Conservação de Energia

Aluno: Marcos Zimeres de Paula Chaiben

(Adiciona temperatura (T) como variável dependente)

I) Balanço de Energia:

$$\begin{Bmatrix} \text{taxa de} \\ \text{acúmulo} \\ \text{de energia} \\ \text{em V} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{taxa líquida} \\ \text{de energia} \\ \text{transportada} \\ \text{em V} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \text{taxa de} \\ \text{produção de} \\ \text{energia} \\ \text{em V} \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

II) Matematicamente pode ser escrito como:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}\Big(\underbrace{\rho U}_{\text{[illegible]}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N_P} \rho_j |\vec{u}_j|^2}_{\text{Energia cinética por unidade de volume}}\Big) + \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,dV}_{\text{Fluxo de energia}} = \underbrace{\dot{W}}_{\text{Fonte de energia (trabalho)}} \qquad (2)$$

III) termo fonte:

* termo composto apenas por componente de trabalho;
* Ausência de fonte de aquecimento externas;
* considera-se apenas a taxa do trabalho contra o campo de pressão W_{PV} e contra gravidade W_g.
* W = Força x distancia e ΔW = Força x velocidade e $P = \frac{F}{A}$

$$W = W_{PV} + W_g \qquad (3)$$

Onde,

$$\Delta W_{PV} = -\sum_{j=1}^{N_P} P_j \Delta A \vec{n}\cdot\vec{u}_j \qquad (4)$$

$P_j \Delta A \vec{m}$: Força exercida em ΔA pela pressão na fase j.

* O sinal negativo da eq (4):
  - trabalho negativo: sistema recebe trabalho no meio externo;
  - trabalho positivo: sistema realiza trabalho, ou seja,

no contexto, é positivo para o trabalho realizado por um elemento
sentido que tem para V $(\vec{n}\cdot\vec{u}_j < 0)$

* Como o trabalho pressão - volume total é a soma da eq (4) sobre todos os elementos da superfície que são limite da maior ΔA que se aproxima de zero:

$$W_{PV} = -\int_V \sum_{j=1}^{N_P} \vec{\nabla}\cdot(P_j \vec{u}_j)\,dV \qquad (5)$$

* Pegando o produto escalar da velocidade e o vetor gravi-

$$\Delta \dot{W}_G = \sum_{f=1}^{N_P} \rho_f \vec{u}_f \cdot \vec{g} \Delta V \qquad (6)$$

O sinal positivo na eq (6):

- O sinal positivo surge nesta equação, uma vez que uma fase fluido que flui contra gravidade ($\vec{u}_f \cdot \vec{g} < 0$) está sendo executada

* A taxa do trabalho total realizado contra a gravidade é:

$$W_G = \int_V \sum_{f=1}^{N_P} \rho_f \vec{u}_f \cdot \vec{g} \, dV \qquad (7)$$

* Depois de coletar todos os termos com o mesmo volume integral e marcar o integrando zero porque V é arbitrário, temos

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho U + \frac{1}{2}\sum_{f=1}^{N_P} \rho_f |\vec{u}_f|^2\right) + \vec{\nabla}\cdot\vec{E} + \sum_{f=1}^{N_P} \vec{\nabla}\cdot(P_f \vec{u}_f) - \sum_{f=1}^{N_P} \rho_f \vec{u}_f \cdot \vec{g} = 0 \qquad (8)$$

IV) O termo fluxo de energia é composto por uma contribuição convectiva (fase que flui), condução e radiação

$$\vec{E} = \sum_{f=1}^{N_P} \rho_f \vec{u}_f \left[U_f + \frac{1}{2}|\vec{u}_f|^2\right] + \vec{q}_c + \vec{q}_r \qquad (9)$$

* Para fluxo monofásico, o fluxo de calor condutor é da lei de Fourier:

$(q = m c \Delta t)$

$$\vec{q}_c = -K_{T_f} \vec{\nabla} T \qquad (10)$$

K_{T_f} = condutividade térmica total

V) • Desconsiderando a radiação;

• considerando que a T é a mesma para todas as fases;

• Substituindo (10) (9) em (8) temos

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho U + \frac{1}{2}\sum_{f=1}^{N_P} \rho_f |\vec{u}_f|^2\right) + \vec{\nabla}\cdot\left(\sum_{f=1}^{N_P} \rho_f \vec{u}_f \left[U_f + \frac{1}{2}|\vec{u}_f|^2\right]\right) - \vec{\nabla}\cdot(K_{T_f} \vec{\nabla} T) + \sum_{f=1}^{N_P}\left[\vec{\nabla}\cdot(P_f \vec{u}_f) - \rho_f \vec{u}_f \cdot \vec{g}\right] = 0 \qquad (11)$$

- energia interna;
- energia cinética;
- fluxo por convecção;
- energia por condução;
- trabalho por expansão e compressão;
- gravidade;

Aluno: Marcos Alim'eis de

[primeira] soma no termo da convecção e na expressão [do] volume do trabalho pode ser combinada para

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho U + \frac{1}{2}\sum_{f=1}^{NP}\rho_f|\vec{u}_f|^2\right) + \vec{\nabla}\cdot\left(\sum_{f=1}^{NP}\rho_f\vec{u}_f\left[H_f + \frac{1}{2}|\vec{u}_f|^2\right]\right) - \vec{\nabla}\cdot(k_{T_j}\vec{\nabla}T)$$

$$-\underbrace{\sum_{f=1}^{NP}\rho_f\vec{u}_f\,\vec{g}}\; = 0 \quad (12)$$

Onde $H_f = U_f + P_f/\rho_f$ é a entalpia da fase f por unidade de massa f

VII) Escrevendo o vetor gravidade como $\vec{g} = -g\vec{\nabla}D_z$ e último termo da eq (12) torna-se:

$$\underbrace{\sum_{f=1}^{NP}\rho_f\vec{u}_f\cdot\vec{g}} = -g\sum_{f=1}^{NP}\rho_f\vec{u}_f\,\vec{\nabla}D_z = -g\sum_{f=1}^{NP}\vec{\nabla}\cdot(\rho_f\vec{u}_f D_z) + g\sum_{f=1}^{NP}D_z\vec{\nabla}\cdot(\rho_f\vec{u}_f)$$

(13)

e quando substituído na eq (12)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho U + \frac{1}{2}\sum_{f=1}^{NP}\rho_f|\vec{u}_f|^2\right) + \vec{\nabla}\cdot\left(\sum_{f=1}^{NP}\rho_f\vec{u}_f\left[H_f + \frac{1}{2}|\vec{u}_f|^2 + gD_z\right]\right) - \vec{\nabla}\cdot(k_{T_j}\vec{\nabla}T)$$

$$\underbrace{-gD_z\vec{\nabla}\cdot\left(\sum_{f=1}^{NP}\rho_f\vec{u}_f\right)}_{(*)} = 0 \quad (14)$$

VIII) Partindo de:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi\sum_{f=1}^{NP}\rho_f S_f + (1-\phi)\rho_s\right) = -\vec{\nabla}\left(\sum_{f=1}^{NP}\rho_f\vec{u}_f\right) = 0 \quad (15)$$

da eq (15) na parte (*) da eq (14) temos

$$gD_z\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho)$$

IX) substituindo na eq. (14) tem-se

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho U + \rho g D_z + \frac{1}{2}\sum_{f=1}^{NP}\rho_f|\vec{u}_f|^2\right) + \vec{\nabla}\cdot\left(\sum_{f=1}^{NP}\rho_f\vec{u}_f\left[H_f + \frac{1}{2}|\vec{u}_f|^2 + gD_z\right]\right) - \vec{\nabla}\cdot(k_{T_j}\vec{\nabla}T) = 0}$$

Marcos Ulmário de Paula Chaiben

- Coordenadas cilíndricas

Premissas:

1- fluxo 1D
2- fluxo Horizontal
3- Meio Poroso Homogêneo
4- fluxo monofásico
5- Meio poroso s/ r. químicas
6- Uma única fase
7- Sem Adsorção
8- Um único componente
9- Isotérmico
10- Viscosidade cte.
11- fluido e rocha compressíveis
12- pequeno gradiente de Pressão

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\phi \sum_{j=1}^{NP} \rho_j S_j w_{ij} + (1-\phi)\rho_s w_{is}\right] + \vec{\nabla}\left[\sum_{j=1}^{Np}(\rho_j w_{ij} \vec{u_j}) - \phi S_j \rho_j \vec{\vec{K_{ij}}} \vec{\nabla} w_{ij}\right] = \phi \sum_{j=1}^{Np} S_j r_{ij} + (1-\phi)$$

1) pois há um componente

0, não há reação química.

1) $\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) + \nabla(\rho \vec{u_j}) = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho u)}{\partial r} + \frac{1}{r}\cancel{\frac{(\rho u)}{\partial\theta}} + \cancel{\frac{\partial(\rho u)}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}\rho + \frac{\partial\rho}{\partial t}\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\rho\cdot\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}\rho + \frac{\partial\rho}{\partial t}\phi = \frac{1}{r}\frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\rho\frac{\partial P}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}\frac{\phi\rho c_t\mu}{k} = \frac{1}{r}\left[r\frac{\partial\rho}{\partial r}\cdot\frac{\partial P}{\partial r} + \rho\cdot\frac{\partial P}{\partial r} + r\rho\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\right]$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}\frac{\phi\rho c_t\mu}{k} = \frac{1}{r}\left[r\frac{\partial\rho}{\partial r}\cdot\frac{\partial P}{\partial r} + \rho\frac{\partial P}{\partial r} + r\rho\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\right]$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}\frac{\phi\cancel{\rho}c_t\mu}{k} = \frac{1}{r}\left[c_{fl}\cancel{\rho}r\frac{\partial P}{\partial r} + \cancel{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} + r\cancel{\rho}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\right]$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}\frac{\phi c_t\mu}{k} = \frac{1}{\cancel{r}}\left[c_{fl}\cancel{r}\cdot\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial r} + \cancel{r}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\right]$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}\frac{\phi c_t\mu}{k} = c_{fl}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}$$

gradiente de P pequeno

$$\frac{\partial P}{\partial t}\frac{\phi c_t\mu}{k} = \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}$$