

Mapa logístico

Marcos Benício de A. Alonso

A dinâmica do decaimento nuclear pode ser descrita através do mapa iterativo de primeira ordem $N(t + \Delta t) = N(t)(1 - \alpha\Delta t)$. Ele permite o cálculo do valor futuro $N(t + 1)$ a partir do valor atual $N(t)$ da variável dinâmica de interesse. Esse mapa se trata de um mapa da forma $x(t + 1) = \lambda x(t)$ onde particularmente tínhamos $\lambda = (1 - \alpha\Delta t)$.

De forma geral, o mapa iterativo de primeira ordem é:

$$x(t + 1) = \lambda x(t) (1 - x(t)). \quad (1)$$

Dependendo do valor de λ , temos dois possíveis cenários. Para $\lambda < 1$ temos um decaimento exponencial, sendo o valor futuro $x(t + 1) < x(t)$. Por outro lado, para $\lambda > 1$, temos um crescimento exponencial, sendo o valor futuro $x(t + 1) > x(t)$. No caso $\lambda > 1$ poderíamos representar o crescimento de uma colônia de bactérias se reproduzindo numa lamina de microscópico. Se contarmos o número $N(t)$ de bactérias num dado instante t , e voltarmos a contar $N(t + \Delta t)$ depois de um intervalo Δt veremos que o valor aumentou. Nesse caso $\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t)$ é o número de bactérias que se duplicaram nesse intervalo de tempo. Matematicamente, podemos escrever:

$$\Delta N = \alpha \Delta t N(t).$$

onde α seria um valor constante que depende da capacidade reprodutiva das bactérias. E portanto o mapa iterativo para uma explosão exponencial é:

$$N(t + \Delta t) = N(t)(1 + \alpha\Delta t)$$

Podemos ainda acrescentar mão um termo $-\lambda x^2(t)$, que irá limitar o crescimento incessante do mapa. Sabemos por exemplo que no caso de um crescimento de bactérias existe um limite de crescimento ditado pelo ambiente. Além disso, vamos considerar nas simulações $\Delta t = 1$, e portanto, $\lambda = 1 - \alpha$. O mapa logístico ficará:

$$x(t + 1) = \lambda x(t)(1 - x(t))$$

Para tempos longos ($t \rightarrow \infty$) chamarei $x(\infty) = x^*$, que é conhecido na literatura como ponto fixo, sendo ele o valor para o qual o mapa converge. Substituindo $x(\infty) = x^*$ na equação (7) temos duas possíveis soluções para o estado estacionário:

$$x^* = \begin{cases} 0 \\ \frac{\lambda-1}{\lambda} \end{cases} \quad (2)$$

Para verificar isso, adotarei $\lambda = 1.01$ e $x(0) = 0.0001$, obtendo por conseguinte o gráfico .

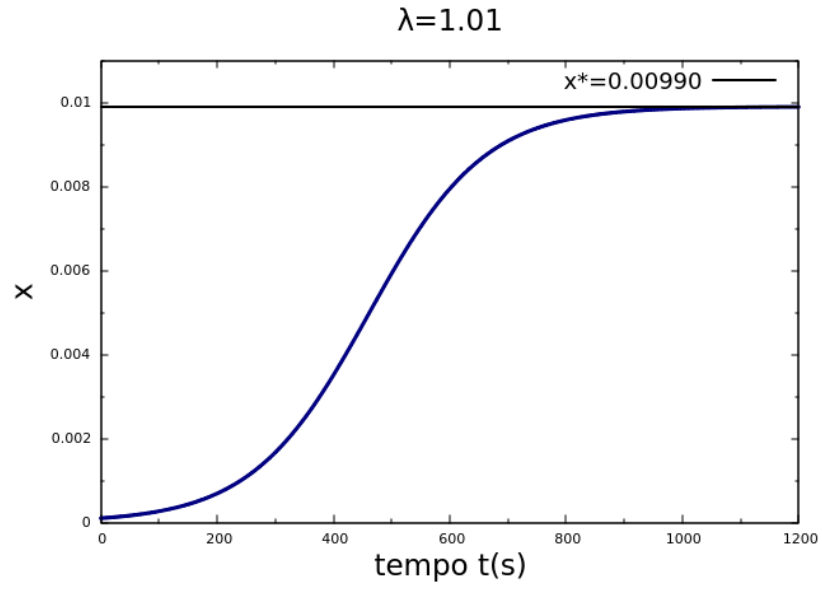


FIG. 1. O gráfico mostra que assim como previsto pela equação (2), ele irá convergir para um valor fixo, sendo ele $x^* = 0.00990$.

Uma outra forma de obter os pontos fixos é a partir de um diagrama de $x(t+1)$ por $x(t)$, plotando os pontos fornecidos pela simulação junto as curvas $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$ e $f(x) = x$.

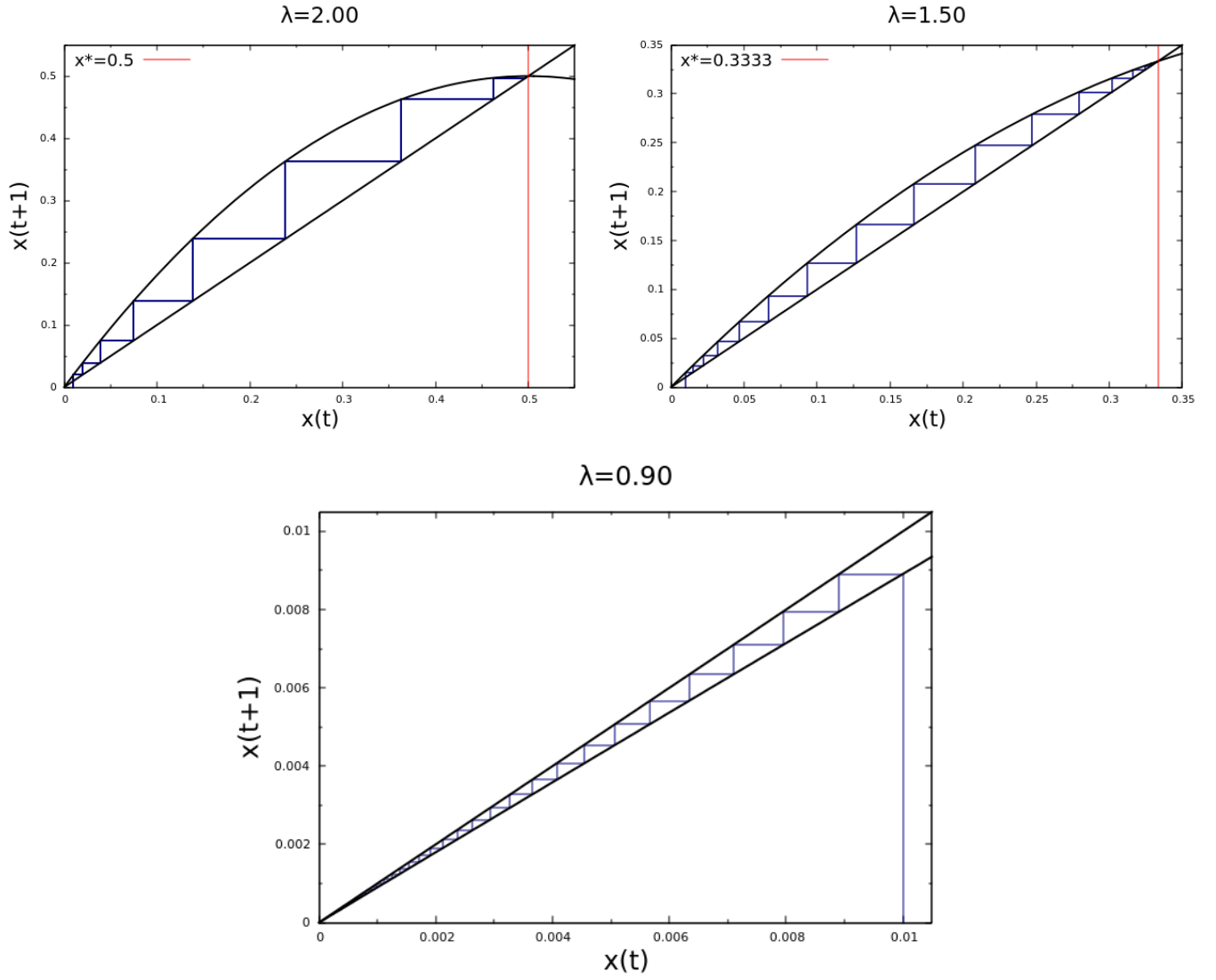
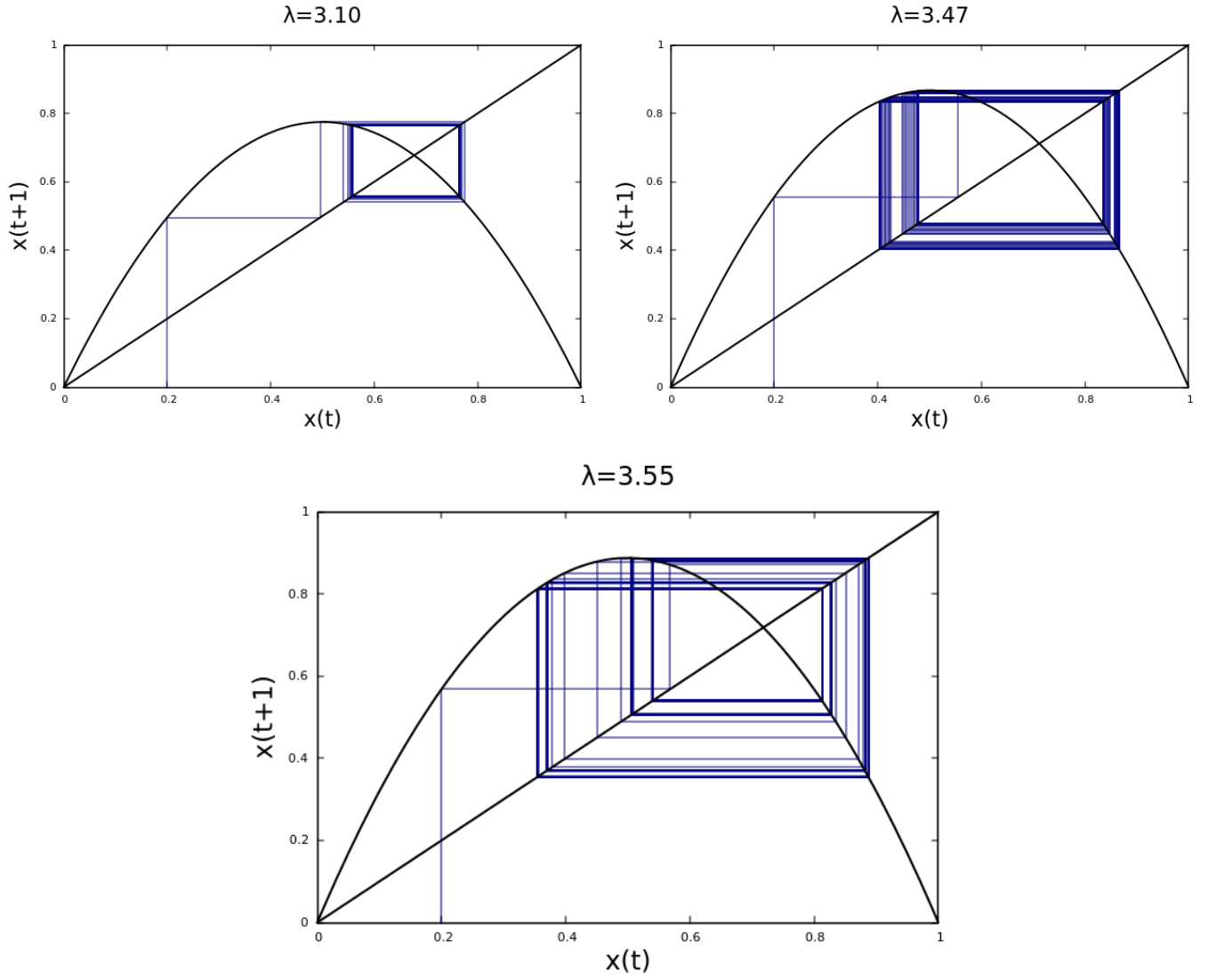


FIG. 2. Diagramas para valores de $\lambda > 1$ e $\lambda < 1$.

Como pode ser visto nos diagramas (3) os pontos fixos estão de acordo com as soluções analítica. Além disso, para $\lambda < 1$, independente do valor inicial $x(0)$ que é escolhido, sempre será observado $x^* = 0$, enquanto que para $\lambda > 1$ temos o caso onde $x^* = \frac{\lambda-1}{\lambda}$. Em particular, com $0 < \lambda < 3$, os pontos fixos se confundem com os pontos atratores. Para $\lambda > 3$ o resultado é inválido e devemos buscar outra abordagem, pois está fora das previsões analíticas feitas anteriormente, ficando com os seguintes diagramas:

FIG. 3. Diagramas para valores $\lambda > 3$.

No novo método o mapa ao alcançar o suposto estado estacionário x^* não mais convergirá para um único valor, mas oscilará entre dois ou mais valores periodicamente, como ilustra os gráficos (4), (5) e (6). Matematicamente a forma de identificar estes pontos atratores será substituindo o mapa logístico por um mapa composto. No caso de 2 atratores, o mapa composto fica:

$$x(t+1) = f_\lambda(f_\lambda(x)) = f_\lambda^{(2)}(x), \quad (3)$$

sendo

$$f_\lambda(x) = \lambda x(t) (1 - x(t)) \quad (4)$$

o mapa logístico original. O mesmo pode ser feito no caso em que λ tem mais de dois atratores seguindo a mesma ideia. Das simulações temos para mais de dois pontos atratores:

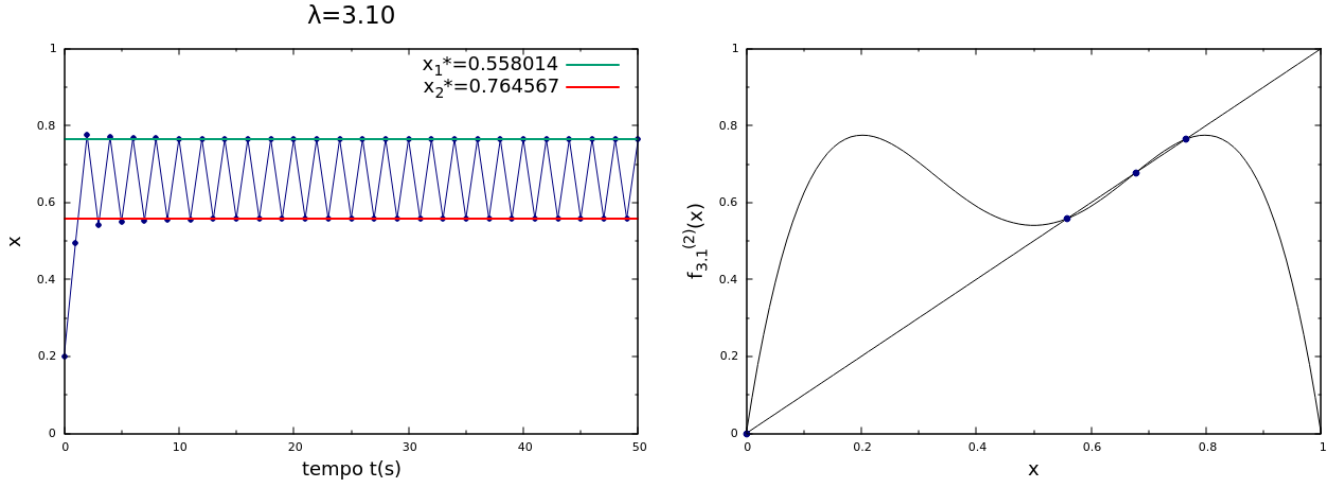


FIG. 4. O gráfico a esquerda mostra 2 atratores em x^* e o da direita confirma isso, sendo plotado $f_{\lambda}^{(2)}(x)$ junto a reta x e verificado que os pontos de interseção nos fornecem os atratores que foram observados. Além dos pontos atratores temos como ponto fixo instável $x^* = 1 - 1/\lambda = 0.711815$ e $x^* = 0$.

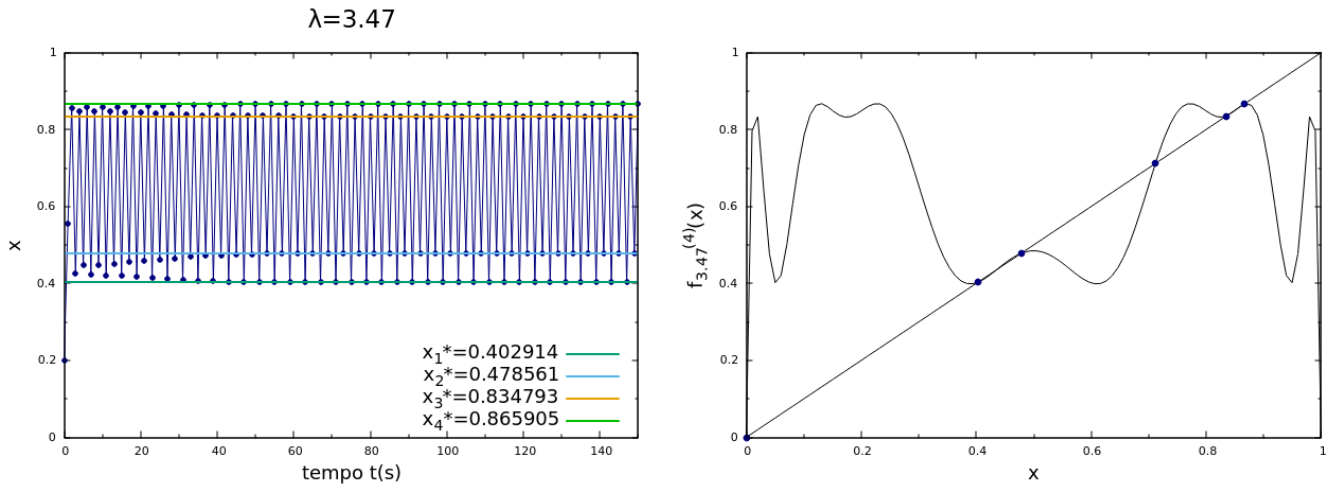


FIG. 5. O gráfico a esquerda mostra 4 atratores em x^* e o da direita confirma isso, sendo plotado $f_{\lambda}^{(4)}(x)$ junto a reta x e verificando que os pontos de interseção nos fornece os atratores observados. Além dos pontos atratores temos como ponto fixo instável $x^* = 1 - 1/\lambda = 0.711815$ e $x^* = 0$.

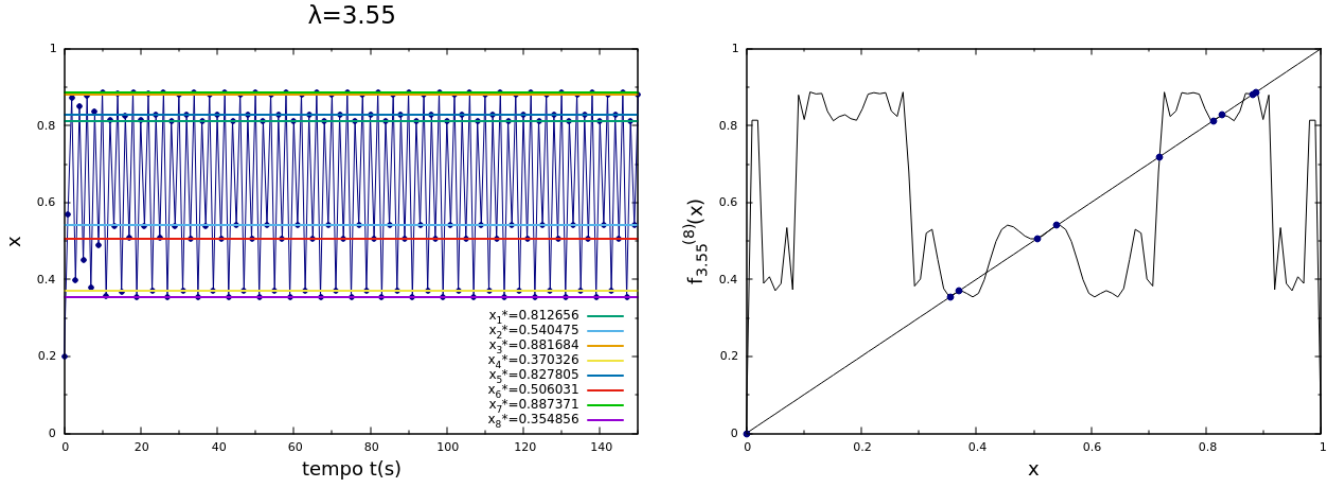


FIG. 6. O gráfico a esquerda mostra 4 atratores em x^* e o da direita confirma isso, sendo plotado $f_{\lambda}^{(8)}(x)$ junto a reta x e verificando que os pontos de interseção nos fornece os atratores observados. Além dos pontos atratores temos o ponto fixo instavel $x^* = 1 - 1/\lambda = 0.711815$ e $x^* = 0$.

Conforme $\lambda \rightarrow 1$ mais longas são as iterações para alcançar o valor $x^* = 0$, até que para $\lambda = 1$ a função que descreve o comportamento do mapa não será mais de um decaimento exponencial, e sim um decaimento algébrico. Isso classificará o ponto crítico $\lambda = 1$, como pode ser visto nos gráficos (7)

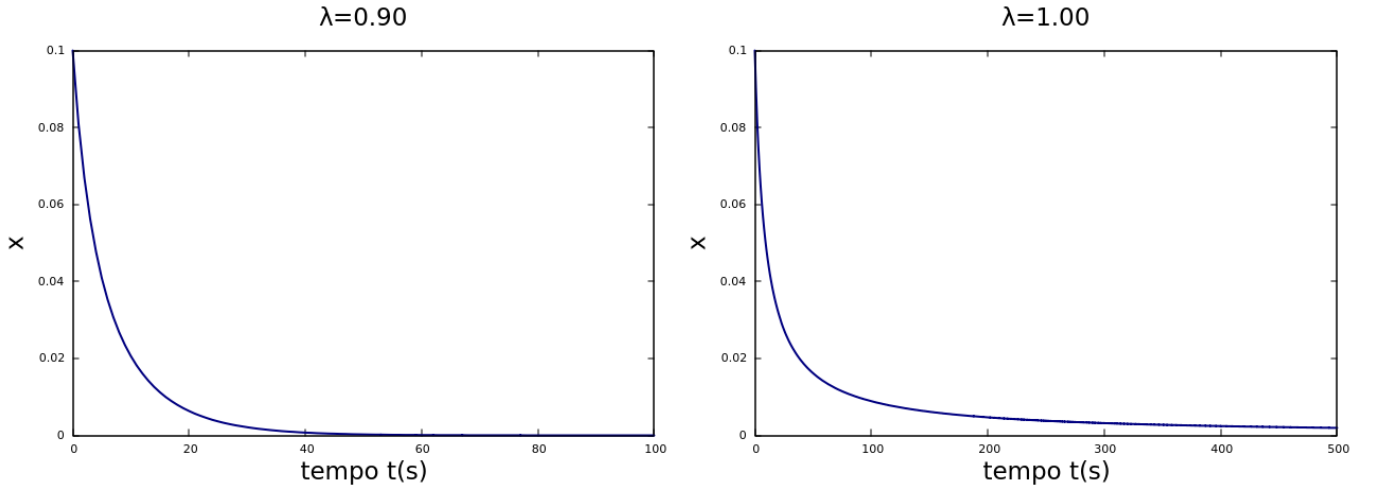


FIG. 7. Gráficos para ilustrar o caso $\lambda < 1$ a esquerda e $\lambda = 1$ a direita.

Para confirmar os tipos de curvas que descrevem o caso $\lambda < 1$ e $\lambda = 1$ plotarei os gráficos a cima na escala log e log por log respectivamente.

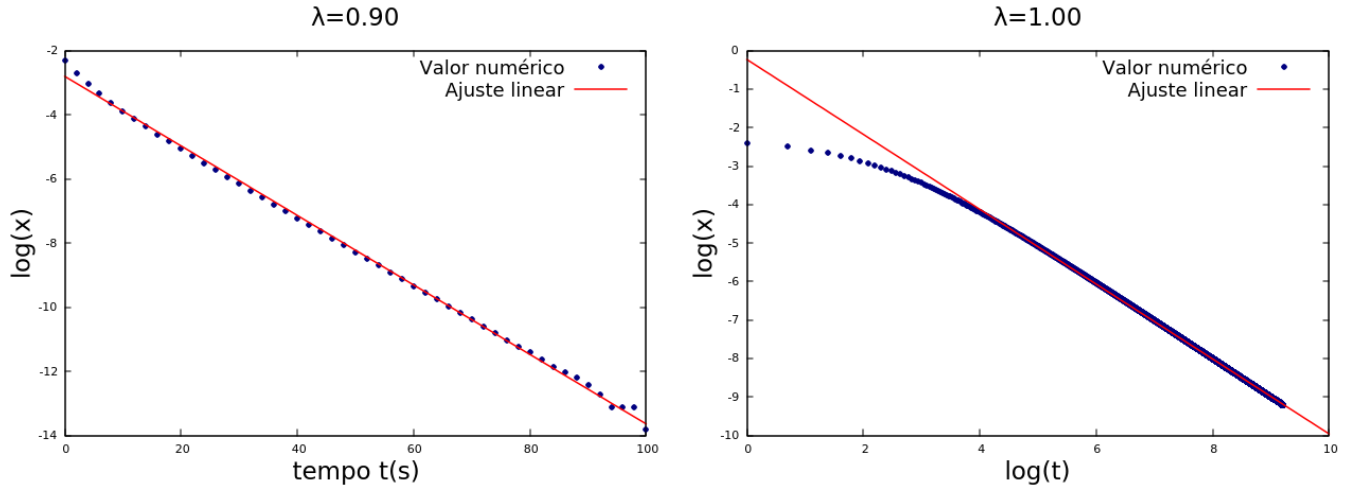


FIG. 8. Gráficos na escala log para $\lambda < 1$ e log por log para $\lambda = 1$ com as devidas retas de ajuste para cada caso.

Para $\lambda = 0.9$, fazendo a regressão linear a partir do gráfico, vemos que a reta de ajuste é da forma $\log x = at + b$, sendo $a = -0.108406$ e $b = -2.80324$. Exponenciando essa equação obtemos o comportamento da curva sem a necessidade de resolver uma equação diferencial.

$$x \sim e^{-0.11t} \quad (5)$$

Fazendo o mesmo para $\lambda = 1$ com a reta de ajuste da forma $\log x = a \log t + b$, sendo $a = -0.987588$ e $b = -0.109602$, temos:

$$x \sim t^{-0.99t} \quad (6)$$

Isso significa que o decaimento crítico segue uma lei de potência do tipo $t^{-\alpha}$, sendo $\alpha \approx 1$ a classe de universalidade que esse problema pertence.

I. DIAGRAMA DE BIFURCAÇÕES

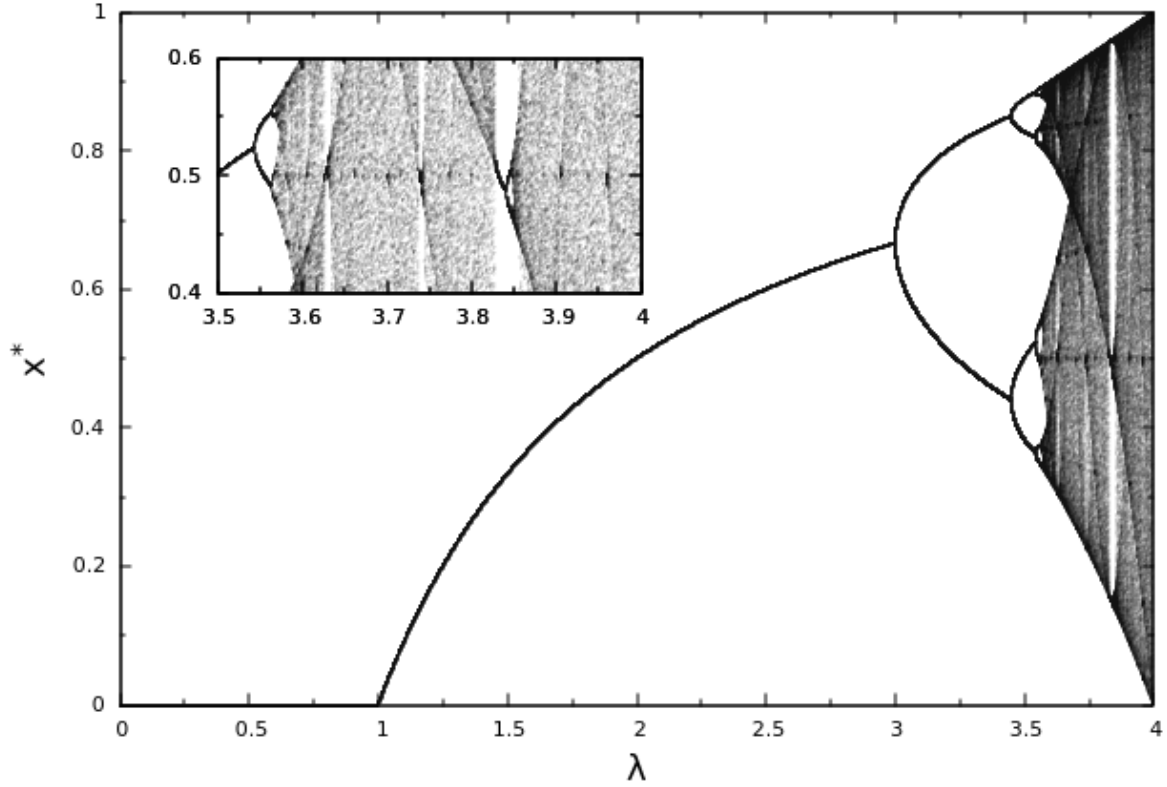


FIG. 9. Diagrama dos pontos atratores x^* por λ começando com $x(0) = 0.20$. A simulação para obter esse diagrama foi feita com 1000 iterações para cada λ , com incremento de 10^{-4} partindo de $\lambda = 0$ até chegar a $\lambda = 4$.

Vamos agora analisar cada um dos cenários desse diagrama. Na região para $0 < \lambda < 1$ o ponto fixo é $x^* = 0$, configurando um estado absorvente do sistema. Em $\lambda = 1$ temos o ponto crítico que separa duas fases diferentes, fase onde temos apenas estado absorvente ($x^* = 0$) e a fase onde temos estado ativo ($x^* > 0$). Para $1 < \lambda < 3$, o ponto fixo assume valores da forma $x^* = 1 - \frac{1}{\lambda}$. Em $\lambda > 3$ nenhum ponto fixo é estável, podendo assumir dois ou mais valores. E por fim, para $3.5699 < \lambda < 4$ temos o chamado caos, com a janela de zoom mostrando um comportamento periódico dentro do caos.