ECAC03 – Controle Moderno e Avançado

Universidade Federal de Itajubá

Engenharia de Controle e Automação

Aula 04

Discretização

Prof. Dr. Luís Henrique de Carvalho Ferreira

Notas de Aula – 2023

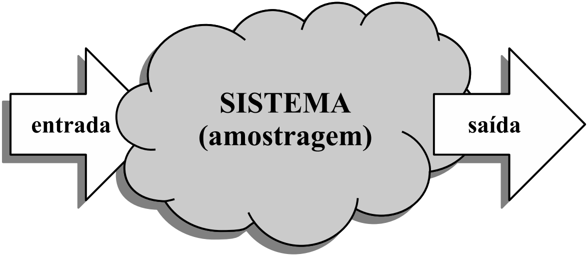
Discretização

- Relembrando que para um sistema dinâmico linear e invariante no tempo, a descrição em espaço de estados é dada por:

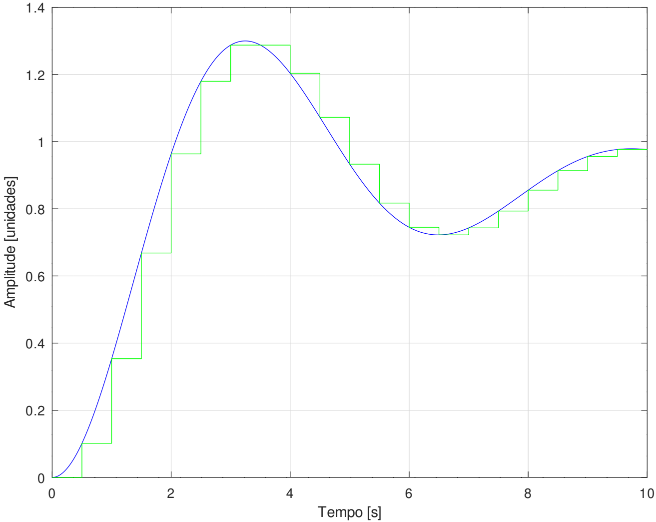
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- A partir de agora, considere um retentor de ordem zero de maneira que a entrada do sistema dinâmico permaneça constante durante todo o período entre duas amostras consecutivas.



Discretização



Discretização

- Para analisar o impacto do retentor de ordem zero na dinâmica em si, considere a solução da equação de estado definida entre dois instantes quaisquer:

$$x(t_2) = e^{A(t_2 - t_1)} x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} e^{A(t_2 - \tau)} B u(\tau) d\tau$$

- Assumindo um período de amostragem constante, tem-se que $t_1 = kT$ (a amostra atual) e $t_2 = kT + T$ (a amostra futura) entre duas amostras consecutivas. Assim, a solução da equação de estado passa a ser dada por:

$$x(kT + T) = e^{AT} x(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{A(kT+T-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

Discretização

- A entrada do sistema dinâmico é definida na amostra atual e é constante durante o período $kT < t < kT + T$.

$$x(kT+T) = e^{AT}x(kT) + \left(\int_{kT}^{kT+T} e^{A(kT+T-\tau)}d\tau\right) Bu(kT)$$

$$x(kT+T) = e^{AT}x(kT) + \left(\int_{0}^{T} e^{Av}dv\right) Bu(kT)$$

- Para manter uma compatibilidade de notação, define-se:

$$\bar{A} = e^{AT} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{T^i}{i!}A^i$$

$$\bar{B} = \left(\int_{0}^{T} e^{Av}dv\right) B = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{T^i}{i!}A^{i-1}B$$

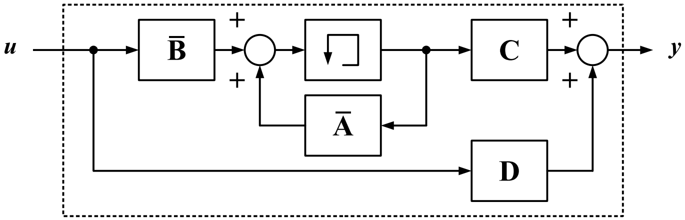
Descrição em espaço de estados

- Assim, para um sistema dinâmico linear e invariante no tempo, a descrição em espaço de estados (tempo discreto) é dada por:

$$x(k+1) = \bar{A}x(k) + \bar{B}u(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

- Tal descrição pode ser reescrita na forma de um diagrama de blocos, evidenciando como a sequência de amostras impactam no (vetor de) estado e na saída do sistema dinâmico.



Resposta temporal

- As soluções da equação de estado e de saída são dadas por:

$$x(k) = \bar{A}^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \bar{A}^{k-1-i} \bar{B} u(i)$$

$$y(k) = C\bar{A}^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} C\bar{A}^{k-1-i} \bar{B} u(i) + Du(k)$$

- $\bar{A}^k$ é a nova matriz de transição de estado. Assim como no caso contínuo, a resposta temporal é composta por duas parcelas: a resposta de entrada nula e a resposta de estado nulo. Recorde que a descrição em espaço de estados de um sistema dinâmico é assintoticamente estável se o (vetor de) estado tender ao estado nulo para qualquer estado inicial na resposta de entrada nula; fato que está ligado à matriz de transição de estado.

Estabilidade assintótica

- Recorde também que, para cada autovalor, são associados dois autovetores, um à direita e outro à esquerda, tal que:

$$(\bar{\lambda}_i I - \bar{A})\bar{v}_i = 0$$

$$\bar{w}_i'(\bar{\lambda}_i I - \bar{A}) = 0 \iff (\bar{\lambda}_i I - \bar{A}')\bar{w}_i = 0$$

- A matriz de transição de estado pode ser decomposta em:

$$\bar{A} = \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i \bar{v}_i \bar{w}_i' \Longrightarrow \bar{A}^k = \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i^k \bar{v}_i \bar{w}_i'$$

- $\bar{\lambda}_i^k$ é o novo i-ésimo modo do sistema dinâmico. Assim, a descrição em espaço de estados de um sistema linear e invariante no tempo é assintoticamente estável se, e somente se, os modos estão associados a autovalores com módulo menor que 1.

Controlabilidade e observabilidade

- A descrição em espaço de estados de um sistema dinâmico linear e invariante no tempo é controlável se a matriz de controlabilidade (ou é observável se a matriz de observabilidade) for de posto completo.

$$\bar{M}_C = \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \bar{A}^2\bar{B} & \cdots & \bar{A}^{n-1}\bar{B} \end{bmatrix}$$

$$\bar{M}_O = \begin{bmatrix} C \\ C\bar{A} \\ C\bar{A}^2 \\ \vdots \\ C\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

- Assim, as matrizes de controlabilidade e observabilidade necessitam ter todas linhas ou colunas linearmente independentes.

$$\det(\bar{M}_C) \neq 0 \qquad \det(\bar{M}_O) \neq 0$$

Função de transferência

- De forma análoga ao caso contínuo, a função de transferência é definida como a transformada Z da resposta ao impulso unitário quando as condições iniciais são nulas.

$$zx(z) - zx(0) = \bar{A}x(z) + \bar{B}u(z)$$

$$y(z) = Cx(z) + Du(z)$$

$$y(z) = zC(zI - \bar{A})^{-1}x(0) + [C(zI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + D]u(z)$$

- Recorde que a função de transferência descreve de forma única a relação da entrada para a saída, diferentemente da descrição em espaço de estados.

$$G(z) = C(zI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + D$$

$$CU^{-1}(zI - U\bar{A}U^{-1})^{-1}U\bar{B} + D = C(zI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + D$$

Função de transferência

- Recorde também que a função de transferência pode ser reescrita como:

$$G(z) = \frac{C\,\mathrm{adj}(zI - \bar{A})\bar{B} + D\det(zI - \bar{A})}{\det(zI - \bar{A})}$$

- Os polos do sistema dinâmico são matematicamente iguais aos autovalores da matriz $\bar{A}$ de uma descrição em espaço de estados controlável e observável.
- Assim como visto no caso contínuo, note que, para um sistema dinâmico estável (todos polos localizados dentro do círculo de raio unitário no plano complexo), há a possibilidade de uma descrição em espaço de estados assintoticamente instável pela presença de um modo não controlável (ou não observável) associado a um autovalor com módulo maior que 1.