ECAC03 – Controle Moderno e Avançado

Universidade Federal de Itajubá

Engenharia de Controle e Automação

Aula 02

Retroação de Estados

Prof. Dr. Luís Henrique de Carvalho Ferreira

Notas de Aula – 2023

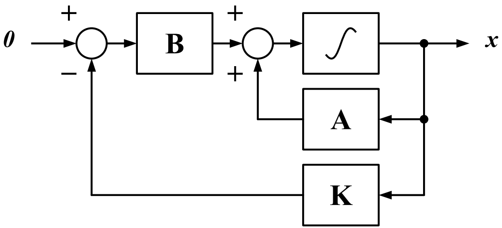
Retroação de estados

- Considere a equação de estado de um sistema dinâmico linear e invariante no tempo e a lei de retroação de estados:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$u(t) = -Kx(t)$$

- Os elementos de K são reais e constantes. Tal descrição pode ser reescrita na forma de um diagrama de blocos, evidenciando como o (vetor de) estado atua na entrada do sistema dinâmico.



Retroação de estados

- Neste cenário, a equação de estado pode ser reescrita por:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t)$$

- Note que o sistema dinâmico passa a ser definido pela resposta de entrada nula, sendo a escolha do vetor de ganho de retroação fundamental para que o sistema dinâmico em questão seja assintoticamente estável.

$$\det(sI - A + BK) = \prod_{i=1}^{n}(s - \mu_i)$$

- Para uma descrição em espaço de estados controlável, os modos do sistema dinâmico resultante são de alocação arbitrária em um procedimento conhecido como alocação de polos.

Retroação de estados

- O vetor de ganho de retroação que satisfaz a alocação de polos possui solução fechada, como demonstrado por Ackermann em 1972.

$$K = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} M_C^{-1} \prod_{i=1}^{n} (A - \mu_i I)$$

- Exemplos:

$$G_1(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$G_2(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s-1)}$$

$$G_3(s) = \frac{s-2}{s(s+1)}$$

Sistema de 2ª ordem

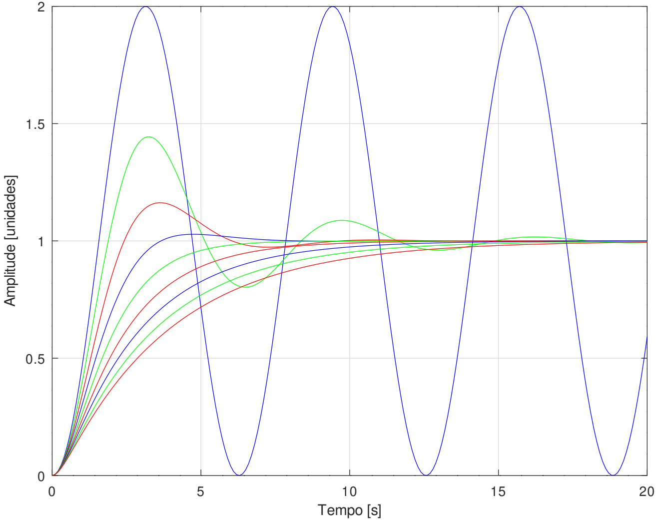
- Considere a função de transferência definida por uma frequência natural e um fator de amortecimento:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} R(s)$$

- Dependendo do valor do fator de amortecimento (admensional), o sistema dinâmico de 2ª ordem assume os comportamentos:

não amortecido	$\zeta = 0$
subamortecido	$0 < \zeta < 1$
criticamente amortecido	$\zeta = 1$
sobreamortecido	$\zeta > 1$

Sistema de 2ª ordem



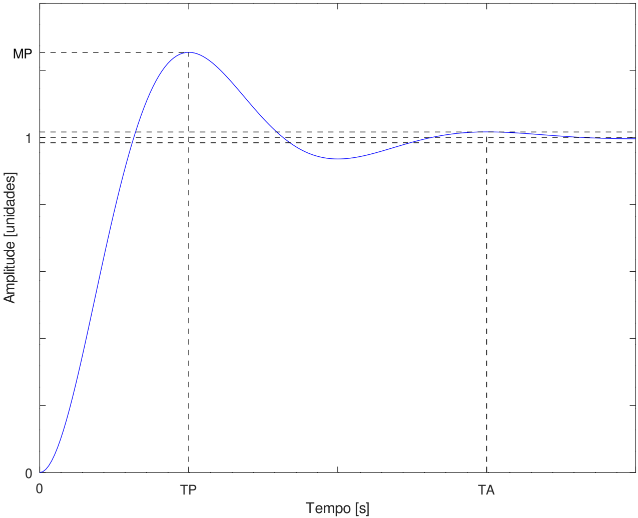
Sistema de 2ª ordem

- O comportamento pode ser analisado em função das raízes do sistema dinâmico de 2ª ordem:

Caso	Raízes
não amortecido	$\pm j\omega_n$
subamortecido	$-\zeta\omega_n \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$
criticamente amortecido	$-\omega_n$
sobreamortecido	$-\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2-1}\omega_n$

- Note que só haverá oscilações se as raízes forem imaginárias ou complexas, as quais sempre ocorrem aos pares (conjugadas).

A resposta temporal e o sistema de 2ª ordem



A resposta temporal e o sistema de 2ª ordem

- As relações entre as figuras de mérito e os parâmetros de um sistema dinâmico de 2ª ordem são dadas por:

$$T_P = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}$$

$$M_P = 1 + e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

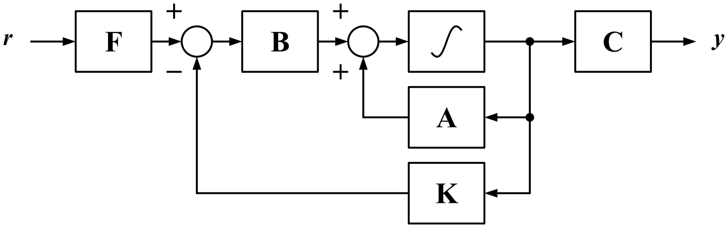
$$\textit{overshoot} = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$$

$$T_A = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

- Estas relações somente são válidas para sistemas dinâmicos de 2ª ordem subamortecidos, os quais serão o objetivo na sintonia de uma retroação de estados.

Retroação de estados com feedforward

- O diagrama de blocos representa um sistema dinâmico linear e invariante no tempo controlado por uma lei de retroação de estados com um ganho de feedforward.



- Das interconexões, tem-se que:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$u(t) = Fr(t) - Kx(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

Retroação de estados com feedforward

- Note que para uma descrição em espaço de estados controlável, todos os modos do sistema dinâmico resultante (abaixo) são de alocação arbitrária.

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + BFr(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

- O ganho de feedforward não influencia na análise sobre a estabilidade assintótica; entretanto, tem grande impacto na resposta do sistema dinâmico em regime permanente.

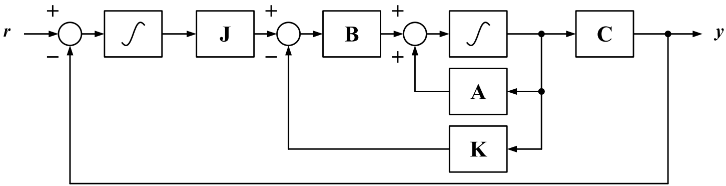
$$0 = (A - BK)X + BFR$$
$$Y = CX$$

- A saída irá rastrear um valor constante da referência em regime permanente se o ganho de feedforward for dado por:

$$F = -[C(A - BK)^{-1}B]^{-1}$$

Retroação de estados com expansão de polos

- O diagrama de blocos representa um sistema dinâmico linear e invariante no tempo controlado por uma lei de retroação de estados com uma expansão de polos (um integrador).



- Das interconexões, tem-se que:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad \dot{e}(t) = r(t) - y(t)$$

$$u(t) = Je(t) - Kx(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Retroação de estados com expansão de polos

- Estas equações podem ser reescritas em uma forma matricial (assumindo a referência nula), dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$u(t) = -\begin{bmatrix} K & -J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

- Note que, caso a expansão da descrição em espaço de estados seja controlável, todos os modos do sistema dinâmico resultante (abaixo) serão de alocação arbitrária.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BJ \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$