

1 *Equação de Injeção de água quente*

Premissas:

1. Fluxo 1D;
2. Meio Poroso homogêneo;
3. Sistema Incompressível
4. Sem Dispersão;
5. Sem Adsorção;
6. Sem efeitos gravitacionais;
7. Sem efeitos capilares.
8. Sem energia cinética e potencial;
9. desconsiderando Trabalho;
10. Sem Difusão Térmica.

Dada a equação da conservação de massa:

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{N}_i - R_i = 0, i = 1, 2, \dots, N_c \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j S_j \omega_{ij} + (1 - \phi) \rho_s \omega_{is} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\sum_{j=1}^{N_p} (\rho_j \omega_{ij} \vec{u}_j - \phi \rho_j S_j \vec{K}_{ij} \cdot \vec{\nabla} \omega_{ij}) \right) =$$

$$\phi \sum_{j=1}^{N_p} S_j r_{ij} + (1 - \phi) r_{is}, \quad i=1, \dots, N_c \quad (1.2)$$

Com isso a equação se torna :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j S_j \omega_{ij} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\sum_{j=1}^{N_p} (\rho_j \omega_{ij} \vec{u}_j) \right) = 0, \quad i=1, \dots, N_c \quad (1.3)$$

Considerando um sistema de 2 fases, pode-se defini-lás como:

- j= 1, aquosa;
- j= 2, oleosa;.

Há dois componentes presentes, que não reagem e não se misturam:

- i = 1, água;
- i= 2, óleo;
- **Componente água:**

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_1 S_1 \omega_{11} + \phi \rho_2 S_2 \omega_{12}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_1 \omega_{11} \vec{u}_1 + \rho_2 \omega_{12} \vec{u}_2) = 0 \quad (1.4)$$

como não há troca de massa:

$$\omega_{11} = 1, \quad \omega_{12} = 0$$

então,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_1 S_1) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_1 \vec{u}_1) = 0 \quad (1.5)$$

Considerando o fluxo unidimensional, temos:

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} (\rho_1 S_1) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_1 \vec{u}_1) = 0 \quad (1.6)$$

- **Componente óleo:**

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_1 S_1 \omega_{21} + \phi \rho_2 S_2 \omega_{22}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_1 \omega_{21} \vec{u}_1 + \rho_2 \omega_{22} \vec{u}_2) = 0 \quad (1.7)$$

como não há troca de massa:

$$\omega_{21} = 0, \quad \omega_{22} = 1$$

então,

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} (\rho_2 S_2) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_2 \vec{u}_2) = 0 \quad (1.8)$$

Considerando o fluxo unidimensional, temos:

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} (\rho_2 S_2) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_2 \vec{u}_2) = 0 \quad (1.9)$$

onde, $\rho(T)$, $\vec{u} = \frac{q}{A} = -\frac{k k_r}{\mu} \frac{dP}{dx}$ e $\mu(T)$.

Dada a equação da energia:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho U + \phi \rho g D_z + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j |\vec{u}_j|^2 \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\sum_{j=1}^{N_p} \rho_j \vec{u}_j \left[H_j + \frac{1}{2} |u_j|^2 \right] \right) - \vec{\nabla} \cdot (k_{T_i} \vec{\nabla} T) = 0, \quad (1.10)$$

aplicando as premissa apresentadas no início da seção, a equação da energia pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho U) + \vec{\nabla} \cdot \left(\sum_{j=1}^{N_p} \rho_j \vec{u}_j H_j \right) = 0 \quad (1.11)$$

e como,

$$\rho U = \phi \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j S_j U_j + (1 - \phi) \rho_s U_s \quad (1.12)$$

a equação da energia pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi (\rho_1 S_1 U_1 + \rho_2 S_2 U_2) + (1 - \phi) \rho_s U_s]$$

$$+ \quad \vec{\nabla} \cdot (\rho_1 \vec{u}_1 H_1 + \rho_2 \vec{u}_2 H_2) \quad = \quad 0 \quad (1.13)$$

Negligenciando o trabalho de pressão/volume, as entalpias serão iguais às energias internas ($\hat{H} = \hat{U} + \frac{p}{\rho_j}$) (uma boa suposição para líquidos e sólidos) e assumindo volume poroso incompressível:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\phi (\rho_1 S_1 H_1 + \rho_2 S_2 H_2) + (1 - \phi) \rho_s H_s] \\ + \vec{\nabla} \cdot (\rho_1 \vec{u}_1 H_1 + \rho_2 \vec{u}_2 H_2) = 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Derivando a Eq.??, temos:

$$(1 - \phi) \frac{\partial(\rho_s H_s)}{\partial t} + \left[\phi \rho_1 S_1 \frac{\partial \hat{H}_1}{\partial t} + \phi \hat{H}_1 \frac{\partial(\rho_1 S_1)}{\partial t} \right] + \left[\phi \rho_2 S_2 \frac{\partial \hat{H}_2}{\partial t} + \phi \hat{H}_2 \frac{\partial(\rho_2 S_2)}{\partial t} \right] + \left[\rho_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{\nabla} \hat{H}_1 + \hat{H}_1 \cdot \vec{\nabla} \cdot (\rho_1 \vec{u}_1) \right] + \left[\rho_2 \vec{u}_2 \cdot \vec{\nabla} \hat{H}_2 + \hat{H}_2 \cdot \vec{\nabla} \cdot (\rho_2 \vec{u}_2) \right] = 0$$

Reorganizando a equação e substituindo as equações de conservação de massa para os componentes água e óleo (Equações ?? e ??) a equação ?? se torna:

$$\begin{aligned} (1 - \phi) \frac{\partial(\rho_s \hat{H}_s)}{\partial t} + \phi \rho_1 S_1 \frac{\partial \hat{H}_1}{\partial t} + \phi \rho_2 S_2 \frac{\partial \hat{H}_2}{\partial t} + \rho_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{\nabla} \hat{H}_1 + \rho_2 \vec{u}_2 \cdot \vec{\nabla} \hat{H}_2 \\ + \hat{H}_1 \left[\vec{\nabla} \cdot (\rho_1 \vec{u}_1) + \phi \frac{\partial(\rho_1 S_1)}{\partial t} \right] + \hat{H}_2 \left[\vec{\nabla} \cdot (\rho_2 \vec{u}_2) + \phi \frac{\partial(\rho_2 S_2)}{\partial t} \right] = 0 \end{aligned}$$

então,

$$(1 - \phi) \frac{\partial(\rho_s \hat{H}_s)}{\partial t} + \phi \rho_1 S_1 \frac{\partial \hat{H}_1}{\partial t} + \phi \rho_2 S_2 \frac{\partial \hat{H}_2}{\partial t} + \rho_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{\nabla} \hat{H}_1 + \rho_2 \vec{u}_2 \cdot \vec{\nabla} \hat{H}_2 = 0$$

que considerando fluxo unidimensional, pode ser reecrita como:

$$(1 - \phi) \frac{\partial(\rho_s \hat{H}_s)}{\partial t} + \phi \rho_1 S_1 \frac{\partial \hat{H}_1}{\partial t} + \phi \rho_2 S_2 \frac{\partial \hat{H}_2}{\partial t} + \rho_1 \vec{u}_1 \cdot \frac{\partial \hat{H}_1}{\partial x} + \rho_2 \vec{u}_2 \cdot \frac{\partial \hat{H}_2}{\partial x} = 0$$

Assumimos que as entalpias são independentes da pressão, $dH_j = C_{pj} dT$, onde C_{pj} é o calor específico da fase j. Se o C_{pj} for constante, torna-se:

$$[\phi \rho_1 S_1 C_{P1} + \phi \rho_2 S_2 C_{P2} + (1 - \phi) \rho_s C_{ps}] \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho_1 C_{p1} \vec{u}_1 + \rho_2 C_{p2} \vec{u}_2) \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

Fluxo Fracionário

Definindo o fluxo fracionário como:

$$f_j = \frac{u_j}{u_t}$$

onde f_j é o fluxo fracionário, u_j a velocidade da fase e $u = \sum_i^{Np} u_j$, podemos reescrever as equações básicas governantes em termos de fluxo fracionário: - conservação de massa da água (Eq. ???), conservação de massa do óleo (Eq. ???) e conservação de energia (Eq. ???).

$$\phi \frac{\partial(\rho_1 S_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x} = 0 \rightarrow \phi \frac{\partial(\rho_1 S_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_t f_1)}{\partial x} = 0 \quad (1.16)$$

.

Para o componente óleo, temos:

$$\frac{\phi \partial(\rho_2 S_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_t f_2)}{\partial x} = 0. \quad (1.17)$$

Utilizando as equações ?? e ?? para eliminar alguns termos da equação da conservação da energia (Eq. ??) representada em termos de fluxo fracionário:

$$[\phi \rho_1 S_1 C_{P1} + \phi \rho_2 S_2 C_{P2} + (1 - \phi) \rho_s C_{ps}] \frac{\partial T}{\partial t} + [u_t (\rho_1 C_{p1} f_1 + \rho_2 C_{p2} f_2)] \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

ou ainda,

$$\left[M_{t_1} S_1 + M_{t_2} S_2 + \frac{(1-\phi)}{\phi} M_{t_s} \right] \frac{\partial T}{\partial t} + [u_t(M_{t_1} f_1 + M_{t_2} f_2)] \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

onde $M_{T_j} = \phi \rho_j C_{pj}$.

Com isso, concluem-se 3 equações:

- $\phi \frac{\partial(\rho_1 S_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u f_1)}{\partial x} = 0$, conservação de massa do componente água;
- $\frac{\phi \partial(\rho_2 S_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u f_2)}{\partial x} = 0$, conservação de massa do componente óleo;
- $\left[M_{t_1} S_1 + M_{t_2} S_2 + \frac{(1-\phi)}{\phi} M_{t_s} \right] \frac{\partial T}{\partial t} + [u_t(M_{t_1} f_1 + M_{t_2} f_2)] \frac{\partial T}{\partial x} = 0$, conservação da energia.

$$f_1(S_1, T) = \frac{\frac{k_{r_1}(S_1)}{u_1}}{\frac{k_{r_1}(S_1)}{u_1(S_1, T)} + \frac{k_{r_2}(S_1)}{u_2(S_1, T)}}$$

$$u_1(S_1, T) = -k \frac{k_{r_1}(S_1)}{\mu_1(T)} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$u_2(S_1, T) = -k \frac{k_{r_2}(S_1)}{\mu_2(T)} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$S_w + S_o = 1$$

Saturação da fase aquosa	$S_1 = \frac{Volume\ fase1}{Volume\ vazios}$		
Saturação da fase oleosa	$S_2 = \frac{Volume\ fase2}{Volume\ vazios}$		
Permeabilidade relativa da fase aquosa	$k_{r1} = \frac{permeabilidade\ efetiva\ fase1}{permeabilidade}$		
Permeabilidade relativa da fase oleosa	$k_{r2} = \frac{permeabilidade\ efetiva\ fase2}{permeabilidade}$		
Permeabilidade	k	5×10^{-8}	m^2/s
Porosidade	$\phi = \frac{volume\ de\ vazios}{volume\ total}$	0,2	
Capacidade de Calor Volumétrico da fase aquosa	$M_{T1} = \phi \rho_1 C_{p1}$		
Capacidade de Calor Volumétrico da fase oleosa	$M_{T2} = \phi \rho_2 C_{p2}$		
Calor específico da fase aquosa	C_{p1}	4186	J/kg
Calor específico da fase oleosa	C_{p2}	2135,268	J/kg
Massa específica da fase aquosa	$\rho_1 = \frac{massa\ fase1}{Volume\ fase1}$	1000	kg/m^3
Massa específica da fase oleosa	$\rho_2 = \frac{massa\ fase2}{Volume\ fase2}$	750	kg/m^3
Velocidade da fase aquosa	$u_1(S_1, T) = -k \frac{k_{r1}(S_1)}{\mu_1(T)} \frac{\partial P}{\partial x}$		m/s
Velocidade da fase oleosa	$u_2(S_1, T) = -k \frac{k_{r2}(S_1)}{\mu_2(T)} \frac{\partial P}{\partial x}$		m/s
Fluxo Fracionário da fase aquosa	$f_1 = \frac{velocidade\ fase1}{velocidade\ total}$		
Fluxo Fracionário da fase oleosa	$f_2 = \frac{velocidade\ fase2}{velocidade\ total}$		
Pressão	P	100000	Pa
Temperatura água injetada	T^o	423	K
Viscosidade	$\mu_j = Ae^{B/T}$	0,11	$Pa \cdot s$
Vazão	Q	500	m^3/s

Tabela 1 - Condições de contorno sobre as fronteiras do reservatório.

Propriedades físicas	Unidade	Descrição
Pressão estática / psi	2000	Poço produtor
Vazão mássica de água / kg/s	0,577	Entrada do poço injetor
Fração volumétrica	1	Água - Entrada do poço injetor
Fração volumétrica	0	Óleo - Entrada do poço injetor
Pressão do reservatório / psi	3441,9	Óleo no reservatório
Temperatura / °F	233,24	Água
Fração volumétrica inicial	0	Óleo leve
Fração volumétrica inicial	1	

Tabela 2 - Propriedades do óleo e da água.

Propriedades físicas	Fase contínua (petróleo)	Fase contínua (água)
Massa molar / kg/kmol	105,47	18,02
Densidade / kg/m ³	876,16	997,0
Viscosidade dinâmica / cp	2	0,0088899
Condutividade térmica / W/m.K	0,143	0,6069
Calor específico / J/kg.K	2092	4181,7
Pressão	constante	1

Tabela 3 - Propriedades do meio poroso.

Propriedades físicas	Rocha
Permeabilidade / m ²	1.10 ⁻¹³
Porosidade	0,20
Coefficiente de perda de resistência (Kloss)	0

Figura 1: