

# Mapa logístico

Marcos Benício de A. Alonso

A dinâmica do decaimento nuclear pode ser descrita através do mapa iterativo de primeira ordem  $N(t + \Delta t) = N(t)(1 - \alpha\Delta t)$ . Ele permitia o cálculo do valor futuro  $N(t + 1)$  a partir do valor atual  $N(t)$  da variável dinâmica de interesse. De forma geral, esse mapa se tratava de um mapa da forma  $x(t + 1) = \lambda x(t)$  onde particularmente tínhamos  $\lambda = (1 - \alpha\Delta t)$ .

De forma geral, o mapa iterativo de primeira ordem é:

$$x(t + 1) = \lambda x(t) (1 - x(t)). \quad (1)$$

Dependendo do valor de  $\lambda$ , temos dois possíveis cenários. Para  $\lambda < 1$  temos um decaimento exponencial, sendo o valor futuro  $x(t + 1) < x(t)$ . Por outro lado, para  $\lambda > 1$ , temos um crescimento exponencial, sendo o valor futuro  $x(t + 1) > x(t)$ . No caso  $\lambda > 1$  poderíamos representar o crescimento de uma colônia de bactérias se reproduzindo numa lamina de microscópico. Se contarmos o número  $N(t)$  de bactérias num dado instante  $t$ , e voltarmos a contar  $N(t + \Delta t)$  depois de um intervalo  $\Delta t$  veremos que o valor aumentou. Nesse caso  $\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t)$  é o número de bactérias que se duplicaram nesse intervalo de tempo. Matematicamente, podemos escrever:

$$\Delta N = \alpha \Delta t N(t).$$

onde  $\alpha$  seria um valor constante que depende da capacidade reprodutiva das bactérias. E portanto o mapa iterativo para uma explosão exponencial é:

$$N(t + \Delta t) = N(t)(1 + \alpha\Delta t)$$

Podemos ainda acrescentar mão um termo  $-\lambda x^2(t)$ , que irá limitar o crescimento incessante do mapa. Sabemos por exemplo que no caso de um crescimento de bactérias existe um limite de crescimento ditado pelo ambiente. Além disso, vamos considerar nas simulações  $\Delta t = 1$ , e portanto,  $\lambda = 1 - \alpha$ . O mapa logístico ficará:

$$x(t + 1) = \lambda x(t)(1 - x(t))$$

Para tempos longos ( $t \rightarrow \infty$ ) chamarei  $x(\infty) = x^*$ , que é conhecido na literatura como ponto fixo, sendo ele o valor para o qual o mapa converge. Substituindo  $x(\infty) = x^*$  na equação (7) temos duas possíveis soluções para o estado estacionário:

$$x^* = \begin{cases} 0 \\ \frac{\lambda-1}{\lambda} \end{cases} \quad (2)$$

Para verificar isso, adotarei  $\lambda = 1.01$  e  $x(0) = 0.0001$ , obtendo por conseguinte o gráfico .

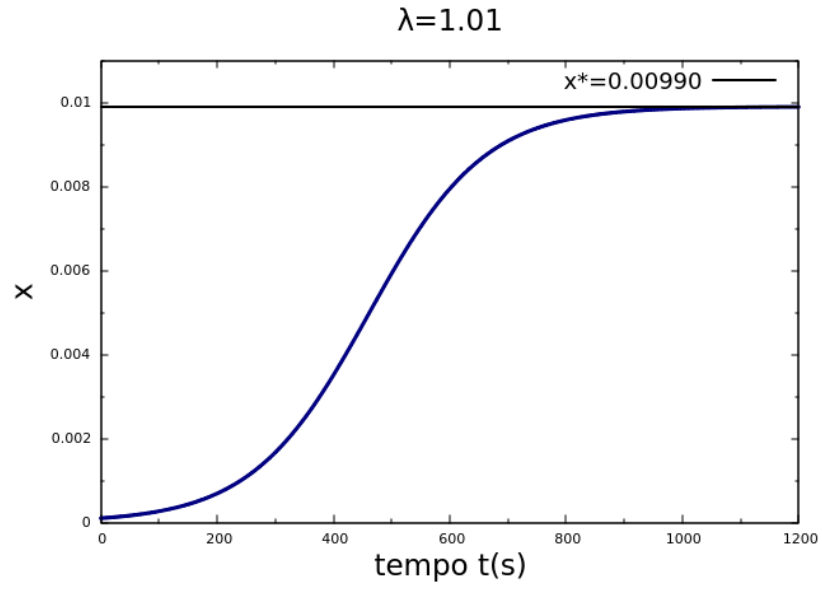


FIG. 1. O gráfico mostra que assim como previsto pela equação (2), ele irá convergir para um valor fixo, sendo ele  $x^* = 0.00990$ .

Uma outra forma de obter os pontos fixos é a partir de um diagrama de  $x(t+1)$  por  $x(t)$ , plotando os pontos fornecidos pela simulação junto as curvas  $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$  e  $f(x) = x$ .

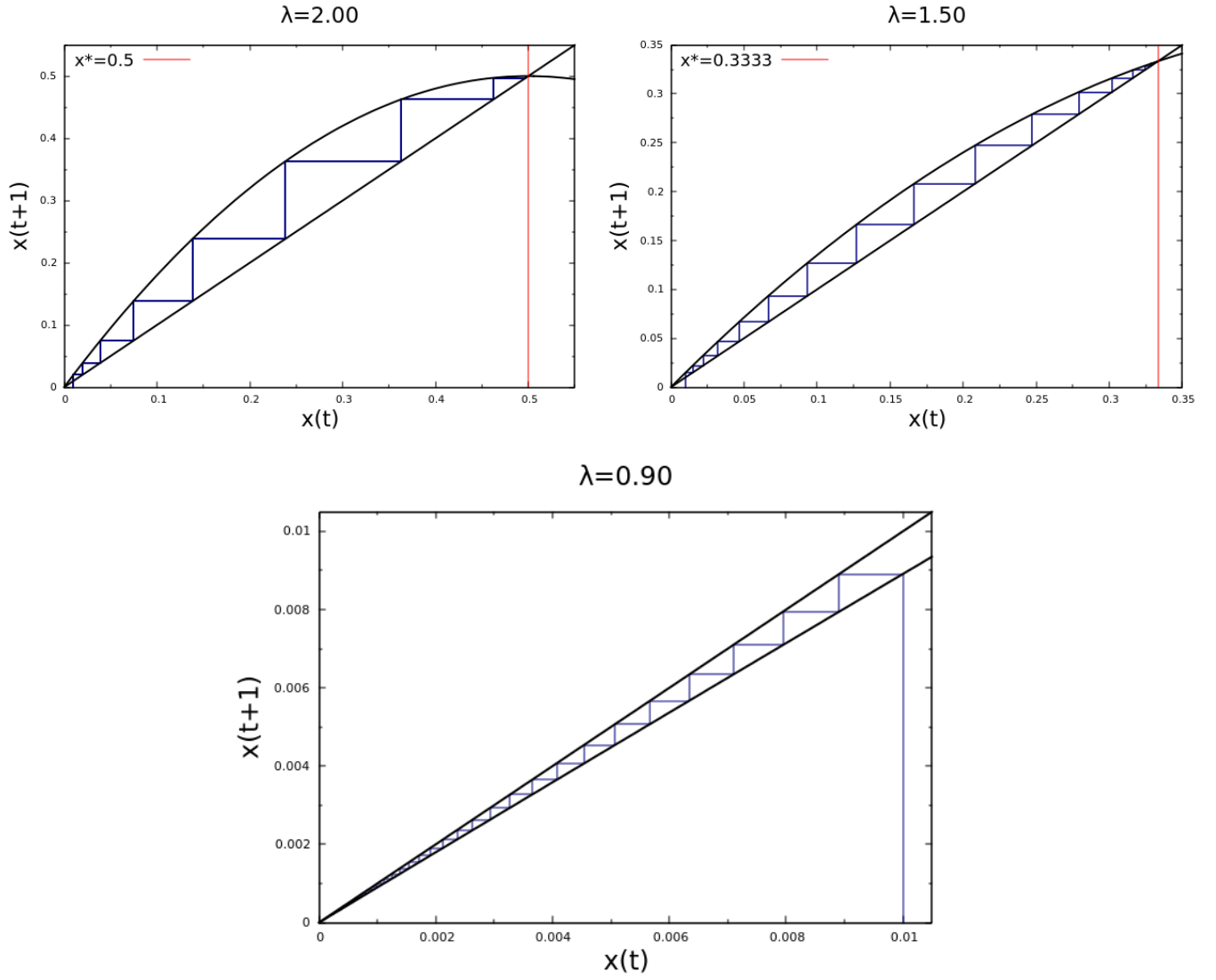
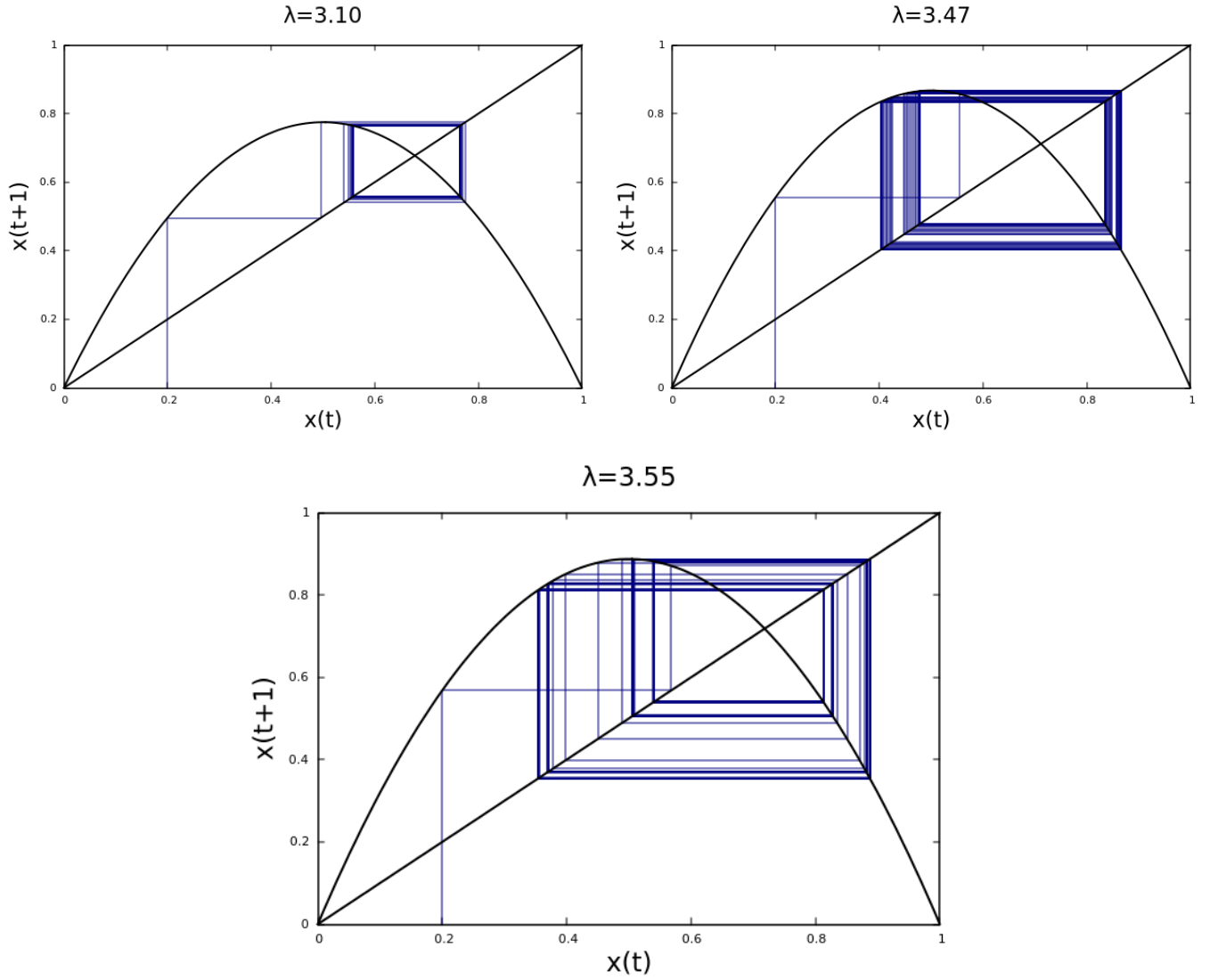


FIG. 2. Diagramas para valores de  $\lambda > 1$  e  $\lambda < 1$ .

Como pode ser visto nos diagramas (3) os pontos fixos estão de acordo com as soluções analítica. Além disso, para  $\lambda < 1$ , independente do valor inicial  $x(0)$  que é escolhido, sempre será observado  $x^* = 0$ , enquanto que para  $\lambda > 1$  temos o caso onde  $x^* = \frac{\lambda-1}{\lambda}$ . Em particular, com  $0 < \lambda < 3$ , os pontos fixos se confundem com os pontos atratores. Para  $\lambda > 3$  o resultado é inválido e devemos buscar outra abordagem, pois está fora das previsões analíticas feitas anteriormente, ficando com os seguintes diagramas:

FIG. 3. Diagramas para valores  $\lambda > 3$ .

No novo método o mapa ao alcançar o suposto estado estacionário  $x^*$  não mais convergirá para um único valor, mas oscilará entre dois ou mais valores periodicamente, como ilustra os gráficos (4), (5) e (6). Matematicamente a forma de identificar estes pontos atratores será substituindo o mapa logístico por um mapa composto. No caso de 2 atratores, o mapa composto fica:

$$x(t+1) = f_\lambda(f_\lambda(x)) = f_\lambda^{(2)}(x), \quad (3)$$

sendo

$$f_\lambda(x) = \lambda x(t) (1 - x(t)) \quad (4)$$

o mapa logístico original. O mesmo pode ser feito no caso em que  $\lambda$  tem mais de dois atratores seguindo a mesma ideia. Das simulações temos para mais de dois pontos atratores:

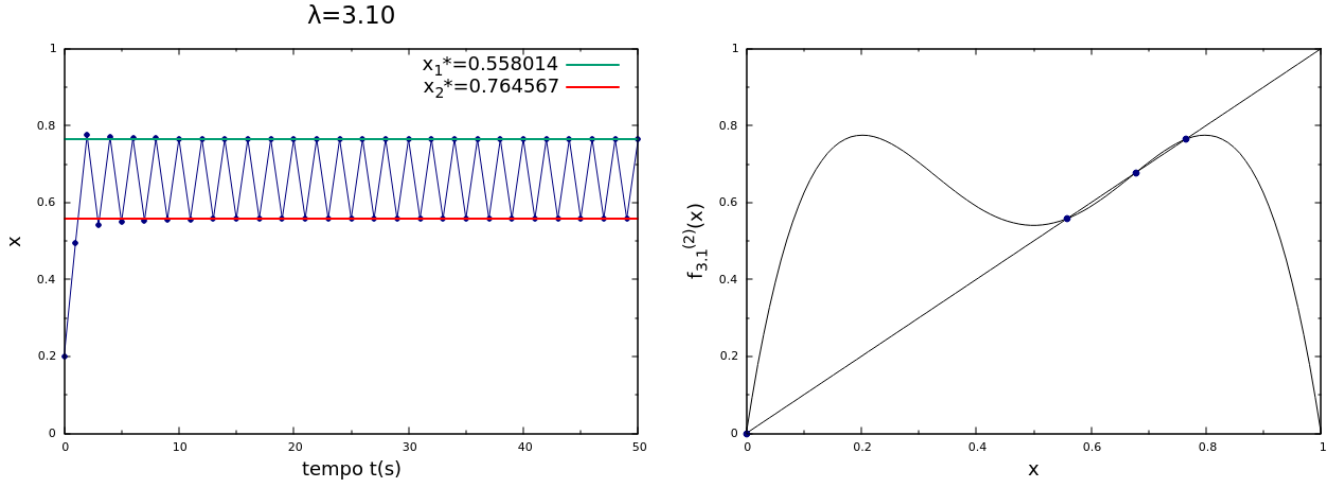


FIG. 4. O gráfico a esquerda mostra 2 atratores em  $x^*$  e o da direita confirma isso, sendo plotado  $f_{\lambda}^{(2)}(x)$  junto a reta  $x$  e verificado que os pontos de interseção nos fornecem os atratores que foram observados. Além dos pontos atratores temos como ponto fixo instável  $x^* = 1 - 1/\lambda = 0.711815$  e  $x^* = 0$ .

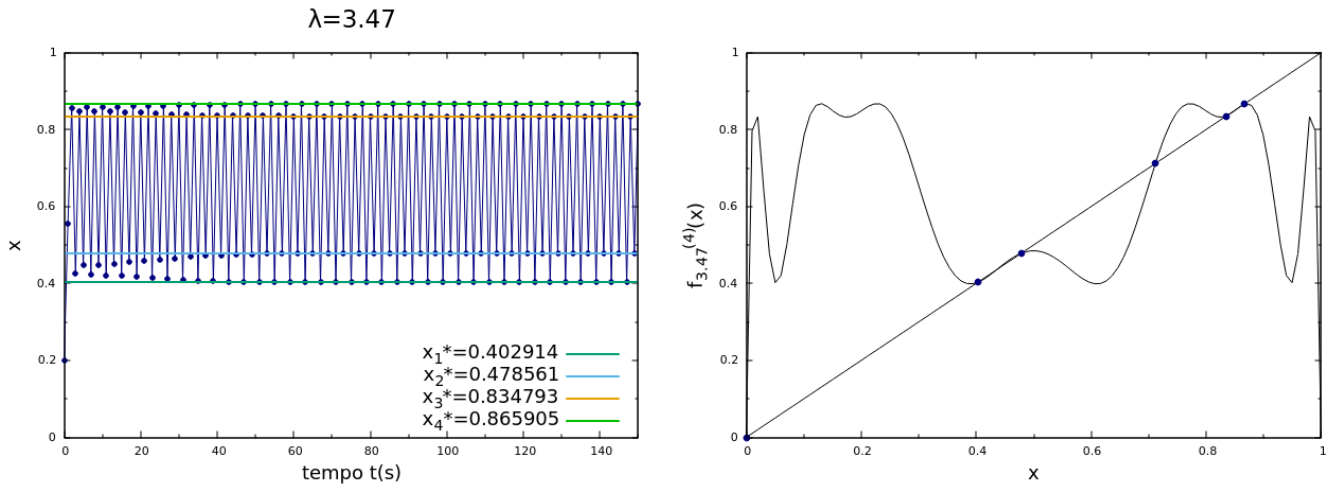


FIG. 5. O gráfico a esquerda mostra 4 atratores em  $x^*$  e o da direita confirma isso, sendo plotado  $f_{\lambda}^{(4)}(x)$  junto a reta  $x$  e verificando que os pontos de interseção nos fornece os atratores observados. Além dos pontos atratores temos como ponto fixo instável  $x^* = 1 - 1/\lambda = 0.711815$  e  $x^* = 0$ .

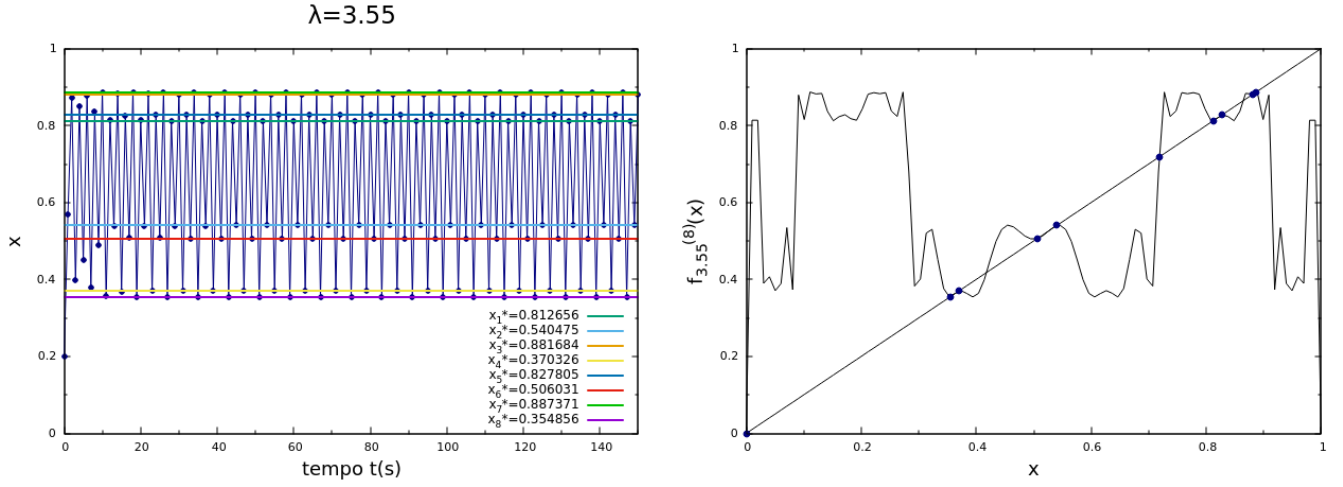


FIG. 6. O gráfico a esquerda mostra 4 atratores em  $x^*$  e o da direita confirma isso, sendo plotado  $f_{\lambda}^{(8)}(x)$  junto a reta  $x$  e verificando que os pontos de interseção nos fornece os atratores observados. Além dos pontos atratores temos o ponto fixo instavel  $x^* = 1 - 1/\lambda = 0.711815$  e  $x^* = 0$ .

Conforme  $\lambda \rightarrow 1$  mais longas são as iterações para alcançar o valor  $x^* = 0$ , até que para  $\lambda = 1$  a função que descreve o comportamento do mapa não será mais de um decaimento exponencial, e sim um decaimento algébrico. Isso classificará o ponto crítico  $\lambda = 1$ , como pode ser visto nos gráficos (7)

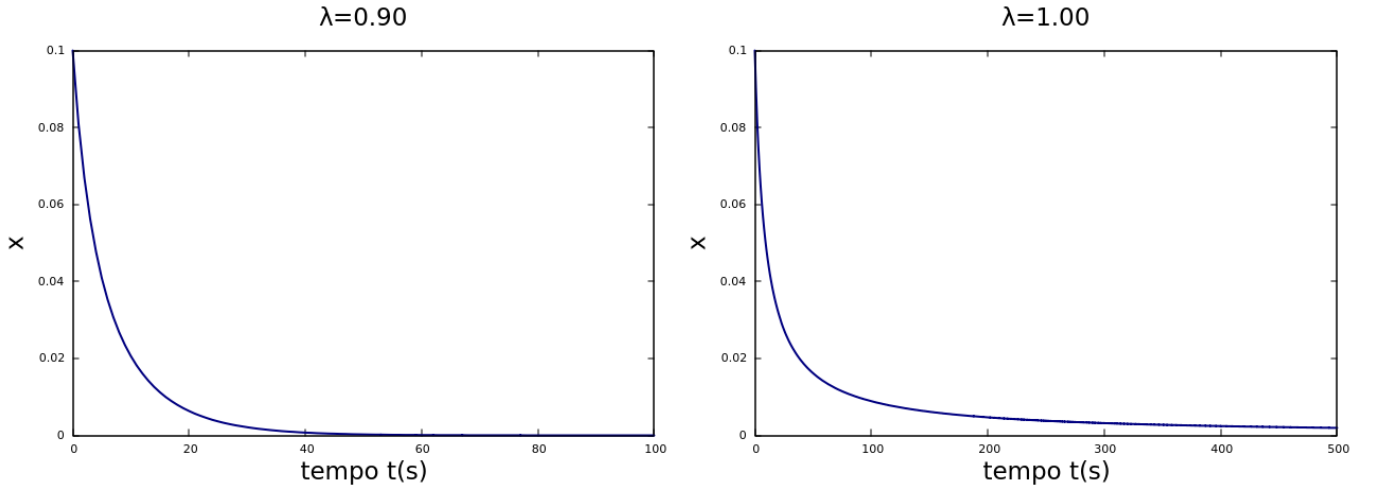


FIG. 7. Gráficos para ilustrar o caso  $\lambda < 1$  a esquerda e  $\lambda = 1$  a direita.

Para confirmar os tipos de curvas que descrevem o caso  $\lambda < 1$  e  $\lambda = 1$  plotarei os gráficos a cima na escala log e log por log respectivamente.

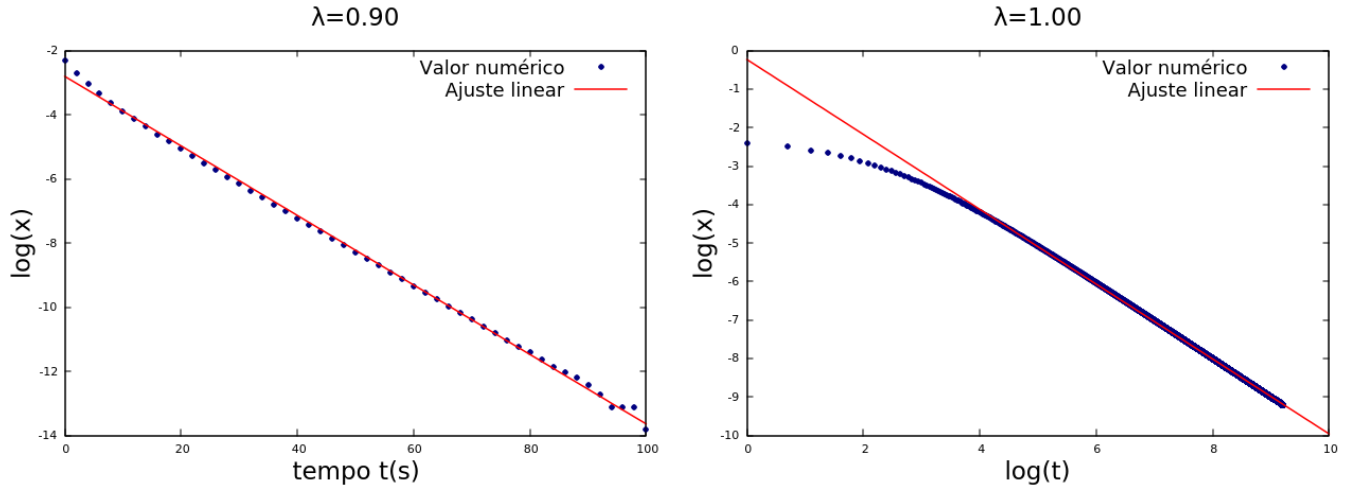


FIG. 8. Gráficos na escala log para  $\lambda < 1$  e log por log para  $\lambda = 1$  com as devidas retas de ajuste para cada caso.

Para  $\lambda = 0.9$ , fazendo a regressão linear a partir do gráfico vemos que a reta de ajuste é da forma  $\log x = at + b$  sendo  $a = -0.108406$  e  $b = -2.80324$ . Exponenciando essa equação obtemos o comportamento da curva sem a necessidade de resolver uma equação diferencial.

$$x \sim e^{-0.11t} \quad (5)$$

Fazendo o mesmo para  $\lambda = 1$  com a reta de ajuste da forma  $\log x = a \log t + b$ , sendo  $a = -0.987588$  e  $b = -0.109602$  é obtidos tal que:

$$x \sim t^{-0.99t} \quad (6)$$

Isso confirma que o decaimento crítico segue uma lei de potência do tipo  $t^{-\alpha}$  sendo  $\alpha \approx 1$  a classe de universalidade que enquadra esse sistema.

## I. DIAGRAMA DE BIFURCAÇÕES

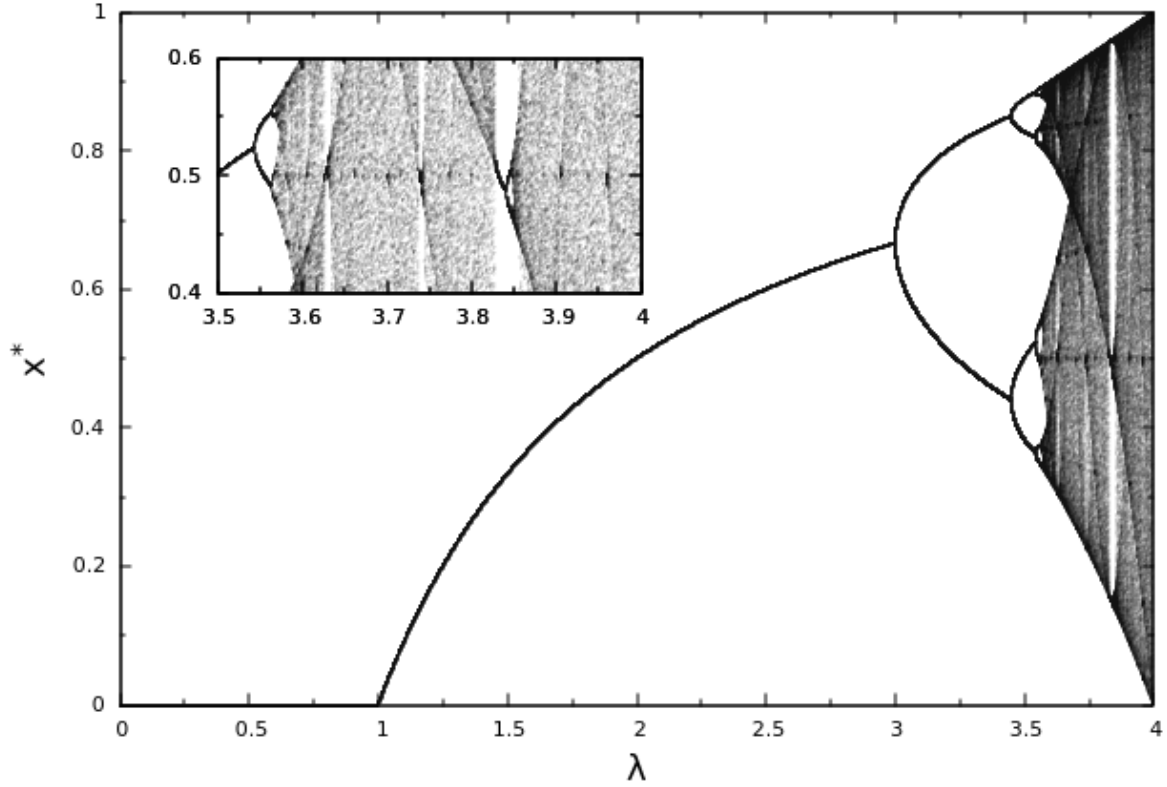


FIG. 9. Diagrama dos pontos atratores  $x^*$  por  $\lambda$  começando com  $x(0) = 0.20$ . A simulação para obter esse diagrama foi feita com 1000 iterações para cada  $\lambda$ , com incremento de  $10^{-4}$  partindo de  $\lambda = 0$  até chegar a  $\lambda = 4$ .

O Diagrama mostra que na região onde  $0 < \lambda < 1$  o ponto fixo é  $x^* = 0$ , configurando um estado absorvente para o sistema; Em  $\lambda = 1$  é o ponto crítico que separa duas fases do sistema, o estado absorvente ( $x^* = 0$ ) e o estado ativo ( $x^* > 0$ ); Para  $1 < \lambda < 3$  o ponto fixo assume valores da forma  $x^* = 1 - \frac{1}{\lambda}$ ; Em  $\lambda > 3$  nenhum ponto fixo é mais estável, podendo assumir dois ou mais valores; E por ultimo, em  $3.5699 < \lambda < 4$  temos caos com janelas de comportamentos periódicos, como é mostrado no zoom feito no diagrama.