

Fluxo de Líquidos em Meios Porosos

Lucas Rodrigues Tavares

Março 2021

Conteúdo

1	Introdução	8
2	Equações Básicas	9
2.1	Equação da Conservação de Massa	9
2.2	Equação da Conservação de Energia	14
3	Fluxo de Fluidos de Pequena Compressibilidade em Meios Porosos	16
3.1	Equação da Difusividade Hidráulica	16
3.2	Fluxo Linear	18
3.2.1	Reservatório Infinito - Regime Transiente	18
3.2.2	Reservatório com Manutenção de Pressão - Regime Permanente	22
3.2.3	Reservatório com Fronteira Selada - Regime Pseudopermanente	24
3.3	Fluxo Radial	26
3.3.1	Solução por Transformada de Laplace	28
3.3.2	Solução por Transformação de Boltzmann	37
A	Função Exponencial Integral	50
B	Transformada de Laplace	52
C	Funções de Bessel	54
D	Algoritmo de Stehfest	56
E	Reservatório Infinito - Solução do Modelo da Linha Fonte	57

Lista de Figuras

2.1	Geometria para derivações das leis da conservação (Adaptado: Lake et al., 1989).	10
3.1	Fluxo linear em um reservatório infinito (Rosa et al., 2006).	18
3.2	Fluxo linear em um reservatório com alimentação no limite externo (Rosa et al., 2006).	22
3.3	Fluxo linear em um reservatório selado no limite externo (Rosa et al., 2006).	24
3.4	Funções de Bessel modificadas I_0 , I_1 , K_0 e K_1 (Abramowitz & Stegun, 1964)	29
3.5	- Pressão adimensional para um reservatório circular infinito que produz com vazão constante através de um único poço - Soluções da fonte linear e da fonte cilíndrica. (Mueller and Witherspoon, Pressure Interference Effects Within Reservoirs And Aquifers, SPE 1020-PA, 1965)	31
3.6	Queda de pressão adimensional no fundo do poço ($r_D = 1$) para um reservatório circular com manutenção de pressão na fronteira externa para diversos valores de r_{eD}	34
3.7	Queda de pressão adimensional no fundo do poço ($r_D = 1$) para um reservatório circular selado para diversos valores de r_{eD}	36
3.8	Comportamento da pressão durante fluxo transiente sistema radial (Rosa et al., 2006).	40
3.9	Fluxo radial permanente (Rosa et al., 2006).	41
3.10	Comportamento da pressão em um sistema radial com fluxo permanente (Rosa et al., 2006).	43
3.11	Fluxo radial pseudopermanente com limite externo selado (Rosa et al., 2006).	44
3.12	Distribuição de pressão em um sistema radial com fluxo pseudopermanente (Rosa et al., 2006).	47
A.1	Comparação entre a função exponencial integral com argumento positivo e negativo com a aproximação logarítmica da função.	51
C.1	Funções de Bessel modificadas I_0 , I_1 , K_0 e K_1 (Abramowitz & Stegun, 1964)	55
E.1	Gráfico da solução do modelo da linha fonte em termos adimensionais (Retirada da apostila: <i>Análise de Testes de Poços</i> - Petrobras [19-?])	59

Lista de Tabelas

2.1	Definições de equações para fluxo em meios porosos	12
A.1	Erros associados a aproximação da função exponencial integral pela aproximação logarítmica	50
B.1	Transformadas de Laplace (Adaptado: Abramowitz & Stegun, 1964)	53
D.1	Valores dos coeficientes V_i para $n = 10$	56

Nomenclatura

A	Área
B	Fator volume-formação do fluido
c_f	Compressibilidade do fluido
c_r	Compressibilidade da rocha
c_t	Compressibilidade total
D	Coefficiente de difusão
D_z	Distância positiva abaixo de um plano de referência horizontal
\vec{E}	Fluxo de energia
E_i	Função exponencial integral
$erfc$	Função erro complementar
\vec{g}	Vetor gravitacional
h	Espessura do reservatório
H	Entalpia
k	Permeabilidade
\vec{k}	Tensor de permeabilidade
\vec{K}	Tensor de dispersão
k_{T_t}	Condutividade térmica total
L	Comprimento do reservatório para fluxo linear
\vec{n}	Vetor normal
N_c	Número de componentes
N_p	Número de fases
\vec{N}	Termo de fluxo
p	Pressão
\bar{p}	Pressão média do reservatório
p_i	Pressão inicial do reservatório

p_{fw}	Pressão de fluxo no fundo do poço
p_w	Pressão de fundo do poço
q	Vazão
\vec{q}_c	Condutividade térmica
\vec{q}_r	Condutividade radioativa
q_w	Vazão de fundo do poço
r	Raio
R	Taxa de produção/destruição da massa
r_i	Reação total
r_e	Raio externo do reservatório
r_w	Raio do poço
S	Saturação
t	Tempo
t_{DA}	Tempo adimensional para o fim do período transiente
T	Temperatura
u	Velocidade
\vec{u}	Velocidade superficial
U	Energia interna global
V	Volume
V_p	Volume poroso
W	Concentração total da massa
\dot{W}	Taxa de trabalho total
\dot{W}_G	Taxa de trabalho realizada contra um campo gravitacional
\dot{W}_{pV}	Taxa de trabalho realizada contra um campo de pressão
x	posição no eixo ortogonal x do sistema de coordenadas cartesiano

Letras gregas

α_l	Dispersividade longitudinal
α_t	Dispersividade transversal
γ	Constante de Euler
Δ	Incremento ou decremento
η	Constante da difusividade hidráulica
λ	Mobilidade ou constante para as equações de Bessel

μ	Viscosidade
ξ	Componente da transformação de Boltzmann
π	Número pi
ρ	Massa específica
τ	Fator de tortuosidade
ϕ	Porosidade
ω	Massa

Subscritos

D	Adimensional
i	Referente ao(s) componente(s)
j	Referente à(s) fase(s)
r	Relativo(a)
s	Fase sólida

Capítulo 1

Introdução

A partir da descoberta de uma acumulação de petróleo diversas informações podem ser obtidas. Das mais importantes, pode-se citar como exemplo a quantidade de hidrocarbonetos que se pode retirar dessa jazida e o tempo em que essa produção se efetuará. O conhecimento das leis que regem o movimento dos fluidos nos meios porosos é fundamental para a obtenção dessas informações e o ramo da engenharia de reservatórios que trata dessas leis recebe o nome de *fluxo de fluidos em meios porosos*.

Dentro da engenharia de petróleo, engenheiros de reservatório constantemente buscam solucionar problemas envolvendo fluxos monofásicos de fluidos de baixa compressibilidade.

Neste trabalho, são apresentadas as equações fundamentais da mecânica dos fluidos que descrevem o transporte de líquidos em meios porosos partindo do princípio de conservação da massa e do princípio de conservação da energia. Utilizando esses princípios é possível resolver a principal equação que rege o estudo do fluxo em meios porosos, a *Equação da Difusividade Hidráulica*. (Towler, 2002; Rosa, 2006)

Com o auxílio de métodos de soluções de equações diferenciais parciais como a transformada de Laplace e transformação de Boltzmann, entre outras, é possível resolver o problema de valor inicial e de contorno formado pela equação da difusividade hidráulica e as respectivas condições de contorno e inicial associadas aos modelos físicos de interesse encontrados no campo.

Capítulo 2

Equações Básicas

2.1 Equação da Conservação de Massa

Para o desenvolvimento das equações, será considerado um volume arbitrário e fixo V dentro de um meio poroso que contém um fluxo de compostos químicos. De modo que $i = 1, \dots, N_c$ seja o número de componentes e $j = 1, \dots, N_p$ seja o número de fases. Conforme a Figura 1, a área A do volume V é composta por elementos de superfície ΔA cujo centro aponta um vetor normal externo \vec{n} . A soma de todos os elementos de superfície ΔA corresponde a área da superfície total de V , e esta soma se torna uma integral de superfície quando ΔA tende a zero.

Para cada componente em cada fase do volume, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Taxa de acúmulo} \\ \text{de } i \text{ em } V \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Taxa de } i \\ \text{que entra} \\ \text{em } V \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \text{Taxa de } i \\ \text{que sai} \\ \text{de } V \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{Taxa de } i \\ \text{gerada} \\ \text{em } V \end{array} \right\}, \quad i = 1, \dots, N_c \quad (2.1)$$

Desta forma, o acúmulo, o fluxo (representado pelo termo da taxa de i que entra, juntamente com o termo da taxa de i que sai) e a fonte são representados respectivamente de acordo com a Eq. (2.1).

Assim, pode-se reescrever os termos de fluxo como:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Taxa de transporte} \\ \text{de } i \text{ em } V \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Taxa de } i \\ \text{que entra em } V \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \text{Taxa de } i \\ \text{que sai de } V \end{array} \right\}, \quad i = 1, \dots, N_c \quad (2.2)$$

E também dizer que o acúmulo de i é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Taxa de acúmulo} \\ \text{de } i \text{ em } V \end{array} \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \begin{array}{c} \text{Massa total de } i \\ \text{em } V \end{array} \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_V W_i dV \right\} = \int_V \frac{\partial W_i}{\partial t} dV \quad (2.3)$$

onde W_i é a concentração total da massa de i por unidade de volume. Sua integral de volume expressa a soma de elementos infinitesimais de volume em V em função da concentração total.

Sendo o produto vetorial $\vec{n} \cdot \vec{N}_i$ a componente normal do fluxo que passa pela superfície ΔA , tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Taxa de transporte} \\ \text{de } i \text{ em } \Delta A \end{array} \right\} = - \vec{n} \cdot \vec{N}_i \Delta A \quad (2.4)$$

E somando os termos infinitesimais da superfície, chega-se a:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Taxa líquida} \\ \text{de transporte} \\ \text{de } i \text{ em } V \end{array} \right\} = - \int_A \vec{n} \cdot \vec{N}_i dA \quad (2.5)$$

Já que a integral de superfície é calculada em V , tanto o fluxo que entra, quanto o que sai em V , compõe a Eq. (2.5).

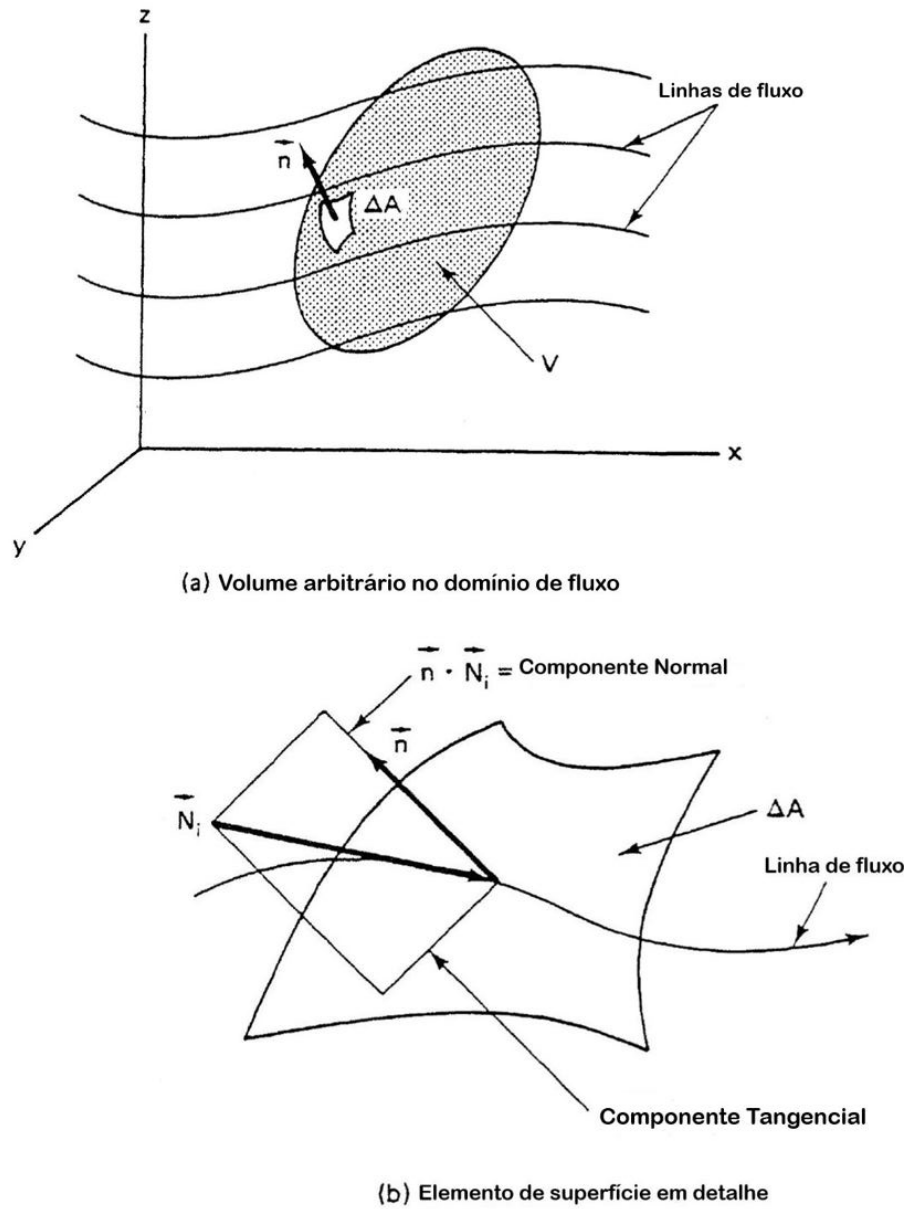


Figura 2.1: Geometria para derivações das leis da conservação (Adaptado: Lake et al., 1989).

A taxa líquida de produção em V é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Taxa líquida} \\ \text{de produção} \\ \text{de } i \text{ em } V \end{array} \right\} = \int_V R_i dV \quad (2.6)$$

onde R_i é a taxa de produção/destruição da massa de i por unidade de volume gerada por uma ou mais reações químicas em V .

Substituindo as Eqs. (2.3), (2.4) e (2.5) na Eq. (2.1) chega-se a Equação da Conservação de i :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Taxa de acúmulo} \\ \text{de } i \text{ em } V \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Taxa de } i \\ \text{que entra} \\ \text{em } V \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Taxa de } i \\ \text{que sai} \\ \text{de } V \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Taxa de } i \\ \text{gerada} \\ \text{em } V \end{array} \right\}$$

$$\int_V \frac{\partial W_i}{\partial t} dV = - \int_A \vec{n} \cdot \vec{N}_i dA + \int_V R_i dV, \quad i = 1, \dots, N_c \quad (2.7)$$

Usando o teorema da divergência

$$\int_A \vec{n} \cdot \vec{N}_i dA = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{N}_i dV \quad (2.8)$$

e aplicando na integral de superfície da Eq. (2.7), obtém-se uma integral de volume conforme a Eq. (2.9).

$$\int_V \left(\frac{\partial W_i}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{N}_i - R_i \right) dV = 0, \quad i = 1, \dots, N_c \quad (2.9)$$

Como V é arbitrário, a equação da conservação do componente i na sua forma diferencial reduz-se a:

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{N}_i - R_i = 0, \quad i = 1, \dots, N_c \quad (2.10)$$

Definição de Termos

Nesta subseção serão definidas algumas equações necessárias para o estudo do fluxo multifásico em meios porosos conforme (Tabela 2.1) que posteriormente serão simplificadas para resolução de problemas envolvendo fluxo monofásico, objetivo central deste trabalho.

O termo de acúmulo W_i , representa o somatório dos componentes i nas N_p fases mais a fase estacionária (Eq. (2.16)). Somando os componentes i com as definições de fração mássica (Eq. (2.22) e (2.23)), obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{N_c} W_i = \phi \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j S_j + (1 - \phi) \rho_s \equiv \rho(\omega_i, p) \quad (2.11)$$

onde ϕ representa a porosidade do meio, ρ_j a massa específica da fase j e S_j a saturação da fase j . pode-se considerar a densidade geral ρ como uma função da pressão local p e do conjunto das frações mássicas globais definida como:

$$\omega_i = \frac{W_i}{\sum_{i=1}^{N_c} W_i} \quad (2.12)$$

onde ω_i é a massa dos componentes i em todas as fases dividido pela massa total presente no meio poroso.

O fluxo \vec{N}_i da Eq.(2.17) representa o somatório dos fluxos de todas as fases do componente i , sendo composto por um termo de convecção (determinado pela velocidade de fase superficial \vec{u}_j) e um termo de dispersão (caracterizado pelo tensor de dispersão \vec{K}_{ij}).

O tensor de dispersão possui duas componentes, uma longitudinal e outra transversal para meios homogêneos e isotrópicos conforme Eq. (2.13) e Eq. (2.14) respectivamente:

$$(K_{xx})_{ij} = \frac{D_{ij}}{\tau} + \frac{\alpha_{lj}u_{xj}^2 + \alpha_{tj}(u_{yj}^2 + u_{zj}^2)}{\phi S_j |\vec{u}_j|} \quad (2.13)$$

$$(K_{xy})_{ij} = \frac{(\alpha_{lj} - \alpha_{tj})u_{xj}u_{yj}}{u S_j |\vec{u}_j|} \quad (2.14)$$

onde o subscrito l expressa a coordenada espacial na direção paralela, ou longitudinal ao fluxo total e t é qualquer direção perpendicular ou transversal a l . O termo D_{ij} é o coeficiente de difusão do componente i na fase j (Bird et al., 1960), α_{lj} e α_{rj} são as dispersividades longitudinal e transversal e τ é o fator de tortuosidade do meio.

Tabela 2.1: Definições de equações para fluxo em meios porosos

Conservação dos i componentes	$\frac{\partial W_i}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{N}_i = R_i$ (2.15)
Conservação global de i	$W_i = \phi \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j S_j \omega_{ij} + (1 - \phi) \rho_s \omega_{is}$ (2.16)
Fluxo de i	$\vec{N}_i = \sum_{j=1}^{N_p} (\rho_j \omega_{ij} \vec{u}_j - \phi \rho_j S_j \vec{K}_{ij} \cdot \vec{\nabla} \omega_{ij})$ (2.17)
Fonte de i	$R_i = \phi \sum_{j=1}^{N_p} S_j r_{ij} + (1 - \phi) r_{is}$ (2.18)
Lei de Darcy	$\vec{u}_j = -\lambda_{rj} \vec{k} \cdot (\vec{\nabla} p_j + \rho_j \vec{g})$ (2.19)
Mobilidade relativa	$\lambda_{rj} = \lambda_{rj}(S, \omega, \vec{u}_j, \vec{x})$ (2.20)
Pressão capilar	$p_{cjn}(S, \omega, \vec{x}) = p_j - p_n$ (2.21)
Fração mássica	$\sum_{i=1}^{N_c} \omega_{ij} = 1$ (2.22)
Fração mássica da fase estacionária	$\sum_{i=1}^{N_c} \omega_{is} = 1$ (2.23)
Restrição da saturação	$\sum_{j=1}^{N_p} S_j = 1$ (2.24)
Reação total da fase	$\sum_{i=1}^{N_c} r_{ij} = 0$ (2.25)
Reação total da fase sólida	$\sum_{i=1}^{N_c} r_{is} = 0$ (2.26)

Relações Auxiliares

A Eq. (2.19) é uma versão da lei de Darcy para fluxos multifásicos em meio poroso (Collins, 1976) e neste formato, assume-se que o fluxo não tem escorregamento entre as fases. A função potencial da velocidade superficial da fase \vec{u}_j é representada pela soma vetorial $\vec{\nabla}p_j + \rho_j\vec{g}$ onde p_j é a pressão na fase j e \vec{g} é o vetor gravitacional que pode ser escrito como:

$$\vec{g} = -g\vec{\nabla}D_z \quad (2.27)$$

onde g é vetor de magnitude gravitacional, e D_z é uma distância positiva abaixo de algum plano de referência horizontal. Para um sistema de coordenadas cartesianas com uma constante de inclinação com o plano de referência, $\vec{\nabla}$ se torna um vetor que consiste no cosseno do ângulo de inclinação entre os respectivos eixos e a vertical.

A forma tensorial da permeabilidade \vec{k} implica em um meio poroso anisotrópico e permeável tendo o eixo das coordenadas não alinhados em relação aos eixos principais de \vec{k} .

A outra parcela da Eq. (2.19) consiste na mobilidade relativa λ_{rj} da fase j , definida como o quociente entre a permeabilidade relativa k_{rj} e a viscosidade μ_j .

$$\lambda_{rj} = \frac{k_{rj}(S, \omega, \vec{x})}{\mu_j(\omega, \vec{u}_j)} \quad (2.28)$$

A Eq. (2.28) decompõe λ_{rj} em uma propriedade rocha-fluido k_{rj} , e uma propriedade de fluido μ_j . λ_{rj} é uma função da tendência da fase j de molhar o meio poroso, da distribuição de tamanho dos poros e de todas as saturações da fase. μ_j é uma função de decomposição da fase, e, se a fase j é não-Newtoniana, também é função da magnitude da velocidade superficial \vec{u}_j . As permeabilidades relativas e as viscosidades k_{rj} e μ_j geralmente são determinadas experimentalmente para o cálculo de λ_{rj} . Em linhas gerais, pode-se escrever o termo $\lambda_{rj}\vec{k}$ da Eq. (2.19) como:

$$\lambda_{rj}\vec{k} = \frac{\vec{k}_j}{\mu_j} \quad (2.29)$$

onde \vec{k}_j é o tensor de permeabilidade da fase.

A diferença entre as pressões de duas fases que passam pelo volume de controle, é a pressão capilar definida na Eq. (2.21).

As Eqs. (2.22), (2.23) e (2.24) são respectivamente as definições de fração mássica e a restrição da saturação da fase.

As Eqs. (2.25) e (2.26) são definições da taxa de reação do componente i na fase j ou na fase estacionária.

Equação da Conservação da Massa

Ao substituir os termos das Eqs. (2.16), (2.17) e (2.18) na Eq. (2.15) chega-se a:

$$\left(\phi \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j S_j \omega_{ij} + (1 - \phi) \rho_s \omega_{is} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left[\sum_{j=1}^{N_p} (\rho_j \omega_{ij} \vec{u}_j - \phi \rho_j S_j \vec{K}_{ij} \cdot \vec{\nabla} \omega_{ij}) \right] = \phi \sum_{j=1}^{N_p} S_j r_{ij} + (1 - \phi) r_{is}, \quad i = 1, \dots, N_c \quad (2.30)$$

e fazendo o somatório dos N_c componentes chega-se a equação da continuidade conforme Eq. (2.31) obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j S_j + (1 - \phi) \rho_s \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\sum_{j=1}^{N_p} \rho_j \vec{u}_j \right) = 0 \quad (2.31)$$

2.2 Equação da Conservação de Energia

Para diminuir a exigência do fluxo isotérmico nas equações da Tabela 1, é necessário o uso da equação da conservação de energia. Esta equação adiciona à formulação uma variável dependente a mais, a temperatura. A definição para a equação de balanço de energia ou primeira lei da termodinâmica para os propósitos deste trabalho se dá por:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Taxa de acúmulo} \\ \text{de energia em } V \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Taxa de energia} \\ \text{que entra} \\ \text{em } V \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{Taxa de energia} \\ \text{gerada} \\ \text{em } V \end{array} \right\} \quad (2.32)$$

onde V é o volume arbitrário expresso na Figura 1. Traçando um paralelo entre o desenvolvimento da conservação de massa Eq. (2.1) e a Eq. (2.32) para melhor simplificação, por analogia, obtém-se:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho U + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j |\vec{u}_j|^2 \right) + \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \dot{W} \quad (2.33)$$

Na Eq.(2.33) o termo $\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j |\vec{u}_j|^2$ representa a energia cinética por unidade de volume total. Os demais termos ρU , \vec{E} e \dot{W} representam a concentração de energia, o fluxo e o termo fonte, respectivamente. U é a energia interna global, e ρ é a massa específica global dada pela Eq. (2.11).

A forma da primeira lei da termodinâmica para sistemas abertos expressado pela Eq. (2.33) requer que na ausência de fontes de aquecimento externas, o termo \dot{W} seja formado apenas por componentes de trabalho. Neste desenvolvimento, considera-se apenas a taxa de trabalho realizado contra um campo de pressão \dot{W}_{pV} e contra um campo gravitacional \dot{W}_G . A soma $\dot{W} = \dot{W}_{pV} + \dot{W}_G$ é a taxa de trabalho realizado em um fluido no volume V .

Voltando a Figura 1, considerando um campo de fluxo multifásico e multicomponente atravessando ΔA , sabendo que o trabalho é igual ao produto da força vezes a distância e que a taxa de trabalho é a força vezes a velocidade, o elemento que passa por ΔA está realizando trabalho onde:

$$\Delta \dot{W}_{pV} = - \sum_{j=1}^{N_p} p_j \Delta A \vec{n} \cdot \vec{u}_j \quad (2.34)$$

O termo $p_j \Delta A \vec{n}$ é a força exercida na superfície ΔA pela pressão na fase j . O produto escalar da Eq. (2.34) expressa a definição geral de trabalho utilizando vetores de força e o termo da velocidade. Adota-se o sinal negativo por convenções termodinâmicas já que o trabalho realizado $\Delta \dot{W}_{pV}$ em um elemento que passa pelo volume V deve ser positivo. O trabalho pressão-volume total é a soma da Eq. (2.34) sobre todos os elementos de superfície que, no limite do maior ΔA que tende a zero, torna-se uma integral de superfície. Usando o teorema da divergência nesta integral é possível obter:

$$\Delta \dot{W}_{pV} = - \int_V \sum_{j=1}^{N_p} \nabla (p_j \vec{u}_j) dV \quad (2.35)$$

O trabalho contra gravidade é calculado a partir do produto escalar entre a velocidade e o vetor de gravidade \vec{g} .

$$\Delta \dot{W}_G = \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j \vec{u}_j \cdot \vec{g} \Delta V \quad (2.36)$$

A taxa de trabalho total feito contra a gravidade se dá por:

$$\dot{W}_G = \int_V \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j \vec{u}_j \cdot \vec{g} dV \quad (2.37)$$

Substituindo todos os termos de trabalho na Eq. (2.33) e fazendo o integrando igual a zero devido ao fato de V ser arbitrário, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho U + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j |\vec{u}_j|^2 \right) + \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \sum_{j=1}^{N_p} \nabla(p_j \vec{u}_j) - \rho_j \vec{u}_j \cdot \vec{g} = 0 \quad (2.38)$$

O termo do fluxo de energia é composto pelas contribuições convectivas geradas pela condutividade térmica e pela condutividade radioativa, desprezando os outros termos.

$$\vec{E} = \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j \vec{u}_j \left[U_j + \frac{1}{2} |\vec{u}_j|^2 \right] + \vec{q}_c + \vec{q}_r \quad (2.39)$$

Para este trabalho, e para as condições apresentadas nas soluções dos problemas a seguir, despreza-se o termo da radiação. A condutividade térmica é definida por através de Lei de Fourier:

$$\vec{q}_c = -k_{T_t} \vec{\nabla} T \quad (2.40)$$

onde k_{T_t} é a condutividade térmica total e T a temperatura.

Substituindo as definições das Eqs. (2.39) e (2.40) na Eq. (2.38) tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho U + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j |\vec{u}_j|^2 \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\sum_{j=1}^{N_p} \rho_j \vec{u}_j \left[U_j + \frac{1}{2} |\vec{u}_j|^2 \right] \right) - \vec{\nabla} \cdot (k_{T_t} \vec{\nabla} T) + \sum_{j=1}^{N_p} [\vec{\nabla} \cdot (p_j \vec{u}_j) - \rho_j \vec{u}_j \cdot \vec{g}] = 0 \quad (2.41)$$

O somatório $\sum_{j=1}^{N_p} \rho_j \vec{u}_j U_j$ do termo de convecção, e o somatório $\sum_{j=1}^{N_p} \vec{\nabla} \cdot (p_j \vec{u}_j)$ do termo de trabalho feito contra um campo de pressão, podem ser combinados para obter-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho U + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j |\vec{u}_j|^2 \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\sum_{j=1}^{N_p} \rho_j \vec{u}_j \left[H_j + \frac{1}{2} |\vec{u}_j|^2 \right] \right) - \vec{\nabla} \cdot (k_{T_t} \vec{\nabla} T) - \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j \vec{u}_j \cdot \vec{g} = 0 \quad (2.42)$$

onde $H_j = U_j + p_j/\rho_j$ é a entalpia da fase j por unidade de massa de j .

E finalmente, substituindo o vetor gravitacional da Eq. (2.27) na Eq. (2.42) obtém-se a equação da conservação da energia:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho U + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j |\vec{u}_j|^2 \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\sum_{j=1}^{N_p} \rho_j \vec{u}_j \left[H_j + \frac{1}{2} |\vec{u}_j|^2 + g D_z \right] \right) - \vec{\nabla} \cdot (k_{T_t} \vec{\nabla} T) - g D_z \vec{\nabla} \cdot \left(\sum_{j=1}^{N_p} \rho_j \vec{u}_j \right) = 0 \quad (2.43)$$

Capítulo 3

Fluxo de Fluidos de Pequena Compressibilidade em Meios Porosos

Nesta seção será apresentada a dedução da equação da difusividade hidráulica e as suas respectivas soluções para os sistemas de coordenadas lineares e radiais em meios porosos horizontais, sujeitos aos regimes de fluxo transiente, permanente e pseudopermanente.

Todas as soluções apresentadas foram obtidas considerando que a vazão no ponto de coordenada $x = 0$ para o caso de fluxo linear e $r = r_w$ (raio do poço) para o caso de fluxo radial.

3.1 Equação da Difusividade Hidráulica

A equação da difusividade relaciona o comportamento da pressão no interior do reservatório com o tempo e é função da porosidade da rocha, viscosidade do fluido, compressibilidade total do sistema e da permeabilidade relativa ao fluido em consideração.

A equação da difusividade hidráulica, como é utilizada na engenharia de reservatórios, é obtida a partir da associação de três equações básicas: a equação da continuidade, que é uma equação da conservação da massa, a lei de Darcy, que é uma equação de transporte de massa, e uma equação de estado que tanto pode ser uma lei dos gases como a equação da compressibilidade para o caso dos líquidos (Rosa, 2006; Ahmed, 2006).

Na formulação desta equação serão admitidas algumas hipóteses:

- Fluxo estritamente horizontal
- Meio poroso homogêneo de espessura constante
- Fluxo monofásico
- Uma única fase saturando o meio poroso
- Sem reações químicas e sem absorção
- Um único componente
- Fluxo isotérmico
- Viscosidade constante
- Vazão constante
- Fluido e rocha de compressibilidade pequena e constante
- Pequenos gradientes de pressão

A partir dessas premissas, em coordenadas cartesianas, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j + (1 - \phi) \rho_s \right) + \frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_z}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z) &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Substituindo o termo da velocidade (u_x) pela equação de Darcy em regime linear obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho - \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dx} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho - \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dy} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho - \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dz} \right) = - \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho) \quad (3.2)$$

Resolvendo as derivadas parciais pela regra do produto e sabendo que $\frac{k}{\mu}$ é constante, chega-se a:

$$\frac{k}{\mu} \left[\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right] + \frac{k}{\mu} \left[\frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} + \rho \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right] + \frac{k}{\mu} \left[\frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} + \rho \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right] = \phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.3)$$

Como a compressibilidade da rocha se dá por

$$c_r = \frac{1}{\phi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right)_T \rightarrow \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) = \phi c_r \quad (3.4)$$

e a compressibilidade do fluido por

$$c_f = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \rightarrow \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right) = \rho c_f, \quad (3.5)$$

é possível aplicar a regra da cadeia na Eq. (3.3) e obter:

$$\frac{k}{\mu} \left[\frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right] + \frac{k}{\mu} \left[\frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} + \rho \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right] + \frac{k}{\mu} \left[\frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} + \rho \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right] = \phi \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.6)$$

Substituindo as Eqs. (3.4) e (3.5) na Eq. (3.6), tem-se:

$$\frac{k}{\mu} \rho \left\{ \left[c_f \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right] + \left[c_f \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right] + \left[c_f \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right] \right\} = \phi \rho c_f \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \phi c_r \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.7)$$

Como as derivadas $(\frac{\partial p}{\partial x})^2$, $(\frac{\partial p}{\partial y})^2$ e $(\frac{\partial p}{\partial z})^2$ são maiores que o produto entre elas e a compressibilidade, pode-se desconsiderar esse produto conforme a Eq. (3.8):

$$\frac{k}{\mu} \left[\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) \right] = \phi c_f \frac{\partial p}{\partial t} + \phi c_r \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.8)$$

Colocando os devidos termos da Eq. (3.8) em evidência e sabendo que a soma entre a compressibilidade do fluido e a compressibilidade da rocha resulta na compressibilidade total, obtém-se:

$$\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) = \phi \frac{\partial p}{\partial t} \underbrace{(c_f + c_r)}_{c_t} \quad (3.9)$$

e finalmente, chega-se a Equação da Difusividade Hidráulica em coordenadas cartesianas conforme Eq. (3.10)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.10)$$

O termo $k/(\phi \mu c_t)$ é chamado de *constante de difusividade hidráulica* e é comumente representado pela letra η . Assim, a equação se torna mais compacta da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.11)$$

3.2 Fluxo Linear

Para um sistema de fluxo linear, ou seja, quando há apenas fluxo na direção x , por exemplo, os termos referentes às direções y e z são iguais a zero e a equação da difusividade se dá por:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.12)$$

A partir desta forma reduzida serão desenvolvidas as soluções para os regimes de fluxo a seguir.

3.2.1 Reservatório Infinito - Regime Transiente

Até que a zona compressível atinja os limites do reservatório ou esteja sob a influência de outro poço, o reservatório se comporta como se fosse infinito para fins de teste. (Bourdarot et al., 1999)

Para a dedução da equação da difusividade em regime transiente supõe-se um meio poroso de comprimento teoricamente infinito, de seção reta constante A , produzindo com uma vazão constante q_w através da face localizada no ponto $x = 0$, conforme esquematizado na Figura 3.1. Nessas condições não existem

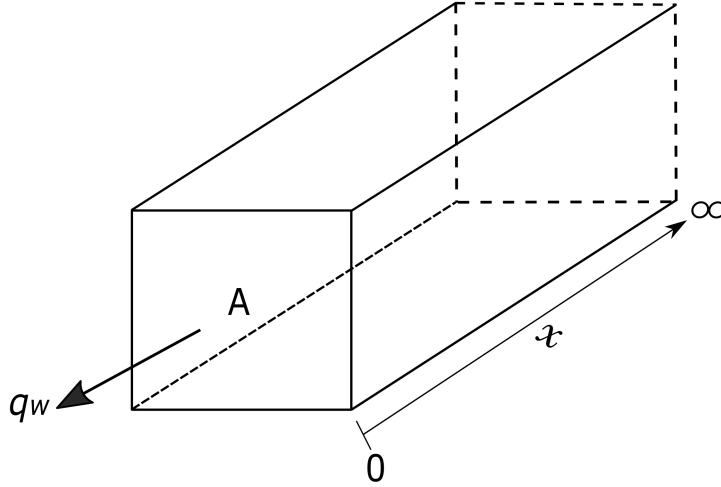


Figura 3.1: Fluxo linear em um reservatório infinito (Rosa et al., 2006).

simplificações para a equação da difusividade. Ela permanece na sua forma inicial, Eq. (3.10), e a sua solução é do tipo $p = f(x, t)$. Então:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.13)$$

A condição inicial é que todo o sistema encontrava-se à mesma pressão p_i para $t = 0$

$$p(x, 0) = p_i, x > 0 \quad (3.14)$$

onde p_i é a pressão inicial do reservatório. A condição de contorno interna representa matematicamente o fato de que se deseja obter a solução para vazão constante no ponto $x = 0$. Então:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{q_w \mu}{k A}, t > 0 \quad (3.15)$$

Como o reservatório é infinito, no limite externo a pressão permanece igual à inicial, gerando a condição de contorno externa:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x, t) = p_i \quad (3.16)$$

A solução para fluxo linear em regime transiente, é uma equação do tipo $p(x, t)$, para a qual define-se uma função $f(\xi)$ de tal modo que:

$$p(x, t) = p_i - \frac{q_w \mu}{kA} x f(\xi), \quad (3.17)$$

onde ξ é dada pela transformação de Boltzmann conforme Eq. (3.18):

$$\xi(x, t) = \frac{x}{\sqrt{4\eta t}} \quad (3.18)$$

Derivando p em relação a x e a t tem-se:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{q_w \mu}{kA} \left(f + x \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = -\frac{q_w \mu}{kA} \left(f + \xi \frac{df}{d\xi} \right) \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\frac{q_w \mu}{kA} \frac{d}{dx} \left(f + \xi \frac{df}{d\xi} \right) = -\frac{q_w \mu}{kA} \frac{d\xi}{dx} \left(2 \frac{df}{d\xi} + \xi \frac{d^2 f}{d\xi^2} \right) \quad (3.20)$$

e

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{q_w \mu}{kA} x \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (3.21)$$

Resolvendo as derivadas parciais $\partial \xi / \partial x$ e $\partial \xi / \partial t$ a partir da Eq. (3.18), obtém-se:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{4\eta t}} = \frac{\xi}{x} \quad (3.22)$$

e

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{1}{2t} \frac{x}{\sqrt{4\eta t}} = -\frac{\xi}{2t} \quad (3.23)$$

Então,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\frac{q_w \mu}{kA} \frac{\xi}{x} \left(2 \frac{df}{d\xi} + \xi \frac{d^2 f}{d\xi^2} \right) \quad (3.24)$$

e

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{q_w \mu}{kA} \frac{x \xi}{2t} \frac{df}{d\xi} \quad (3.25)$$

Logo, substituindo as Eqs. (3.24) e (3.25) na equação da difusividade, Eq. (3.13), resulta em:

$$-\frac{q_w \mu}{kA} \frac{d\xi}{dx} \left(2 \frac{f}{\xi} + \xi \frac{d^2 f}{d\xi^2} \right) = \frac{1}{\eta} \frac{q_w \mu}{kA} \frac{x \xi}{2t} \frac{df}{d\xi} \quad (3.26)$$

ou ainda, de forma simplificada:

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \left(\frac{2}{\xi} + 2\xi \right) \frac{df}{d\xi} = 0 \quad (3.27)$$

Definindo $df/d\xi$ como f' , separando as variáveis e integrando a expressão obtém-se:

$$\int \frac{df'}{f'} = - \int \left(\frac{2}{\xi} + 2\xi \right) d\xi, \quad (3.28)$$

que resulta em:

$$\ln f' = -2 \ln \xi - \xi^2 + C_1, \quad (3.29)$$

ou

$$f' = C_2 \frac{e^{-\xi^2}}{\xi^2}, \quad (3.30)$$

onde $C_2 = e^{C_1}$ e C_1 e C_2 são constantes de integração.

Para que se possa integrar a Eq. (3.30) e obter a função f que vai compor a solução, é necessário que os limites de integração sejam definidos. Isto pode se dar retornando às condições inicial e de contorno do

problema. Tanto a condição inicial ($t = 0$) como a condição de contorno externa ($x \rightarrow \infty$) são satisfeitas quando $f(\xi)$ é igual a zero. Dessa forma, as duas condições se reduzem a $f(\infty) = 0$.

Substituindo na condição de contorno interna o termo $\partial p / \partial x$ pelo seu equivalente encontrado na Eq. (3.19) e lembrando que de acordo com a Eq. (3.18) para $x = 0$ tem-se $\xi = 0$, obtém-se:

$$-\frac{q_w \mu}{kA} [f(\xi) + \xi f'(\xi)]_{\xi=0} = \frac{q_w \mu}{kA} \quad (3.31)$$

Dessa forma a condição de contorno interna se transforma em:

$$[f(\xi) + \xi f'(\xi)]_{\xi=0} = -1 \quad (3.32)$$

A integração da Eq. (3.30) resulta na expressão

$$f(\xi) = C_2 \int_{\infty}^{\xi} \frac{e^{-z^2}}{z^2} dz \quad (3.33)$$

onde z é apenas uma variável muda de integração. O limite inferior é escolhido de modo que $f(\xi)$ seja igual a zero. A integração por partes da Eq. (3.33) produz :

$$f(\xi) = C_2 \left(-\frac{1}{\xi} e^{-\xi^2} - 2 \int_{\infty}^{\xi} e^{-z^2} dz \right) \quad (3.34)$$

A constante C_2 pode ser obtida através da Eq. (3.32)

$$\left[\underbrace{C_2 \left(-\frac{1}{\xi} e^{-\xi^2} - 2 \int_{\infty}^{\xi} e^{-z^2} dz \right)}_{f(\xi)} + \xi \underbrace{C_2 \frac{e^{-\xi^2}}{\xi^2}}_{f'(\xi)} \right]_{\xi=0} = -1 \quad (3.35)$$

de onde se obtém:

$$-2C_2 \int_{\infty}^0 e^{-z^2} dz = -1 \quad (3.36)$$

No entanto,

$$\int_{\infty}^0 e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (3.37)$$

Então

$$C_2 = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad (3.38)$$

Logo,

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\xi^2}}{\xi} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^{\infty} e^{-z^2} dz \quad (3.39)$$

A função erro complementar, $erfc(\xi)$, é definida por:

$$erfc(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^{\infty} e^{-z^2} dz \quad (3.40)$$

Portanto, a função $f(\xi)$ é dada pela expressão:

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\xi^2}}{\xi} - erfc(\xi) \quad (3.41)$$

Desta forma, a solução da equação da difusividade para fluxo linear é dada por:

$$p(x, t) = p_i - \frac{q_w \mu}{kA} \left\{ \sqrt{\frac{4\eta t}{\pi}} \exp[-x^2/(4\eta t)] - x erfc\left(\frac{x}{\sqrt{4\eta t}}\right) \right\} \quad (3.42)$$

ou

$$p(x, t) = p_i - \frac{q_w \mu}{kA} \left\{ \sqrt{\frac{4\eta t}{\pi}} \exp[-x^2/(4\eta t)] - \left(\frac{x}{L}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4\eta t}}\right) \right\}. \quad (3.43)$$

Definindo-se a *distância adimensional* como

$$x_D = \frac{x}{L}, \quad (3.44)$$

o *tempo adimensional* como

$$t_D = \frac{\eta t}{L^2} = \frac{kt}{\phi \mu c_t L^2} \quad (3.45)$$

e a *queda de pressão adimensional* como

$$p_D(x_D, t_D) = \frac{kA}{q_w \mu L} [p_i - p(x, t)] = \frac{kA}{q_w \mu L} \Delta p, \quad (3.46)$$

a Eq. (3.43) pode ser expressa de forma simplificada por:

$$p(x_D, t_D) = \sqrt{\frac{4t_D}{\pi}} \exp(-x_D^2/4t_D) - x_D \operatorname{erfc}\left(\frac{x_D}{\sqrt{4t_D}}\right) \quad (3.47)$$

As variáveis adimensionais utilizadas neste trabalho são identificadas pelo subscrito D e serão discutidas com mais detalhe nas próximas seções. Com a introdução dessas variáveis, (neste caso, x_D , t_D e p_D) permite-se a obtenção de uma solução geral para o comportamento da pressão, ou seja, independentemente das dimensões e das demais propriedades do meio poroso.

Para $x = 0$ a Eq. (3.43) torna-se dependente apenas do tempo, ou seja:

$$x = 0 \Rightarrow p(0, t) = p_w(t), \quad (3.48)$$

onde p_w é a pressão no poço. O que implica em

$$p_w(t) = p_i - \frac{q_w \mu L}{kA} \sqrt{\frac{4\eta t}{\pi}}. \quad (3.49)$$

Ou em variáveis adimensionais:

$$p_D(x_D = 0, t_D) \equiv p_{wD}(t_D) = \sqrt{\frac{4t_D}{\pi}} \quad (3.50)$$

onde

$$p_{wD}(t_D) = \frac{kA}{q_w \mu L} [p_i - p_w(t)]. \quad (3.51)$$

3.2.2 Reservatório com Manutenção de Pressão - Regime Permanente

Quando a zona compressível é afetada por uma pressão constante nos limites externos, o fluxo se torna permanente. Este é o tipo de fluxo em um reservatório que está em contato com capa gás ou sujeito a influxo de água quando sua mobilidade é alta em comparação com a do óleo. (Bourdarot et al., 1999)

As equações para regime de fluxo permanente, apresentadas neste item, descrevem o movimento de um fluido em um meio poroso linear, de comprimento L e área aberta ao fluxo A , conforme o esquema mostrado na Figura 3.2 onde ocorre uma injeção à vazão q_w constante e uma produção à vazão q_w constante no ponto $x = 0$.

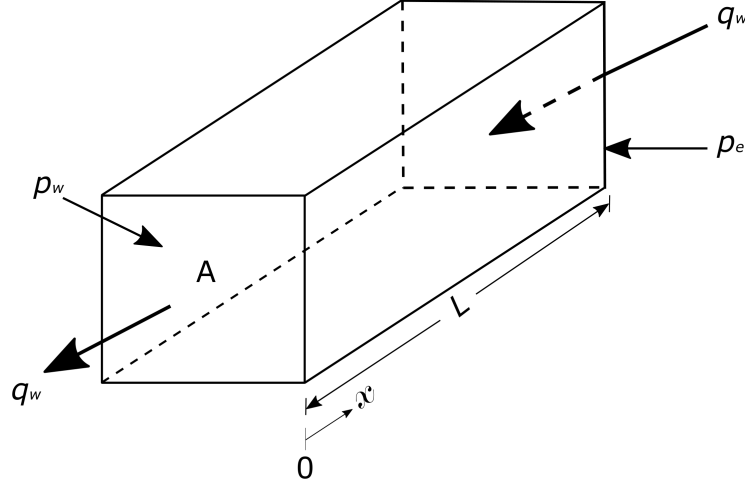


Figura 3.2: Fluxo linear em um reservatório com alimentação no limite externo (Rosa et al., 2006).

Nesse regime de fluxo, assim como a vazão, a pressão não varia com o tempo. Dessa forma, a equação da difusividade tem seu lado direito igual a zero, ou seja:

$$\frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (3.52)$$

Podendo ser reescrita como

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dp}{dx} \right) = 0 \quad (3.53)$$

cujas soluções são:

$$\frac{dp}{dx} = C_1 \quad (3.54)$$

Integrando a Eq. (3.54), tem-se:

$$p(x) = C_1 x + C_2 \quad (3.55)$$

Utilizando as condições de contorno

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow p(x) = p_w \\ x = L \Rightarrow p(x) = p_e \end{cases} \quad (3.56)$$

onde p_e é a pressão externa, pode-se obter:

$$p_w = C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = p_w \quad (3.57)$$

e

$$p_e = C_1 L + p_w \Rightarrow C_1 = \frac{p_e - p_w}{L} \quad (3.58)$$

Sendo assim, a solução para a equação da difusividade para o fluxo linear permanente (Eq. (3.55)) resulta na seguinte expressão:

$$p(x) = p_w + \frac{p_e - p_w}{L} x \quad (3.59)$$

A solução apresentada é do tipo $p = f(x)$, ou seja, a pressão varia de ponto a ponto dentro do meio poroso, porém em cada ponto, não varia com o tempo.

Sabe-se que a vazão é igual ao produto da velocidade aparente u_x pela área aberta ao fluxo A . A partir disso, a solução dada pela Eq. (3.59), também pode ser escrita em termos da vazão, ou seja:

$$q(x) = -u_x A \quad (3.60)$$

onde a velocidade aparente é dada pela equação de Darcy:

$$u_x = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.61)$$

Derivando a Eq. (3.59), que representa uma expressão da pressão em função da posição, obtém-se a variação da pressão com a distância:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_e - p_w}{L} \quad (3.62)$$

e substituindo as Eqs. (3.61) e (3.62) na Eq. (3.60) tem-se:

$$q(x) = \frac{k}{\mu} \frac{p_e - p_w}{L} A \quad (3.63)$$

Como a vazão não depende da posição x , pode-se dizer que:

$$q_w = q_L = q = \frac{kA(p_e - p_w)}{\mu L} \quad (3.64)$$

onde q_L é a vazão no limite externo ($x = L$). A partir desta equação, conclui-se que:

$$\frac{p_e - p_w}{L} = \frac{q_w \mu}{kA} \quad (3.65)$$

Substituindo o termo do gradiente de pressão na Eq. (3.59), pelo termo da direita da Eq. (3.65), obtém-se:

$$p(x) = p_w + \frac{q_w \mu}{kA} x \quad (3.66)$$

De forma simplificada, pode-se reescrever a Eq. (3.64) como:

$$q = \frac{kA}{\mu L} \Delta p \quad (3.67)$$

Como a queda de pressão adimensional se dá por

$$p_D = \frac{kA}{q\mu L} \Delta p, \quad (3.68)$$

na solução da Eq. (3.67) tem-se que

$$p_D = 1 \quad (3.69)$$

e assim, a Eq. (3.64) pode ser escrita em outros sistemas de unidades.

Por sua vez, a Eq. (3.66) pode ser escrita também como:

$$p(x) = p_w + \frac{q_w \mu L}{kA} \left(\frac{x}{L} \right) \quad (3.70)$$

onde L é um comprimento arbitrário.

3.2.3 Reservatório com Fronteira Selada - Regime Pseudopermanente

Quando a zona compressível atinge uma condição de não possuir fluxo nos seus limites, o seu regime se torna pseudopermanente. (Bourdarot, et al., 1999)

O comportamento de fluxo em um meio poroso limitado, sem alimentação externa, como esquematizado na Figura 3.3, é descrito pelas equações do regime pseudopermanente, também conhecido como regime depleitivo ou estado de depleção. O termo depleção deve-se ao fato de que neste regime a pressão em todos os pontos do reservatório cai continuamente, devido à retirada de massa de um reservatório finito.

Nesse tipo de sistema, a produção ocorre a partir da expansão do fluido e da redução do volume poroso em decorrência da diminuição da pressão. A solução da equação da difusividade para esse tipo de regime é obtida utilizando-se, entre outros conceitos, a compressibilidade total. Que é dada pela seguinte expressão em termos diferenciais:

$$c_t = \frac{1}{V_p} \frac{\partial V}{\partial p} \quad (3.71)$$

onde o volume poroso é dado por:

$$V_p = LA\phi \quad (3.72)$$

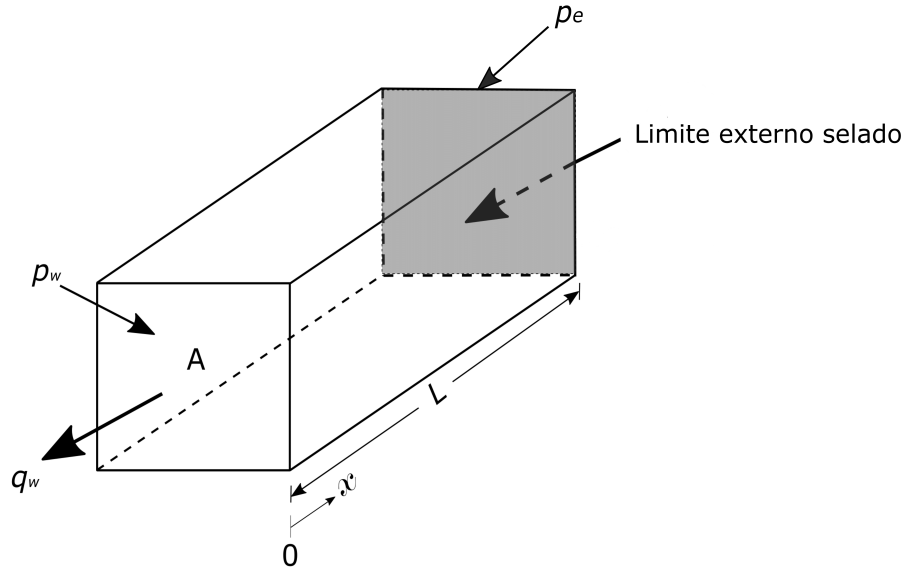


Figura 3.3: Fluxo linear em um reservatório selado no limite externo (Rosa et al., 2006).

Substituindo a Eq. (3.72) na Eq. (3.71) e derivando o resultado em relação ao tempo, tem-se:

$$\begin{aligned} c_t LA\phi \frac{\partial p}{\partial t} &= - \frac{\partial V}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \\ c_t LA\phi \frac{\partial p}{\partial t} &= - \frac{\partial V}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.73)$$

A variação do volume V em relação ao tempo é igual à vazão medida no ponto $x = 0$, ou seja:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = q(x = 0) = q_w = \text{constante} \quad (3.74)$$

Substituindo a Eq. (3.74) na Eq. (3.73), obtém-se:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{q_w}{c_t LA \phi} = \text{constante} \quad (3.75)$$

e substituindo a Eq. (3.75) na equação da difusividade (Eq. (3.10), resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= \frac{\phi \mu c_t}{k} \left(-\frac{q_w}{c_t LA \phi} \right) \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= -\frac{q_w \mu}{k LA} \end{aligned} \quad (3.76)$$

ou ainda:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = -\frac{q_w \mu}{k LA} \quad (3.77)$$

Aplicando a integral na Eq. (3.77) tem-se:

$$\begin{aligned} \int \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] dx &= \int \left(-\frac{q_w \mu}{k LA} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{q_w \mu}{k LA} x + C_1 \end{aligned} \quad (3.78)$$

A partir disso, as condições de contorno nesse caso são dadas por:

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow p(x) = p_w \\ x = L \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (3.79)$$

Utilizando a condição de contorno externa:

$$x = L \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (3.80)$$

obtem-se:

$$-\frac{q_w \mu}{k LA} L + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{q_w \mu}{k A} \quad (3.81)$$

Então, substituindo o valor de C_1 da Eq. (3.81) na Eq. (3.78), resulta em:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{q_w \mu}{k LA} x + \frac{q_w \mu}{k A} \quad (3.82)$$

cuja integração leva a:

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial p}{\partial x} dx &= \int \left(-\frac{q_w \mu}{k LA} x + \frac{q_w \mu}{k A} \right) dx \\ p(x) &= -\frac{q_w \mu}{k LA} \frac{x^2}{2} + \frac{q_w \mu}{k A} x + C_2 \end{aligned} \quad (3.83)$$

Utilizando-se a condição de contorno interna pode-se determinar o valor da constante C_2 :

$$x = 0 \Rightarrow p(x) = p_w \Rightarrow C_2 = p_w \quad (3.84)$$

E desse modo obtém-se:

$$p(x) = p_w - \frac{q_w \mu}{kLA} \frac{x^2}{2} + \frac{q_w \mu}{kA} x \quad (3.85)$$

ou ainda:

$$p(x) = p_w - \frac{q_w \mu L}{kA} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \left(\frac{x}{L} \right) \right] \quad (3.86)$$

Com a Eq. (3.86) é possível calcular a pressão em qualquer ponto do meio poroso em qualquer instante, a partir da pressão existente no limite de produção, p_w . Como se pode ver, essa solução é uma equação também do tipo $p = f(x)$, ou seja, função apenas da posição e bastante parecida com a solução do regime permanente. Apesar disso, sabe-se que existe uma dependência do tempo, de tal modo que esse regime não poderia ser chamado de permanente. Tanto a pressão p_w na face $x = 0$, como a pressão p_e no limite externo do reservatório, variam uniformemente com o tempo. Dessa maneira, a Eq. (3.86) representa a distribuição das pressões no meio poroso em um determinado instante. Em um instante seguinte, a pressão na face $x = 0$ terá outro valor, resultando em outros valores para as pressões no interior do meio poroso.

3.3 Fluxo Radial

Para um sistema com fluxo radial, em coordenadas cilíndricas, a equação da difusividade (Eq. (3.10)) é escrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.87)$$

Como neste trabalho o fluxo é restrito apenas à direção r a Eq. (3.87) se reduz à expressão:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} = \frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.88)$$

ou

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.89)$$

Variáveis Adimensionais

Uma variável adimensional é definida sempre de modo a ser diretamente proporcional à variável real correspondente. A constante de proporcionalidade contém um ou mais parâmetros do modelo (por exemplo, permeabilidade, viscosidade, porosidade, espessura da formação, compressibilidade total etc.). As equações resultantes, em termos de variáveis adimensionais, não dependem dos parâmetros e são bem mais compactas, facilitando assim o estudo do comportamento do modelo e a apresentação das soluções em termos gráficos. Outra vantagem que se faz presente no uso dessas variáveis é que sua aplicação permite escrever as equações resultantes em qualquer sistema de unidades. Esse artifício possibilita o uso de soluções gerais para situações reais específicas.

O raio adimensional, o tempo adimensional e a queda de pressão adimensional para um sistema radial de fluxo são definidos, respectivamente, pelas Eqs. (3.90), (3.91) e (3.92):

$$r_D = \frac{r}{r_w} \quad (3.90)$$

$$t_D = \frac{C_1 k t}{\phi \mu c_t r_w^2} \quad (3.91)$$

e

$$p_D = \frac{kh}{C_2 q B \mu} [p_i - p(r, t)] \quad (3.92)$$

onde r_w , é o raio do poço, h a espessura da formação e B o fator volume-formação do fluido. C_1 e C_2 para a aplicação nesta seção, serão constantes de conversão e dependem do sistema de unidades empregado.

Utilizando as variáveis adimensionais dadas pelas Eqs. (3.90), (3.91) e (3.92), pode-se mostrar que a forma adimensional da equação da difusividade para fluxo radial é dada por:

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} = \frac{\partial p_D}{\partial t_D}. \quad (3.93)$$

Condição inicial e condições de contorno

No caso do fluxo radial, a equação da difusividade, em termos adimensionais, é a EDP (equação diferencial parcial) dada pela Eq. (3.93). Busca-se conhecer a pressão em função do raio e do tempo, isto é, $p_D = p_D(r_D, t_D)$. A solução pode ser encontrada integrando-se a EDP três vezes: duas vezes em relação ao *raio* e uma vez em relação ao *tempo*. Os parâmetros de integração devem ser conhecidos para se determinar completamente a solução. Tais parâmetros de integração correspondem as chamadas *condição inicial* e *condições de contorno*. As soluções da Eq. (3.93) estão associadas aos modelos físicos de interesse através de duas condições de contorno (em relação a r_D) e da condição inicial (em relação a t_D).

Para a condição inicial (CI) considera-se que inicialmente ($t = 0$) todo o reservatório se encontrava em repouso numa pressão uniforme igual à pressão inicial p_i . De acordo com a definição de pressão adimensional dada pela Eq. (3.92), a condição inicial estabelece que:

$$p_D(r_D, t_D = 0) = 0 \text{ para } (r_D > 0) \quad (3.94)$$

Para a condição de contorno externa (CCE) existem três opções consideradas:

a) Reservatório Infinito

O reservatório é muito extenso de forma que a produção do poço é insuficiente para alterar as condições de repouso no seu limite externo. O reservatório se comporta como se fosse infinito, isto é, não há influência dos limites externos do reservatório no comportamento da pressão. Matematicamente, esta condição pode ser representada pela seguinte equação:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_D(r_D, t_D) = 0 \text{ para } (t_D > 0) \quad (3.95)$$

b) Reservatório com Manutenção de Pressão

O reservatório tem raio externo limitado igual a r_e ($r_{eD} = r_e/r_w$), onde a pressão se mantém constante. Ou seja, o reservatório é realimentado de tal forma que não haja queda de pressão nos limites externos. Neste caso, de acordo com as definições de variáveis adimensionais dadas pelas Eqs. (3.90), (3.91) e (3.92), tem-se:

$$p_D(r_D = r_{eD}, t_D) = 0 \text{ para } (t_D > 0) \quad (3.96)$$

b) Reservatório com Fronteira Selada

O reservatório é selado no seu limite externo, isto é, não há fluxo através do limite externo do reservatório (ponto $r_{eD} = r_e/r_w$). Se não há fluxo no limite externo, ou seja, se a velocidade do fluido é nula no limite externo, o gradiente de pressão naquele ponto deve ser nulo, conforme estabelece a lei de Darcy, e a CCE deve ser:

$$\left. \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right|_{r_{eD}} = 0 \text{ para } (t_D > 0). \quad (3.97)$$

Como condição de contorno interna (CCI) considera-se um poço vertical produzindo com vazão de fundo constante igual a qB , onde q é a vazão medida em condições-padrão. Utilizando a lei de Darcy, a vazão no poço, num sistema compatível de unidades, pode ser escrita como:

$$qB \equiv (-A_r u_r)_{r_w} = (2\pi r_w h) \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \bigg|_{r_w} = -\frac{2\pi k h}{\mu} \left(r \frac{\partial \Delta p}{\partial r} \right)_{r_w} \quad (3.98)$$

e a condição de contorno interna fica:

$$\left(r \frac{\partial \Delta p}{\partial r} \right)_{r_w} = - \frac{2\pi k h}{q B \mu} \quad (3.99)$$

O sinal negativo que aparece na Eq. (3.98) é apenas uma convenção. Quando o poço está em produção, o sentido da velocidade de fluxo é contrário ao sentido de crescimento da coordenada r e, portanto, a sua vazão seria negativa. O sinal negativo foi colocado na equação apenas para que a vazão de produção seja positiva. Em termos adimensionais a Eq. (3.99) simplifica-se para:

$$\left(r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = -1 \text{ para } (t_D > 0). \quad (3.100)$$

3.3.1 Solução por Transformada de Laplace

Nesta seção serão apresentadas soluções clássicas da equação da difusividade para sistemas radiais. Essas soluções consideram que um reservatório circular (cilíndrico) seja produzido com vazão de fundo constante (na face da formação) através de um único poço centralizado. O problema de valor inicial e de contorno formado pela equação da difusividade hidráulica e as respectivas condições de contorno e inicial associadas aos modelos físicos de interesse pode ser resolvido aplicando-se métodos de solução de equações diferenciais parciais. Algumas das possibilidades são: transformação de Boltzmann, que será vista mais a frente neste trabalho, além das transformadas de Laplace ou de Fourier, entre outras.

A transformada de Laplace tem sido largamente utilizada em problemas de fluxo de fluidos em meios porosos. Esta transformada aplicada em equações do tipo da Eq. (3.93) resulta numa solução geral representada pela combinação linear de funções de Bessel modificadas. Para consulta, nos Apêndices B e C são apresentadas, respectivamente, algumas propriedades da transformada de Laplace e as funções de Bessel modificadas utilizadas neste trabalho.

Reservatório Infinito - Modelo da fonte cilíndrica

O *modelo da fonte cilíndrica* considera um poço vertical de raio r_w produzindo com vazão de fundo constante em um reservatório infinito (sem efeitos de limites ou fronteiras). A solução do problema para este caso e para os demais casos que vem a seguir neste trabalho levam em conta todas hipóteses citadas na Seção 3.1. Desse modo, o problema da fonte cilíndrica pode ser escrito matematicamente como:

$$\text{EDP} : \frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} = \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \quad (3.101)$$

$$\text{CI} : p_D(r_D, t_D = 0) = 0, \quad (r_D > 1) \quad (3.102)$$

$$\text{CCE} : \lim_{r_D \rightarrow \infty} p_D(r_D, t_D) = 0, \quad (t_D > 0) \quad (3.103)$$

$$\text{CCI} : \left(r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = -1, \quad (t_D > 0) \quad (3.104)$$

onde $p_D = p_D(r_D, t_D)$.

A transformada de Laplace pode ser usada para resolver o *problema de valor inicial e de contorno* representado pelas Eqs. (3.101) a (3.104).

A transformada de Laplace de uma função $F(x, t)$ em relação a t , denominada $\bar{F}(x, u)$, é definida como:

$$\mathcal{L}\{F(x, t)\} = \bar{F}(x, u) = \int_0^\infty e^{-ut} F(x, t) dt \quad (3.105)$$

onde u é a chamada variável de Laplace. No Apêndice B encontra-se um resumo das propriedades e tabelas das transformadas de Laplace. As propriedades da diferenciação em relação a t e a x , respectivamente, podem ser escritas como:

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\partial F(t)}{\partial t}\right\} = u\bar{F}(u) - F(0^+) \quad (3.106)$$

e

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial F(x,t)}{\partial x}\right\} = \frac{d\bar{F}(x,u)}{dx} \quad (3.107)$$

onde, t é a variável independente em relação à qual a transformada de Laplace é tomada e x outra variável independente qualquer.

Tomando a transformada de Laplace da Eq. (3.101) e utilizando as propriedades dadas pelas Eqs. (3.106) e (3.107), obtém-se a EDO (equação diferencial ordinária):

$$\frac{d^2 \bar{p}_D}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d\bar{p}_D}{dr_D} = u\bar{p}_D - p_D(r_D, t_D = 0^+). \quad (3.108)$$

Substituindo a condição inicial do problema, dada pela Eq.(3.102), na Eq. (3.108), tem-se:

$$\frac{d^2 \bar{p}_D}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d\bar{p}_D}{dr_D} - u\bar{p}_D = 0. \quad (3.109)$$

A Eq. (3.109) é uma forma especial da equação de Bessel, cuja solução geral é (Abramowitz & Stegun, 1964):

$$\bar{p}_D(r_D, u) = AK_0(r_D\sqrt{u}) + BI_0(r_D\sqrt{u}) \quad (3.110)$$

onde A e B são constantes arbitrárias que serão determinadas a partir das condições de contorno, e I_0 e K_0 são as funções de Bessel modificadas de 1.^a e 2.^a espécies, respectivamente, e de ordem zero. O Apêndice C, como já mencionado, apresenta um resumo das propriedades das funções de Bessel modificadas de 1.^a e 2.^a espécies e ordens 0 e 1. O comportamento das funções de Bessel modificadas pode ser observado na Figura 3.4.

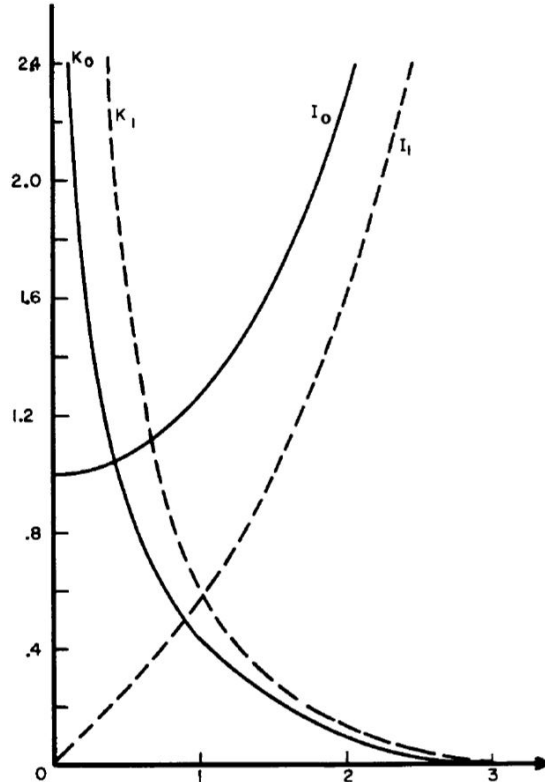


Figura 3.4: Funções de Bessel modificadas I_0 , I_1 , K_0 e K_1 (Abramowitz & Stegun, 1964)

Aplicando-se a transformada de Laplace na condições de contorno interna, resulta:

$$\mathcal{L} \left\{ \left(r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = -1 \right\} = \left(r_D \frac{d\overline{p_D}}{dr_D} \right)_{r_D=1} = -\frac{1}{u} \quad (3.111)$$

Aplicando a Eq. (3.111) na solução geral da função de Bessel (Eq. (3.110)) e sabendo que $\frac{d}{dz} I_0(z) = I_1(z)$ e $\frac{d}{dz} K_0(z) = -K_1(z)$ (Abramowitz & Stegun, 1964) tem-se:

$$\left\{ r_D \frac{d[AK_0(r_D\sqrt{u}) + BI_0(r_D\sqrt{u})]}{dr_D} \right\}_{r_D=1} = -\frac{1}{u} \quad (3.112)$$

o que resulta em:

$$-A\sqrt{u}K_1(\sqrt{u}) + B\sqrt{u}I_1(\sqrt{u}) = -\frac{1}{u} \quad (3.113)$$

Utilizando-se do mesmo procedimento para a CCE, obtém-se:

$$\mathcal{L} \left\{ \lim_{r_D \rightarrow \infty} p_D(r_D, t_D) = 0 \right\} = \lim_{r_D \rightarrow \infty} \overline{p_D}(r_D, u) = 0 \quad (3.114)$$

Aplicando a CCE na Eq. (3.110) e observando o gráfico da Figura 3.4 tem-se:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} [AK_0(r_D\sqrt{u}) + BI_0(r_D\sqrt{u})] = 0 \quad (3.115)$$

o que resulta em:

$$\cancel{AK_0(r_D\sqrt{u})} + \cancel{BI_0(r_D\sqrt{u})} = 0 \quad (3.116)$$

Da onde conclui-se que $B = 0$.

Para achar o valor de A , basta substituir o valor de B na CCI. Desta forma:

$$-A\sqrt{u}K_1(\sqrt{u}) = -\frac{1}{u} \quad (3.117)$$

isolando A , obtém-se:

$$A = \frac{1}{u^{3/2}K_1(\sqrt{u})} \quad (3.118)$$

Substituindo os valores das constantes A e B na Eq. (3.110), resulta na solução do problema no campo de Laplace:

$$\overline{p_D}(r_D, u) = \frac{K_0(r_D\sqrt{u})}{u^{3/2}K_1(\sqrt{u})} \quad (3.119)$$

A transformada inversa da Eq. (3.119) não é imediata. O resultado no campo real, ou seja, o valor da pressão adimensional p_D em um ponto r_D do reservatório, num tempo qualquer após o início da produção, pode ser obtido por meio de um algoritmo de inversão numérica da transformada de Laplace, que permite apresentar o comportamento da pressão de forma gráfica. Neste trabalho, será utilizado o algoritmo de Stehfest (1970) (Apêndice D), que é o mais empregado na literatura.

A solução do problema é apresentada graficamente pela Figura 3.5, onde a queda de pressão adimensional p_D é colocada em função da relação t_D/r_D^2 para vários valores de r_D . Nessa figura pode-se visualizar a comparação entre a solução da linha fonte (linha preta) (Apêndice E) e a solução considerando o poço cilíndrico, para diversos valores de r_D . Segundo Mueller & Witherspoon (1965), para $t_D/r_D^2 > 50$ o erro cometido ao se utilizar a solução do modelo da linha fonte ao invés da solução exata (modelo da fonte cilíndrica) é de no máximo 1%, para qualquer valor de r_D . Entretanto, para $r_D > 20$ a solução da linha fonte só satisfaz quando $t_D/r_D^2 > 0,5$, para que se mantenha o mesmo erro.

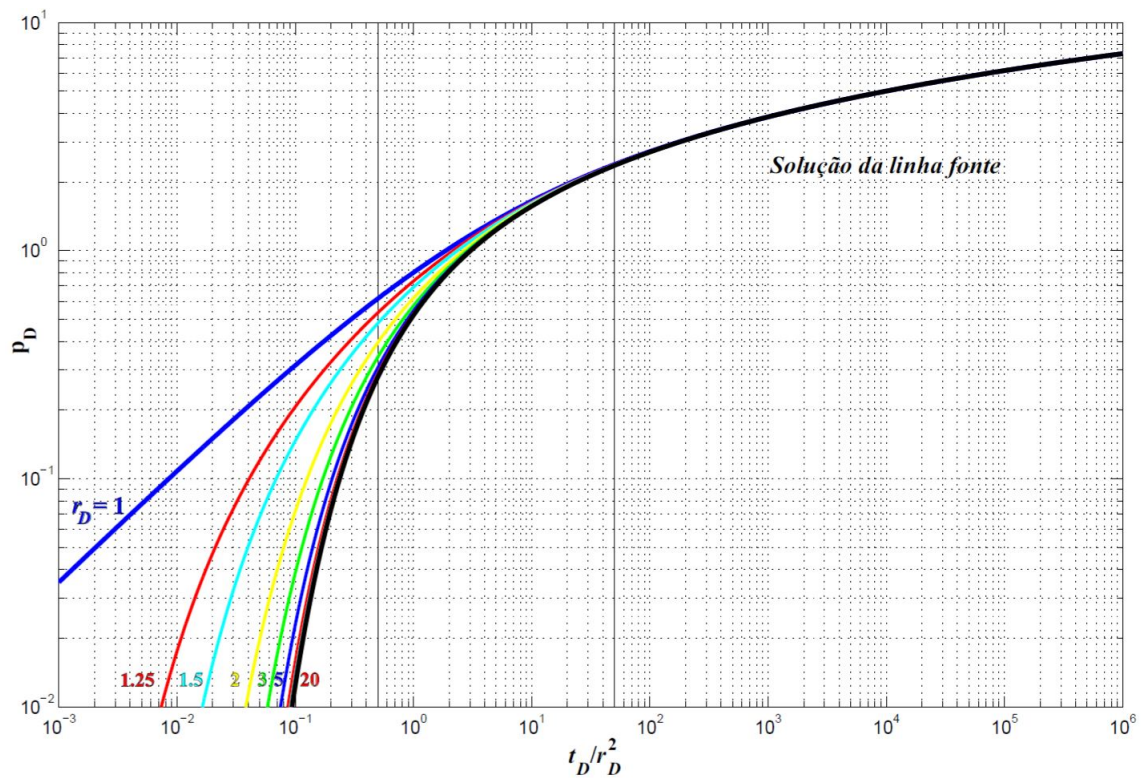


Figura 3.5: - Pressão adimensional para um reservatório circular infinito que produz com vazão constante através de um único poço - Soluções da fonte linear e da fonte cilíndrica. (Mueller and Witherspoon, Pressure Interference Effects Within Reservoirs And Aquifers, SPE 1020-PA, 1965)

No poço ($r_D = 1$) a solução do modelo da fonte cilíndrica no campo de Laplace, Eq. (3.119), simplifica-se para:

$$\overline{p_D}(r_D = 1, u) \equiv \overline{p_{wD}}(u) = \frac{K_0(r_D \sqrt{u})}{u^{3/2} K_1(\sqrt{u})} \quad (3.120)$$

Usualmente, utilizam-se aproximações das funções de Bessel modificadas para pequenos valores do argumento x (Abramowitz & Stegun, 1964):

$$K_1(x) \approx \frac{1}{x} \quad e \quad K_0(x) \approx -\ln\left(\frac{e^\gamma x}{2}\right) \quad (3.121)$$

onde γ é a constante de Euler ($\gamma = 0,5772156649$). A aproximação de K_1 corresponde ao modelo da fonte linear (solução para tempos longos do modelo da fonte cilíndrica) e a aproximação K_0 corresponde à aproximação logarítmica da função integral exponencial (E_i) que é definida por:

$$E_i(x) = -E_i(-x) = \int_x^\infty \frac{e^{-z}}{z} dz \quad (3.122)$$

Um resumo sobre a função integral exponencial, incluindo uma tabela com valores, é apresentado no Apêndice A. Com isso, a Eq. (3.120) pode ser aproximada por:

$$\overline{p_{wD}}(u) = -\frac{\ln(e^\gamma \sqrt{u}/2)}{u} = -\frac{1}{2} \frac{\ln u}{u} - \frac{1}{u} \ln\left(\frac{e^\gamma}{2}\right) = -\frac{1}{2u} \ln u - \frac{1}{2u} \ln\left(\frac{e^{2\gamma}}{4}\right) \quad (3.123)$$

cujas transformada inversa é:

$$p_{wD}(t_D) = \frac{1}{2} \ln(e^\gamma t_D) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{e^{2\gamma}}{4}\right) \quad (3.124)$$

ou:

$$p_{wD}(t_D) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4t_D}{e^\gamma}\right) = \frac{1}{2} (\ln t_D + 0,80907). \quad (3.125)$$

Desta forma, é possível observar que a Eq. (3.125) é igual a solução do modelo da linha fonte (Apêndice E) quando se aplica a aproximação logarítmica.

Para o estudo da pressão no poço ($r_D = 1$), a função integral exponencial pode ser utilizada, com erro menor que 1%, para $t_D > 50$ ou com erro máximo de 5%, para $t_D > 10$ (Mueller & Witherspoon). Na prática, como $t_D = 50$ corresponde a um tempo real da ordem de segundos, conclui-se que o modelo da linha fonte é suficientemente aceitável para o cálculo da pressão no poço (no raio r_w). A mesma conclusão é válida para qualquer ponto r_D do reservatório.

Reservatório circular com Manutenção de Pressão

Neste problema considera-se um poço vertical produzindo com vazão constante no centro de um reservatório circular, em cujas fronteiras (no raio r_e) a pressão permanece constante. Isto significa dizer que o reservatório estará sendo alimentado através de seu limite externo. Na prática esse tipo de situação pode ser encontrada, por exemplo, quando se tem um influxo de água fornecido por um aquífero lateral também realimentado por alguma outra fonte ou muito extenso, de modo que a pressão no contato óleo-água se mantenha aproximadamente constante.

Conforme dito anteriormente, a solução do problema parte das premissas listadas na Seção 3.1 e em termos de variáveis adimensionais, pode ser escrito matematicamente da seguinte forma:

$$\text{EDP} : \frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} = \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \quad (3.126)$$

$$\text{CI} : p_D(r_D, t_D = 0) = 0, \quad (r_D > 1) \quad (3.127)$$

$$\text{CCE} : p_D(r_D = r_{eD}, t_D) = 0, \quad (t_D > 0) \quad (3.128)$$

$$\mathbf{CCI} : \left(r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = -1, \quad (t_D > 0) \quad (3.129)$$

A condição de contorno externa, Eq. (3.128), representa a condição em que a pressão no limite externo do reservatório, ou seja, no ponto $r_{eD} = r_e/r_w$, se mantém constante e igual à pressão inicial.

Seguindo o desenvolvimento feito da Eq. (3.108) a Eq. (3.112), tem-se a solução particular no campo de Laplace a partir da CCI:

$$-A\sqrt{u}K_1(\sqrt{u}) + B\sqrt{u}I_1(\sqrt{u}) = -\frac{1}{u} \quad (3.130)$$

Repetindo o método utilizado anteriormente e aplicando a transformada de Laplace na CCE, tem-se:

$$\mathcal{L}\{p_D(r_D = r_{eD}, t_D) = 0\} = \overline{p_D}(r_{eD}, u) = 0 \quad (3.131)$$

Aplicando a CCE na solução geral da função de Bessel (Eq. (3.110)) resulta em:

$$AK_0(r_{eD}\sqrt{u}) + BI_0(r_{eD}\sqrt{u}) = 0 \quad (3.132)$$

Para encontrar os valores das constantes A e B , basta resolver um sistema de equações que envolva as soluções particulares das Eqs. (3.130) e (3.132). Desta forma, tem-se:

$$\begin{cases} -A\sqrt{u}K_1(\sqrt{u}) + B\sqrt{u}I_1(\sqrt{u}) = -1/u \\ AK_0(r_{eD}\sqrt{u}) + BI_0(r_{eD}\sqrt{u}) = 0 \end{cases} \quad (3.133)$$

Resolvendo o sistema, os valores de A e B se dão por:

$$A = \frac{I_0(r_{eD}\sqrt{u})}{u^{3/2}[I_0(r_{eD}\sqrt{u})K_1(\sqrt{u}) + I_1(\sqrt{u})K_0(r_{eD}\sqrt{u})]} \quad (3.134)$$

e

$$B = -\frac{K_0(r_{eD}\sqrt{u})}{u^{3/2}[I_0(r_{eD}\sqrt{u})K_1(\sqrt{u}) + I_1(\sqrt{u})K_0(r_{eD}\sqrt{u})]} \quad (3.135)$$

Assim, após a substituição das Eqs. (3.134) e (3.135) na Eq. (3.110), é possível obter a solução do problema no campo de Laplace:

$$\overline{p_D}(r_D, u) = \frac{I_0(r_{eD}\sqrt{u})K_0(r_D\sqrt{u}) - K_0(r_{eD}\sqrt{u})I_0(r_D\sqrt{u})}{u^{3/2}[I_0(r_{eD}\sqrt{u})K_1(\sqrt{u}) + I_1(\sqrt{u})K_0(r_{eD}\sqrt{u})]} \quad (3.136)$$

A inversão da Eq. (3.136) para o campo real também não é imediata e contará com a utilização do algoritmo de Stehfest, que permite a apresentação da solução em forma de gráfico, conforme mostrado na Figura 3.6.

Para a solução deste problema, é necessário avaliá-lo de duas maneiras. A primeira, para tempos longos, basta analisar a equação geral para pequenos valores da variável de Laplace, ou seja, $u \rightarrow 0$. A segunda, para tempos curtos, se faz o oposto e analisa-se a solução geral para $u \rightarrow \infty$.

Solução para tempos curtos: para pequenos valores de t_D (valores grandes da variável de Laplace), especialmente para o caso onde $r_e \gg r_w$, a função $K_0(r_{eD}\sqrt{u})$ tende para zero rapidamente e a Eq. (3.136) pode ser escrita de forma aproximada como:

$$\overline{p_D}(r_D, u) = \frac{K_0(r_D\sqrt{u})}{u^{3/2}K_1(\sqrt{u})}. \quad (3.137)$$

Cuja solução é igual a solução no campo de Laplace para o modelo da fonte cilíndrica que representa um poço produzindo a vazão constante em um reservatório infinito. Portanto, para tempos de produção suficientemente curtos, onde ainda não se pode perceber a influência da fronteira externa do reservatório, o modelo da fonte circular com manutenção de pressão se comporta como um reservatório infinito.

Por conta disso, nos tempos iniciais, é válido utilizar a aproximação logarítmica e obter a expressão da queda de pressão assim como a da Eq. (3.125):

$$p_{wD}(t_D) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4t_D}{e^\gamma} \right) = \frac{1}{2} (\ln t_D + 0,80907). \quad (3.138)$$

válida para $t_{DA} < 0,1$ com erro menor do que 1%, onde o tempo adimensionalizado com a área t_{DA} é definido por:

$$t_{DA} = \frac{C_1 k t}{\phi \mu c_t A} \text{ ou } t_{DA} = \frac{r_w^2 t_D}{A} \quad (3.139)$$

onde A é a área do reservatório ($A = \pi r_e^2$) e C_1 é uma constante cujo valor pode ser encontrado em tabelas utilizadas na literatura e irá depender do sistema de unidades utilizado.

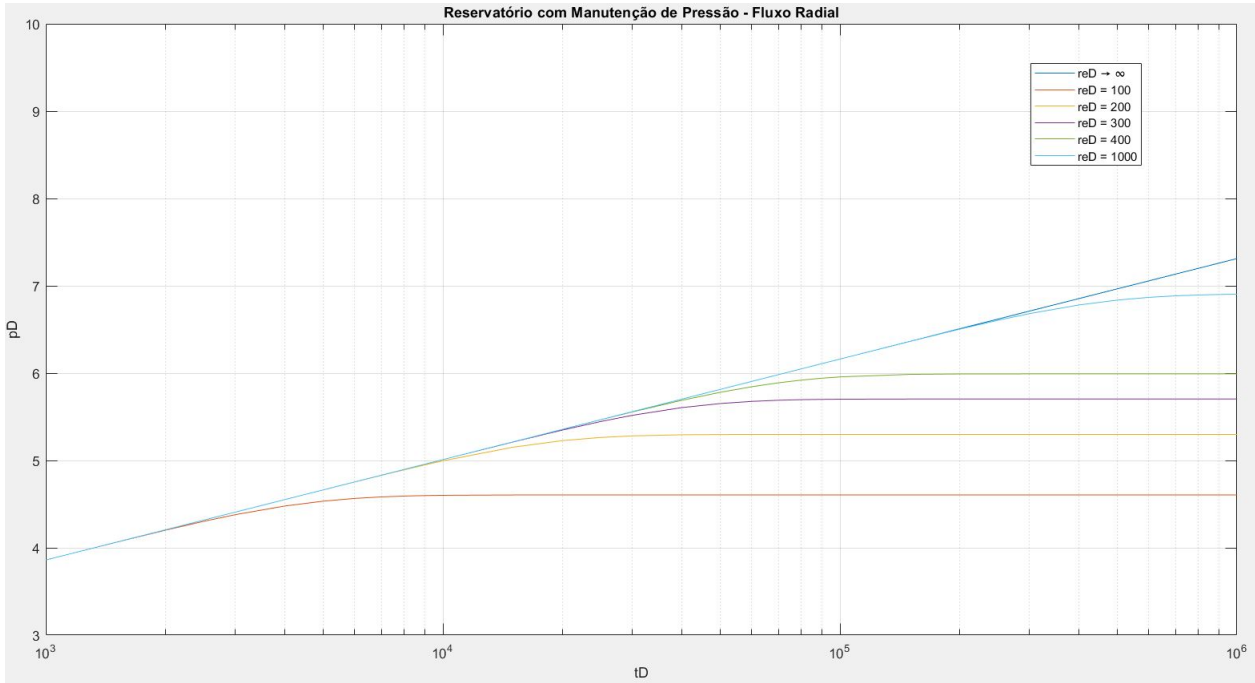


Figura 3.6: Queda de pressão adimensional no fundo do poço ($r_D = 1$) para um reservatório circular com manutenção de pressão na fronteira externa para diversos valores de r_{eD} .

Solução para tempos longos: para valores grandes de t_D (valores pequenos da variável de Laplace), a Eq. (3.136) pode ser aproximada por:

$$p_D(r_D, t_D) = \ln r_{eD} - \ln r_D \quad (3.140)$$

ou, no poço:

$$p_{wD}(r_D, t_D) = \ln r_{eD} \quad (3.141)$$

válida para $t_{DA} > 0,3$ com erro menor que 1% quando $r_e/r_w > 1000$. A Eq. (3.141) representa o regime permanente, no qual a pressão em qualquer ponto do reservatório não varia com o tempo de produção. Em termos dimensionais para este regime, a equação da pressão no poço se dá por:

$$p_{wf}(t) = p_i - \frac{C_2 q B \mu}{k h} \ln \left(\frac{r_e}{r_w} \right) \quad (3.142)$$

onde o valor da constante C_2 depende do sistema de unidades utilizado e também pode ser encontrado em tabelas utilizadas na literatura.

Reservatório circular com Fronteira Selada

Neste problema considera-se um poço vertical produzindo com vazão constante, no centro de um reservatório circular de raio r_e , em cuja fronteira externa não existe fluxo. Este modelo também obedece as premissas citadas na Seção 3.1 e em termos de variáveis adimensionais, o problema pode ser escrito através do seguinte sistema de equações:

$$\mathbf{EDP} : \frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} = \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \quad (3.143)$$

$$\mathbf{CI} : p_D(r_D, t_D = 0) = 0, \quad (r_D > 1) \quad (3.144)$$

$$\mathbf{CCE} : \left. \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right|_{r_{eD}} = 0, \quad (t_D > 0) \quad (3.145)$$

$$\mathbf{CCI} : \left(r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = -1, \quad (t_D > 0) \quad (3.146)$$

A condição de contorno externa, Eq. (3.128), representa a condição em que o reservatório é selado no limite externo, ou seja, no ponto $r_{eD} = r_e/r_w$.

Seguindo o desenvolvimento já feito anteriormente para os outros dois modelos de reservatório, a partir da Eq. (3.108) até a Eq. (3.112), tem-se a solução particular no campo de Laplace a partir da CCI:

$$-A\sqrt{u}K_1(\sqrt{u}) + B\sqrt{u}I_1(\sqrt{u}) = -\frac{1}{u} \quad (3.147)$$

Conforme feito anteriormente, aplica-se a transformada de Laplace na CCE, resultando em:

$$\mathcal{L} \left\{ \left. \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right|_{r_{eD}} = 0 \right\} = \left(\frac{dp_D}{dr_D} \right)_{r_{eD}} = 0 \quad (3.148)$$

Aplicando a Eq. (3.148) na solução geral da função de Bessel Eq. (3.110) e sabendo que $\frac{d}{dz}I_0(z) = I_1(z)$ e $\frac{d}{dz}K_0(z) = -K_1(z)$ (Abramowitz & Stegun, 1964) tem-se:

$$\left\{ \frac{d[AK_0(r_D\sqrt{u}) + BI_0(r_D\sqrt{u})]}{dr_D} \right\}_{r_{eD}} = 0 \quad (3.149)$$

o que resulta em:

$$-A\sqrt{u}K_1(r_{eD}\sqrt{u}) + B\sqrt{u}I_1(r_{eD}\sqrt{u}) = 0 \quad (3.150)$$

Similar ao caso do reservatório circular com manutenção de pressão, para achar os valores de A e B neste caso, é necessário resolver um sistema de equações que envolva as soluções particulares das Eqs. (3.147) e (3.150). Desta forma, tem-se:

$$\begin{cases} -A\sqrt{u}K_1(\sqrt{u}) + B\sqrt{u}I_1(\sqrt{u}) = -1/u \\ -A\sqrt{u}K_1(r_{eD}\sqrt{u}) + B\sqrt{u}I_1(r_{eD}\sqrt{u}) = 0 \end{cases} \quad (3.151)$$

Por analogia, em relação ao sistema da Eq. (3.133), basta substituímos o termo $K_0(r_{eD}\sqrt{u})$ por $-K_1(r_{eD}\sqrt{u})$ e $I_0(r_{eD}\sqrt{u})$ por $I_1(r_{eD}\sqrt{u})$ para obter-se os valores de A e B de modo que:

$$A = \frac{I_1(r_{eD}\sqrt{u})}{u^{3/2}[I_1(r_{eD}\sqrt{u})K_1(\sqrt{u}) - I_1(\sqrt{u})K_1(r_{eD}\sqrt{u})]} \quad (3.152)$$

e

$$B = \frac{K_1(r_{eD}\sqrt{u})}{u^{3/2}[I_1(r_{eD}\sqrt{u})K_1(\sqrt{u}) - I_1(\sqrt{u})K_1(r_{eD}\sqrt{u})]} \quad (3.153)$$

E finalmente, após a substituição das Eqs. (3.152) e (3.153) na Eq. (3.110), é possível obter a solução do problema no campo de Laplace:

$$\overline{p_D}(r_D, u) = \frac{I_1(r_{eD}\sqrt{u})K_0(r_D\sqrt{u}) + K_1(r_{eD}\sqrt{u})I_0(r_D\sqrt{u})}{u^{3/2}[I_1(r_{eD}\sqrt{u})K_1(\sqrt{u}) - I_1(\sqrt{u})K_1(r_{eD}\sqrt{u})]} \quad (3.154)$$

Assim como nos casos anteriores, a inversão da Eq. (3.154) para o campo real não é imediata e contará com a utilização do algoritmo de Stehfest, que permite a apresentação da solução em forma de gráfico, conforme mostrado na Figura 3.7.

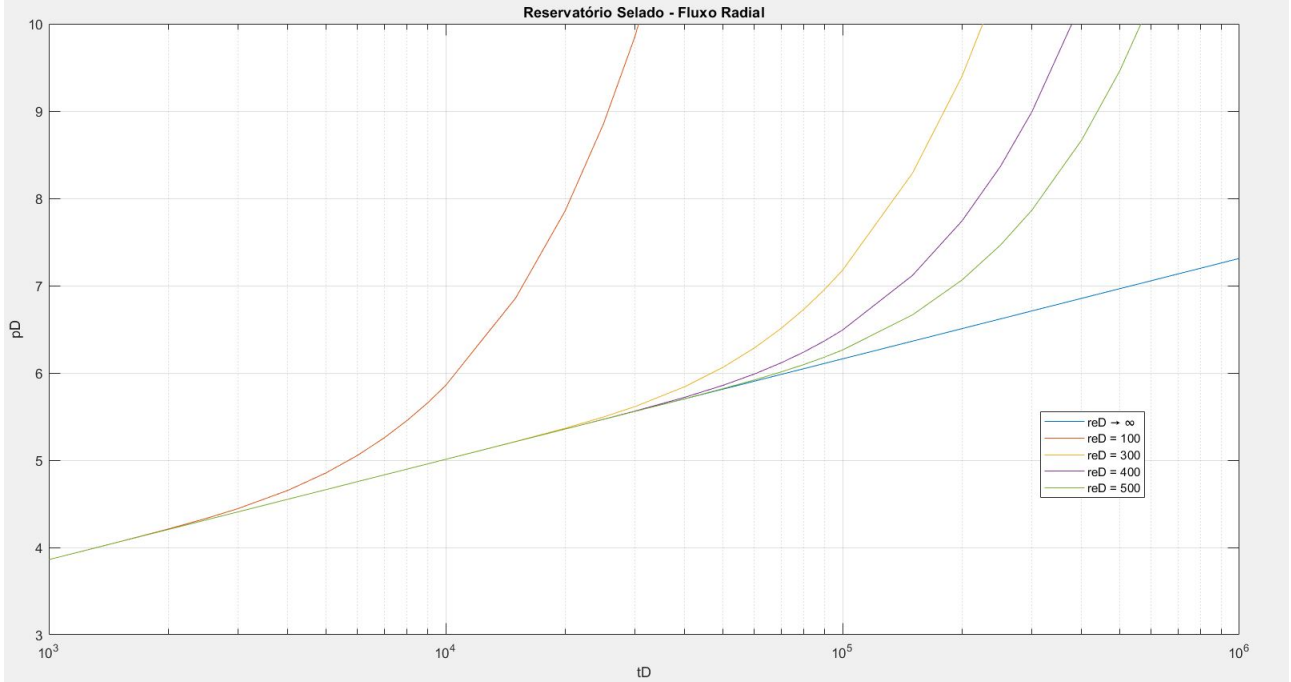


Figura 3.7: Queda de pressão adimensional no fundo do poço ($r_D = 1$) para um reservatório circular selado para diversos valores de r_{eD} .

Acompanhando o procedimento proposto na seção anterior, serão analisadas as soluções para tempos curtos e longos do problema.

Solução para tempos curtos: para valores pequenos de t_D (valores grandes da variável u da transformada de Laplace), a função $K_1(r_{eD}(\sqrt{u}))$ tende para zero rapidamente no campo de Laplace, especialmente para o caso de $r_e \gg r_w$. Com isso a Eq. (3.154) pode ser escrita de forma aproximada como:

$$\overline{p_D}(r_D, u) = \frac{K_0(r_D\sqrt{u})}{u^{3/2}K_1(\sqrt{u})}. \quad (3.155)$$

Analogamente ao caso da seção anterior, a solução da Eq. (3.155) é igual a solução no campo de Laplace para o caso do modelo da fonte cilíndrica. Desta forma, sabe-se que o reservatório, para tempos de produção curtos (sem que a influência da fronteira externa seja percebida), se comporta como um reservatório infinito.

Seguindo na mesma linha de raciocínio, nos tempos iniciais, pode-se expressar a equação da queda de pressão adimensional utilizando a aproximação logarítmica conforme a Eq. (3.125):

$$p_{wD}(t_D) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4t_D}{e^\gamma} \right) = \frac{1}{2} (\ln t_D + 0,80907). \quad (3.156)$$

válida para $t_{DA} < 0,1$ com erro menor do que 1%, segundo Earlougher.

Solução para tempos longos: para valores grandes de t_D (valores pequenos da variável u da transformada de Laplace), a Eq. (3.154) pode ser aproximada por (Matthews & Russell):

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{2}{r_{eD}^2 - 1} \left(\frac{r_D^2}{4} + t_D \right) - \frac{r_{eD}^2}{r_{eD}^2 - 1} \ln r_D - \frac{3r_{eD}^4 - 4r_{eD}^4 \ln r_{eD} - 2r_{eD}^2 - 1}{4(r_{eD}^2 - 1)^2}. \quad (3.157)$$

De acordo com Earlougher, esta equação é válida de forma exata para $t_{DA} < 0,1$, ou, com erro menor que 1% para $t_{DA} > 0,06$. Como $r_{eD}^2 \gg 1$, então $r_{eD}^2 - 1 \approx r_{eD}^2$ e a solução para tempos longos se torna:

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{2t_D}{r_{eD}^2} + \frac{r_D^2}{2r_{eD}^2} - \ln r_D + \ln r_{eD} - \frac{3}{4}. \quad (3.158)$$

ou, no poço ($r_D = 1$):

$$p_{wD}(r_D, t_D) = \frac{2t_D}{r_{eD}^2} + \frac{1}{2r_{eD}^2} + \ln r_{eD} - \frac{3}{4} \cong \frac{2t_D}{r_{eD}^2} + \ln r_{eD} - \frac{3}{4} \quad (3.159)$$

A Eq. (3.158) representa o regime pseudopermanente, ou seja, a pressão em um dado ponto cai linearmente com o passar do tempo. Em termos de variáveis, tem-se:

$$p_{wf}(t) = p_i - \frac{C_2 q B \mu}{kh} \left[\frac{2C_1 k t}{\phi \mu c_t r_e^2} + \ln \left(\frac{r_e}{r_w} \right) - \frac{3}{4} \right]. \quad (3.160)$$

3.3.2 Solução por Transformação de Boltzmann

Nesta seção, assim como na Seção 3.3.1, será apresentada a solução da equação da difusividade. Porém, utilizando outro método de resolução de equações diferenciais parciais, a Transformação de Boltzmann. De forma análoga, as soluções desta seção consideram que um reservatório circular (cilíndrico) seja produzido com vazão de fundo constante (na face da formação) através de um único poço centralizado e obedecem a mesma condição inicial e condições de contorno já mostradas anteriormente.

Reservatório Infinito - Regime Transiente

A solução apresentada aqui para este tipo de reservatório é a *solução da linha fonte* que pode ser vista em detalhes no Apêndice E. A partir desta solução supõe-se que o poço seja uma linha ($r_w \rightarrow 0$) para onde o fluido se desloca e através da qual ocorre a produção. Nessa situação deve-se partir da equação da difusividade para fluxo radial na sua forma inicial,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.161)$$

com o objetivo de se obter uma solução do tipo $p = f(r, t)$.

As condições a seguir são utilizadas para a solução da equação da difusividade desta seção em termos dimensionais:

Condição inicial (C.I):

$$p(r, 0) = p_i, r > 0 \quad (3.162)$$

É a condição de pressão inicial uniforme e igual a p_i em todo o meio poroso, a menos do ponto de coordenada $r = 0$. Para que tenha início o fluxo é necessária uma alteração na pressão nesse ponto no instante $t = 0$.

Condição de contorno externa (C.C.E):

$$\lim_{r \rightarrow \infty} p(r, t) = p_i \quad (3.163)$$

Esta condição estabelece que o reservatório é infinito, ou seja, qualquer que seja o tempo de produção (ou de injeção), sempre haverá um ponto do reservatório em que a pressão é a original.

Condição de contorno interna (C.C.I):

A condição de contorno interna estabelece a imposição de que a solução seja desenvolvida considerando a vazão no poço constante. A expressão que define essa condição é obtida a partir da equação de Darcy:

$$u_r = -\frac{q}{A} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (3.164)$$

onde:

$$A = 2\pi r h \quad (3.165)$$

Substituindo a Eq. (3.165) na Eq. (3.164) tem-se:

$$\frac{q}{2\pi r h} = \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (3.166)$$

de onde obtém-se:

$$r \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{q\mu}{2\pi k h} \quad (3.167)$$

Para a vazão no poço q_w constante, a condição de contorno interna torna-se então:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{q_w \mu}{2\pi k h}, t > 0 \quad (3.168)$$

Para a solução da Eq. (3.161) será feita uma substituição de variáveis utilizando a transformação de Boltzmann. Para isso, será definido um parâmetro X :

$$X = \frac{\phi \mu c_t r^2}{4kt} \quad (3.169)$$

Aplicando a regra da cadeia à equação da difusividade, tem-se:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial X} \left(r \frac{\partial p}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial r} \right) \frac{\partial X}{\partial r} = \frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial t} \quad (3.170)$$

Porém:

$$\frac{\partial X}{\partial r} = \frac{\phi \mu c_t r}{2kt} \quad (3.171)$$

e

$$\frac{\partial X}{\partial t} = -\frac{\phi \mu c_t r^2}{4kt^2} \quad (3.172)$$

Então:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\phi \mu c_t r^2}{2kt} \frac{\partial p}{\partial X} \right) \frac{\phi \mu c_t r}{2kt} = \frac{\phi \mu c_t}{k} \left(-\frac{\phi \mu c_t r^2}{4kt^2} \right) \frac{\partial p}{\partial X} \quad (3.173)$$

cujas simplificação resulta que:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\phi \mu c_t r^2}{4kt} \frac{\partial p}{\partial X} \right) = \left(-\frac{\phi \mu c_t r^2}{4kt} \right) \frac{\partial p}{\partial X} \quad (3.174)$$

Substituindo a Eq. (3.169) na Eq. (3.174) obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(X \frac{\partial p}{\partial X} \right) = -X \frac{\partial p}{\partial X}, \quad (3.175)$$

que ainda pode ser desenvolvida através da regra do produto como:

$$X \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial p}{\partial X} \right) + \frac{\partial p}{\partial X} = -X \frac{\partial p}{\partial X} \quad (3.176)$$

Fazendo $\partial p / \partial X = Y$:

$$X \frac{\partial Y}{\partial X} + Y = -XY \quad (3.177)$$

Como Y é uma função apenas de X , o termo $\partial Y/\partial X$ é substituído por dY/dX na Eq. (3.177), que após ser rearrumada resulta em:

$$\frac{dY}{Y} = -\frac{dX}{X} - dX, \quad (3.178)$$

cujas integração produz:

$$\int \frac{dY}{Y} = -\int \frac{dX}{X} - \int dX + C_1 \quad (3.179)$$

ou:

$$\ln Y = -\ln X - X + C_1 \quad (3.180)$$

de onde se obtém o valor de Y :

$$Y = C \frac{e^{-x}}{X} \quad (3.181)$$

e o valor de C :

$$C = e^{C_1} \quad (3.182)$$

Substituindo Y por dp/dX na Eq. (3.181) e explicitando dp :

$$dp = C \frac{e^{-x}}{X} dX \quad (3.183)$$

De acordo com a condição de contorno externa, em termos dimensionais (Eq. (3.163)), quando $r \rightarrow \infty$, $p \rightarrow p_i$ e de acordo com a condição inicial (Eq. (3.162)), quando $t = 0$, $p = p_i$. Nas duas condições, isto é, tanto para $t = 0$, como para $r \rightarrow \infty$, $X \rightarrow \infty$ e $p = p_i$. Integrando portanto a Eq. (3.183):

$$\int_p^{p_i} dp = C \int_X^\infty \frac{e^{-x}}{X} dX \quad (3.184)$$

resulta em:

$$p_i - p = C \int_X^\infty \frac{e^{-x}}{X} dX \quad (3.185)$$

onde:

$$\int_X^\infty \frac{e^{-x}}{X} dX = -E_i(-X) = E_i(X) \quad (3.186)$$

A Eq. (3.186) é formada pela *função integral exponencial* já discutida anteriormente e que é apresentada no Apêndice A. Assim:

$$p_i - p = -CE_i(-X) \quad (3.187)$$

A constante C pode ser obtida a partir da condição de contorno interna, Eq. (3.168):

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \lim_{X \rightarrow 0} \left(r \frac{\partial p}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial r} \right) = \frac{q_w \mu}{2\pi k h} \quad (3.188)$$

Porém, substituindo o termo $\partial X/\partial r$ pela Eq. (3.171) pode-se escrever que:

$$r \frac{\partial p}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial X} \frac{\phi \mu c_t r^2}{2kt} = 2X \frac{\partial p}{\partial X} \quad (3.189)$$

Mas da Eq. (3.183) pode-se tirar que:

$$\frac{\partial p}{\partial X} = C \frac{e^{-X}}{X} \quad (3.190)$$

Então, substituindo a Eq. (3.190) na Eq. (3.189) e o resultado dessa substituição na Eq. (3.188) obtém-se:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \lim_{X \rightarrow 0} (2Ce^{-X}) = \frac{q_w \mu}{2\pi k h} \quad (3.191)$$

de onde conclui-se que:

$$C = \frac{q_w \mu}{4\pi k h} \quad (3.192)$$

Substituindo a Eq. (3.192) na Eq. (3.187) e explicitando p obtém-se:

$$p(r, t) = p_i + \frac{q_w \mu}{2\pi k h} \left[\frac{1}{2} E_i(-X) \right], t > 0 \quad (3.193)$$

onde:

$$X = \frac{\phi \mu c_t r^2}{4kt}. \quad (3.194)$$

Logo, tem-se:

$$p(r, t) = p_i + \frac{q_w \mu}{2\pi k h} \left[\frac{1}{2} E_i \left(-\frac{\phi \mu c_t r^2}{4kt} \right) \right]. \quad (3.195)$$

Como $-E_i(-X) = E_i(X)$, a solução pode ainda ser escrita como:

$$p(r, t) = p_i - \frac{q_w \mu}{2\pi k h} \left[\frac{1}{2} E_i \left(\frac{\phi \mu c_t r^2}{4kt} \right) \right] \quad (3.196)$$

A Eq. (3.196) é a solução da equação da difusividade para um reservatório que se comporta como se fosse infinito, produzindo com uma vazão constante através de um único poço, quando se utiliza o modelo da fonte linear. Com essa equação pode-se calcular a pressão em qualquer ponto do reservatório e a qualquer tempo.

Usando as variáveis adimensionais definidas anteriormente, resulta na expressão:

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{1}{2} E_i \left(\frac{r_D^2}{4t_D} \right) \quad (3.197)$$

A Figura 3.8 apresenta o comportamento da pressão em um meio poroso com fluxo radial, produzindo em regime transiente. Como se pode observar, a pressão varia de ponto a ponto e em cada ponto varia com o tempo.

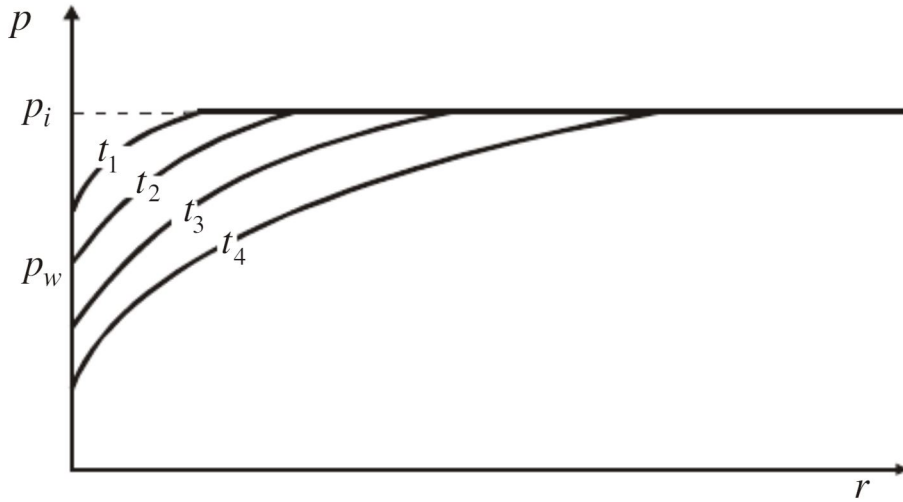


Figura 3.8: Comportamento da pressão durante fluxo transiente sistema radial (Rosa et al., 2006).

Conforme dito anteriormente, para pequenos valores do argumento, a função integral exponencial pode ser aproximada (Abramowitz & Stegun, 1964) e essa aproximação apresenta erro menor do que 1% para $X < 0,025$. Assim, chega-se a equação da pressão:

$$p(r, t) = p_i - \frac{q_w \mu}{2\pi k h} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{4kt}{\phi \mu c_t r^2} \right) \right] \quad (3.198)$$

ou em variáveis adimensionais:

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4t_D}{\gamma r_D^2} \right) \quad (3.199)$$

De uma maneira geral, a aproximação dada pela Eq. (3.198) pode ser utilizada para o cálculo da pressão no poço, já que nesse ponto normalmente é satisfeita a condição:

$$X = \frac{\phi \mu c_t r^2}{4kt} < 0,025 \quad (3.200)$$

para pequenos valores de tempo. Então:

$$p_w(t) = p_i - \frac{q_w \mu}{2\pi k h} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{4kt}{\phi \mu c_t r_w^2} \right) \right] \quad (3.201)$$

ou em variáveis adimensionais:

$$p_{wD}(t_D) \equiv p_D(r_D = 1, t_D) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4t_D}{\gamma} \right) \quad (3.202)$$

Substituindo o valor de γ na Eq. (3.202) essa expressão ainda pode ser escrita como:

$$p_{wD}(t_D) = \frac{1}{2} (\ln t_D + 0,80907) \quad (3.203)$$

Reservatório com Manutenção de Pressão - Regime Permanente

As equações para regime permanente, apresentadas neste item, descrevem o movimento do fluido em um meio poroso cilíndrico, conforme ilustra a Figura 3.9. Esse meio poroso recebe uma alimentação externa

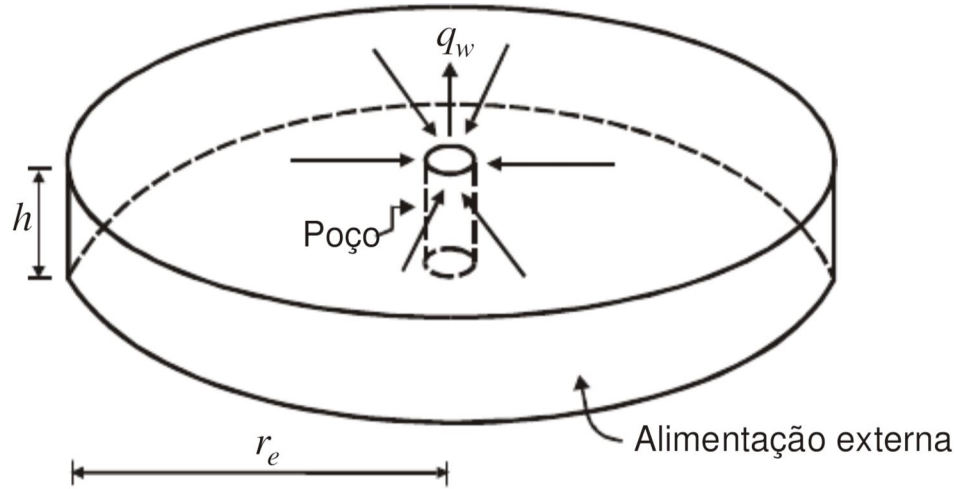


Figura 3.9: Fluxo radial permanente (Rosa et al., 2006).

contínua e constante, de tal maneira que o fluido produzido através do poço é repostado simultaneamente através da fronteira externa.

Devido a essa alimentação externa, a vazão permanece constante no espaço e no tempo e a pressão em cada ponto não varia com o tempo. Assim, o lado direito da equação da difusividade hidráulica fica igual a zero, ou seja:

$$\frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (3.204)$$

Desta forma a equação fica com termos que só dependem de r , e a solução se dá por uma expressão do tipo $p(r)$. Então:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dp}{dr} \right) = 0, \quad (3.205)$$

com as condições de contorno:

$$\begin{cases} r = r_w \Rightarrow p(r_w) = p_w \\ r = r_e \Rightarrow p(r_e) = p_e \end{cases} \quad (3.206)$$

A Eq. (3.205) pode ser simplificada resultando em:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dp}{dr} \right) = 0 \quad (3.207)$$

Cuja solução se dá por

$$\frac{dp}{dr} = C_1 \quad (3.208)$$

de onde obtém-se:

$$dp = C_1 \frac{dr}{r} \quad (3.209)$$

Integrando a Eq. (3.209) chega-se a uma expressão da pressão em função de r :

$$p(r) = C_1 \ln r + C_2 \quad (3.210)$$

A substituição das condições de contorno da Eq. (3.206), na Eq. (3.210) resulta no sistema a seguir:

$$\begin{cases} p_w = C_1 \ln r_w + C_2 \\ p_e = C_1 \ln r_e + C_2 \end{cases} \quad (3.211)$$

de onde podem ser determinadas as constantes:

$$C_1 = \frac{p_e - p_w}{\ln(r_e/r_w)} \quad (3.212)$$

e

$$C_2 = \frac{p_e + p_w}{2} - \frac{p_e - p_w}{2 \ln(r_e/r_w)} \ln(r_e r_w) \quad (3.213)$$

Por fim, ao substituir as constantes C_1 e C_2 na Eq. (3.210) obtém-se a solução da equação da difusividade para o fluxo radial em regime permanente:

$$p(r) = \frac{p_e - p_w}{\ln(r_e/r_w)} \ln r + \frac{p_e + p_w}{2} - \frac{p_e - p_w}{2 \ln(r_e/r_w)} \ln(r_e r_w) \quad (3.214)$$

Ou de forma simplificada:

$$p(r) = p_w + \frac{p_e - p_w}{\ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right)} \ln\left(\frac{r}{r_w}\right) \quad (3.215)$$

A Eq. (3.215) é uma expressão que permite o cálculo da pressão em qualquer ponto dentro do meio poroso. Em cada ponto a pressão é constante com o tempo de produção. A Figura 3.10 apresenta um diagrama de pressão versus distância para o fluxo radial em regime permanente. Pode-se observar que a perda de carga maior ocorre nas proximidades do poço, onde a área aberta ao fluxo é menor e a velocidade é maior.

A Eq. (3.215) pode ser expressa também em termos de vazão. Sabendo que a velocidade aparente em um raio qualquer é dada pelo quociente entre a vazão e a área aberta ao fluxo correspondente a esse raio, pode-se escrever:

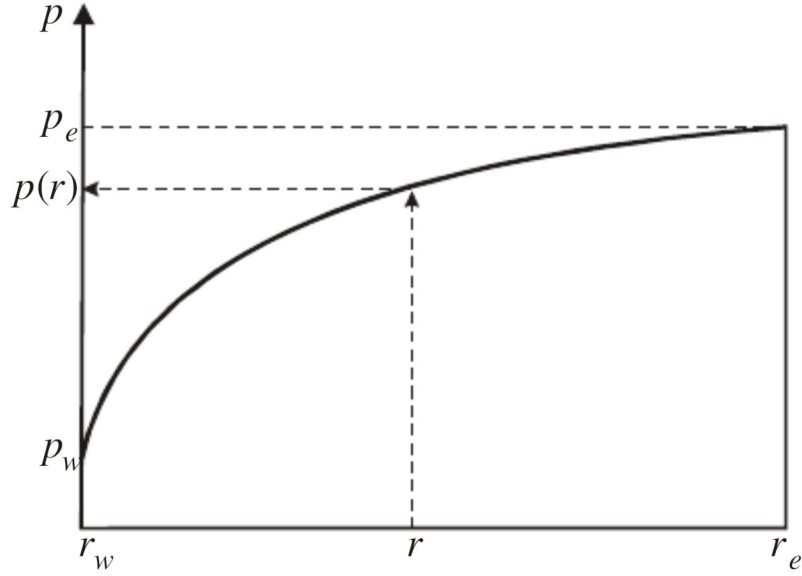


Figura 3.10: Comportamento da pressão em um sistema radial com fluxo permanente (Rosa et al., 2006).

$$u_r = -\frac{q}{2\pi r h} \quad (3.216)$$

O sinal negativo é introduzido para tornar a vazão de produção positiva. Como o fluxo é permanente, a vazão é a mesma em qualquer ponto, isto é, $q = q_w$. Assim,

$$u_r = -\frac{q_w}{2\pi r h} \quad (3.217)$$

A velocidade pode ser dada também pela equação de Darcy:

$$u_r = -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dr} \quad (3.218)$$

Igualando as Eqs. (3.217) e (3.218):

$$\frac{q_w}{2\pi r h} = \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dr} \quad (3.219)$$

Derivando a Eq. (3.215), é possível obter a variação da pressão com a distância:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{p_e - p_w}{\ln(r_e/r_w)} \frac{1}{r} \quad (3.220)$$

Substituindo a Eq. (3.220) na Eq. (3.219) obtém-se:

$$\frac{p_e - p_w}{\ln(r_e/r_w)} = \frac{q_w \mu}{2\pi k h} \quad (3.221)$$

E substituindo a Eq. (3.221) na Eq. (3.215) chega-se a uma expressão para $p(r)$ em termos da vazão do poço e das propriedades da rocha e do fluido:

$$p(r) = p_w + \frac{q_w \mu}{2\pi k h} \ln\left(\frac{r}{r_w}\right) \quad (3.222)$$

Fazendo $r = r_e$ e $p(r = r_e) = p_e$ na Eq. (3.222) chega-se a seguinte expressão da vazão:

$$q_w = \frac{2\pi k h (p_e - p_w)}{\mu \ln(r_e/r_w)} \quad (3.223)$$

A Eq. (3.223) ainda pode ser escrita de forma mais compacta como:

$$q_w = \frac{2\pi kh}{\mu \ln(r_e/r_w)} \Delta p \quad (3.224)$$

Escrevendo a queda de pressão adimensional na face $r = r_w$ como:

$$p_{wD} = \frac{2\pi kh}{q_w \mu} \Delta p, \quad (3.225)$$

a solução dada pela Eq. (3.224) pode ser expressa por:

$$p_{wD} = \ln(r_e/r_w) \quad (3.226)$$

ou

$$p_{wD} = \ln r_{eD} \quad (3.227)$$

Assim, a Eq. (3.223) pode ser escrita em outros sistemas de unidades.

Reservatório com Fronteira Selada - Regime Pseudopermanente

Para a dedução das equações para fluxo radial, regime pseudopermanente, tomou-se um meio poroso cilíndrico de altura h e com a lateral externa selada, conforme o esquema mostrado na Figura 3.11.

Como não existe alimentação externa, a produção vai acontecer em decorrência da expansão do fluido e da diminuição do volume poroso.

Assim como no caso do fluxo linear, o ponto de partida é a equação da compressibilidade:

$$c_t = -\frac{1}{V_p} \frac{\partial V}{\partial p} \quad (3.228)$$

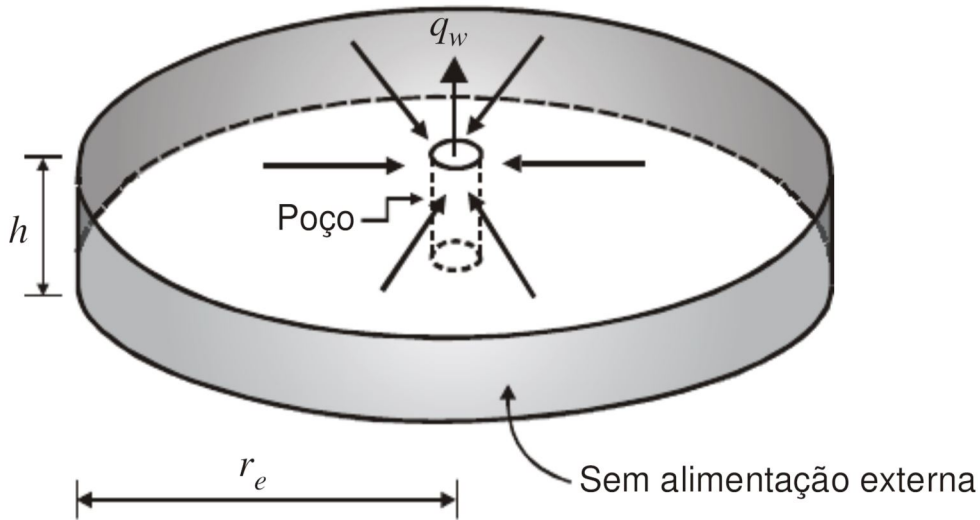


Figura 3.11: Fluxo radial pseudopermanente com limite externo selado (Rosa et al., 2006).

Se desprezarmos o raio do poço, o volume poroso é dado pela expressão:

$$V_p = \pi r_e^2 h \phi \quad (3.229)$$

Substituindo a Eq. (3.229) na Eq. (3.228) e derivando em relação ao tempo obtém-se:

$$c_t \pi r_e^2 h \phi \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial t} \quad (3.230)$$

Fazendo $(\partial V/\partial t)$ igual q_w , a vazão constante no poço, e isolando a derivada da pressão em relação ao tempo, obtém-se:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial q_w}{\partial c_t \pi r_e^2 h \phi} = \text{constante} \quad (3.231)$$

A substituição da Eq. (3.231) na Eq. (3.89) resulta em:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = -\frac{q_w \mu}{k \pi r_e^2 h} \quad (3.232)$$

As condições de contorno para o regime de fluxo radial pseudopermanente são:

$$\begin{cases} r = r_w \Rightarrow p(r) = p_w \\ r = r_e \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \end{cases} \quad (3.233)$$

Definindo-se:

$$r \frac{\partial p}{\partial r} = Y \quad (3.234)$$

tem-se:

$$\frac{\partial Y}{\partial r} = -\frac{q_w \mu}{k \pi r_e^2 h} r \quad (3.235)$$

cuja integração resulta em:

$$Y = -\frac{q_w \mu}{2k \pi r_e^2 h} r^2 + C \quad (3.236)$$

Aplicando a condição de contorno externa (Eq. (3.233)) à Eq. (3.236), ou seja:

$$r = r_e \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \Rightarrow r \frac{\partial p}{\partial r} \equiv Y = 0 \quad (3.237)$$

obtém-se:

$$0 = -\frac{q_w \mu}{2k \pi r_e^2 h} r_e^2 + C \Rightarrow C = \frac{q_w \mu}{2k \pi h} \quad (3.238)$$

Então, a partir da Eq. (3.236) pode-se escrever que:

$$r \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{q_w \mu}{2k \pi r_e^2 h} r^2 + \frac{q_w \mu}{2k \pi h} \quad (3.239)$$

e

$$\partial p = -\frac{q_w \mu}{2k \pi r_e^2 h} r \partial r + \frac{q_w \mu}{2k \pi h} \frac{1}{r} \partial r \quad (3.240)$$

Aplicando a integral definida de um ponto do poço e um ponto qualquer do meio poroso na Eq. (3.240) obtém-se a expressão:

$$\int_{p_w}^p \partial p = -\frac{q_w \mu}{2k \pi r_e^2 h} \int_{r_w}^r r \partial r + \frac{q_w \mu}{2k \pi h} \int_{r_w}^r \frac{\partial r}{r}, \quad (3.241)$$

que resulta em:

$$p - p_w = -\frac{q_w \mu}{2k \pi h} \left[\frac{r^2}{2r_e^2} - \frac{r_w^2}{2r_e^2} - \ln \left(\frac{r}{r_w} \right) \right] \quad (3.242)$$

Como o raio do poço é muito menor que o o raio do reservatório, tem-se:

$$p - p_w = -\frac{q_w \mu}{2k \pi h} \left[\frac{r^2}{2r_e^2} - \cancel{\frac{r_w^2}{2r_e^2}} - \ln \left(\frac{r}{r_w} \right) \right] \quad (3.243)$$

que pode ser rescrita produzindo:

$$p(r) = p_w + \frac{q_w \mu}{2k\pi h} \left[\ln\left(\frac{r}{r_w}\right) - \frac{r^2}{2r_e^2} \right]. \quad (3.244)$$

É possível obter uma equação que relacione a pressão no poço e o tempo de produção. O meio poroso, que inicialmente tinha uma pressão p_i , ao produzir durante um período de tempo t tem a sua pressão média reduzida para um valor \bar{p} , que pode ser calculada por meio da equação da compressibilidade:

$$c_t = -\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta p} \quad (3.245)$$

onde:

$$\Delta V = q_w t \quad (3.246)$$

é a produção acumulada de fluido,

$$V = V_p = \pi r_e^2 h \phi \quad (3.247)$$

é o volume de fluido existente no reservatório, igual ao volume poroso, e

$$\Delta p = \bar{p} - p_i \quad (3.248)$$

é a variação da pressão média proveniente da produção. Desta forma,

$$\bar{p} = p_i - \frac{q_w t}{c_t \pi r_e^2 h \phi} \quad (3.249)$$

A pressão média pode ser calculada também a partir da equação da pressão, através de uma média ponderada:

$$\bar{p} = \frac{\int_{r_w}^{r_e} p dV}{\int_{r_w}^{r_e} dV} \quad (3.250)$$

onde $dV = 2\pi r(dr)h\phi$ e a pressão p é dada pela Eq. (3.244).

O resultado da Eq. (3.250) é:

$$\bar{p} = p_w + \frac{q_w \mu}{2\pi k h} \left[\ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right) - \frac{3}{4} \right] \quad (3.251)$$

Igualando as Eqs. (3.249) e (3.251) e explicitando-se p_w , tem-se:

$$p_w(t) = p_i - \frac{q_w \mu}{2\pi k h} \left[\frac{2kt}{\phi \mu c_t r_e^2} \ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right) - \frac{3}{4} \right] \quad (3.252)$$

Combinando as Eqs. (3.244) e (3.252) pode-se escrever uma equação para o cálculo da distribuição de pressão no meio poroso como uma função do tempo:

$$p(r, t) = p_i - \frac{q_w \mu}{2\pi k h} \left[\frac{2kt}{\phi \mu c_t r_e^2} - \ln\left(\frac{r}{r_w}\right) + \frac{r^2}{2r_e^2} + \ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right) - \frac{3}{4} \right] \quad (3.253)$$

Em termos adimensionais, a Eq. (3.253) pode ser escrita de forma compacta por:

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{2t_D}{r_{eD}^2} - \ln r_D + \frac{1}{2} \left(\frac{r_D}{r_{eD}} \right)^2 + \ln r_{eD} - \frac{3}{4} \quad (3.254)$$

A Figura 3.12 apresenta diagramas de pressão versus distância em um sistema sujeito ao fluxo radial, regime pseudopermanente. Cada curva é a representação da Eq. (3.253) para um tempo diferente. Uma das características dessas curvas é que elas são horizontais no ponto $r = r_e$, ou seja, as suas inclinações são nulas no limite externo do reservatório, conforme preconiza a condição de contorno externa apresentada na Eq. (3.233). Essa condição de contorno externa representa o fato de que, como o reservatório é selado (limitado e sem alimentação externa), não há fluxo no limite externo, o que requer, de acordo com a lei de Darcy, que o gradiente de pressão seja nulo.

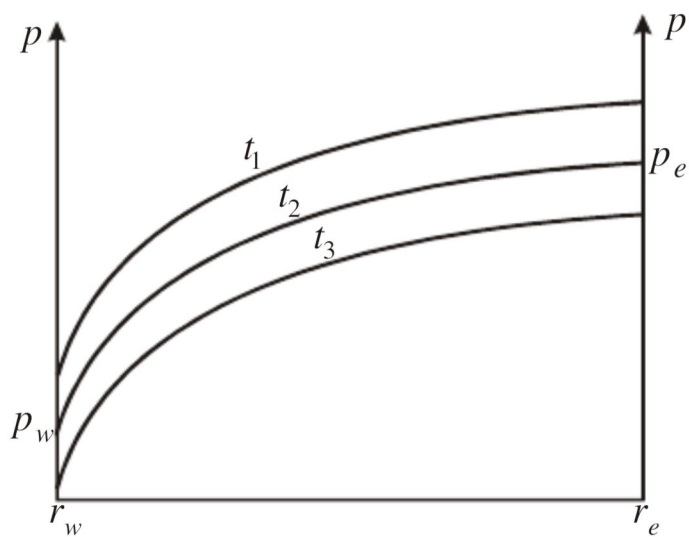


Figura 3.12: Distribuição de pressão em um sistema radial com fluxo pseudopermanente (Rosa et al., 2006).

Referências

ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, 1964. (Applied mathematics series). ISBN 9780486158242.

Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=MtU8uP7XMvoC>>.

BIRD, R.; STEWART, W.; LIGHTFOOT, E. *Transport Phenomena*. Wiley, 2007. (Wiley International edition). ISBN 9780470115398.

Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=L5FnN1IaGfcC>>.

BOURDAROT, G. *Well Testing: Interpretation Methods*. Editions Technip, 1998. (Fundamentals of Exploration and Production Series). ISBN 9782710811015.

Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=UdJUFD1lzIsC>>.

CARSLAW, H. S.; JAEGER, J. C. *Conduction of Heat in Solids* - Oxford University Press, USA (1959). ISBN 9780198533689.

Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=ySRRAAAAMAAJ&redir_esc=y>

DARCY, H. Les fontaines publiques de la ville de dijon. *Dalmont*, v. 1, p. 10, 1856.

EARLOUGHER, R.C. *Advances in Well Test Analysis*. Henry L. Doherty Memorial Fund of AIME, Society of Petroleum Engineers, 1977. (SPE Textbook Series). ISBN 9780895202048.

Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=s4FUQgAACAAJ>>

LAKE, L. *Enhanced Oil Recovery*. Prentice Hall, 1989. ISBN 9780132816014.

Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=nm5MAQAATAAJ>>.

ROSA, A.; CARVALHO, R. de S.; XAVIER, J. *Engenharia de Reservatórios de Petróleo*. Interciência, 2006. ISBN 9788571931350.

Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=aSUNAQAACAAJ>>.

PETROBRAS. *Análise de Testes de Poços*, [19-?].

STEHFEST, H.: Algorithm 386, numerical inversion of Laplace Transforms - D5. *Communications of the ACM*, Association for Computing Machinery, v. 13, n. 10, p. 624, 1970. ISSN 0001-0782.

Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1145/355598.362787>>

TOWLER, B. *Fundamental Principles of Reservoir Engineering*. Henry L. Doherty Memorial Fund of AIME, Society of Petroleum Engineers, 2002. (SPE Textbook Series). ISBN 9781555630928.

Disponível em <<https://books.google.com.br/books?id=Ro4QAQAAMAAJ>>

VAN EVERDINGEN, A. F.; HURST, W.: The Application of the Laplace transformation to flow problems in reservoirs, 1949. AIME, 186, 305-324.

Disponível em:

<<https://onepetro.org/JPT/article/1/12/305/161923/The-Application-of-the-Laplace-Transformation-to>>

APÊNDICE

Apêndice A

Função Exponencial Integral

A função exponencial integral é definida por:

$$E_i(x) = - \int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (\text{A.1})$$

Para $x > 0$ também pode ser escrita como:

$$E_i(-x) = - \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (\text{A.2})$$

Esta função pode ser expandida em uma série de potência (para pequenos valores de x) ou em uma série assintótica (para grandes valores de x), dadas respectivamente por:

$$E_i(x) = \gamma + \ln x + \frac{x}{1 \cdot 1!} + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \dots \quad (\text{A.3})$$

e

$$E_i(x) \approx \frac{e^x}{x} \left(1 + \frac{1!}{x} + \frac{2!}{x^2} + \dots \right) \quad (\text{A.4})$$

onde γ é a constante de Euler ($\gamma = 0,5772156649$). Observa-se que os termos de maior ordem da Eq. (A.3) forem desprezados, a função exponencial integral pode ser aproximada pela Eq. (A.5)

$$E_i(x) \approx \gamma + \ln x \quad (\text{A.5})$$

A Figura A.1 mostra uma comparação da função exponencial integral e da sua aproximação logarítmica. A partir da Tabela A.1, é possível perceber que para pequenos argumentos a aproximação logarítmica é satisfatória.

Tabela A.1: Erros associados a aproximação da função exponencial integral pela aproximação logarítmica

x	$E_i(x)$	$E_i(-x)$	$\ln(x) + \gamma$	$ \ln(x) + \gamma - E_i(x) $	$ \ln(x) + \gamma - E_i(-x) $
0.05	-2.36788	-2.46790	-2.41852	0.05063	0.04938
0.10	-1.62281	-1.82292	-1.72537	0.10256	0.09755
0.15	-1.16409	-1.46446	-1.31990	0.15582	0.14456
0.20	-0.82176	-1.22265	-1.03222	0.21046	0.19043
0.25	-0.54254	-1.04428	-0.80908	0.26654	0.23520
0.30	-0.30267	-0.90568	-0.62676	0.32409	0.27892
0.35	-0.08943	-0.79422	-0.47261	0.38317	0.32160

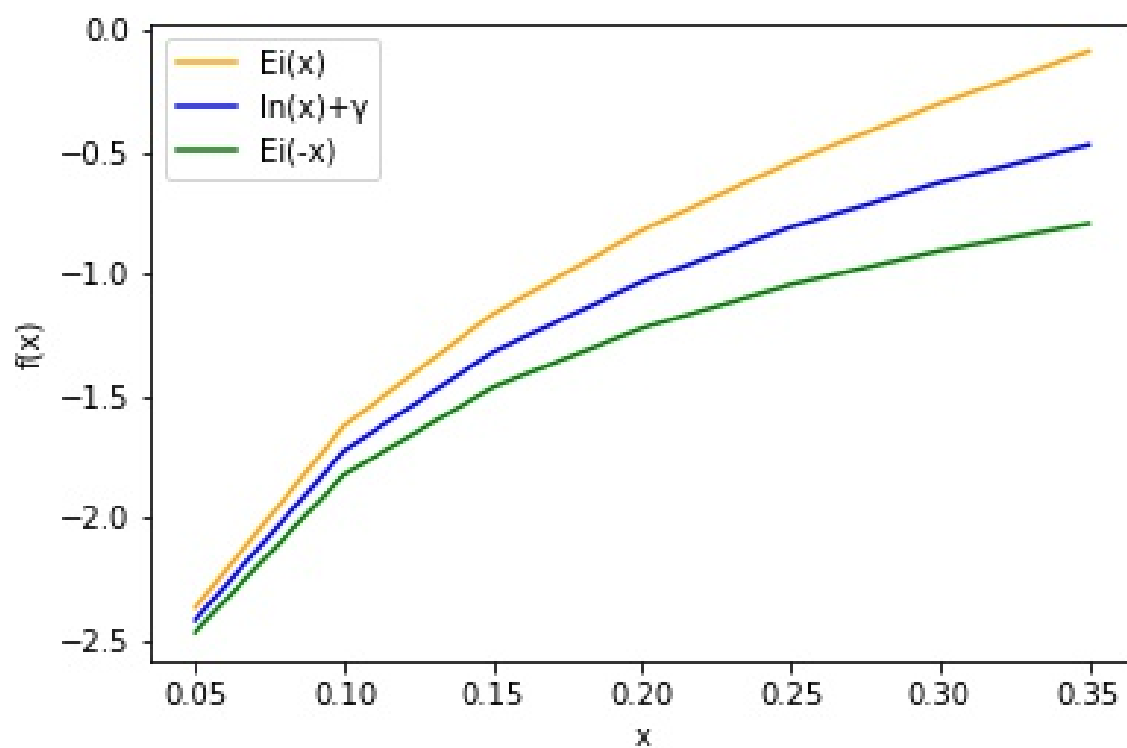


Figura A.1: Comparação entre a função exponencial integral com argumento positivo e negativo com a aproximação logarítmica da função.

Apêndice B

Transformada de Laplace

Definição: A transformada de Laplace da função $F(t)$, representada por $\mathcal{L}\{F(t)\}$, resulta na função $\bar{F}(u)$, definida como:

$$\bar{F}(u) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-ut} F(t) dt \quad (\text{B.1})$$

onde $F(t)$ é uma função da variável real t e u é uma variável (complexa) do campo de Laplace. A função $F(t)$ é chamada de função original e $\bar{F}(u)$ é a função imagem ou transformada da função original. No caso de duas variáveis a transformada é dada por:

$$\bar{F}(u, v) = \mathcal{L}\{F(x, y)\} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-ux-vy} F(x, y) dx dy \quad (\text{B.2})$$

A função unitária, utilizada nas operações seguintes, é definida como:

$$U(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Na tabela a seguir são apresentadas algumas das principais propriedades da transformada de Laplace e as transformadas de algumas das funções que foram utilizadas neste trabalho.

Tabela B.1: Transformadas de Laplace (Adaptado: Abramowitz & Stegun, 1964)

Transformadas de Laplace	
Função Original	Função Imagem
$F(t)$	$\int_0^\infty e^{-ut}F(t)dt = \bar{F}(u)$
$F'(t)$	$u\bar{F}(u) - F(0^+)$
$\frac{\partial F(x, t)}{\partial x}$	$\frac{d\bar{F}(x, u)}{dx}$
1	$\frac{1}{u}$
t	$\frac{1}{u^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{(u + a)}$
te^{-at}	$\frac{1}{(u + a)^2}$
$-\gamma - \ln t \ (\gamma = 0,577415665)$	$\frac{1}{u} \ln u$
$\frac{1}{2t} \exp\left(-\frac{k^2}{4t}\right)$	$K_0(k\sqrt{u}) \quad (k > 0)$
$\frac{1}{\sqrt{t^2 - k^2}} U(t - k)$	$K_0(ku) \quad (k > 0)$
$\frac{1}{k} \exp\left(-\frac{k^2}{4t}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{u}} K_1(k\sqrt{u}) \quad (k > 0)$

Apêndice C

Funções de Bessel

A equação diferencial ordinária do tipo:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \lambda y = 0 \quad (\text{C.1})$$

onde λ é uma constante, é uma forma especial da equação de Bessel. As soluções desta equação tomam a forma de séries. Uma solução é $I_0(\sqrt{\lambda}z)$ e é chamada de *função de Bessel modificada de 1.^a espécie e ordem zero*. A solução independente $K_0(\sqrt{\lambda}z)$ é chamada de *função de Bessel modificada de 2.^a espécie e ordem zero*. As séries das duas funções são, respectivamente:

$$I_0(z) = 1 + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^2 4^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n}}{(n!)^2} \quad (\text{C.2})$$

$$K_0(z) = - \left\{ \ln \left(\frac{e^{\gamma} z}{2} \right) I_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{2} \right)^{2n} \frac{1}{(n!)^2} \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right] \right\} \quad (\text{C.3})$$

onde $\gamma = 0,577215665$ (constante de Euler). Para pequenos valores de z , as Eqs. (C.2) e (C.3) se tornam:

$$I_0(z) \approx 1 + \frac{z^2}{2}; \quad \lim_{z \rightarrow 0} I_0(z) = 1 \quad (\text{C.4})$$

e

$$K_0(z) \approx -\ln \left(\frac{e^{\gamma} z}{2} \right). \quad (\text{C.5})$$

Para valores maiores de z , as Eqs. (C.2) e (B.3) se tornam:

$$I_0(z) \approx \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left[1 + \frac{1}{8z} + \frac{1 \cdot 3^2}{2!(8z)^2} + \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{3!(8z)^2} + \cdots \right] \quad (\text{C.6})$$

e

$$K_n(z) \approx \left(\frac{\pi}{2z} \right)^{1/2} e^{-z} \left[1 + \frac{4n^2 - 1}{8z} + \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 3^2)}{2!(8z)^2} + \cdots \right] \quad (\text{C.7})$$

Como $I_0(\sqrt{\lambda}z)$ e $K_0(\sqrt{\lambda}z)$ são soluções independentes da equação de Bessel modificada, Eq. (B.1), então a solução geral desta equação é dada por:

$$v(x) = AI_0(\sqrt{\lambda}z) + BK_0(\sqrt{\lambda}z) \quad (\text{C.8})$$

onde A e B são constantes a serem determinadas. No trato da Eq. (C.8) se faz necessário, eventualmente, o uso das derivadas das funções $I_0(\sqrt{\lambda}z)$ e $K_0(\sqrt{\lambda}z)$. De acordo com Abramowitz & Stegun, verificam-se duas propriedades em relação às funções de Bessel:

$$\frac{d}{dz} I_0(z) = I_1(z) \quad (\text{C.9})$$

e

$$\frac{d}{dz}K_0(z) = -K_1(z) \quad (\text{C.10})$$

Assim sendo, as funções de Bessel de 1.^a e 2.^a espécies e ordem 1 são definidas como:

$$I_1(z) = \frac{2z^2}{2^2} + \frac{4z^3}{2^2 4^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} \quad (\text{C.11})$$

e

$$K_1(z) = \ln\left(\frac{e^\gamma z}{2}\right) I_1(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n-1} \frac{n!}{(n!)^2} \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right]. \quad (\text{C.12})$$

Note que quando $z = 0$, $I_1(z) = 0$ e $zK_1(z) = 1$. Quando z tende para infinito, $K_1(z)$ é calculado pela Eq. (C.7).

Outras fórmulas recorrentes são:

$$z \frac{d}{dz} I_1(z) = z I_0(z) - I_1(z) \quad (\text{C.13})$$

e

$$z \frac{d}{dz} K_1(z) = -z K_0(z) - K_1(z) \quad (\text{C.14})$$

O comportamento das funções de Bessel é representado na Figura C.1

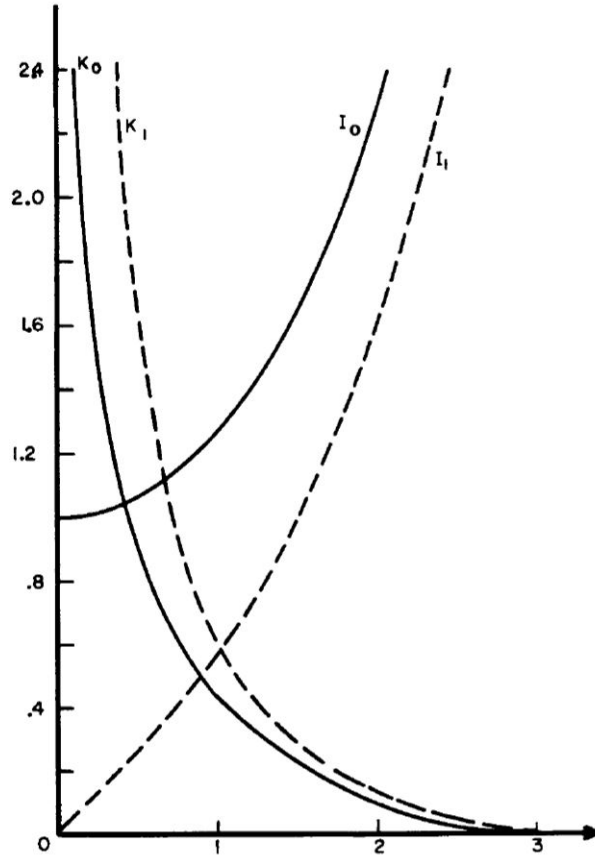


Figura C.1: Funções de Bessel modificadas I_0 , I_1 , K_0 e K_1 (Abramowitz & Stegun, 1964)

Apêndice D

Algoritmo de Stehfest

O algoritmo de Stehfest é frequentemente utilizado para calcular a inversão numérica do campo de Laplace para o campo real.

Dada a função $\bar{F}(u)$, transformada de Laplace de $F(t)$ em relação a t , o valor aproximado de $F(t_0)$ pode ser calculado conforme a Eq. (D.1):

$$F(t_0) \approx \frac{\ln 2}{t_0} \sum_{i=1}^n V_i \bar{F}\left(\frac{\ln 2}{t_0} i\right) \quad (\text{D.1})$$

onde os coeficientes de V_j são dados por:

$$V_i = (-1)^{i+n/2} \sum_{k=\text{int}[(i+1)/2]}^{\min(i, n/2)} \frac{k^{1+n/2} (2k)!}{(n/2 - k)! (k!)^2 (i - k)! (2k - i)!} \quad (\text{D.2})$$

sendo n par. Como se observa, os valores dos coeficientes V_i , dependem somente de n . Outra propriedade desses coeficientes é que $\sum_{i=1}^n V_i = 0$. O valor de n depende do número de dígitos da máquina, tipicamente $8 < n < 16$. A função $F(t)$ deve ser suave, sem oscilações rápidas. A tabela a seguir apresenta os valores dos coeficientes V_i para $n = 10$.

Tabela D.1: Valores dos coeficientes V_i para $n = 10$

i	V_i
1	0,0833...
2	-32,08333...
3	1279
4	-15623,666...
5	84244,1666...
6	-236957,5
7	375911,666...
8	-340071,666...
9	164062,5
10	-32812,5

Obs.: $\sum_{i=1}^{10} V_i = 0$

Apêndice E

Reservatório Infinito - Solução do Modelo da Linha Fonte

O *modelo da fonte linear ou linha fonte* considera um poço vertical de dimensões infinitesimais ($r_w \rightarrow 0$) produzindo com vazão de fundo constante em um reservatório infinito (sem efeitos de limites ou fronteiras). Seguindo as premissas citadas na Seção 3.1, o problema pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{EDP} : \frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} = \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \quad (\text{E.1})$$

$$\mathbf{CI} : p_D(r_D, t_D = 0) = 0, \quad (r_D > 0) \quad (\text{E.2})$$

$$\mathbf{CCE} : \lim_{r_D \rightarrow \infty} p_D(r_D, t_D) = 0, \quad (t_D > 0) \quad (\text{E.3})$$

$$\mathbf{CCI} : \lim_{r_D \rightarrow 0} \left(r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right) = -1, \quad (t_D > 0) \quad (\text{E.4})$$

onde $p_D = p_D(r_D, t_D)$. Assim como resolvido anteriormente, faz-se o uso da transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial e de contorno dado pelas Eqs. (E.1) a (E.4).

Aplicando-se a transformada de Laplace nas CCE e CCI, tem-se:

$$\mathbf{CCE} : \lim_{r_D \rightarrow \infty} \overline{p_D}(r_D, u) = 0 \quad (\text{E.5})$$

e

$$\mathbf{CCI} : \lim_{r_D \rightarrow 0} \left(r_D \frac{d\overline{p_D}}{dr_D} \right) = -\frac{1}{u}. \quad (\text{E.6})$$

Aplicando a CCE da Eq. (E.5) na solução geral do problema no campo de Laplace, Eq. (3.110), obtém-se:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} [AK_0(r_D\sqrt{u}) + BI_0(r_D\sqrt{u})] = 0 \quad (\text{E.7})$$

Como $K_0(\infty) \rightarrow 0$ e $I_0(\infty) \rightarrow \infty$, conforme pode ser visto no gráfico da Função de Bessel da Figura C.1, conclui-se que $B = 0$. Consequentemente, a solução geral resulta em:

$$\overline{p_D}(r_D, u) = AK_0(r_D\sqrt{u}) \quad (\text{E.8})$$

Para determinar a constante A , repete-se o procedimento aplicando desta vez, a CCI na solução geral do problema. Sabendo que $\frac{d}{dz} K_0(z) = -K_1(z)$ e $\lim_{z \rightarrow 0} [zK_1(z)] = 1$ (Abramowitz & Stegun, 1964), obtém-se:

$$\lim_{r_D \rightarrow 0} \left[r_D \frac{d}{dr_D} (AK_0(r_D\sqrt{u})) \right] = \lim_{r_D \rightarrow 0} [-Ar_D\sqrt{u}K_1(r_D\sqrt{u})] = -\frac{1}{u} \Rightarrow A = \frac{1}{u} \quad (\text{E.9})$$

Deste modo, no campo de Laplace a solução do problema da linha fonte se dá por:

$$\overline{p_D}(r_D, u) = \frac{K_0(r_D \sqrt{u})}{u} \quad (\text{E.10})$$

Para obter-se a solução no campo real, aplica-se a transformada inversa com as propriedades descritas no Apêndice B e deste modo:

$$p_D(r_D, t_D) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K_0(r_D \sqrt{u})}{u} \right\} = \int_0^{t_D} \frac{1}{2t'_D} \exp \left(-\frac{r_D^2}{4t'_D} \right) dt'_D \quad (\text{E.11})$$

onde t'_D é uma variável muda de integração. Fazendo a seguinte mudança de variável:

$$z = \frac{r_D^2}{4t'_D} \quad (\text{E.12})$$

tem-se que:

$$t'_D = \frac{r_D^2}{4z} \Rightarrow dt'_D = -\frac{r_D^2}{4z^2} dz \quad (\text{E.13})$$

e, por conta disso,

$$p_D(r_D, t_D) = -\frac{1}{2} \int_{\infty}^{\frac{r_D^2}{4t_D}} \frac{e^{-z}}{z} dz \quad (\text{E.14})$$

Por fim, invertendo os limites de integração, resulta em:

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{1}{2} \int_{\frac{r_D^2}{4t_D}}^{\infty} \frac{e^{-z}}{z} dz \quad (\text{E.15})$$

A partir da função exponencial integral é possível chegar a solução do problema:

$$p_D(r_D, t_D) = -\frac{1}{2} E_i \left(-\frac{r_D^2}{4t_D} \right) = \frac{1}{2} E_i \left(\frac{r_D^2}{4t_D} \right) \quad (\text{E.16})$$

A Eq. (E.16) fornece o valor da pressão adimensional (p_D) em qualquer ponto do reservatório (r_D) e em qualquer tempo (t_D). A Figura E.1 apresenta o gráfico da solução do modelo da linha fonte, dado pela Eq. (E.16).

De acordo com Abramowitz & Stegun, para pequenos argumentos a função integral exponencial pode ser aproximada por:

$$-E_i(-x) \approx -\ln(e^\gamma x) = -\ln(x) - 0,57722. \quad (\text{E.17})$$

O erro da aproximação logarítmica da função integral exponencial é menor do que 1% para $x < 0,0025$. Então, com erro menor que 1% a solução da linha fonte, dada pela Eq. (E.16), pode ser aproximada por:

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4t_D}{e^\gamma r_D^2} \right) \quad \text{para } t_D/r_D^2 > 10 \quad (\text{E.18})$$

A pressão calculada no ponto $r = r_w$ (ou $r_D = 1$, em termos adimensionais) representa a pressão no poço. Assim, pode-se escrever a pressão no poço como:

$$p_D(r_D = 1, t_D) \equiv p_{wD}(t_D) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4t_D}{e^\gamma} \right) \quad \text{para } t_D > 10 \quad (\text{E.19})$$

ou, de modo equivalente:

$$p_{wD}(t_D) = \frac{1}{2} (\ln t_D + 0,80907) \quad \text{para } t_D > 10 \quad (\text{E.20})$$

Em termos de variáveis reais:

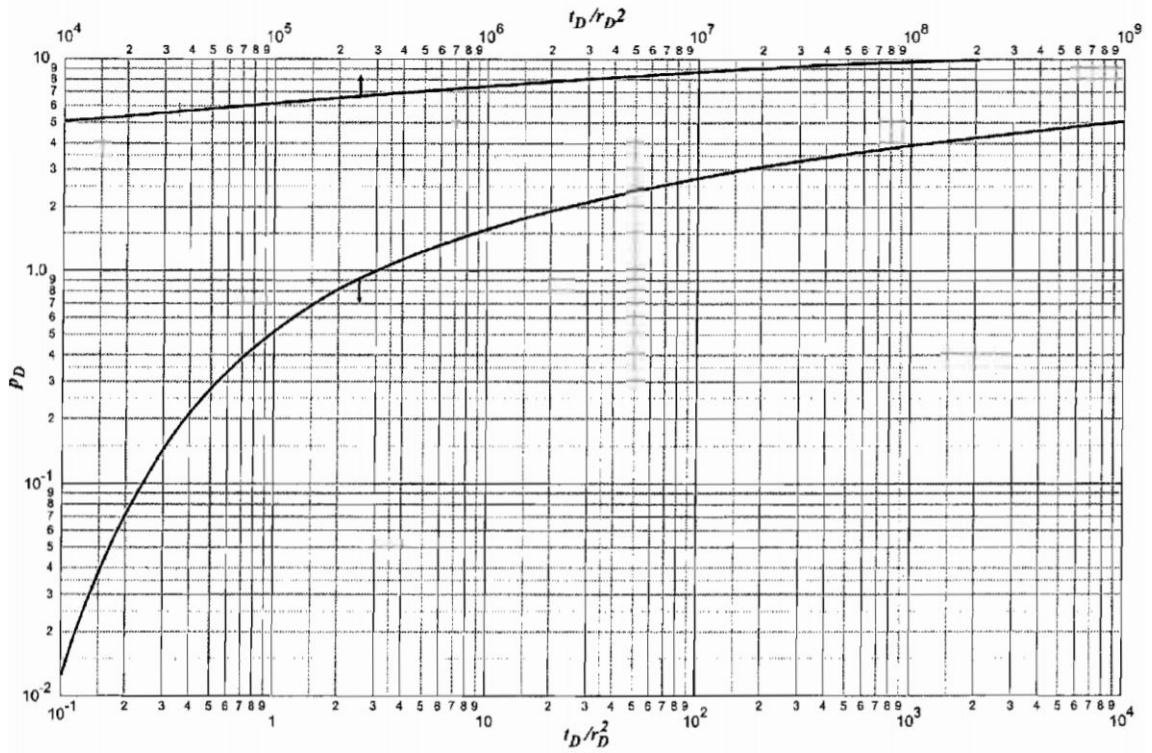


Figura E.1: Gráfico da solução do modelo da linha fonte em termos adimensionais (Retirada da apostila: *Análise de Testes de Poços* - Petrobras [19-?])

$$p_{wf}(t) = p_i - \frac{C_2 q B \mu}{k h} \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{4 C_1 k t}{e^\gamma \phi \mu c_t r_w^2} \right) \right] \quad \text{para} \quad \frac{\eta t}{r_w^2} > 10 \quad (\text{E.21})$$

Na prática, $t_D = 10$ corresponde a um tempo real da ordem de segundos. Desta forma, conclui-se que a aproximação logarítmica da função E_i , é sempre válida na prática para o cálculo da pressão no poço, independentemente do tempo de produção.