

Integração numérica de equações diferenciais

Marcos Benício de A. Alonso

A partir de casos particulares usaremos os métodos de Euler e Runge-Kutta para resolver equações diferenciais por integração. O objetivo é comparar ambos métodos a partir do erro gerado para saber o mais preciso.

I. DERIVAÇÃO NUMÉRICA

Consideremos a seguinte função

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)e^{x/3}}{\sqrt{x^2+4}}. \quad (1)$$

Queremos encontrar o valor da derivada (i.e, a inclinação da reta tangente) em $x = 3$ a partir do método de Euler. O método de Euler se resume a escrever a equação diferencial na forma de uma reta secante, que ao fazer $\delta x \rightarrow 0$ se torna uma reta tangente nesse ponto com certa inclinação (derivada) em x . Portanto, escrevemos o método de Euler para uma função qualquer $f(x)$:

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2)$$

aplicando o método para derivar a função (1):

$$\left. \frac{df_{approx}(x)}{dx} \right|_{x=3} \approx \frac{\frac{\sin(x^2)e^{x/3}}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{\sin((x+\Delta x)^2)e^{(x+\Delta x)/3}}{\sqrt{(x+\Delta x)^2+4}}}{\Delta x}. \quad (3)$$

O valor exato dessa derivada é:

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=3} = -4.08962569474024825348626 \quad (4)$$

Quanto menor Δx melhor é a aproximação. Usarei $\Delta x = 10^{-i}$; com i de 0 a 8. Os valores obtidos estão na tabela a seguir, sendo o erro relativo percentual dado pela seguinte equação:

$$Erro(\%) = \frac{100 \times |f'_{approx}(x) - f'(x)|}{f'(x)}, \quad (5)$$

onde $f'_{approx}(x) = \frac{df_{approx}(x)}{dx}$ e $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$.

Δx	$\left. \frac{df_{approx}(x)}{dx} \right _{x=3}$	Erro relativa percentual(%)
10^{-8}	-4.08962572	± 0.00000079
10^{-7}	-4.089626	± 0.000016
10^{-6}	-4.08963	± 0.00016
10^{-5}	-4.08969	± 0.0016
10^{-4}	-4.090	± 0.016
10^{-3}	-4.096	± 0.16
10^{-2}	-4.15	± 1.58
10^{-1}	-4.50	± 10.28
10^{-0}	-0.55	± 86.43

TABLE I. tabela com os dados obtidos a partir do método de Euler

A partir desses valores temos o seguinte gráfico gráfico em escala log por log, de Δx pelos respectivos erros relativos $(\frac{Erro(\%)}{100})$.

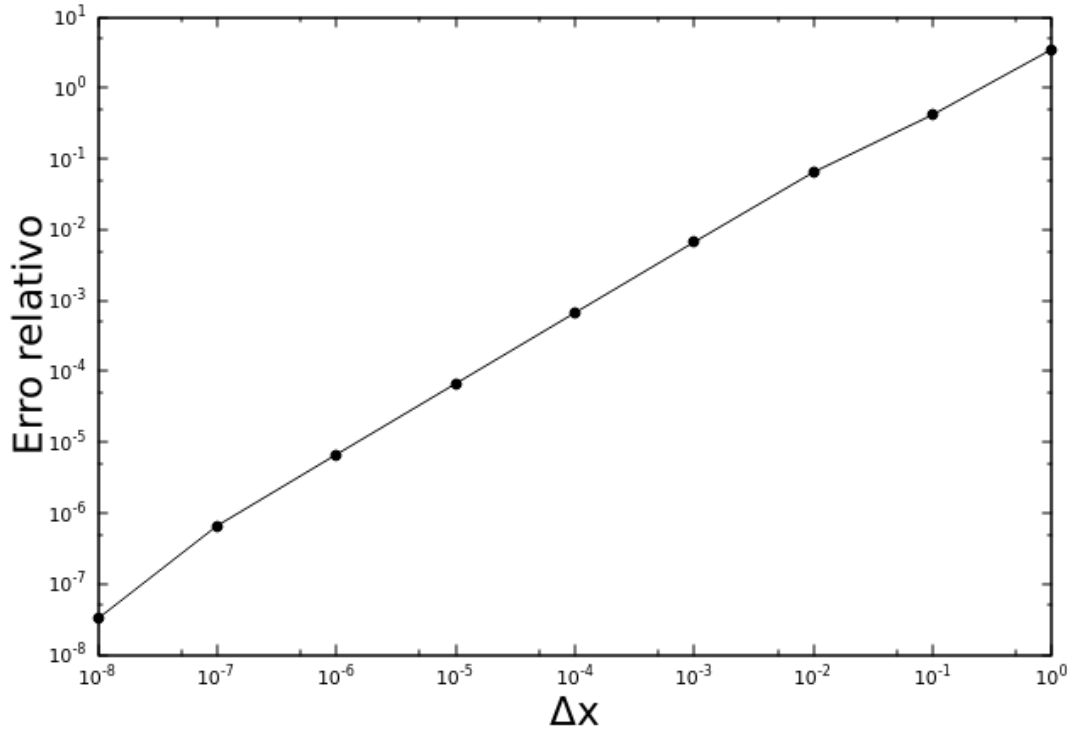


FIG. 1. Gráfico na escala log por log para Δx em função dos respectivas erros relativos

Isso mostra que o erro cresce exponencialmente conforme diminuimos Δx . Ao analisar o gráfico e a tabela, vemos valores razoáveis para $\frac{df(x)}{dx} \big|_{x=3}$ no intervalo $10^{-8} \leq \Delta x \leq 10^{-3}$, tendo um erro máximo de 0.16% do valor exato para $\Delta x = 10^{-3}$.

II. INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

A. Método de Euler

Na seção anterior encontramos o valor da derivada de uma função num ponto, agora temos interesse em encontrar a função que satisfaz uma equação diferencial. Para isso usaremos dois métodos de integração, de Euler e de Runge-Kutta.

Vamos considerar a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{e^{\frac{t}{2}} \sin(5t) + 5e^{\frac{t}{2}} \cos(5t)}{2} + y, \quad (6)$$

cujas condições de contorno é $y(0) = 1$.

Analiticamente, a solução dessa EDO é:

$$y(t) = e^t + e^{\frac{t}{2}} \sin(5t). \quad (7)$$

A partir da equação diferencial combinada a equação (1), recaímos num mapa logístico que podemos resolver por iteração.

$$y(t + \Delta t) = e^{\frac{t}{2}} \left(-\frac{1}{2} \sin(5t) + 5 \cos(5t) \right) \Delta t + y(t)(\Delta t + 1) \quad (8)$$

Comparando os valores analíticos e numéricos, temos a seguinte tabela, com os respectivos erros relativos percentuais para os pontos $t = 1, 2, 3, 4, 5$. Observe como esse erro se torna pequeno a medida que diminuimos Δt

t	Valor analítico	$\Delta t = 0.1$	$\Delta t = 0.05$	$\Delta t = 0.01$	$\Delta t = 0.005$	$\Delta t = 0.001$
1	1.137	$1.622 \pm 42.627\%$	$1.388 \pm 22.061\%$	$1.189 \pm 4.548\%$	$1.163 \pm 2.283\%$	$1.142 \pm 0.458\%$
2	5.910	$7.380 \pm 24.871\%$	$6.698 \pm 13.307\%$	$6.077 \pm 2.820\%$	$5.994 \pm 1.421\%$	$5.927 \pm 0.286\%$
3	22.999	$24.751 \pm 7.615\%$	$24.026 \pm 4.461\%$	$23.233 \pm 1.015\%$	$23.118 \pm 0.516\%$	$23.023 \pm 0.104\%$
4	61.343	$60.820 \pm 0.853\%$	$61.410 \pm 0.107\%$	$61.422 \pm 0.127\%$	$61.388 \pm 0.0712\%$	$61.353 \pm 0.015\%$
5	146.801	$139.345 \pm 5.078\%$	$143.741 \pm 2.084\%$	$146.333 \pm 0.318\%$	$146.577 \pm 0.152\%$	$146.758 \pm 0.029\%$

TABLE II. Comparação dos valores analíticos e numéricos para os pontos $t = 1, 2, 3, 4, 5$

Em seguida plotei o gráfico dos pontos gerados pelo mapa iterativo com $\Delta t = 0.05$ junto a função (7).

B. Método de Runge-Kutta

Resolveremos a mesma equação diferencial faremos agora utilizando o método de Runge-Kutta

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{e^{\frac{t}{2}} \sin(5t) + 5e^{\frac{t}{2}} \cos(5t)}{2} + y. \quad (9)$$

Vamos comparar brevemente os resultados de 2^a ordem e de 4^a ordem do método de Runge-Kutta entre si e com o método de Euler, usando para isso $\Delta t = 0.05$ fixo.

sabendo que $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ e comparando com a equação 6, podemos aplicar diretamente o método de Runge-Kutta de 2^a ordem:

$$\begin{aligned} k_1 &= \Delta t f(t_n, y_n) \\ k_2 &= \Delta t f\left(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\ y_{n+1} &= y_n + k_1 \end{aligned} \quad (10)$$

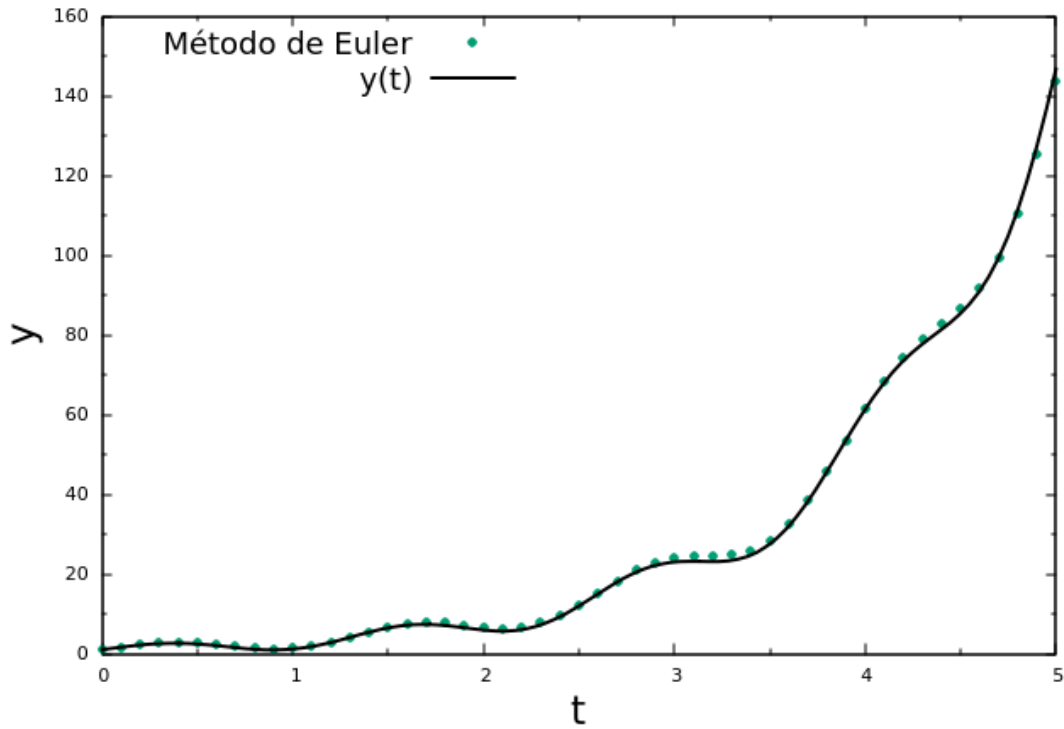


FIG. 2. Comparação entre a solução analítica $y(t)$ e a solução numérica para o método de Euler com $\Delta t = 0.05$

ou o de 4ª ordem que é

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \Delta t f(t_n, y_n) \\
 k_2 &= \Delta t f\left(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\
 k_3 &= \Delta t f\left(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) \\
 k_4 &= \Delta t f(t_n + \Delta t, y_n + k_3) \\
 y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4.
 \end{aligned} \tag{11}$$

dessa forma será possível obter os seguintes gráficos a partir de simulações numéricas.

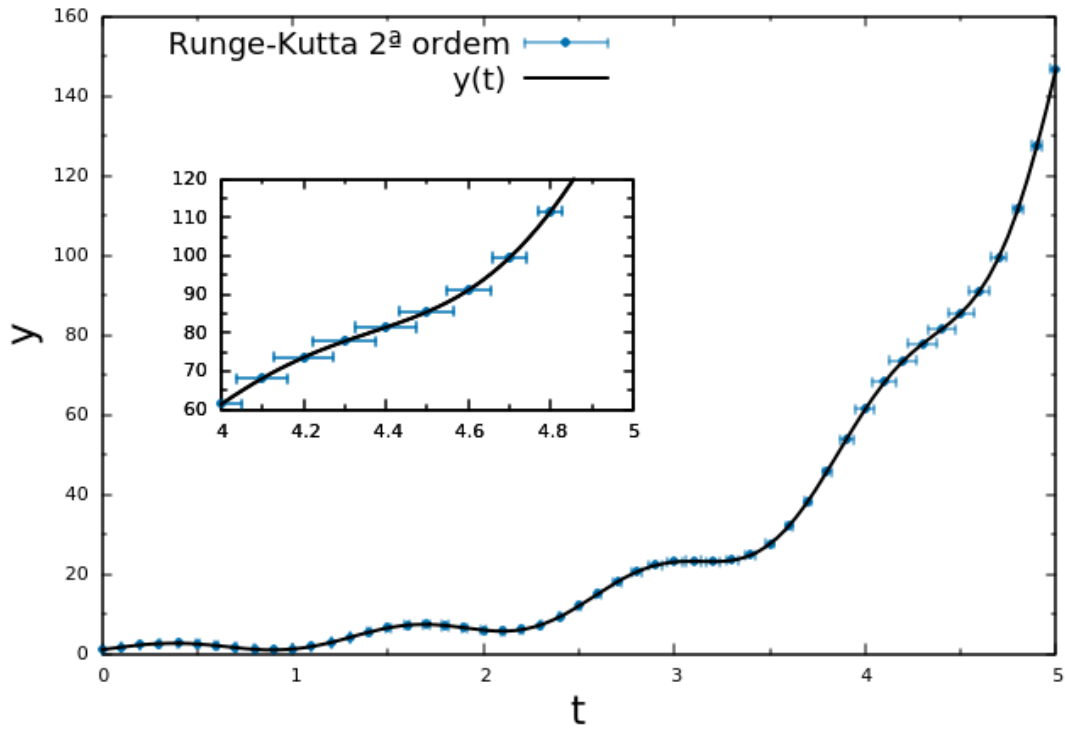


FIG. 3. Comparação entre a solução analítica $y(t)$ e a solução numérica para o método de Runge-Kutta de 2ª ordem com $\Delta t = 0.05$

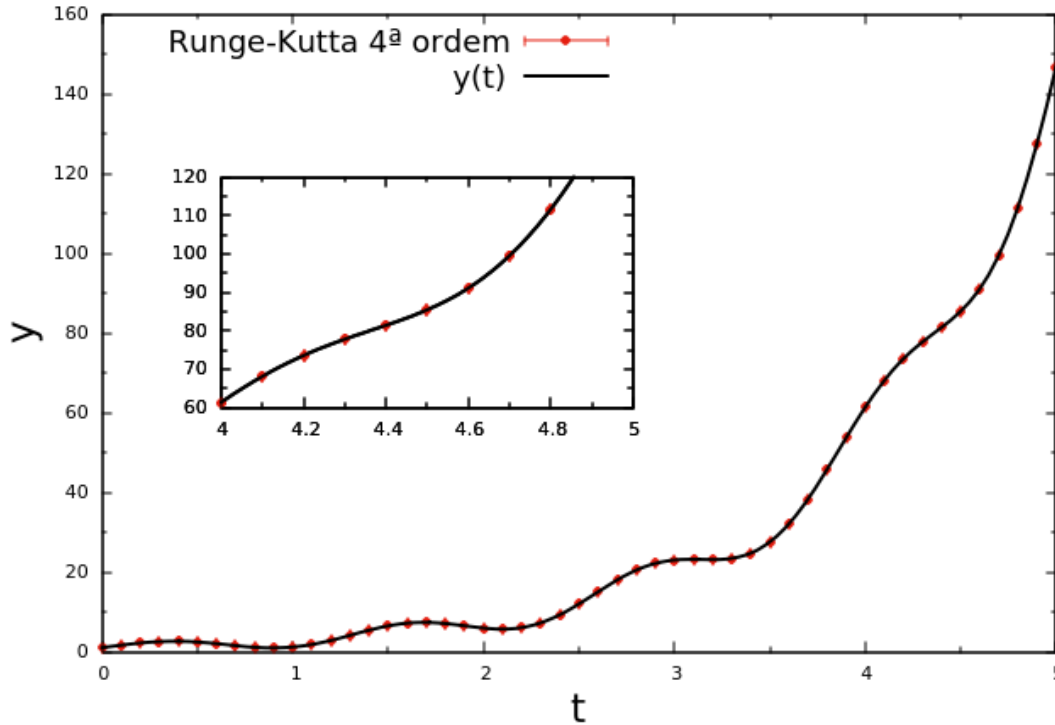


FIG. 4. Comparação entre a solução analítica $y(t)$ e a solução numérica para o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com $\Delta t = 0.05$

A aproximação numérica através do uso do método de Runge-Kutta quando comparado ao método de Euler é muito mais precisa, inclusive visualmente nos gráficos. Ao analisar o gráfico 2, imediatamente notamos que muitos pontos estão com um afastamento muito grande do valor analítico, diferentemente do que acontece nos gráficos 3 e 4. Nestes gráficos os valores numéricos estão bem próximos da curva analítica, em que é quase imperceptível algum afastamento.

Ao comparar o método de Runge-Kutta de 2ª ordem ao de 4ª ordem, pode-se ver o quanto melhor o de 4ª ordem consegue se aproximar do valor analítico. Para facilitar este tipo de observação, dei um zoom em ambos os gráficos. Com isso, a partir das barras de erro podemos extrair a conclusão já esperada, de que o método de Runge-Kutta de 4ª ordem tem uma aproximação superior ao de 2ª ordem e que por conseguinte é superior ao método de Euler.