ECAC03 – Controle Moderno e Avançado

Universidade Federal de Itajubá

Engenharia de Controle e Automação

Aula 01

Descrição em Espaço de Estados

Prof. Dr. Luís Henrique de Carvalho Ferreira

Notas de Aula – 2023

Modelagem de sistemas dinâmicos

- Um sistema dinâmico é influenciado por muitos fatores com (possivelmente) fontes de distúrbios, ruídos e incertezas.

- Dentre todos sinais disponíveis, é conveniente escolher um deles como a entrada e outro como a saída, de tal forma que eles possam ser utilizados para descrever adequadamente o comportamento do sistema dinâmico.

Modelagem de sistemas dinâmicos

- Nenhum modelo matemático, por mais elaborado ou complexo que seja, pode descrever com perfeição o comportamento de um sistema dinâmico. Contudo, uma boa maneira de descrever estes comportamentos em tempo contínuo é através do uso de equações diferenciais, já que a grande maioria dos fenômenos físicos pode ser representada por esta classe de equações.

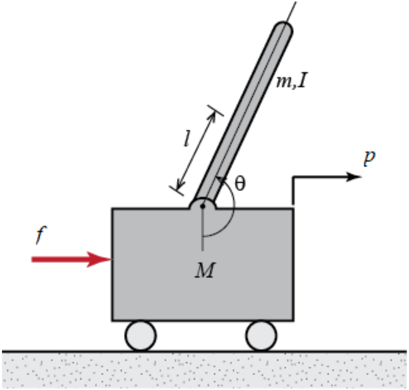
$$a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

$$a_1\dot{y}(t) + a_0\cos(y(t)) = b_0(t)u(t)$$

- Como a maioria dos sistemas dinâmicos é não linear e variante no tempo, sempre haverá o uso de hipóteses simplificadoras na concepção do modelo (pontos de operação, valores constantes) no intuito de torná-lo linear e invariante no tempo.

Exemplo: Pêndulo invertido sobre carro

- O pêndulo invertido sobre carro é um exemplo comumente encontrado nos livros de controle. Sua popularidade vem do fato de que o pêndulo simplesmente cairá se o carro não se mover para balançá-lo.



Exemplo: Pêndulo invertido sobre carro

- As equações diferenciais que regem o movimento do carro e do pêndulo são dadas, respectivamente, por:

$$(M+m)\ddot{p}(t) + ml\ddot{\theta}(t)\cos(\theta(t)) - ml\dot{\theta}^2(t)\sin(\theta(t)) = f(t)$$

$$(I+ml^2)\ddot{\theta}(t) + gml\sin(\theta(t)) + ml\ddot{p}(t)\cos(\theta(t)) = 0$$

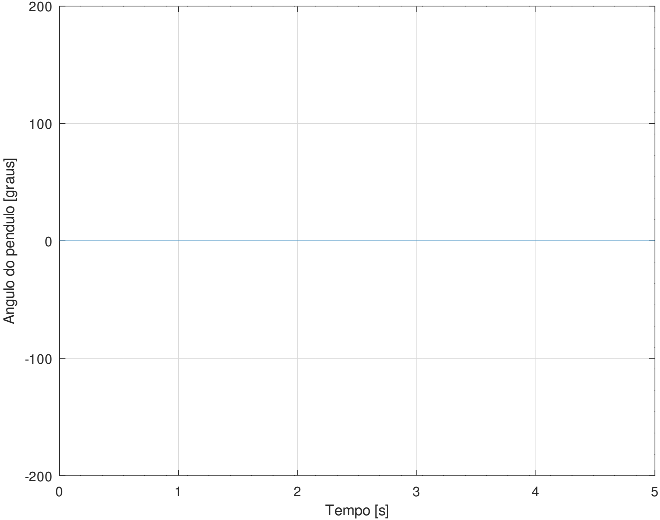
- O sistema dinâmico é não linear e, consequentemente, faz-se necessário uma análise dos possíveis pontos de operação.

$$F = 0$$

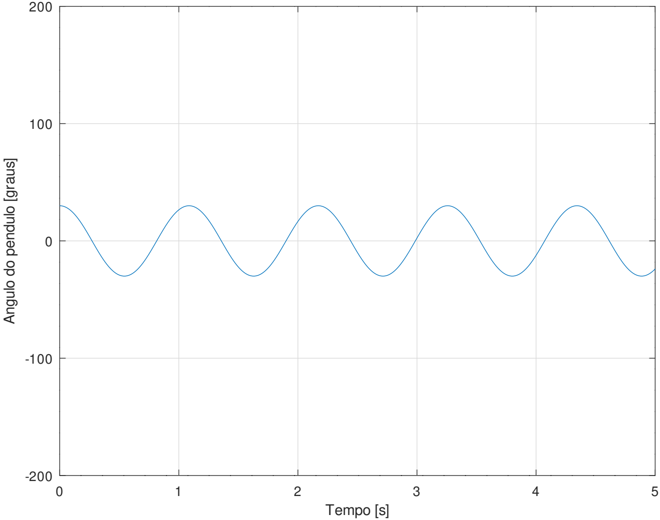
$$\sin(\Theta) = 0$$

- Note que o ponto de operação é definido pela força nula e pelo ângulo do pêndulo múltiplo de π, sendo que a posição (ou até a velocidade) do carro é irrelevante neste cenário.

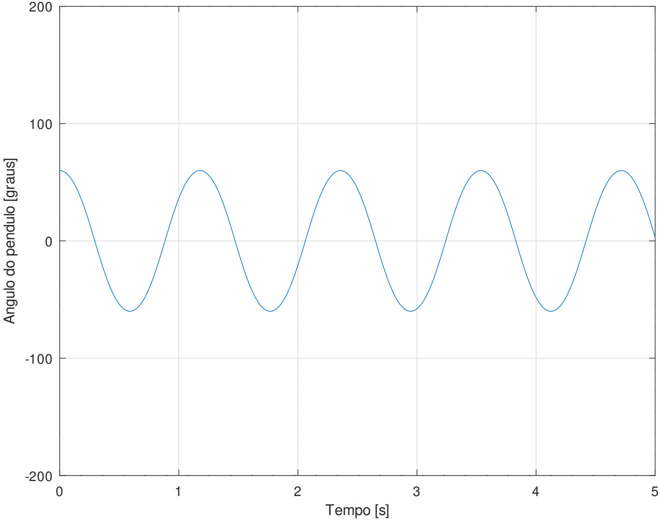
Exemplo: Pêndulo invertido sobre carro



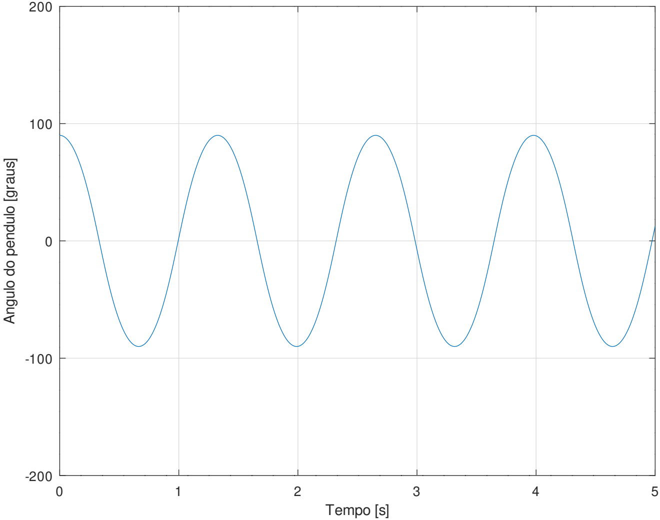
Exemplo: Pêndulo invertido sobre carro



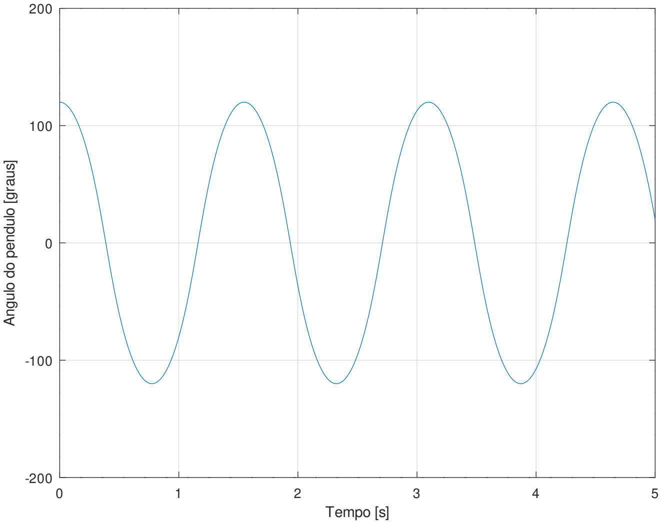
Exemplo: Pêndulo invertido sobre carro



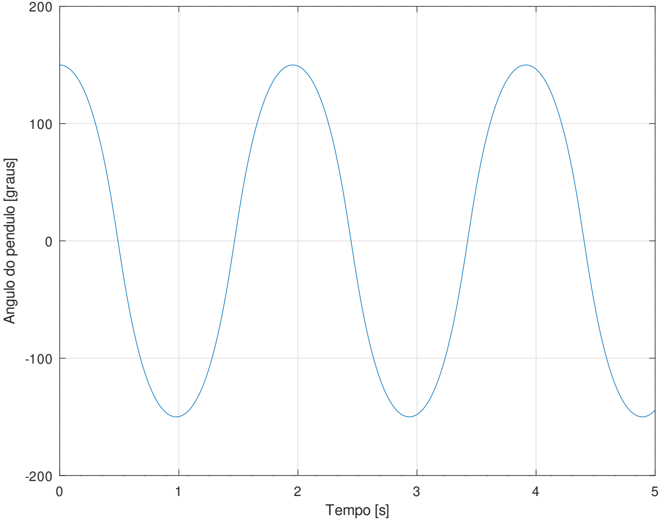
Exemplo: Pêndulo invertido sobre carro



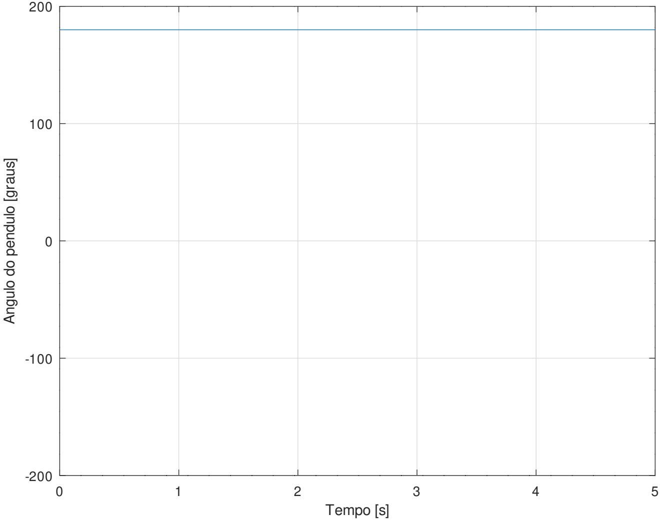
Exemplo: Pêndulo invertido sobre carro



Exemplo: Pêndulo invertido sobre carro



Exemplo: Pêndulo invertido sobre carro



Exemplo: Pêndulo invertido sobre carro

- Para a análise do comportamento linear, assume-se as pequenas variações dos sinais em torno do ponto de operação, tal que:

$$p(t) = P + \hat{p}(t) \implies \dot{p}(t) = \dot{\hat{p}}(t) \implies \ddot{p}(t) = \ddot{\hat{p}}(t)$$

$$\theta(t) = \Theta + \hat{\theta}(t) \implies \dot{\theta}(t) = \dot{\hat{\theta}}(t) \implies \ddot{\theta}(t) = \ddot{\hat{\theta}}(t)$$

$$f(t) = F + \hat{f}(t)$$

- O comportamento em torno de $F = 0$ e $\Theta = 0$ é dado por:

$$(M + m)\ddot{\hat{p}}(t) + ml\ddot{\hat{\theta}}(t) = \hat{f}(t)$$

$$(I + ml^2)\ddot{\hat{\theta}}(t) + gml\hat{\theta}(t) + ml\ddot{\hat{p}}(t) = 0$$

- O comportamento em torno de $F = 0$ e $\Theta = \pi$ é dado por:

$$(M + m)\ddot{\hat{p}}(t) - ml\ddot{\hat{\theta}}(t) = \hat{f}(t)$$

$$(I + ml^2)\ddot{\hat{\theta}}(t) - gml\hat{\theta}(t) - ml\ddot{\hat{p}}(t) = 0$$

Descrição em espaço de estados

- O (vetor de) estado de um sistema dinâmico num dado instante constitui a informação que, juntamente com a entrada aplicada a partir deste instante, é suficiente para determinar a saída.

- Com base no vetor de estado, a descrição em espaço de estados de dimensão finita é dada por:

$$\dot{x}(t) = f(t, x, u)$$

$$y(t) = g(t, x, u)$$

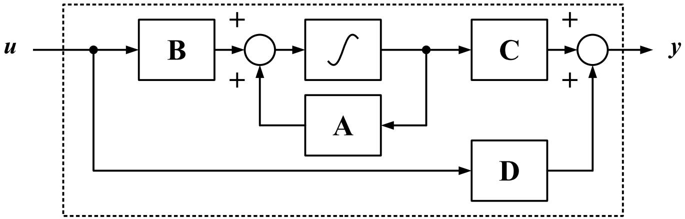
Descrição em espaço de estados

- Para um sistema dinâmico linear e invariante no tempo, a descrição em espaço de estados é simplificada para:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- Tal descrição pode ser reescrita na forma de um diagrama de blocos, evidenciando como a informação do estado se junta com a da entrada para determinar a saída do sistema dinâmico.



Descrição em espaço de estados

- Os elementos do vetor de estado são chamados de variáveis de estado. Uma descrição com 3 variáveis de estado é dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + Du(t)$$

- Os elementos de A, B, C e D são reais e constantes. A e B descrevem a equação de estado; C e D, a equação de saída. Como na maioria dos sistemas dinâmicos não há uma relação direta (estática) da entrada para a saída, D será nulo nas descrições em espaço de estados a serem abordadas.

Conversão de similaridade

- Para um sistema dinâmico linear e invariante no tempo, qualquer composição linear entre as variáveis de estado define uma nova descrição em espaço de estados. Desta forma, a conversão de similaridade é uma transformação de coordenadas, tal que:

$$\bar{x}(t) = Ux(t) \iff x(t) = U^{-1}\bar{x}(t)$$

- Os elementos de U são reais e constantes. Uma nova descrição em espaço de estados é dada por:

$$\dot{\bar{x}}(t) = UAU^{-1}\bar{x}(t) + UBu(t)$$

$$y(t) = CU^{-1}\bar{x}(t) + Du(t)$$

- A nova descrição é completamente equivalente a original. Isto mostra que a escolha do (vetor de) estado é subjetiva, ampla e convenientemente adaptável às diferentes situações.

Exemplo: Pêndulo invertido sobre carro

- As equações diferenciais do pêndulo invertido sobre carro linearizadas em torno do ponto de operação $F = 0$ e $\Theta = \pi$ podem ser reescritas como:

$$\ddot{\hat{p}}(t) = \frac{g(ml)^2}{(M+m)I + Mml^2}\hat{\theta}(t) + \frac{I + ml^2}{(M+m)I + Mml^2}\hat{f}(t)$$

$$\ddot{\hat{\theta}}(t) = \frac{g(M+m)ml}{(M+m)I + Mml^2}\hat{\theta}(t) + \frac{ml}{(M+m)I + Mml^2}\hat{f}(t)$$

- Um possível de vetor de estado é dado por:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \hat{p}(t) \\ \hat{\theta}(t) \\ \dot{\hat{p}}(t) \\ \dot{\hat{\theta}}(t) \end{bmatrix} \Longrightarrow \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\hat{p}}(t) \\ \dot{\hat{\theta}}(t) \\ \ddot{\hat{p}}(t) \\ \ddot{\hat{\theta}}(t) \end{bmatrix}$$

Exemplo: Pêndulo invertido sobre carro

- A equação de estado é dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{p}}(t) \\ \dot{\hat{\theta}}(t) \\ \ddot{\hat{p}}(t) \\ \ddot{\hat{\theta}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & A_{32} & 0 & 0 \\ 0 & A_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p}(t) \\ \hat{\theta}(t) \\ \dot{\hat{p}}(t) \\ \dot{\hat{\theta}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} \hat{f}(t)$$

$$A_{32} = \frac{g(ml)^2}{(M+m)I + Mml^2} \qquad B_3 = \frac{I + ml^2}{(M+m)I + Mml^2}$$

$$A_{42} = \frac{g(M+m)ml}{(M+m)I + Mml^2} \qquad B_4 = \frac{ml}{(M+m)I + Mml^2}$$

- Observe que a equação de saída pode ser facilmente dada pela posição do carro ou pelo ângulo do pêndulo (convenientemente escolhidos como variáveis de estado).

Resposta temporal

- A solução da equação de estado é dada por:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

- e^{At} é chamada de matriz de transição de estado e será utilizada para definir algumas propriedades de uma descrição em espaço de estados. A resposta temporal é composta por duas parcelas: a resposta de entrada nula e a resposta de estado nulo (não confundir com a resposta natural e a resposta forçada).
- Como consequência, a solução da equação de saída é dada por:

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

$$g(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) \Longrightarrow y(t) = Ce^{At}x(0) + g(t) * u(t)$$

Matriz de transição de estado

- O polinômio característico da matriz A é dado por:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

- As raízes deste polinômio são chamadas de autovalores. Para cada autovalor, são associados dois autovetores (não nulos, por definição), um à direita e outro à esquerda, tal que:

$$(\lambda_i I - A)v_i = 0$$

$$w_i'(\lambda_i I - A) = 0 \Longleftrightarrow (\lambda_i I - A')w_i = 0$$

- Baseado na estrutura de autovalores e autovetores, a matriz de transição de estado pode ser decomposta em:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i w_i' \Longrightarrow e^{At} = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} v_i w_i'$$

Estabilidade assintótica

- A descrição em espaço de estados de um sistema dinâmico é assintoticamente estável se o (vetor de) estado tender ao estado nulo na resposta de entrada nula para qualquer estado inicial.
- Para um sistema dinâmico linear e invariante no tempo, a resposta de entrada nula pode ser decomposta em:

$$x(t) = e^{At}x(0) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} v_i w_i' x(0)$$

- O termo $e^{\lambda_i t}$ é denominado i-ésimo modo do sistema dinâmico, o qual é invariante a uma conversão de similaridade. Assim, a descrição em espaço de estados de um sistema linear e invariante no tempo é assintoticamente (exponencialmente) estável se, e somente se, os modos estão associados a autovalores com parte real negativa.

Controlabilidade e observabilidade

- A controlabilidade está associada à capacidade de influenciar todo o (vetor de) estado através da entrada do sistema dinâmico, a qual pode ser estudada a partir da resposta de estado nulo:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i' B \int_0^t e^{\lambda_i (t-\tau)} u(\tau) d\tau \Longrightarrow w_i' B \neq 0$$

- A observabilidade está associada à capacidade de determinar todo o (vetor de) estado através da saída do sistema dinâmico, a qual pode ser estudada a partir da resposta de entrada nula:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} C v_i w_i' x(0) \Longrightarrow C v_i \neq 0$$

- Uma descrição em espaço de estados controlável e observável está representada com o número mínimo necessário de variáveis de estado para descrever o sistema dinâmico.

Controlabilidade e observabilidade

- A descrição em espaço de estados de um sistema dinâmico linear e invariante no tempo é controlável se a matriz de controlabilidade (ou é observável se a matriz de observabilidade) for de posto completo.

$$M_C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

$$M_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

- Assim, as matrizes de controlabilidade e observabilidade necessitam ter todas linhas ou colunas linearmente independentes.

$$\det(M_C) \neq 0 \qquad \det(M_O) \neq 0$$

Exemplo: Pêndulo invertido sobre carro

- Baseado na equação de estado definida para o pêndulo invertido sobre carro, os autovalores da matriz A são dados por:

$$\lambda_{1,2} = 0 \qquad \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{g(M+m)ml}{(M+m)I+Mml^2}}$$

- Note que a descrição em espaço de estados é assintoticamente instável pois há um autovalor com parte real positiva.
- A matriz de controlabilidade é dada por:

$$M_C = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & 0 & A_{32}B_4 \\ 0 & B_4 & 0 & A_{42}B_4 \\ B_3 & 0 & A_{32}B_4 & 0 \\ B_4 & 0 & A_{42}B_4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(M_C) = -g^2\left(\frac{ml}{(M+m)I+Mml^2}\right)^4 \neq 0$$

Exemplo: Pêndulo invertido sobre carro

- Assumindo, de início, a posição do carro e, em seguida, o ângulo do pêndulo como a saída do sistema dinâmico, as matrizes de observabilidade são dadas por:

$$M_O^{\hat{p}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & A_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{32} \end{bmatrix} \qquad M_O^{\hat{\theta}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & A_{42} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{42} \end{bmatrix}$$

$$\det(M_O^{\hat{p}}) = -\left(\frac{g(ml)^2}{(M+m)I + Mml^2}\right)^2 \neq 0$$

$$\det(M_O^{\hat{\theta}}) = 0$$

- Embora a descrição em espaço de estados seja controlável, quatro variáveis de estado só são necessárias para representar este sistema dinâmico se a saída for a posição do carro.

Função de transferência

- A função de transferência de um sistema linear e invariante no tempo é definida como a transformada de Laplace da resposta ao impulso unitário quando as condições iniciais são nulas.

$$sx(s) - x(0) = Ax(s) + Bu(s)$$

$$y(s) = Cx(s) + Du(s)$$

$$y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + [C(sI - A)^{-1}B + D]u(s)$$

- Diferentemente da descrição em espaço de estados, que admite diferentes escolhas do vetor de estado, a função de transferência descreve de forma única a relação da entrada para a saída.

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$CU^{-1}(sI - UAU^{-1})^{-1}UB + D = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Função de transferência

- A função de transferência obtida a partir de uma descrição em espaço de estados pode ser reescrita como:

$$G(s) = \frac{C\,\mathrm{adj}(sI - A)B + D\det(sI - A)}{\det(sI - A)}$$

- Os polos do sistema dinâmico são matematicamente iguais aos autovalores da matriz A de uma descrição em espaço de estados controlável e observável. Caso a descrição seja não controlável e/ou não observável, existem autovalores da matriz A que não são polos do sistema dinâmico.
- Note que, para um sistema dinâmico estável (todos polos localizados no semiplano esquerdo do plano complexo), há a possibilidade de uma descrição em espaço de estados assintoticamente instável pela presença de um modo não controlável (ou não observável) associado a um autovalor com parte real positiva.

Exemplo: Pêndulo invertido sobre carro

- Assumindo, de início, a posição do carro e, em seguida, o ângulo do pêndulo como a saída do sistema dinâmico, as funções de transferência são dadas por:

$$\frac{\hat{P}(s)}{\hat{F}(s)} = \frac{\dfrac{I+ml^2}{(M+m)I+Mml^2}s^2 - \dfrac{gml}{(M+m)I+Mml^2}}{s^2\left(s^2 - \dfrac{g(M+m)ml}{(M+m)I+Mml^2}\right)}$$

$$\frac{\hat{\Theta}(s)}{\hat{F}(s)} = \frac{\dfrac{ml}{(M+m)I+Mml^2}}{s^2 - \dfrac{g(M+m)ml}{(M+m)I+Mml^2}}$$

- Note que são necessários quatro polos para representar o sistema dinâmico se a saída for a posição do carro, mas somente dois polos se a saída for o ângulo do pêndulo.

Forma canônica controlável

- Uma maneira de se obter uma descrição em espaço de estados a partir de uma função de transferência que seja própria e racional é a forma canônica controlável.

$$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} + c$$

- A descrição em espaço de estados é dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + cu(t)$$