Equação da Conservação de Energia

A equação da conservação de energia adiciona à formulação uma variável dependente a mais, a temperatura. A definição para a equação de balanço de energia se dá por:

$$\{\text{Taxa de acúmulo de energia em V}\} = \{\text{Tava de energia que entra em V}\} + \{\text{Taxa de energia gerada em V} \tag{1}$$

onde V é um volume arbitrário.

Matematicamente, a Equação do balanço de energia pode ser reescrita na forma da primeira lei da termodinâmica para sistemas abertos:

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho U + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j |\overrightarrow{u_j}|^2 \right) + \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} \right] dV = \dot{W} \tag{2}$$

sendo $\frac{1}{2} \sum\limits_{j=1}^{N_p} \rho_j |\overrightarrow{u_j}|^2$ =termo que representa a energia cinética por unidade de volume total, ρU= concentração de energia, $\overrightarrow{E}$= fluxo e $\dot{W}$ =termo fonte e $\rho = é$ a massa específica global.

- **Fonte ($\dot{W}$)**

Este desenvolvimento é restrito a casos com ausência de fontes de aquecimento externas, logo, o termo $\dot{W}$é formado apenas por componentes de trabalho. Assim, serão consideradas apenas a taxa de trabalho realizada contra um campo de pressão $\dot{W}_{pv}$ e contra um campo gravitacional $\dot{W}_G$.Portanto, a taxa de trabalho realizada em um fluido em um volume arbitrário V é definida por:

$$\dot{W} = \dot{W}_{pv} + \dot{W}_G \tag{3}$$

Por definição, trabalho (W) é uma medida de energia transferida pela aplicação de uma força (F) ao longo de um deslocamento (d):

$$W = \overrightarrow{F} \text{ x } d \tag{4}$$

$$\Delta W = F \text{ x } u \tag{5}$$

$$P = \frac{F}{A} \tag{6}$$

sendo v= a velocidade do deslocamento, P= pressão exercida sob uma área A a partir de uma força F.

Isto posto, considerando um campo de fluxo multifásico e multicomponente atravensando ΔA, a partir da Equação 6 na Equação 5:

$$\Delta W_{pv} = -\sum_{j-1}^{N_p} P_j \Delta A \overrightarrow{n}.\overrightarrow{u_j} \tag{7}$$

Por conseguinte, pode-se concluir que $P_j \Delta A \overrightarrow{n}$ é a força exercida na superfície ΔA pela pressão na fase j. Além disso, o sinal negativo é adotado por convenção termodinâmica, visto que o trabalho realizado $(\Delta \dot{W}_{pv})$ em um elemento que passa pelo volume V deve ser positivo..

O trabalho pressão-volume total é dado pela soma da Equação 7 sobre todos os componentes da superfície, entretanto, pelo Teorema da Divergência, pode ser escrito como:

$$W_{pv} = -\int_V \sum_{j=1}^{N_p} \overrightarrow{\nabla}(\rho_j \overrightarrow{u_j}) dV \tag{8}$$

Já o trabalho contra a gravidade é calculado a partir do produto escalar entre a velocidade e o vetor de gravidade $\overrightarrow{g}$, logo, surge um sinal positivo na equação, uma vez que uma fase está fluindo contra a gravidade($\overrightarrow{u_j}\overrightarrow{g} < 0$):

$$W_G = \int_V \sum_{j=1}^{N_p} \overrightarrow{\nabla}(\rho_j \overrightarrow{u_j}\overrightarrow{g}) dV \tag{9}$$

Substituindo as Equações 9 e 8 na Equação 2:

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho U + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j |\overrightarrow{u_j}|^2 \right) + \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} + \sum_{j=1}^{N_p} \overrightarrow{\nabla}(\rho_j \overrightarrow{u_j}) - \sum_{j=1}^{N_p} \overrightarrow{\nabla}(\rho_j \overrightarrow{u_j}\overrightarrow{g}) \right] dV = 0 \tag{10}$$

Como o volume V é um volume arbitrário:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho U + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j |\overrightarrow{u_j}|^2 \right) + \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} + \sum_{j=1}^{N_p} \overrightarrow{\nabla}(\rho_j \overrightarrow{u_j}) - \sum_{j=1}^{N_p} \overrightarrow{\nabla}(\rho_j \overrightarrow{u_j}\overrightarrow{g}) = 0 \tag{11}$$

- **Fluxo de Energia**

O termo do fluxo de energia é composto pelas contribuições convectivas, condutividade térmica e radiação:

$$\overrightarrow{E} = \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j \overrightarrow{u_j} \left[U_j + \frac{1}{2} |u_j|^2 \right] + \overrightarrow{q_c} + \overrightarrow{q_r} \tag{12}$$

Nesse momento, será desprezados o termo referente a radiação e para o fluxo multifásico, o fluxo condutivo de calor será definido pela Lei de Fourier:

$$\overrightarrow{q_c} = -k_{T_t}\overrightarrow{\nabla}T \tag{13}$$

onde k_{T_t}é a condutividade térmica total e T a temperatura.

Substituindo as Equações 12 e 13 na Equação 11:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho U + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N_p}\rho_j|\overrightarrow{u_j}|^2\right) + \overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\sum_{j=1}^{N_p}\rho_j\overrightarrow{u_j}\left[U_j + \frac{1}{2}|u_j|^2\right]\right) - \overrightarrow{\nabla}\cdot\left(k_{T_t}\overrightarrow{\nabla}T\right) + \sum_{j=1}^{N_p}\overrightarrow{\nabla}(\rho_j\overrightarrow{u_j}) - \sum_{j=1}^{N_p}\overrightarrow{\nabla}(\rho_j\overrightarrow{u_j}\overrightarrow{g}) = \tag{14}$$

Somando o primeiro termo do fluxo por convecção e o primeiro termo do trabalho, a Equação 14 será reduzida a:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho U + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N_p}\rho_j|\overrightarrow{u_j}|^2\right) + \overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\sum_{j=1}^{N_p}\rho_j\overrightarrow{u_j}\left[H_j + \frac{1}{2}|u_j|^2\right]\right) - \overrightarrow{\nabla}\cdot\left(k_{T_t}\overrightarrow{\nabla}T\right) - \sum_{j=1}^{N_p}\overrightarrow{\nabla}(\rho_j\overrightarrow{u_j}\overrightarrow{g}) = 0 \tag{15}$$

sendo $H_j = U_j + p_j/\rho_j$a entalpia da fase j por unidade de massa j.

Substituindo o vetor gravitacional: $\overrightarrow{g} = -gD_z$na Equação 15:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho U + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N_p}\rho_j|\overrightarrow{u_j}|^2\right) + \overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\sum_{j=1}^{N_p}\rho_j\overrightarrow{u_j}\left[H_j + \frac{1}{2}|u_j|^2\right]\right) - \overrightarrow{\nabla}\cdot\left(k_{T_t}\overrightarrow{\nabla}T\right) + gD_z\overrightarrow{\nabla}\sum_{j=1}^{N_p}(\rho_j\overrightarrow{u_j}) = 0 \tag{16}$$

Lembrando a Equação da Difusividade:

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N_p}(\rho_j\overrightarrow{u_j}) \tag{17}$$

Substituindo a Equação 17 na Equação 16, conclui-se a Equação da Conservação de Energia:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho U + \phi\rho g D_z + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N_p}\rho_j|\overrightarrow{u_j}|^2\right) + \overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\sum_{j=1}^{N_p}\rho_j\overrightarrow{u_j}\left[H_j + \frac{1}{2}|u_j|^2\right]\right) - \overrightarrow{\nabla}\cdot\left(k_{T_t}\overrightarrow{\nabla}T\right) = 0 \tag{18}$$