# ECAC03 – Controle Moderno e Avançado

Universidade Federal de Itajubá

Engenharia de Controle e Automação

**Aula 05**

**Retroação de Estados (Tempo Discreto)**

Prof. Dr. Luís Henrique de Carvalho Ferreira

Notas de Aula – 2023

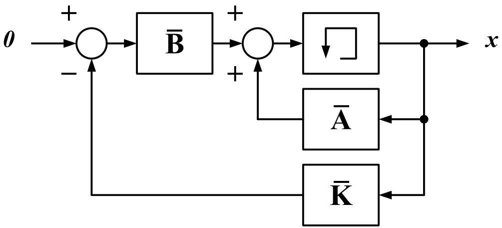
# Retroação de estados

- Considere a equação de estado de um sistema dinâmico linear e invariante no tempo e a lei de retroação de estados:

$$x(k+1) = \bar{A}x(k) + \bar{B}u(k)$$

$$u(k) = -\bar{K}x(k)$$

- Os elementos de $\bar{K}$ são reais e constantes. Tal descrição pode ser reescrita na forma de um diagrama de blocos, evidenciando como o (vetor de) estado atua na entrada do sistema dinâmico.



# Retroação de estados

- Neste cenário, a equação de estado pode ser reescrita por:

$$x(k+1) = (\bar{A} - \bar{B}\bar{K})x(k)$$

- Note que o sistema dinâmico passa a ser definido pela resposta de entrada nula, sendo a escolha do vetor de ganho de retroação fundamental para que o sistema dinâmico em questão seja assintoticamente estável.

$$\det(zI - \bar{A} + \bar{B}\bar{K}) = \prod_{i=1}^{n}(z - \bar{\mu}_i)$$

- Para uma descrição em espaço de estados controlável, os modos do sistema dinâmico resultante são de alocação arbitrária em um procedimento conhecido como alocação de polos.

# Retroação de estados

- O vetor de ganho de retroação que satisfaz a alocação de polos possui solução fechada, como demonstrado por Ackermann em 1972.

$$\bar{K} = \left[\begin{array}{cccc} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right] \bar{M}_C^{-1} \prod_{i=1}^{n} (\bar{A} - \bar{\mu}_i I)$$

- Exemplos:

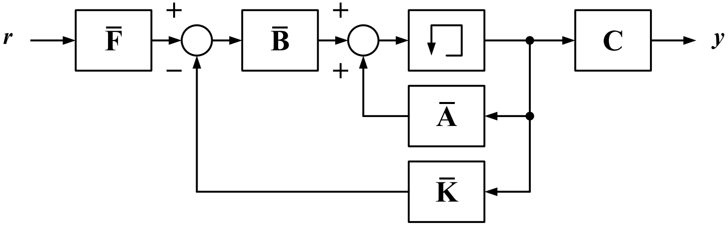
$$G_1(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$G_2(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s-1)}$$

$$G_3(s) = \frac{s-2}{s(s+1)}$$

# Retroação de estados com feedforward

- O diagrama de blocos representa um sistema dinâmico linear e invariante no tempo controlado por uma lei de retroação de estados com um ganho de feedforward.




- Das interconexões, tem-se que:

$$x(k+1) = \bar{A}x(k) + \bar{B}u(k)$$

$$u(k) = \bar{F}r(k) - \bar{K}x(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

# Retroação de estados com feedforward

- Note que para uma descrição em espaço de estados controlável, todos os modos do sistema dinâmico resultante (abaixo) são de alocação arbitrária.

$$x(k+1) = (\bar{A} - \bar{B}\bar{K})x(k) + \bar{B}\bar{F}r(k)$$
$$y(k) = Cx(k)$$

- O ganho de feedforward não influencia na análise sobre a estabilidade assintótica; entretanto, tem grande impacto na resposta do sistema dinâmico em regime permanente.

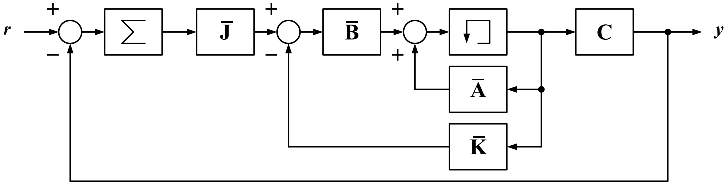
$$X = (\bar{A} - \bar{B}\bar{K})X + \bar{B}\bar{F}R$$
$$Y = CX$$

- A saída irá rastrear um valor constante da referência em regime permanente se o ganho de feedforward for dado por:

$$\bar{F} = -[C(\bar{A} - \bar{B}\bar{K} - I)^{-1}\bar{B}]^{-1}$$

# Retroação de estados com expansão de polos

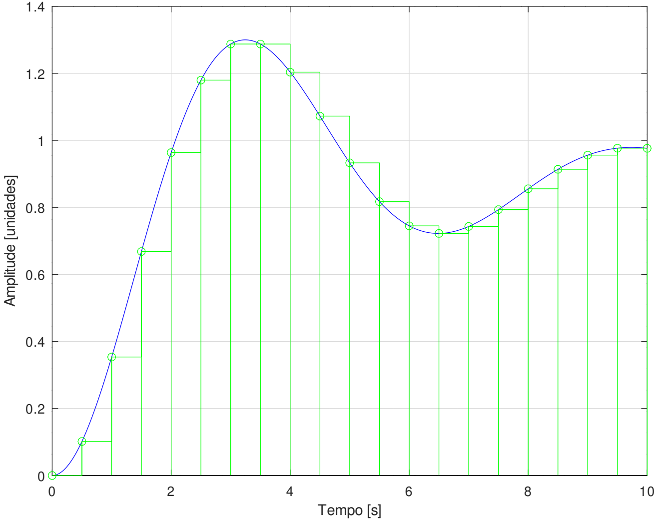
- O diagrama de blocos representa um sistema dinâmico linear e invariante no tempo controlado por uma lei de retroação de estados com uma expansão de polos (um somatório).




- Recorde que o integrador é uma variável de estado em tempo contínuo; contudo, isto não acontece em tempo discreto. Assim, é necessário recorrer aos métodos de integração numérica, tal como o método de Euler explícito.

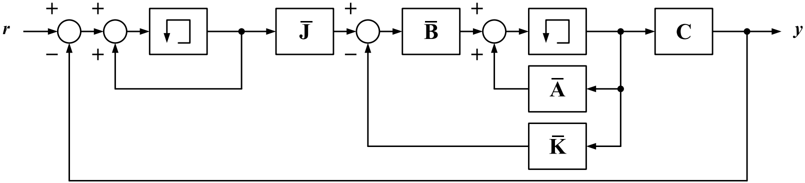
$$e(kT+T) = e(kT) + Tf(kT)$$

# Método de Euler explícito



# Retroação de estados com expansão de polos

- Assim, o diagrama de blocos representa uma lei de retroação de estados com uma expansão de polos dada por uma integração numérica pelo método de Euler explícito.




- Das interconexões, tem-se que:

$$x(k+1) = \bar{A}x(k) + \bar{B}u(k) \qquad e(k+1) - e(k) = r(k) - y(k)$$

$$u(k) = \bar{J}e(k) - \bar{K}x(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

# Retroação de estados com expansão de polos

- Estas equações podem ser reescritas em uma forma matricial (assumindo a referência nula), dada por:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ e(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & 0 \\ -C & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B} \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$u(k) = -\begin{bmatrix} \bar{K} & -\bar{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ e(k) \end{bmatrix}$$

- Note que, caso a expansão da descrição em espaço de estados seja controlável, todos os modos do sistema dinâmico resultante (abaixo) serão de alocação arbitrária.

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ e(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} - \bar{B}\bar{K} & \bar{B}\bar{J} \\ -C & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ e(k) \end{bmatrix}$$

# Retroação de estados com expansão de polos

- Note que a integração numérica pelo método de Euler explícito possui a equação convenientemente fatorada para a expansão da descrição em espaço de estados. Porém, ela apresenta uma característica preditiva; ou seja, a amostra atual do sinal influencia apenas no valor futuro de sua integral.

$$e(kT+T) = e(kT) + Tf(kT)$$

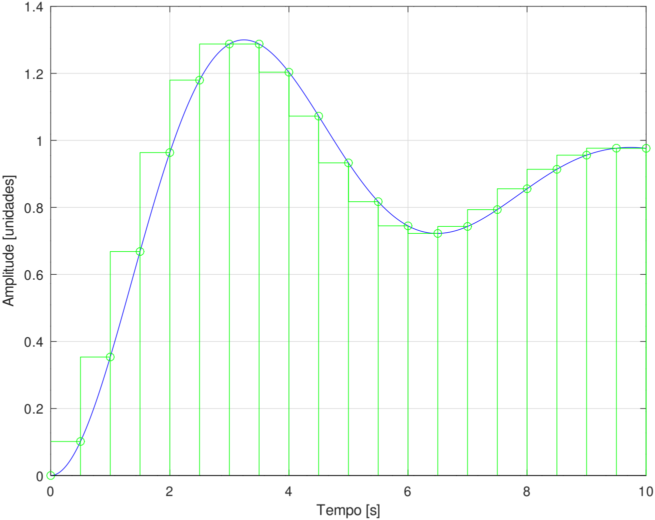
- Uma forma de tornar a integração corrente (atual) é utilizar a integração numérica pelo método de Euler implícito.

$$i(kT) = e(kT) + Tf(kT)$$

$$e(kT+T) = i(kT)$$

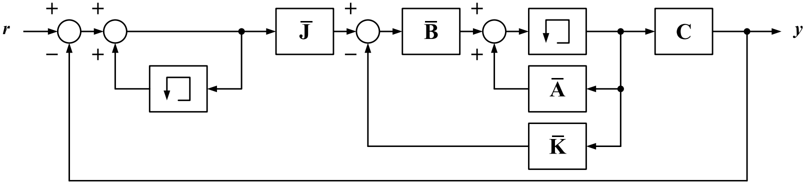
$$i(kT+T) = i(kT) + Tf(kT+T)$$

# Método de Euler implícito



# Retroação de estados com expansão de polos

- Assim, o diagrama de blocos representa uma lei de retroação de estados com uma expansão de polos dada por uma integração numérica pelo método de Euler implícito.




- Das interconexões, tem-se que:

$$x(k+1) = \bar{A}x(k) + \bar{B}u(k) \qquad e(k+1) - e(k) = r(k) - y(k)$$

$$u(k) = \bar{J}e(k+1) - \bar{K}x(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

# Retroação de estados com expansão de polos

- Estas equações podem ser reescritas em uma forma matricial (assumindo a referência nula), dada por:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ e(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & 0 \\ -C & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B} \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$u(k) = -\begin{bmatrix} \bar{K} + \bar{J}C & -\bar{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ e(k) \end{bmatrix}$$

- Note que, caso a expansão da descrição em espaço de estados seja controlável, todos os modos do sistema dinâmico resultante (abaixo) serão de alocação arbitrária.

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ e(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} - \bar{B}(\bar{K} + \bar{J}C) & \bar{B}\bar{J} \\ -C & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}\bar{J} \\ 1 \end{bmatrix} r(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ e(k) \end{bmatrix}$$