Teoria dos Grafos

Edson Prestes

Teoria dos Grafos

Dígrafos

As arestas possuem a função de indicar o relacionamento(espacial, comportamental, temporal) entre os elementos de um grafo.

Em diversas situações esta relação não é simétrica, ou seja, par (a,b) não implica (b,a). Ex: fluxo de carros em uma rodovia de mão única.

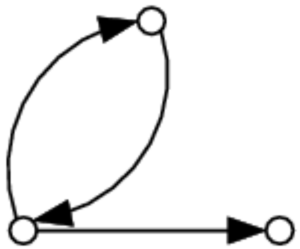
Esta restrição é indicada no grafo determinando uma direção para cada aresta, a qual agora é chamada de *arco*.

Um dígrafo D=(V,A) é constituído de um conjunto finito de vértices V e um conjunto A de arcos, onde cada arco corresponde a um par ordenado de vértices.

Teoria dos Grafos

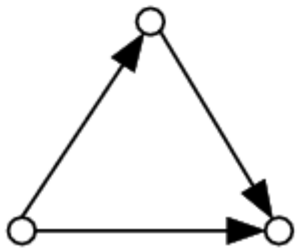
Dígrafos

Podemos dizer que um arco é incidente do nó i para o nó j, ou divergente do nó i e convergente ao nó j.



dígrafo

Um grafo orientado difere de um dígrafo por não possuir pares simétricos de arestas direcionadas.

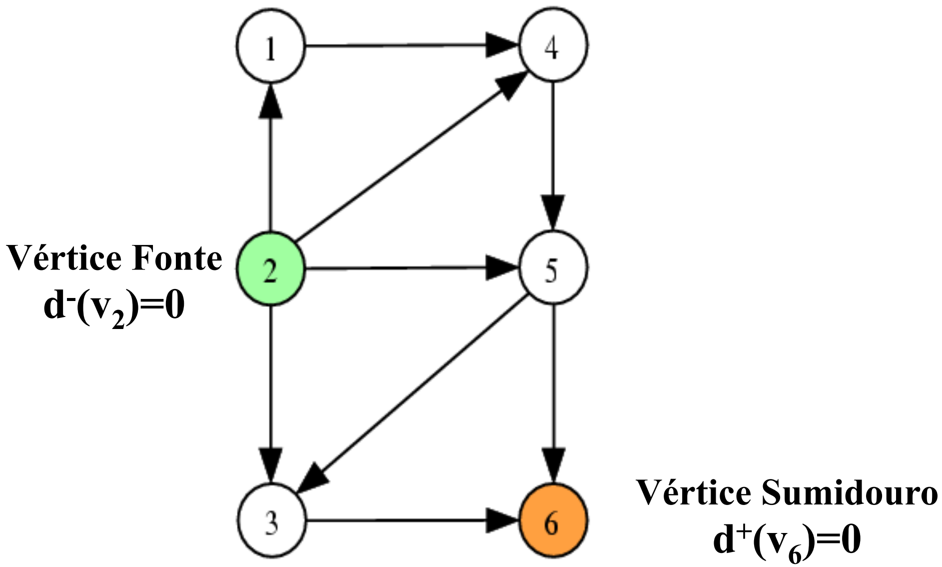


Grafo orientado

Teoria dos Grafos

Dígrafos

A Figura abaixo ilustra um dígrafo de 6 vértices.

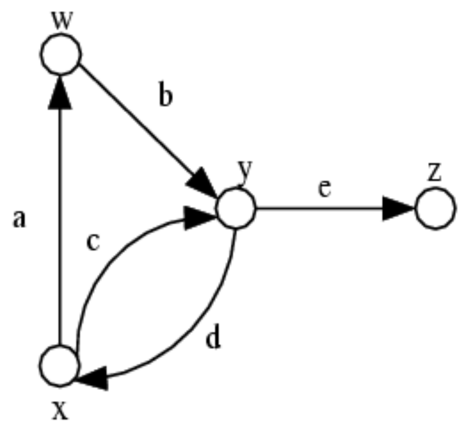


O grau de entrada de um vértice v, $d^-(v)$, é o número de arcos que são convergentes a v.

O grau de saída de um vértice v, $d^+(v)$, é o número de arcos que são divergentes de v.

Teoria dos Grafos

Dígrafos – Matrizes de Adjacência e Incidência



Quantidade de arcos de w para y

Quantidade de arcos de y para w

	w	x	y	z
w	0	0	1	0
x	1	0	1	0
y	0	1	0	1
z	0	0	0	0

Matriz de adjacência

O arco a está convergindo para w

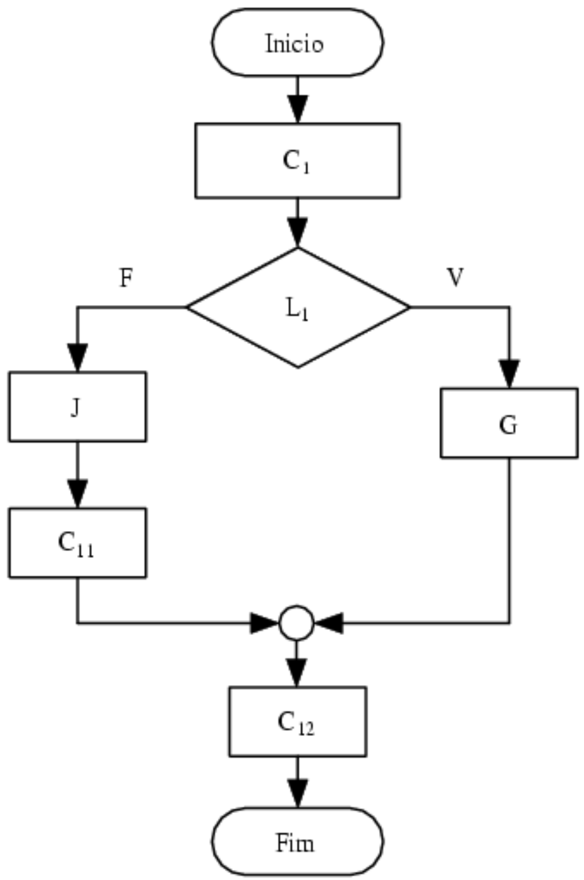
	a	b	c	d	e
w	-1	+1	0	0	0
x	+1	0	+1	-1	0
y	0	-1	-1	+1	+1
z	0	0	0	0	-1

Matriz de incidência

O arco e está divergindo de y

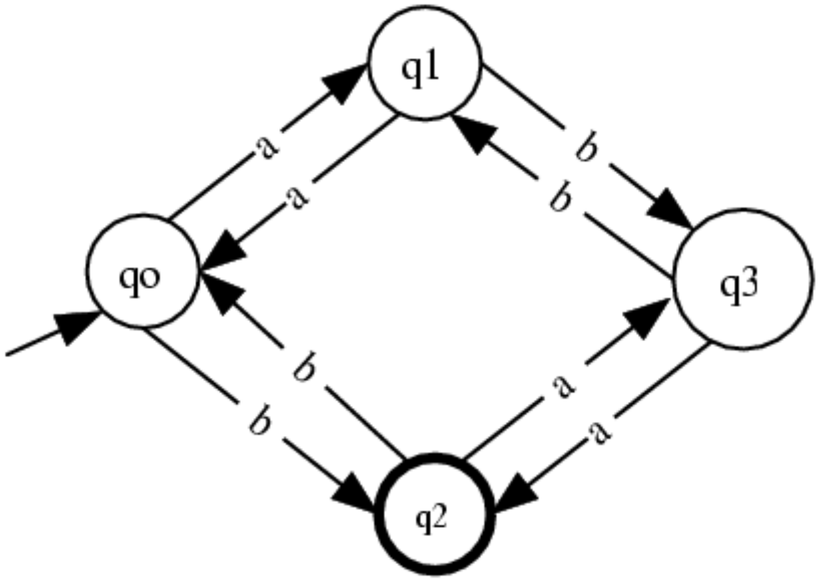
Teoria dos Grafos

Dígrafos - Fluxogramas



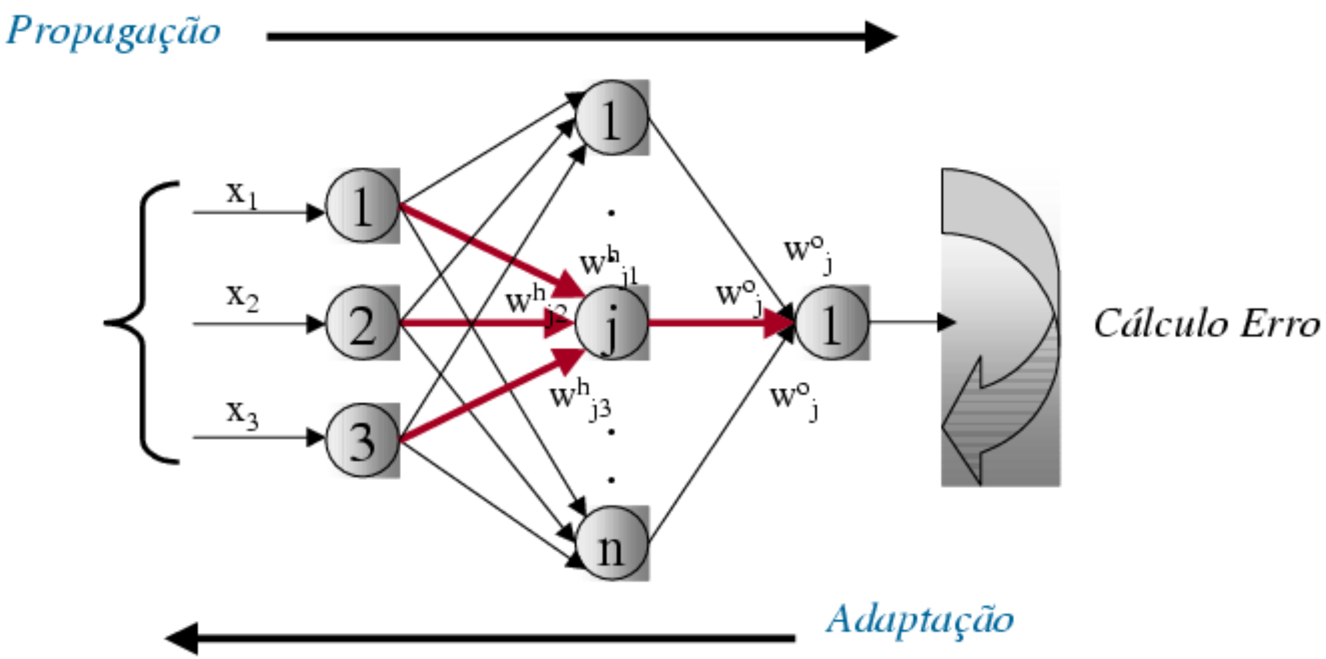
Teoria dos Grafos

Dígrafos - Autômatos



Teoria dos Grafos

Dígrafos – Redes Neurais



Teoria dos Grafos

Dígrafos

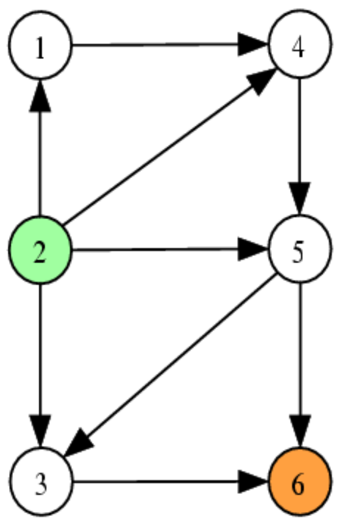
O caminho para um dígrafo é constituído de uma seqüência de nós e arcos, sem se importar com *a orientação de cada arco*.

Existem o passeio orientado e o caminho orientado em dígrafos. São similares aos usados em grafos com a diferença de que a orientação dos arcos é levada em consideração .

Tanto para o caminho quanto para o passeio orientado, os arcos devem se conectar entre si, ou seja, para cada par de arcos que atuam sobre um vértice, um diverge e o outro obrigatoriamente converge para o vértice, ou vice versa.

Teoria dos Grafos

Dígrafos



Um caminho orientado de 4 a 6 pode ser {4,(4,5),5,(5,3),3,(3,6),6}

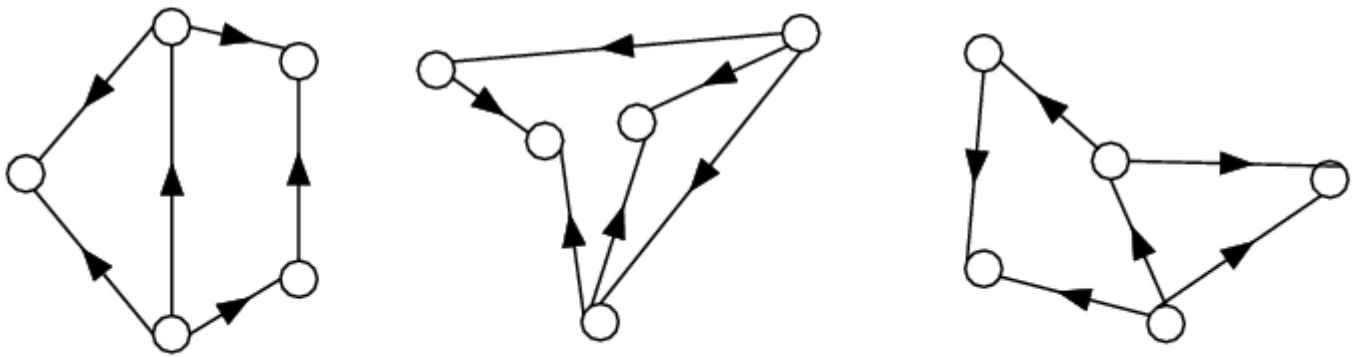
Um caminho (não orientado) de 6 a 1 pode ser {6,(6,5),5,(5,4),4,(4,1),1}.

Teoria dos Grafos

Dígrafos

A noção de isomorfismo é estendida aos grafos direcionados considerando a orientação dos arcos.

O dígrafo A é isomórfico ao dígrafo B? e ao dígrafo C?



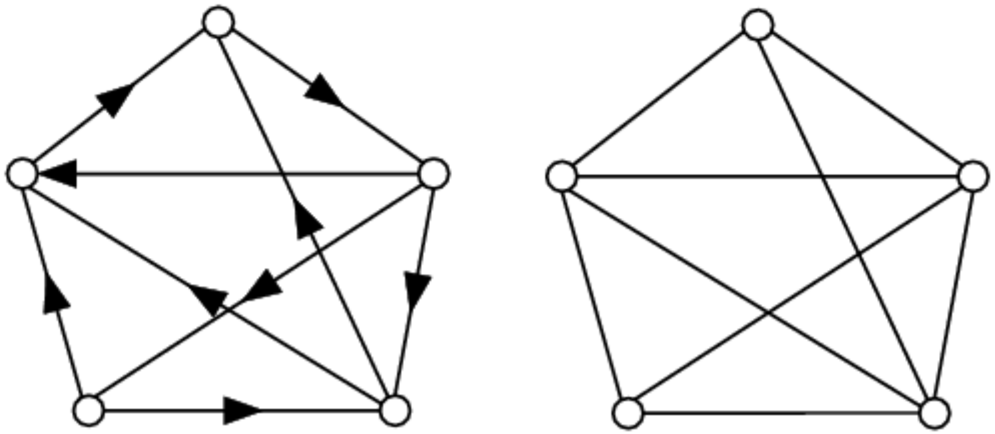
A **B** **C**

Sim! **Não!**

Teoria dos Grafos

Dígrafos

A partir de um dígrafo G podemos encontrar um grafo subjacente G’ substituindo cada arco de G por uma aresta.



Teoria dos Grafos

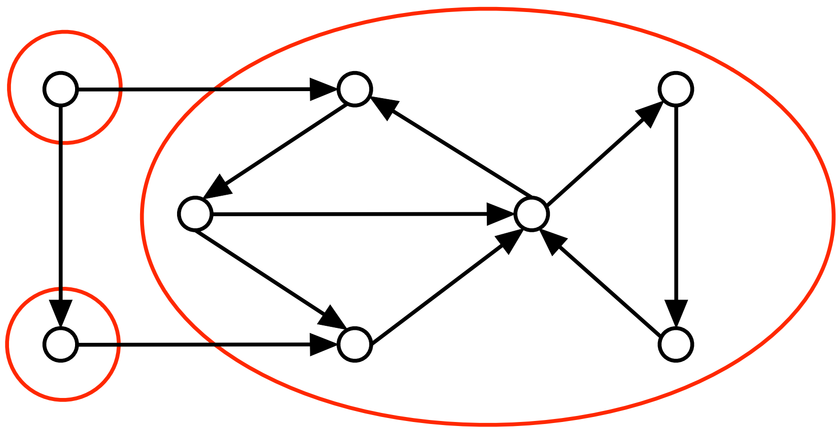
Dígrafos

Um dígrafo é fracamente conexo se seu grafo subjacente é conexo.

Um dígrafo é fortemente conexo ou forte se para cada par de vértices u, v existe um caminho orientado de u para v.

Os componentes fortes de um dígrafo são seus subgrafos maximais fortes.

Encontre os componentes fortes do dígrafo abaixo.



Teoria dos Grafos

Dígrafos

Teorema: Um grafo G conexo não direcionado pode ser transformado em um dígrafo D fortemente conexo sse G não contém nenhuma ponte.

Prova

Ida: Suponha um dígrafo D fortemente conexo cujo grafo G subjacente contém no mínimo uma ponte. Logo, G deve possui no mínimo dois vértices cuja ligação exige passar por essa ponte.

Necessariamente essa ponte permite caminhar em uma única direção, por exemplo de um vértice v_i para outro vértice v_k , mas não permite o retorno de v_k para v_i. Portanto, D não pode ser fortemente conexo se G possuir uma ponte.

Teoria dos Grafos

Dígrafos

Volta: Como o grafo subjacente G não contém nenhuma ponte, toda aresta faz parte de um ciclo.

Suponha um ciclo C_1 cujas as arestas são orientadas de tal maneira que seja possível percorrer o ciclo e voltar à origem.

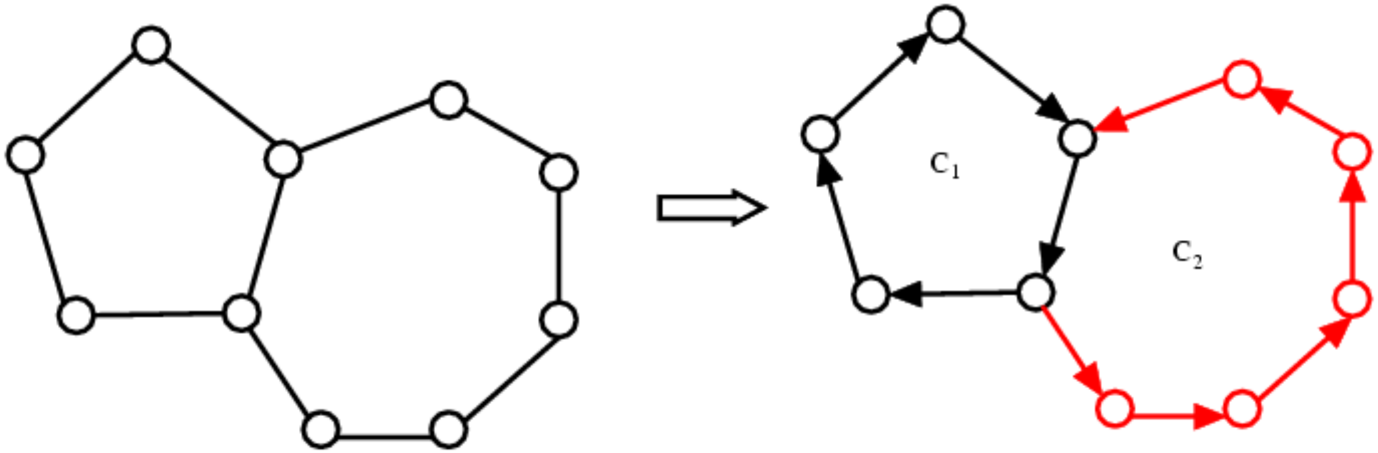
Observe que todo vértice em C_1 é acessível a partir de qualquer outro. Considere outro ciclo C_2 que tem no mínimo um vértice em comum com C_1.

Se orientarmos os arcos de C_2 sem mudarmos a orientação dos arcos em C_1, faremos com que qualquer vértice pertencente a união de C_1 com C_2 possa ser alcançado a partir de qualquer outro desta união, pois teremos um caminho fechado que passa por todos os vértices.

Se isso for possível o dígrafo D é fortemente conexo.

Teoria dos Grafos

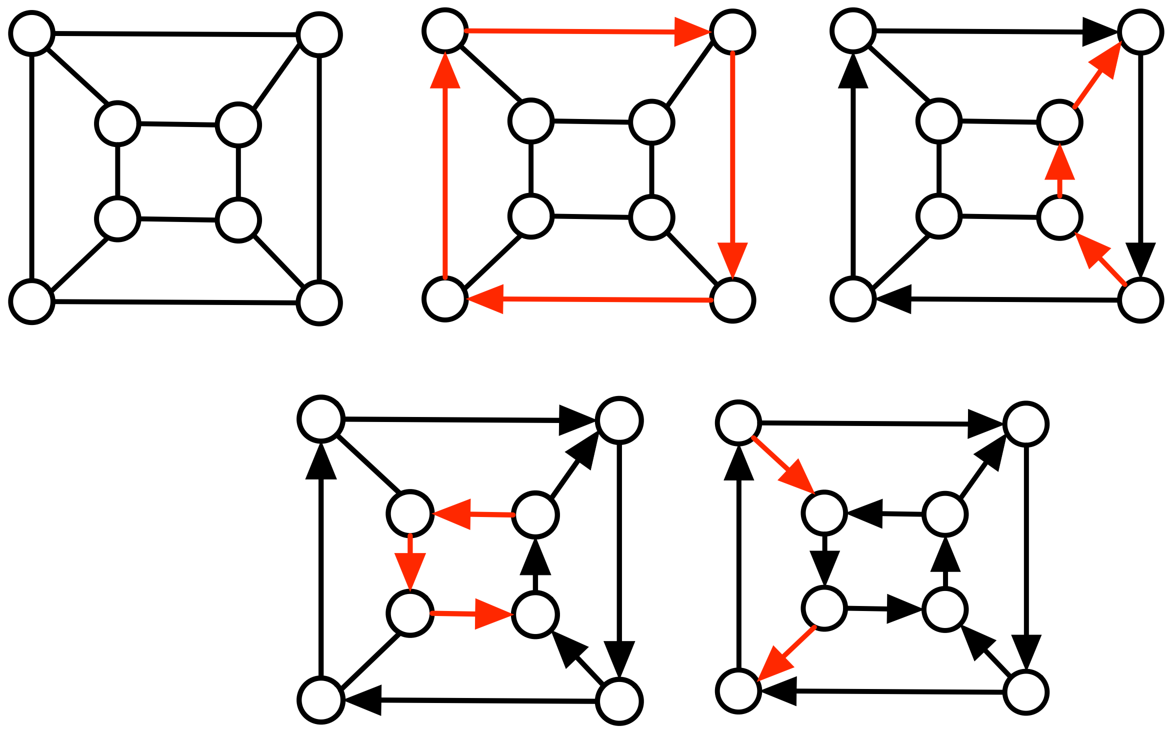
Dígrafos



Teoria dos Grafos

Dígrafos

Verifique se o grafo abaixo pode ser transformado em um dígrafo fortemente conexo. Se puder então determine este dígrafo!

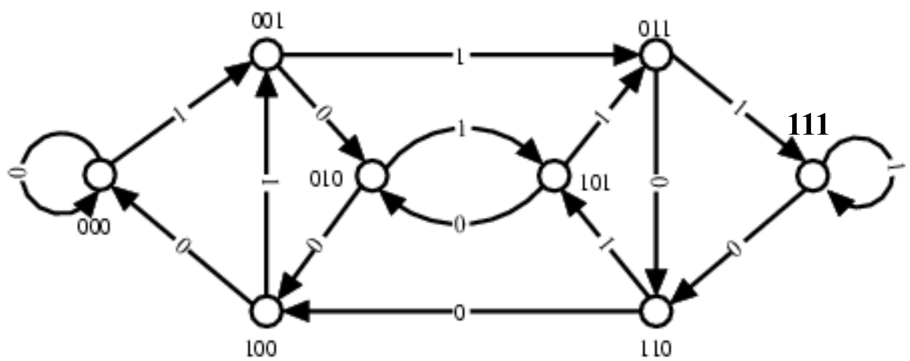


Teoria dos Grafos

Dígrafos

Um passeio euleriano em um dígrafo é um passeio contendo todas os arcos do dígrafo. Um circuito euleriano é um passeio fechado. Um dígrafo é euleriano se ele tem um circuito euleriano.

Os ciclos Bruijn são dígrafos eulerianos e hamiltonianos.



Os vértices são strings de comprimento n formadas a partir de um alfabeto com m simbolos. O exemplo mostra o grafo construido usando um alfabeto binário.

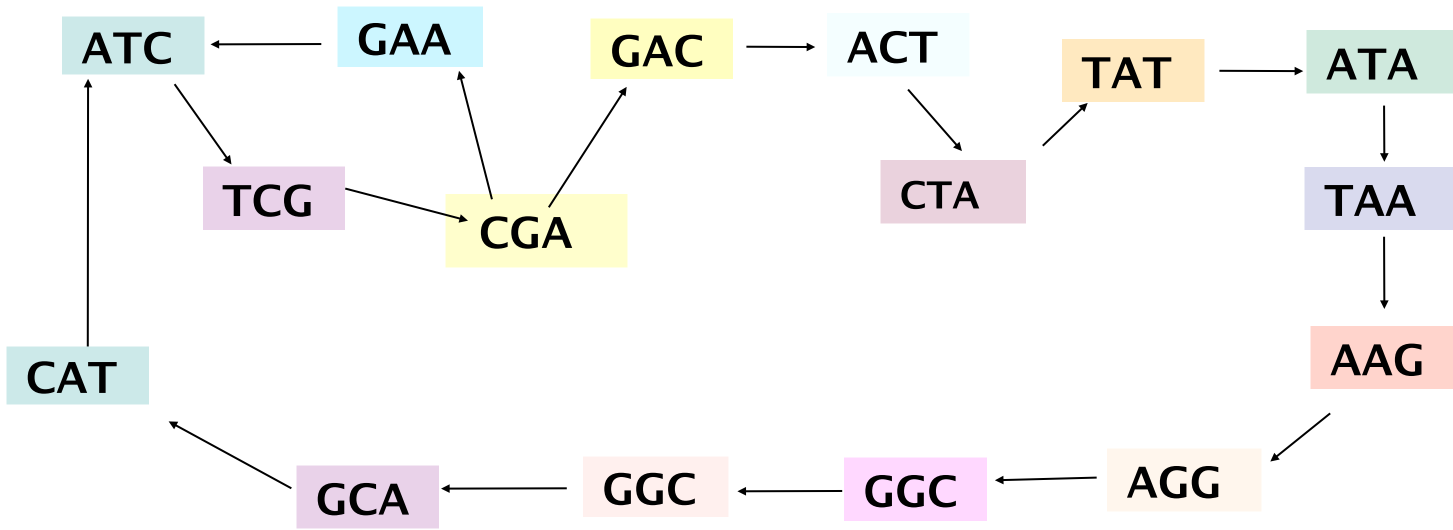
Dois vértices **a** e **b** estão ligados se os n-1 últimos elementos de **a** forem iguais aos n-1 primeiros elementos de **b**. Se isto for verdade então o arco que os conecta terá como rótulo o último elemento de **b**.

Teoria dos Grafos

Dígrafos

Os grafos de Bruijn podem ser usados para montar sequências de DNA (DNA sequencing) a partir de subseqüências menores, que são comuns e frequentemente se repetem.

Por exemplo, ATCGACTATAAGGCATCGAA



Teoria dos Grafos

Dígrafos

Mostre que se G é um dígrafo com $\delta^+(G) \geq 1$, então G contém um ciclo, onde $\delta^+(G)$ é o menor grau de saída dentre todos os vértices de G.

Faça P um caminho maximal em G e u o último elemento deste caminho. Como P não pode ser estendido e $\delta^+(G) \geq 1$ então o sucessor de u deve estar em P. A aresta de u até qualquer vértice em P fecha um ciclo e completa a demonstração

Teoria dos Grafos

Dígrafos

Dado um dígrafo G, podemos definir uma função multívoca τ entre os vértices de G

Se G possui os arcos (x,y) e (x,w), então sabemos que G possui duas arestas que saem de x e alcançam y e w, portanto temos

$$\tau(x) = \{y, w\}$$

Esta função possui inversa denomidada por τ^{-1} . Neste caso para um vértice y, esta função indica de quais vértices partem arcos que chegam a y. Considerando o exemplo anterior, temos.

$$\tau^{-1}(y) = \{x\} \quad \textbf{e} \quad \tau^{-1}(w) = \{x\}$$

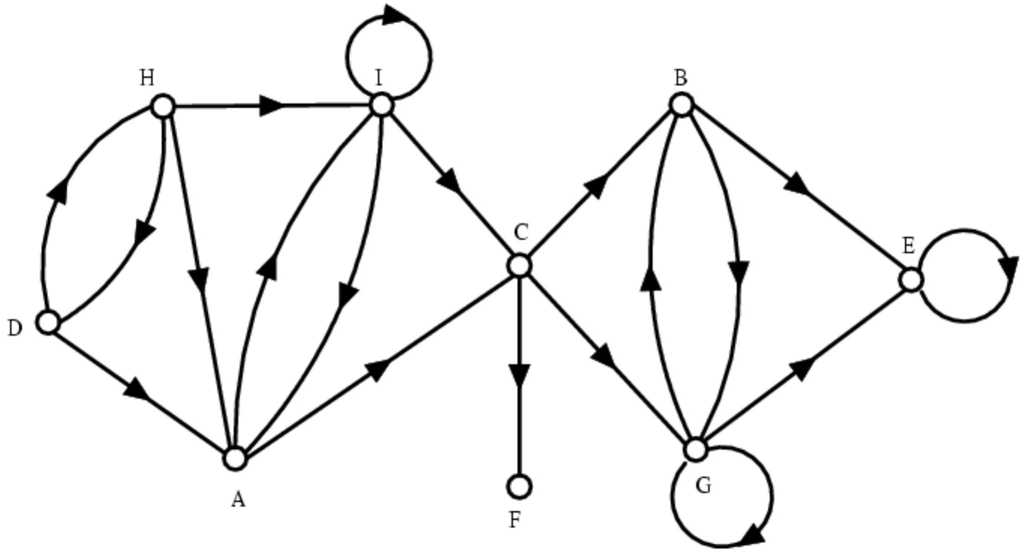
A generalização da função τ (τ^{-1}) é a função, τ^n (τ^{-n}) o que consiste em

$$\tau^n(x) = \underbrace{\tau\{\tau\{\ldots\tau}_{n}\{x\}\ldots\}\}$$

Teoria dos Grafos

Dígrafos

Dado o dígrafo G abaixo calcule as funções τ e τ^{-1} para cada vértice de G



$\tau\{A\} = \{C, I\}$
$\tau\{B\} = \{E, G\}$
$\tau\{C\} = \{B, F, G\}$
$\tau\{D\} = \{A, H\}$
$\tau\{E\} = \{E\}$

$\tau\{F\} = \emptyset$
$\tau\{G\} = \{B, E, G\}$
$\tau\{H\} = \{A, D, I\}$
$\tau\{I\} = \{A, C, I\}$

$\tau^{-1}\{A\} = \{D, I, H\}$
$\tau^{-1}\{B\} = \{C, G\}$
$\tau^{-1}\{C\} = \{A, I\}$
$\tau^{-1}\{D\} = \{H\}$
$\tau^{-1}\{E\} = \{B, E, G\}$

$\tau^{-1}\{F\} = \{C\}$
$\tau^{-1}\{G\} = \{B, C, G\}$
$\tau^{-1}\{H\} = \{D\}$
$\tau^{-1}\{I\} = \{A, H, I\}$

Teoria dos Grafos

Dígrafos

Baseado nisto podemos definir a função fechamento transitivo de um vértice x, denotada por, $\hat{\tau}\{x\}$ onde

$$\hat{\tau}\{x\} = \{x\} \cup \tau\{x\} \cup \tau^2\{x\} \cup \tau^3\{x\} \cup \ldots$$

A função de fechamento transitivo inversa é definida como

$$\hat{\tau}^-\{x\} = \{x\} \cup \tau^{-1}\{x\} \cup \tau^{-2}\{x\} \cup \tau^{-3}\{x\} \cup \ldots$$

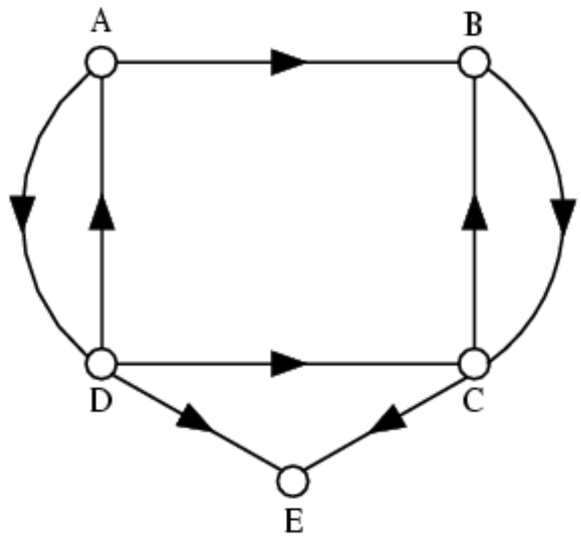
Ou seja, um dígrafo G=(V,A) é fortemente conexo se

$$\hat{\tau}\{x\} = V \quad \forall x \in V$$

Teoria dos Grafos

Dígrafos

Dado o dígrafo abaixo, calcule $\hat{\tau}\{a\}$ e $\hat{\tau}^{-}\{a\}$



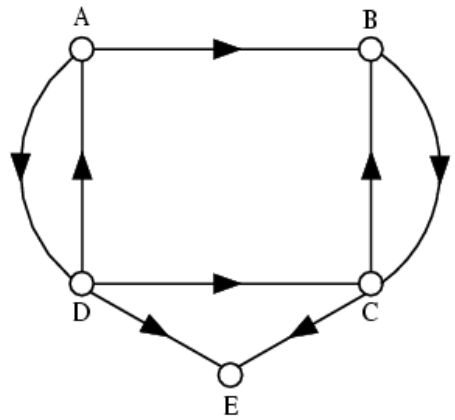
$$\hat{\tau}\{a\} = \hat{\tau}\{a, b, d\} = \{a, b, c, d, e\}$$

$$\hat{\tau}^{-}\{a\} = \hat{\tau}\{a, d\} = \{a, d\}$$

Teoria dos Grafos

Dígrafos - Componentes Fortes

Determine os componentes fortemente conexos maximais do dígrafo abaixo



Inicialmente pegamos um vértice $x \in V$ e calculamos $\hat{\tau}\{x\}$ e $\hat{\tau}^{-}\{x\}$
Finalmente, calculamos $\hat{\tau}\{x\} \cap \hat{\tau}^{-}\{x\}$.

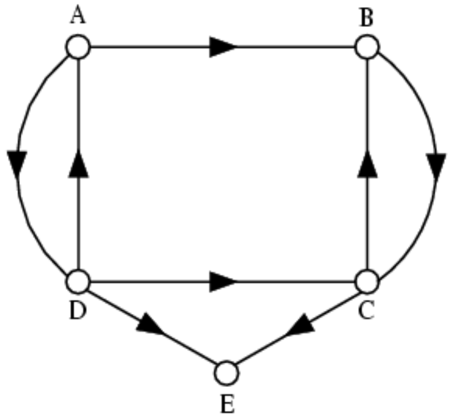
Este último resultado nos fornece os vértices V' que compõe o subgrafo fortemente conexo maximal ao qual x pertence.

Em seguida, realizamos o mesmo processo para $y \in V - V'$ até que

$V - V' = \emptyset$

Teoria dos Grafos

Dígrafos - Componentes Fortes



Inicialmente iremos pegar o vértice A. Temos

$$\hat{\tau}\{a\} = \hat{\tau}\{a,b,d\} = \{a,b,c,d,e\}$$
$$\hat{\tau}^{-}\{a\} = \hat{\tau}\{a,d\} = \{a,d\}$$
$$\hat{\tau}\{a\} \cap \hat{\tau}^{-}\{a\} = \{a,d\}$$

O primeiro subgrafo é formado pelos vértices V'={a,d} e pelos arcos que os conectam.

O segundo subgrafo é determinado a partir de V-V'={b,c,e}. Escolhendo o vértice c, temos

$$\hat{\tau}\{c\} = \{c,b,e\}$$
$$\hat{\tau}^{-}\{c\} = \{c,b\}$$
$$\hat{\tau}\{c\} \cap \hat{\tau}^{-}\{c\} = \{b,c\}$$

O segundo subgrafo portanto é aquele formado pelos vértices {b,c} e pelos arcos que os interligam.

Teoria dos Grafos

Dígrafos - Componentes Fortes

Observe que restou apenas o vértice e do conjunto de vértices original.

Portanto ele é seu próprio subgrafo conexo maximal.

Os subgrafos fortemente conexos maximais são destacados abaixo