O algoritmo Nemhauser-Ullmann para o problema de mochila multidimensional

Marcos Daniel Baroni

Vitória, 15 de janeiro de 2015

NINFA

Sumário

- Introdução
- O problema da Mochila (Multidimensional)
- O Algoritmo de Nemhauser-Ullmann para o MKP
  - O Conceito de Soluções Dominantes
  - O Algoritmo para o KP
  - Adaptação do Conceito para o MKP
- Testes Computacionais

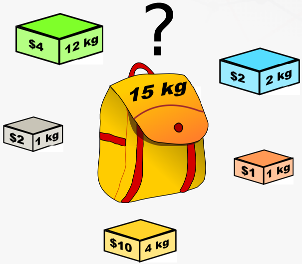
O Problema da Mochila

Knapsack Problem

Utilizar a mochila para carregar o maior valor possível, respeitando a sua capacidade.

Modelagem matemática

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & z = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \\
\text{sujeito a} \quad & \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq b \\
& x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1, \cdots, n.
\end{aligned}
$$



NINFA

O Problema da Mochila Multidimensional

A *mochila* agora possui mais de uma capacidade (dimensão).

Modelagem matemática

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \cdots, m, \\ & x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \cdots, n. \end{aligned}$$

NINFA

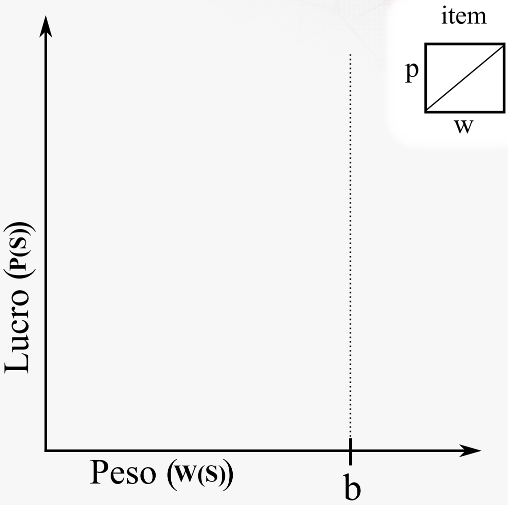
Soluções dominantes para o KP

Solução dominante

Um subconjunto $S \subseteq [n]$ com peso $w(S) = \sum_{i \in S} w_i$ e lucro $p(S) = \sum_{i \in S} p_i$ **domina** sobre um outro subconjunto $T \subseteq [n]$ se $w(S) \leqslant w(T)$ e $p(S) \geqslant p(T)$.

NINFA

Soluções dominantes para o KP



O Algoritmo de Nemhauser-Ullmann

Algorithm 1: O Algoritmo de Nemhauser-Ullmann para o KP

Input : Instancia do KP
Output: Lista $S(n)$ de todos as soluções dominantes
$S(0) \leftarrow \emptyset$;
para $i \leftarrow 1$ **to** n **faça:**
  $S'(i) \leftarrow S(i-1) \cup \{ s \cup \{i\} \mid s \in S(i-1) \}$;
  $S(i) \leftarrow \{ s \in S'(i) \mid \text{dominates}(s, S'(i)) \}$;
fim

O Algoritmo de Nemhauser-Ullmann

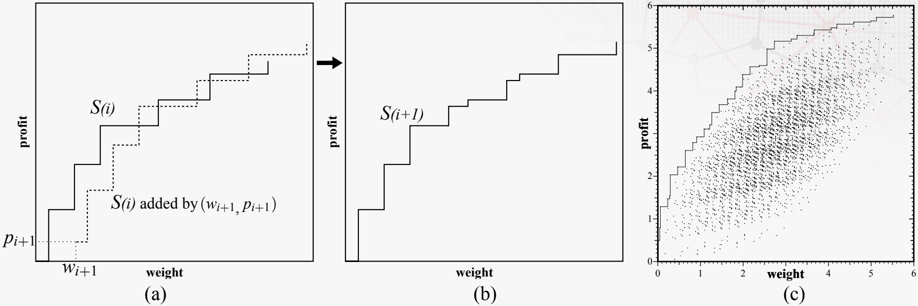


Figura: Representação gráfica das soluções dominantes (a) num passo intermediário $S(i)$, (b) em uma próxima solução $S(i+1)$ e (c) numa solução ótima (final).

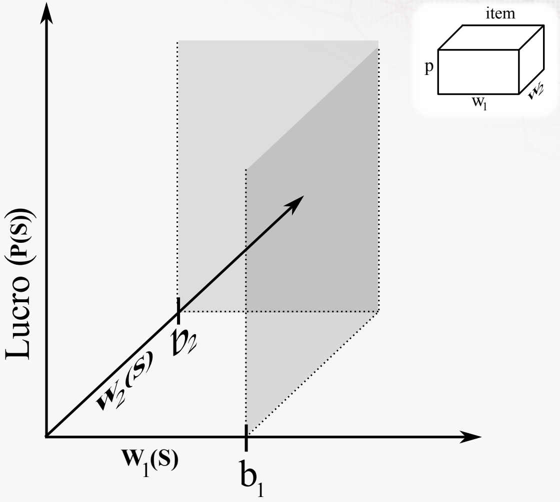
O Algoritmo de Nemhauser-Ullmann para o MKP

Solução dominante (para o MKP)

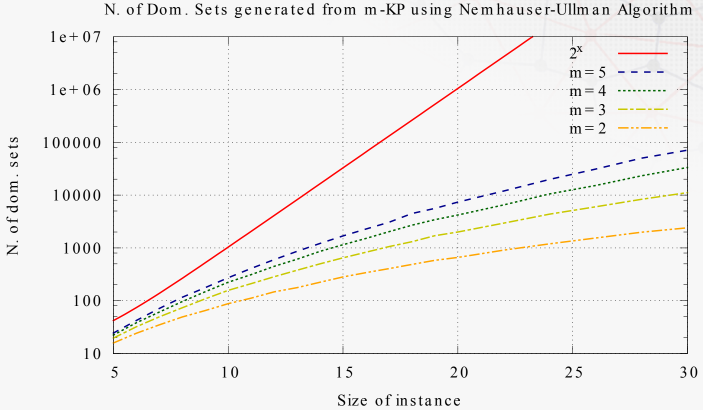
Um subconjunto $S \subseteq [n]$ com pesos $w_j(S) = \sum_{i \in S} w_{ji}, j = 1, \ldots, m$ e lucro $p(S) = \sum_{i \in S} p_i$ **domina** sobre um outro subconjunto $T \subseteq [n]$ se $w_j(S) \leqslant w_j(T), \forall j = 1, \ldots, m$ e $p(S) \geqslant p(T)$.

NINFA

Soluções dominantes para o MKP



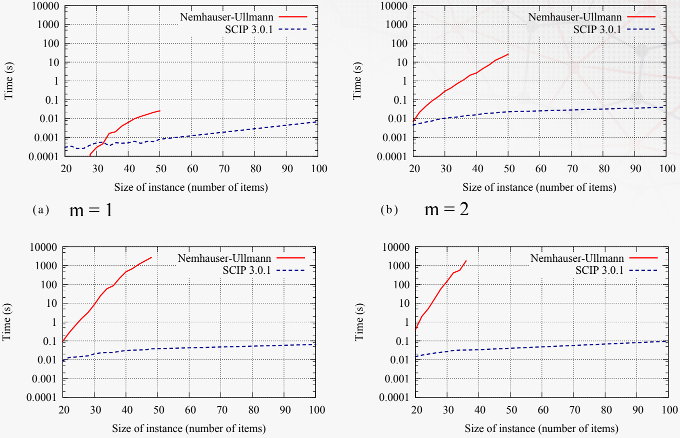
Testes computacionais



The "y" axis is on logarithmic scale. The number of generated *dominating sets* increases with the number of dimension but seems to maintain polynomial behavior.

NINFA

Testes computacionais



(a) m = 1 (b) m = 2 (c) m = 3 (d) m = 4

Figura: Tempo médio de execução para resolver instancias do MKP utilizando o algoritmo de Nemhauser-Ullmann e o SCIP solver para várias dimensões.

Referências Bibliográficas

R. Beier and B. Vöcking.
Random knapsack in expected polynomial time.
In Proceedings of the thirty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing, pages 232–241. ACM, 2003.

R. Beier and B. Vöcking.
An experimental study of random knapsack problems.
Algorithmica, 45(1):121–136, 2006.

G. L. Nemhauser and Z. Ullmann.
Discrete dynamic programming and capital allocation.
Management Science, 15(9):494–505, 1969.

H. M. Weingartner and D. N. Ness.
Methods for the solution of the multidimensional 0/1 knapsack problem.
Operations Research, 15(1):83–103, 1967.