

Indexação Multidimensional para Problemas da Mochila Multiobjetivo com Paretos de Alta Cardinalidade



Marcos Daniel Valadão Baroni

31 de julho de 2018

Sumário

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

- 1 O problema da mochila multiobjetivo (MOKP)
- 2 Indexação multidimensional para verificação de dominância
- 3 O Algoritmo de Bazgan
- 4 O SCE para o MOKP
- 5 Experimentos computacionais
- 6 Conclusões e trabalhos futuros

Problemas de Otimização Multiobjetivo

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

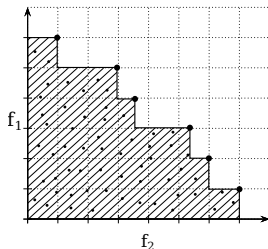
O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

- Otimização simultânea de múltiplos objetivos:

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) \\ \text{sujeito a} \quad & x \in X \end{aligned}$$



- Tipicamente mais de uma solução.

Problemas de Otimização Multiobjetivo

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

Definição (Dominância)

*Diz-se que uma solução $x \in X$ **domina** uma solução $y \in X$, denotado por $x \Delta y$ se, e somente se, x é ao menos tão boa quanto y em todos os objetivos e melhor que y em ao menos um dos objetivos.*

Problemas de Otimização Multiobjetivo

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

Definição (Dominância)

*Diz-se que uma solução $x \in X$ **domina** uma solução $y \in X$, denotado por $x \Delta y$ se, e somente se, x é ao menos tão boa quanto y em todos os objetivos e melhor que y em ao menos um dos objetivos. Formalmente:*

$$x \Delta y \iff \begin{cases} \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} : f_i(x) \geq f_i(y) \text{ e} \\ \exists j \in \{1, 2, \dots, m\} : f_j(x) > f_j(y) \end{cases}$$

Problemas de Otimização Multiobjetivo

Introdução

O MOKP

A Verificação de Dominância

O Algoritmo de Bazgan

O SCE

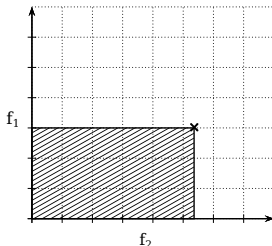
Experimentos

Conclusões e Trabalhos Futuros

Definição (Dominância)

Diz-se que uma solução $x \in X$ **domina** uma solução $y \in X$, denotado por $x \Delta y$ se, e somente se, x é ao menos tão boa quanto y em todos os objetivos e melhor que y em ao menos um dos objetivos. Formalmente:

$$x \Delta y \iff \begin{cases} \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} : f_i(x) \geq f_i(y) \text{ e} \\ \exists j \in \{1, 2, \dots, m\} : f_j(x) > f_j(y) \end{cases}$$



Problemas de Otimização Multiobjetivo

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

Definição (Eficiência)

*Uma solução $x \in X$ é dita **eficiente**, denotado por $\text{eff}(x)$, se, e somente se, x não é dominada por nenhuma outra solução pertencente a X .*

Problemas de Otimização Multiobjetivo

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

Definição (Eficiência)

*Uma solução $x \in X$ é dita **eficiente**, denotado por $eff(x)$, se, e somente se, x não é dominada por nenhuma outra solução pertencente a X .*

Formalmente:

$$eff(x) \iff \nexists (y \in X \wedge y \Delta x)$$

Problemas de Otimização Multiobjetivo

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

Definição (Eficiência)

Uma solução $x \in X$ é dita **eficiente**, denotado por $\text{eff}(x)$, se, e somente se, x não é dominada por nenhuma outra solução pertencente a X .

Formalmente:

$$\text{eff}(x) \iff \nexists (y \in X \wedge y \Delta x)$$

Definição (conjunto Pareto)

O conjunto de todas as soluções eficientes de um problema multiobjetivo, denotado por $\text{Par}(X)$, é chamado de **conjunto Pareto** ou **conjunto Pareto-ótimo**.

Problemas de Otimização Multiobjetivo

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

Definição (Eficiência)

Uma solução $x \in X$ é dita **eficiente**, denotado por $\text{eff}(x)$, se, e somente se, x não é dominada por nenhuma outra solução pertencente a X .

Formalmente:

$$\text{eff}(x) \iff \nexists (y \in X \wedge y \Delta x)$$

Definição (conjunto Pareto)

O conjunto de todas as soluções eficientes de um problema multiobjetivo, denotado por $\text{Par}(X)$, é chamado de **conjunto Pareto** ou **conjunto Pareto-ótimo**.

Formalmente:

$$\text{Par}(X) = \{x \in X \mid \text{eff}(x)\}$$

Problemas de Otimização Multiobjetivo

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

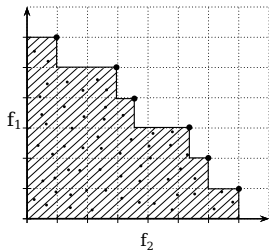
Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

Resolver um problema multiobjetivo consiste em determinar seu conjunto Pareto.

Problemas de Otimização Multiobjetivo

Resolver um problema multiobjetivo consiste em determinar seu conjunto Pareto.



O Problema da Mochila Multiobjetivo

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

Problema da mochila multiobjetivo (MOKP):

- Generalização do problema da mochila 0-1 (\mathcal{NP} -Hard);
- Bastante estudado pela literatura;
- Modela diversos problemas reais:
 - Seleção de projetos;
 - Orçamento de capital;
 - Planejamento de estoque, etc.
- De difícil resolução;
 - Especialmente para mais de 2 objetivos.

O Problema da Mochila Multiobjetivo

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

Definição formal:

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) \\ \text{sujeito a } & w(x) \leq W \\ & x \in \{0, 1\}^n \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} f_j(x) &= \sum_{i=1}^n p_i^j x_i \quad j = 1, \dots, m \\ w(x) &= \sum_{i=1}^n w_i x_i \end{aligned}$$

O Problema da Mochila Multiobjetivo

Exemplo de instância:

	Itens									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p^1	4	9	3	1	8	7	2	5	6	7
p^2	8	4	2	2	3	0	6	8	9	6
w	7	8	5	8	3	5	6	2	4	9

W	28
-----	----

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

O Problema da Mochila Multiobjetivo

Introdução

O MOKP

A Verificação de Dominância

O Algoritmo de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e Trabalhos Futuros

Exemplo de instância:

	Itens									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p^1	4	9	3	1	8	7	2	5	6	7
p^2	8	4	2	2	3	0	6	8	9	6
w	7	8	5	8	3	5	6	2	4	9

W	28
-----	----

Conjunto Pareto:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	f_1	f_2	w
x_1	x						x	x	x	x	24	37	28
x_2	x		x		x		x	x	x		28	36	27
x_3	x				x	x	x	x	x		32	34	27
x_4		x	x		x		x	x	x		33	32	28
x_5		x			x	x	x	x	x		37	30	28
x_6		x	x		x	x		x	x		38	26	27

O Algoritmo de Bazgan

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

Algoritmo Exato:

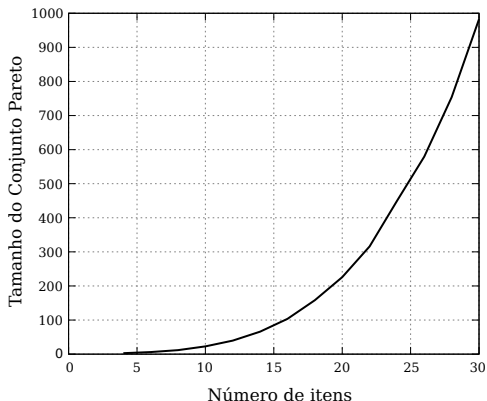
Algoritmo 1: O algoritmo de Nemhauser e Ullmann para o MOKP.

input: p, w, W

```
1 begin
2    $P_0 = \{\emptyset\};$ 
3   for  $k \leftarrow 1, n$  do
4      $P_k^* \leftarrow P_{k-1} \cup \{x \cup \{k\} \mid x \in P_{k-1}\};$ 
5      $P_k \leftarrow \{x \in P_k^* \mid \nexists (y \in P_k^*)[y \Delta x]\};$ 
6   end
7   return  $P_n;$ 
```

O Problema da Mochila Multiobjetivo

Tamanho do conjunto Pareto para instâncias do MOKP com 3 objetivos.



Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

Tese

É possível otimizar a resolução do problema da mochila multiobjetivo através da indexação multidimensional das soluções.

A operação de verificação de dominância

A operação de verificação de dominância

Introdução

O MOKP

A Verificação de Dominância

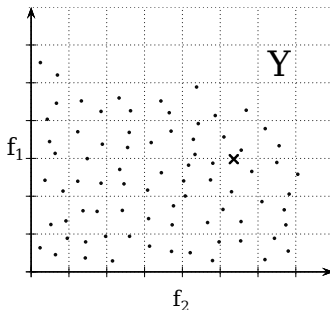
O Algoritmo de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e Trabalhos Futuros

1. Existe alguma solução em Y que é **dominada** por x ?



A operação de verificação de dominância

Introdução

O MOKP

A Verificação de Dominância

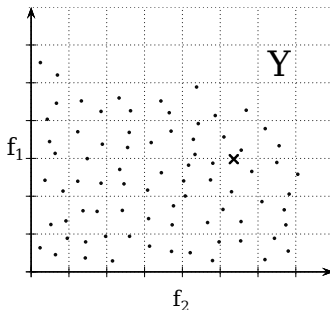
O Algoritmo de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e Trabalhos Futuros

1. Existe alguma solução em Y que é **dominada** por x ?



A operação de verificação de dominância

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

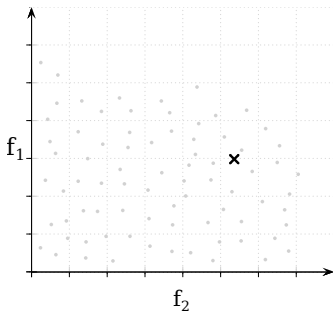
O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

1. Existe alguma solução em Y que é **dominada** por x ?



A operação de verificação de dominância

Introdução

O MOKP

A Verificação de Dominância

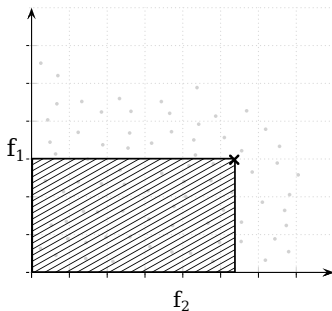
O Algoritmo de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e Trabalhos Futuros

1. Existe alguma solução em Y que é **dominada** por x ?



$$\exists(y \in Y)[x \Delta y]$$

A operação de verificação de dominância

Introdução

O MOKP

A Verificação de Dominância

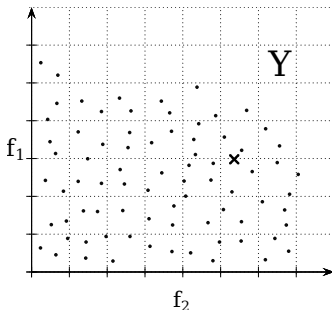
O Algoritmo de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e Trabalhos Futuros

1. Existe alguma solução em Y que **é dominada** por x ?
2. Existe alguma solução em Y que **domina** x ?



A operação de verificação de dominância

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

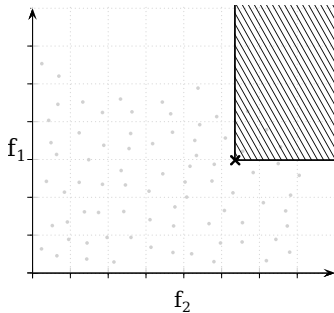
O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

1. Existe alguma solução em Y que é **dominada** por x ?
2. Existe alguma solução em Y que **domina** x ?



$$\exists(y \in Y)[y \Delta x]$$

A operação de verificação de dominância

A partir de x pode-se definir duas regiões de interesse:

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

A operação de verificação de dominância

Introdução

O MOKP

A Verificação de Dominância

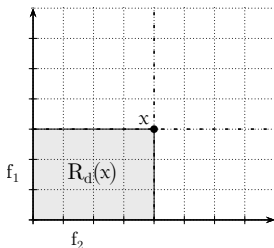
O Algoritmo de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e Trabalhos Futuros

A partir de x pode-se definir duas regiões de interesse:

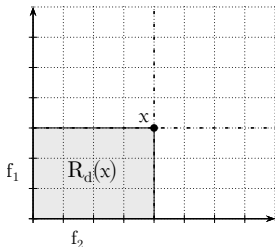


Região **dominada** por x .

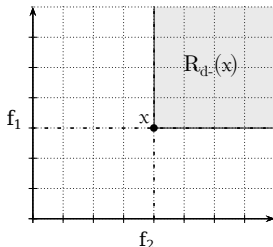
$$R_d(x) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y_i \leq f_i(x), i \in \{1, \dots, m\}\}$$

dominância

A partir de x pode-se definir duas regiões de interesse:



Região dominada por x .



Região que **domina** x .

$$R_d(x) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y_i \leq f_i(x), i \in \{1, \dots, m\}\}$$

$$R_{d-}(x) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y_i \geq f_i(x), i \in \{1, \dots, m\}\}$$

Busca de faixa

Estruturas de dados que podem ser utilizadas:

- Lista encadeada (sem indexação)
- Árvore AVL (unidimensional)
- Árvore KD (multidimensional)

Lista encadeada

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

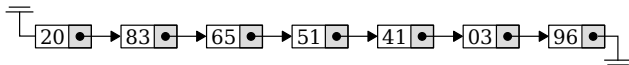
O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

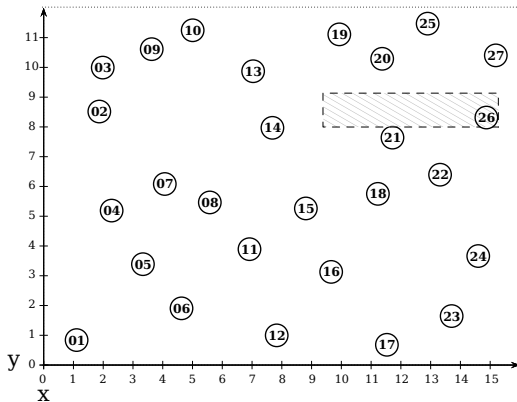
Lista Encadeada:

- Implementação simples ▲
- Pouca utilização de memória ▲
- Sem indexação – acesso em tempo linear ▼



Lista encadeada

Introdução
O MOKP
A Verificação
de
Dominância
O Algoritmo
de Bazgan
O SCE
Experimentos
Conclusões e
Trabalhos
Futuros



Lista encadeada

Introdução

O MOKP

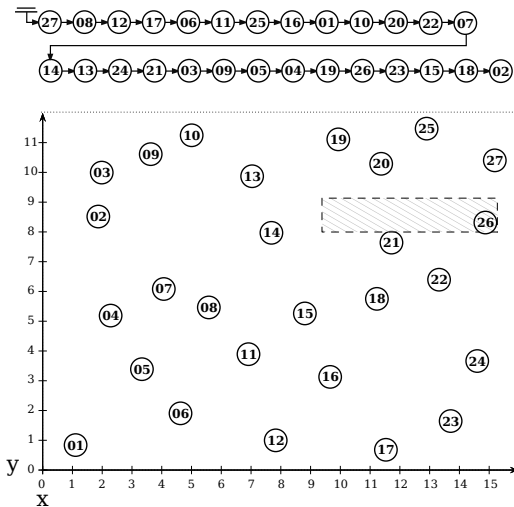
A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros



Lista encadeada

Introdução

O MOKP

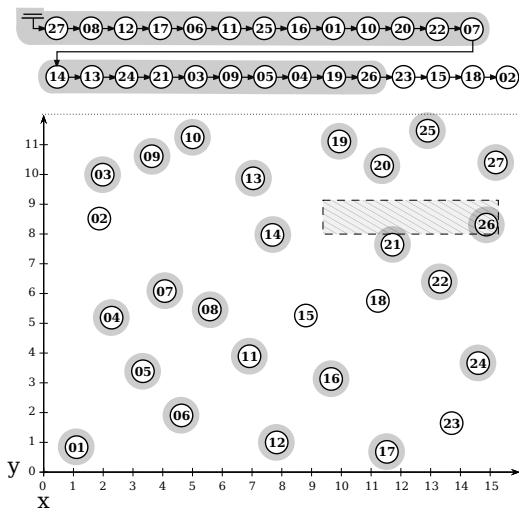
A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros



Árvore AVL

Árvore AVL:

- Implementação complexa ▼
- Pouca utilização de memória ▲
- Indexação unidimensional ●

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

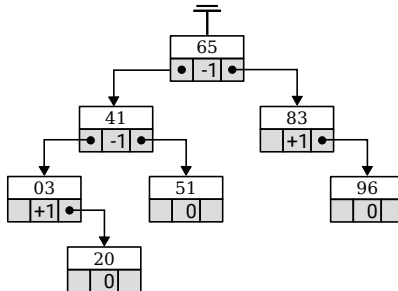
Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

Árvore AVL

Árvore AVL:

- Implementação complexa ▼
- Pouca utilização de memória ▲
- Indexação unidimensional ●



Árvore AVL

Introdução

O MOKP

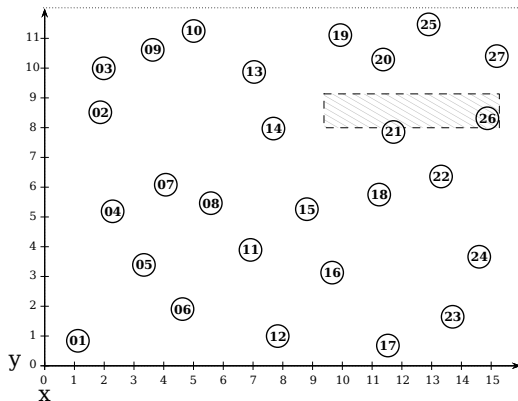
A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros



Árvore AVL

Introdução

O MOKP

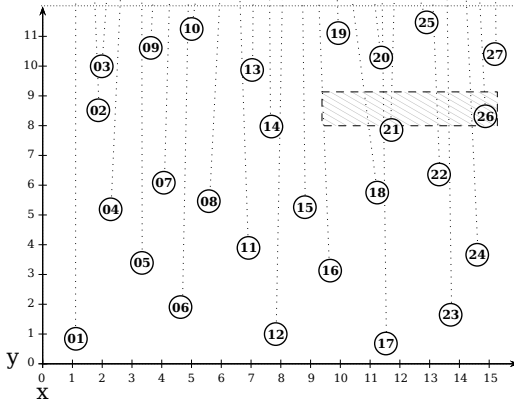
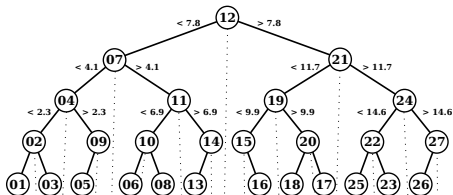
A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros



Árvore AVL

Introdução

O MOKP

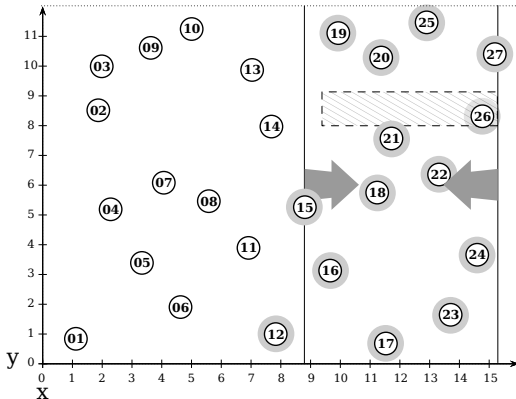
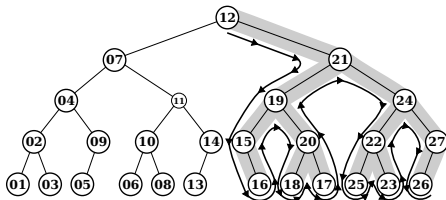
A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros



Árvore KD

Árvore KD:

- Implementação complexa ▼
- Pouca utilização de memória ▲
- Indexação multidimensional ▲

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

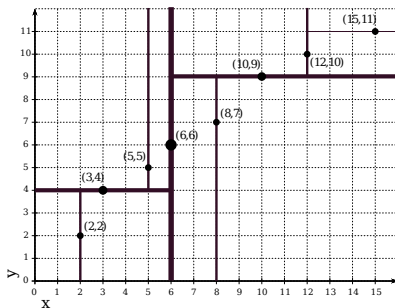
Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

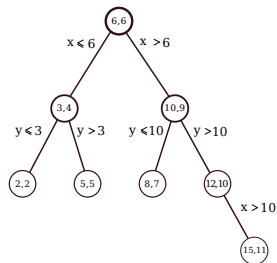
Árvore KD

Árvore KD:

- Implementação complexa ▼
- Pouca utilização de memória ▲
- Indexação multidimensional ▲



(a) Pontos dispostos num plano bi-dimensional.



(b) Pontos indexados por uma 2-d tree.

Árvore KD

Introdução

O MOKP

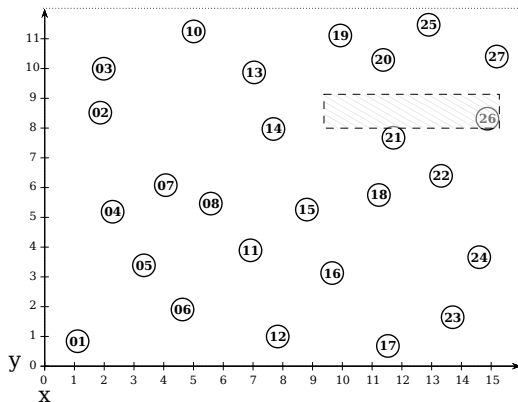
A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros



Árvore KD

Introdução

O MOKP

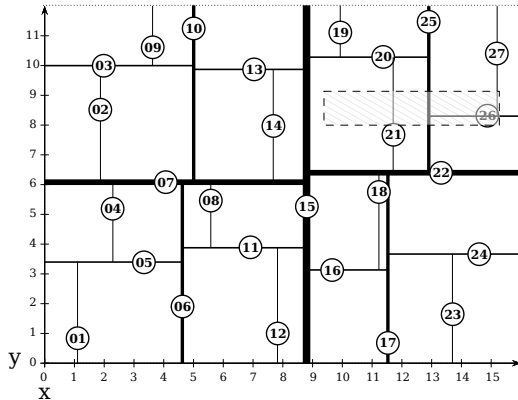
A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros



Árvore KD

Introdução

O MOKP

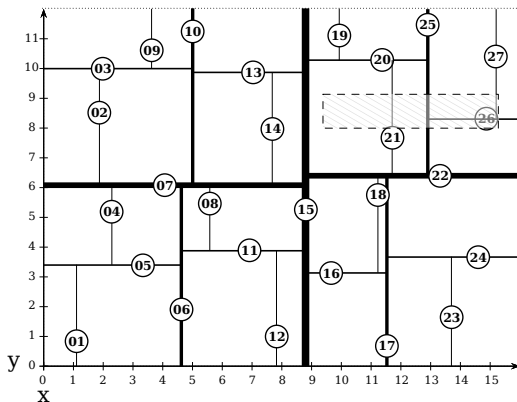
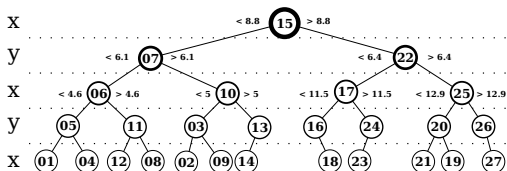
A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros



Árvore KD

Introdução

O MOKP

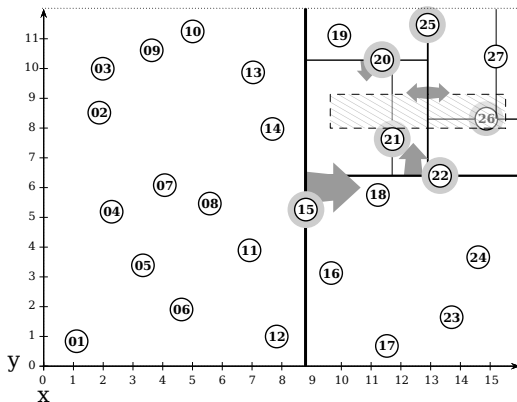
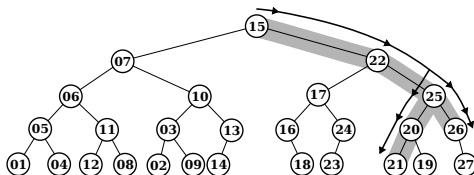
A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros



Algoritmos para o MOKP

Algoritmo Exato

- Algoritmo de Bazgan – estado da arte;

Algoritmo Heurístico

- SCE para o MOKP – proposta do trabalho;

O Algoritmo de Bazgan

O Algoritmo de Bazgan:

- Algoritmo exato estado da arte
- Algoritmo de programação dinâmica – variação do Nemhauser-Ullmann
- Utiliza 3 dominâncias para redução do conjunto de estados

input: p, w, W

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ▶ ↺ 🔍 ↻

```

1 begin
2    $S_0 = \{(0, \dots, 0)\};$ 
3   for  $k \leftarrow 1, n$  do
4      $S_k \leftarrow S_{k-1} \cup \{(s^1 + p_k^1, \dots, s^m + p_k^m, s^{m+1} + w_k) \mid s^{m+1} + w_k \leq W, s \in S_{k-1}\};$ 
5   end
6    $P = \{s \in S_n \mid \nexists (a \in S_n \mid a \Delta s)\};$ 
7 return  $P;$ 

```

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ≡ ≡ ↺ 🔍 ↻

O Algoritmo de Bazgan

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

1. A relação D^r :

Caso a capacidade residual de uma solução associada a um estado s_k da iteração k seja maior ou igual à soma dos pesos dos itens restantes, o único complemento de s_k que pode resultar em uma solução eficiente é o complemento máximo $I = \{k + 1, \dots, n\}$.

O Algoritmo de Bazgan

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

1. A relação D^r :

Caso a capacidade residual de uma solução associada a um estado s_k da iteração k seja maior ou igual à soma dos pesos dos itens restantes, o único complemento de s_k que pode resultar em uma solução eficiente é o complemento máximo $I = \{k + 1, \dots, n\}$.

$$s_k D_k^r s_{k'} \Leftrightarrow \begin{cases} s_{k'} \in S_{k-1}, \\ s_k = (s_{k'}^1 + p_k^1, \dots, s_{k'}^m + p_k^m, s_{k'}^{m+1} + w_k), \text{ e} \\ s_{k'}^{m+1} \leq W - \sum_{i=k}^n w_i \end{cases}$$

O Algoritmo de Bazgan

Introdução
O MOKP
A Verificação
de
Dominância
O Algoritmo
de Bazgan
O SCE
Experimentos
Conclusões e
Trabalhos
Futuros

2. A relação D^Δ :

Generalização para o caso multiobjetivo da relação de dominância utilizada no Algoritmo de Nemhauser Ullmann.

O Algoritmo de Bazgan

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

2. A relação D^Δ :

Generalização para o caso multiobjetivo da relação de dominância utilizada no Algoritmo de Nemhauser Ullmann.

$$s_k D_k^\Delta s_{k'} \Leftrightarrow \begin{cases} s_k \Delta s_{k'} & \text{e} \\ s_k^{m+1} \leq s_{k'}^{m+1} & \text{se } k < n \end{cases}$$

O Algoritmo de Bazgan

3. A relação D^b :

Limite inferior

Vetor objetivo $lb(s) = (lb^1, \dots, lb^m)$ onde

$$lb^j = s^j + \sum_{i \in J} p_i^j$$

para um complemento J qualquer.

O Algoritmo de Bazgan

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

3. A relação D^b :

Limite inferior

Vetor objetivo $lb(s) = (lb^1, \dots, lb^m)$ onde

$$lb^j = s^j + \sum_{i \in J} p_i^j$$

para um complemento J qualquer.

Limite superior

Vetor objetivo $u = (u^1, \dots, u^m)$ tal que $\forall s_n \in Ext(s_k)$ tem-se que $u^j \geq s_n^j$, $j = 1, \dots, m$.

O Algoritmo de Bazgan

3. A relação D^b :

$$s_k D_k^b s_{k'} \Leftrightarrow lb(u) \Delta ub(s)$$

O Algoritmo de Bazgan

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

3. A relação D^b :

$$s_k D_k^b s_{k'} \Leftrightarrow lb(u) \Delta ub(s)$$

O limite superior utilizado:

$$ub^j(s) = s^j + \sum_{i=k+1}^{c_j-1} p_i^j + \max \left\{ \left\lfloor \overline{W}(s) \frac{p_{c_j+1}^j}{w_{c_j+1}} \right\rfloor, \left\lfloor p_{c_j}^j - (w_{c_j} - \overline{W}(s)) \cdot \frac{p_{c_j-1}^j}{w_{c_j-1}} \right\rfloor \right\}$$

O Algoritmo de Bazgan

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

3. A relação D^b :

$$s_k D_k^b s_{k'} \Leftrightarrow lb(u) \Delta ub(s)$$

O limite superior utilizado:

$$ub^j(s) = s^j + \sum_{i=k+1}^{c_j-1} p_i^j + \max \left\{ \left\lfloor \overline{W}(s) \frac{p_{c_j+1}^j}{w_{c_j+1}} \right\rfloor, \left\lfloor p_{c_j}^j - (w_{c_j} - \overline{W}(s)) \cdot \frac{p_{c_j-1}^j}{w_{c_j-1}} \right\rfloor \right\}$$

O limite inferior utilizado (complemento J):

$$lb^j(s) = s^j + \sum_{i \in J} p_i^j, \quad \sum_{i \in J} w_i \leq \overline{W}(s)$$

O Algoritmo de Bazgan

Algoritmo 4: Algoritmo Bazgan.

input: p, w, W

```
1 begin  
2    $S_0 \leftarrow \{(0, \dots, 0)\};$   
3    $o_1, \dots, o_n = \mathcal{O}^{max};$ 
```

O Algoritmo de Bazgan

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

Algoritmo 5: Algoritmo Bazgan.

input: p, w, W

```
1 begin
2    $S_0 \leftarrow \{(0, \dots, 0)\};$ 
3    $o_1, \dots, o_n = \mathcal{O}^{max};$ 
4   for  $k \leftarrow 1, n$  do
5      $S_k^* \leftarrow \{(s^1 + p_{o_k}^1, \dots, s^m + p_{o_k}^m, s^{m+1} + w_{o_k}) \mid s \in$   

        $S_{k-1}, s^{m+1} + w_{o_k} \leq W\}$ 
```

O Algoritmo de Bazgan

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

Algoritmo 6: Algoritmo Bazgan.

input: p, w, W

```
1 begin
2    $S_0 \leftarrow \{(0, \dots, 0)\};$ 
3    $o_1, \dots, o_n = \mathcal{O}^{max};$ 
4   for  $k \leftarrow 1, n$  do
5      $S_k^* \leftarrow \{(s^1 + p_{o_k}^1, \dots, s^m + p_{o_k}^m, s^{m+1} + w_{o_k}) \mid s \in$ 
6        $S_{k-1}, s^{m+1} + w_{o_k} \leq W\}$ 
        $\cup \{s \in S_{k-1} \mid s^{m+1} + w_{o_k} + \dots + w_{o_n} > W\};$ 
```

O Algoritmo de Bazgan

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

Algoritmo 7: Algoritmo Bazgan.

input: p, w, W

```
1 begin
2    $S_0 \leftarrow \{(0, \dots, 0)\};$ 
3    $o_1, \dots, o_n = \mathcal{O}^{max};$ 
4   for  $k \leftarrow 1, n$  do
5      $S_k^* \leftarrow \{(s^1 + p_{o_k}^1, \dots, s^m + p_{o_k}^m, s^{m+1} + w_{o_k}) \mid s \in$ 
6        $S_{k-1}, s^{m+1} + w_{o_k} \leq W\}$ 
7        $\cup \{s \in S_{k-1} \mid s^{m+1} + w_{o_k} + \dots + w_{o_n} > W\};$ 
8      $S_k^{**} \leftarrow \{s \in S_k^* \mid (\nexists u \in S_k^*)[u \Delta s]\};$ 
```

O Algoritmo de Bazgan

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

Algoritmo 8: Algoritmo Bazgan.

input: p, w, W

```
1 begin
2    $S_0 \leftarrow \{(0, \dots, 0)\};$ 
3    $o_1, \dots, o_n = \mathcal{O}^{max};$ 
4   for  $k \leftarrow 1, n$  do
5      $S_k^* \leftarrow \{(s^1 + p_{o_k}^1, \dots, s^m + p_{o_k}^m, s^{m+1} + w_{o_k}) \mid s \in$ 
6        $S_{k-1}, s^{m+1} + w_{o_k} \leq W\}$ 
7        $\cup \{s \in S_{k-1} \mid s^{m+1} + w_{o_k} + \dots + w_{o_n} > W\};$ 
8      $S_k^{**} \leftarrow \{s \in S_k^* \mid (\nexists u \in S_k^*)[u \Delta s]\};$ 
9      $S_k \leftarrow \{s \in S_k^{**} \mid (\nexists u \in S_k^{**})[lb(u) \Delta ub(s)]\};$ 
```


O Algoritmo de Bazgan

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

Algoritmo 9: Algoritmo Bazgan.

input: p, w, W

```
1 begin
2    $S_0 \leftarrow \{(0, \dots, 0)\};$ 
3    $o_1, \dots, o_n = \mathcal{O}^{max};$ 
4   for  $k \leftarrow 1, n$  do
5      $S_k^* \leftarrow \{(s^1 + p_{o_k}^1, \dots, s^m + p_{o_k}^m, s^{m+1} + w_{o_k}) \mid s \in$ 
6        $S_{k-1}, s^{m+1} + w_{o_k} \leq W\}$ 
7        $\cup \{s \in S_{k-1} \mid s^{m+1} + w_{o_k} + \dots + w_{o_n} > W\};$ 
8      $S_k^{**} \leftarrow \{s \in S_k^* \mid (\nexists u \in S_k^*)[u \Delta s]\};$ 
9      $S_k \leftarrow \{s \in S_k^{**} \mid (\nexists u \in S_k^{**})[lb(u) \Delta ub(s)]\};$ 
10  return  $S_n;$ 
```

O Algoritmo de Bazgan

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

Algoritmo 10: Algoritmo Bazgan.

input: p, w, W

```
1 begin
2    $S_0 \leftarrow \{(0, \dots, 0)\};$ 
3    $o_1, \dots, o_n = \mathcal{O}^{max};$ 
4   for  $k \leftarrow 1, n$  do
5      $S_k^* \leftarrow \{(s^1 + p_{o_k}^1, \dots, s^m + p_{o_k}^m, s^{m+1} + w_{o_k}) \mid s \in$ 
6        $S_{k-1}, s^{m+1} + w_{o_k} \leq W\}$ 
7        $\cup \{s \in S_{k-1} \mid s^{m+1} + w_{o_k} + \dots + w_{o_n} > W\};$ 
8      $S_k^{**} \leftarrow \{s \in S_k^* \mid (\nexists u \in S_k^*)[u\Delta s]\} \blacktriangleleft;$ 
9      $S_k \leftarrow \{s \in S_k^{**} \mid (\nexists u \in S_k^{**})[lb(u)\Delta ub(s)]\};$ 
10  return  $S_n$ ;
```

- verificação da condição $u\Delta s$ (linha 7);

O Algoritmo de Bazgan

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

Algoritmo 11: Algoritmo Bazgan.

input: p, w, W

```
1 begin
2    $S_0 \leftarrow \{(0, \dots, 0)\};$ 
3    $o_1, \dots, o_n = \mathcal{O}^{max};$ 
4   for  $k \leftarrow 1, n$  do
5      $S_k^* \leftarrow \{(s^1 + p_{o_k}^1, \dots, s^m + p_{o_k}^m, s^{m+1} + w_{o_k}) \mid s \in$ 
6        $S_{k-1}, s^{m+1} + w_{o_k} \leq W\}$ 
7        $\cup \{s \in S_{k-1} \mid s^{m+1} + w_{o_k} + \dots + w_{o_n} > W\};$ 
8      $S_k^{**} \leftarrow \{s \in S_k^* \mid (\nexists u \in S_k^*)[u\Delta s]\} \blacktriangleleft;$ 
9      $S_k \leftarrow \{s \in S_k^{**} \mid (\nexists u \in S_k^{**})[lb(u)\Delta ub(s)]\} \blacktriangleleft;$ 
10  return  $S_n;$ 
```

- verificação da condição $u\Delta s$ (linha 7);
- verificação da condição $lb(u)\Delta ub(s)$ (linha 8).

O SCE para o MOKP

O SCE:

- Algoritmo populacional evolutivo;
- Evolução simultânea de comunicados independentes;
- Utilizado originalmente para resolver problemas hídricos complexos;
- *Embaralha* a população em N comunidades (complexos);

O SCE

Introdução

O MOKP

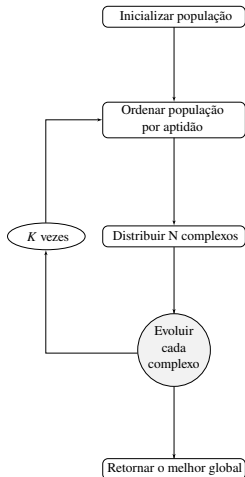
A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros



O SCE

Introdução

O MOKP

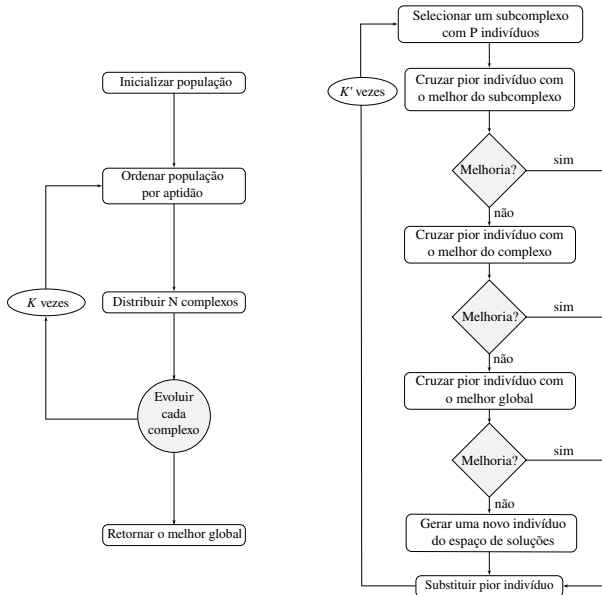
A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros



Adaptação para contexto multiobjetivo:

- Aptidão do indivíduo:
- Construção de conjunto Pareto aproximado:

Adaptação para contexto multiobjetivo:

- Aptidão do indivíduo:
 - Ordenação em fronteiras não dominadas
- Construção de conjunto Pareto aproximado:
 - Arquivo externo

Adaptação para contexto multiobjetivo:

- Aptidão do indivíduo:
 - Ordenação em fronteiras não dominadas
- Construção de conjunto Pareto aproximado:
 - Arquivo externo

Aplicação para o MOKP:

- Construção de solução aleatória;
- Procedimento de cruzamento.

O SCE

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

Aptidão do indivíduo: ordenação em frentes não dominados.

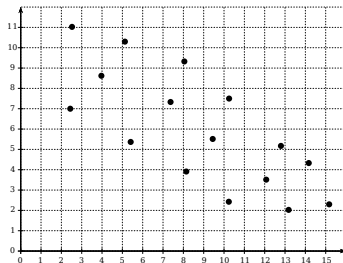


Figure: População sem ordenação.

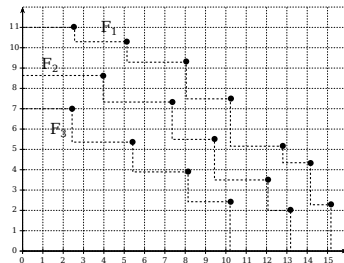


Figure: População ordenada em frentes não dominados.

Construção de conjunto Pareto aproximado: utilização de arquivo externo.

Algoritmo 12: Procedimento de atualização de arquivo, dada uma nova solução.

input: A : arquivo, x : indivíduo

```
1 begin
2   if  $\nexists (y \in A, y \Delta x)$  then
3      $A \leftarrow A \cup \{x\};$   $\triangleright$  Inclusão de  $x$  no arquivo
4      $A \leftarrow A \setminus \{z \in A \mid x \Delta z\};$   $\triangleright$  Remoção das soluções dominadas
       por  $x$ 
5   return  $A;$ 
```

Algoritmo 13: Algoritmo SCE adaptado para o MOKP.

```

1  begin
2      Inicializar população de  $N * M$  indivíduos gerados aleatoriamente;
3      Classificar população em frentes não dominados ;
4      Selecionar o 1º frente para compor arquivo externo;
5      for  $k \leftarrow 1 : K$  do
6          Ordenar população por aptidão (desempate por hipervolume);
7          Distribuir população em  $M$  complexos;
8          for  $i \leftarrow 1 : N$  do
9              for  $k' \leftarrow 1 : K'$  do
10                 Selecionar subcomplexo com  $P$  indivíduos retirados
11                 do  $i$ -ésimo complexo;
12                 Evoluir pior indivíduo do subcomplexo gerando um
13                 novo indivíduo ;
14             Classificar toda a população (nova e antiga) em frentes não
15             dominados ;
16             Propor atualização do arquivo utilizando as soluções do 1º frente
17              $F_1$  ;
18             Selecionar população;
19  return Arquivo externo;
  
```

Algoritmo 14: Algoritmo SCE adaptado para o MOKP.

```

1  begin
2      Inicializar população de  $N * M$  indivíduos gerados aleatoriamente;
3      Classificar população em frentes não dominados ◀;
4      Selecionar o 1º frente para compor arquivo externo;
5      for  $k \leftarrow 1 : K$  do
6          Ordenar população por aptidão (desempate por hipervolume);
7          Distribuir população em  $M$  complexos;
8          for  $i \leftarrow 1 : N$  do
9              for  $k' \leftarrow 1 : K'$  do
10                 Selecionar subcomplexo com  $P$  indivíduos retirados
11                 do  $i$ -ésimo complexo;
12                 Evoluir pior indivíduo do subcomplexo gerando um
13                 novo indivíduo ◀;
14             Classificar toda a população (nova e antiga) em frentes não
15             dominados ◀;
16             Propor atualização do arquivo utilizando as soluções do 1º frente
17              $F_1$  ◀;
18             Selecionar população;
19      return Arquivo externo;
  
```

- Classificar a população em frentes não dominados (linhas 3 e 12);
- Verificar se o indivíduo teve aptidão melhorada (linha 11);
- Atualização do arquivo, dada uma nova solução (linha 13).

Experimentos Computacionais

Experimentos Computacionais

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

Instâncias – Contexto Exato:

- Quatro classes de instâncias (A, B, C e D)
- Diversos número de itens
- bi-objetivo e 3-objetivo
- 10 instâncias para cada caso
- 10 execuções para cada instância

Experimentos Computacionais

Abordagem Exata

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

Instâncias bi-objetivo divididas em 4 tipos:

- A) Aleatórias: $p_i^j \in [1, 1000], w_i \in [1, 1000]$.
- B) Não-conflitantes:
 $p_i^1 \in [111, 1000], p_i^2 \in [p_i^1 - 100, p_i^1 + 100], w_i \in [1, 1000]$.
- C) Conflitantes: $p_i^1 \in [1, 1000], p_i^2 \in [max\{900 - p_i^1; 1\}, min\{1100 - p_i^1, 1000\}], w_i \in [1, 1000]$.
- D) Conflitantes com pesos correlacionados:
 $p_i^1 \in [1, 1000], p_i^2 \in [max\{900 - p_i^1; 1\}, min\{1100 - p_i^1, 1000\}], w_i \in [p_i^1 + p_i^2 - 200, p_i^1 + p_i^2 + 200]$.

Experimentos Computacionais

Abordagem Exata

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

Instâncias 3-objetivo divididas em 4 tipos:

A) Aleatórias: $p_i^j \in [1, 1000] w_i \in [1, 1000]$

B) Não-conflitantes: $p_i^1 \in [111, 1000], p_i^2 \in [p_i^1 - 100, p_i^1 + 100], p_i^3 \in [p_i^1 - 100, p_i^1 + 100], w_i \in [1, 1000]$.

C) Conflitantes:

$p_i^1 \in [1, 1000], p_i^2 \in [1, 1001 - p_i^1], p_i^3 \in [\max\{900 - p_i^1 - p_i^2; 1\}, \min\{1100 - p_i^1 - p_i^2, 1001 - p_i^1\}] w_i \in [1, 1000]$.

D) Conflitantes com pesos correlacionados:

$p_i^1 \in [1, 1000], p_i^2 \in [1, 1001 - p_i^1], p_i^3 \in [\max\{900 - p_i^1 - p_i^2; 1\}, \min\{1100 - p_i^1 - p_i^2, 1001 - p_i^1\}] w_i \in [p_i^1 + p_i^2 + p_i^3 - 200, p_i^1 + p_i^2 + p_i^3 + 200]$.

Experimentos Computacionais

Abordagem Exata

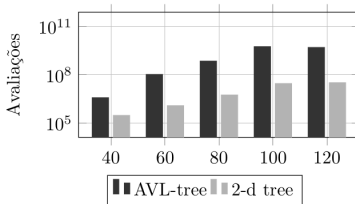
Tempo computacional médio do algoritmo Bazgan para instâncias bi-objetivo:

Instância			AVL tree	árvore 2-d	
Tipo	n	$ Par $	tempo (s)	tempo (s)	speedup
A	40	38.1	0.06	0.06	1.0
	60	73.1	1.12	0.88	1.3
	80	125.6	19.81	11.89	1.7
	100	180.4	165.24	76.50	2.2
	120	233.9	708.53	361.87	2.0
B	100	3.1	0.02	0.08	0.3
	200	10.0	0.80	5.09	0.2
	300	24.9	9.45	88.30	0.1
	400	36.2	95.39	730.04	0.1
	500	53.7	255.57	2824.65	0.1
C	20	36.6	0.00	0.00	1.0
	40	102.8	0.65	0.42	1.5
	60	231.9	28.98	14.09	2.1
	80	358.0	564.10	241.54	2.3
	100	513.8	3756.57	1605.19	2.3
D	20	174.9	0.15	0.12	1.3
	30	269.3	16.82	7.60	2.2
	40	478.0	395.76	186.67	2.1
	50	553.4	2459.48	1417.94	1.7

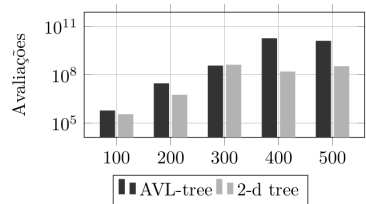
Experimentos Computacionais

Abordagem Exata

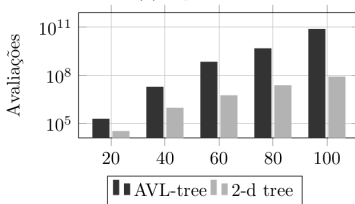
Número de avaliações médio do algoritmo Bazgan para instâncias bi-objetivo:



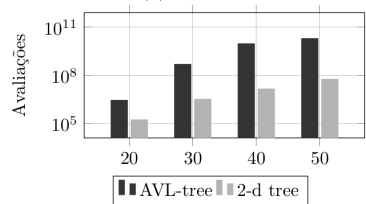
(a) Tipo A



(b) Tipo B



(c) Tipo C



(d) Tipo D

Experimentos Computacionais

Abordagem Exata

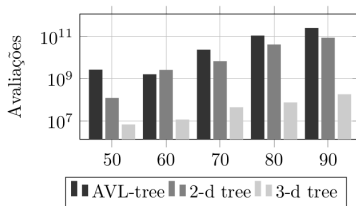
Tempo computacional médio do algoritmo Bazgan para instâncias 3-objetivo:

Instância			AVL tree	árvore 2-d		árvore 3-d	
Tipo	n	$ Par $	tempo (s)	tempo (s)	speedup	tempo (s)	speedup
A	50	557.5	41.2	21.3	1.9	18.5	2.2
	60	1240.0	485.9	247.8	1.9	79.9	6.0
	70	1879.3	3179.5	1038.0	3.0	614.5	5.1
	80	2540.5	6667.9	3796.0	1.7	2943.9	2.2
	90	3528.5	24476.5	12916.7	1.8	3683.7	6.6
B	100	18.0	0.1	0.3	0.3	0.3	0.3
	200	65.4	11.4	34.4	0.3	29.1	0.4
	300	214.2	307.7	631.5	0.5	583.2	0.5
	400	317.0	4492.9	8464.9	0.5	5402.2	0.8
C	20	254.4	0.06	0.05	1.2	0.03	2.17
	30	1066.6	9.69	4.18	2.3	1.30	7.46
	40	2965.5	471.68	153.21	3.1	30.50	15.5
D	20	4087.7	23.6	10.9	2.2	1.9	12.5
	30	8834.5	8914.2	3625.3	2.5	1019.5	8.7

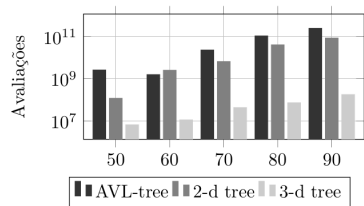
Experimentos Computacionais

Abordagem Exata

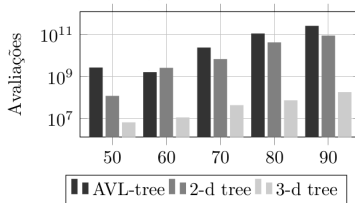
Número de avaliações médio do algoritmo Bazgan para instâncias 3-objetivo:



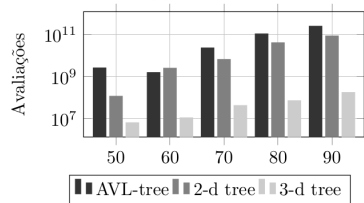
(a) Tipo A



(b) Tipo B



(c) Tipo C



(d) Tipo D

Experimentos Computacionais

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

Instâncias – Contexto Heurístico:

- Propostas por Zitzler
- 250, 500 e 750 itens
- bi-objetivo e 3-objetivo
- 1 instância para cada caso
- 30 execuções para cada instância

Experimentos Computacionais

Abordagem Heurística

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

Valores de parâmetros utilizados no algoritmo SCE:

Parâmetro	Valor	Descrição
N	30	Número de complexos
M	30	Número de indivíduos em cada complexo
P	5	Número de indivíduos em cada subcomplexo
K	400	Número de iterações
K'	30	Número de iterações aplicados a cada evolução de complexo
c	$n/20$	Número de genes carregados no procedimento de cruzamento

Experimentos Computacionais

Abordagem Heurística

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

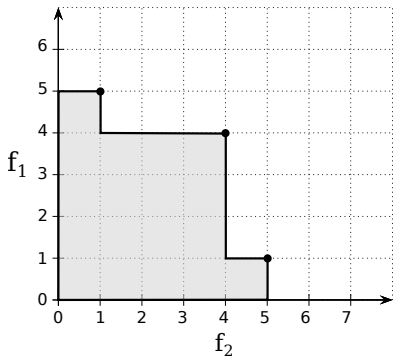
O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

Métrica para avaliação de qualidade de Pareto: hiper-volume.

Exemplo de conjunto Pareto bi-objetivo possuindo 18 unidades hiper-volume (área):



Experimentos Computacionais

Abordagem Heurística

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

Hiper-volume médio alcançado por cada heurística:

m	n	SPEA2	NSGA-II	MOEA/D	MOFPA	SCE
2	250	90.4	86.3	96.9	97.8	93.6
	500	87.6	81.7	96.9	97.8	92.7
	750	85.9	79.2	98.4	99.2	92.3
3	250	83.3	77.4	99.0	99.7	89.4
	500	72.8	65.9	92.9	93.6	79.4
	750	77.5	73.3	94.7	95.2	79.8

Experimentos Computacionais

Abordagem Heurística

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

Tempo computacional médio do algoritmo SCE para instâncias Zouache:

Instância			Lista	árvore 2-d		árvore 3-d	
m	n	$ Par $	tempo (s)	tempo (s)	speedup	tempo (s)	speedup
2	250	88.4	9.3	13.1	0.71	—	—
	500	106.0	14.3	18.3	0.78	—	—
	750	120.4	18.7	22.3	0.84	—	—
3	250	705.5	9.8	10.1	0.97	9.1	1.08
	500	672.8	15.6	16.0	0.98	15.2	1.03
	750	646.0	22.0	24.2	0.91	21.8	1.01

Experimentos Computacionais

Abordagem Heurística

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

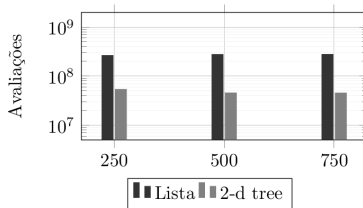
O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

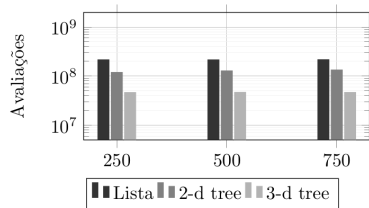
Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

Número de avaliações médio do algoritmo SCE para instâncias Zouache:



(a) Instâncias 2-objetivo



(b) Instâncias 3-objetivo.

Conclusões e Trabalhos Futuros

Principais contribuições:

- Interpretação do problema de verificação de dominância como problema de busca de faixa
- Proposta da utilização da Árvore KD como estrutura de indexação multidimensional
- Análise da proposta em contextos exatos e heurísticos utilizando as principais instâncias da literatura

Conclusões

- Indexação multidimensional foi eficiente no contexto exato:

Conclusões

- Indexação multidimensional foi eficiente no contexto exato:
 - Conjuntos solução de alta cardinalidade

Conclusões

- Indexação multidimensional foi eficiente no contexto exato:
 - Conjuntos solução de alta cardinalidade
 - Speedup de até 2.3 para bi-objetivo

Conclusões

- Indexação multidimensional foi eficiente no contexto exato:
 - Conjuntos solução de alta cardinalidade
 - Speedup de até 2.3 para bi-objetivo
 - Speedup de até 15.5 para 3-objetivo

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

Conclusões

- Indexação multidimensional foi eficiente no contexto exato:
 - Conjuntos solução de alta cardinalidade
 - Speedup de até 2.3 para bi-objetivo
 - Speedup de até 15.5 para 3-objetivo
 - Drástica redução no número de avaliações de solução

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

Conclusões

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

- Indexação multidimensional foi eficiente no contexto exato:
 - Conjuntos solução de alta cardinalidade
 - Speedup de até 2.3 para bi-objetivo
 - Speedup de até 15.5 para 3-objetivo
 - Drástica redução no número de avaliações de solução
- Indexação multidimensional não foi eficiente no contexto heurístico:

Conclusões

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

- Indexação multidimensional foi eficiente no contexto exato:
 - Conjuntos solução de alta cardinalidade
 - Speedup de até 2.3 para bi-objetivo
 - Speedup de até 15.5 para 3-objetivo
 - Drástica redução no número de avaliações de solução
- Indexação multidimensional não foi eficiente no contexto heurístico:
 - Pouco impacto no tempo computacional

Conclusões

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

- Indexação multidimensional foi eficiente no contexto exato:
 - Conjuntos solução de alta cardinalidade
 - Speedup de até 2.3 para bi-objetivo
 - Speedup de até 15.5 para 3-objetivo
 - Drástica redução no número de avaliações de solução
- Indexação multidimensional não foi eficiente no contexto heurístico:
 - Pouco impacto no tempo computacional
 - Conjuntos solução de baixa cardinalidade – overhead

Conclusões

Introdução

O MOKP

A Verificação
de
Dominância

O Algoritmo
de Bazgan

O SCE

Experimentos

Conclusões e
Trabalhos
Futuros

- Indexação multidimensional foi eficiente no contexto exato:
 - Conjuntos solução de alta cardinalidade
 - Speedup de até 2.3 para bi-objetivo
 - Speedup de até 15.5 para 3-objetivo
 - Drástica redução no número de avaliações de solução
- Indexação multidimensional não foi eficiente no contexto heurístico:
 - Pouco impacto no tempo computacional
 - Conjuntos solução de baixa cardinalidade – overhead
 - Considerável redução no número de avaliações de solução

Tabalhos Futuros

- Verificar a performance da árvore KD em outros problemas multiobjetivos;
- Considerar outras estruturas de dados para auxílio à operação de verificação de dominância;
- Aprimorar a implementação do SCE para o MOKP;
- Investigar a causa da ineficiência da atual implementação do algoritmo Bazgan.

Obrigado.

Introdução
O MOKP
A Verificação de Dominância
O Algoritmo de Bazgan
O SCE
Experimentos
Conclusões e Trabalhos Futuros