Decaimento Nuclear

Marcos Benício de A. Alonso

O decaimento nuclear tem a dinâmica descrita pela equação $N(t) = -\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$. A quantidade importante é o número $N(t)$ de núcleos ainda radioativos na amostra, que diminui a medida em que o tempo t passa. Vamos considerar que $dN = \Delta N$ é a quantidade de núcleos que decaem num espaço de tempo infinitesimal $dt = \Delta t$, por exemplo ente os instantes t e $t + \Delta t$ ou $t + dt$.

Podemos ver ΔN como sendo uma fração fixa de $N(t)$. A constante de proporcionalidade α dentre ΔN e $N(t)$ depende do elemento radioativo, e tem unidade 1/segundo. Nesse arquivo vamos mostrar como resolver numericamente a equação para o decaimento radioativo para o elemento Rb^{82}, cuja constante que devemos adotar é $\alpha = 9,24 \times 10^{-3}s^{-1}$.

Matematicamente, podemos escrever

$$\Delta N = \alpha \Delta t N(t).$$

onde $\alpha = 9,24 \times 10^{-3}s^{-1}$ para o Rb^{82}. Temos que $\Delta N = N(t) - N(t + \Delta t)$, ficando com

$$N(t+1) = N(t)(1 - \alpha\Delta t), \tag{1}$$

que relacionam a quantidade de núcleos ainda radioativos nos instantes t e $t + \Delta t$.

Essa relação nos permite resolver numericamente o seguinte problema: conhecido o valor da constante α e o número inicial $N(0)$ de núcleos radioativos numa dada amostra, podemos determinar a sequencia de valores $N(1), N(2), N(3), \ldots$ a cada espaço de tempo discreto, que consideraremos como $\Delta t = 1$ segundo.

A equação (1) representa um mapa iterativo de primeira ordem. Significa que sua aplicação repetitiva (sinônimo de iterativa) a partir do valor inicial $N(0)$ determina toda a sequência $N(1), N(2), N(3), \ldots$. Primeira ordem significa que cada termo nesta sequência depende apenas do anterior. Para o Rb^{82} teremos, como mostra na figura 1, um decaimento no número de núcleos radioativos conforme o sistema evolui no tempo.

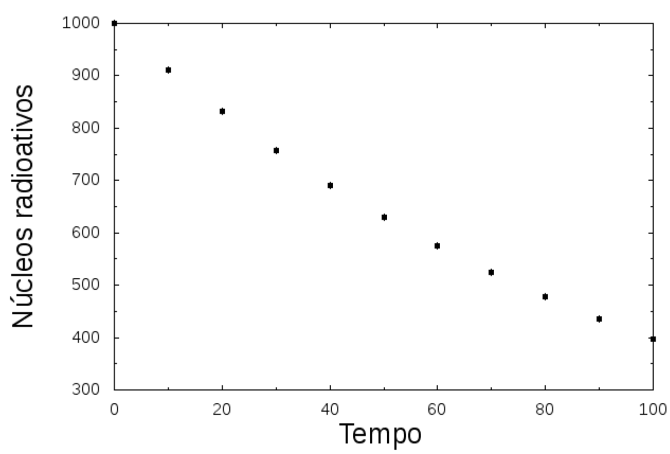


FIG. 1. Decaimento nuclear para o Rb^{82}, com número inicial de núcleos radioativos $N_0 = 1000$.

Para saber o tipo de decaimento que está sendo observado no gráfico da figura 1 adotaremos a escala logarítmica no eixo y. O palpite que já devemos esperar que um núcleo radioativo decai exponencialmente no tempo, e esperamos portanto que o gráfico se torne linear após o uso da escala logarítmica. Isso permite a partir de resultados numéricos obter a solução analítica da forma $N(t) \sim e^{-at}$, onde a é uma constante que será definida em breve.

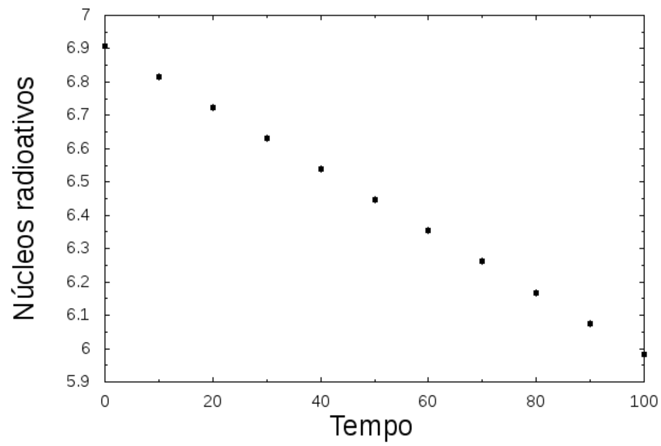


FIG. 2. Comportamento linear em escala logaritmo $ln\left(N\left(t\right)\right)$ por t.

A partir do gráfico da figura 2, podemos também estimar o coeficiente angular e linear dessa reta. Para isso é usado um ajuste linear em que $ln\left(N\left(t\right)\right) = at + b$, sendo $f(t) = ln\left(N\left(t\right)\right)$ tal que ficaremos com $f(t) = at + b$. Através da ferramenta gnuplot, obtive os seguintes valores

$$a = -0.00924004 \pm 5.252 \times 10^{-12}.$$
$$b = 6.90776 \pm 3.107 \times 10^{-10}.$$

Confrontando a com o parâmetro α vemos que $\alpha = -a$. Com isso, temos:

$$\begin{aligned} ln\left(N\left(t\right)\right) &= at + b \\ N\left(t\right) &= e^{-\alpha t + b} \\ N\left(t\right) &= e^{b} e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

Para $t = 0$, teremos $N_o = e^b$ e portanto encontramos que a solução da equação diferencial $N(t) = -\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$ é:

$$N\left(t\right) = N_o e^{-\alpha t}.$$

Temos então a partir do resultado numérico para tempos mais longos os seguintes gráficos, visualmente concordando com a solução que intuímos usando métodos numéricos.

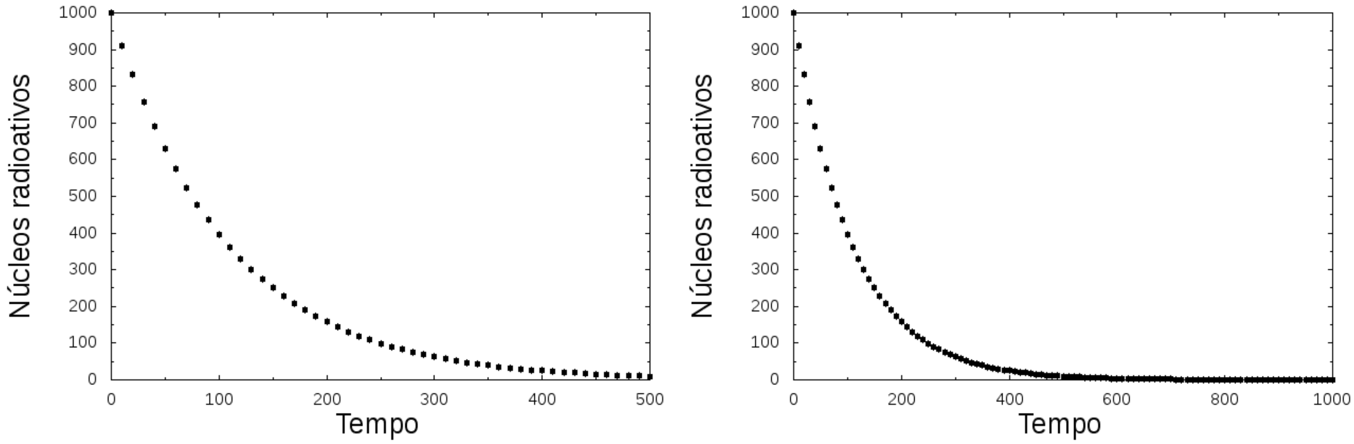


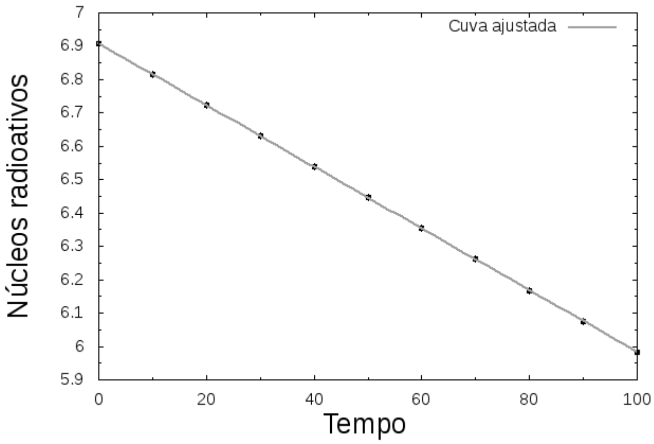
FIG. 3. Para um tempo máximo de 500 e 1000 é observado mais claramente o decaimento exponencial do número de núcleos radioativos

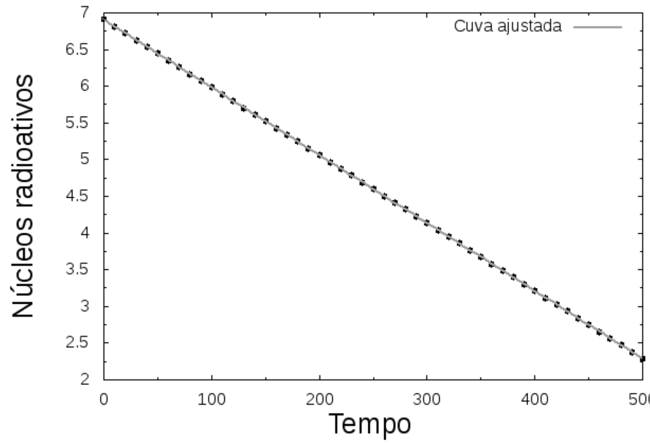
O coeficiente angular para os três casos foram iguais a $a = -0.00924004$ e diferiram por um pequeno erro do ajuste da curva que é desprezível. Além disso, quanto maior for t_{max} pior se torna o ajuste, como podemos observar na tabela I.

TABLE I. tabela com os coeficientes angulares para os valores de tempo máximo

t_{max}	Coef.angular	erro
100	-0.00924004	$\pm 5.252 \times 10^{-12}$
500	-0.00924004	$\pm 9.090 \times 10^{-12}$
1000	-0.00924004	$\pm 2.964 \times 10^{-10}$

Outro fator que contribuiu para chegarmos tão próximo do valor de α foi ter adotado um intervalo de tempo pequeno no mapa iterativo, escolhido para $\Delta t = 10^{-3}$.





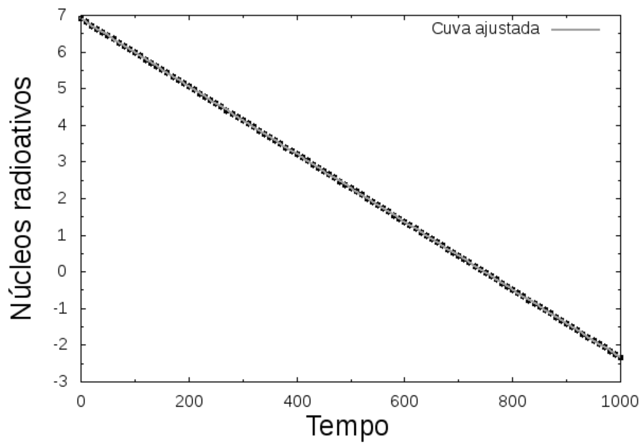


FIG. 4. Ajuste da curva para os tempos máximos de 100, 500 e 1000 plotado junto aos pontos obtidos a partir do mapa iterativo.