Conservação de Massa

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left[\phi \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j s_j w_{ij} + (1-\phi)\rho_s w_{is}\right]}_{\text{acúmulo}} + \underbrace{\vec{\nabla}\left[\sum_{j=1}^{N_p}\left(\rho_j w_{ij} \vec{u_j} - \phi s_j \rho_j K_{ij} \cdot \vec{\nabla}_{wj}\right)\right]}_{\text{fluxo}} =$$

$$\underbrace{\phi \sum_{j=1}^{N_p} s_j r_{ij} + (1+\phi) r_{is}}_{\text{fonte}}$$

→ Coordenadas cartesianas

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$$

→ Coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2 p = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$$

→ Lei de Darcy

$$\vec{u_j} = -\lambda \vec{\vec{K}}\left(\vec{\nabla} p_j + \rho_j \vec{g}\right), \text{ sendo } \lambda_{rj} = \frac{k_{rj}}{\mu_j}, \text{ sendo } k_{rj} = \frac{k_j}{K}$$

Premissas:

1. Fluxo 1D (Direção x)
2. Fluxo Horizontal
3. Homogêneo (Meio Poroso
4. Fluxo Monofásico
5. uma única fase satura o meio poroso.
6. sem reações químicas
7. um único componente
8. Isotérmico
9. viscosidade não varia com a pressão
10. Fluido e rocha de compressibilidade pequena e constante.

1) Eq. da conservação de Massa - Coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot u_x) = 0 \quad (I)$$

2) Substituindo pela Lei de Darcy:

$$u_x = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \cdot -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 0 \quad (II)$$

3) $$\rho\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{k}{\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\right) \quad (III)$$

4) $$= \frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right) \quad (IV)$$

5) $$\rho\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right) \quad (V)$$

Lembrando as compressibilidades

$$c_{rocha} = \frac{1}{\phi}\left(\frac{\partial \phi}{\partial p}\right)_T \rightarrow \left(\frac{\partial \phi}{\partial p}\right) = \phi c_r \quad (VI)$$

$$c_{fluido} = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \rightarrow \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right) \rightarrow \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right) = \rho c_f \quad (VII)$$

A partir de (V):

$$\rho\cdot\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial p}}_{(VI)}\cdot\frac{\partial p}{\partial t} + \phi\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial p}}_{(VII)}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \rho\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\phi \mu c_t}{k}\frac{\partial p}{\partial t} \quad //$$

- Coordenadas cilíndricas

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi P) + \nabla(\rho \vec{u}_j) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi P) + \frac{1}{r}\partial\left(\frac{r \rho v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\cancel{\left(\frac{\rho u}{\partial \theta}\right)} + \cancel{\frac{\partial P()}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial \phi \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\rho \frac{k}{\mu} \cdot \frac{dP}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial \phi \rho}{\partial t} + \frac{\partial P \phi}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\rho \frac{\partial P}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}\frac{\phi c_t \rho \mu}{k} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial P}{\partial t} r \frac{\partial P}{\partial r} + \rho \frac{\partial P}{\partial t} + r\rho \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\right]$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}\frac{\phi c_t \rho \mu}{k} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial \rho}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial r} r + \rho \frac{\partial P}{\partial r} + r\rho \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\right]$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}\frac{\phi c_t \cancel{\rho} \mu}{k} = \frac{1}{\cancel{r}}\left[c_f \cancel{\rho} \cdot r \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial r}\cancel{\rho} + \cancel{\rho} r \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\right]$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}\frac{\phi c_t \mu}{k} = \frac{1}{\cancel{r}}\left[c_f \frac{\partial P}{\partial r}\cancel{r} + \frac{\partial P}{\partial t} + \cancel{r}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\right]$$

muito pequeno

$$\frac{\partial P}{\partial t}\frac{\phi c_t \mu}{k} = \cancel{c_f \frac{\partial P}{\partial r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial^2 P}{\partial r}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}\frac{\phi c_t \mu}{k} = \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}$$

//

Conservação de Energia

Equação de Balanço de Energia:

$$\left\{\begin{matrix}\text{Taxa de acúmulo} \\ \text{de Energia em V}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{Taxa Líquida de} \\ \text{energia Transporte} \\ \text{em V}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\text{Taxa de Produção} \\ \text{de Energia em V}\end{matrix}\right\} \quad (I)$$

$$(II) \quad \int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho U + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N_p} \rho_j |\vec{u_j}|^2\right) + \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}_{\text{Fluxo de Energia}}\, dV = \dot{W}$$

→ Representação Matemática

Sendo:

$\frac{1}{2}\rho_j (u_j)^2$: energia cinética por unidade de volume

↳ representa a Ec da fase, quando somados, representa a total.

ρU: concentração de energia

W: Trabalho (Fonte de Energia)

U: energia interna geral

ρ: densidade geral. (Eq. 2.2·13a pág 25).

Termo Fonte:

A forma da primeira lei da Termodinâmica dos sistemas abertos, expressa pela eq. (I) exige que o termo W seja composto apenas por componente de trabalho, na ausência de fontes de aquecimento externas.

Os aquecimentos de reação, vaporização e solução estão implicitamente presentes na eq. nos termos de concentração e fluxo.

Assim, consideramos:

W_{pv}: taxa de trabalho realizado contra um campo de pressão

W_g: trabalho contra gravidade.

$$W = W_{pv} + W_g$$

- Como o trabalho é:

• Trabalho = distância × Força

$$W = d \times \vec{F}$$

a Taxa de trabalho (ΔW_{pv}) =

Taxa de Trab = $F \times$ Veloc.

$$\Delta W = F_A \times \text{Veloc} \quad (III)$$

Então:

$$\boxed{\Delta W_{pv} = -\sum_{j=1}^{N_p} \overbrace{\rho_j\, \Delta A\vec{n}}^{\text{força exercida na área } \Delta A} \cdot \vec{u_j}} \quad (IV)$$

ou seja, o elemento que cruza ΔA está realizando o trabalho ΔW_{pv}.

* Sinal Negativo: satisfazer a convenção usual de sinais termodinâmicos para o trabalho sobre a equação (IV)

O sistema recebe trabalho externo.

- Trabalho Negativo: trabalho RECEBIDO em um elemento fluido;
- Trabalho Positivo: trabalho REALIZADO pelo elemento fluido;

ou seja, é realizado sob o meio que se encontra, volume aumenta.

* Levando em conta que a taxa de trabalho pressão-volume total é a soma da eq(IV) sob todos os elementos da superfície, pelo Teorema da Divergência (onde a integral de superfície pode ser representada pela integral do volume).

$$\int_A \vec{m}\,\vec{N}_i\,dA = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{m}\,\vec{N}_i\,dV$$

$$W_{pv} = -\int_V \sum_{j=1}^{Np} \vec{\nabla}(\rho_j \vec{u_j})\,dV \qquad (V)$$

e

$$W_c = \int_V \sum_{j=1}^{Np} \rho_j\,\vec{u_j}\cdot\vec{g}\,dV \qquad (VI)$$

O sinal positivo surge nessa equação, uma vez que uma fase fluida que flui contra a gravidade ($\vec{u_j}\vec{g} < 0$).

* Juntando as equações (II, V, VI) temos:

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho U + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{NP}\rho_j|\vec{u_j}|^2\right) + \vec{\nabla}\cdot E\right] + \sum_{j=1}^{Np}\vec{\nabla}(\rho_j u_j) - \sum_{j=1}^{Np}\rho_j\,\vec{u_j}\cdot\vec{g}\ \Big]\,dV = 0$$

Como o volume é arbitrário, o integrando é igual a zero:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho U + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{NP}\rho_j|\vec{u_j}|^2\right) + \vec{\nabla}\cdot\vec{E} + \sum_{j=1}^{NP}\vec{\nabla}\cdot(\rho_j\vec{u_j}) - \sum_{j=1}^{NP}\rho_j\,\vec{u_j}\cdot\vec{g} = 0 \qquad (VII)}$$

* O termo de fluxo de Energia é composto de contribuição convectiva, (fase que flui) condução e radiação:

$$\boxed{\vec{E} = \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j \vec{u}_j \left[U_j + \frac{1}{2}|u_j|^2 \right] + \vec{q}_c + \vec{q}_r} \quad (VIII)$$

Nesse momento, levaremos em conta apenas a condução. Para fluxo multifásico, o fluxo de calor condutor é dado pela lei de Fourier:

$$\boxed{\vec{q}_c = -K_{T_t} \vec{\nabla} T} \quad (XIX) \qquad * \quad q = \overset{\nearrow \text{ capacidade térmica}}{C} \cdot \Delta t$$

, sendo K_{T_t} = condutividade térmica total.

Substituindo as equações (XIX e VIII na eq. VII) e

- Desconsiderando a radiação;
- Considerando que a T é a mesma para todas as fases:

Temos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho U + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N_p} \rho_j |\vec{u}_j|^2\right) + \vec{\nabla}\left(\sum_{j=1}^{N_p} \rho_j \vec{u}_j \left[U_j + \frac{1}{2}|u_j|^2\right]\right) - \vec{\nabla}\left(-K_T \vec{\nabla} T\right) + \sum_{j=1}^{N_p}\left[\vec{\nabla}(P_j \vec{u}_j) - \rho_j u_j \vec{g}\right] = 0 \quad (X)$$

- energia interna
- energia cinética
- fluxo por convecção
- energia por condução
- trabalho por expansão e condução
- gravidade

NÃO ENTENDI

Se somarmos o primeiro termo do fluxo por convecção e o primeiro termo do trabalho, pode fornecer a seguinte equação:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho U + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N_p} \rho_j |\vec{u}_j|^2\right) + \vec{\nabla}\left(\sum_{j=1}^{N_p} \rho_j \vec{u}_j \left[H_j + \frac{1}{2}|\vec{u}_j|^2\right]\right) - \vec{\nabla}\left(K_{T_t} \vec{\nabla} T\right) - \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j \vec{u}_j \cdot \vec{g} = 0 \quad (XI)$$

Onde $H_j = U_j + \frac{P_j}{\rho_j}$ é a entalpia da fase j por unidade de massa j.

Como $\vec{g} = -g\,\vec{\nabla} Dz$, o último termo fica:

$$\sum_{j=1}^{NP} \rho_j \vec{u_j} \cdot \vec{g} = -g \sum_{j=1}^{NP} \rho\, \vec{u_j} \cdot \vec{\nabla} Dz$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{NP} \rho_j \vec{u_j}\, \vec{g} = -g \sum_{j=1}^{NP} \vec{\nabla}(\rho_j \vec{u_j} Dz) + g \sum_{j=1}^{NP} Dz\, \vec{\nabla} \cdot (\rho_j \vec{u_j})} \quad (XII)$$

E quando substituído na eq. XI:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho U + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{NP} \rho_j |\vec{u_j}|^2\right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\sum_{j=1}^{NP} \rho_j \vec{u_j}\left[H_j + \frac{1}{2}|\vec{u_j}|^2 + g\,Dz\right]\right) - \vec{\nabla} \cdot (K_{T_t} \vec{\nabla} T) - g D_z \vec{\nabla}\left(\sum_{j=1}^{NP} \rho_j u_j\right) = 0}$$

(XIII)

Sendo $\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{NP} \rho_j \vec{u_j}$ } pág 29 (2.2-21) (XIV)

Podemos substituir o último termo da eq. (XIII)

$$-g\,Dz\,\vec{\nabla}\left(\sum_{j=1}^{NP} \rho_j u_j\right) = g\,Dz \frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho).$$

conclui-se a Eq da Conservação de Energia:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho U + \rho g Dz + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{NP} \rho_j |\vec{u_j}|^2\right) + \vec{\nabla}\left(\sum_{j=1}^{NP} \rho_j \vec{u_j}\left[H_j + \frac{1}{2}|\vec{u_j}|^2 + g\,Dz\right]\right) - \vec{\nabla}(K_{T_t} \vec{\nabla} T) = 0}$$

(XV)