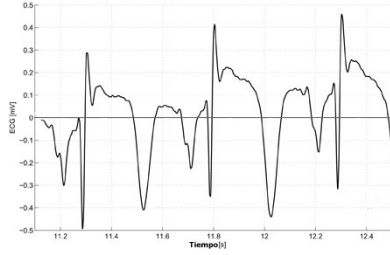


Figure 1: Señal no estacionaria

### Propiedad de la conservación de la energía

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g * (x)dx = \int_{\mathbb{R}} f_{\alpha}(y)g *_{\alpha}(y)dy \quad (6)$$

**Propiedad de corrimiento**  $\varsigma$  variable de corrimiento.

$$\mathfrak{F}_{\alpha}[f(x-\varsigma)] = \mathfrak{F}_{\alpha}(y-\varsigma \cot \alpha) e^{i\pi \sin \alpha (\varsigma^2 \cos \alpha - 2y\varsigma)} \quad (7)$$

### Propiedad de modulación

$$\mathfrak{F}_{\alpha}[f(x)e^{i2\pi\delta x}] = \mathfrak{F}_{\alpha}(y-\delta \sin \alpha) e^{-i\pi \cos \alpha (\delta^2 \sin \alpha - 2\delta y)} \quad (8)$$

**Teorema de escalamiento**  $m$  variable de escala.

$$\mathfrak{F}_{\alpha}[f(mx)] = \sqrt{\cos \beta / \cos \alpha} e^{\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} e^{i\pi y^2 \cot \alpha (1 - \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha})} f_{\beta}(y \frac{\sin \beta}{m \sin \alpha}),$$

$$\text{donde } \tan \beta = c^2 \tan \alpha.$$

**Teorema 1 (Muestreo en FrFD's)** Sea  $f(x)$  una función tal que su  $F_{\alpha}(y)$  tiene soporte compacto finito  $\zeta$ ,  $f(x)$  puede ser muestreada y reconstruida perfectamente si las muestras se toman a una tasa  $\Delta x \leq \sin \alpha / \zeta$ .

Cabe anotar que el teorema del muestreo de Shannon-Whiteker puede considerarse como un caso particular del Teorema del aquí mencionado cuando  $a = 1$  [8].

## 4 DFrFT

De la siguiente forma se hace periodica una operación  $\hat{F}_a(k) = \mathfrak{F}^a[\hat{f}(n)]$  y así podemos asociar la *FrFT* a

una señal, para lo cual se cambian las variables continuas de la ecuación 1 por las discretas:

$$\begin{aligned} x &= n\Delta x & y &= k\Delta y \\ \Delta x &= \frac{\xi}{N} & \Delta y &= \frac{\zeta}{N} \end{aligned}$$

y de esta forma la ecuación 4 queda de la siguiente forma:

$$f_{\alpha}(k) = C_{\alpha} e^{\frac{i\pi k^2 \zeta^2 \cot \alpha}{N^2}} \sum_{n=N/2}^{n=N/2-1} f(n) e^{\frac{i\pi n^2 \xi^2 \cot \alpha}{N^2}} e^{\frac{-2i\pi n k \zeta \xi}{N^2 \sin \alpha}} \quad (10)$$

al utilizar el Teorema de Muestreo en dominios fraccionarios obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{\xi}{N} = \frac{\sin \alpha}{\zeta} \Rightarrow \xi \zeta = N \sin \alpha \quad \xi = \zeta = \sqrt{N \sin \alpha}$$

$$f_{\alpha}(k) = C_{\alpha} e^{\frac{i\pi k^2 \cos \alpha}{N}} \sum_{n=N/2}^{n=N/2-1} f(n) e^{\frac{i\pi n^2 \cos \alpha}{N}} e^{\frac{-2i\pi n k}{N}} \quad (11)$$

El kernel discreto en la ecuación 11 contiene el kernel discreto de la transformación de Fourier estándar, permitiendo hacer los cálculos con base en algoritmos planteados de la transformación de Fourier estándar. [14]. En la ecuación anterior se define la Transformación de Fourier Discreta de Fourier fraccionaria, de  $N$  muestras en el dominio directo relacionadas con  $N$  muestras en el dominio fraccionario de Fourier, cumpliendo perfectamente el teorema de muestreo en el dominio fraccionario en ambos dominios.

## 5 Filtro de Wiener fraccionario

Cuando una señal es captada siempre su dominio directo se encuentra distorsionado por algún ruido que intervenga en la puesta en escena de la señal, este hecho lo podemos definir matemáticamente de la siguiente manera:

$$s(x) = e(x) + r(x) \quad (12)$$

donde  $s(x)$  es la señal;  $e(x)$  es la escena y  $r(x)$  es el ruido presente. El filtro de Wiener fraccionario ha

sido tratado en [5, 12], y según [7] en estos trabajos no se llegan a las expresiones explícitas para la ecuación de Wiener-Hopf, ni para el filtro ni para el error. Por lo cual se hace uso de funciones de correlación y convolución fraccionaria con el fin de llegar a estas expresiones explícitas.

En esta sección se plantea un filtro  $g(x)$ , de modo que la salida  $h(x)$  sea lo más parecidamente posible a una señal de referencia. Sea  $f(x)$  una señal que presenta un ruido aditivo aleatorio a través de la operación de convolución fraccionaria.

Para el caso en que  $X = [Y_\alpha^* D] + B$ , siendo  $Y$  la señal de referencia,  $B$  el ruido aditivo en la señal y  $D$  la distorsión, entonces se propone el filtro estaría dado por la siguiente expresión:

$$FrWF^\alpha(v_\alpha) = \frac{1}{D^\alpha(v_\alpha)} \frac{S_D^\alpha(v_\alpha)}{S_D^\alpha(v_\alpha) + \frac{S_B^\alpha(v_\alpha)}{S_Y^\alpha(v_\alpha)}} \quad (13)$$

donde  $D^\alpha = \mathfrak{F}_\alpha[D]$ , este filtro debe ser implementando usando la convolución fraccionaria de la siguiente forma:

$$\hat{F}_y(x) = [X_y \overset{*}{\alpha} h](x) \quad (14)$$

Así, este tratamiento consigue un filtrado de menor error cuadrático medio, con relación al filtrado de Wiener estándar, y eso es debido principalmente al hecho que el estimado presenta rotaciones en la distribución de Wigner de la señal y de esta forma realiza el proceso del filtrado.

## 6 Demostración

En la figura 2 se puede observar que el operador entre más tiende a 0, se obtiene un espectro frecuencial muy parecido a la función de entrada, y de esta forma podemos tener la información real de la frecuencia de la señal durante todo su espacio o dominio directo de la misma.

En la figura 3 se puede observar la distribución de Wigner de una señal rectángulo de 1024 muestras, y en la figura 4 se muestran las rotaciones de esta función en la distribución de wigner aplicando la Transformación de Fourier fraccionaria, desde 0.1 hasta 2 de derecha a izquierda y de arriba a abajo,

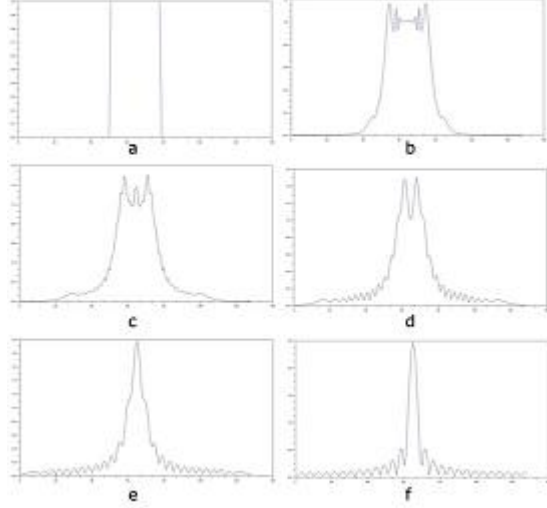


Figure 2: a) Función Rectángulo; b)  $FrFT$  con  $a=0.1$ ; c)  $FrFT$  con  $a=0.3$ ; d)  $FrFT$  con  $a=0.5$ ; e)  $FrFT$  con  $a=0.7$ ; f)  $FrFT$  con  $a=0.9$ ;

siendo el ángulo de rotación  $\alpha = a\pi/2$  y  $a$  el  $a$ -ésimo grado de fraccionalización de la  $FrFT$ .

De la misma forma se implementa la  $FrFT$  para el tratamiento imágenes realizando Transformaciones en las filas y columnas.

En la figura 7 se halló la transformada de Fourier estándar valiéndose de la propiedad de aditividad de la  $FrFT$  y se le aplica una potencia fraccionaria de  $a = 0.5$  a la señal de la figura 6, siendo esta última la transformada de 5.

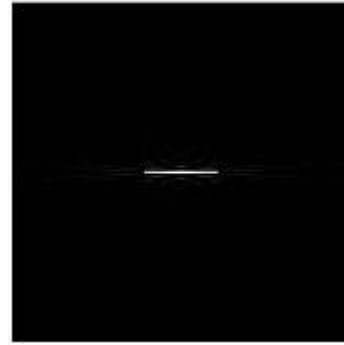


Figure 3: Distribución de Wigner de la señal rectángulo de 1024 muestras

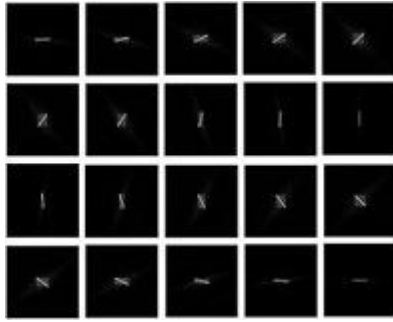


Figure 4: Rotación de Dist. Wigner de una señal rectangular por medio de la  $FrFT$

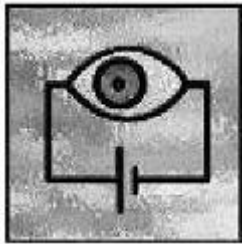


Figure 5: Imagen Tru.jpg de Scilab Image Processing

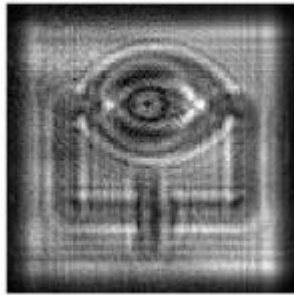


Figure 6:  $FrFT$  con  $a = 0.5$  en las filas y columnas

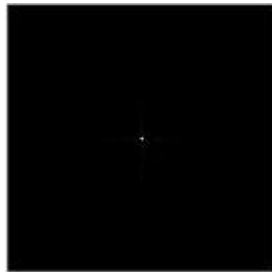


Figure 7:  $FrFT$  de Tru.jpg con  $a = 1$   $FT$

## 7 Conclusiones

El estudio de señales no estacionarias siempre ha representado mayor preocupación en el campo científico, ya que muchos factores en áreas de biofísica, electrofísica, geofísica, entre muchas otras se generan aleatoriamente a lo largo del tiempo, no obstante, poder hacer una rotación en el espacio tiempo-frecuencia, y utilizar esta información para el análisis, estudio y tratamiento de señales son muchas de las ventajas que tiene la Transformación de Fourier fraccionaria.

La dependencia del filtro con el orden fraccionario  $a$  lo convierte en un filtro adaptativo y por consiguiente lo hace ideal para la restauración de señales [14]. El ángulo  $\alpha$  se adapta a la estadística de la señal, dado que el orden  $a$  permanece como un parámetro adaptativo lo que constituye una mejora significativa al filtro de Wiener estándar el cual se encuentra en este filtro cuando  $\alpha = \pi/2$  [9].

## References

- [1] Wiener. N. Hermitian polynomials and Fourier analysis. J. Math. Phys. (MIT), 8, 70-73, (1929).
- [2] Namias V. The Fractional Order Fourier Transform and its Applications to Quantum Mechanics, J. Inst. Maths. Applics. 1980 Vol. 25: 241-265.
- [3] Almeida, L.B. The fractional Fourier transform and time-frequency representation. IEEE Trans. Sig. Proc. 1994. vol 42:3084-3091.
- [4] Saxena, R.; Kulbir S. Fractional Fourier transform: A novel tool for signal processing. J. Indian Inst. Sci., ene-feb 2005, Vol 85: 11-26.
- [5] Ozaktas H. Barshan Billur. Convolution, filtering, and multiplexing in fractional Fourier domains and their relation to chirp and wavelet transform. Sociedad de Óptica de América. J. Opt. Soc. Am. A Vol. 11, No. 2/February 1994. Pág. 547-559
- [6] R. Torres, P. Pellat-Finet y Y. Torres. Fractional convolution, fractional correlation and their translation invariance properties. Soumis 'a Signal Processing. An International Journal of

*the European Association for Signal Processing (EURASIP)* (2008).

- [7] Torres R. Tratamiento de señales por transformación de Fourier fraccionaria. Aplicaciones a la holografía sintética y al filtrado óptico. [Tesis Doctoral]. Bucaramanga, Colombia. Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander. Agosto de 2008. 134 Páginas.
- [8] R. Torres, P. Pellat-Finet y Y. M. Torres Moreno. Sampling theorem in fractional fourier domains. En "'5th Iberoamerican Meeting on Optics and 8th Latin American Meeting on Optics, Lasers, and Their Applications'", tomo 5622 de "'Presented at the Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference'". Pág1188-1192. A. Marcano O. and J. L. Paz (oct 2004).
- [9] Tsai-Sheng K. Wiener Filter as an Optimal MMSE Interpolator. Taipei, Taiwan PWASET Vol. 24 Octubre de 2007 ISSN 1307-6884. 216-218.
- [10] Arikan O. Kutay A. Özaktaş H. Akdemir. The Discrete Fractional fourier Transformation. 1996. TFTS. Pág. 205-207.
- [11] Bultheel, A; Martínez H; Computation of the Fractional Fourier Transform; Dept. of Computer Science, Celestijnenlaan 200A, B-3001 Leuven.
- [12] Z. Zalevsky and D. Mendlovic, Fractional Wiener filter. 1996. Appl. Opt. Vol. 35, Publicación 20. Pág. 3930-3936.
- [13] Yang et al. Improved fast fractional-Fourier-transform algorithm. Vol. 21, No. 9/Septiembre 2004/ J. Opt. Soc. Am. A Pág. 1677-1681
- [14] Torres R. Pellat-Finet P. Torres Y. Sampling Theorem for Fractional Bandlimited Signals: A Self-Contained Proof. Application to Digital Holography. IEEE Signal Processing Letters, Vol. 13, No. 11, Noviembre de 2006. Pág. 676-679.