ECAC03 – Controle Moderno e Avançado

Universidade Federal de Itajubá

Engenharia de Controle e Automação

Aula 03

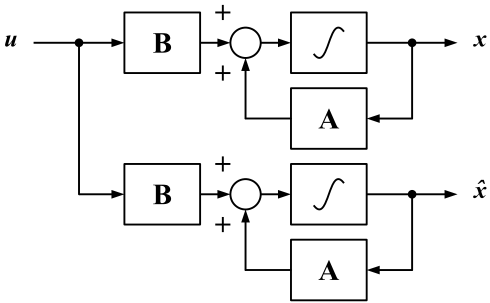
Realimentação de Saída

Prof. Dr. Luís Henrique de Carvalho Ferreira

Notas de Aula – 2023

Observador de estados

- A retroação de estados é baseada na suposição de que o (vetor de) estado está disponível através de uma medição direta das variáveis de estado, o que pode ser inviável em um cenário real, seja por uma incapacidade técnica ou pelo custo envolvido.



- Todavia, as variáveis de estado podem ser estimadas através de um observador de estados.

Observador de estados

- Um observador de estados é um sistema dinâmico fictício que gera uma estimativa do (vetor de) estado do sistema dinâmico real por emular a sua descrição em espaço de estados.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad y(t) = Cx(t)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) \qquad \hat{y}(t) = C\hat{x}(t)$$

- Note que, mesmo para uma descrição em espaço de estados assintoticamente estável, há um erro de estimação causado pela diferença entre as condições iniciais reais (desconhecidas, a priori) e as estimadas (nulas, por opção).

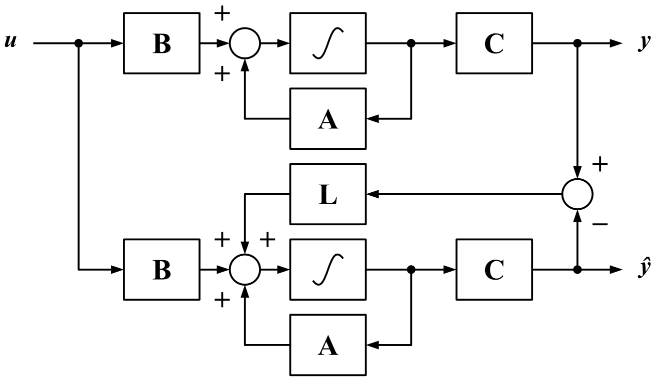
$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t) \qquad \dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t)$$

$$\tilde{y}(t) = y(t) - \hat{y}(t) \qquad \tilde{y}(t) = C\tilde{x}(t)$$

$$\tilde{x}(t) = e^{At}\tilde{x}(0)$$

Observador de estados

- Considere um observador de estados em que a diferença entre a saída original e a estimada seja realimentada de maneira a modificar a sua própria dinâmica (isto é, estabilidade, velocidade, etc.), como proposto por Luenberger em 1966.



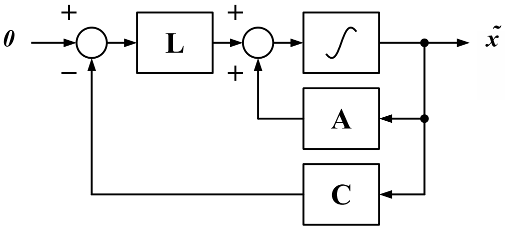
Observador de estados

- Considere a equação de estado de um sistema dinâmico linear e invariante no tempo e a lei de observação de estados:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t)$$

- Os elementos de L são reais e constantes. Do ponto de vista do erro de estimação, o comportamento da observação de estados é análogo ao da retroação de estados.



Observador de estados

- A equação de erro de estimação pode ser escrita por:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A - LC)\tilde{x}(t)$$

- Note que o sistema dinâmico passa a ser definido pela resposta de entrada nula, sendo a escolha do vetor de ganho de observação fundamental para que o observador de estados seja assintoticamente estável e o erro de estimação seja consequentemente nulo em regime permanente.

$$\det(sI - A + LC) = \prod_{i=1}^{n}(s - \mu_i)$$

- Para uma descrição em espaço de estados observável, os modos do observador de Luenberger são de alocação arbitrária em um procedimento conhecido como alocação de polos.

Observador de estados

- O vetor de ganho de observação também possui solução fechada dada pela fórmula de Ackermann.

$$L = \prod_{i=1}^{n} (A - \mu_i I) M_O^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Exemplos:

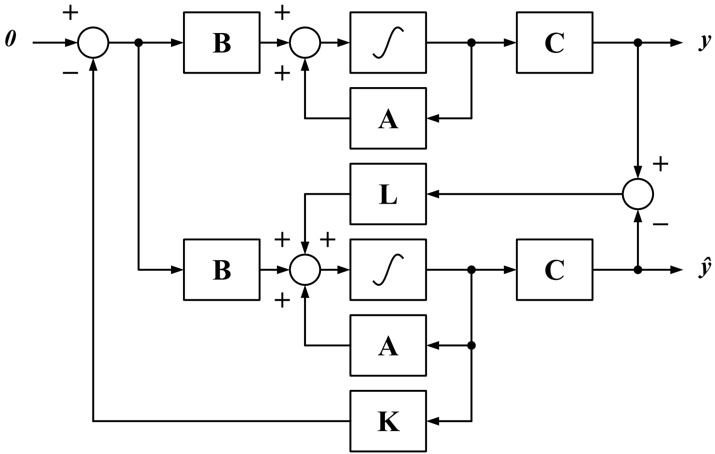
$$G_1(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$G_2(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s-1)}$$

$$G_3(s) = \frac{s-2}{s(s+1)}$$

Retroação de estados observados

- Considere uma lei de retroação de estados dada pela estimativa do (vetor de) estado dada pelo observador de Luenberger.



Retroação de estados observados

- A descrição em espaço de estados de um sistema dinâmico linear e invariante no tempo e a lei de retroação de estados observados podem ser escritas por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t)$$

$$u(t) = -K\hat{x}(t)$$

- Note que o sistema dinâmico passa a ser definido pela resposta de entrada nula, sendo que ambos os vetores de ganho impactam diretamente na estabilidade assintótica.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

Retroação de estados observados

- Observe também que, do ponto de vista do erro de estimação, o sistema dinâmico resultante pode ser reescrito por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\tilde{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix}$$

- Para a retroação de estados observados vale o *princípio da separação*, no qual os modos do sistema dinâmico em questão são dados pelos modos da retroação de estados e os do observador de estados (obtidos separadamente).

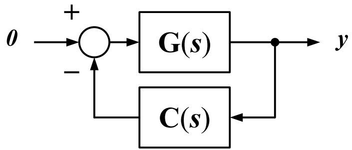
$$\det\left(sI - \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix}\right) = \det(sI - A + BK) \times \det(sI - A + LC)$$

Controlador baseado em observador de estados

- Assumindo as condições iniciais nulas, a lei de retroação com observador de estados no domínio de Laplace é dada por:

$$u(s) = -K(sI - A + BK + LC)^{-1}Ly(s)$$

- Note que a lei de retroação de estados observados recupera a ideia clássica da malha de controle: os blocos da planta e do controlador em uma realimentação negativa.

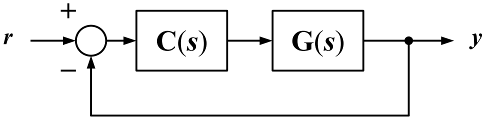


$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$C(s) = K(sI - A + BK + LC)^{-1}L$$

Controle com 1-DOF

- Note também que os blocos da planta e do controlador podem ser reorganizados em uma malha de controle com 1-DOF.



- Para uma descrição em espaço de estados mínima (controlável e observável), todos os modos do sistema dinâmico resultante são de alocação arbitrária.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\tilde{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix} r(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix}$$