ECAC03 – Controle Moderno e Avançado

Universidade Federal de Itajubá

Engenharia de Controle e Automação

Aula 06

Observadores de Estados (Tempo Discreto)

Prof. Dr. Luís Henrique de Carvalho Ferreira

Notas de Aula – 2023

Observador de estados

- Considere a equação de estado discreta de um sistema dinâmico linear e invariante no tempo e a lei de observação de estados que contempla tanto o método explícito quanto o implícito:

$$x(k+1) = \bar{A}x(k) + \bar{B}u(k)$$

$$q(k) = (I - \bar{L}C)\bar{q}(k) + \bar{L}y(k) \qquad \bar{q}(k+1) = \bar{A}q(k) + \bar{B}u(k)$$

- Os elementos de $\bar{L}$ são reais e constantes. De maneira análoga a da integração númerica, existe uma estimativa preditiva e uma estimativa corrente do (vetor) de estado em tempo discreto.

$$\bar{q}(k+1) = \bar{A}(I - \bar{L}C)\bar{q}(k) + \bar{B}u(k) + \bar{A}\bar{L}y(k)$$

$$q(k+1) = (I - \bar{L}C)\bar{A}q(k) + (I - \bar{L}C)\bar{B}u(k) + \bar{L}y(k+1)$$

Observador de estados

- A equação de erro de estimação pode ser escrita por:

$$\bar{e}(k) = x(k) - \bar{q}(k) \qquad \bar{e}(k+1) = \bar{A}(I - \bar{L}C)\bar{e}(k)$$

$$e(k) = x(k) - q(k) \qquad e(k+1) = (I - \bar{L}C)\bar{A}e(k)$$

$$e(k) = (I - \bar{L}C)\bar{e}(k)$$

- Note que o sistema dinâmico passa a ser definido pela resposta de entrada nula, sendo a escolha do vetor de ganho de observação fundamental para que o observador de estados seja assintoticamente estável e o erro de estimação seja consequentemente nulo em regime permanente.

$$\det(zI - \bar{A} + \bar{A}\bar{L}C) = \prod_{i=1}^{n}(z - \bar{\mu}_i)$$

- Para uma descrição em espaço de estados observável, os modos do observador de Luenberger são de alocação arbitrária em um procedimento conhecido como alocação de polos.

Retroação com observador de estados

- A descrição em espaço de estados discreta de um sistema dinâmico linear e invariante no tempo e a lei de retroação com observador de estados preditivo pode ser escrita por:

$$x(k+1) = \bar{A}x(k) + \bar{B}u(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

$$\bar{q}(k+1) = \bar{A}(I - \bar{L}C)\bar{q}(k) + \bar{B}u(k) + \bar{A}\bar{L}y(k)$$

$$u(k) = -\bar{K}\bar{q}(k)$$

- Note que o sistema dinâmico passa a ser definido pela resposta de entrada nula, sendo que ambos os vetores de ganho impactam diretamente na estabilidade assintótica.

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \bar{q}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & -\bar{B}\bar{K} \\ \bar{A}\bar{L}C & \bar{A}(I - \bar{L}C) - \bar{B}\bar{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \bar{q}(k) \end{bmatrix}$$

Retroação com observador de estados

- Observe também que, do ponto de vista do erro de estimação preditivo, o sistema dinâmico resultante pode ser reescrito por:

$$\left[\begin{array}{c} x(k+1) \\ \bar{e}(k+1) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \bar{A}-\bar{B}\bar{K} & \bar{B}\bar{K} \\ 0 & \bar{A}(I-\bar{L}C) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x(k) \\ \bar{e}(k) \end{array}\right]$$

- Para a retroação com observador de estados preditivo vale o *princípio da separação*, no qual os modos do sistema dinâmico em questão são dados pelos modos da retroação de estados e os do observador de estados (obtidos separadamente).

$$\begin{aligned} \det\left(zI - \left[\begin{array}{cc} \bar{A} & -\bar{B}\bar{K} \\ \bar{A}\bar{L}C & \bar{A}(I-\bar{L}C)-\bar{B}\bar{K} \end{array}\right]\right) &= \det(zI-\bar{A}+\bar{B}\bar{K}) \\ &\quad \times \det(zI-\bar{A}+\bar{A}\bar{L}C) \end{aligned}$$

Retroação com observador de estados

- A descrição em espaço de estados discreta de um sistema dinâmico linear e invariante no tempo e a lei de retroação com observador de estados corrente pode ser escrita por:

$$x(k+1) = \bar{A}x(k) + \bar{B}u(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

$$\bar{q}(k+1) = \bar{A}(I - \bar{L}C)\bar{q}(k) + \bar{B}u(k) + \bar{A}\bar{L}y(k)$$

$$u(k) = -\bar{K}(I - \bar{L}C)\bar{q}(k) - \bar{K}\bar{L}y(k)$$

- Note que o sistema dinâmico resultante passa a ser definido por sua resposta natural, sendo que os vetores de ganho impactam mutuamente na estabilidade assintótica.

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \bar{q}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} - \bar{B}\bar{K}\bar{L}C & -\bar{B}\bar{K}(I - \bar{L}C) \\ (\bar{A} - \bar{B}\bar{K})\bar{L}C & (\bar{A} - \bar{B}\bar{K})(I - \bar{L}C) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \bar{q}(k) \end{bmatrix}$$

Retroação com observador de estados

- Note também que, do ponto de vista do erro de estimação preditivo, o sistema dinâmico resultante pode ser reescrito por:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \bar{e}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} - \bar{B}\bar{K} & \bar{B}\bar{K}(I - \bar{L}C) \\ 0 & \bar{A}(I - \bar{L}C) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \bar{e}(k) \end{bmatrix}$$

- A retroação com observador de estados obedece ao princípio da separação, no qual os modos do sistema dinâmico em questão são dados pelos modos da retroação de estados e os do observador de estados (obtidos separadamente).

$$\begin{aligned} \det\left(zI - \begin{bmatrix} \bar{A} - \bar{B}\bar{K}\bar{L}C & -\bar{B}\bar{K}(I - \bar{L}C) \\ (\bar{A} - \bar{B}\bar{K})\bar{L}C & (\bar{A} - \bar{B}\bar{K})(I - \bar{L}C) \end{bmatrix} \right) &= \det(zI - \bar{A} + \bar{B}\bar{K}) \\ &\quad \times \det(zI - \bar{A} + \bar{A}\bar{L}C) \end{aligned}$$

Retroação com observador de estados

- A descrição em espaço de estados discreta de um sistema dinâmico linear e invariante no tempo e a lei de retroação com observador de estados corrente pode ser escrita por:

$$x(k+1) = \bar{A}x(k) + \bar{B}u(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

$$q(k+1) = (I - \bar{L}C)\bar{A}q(k) + (I - \bar{L}C)\bar{B}u(k) + \bar{L}y(k+1)$$

$$u(k) = -\bar{K}q(k)$$

- Note que o sistema dinâmico resultante passa a ser definido por sua resposta natural, sendo que os vetores de ganho impactam mutuamente na estabilidade assintótica.

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ q(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & -\bar{B}\bar{K} \\ \bar{L}C\bar{A} & (I - \bar{L}C)\bar{A} - \bar{B}\bar{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ q(k) \end{bmatrix}$$

Retroação com observador de estados

- Note também que, do ponto de vista do erro de estimação corrente, o sistema dinâmico resultante pode ser reescrito por:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ e(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} - \bar{B}\bar{K} & \bar{B}\bar{K} \\ 0 & (I - \bar{L}C)\bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ e(k) \end{bmatrix}$$

- A retroação com observador de estados obedece ao princípio da separação, no qual os modos do sistema dinâmico em questão são dados pelos modos da retroação de estados e os do observador de estados (obtidos separadamente).

$$\begin{aligned} \det\left(zI - \begin{bmatrix} \bar{A} & -\bar{B}\bar{K} \\ \bar{L}C\bar{A} & (I - \bar{L}C)\bar{A} - \bar{B}\bar{K} \end{bmatrix}\right) &= \det(zI - \bar{A} + \bar{B}\bar{K}) \\ &\quad \times \det(zI - \bar{A} + \bar{L}C\bar{A}) \end{aligned}$$