0.1 Conservação de Massa

Afim de desenvolver as equações para darem início ao estudo dos Métodos Térmicos de Recuperação Avançada de Petróleo, serão definidos como V um volume arbitrário fixo em um meio poroso contendo um fluxo de compostos químicos, i = 1, 2, ..., N_c como o número de componentes e j= 1, 2, ..., $N_p$como o número de fases. A área A do volume V pode ser decomposta por elementos de superfície ΔA e o vetor normal ao centro é dado por , assim, a soma dos elementos de superfície corresponde a área da superfície de V.

Para cada componente em cada fase de volume, tem-se:

$$\underbrace{\{\text{Taxa de Acúmulo de i em V}\}}_{\text{Acúmulo}} = \underbrace{\{\text{Taxa de i que entra V}\} - \{\text{Taxa de i que sai de V}\}}_{\text{Fluxo}} + \underbrace{\{\text{Taxa de i gerada}}_{\text{Fonte}} \tag{1}$$

Assim, pode-se definir os termos de Fluxo e o acúmulo como, respectivamente:

$$\{\text{Taxa de Transporte de i em V}\} = \{\text{Taxa de i que entra V}\} - \{\text{Taxa de i que sai de V}\} \tag{2}$$

$$\{\text{Taxa de Acúmulo de i em V}\} = \frac{\partial}{\partial t}\{\text{Massa total de i em V}\} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\int\limits_V W_i dV\right\} = \int\limits_V \frac{\partial W_i}{\partial t} dV \tag{3}$$

sendo W_i= concentração total da massa de i por unidade de volume, definido por: $W_i = \frac{m_i}{V}$.

O produto vetorial $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{N_i}$representa a componente normal do fluxo que passa pela superfície ΔA, logo:

$$\{\text{Taxa de Transporte de i em } \Delta A\} = -\overrightarrow{n}.\overrightarrow{N_i}\Delta A \tag{4}$$

considerando a soma dos termos infinitesimais da superfície, pode-se reescrever a Equação 4 como:

$$\{\text{Taxa de Transporte de i em } \Delta A\} = -\int\limits_A \overrightarrow{n}.\overrightarrow{N_i}\Delta A \tag{5}$$

A equação 5 é válida tanto para o fluxo que entra quanto para o fluxo que sai, visto que é calculada em V.

A taxa líquida de produção em V é dada por:

$$\{\text{Taxa de Transporte de i em V}\} = \int\limits_V R_i dV \tag{6}$$

onde R_ié a taxa de produção/destruição da massa de i por unidade de volume gerada por uma ou mais reações químicas em V.

Substituindo as Equações 4, 5 e 6 na Equação 1, obtêm-se:

$$\underbrace{\int_V \frac{\partial W_i}{\partial t} dV}_{\{\text{Taxa de Acúmulo de i em V}\}} = \underbrace{-\int_A \overrightarrow{n}.\overrightarrow{N_i} \Delta A}_{\{\text{Taxa de entrada e saída de i em V}\}} + \underbrace{\int_V R_i dV}_{\{\text{Taxa de i gerada em V}\}} \ , i = 1, 2, ..., N_c \tag{7}$$

Aplicando o Teorema da Divergência na Equação 7:

$$\int_A \overrightarrow{n}.\overrightarrow{N_i} \Delta A = \int_V \overrightarrow{\nabla} N_i dV \tag{8}$$

$$\int_V \left(\frac{\partial W_i}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \overrightarrow{N_i} - R_i \right) dV = 0 \ , i = 1, 2, ..., N_c \tag{9}$$

Considerando o Volume (V) arbitrário, a equação da conservação do componente i na sua forma diferencial reduz-se a:

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \overrightarrow{N_i} - R_i = 0 \ , i = 1, 2, ..., N_c \tag{10}$$

Definição de termos para o fluxo isotérmico em meios porosos

Com o objetivo de desenvolver o estudo do fluxo multifásico em meios porosos, nesta subseção, serão definidos uma série de termos para posterior uso na solução de problemas deste caráter.

Definindo a porosidade como:

$$\phi = \frac{V_p}{V_b} \tag{11}$$

onde ϕ =porosidade, V_p =volume poroso e V_b =volume total.

Se S_j =fração do volume de poros ocupado pela fase j e E_j =fração de volume da fase:

$$S_j = \frac{V_j}{V_p} \tag{12}$$

$$E_j = \frac{V_j}{V_b} \tag{13}$$

Substituindo as Equações 12 e 11 na Equação 13, obtêm-se o conteúdo de fluido:

$$E_j = \frac{S_j V_p}{\frac{V_p}{\phi}} = S_j \phi \tag{14}$$

Para a fase sólida:

$$E_s = 1 - \phi \tag{15}$$

$$\sum_{j=1}^{N_p} E_j = 1 \tag{16}$$

A massa específica de uma fase(ρ_j) é definida como:

$$\rho_j = \frac{m_j}{V_j} \tag{17}$$

Substituindo a Equação 13 na Equação 17:

$$m_j = \rho_j E_j V_b \tag{18}$$

Definindo ω_{ij}como a massa do componente i na fase j divido pela massa total de todos os componentes na mesma fase:

$$\omega_{ij} = \frac{m_{ij}}{m_j} \tag{19}$$

$$\sum_{i=1}^{N_c} \omega_{ij} = 1 \tag{20}$$

O somatório dos componentes i nas $N_p$fases mais a fase estacionária definem o termo de acúmulo W_i, descrito na 1, equação 26. Somando os componentes i com as definições das frações mássicas (Equações 32 e 33), obtêm-se:

$$\sum_{i=1}^{N_c} W_i = \phi \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j S_j + (1 - \phi)\rho_s \equiv \rho(\omega_i, P) \tag{21}$$

onde $\rho_s$representa a massa específica da fase sólida.

Se definirmos $\omega_i$como a massa dos componentes i em todas as fases dividido pela massa total presente no meio, conclui-se:

$$\omega_i = \frac{W_i}{\sum\limits_{i=1}^{N_c} W_i} \tag{22}$$

O fluxo de i ($\overrightarrow{N_i}$) representa o somatório do fluxo do componente i em todas as fases, sendo subdividido em um termo de convecção (determinado pela velocidade da fase j superficial) e um termo de dispersão (caracterizado pelo tensor de dispersão $\overrightarrow{\overrightarrow{K}}_{ij}$).

O tensor de dispersão possui uma componente longitudinal e uma transversal para meios homogêneos e isotrópicos definidos pelas Equações ,respectivamente:

$$(K_{xx})_{ij} = \frac{D_{ij}}{\tau} + \frac{\alpha_{lj} u_{xj}^2 + \alpha_{tj}(u_{yj}^2 + u_{zj}^2)}{\phi S_j |\overrightarrow{u_j}|} \tag{23}$$

Table 1: Definição de termos para fluxo isotérmico em meios porosos

Conservação dos i componentes	$\frac{\partial W_i}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{N_i} = R_i(25)$
Conservação global de i	$\mathrm{W}_i = \phi \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j S_j \omega_{ij} + (1-\phi)\rho_s \omega_{is}(26)$
Fluxo de i	$\overrightarrow{N_i} = \sum_{j=1}^{N_p} (\rho_j \omega_{ij} \overrightarrow{u_j} - \phi \rho_j S_j \overrightarrow{\overrightarrow{K}}_{ij}.\overrightarrow{\nabla}\omega_{ij}(27)$
Fonte de i	$\mathrm{R}_i = \phi \sum_{j=1}^{N_p} S_j r_{ij} + (1-\phi) r_{is}(28)$
Lei de Darcy	$\overrightarrow{u_j} = -\lambda_{rj} \overrightarrow{\overrightarrow{k}}.(\overrightarrow{\nabla} p_j + \rho_j \overrightarrow{g})(29)$
Mobilidade relativa	$\lambda_{rj} = \lambda_{rj}(S, \omega, \overrightarrow{u_j}, \overrightarrow{x})(30)$
Pressão Capilar	$\mathrm{P}_{cjn}(S, \omega, \overrightarrow{x}) = P_j - P_n(31)$
Fração mássica	$\sum_{i=1}^{N_c} \omega_{ij} = 1(32)$
Fração mássica da fase estacionária	$\sum_{i=1}^{N_c} \omega_{is} = 1(33)$
Restrição da saturação	$\sum_{j=1}^{N_p} S_j = 1(34)$
Reação total da fase j	$\sum_{i=1}^{N_c} r_{ij} = 0(35)$
Reação total da fase sólida	$\sum_{i=1}^{N_c} r_{is} = 0(36)$
Porosidade	$\phi = \frac{V_p}{V_b}(37)$
Fração de Volume	$\sum_{j=1}^{N_p} E_j = 1(38)$

$$(K_{xy})_{ij} = \frac{(\alpha_{lj} + \alpha_{tj})(u_{xj} u_{yj})}{u S_j |\overrightarrow{u_j}|} \tag{24}$$

onde l= a coordenada especial na direção paralela ou longitudinal ao fluxo total, t= direção perpendicular ou transversal a l, D_{ij}= o coeficiente de difusão do componente i na fase j, α_{lj}e α_{rj}são as dispersividades longitudinal e transversal e τ= é o fator de tortuosidade do meio.

Relações Auxiliares

A Equação 29 é uma versão da Lei de Darcy para fluxos multifásicos em meio porosos e, neste formato, assume-se que o fluxo não tem escorregamento entre as fases. A função potencial da velocidade superficial da fase $\overrightarrow{u_j}$ é representada pela soma vetorial $\overrightarrow{\nabla} p_j + \rho_j \overrightarrow{g}$,onde p_jé a pressão na fase j e $\overrightarrow{g}$é o vetor gravitacional que pode ser escrito como:

$$\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{\nabla} D_z \tag{39}$$

onde g é o vetor de magnitude gravitacional, e D_zé uma distância positiva abaixo de algum plano de referência horizontal. Para um sistema de coordenadas cartesianas com uma constante de inclinação com o plano de referência, $\overrightarrow{\nabla}$ se torna um vetor que consiste no cosseno do ângulo de inclinação entre os respectivos eixos e a vertical.

A forma tensorial da permeabilidade $\overrightarrow{\overrightarrow{k}}$ implica em um meio poroso anisotrópico e permeável tendo o eixo das coordenadas não alinhados em relação aos eixos principais de $\overrightarrow{\overrightarrow{k}}$.

Já a mobilidade relativa da fase j (λ_{rj}) é definida como o quociente entre a permeabilidade relativa da fase j (k_{rj}) e a viscosidade da fase j (μ_j):

$$k_{rj} = \frac{k_j}{k} \tag{40}$$

$$\lambda_{rj} = \frac{k_{rj}(S, \omega, \overrightarrow{x})}{\mu_j(\omega, \overrightarrow{u_j})} \tag{41}$$

A mobilidade é uma função da tendência da fase j de molhar o meio poroso, da distribuição dos poros e de todas as saturações da fase. Portanto, o termo $\lambda_{rj}\overrightarrow{\overrightarrow{k}}$ da Equação 29 pode ser reescrita como:

$$\lambda_{rj}\overrightarrow{\overrightarrow{k}} = \frac{\overrightarrow{\overrightarrow{k}}_j}{\mu_j} \tag{42}$$

onde $\overrightarrow{\overrightarrow{k}}_j$é o tensor de permeabilidade da fase.

A pressão capilar($P_{cjn}(S, \omega, \overrightarrow{x})$) é definida como a diferença entre as pressões de duas fases que passam pelo volume de controle, definida pela Equação 31.

As Equações 35 e 36 representam, respectivamente, a taxa de reação do componente i na fase j e a taxa de reação na fase estacionária.

Equação da Continuidade

Substituindo os termos referentes a conservação global de i, ao fluxo de i e a fonte na Conservação dos i componentes, definidos, respectivamente, pelas Equações 10, 27, 28 e 25, obtêm-se:

$$\left(\phi \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j S_j \omega_{ij} + (1-\phi)\rho_s \omega_{is}\right) + \overrightarrow{\nabla}\left(\sum_{j=1}^{N_p} (\rho_j \omega_{ij} \overrightarrow{u_j} - \phi \rho_j S_j \overrightarrow{\overrightarrow{K}}_{ij}.\overrightarrow{\nabla}\omega_{ij}\right) =$$

$$\phi \sum_{j=1}^{N_p} S_j r_{ij} + (1-\phi) r_{is},\ \text{i=1,...,}N_c \tag{43}$$

Lembrando as Equações 32 e 33 referentes a frações mássicas e as Equações 35 e 36 referentes as reações:

$$\sum_{i=1}^{N_c} \omega_{ij} = 1 \text{ e } \sum_{i=1}^{N_c} \omega_{is} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{N_c} r_{ij} = 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{N_c} r_{is} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j S_j \cancelto{1}{\omega_{ij}} + (1-\phi)\rho_s \cancelto{1}{\omega_{is}}\right) + \overrightarrow{\nabla}\left(\sum_{j=1}^{N_p} (\rho_j \cancelto{1}{\omega_{ij}} \overrightarrow{u_j} - \cancelto{o}{\phi \rho_j S_j \overrightarrow{K}_{ij} . \overrightarrow{\nabla} \omega_{ij}}\right) =$$

$$\cancelto{0}{\phi \sum_{j=1}^{N_p} S_j r_{ij} + (1-\phi) r_{is}}, \ \text{i=1,...,}N_c \tag{44}$$

Assim, a Equação da Continuidade é definida como:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi \sum_{j=1}^{N_p} \rho_j S_j + (1-\phi)\rho_s\right) + \overrightarrow{\nabla}\left(\sum_{j=1}^{N_p} (\rho_j \overrightarrow{u_j}\right) = 0 \tag{45}$$

Equação do Fluxo Fracionário

Considerando as seguintes premissas:

- Fluxo 1D, horizontal, isotérmico;
- Meio Poroso Homogêneo e Incompressível;
- Sem reações químicas e adsorção;
- Fases imiscíveis, incompressíveis e viscosidade constante;

Derivando a Equação 45:

$$\phi \rho_j \frac{\partial S_j}{\partial t} + \rho_j \frac{\partial u_j}{\partial x} = 0 \tag{46}$$

$$\phi \frac{\partial S_j}{\partial t} + \frac{\partial u_j}{\partial x} = 0 \tag{47}$$