



UFABC - Universidade Federal do ABC

Sistemas de Controle II

Sistemas de Fase Mínima, Retardo de Transporte, Tipos de Sistema

Prof^a Dra. Heloise Assis Fazzolari

heloise.fazzolari@ufabc.edu.br

Sala 717-1, 7º andar, Torre 1, Bloco A - Campus Santo André

3º Quadrimestre de 2019

Sistemas de fase mínima e Sistemas de fase não mínima

F.T. de fase mínima: **Não possui polos nem zeros** no semiplano direito do plano s .

F.T. de fase não mínima: **Possui polos e zeros** no semiplano direito do plano s .

Estes sistemas possuem as mesmas características de módulo. A gama de valores do ângulo de fase da F.T.

- é mínima para sistemas de fase mínima e
- é maior do que esse mínimo para sistemas de fase não mínima.

Para um sistema de fase mínima, a F.T. pode ser determinada univocamente apenas a partir da curva de módulo. Para um sistema de fase não mínima, isso não acontece.

Situações de fase não mínima surgem de duas maneiras diferentes:

- Sistema inclui um elemento ou elementos de fase não mínima,
- Se tem uma malha interna instável.

Sistemas de fase mínima e Sistemas de fase não mínima

Um sistema, dado pela sua F.T. $G(s)$, é dito de fase mínima quando todos os seus polos e zeros se localizam no SPE. Quando há pelo menos um polo ou zero no SPD, diz-se que o sistema é de fase não-mínima.

Na literatura, muitas vezes utiliza-se a expressão fase não mínima para indicar que há zeros no SPD, uma vez que quando há polos no SPD diz-se que o sistema é instável.

Sistemas de fase mínima e Sistemas de fase não mínima

Exemplo 1

Consideremos dois sistemas cujas F.T. são:

$$G_1(j\omega) = \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega\tau_1},$$

$$G_2(j\omega) = \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega\tau_1},$$

$$0 < T < \tau_1$$

A configuração de polos e zeros desses sistemas são mostrados na figura a seguir.

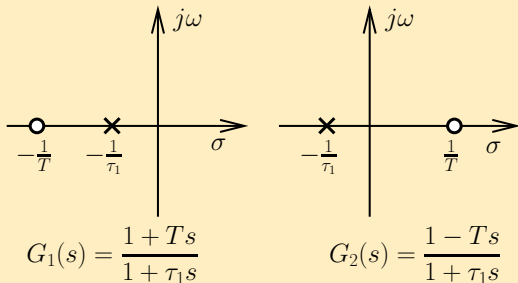


Figura: Configurações de polos e zeros de um sistema de fase mínima $G_1(s)$ e de um sistema de fase não mínima $G_2(s)$.

Sistemas de fase mínima e Sistemas de fase não mínima

Estudo Exemplo 1

As duas funções de resposta em frequência têm as mesmas características de módulo, mas diferentes características de ângulo de fase ($T = 1$, $\tau_1 = 10$).

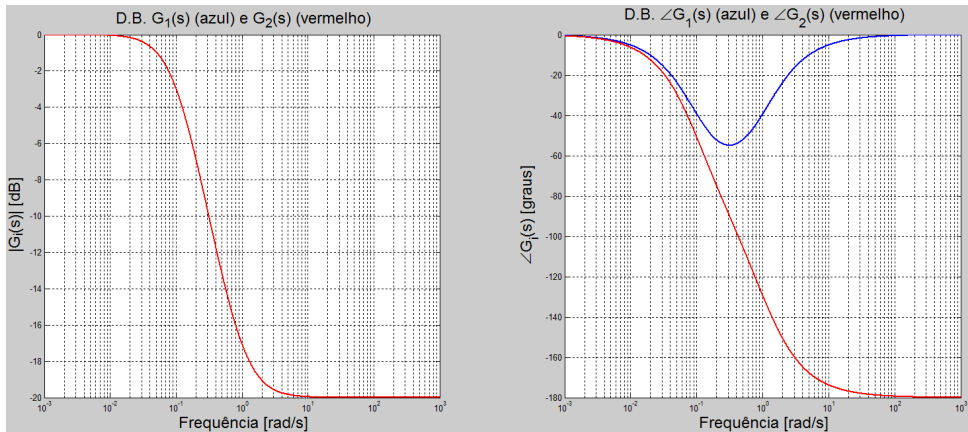


Figura: Características do módulo e do ângulo de fase dos sistemas $G_1(s)$ e $G_2(s)$.

Observação 1

$G_1(s)$ é de fase mínima, pois seu polo e zero estão no SPE. $G_2(s)$ é de fase não mínima, pois tem um zero no SPD. O ganho das duas F.T. é o mesmo

$$|G_1(j\omega)| = \left| \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega\tau_1} \right| = \left| \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega\tau_1} \right| = |G_2(j\omega)|.$$

Observação 2

O mesmo não ocorre com a defasagem. Os diagramas de Bode mostram que, em valores absolutos, a defasagem correspondente a $G_1(s)$ é menor do que a associada a $G_2(s)$. De modo geral, a defasagem associada a uma F.T. de fase mínima é, em valor absoluto, a mínima dentre todas as defasagens possíveis associadas a sistemas com o mesmo ganho.

Os valores dos ângulos de fase são menores para o sistema de fase mínima $G_1(s)$ para todas as frequências.

Estes dois sistemas diferem entre si pelo fator

$$G(j\omega) = \frac{G_2(j\omega)}{G_1(j\omega)} = \frac{1 - j\omega T}{\frac{1 + j\omega\tau_1}{1 + j\omega T}} = \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T}$$

- 1 O módulo do fator $\frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T}$ é sempre unitário.
- 2 O ângulo de fase é $-2 \tan^{-1}(\omega T)$ e varia de 0° a -180° , à medida que ω varia de zero a infinito.

Sistemas de fase mínima e Sistemas de fase não mínima

Estudo Exemplo 1

Características de $G(j\omega)$.

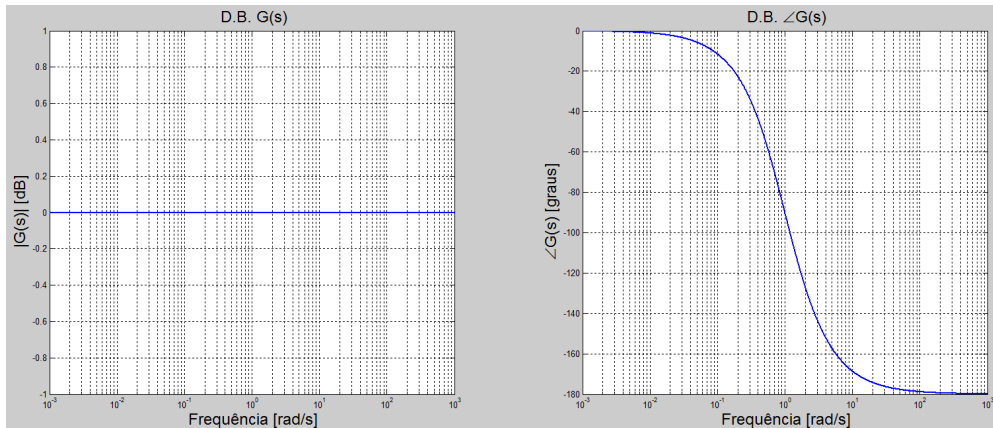


Figura: Características do módulo e do ângulo de fase de $G(j\omega)$.

Sistemas de fase mínima e Sistemas de fase não mínima

Para sistemas de fase mínima, as características de módulo e de ângulo de fase estão relacionadas univocamente.

- Se as curvas de módulo de um sistema for especificada para toda a gama de valores de frequência de zero a infinito, a curva de ângulo de fase será determinada de forma única e vice-versa.
- Isto não ocorre para sistemas de fase não mínima.

Para um sistema de fase mínima.

- O ângulo de fase em $\omega = \infty$ torna-se $-90^\circ(q - p)$, onde p e q são os graus dos polinômios do numerador e do denominador da F.T., respectivamente. No sistema de fase não mínima, o ângulo de fase em $\omega = \infty$ difere de $-90^\circ(q - p)$
- A inclinação da curva de módulo em dB em $\omega = \infty$ é igual a $-20(q - p)$ dB/década (esta condição vale também para os sistemas de fase não mínima).

Sistemas de fase mínima e Sistemas de fase não mínima

Portanto, é possível detectar se o sistema é de fase mínima pelo exame da inclinação tanto da assíntota de alta frequência da curva de módulo em dB quanto pelo ângulo de fase em $\omega = \infty$.

Os sistemas de fase não mínima são lentos na resposta. Na maioria dos sistemas de controle práticos, o atraso de fase excessivo deve ser evitado cuidadosamente. No projeto de um sistema, se a velocidade de resposta for de importância fundamental, não se deverá utilizar componentes de fase não mínima. Um exemplo de elementos de fase não mínima que podem estar presentes em sistemas de controle é o **retardo de transporte** ou tempo morto.

O retardo de transporte ou tempo morto, tem comportamento de fase não mínima e apresenta atraso excessivo, sem atenuação nas altas frequências. Este tipo de retardo ocorre nos sistemas térmicos, hidráulicos e pneumáticos.

Consideremos o retardo de transporte dado por:

$$G(j\omega) = e^{-j\omega T} \quad (1)$$

O módulo é sempre igual à unidade, pois

$$|G(j\omega)| = |\cos(\omega T) - j \sin(\omega T)| = 1$$

o módulo em dB do retardo de transporte $e^{-j\omega T}$ é 0 dB. O ângulo de fase do retardo de transporte é

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega) &= \omega T \quad (\text{radianos}) \\ &= -57,3\omega T \quad (\text{graus}) \end{aligned}$$

O ângulo de fase varia linearmente com a frequência ω .

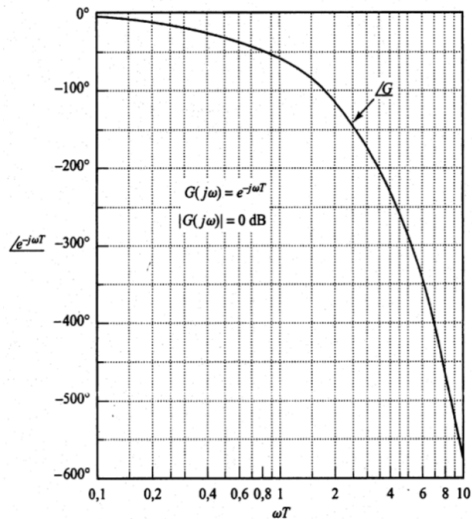


Figura: Características do ângulo de fase do retardo de transporte.

Um atraso de transporte é um intervalo de tempo entre o início de um evento em um ponto do sistema e sua ação resultante em outro ponto do sistema.

Um atraso de transporte puro, sem atenuação, é representado pela F.T. da equação (1), onde T é o atraso de transporte.

O fator introduz um deslocamento de fase à resposta em frequência sem alterar a curva de magnitude.

Este tipo de atraso de transporte ocorre em sistemas que possuem movimento de um material que requer um tempo finito para passar de um ponto de entrada ou de controle para um ponto de saída ou de medida.

Por exemplo, um sistema de controle de uma laminadora de aço é mostrado abaixo. O motor ajusta a separação dos rolos de modo que o erro de espessura seja minimizado. Se o aço estiver se deslocando a uma velocidade v , então o atraso de transporte entre o ajuste dos rolos e a medida é $T = \frac{d}{v}$.

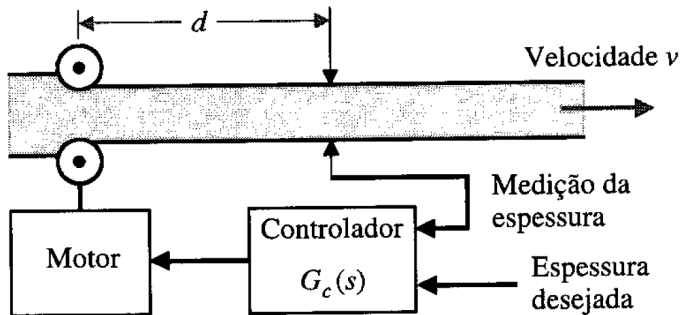


Figura: Sistema de controle de laminadora de aço.

Portanto, para se ter um atraso de transporte desprezível, deve-se diminuir a distância até a medição e aumentar a velocidade de escoamento do aço. Usualmente, não se pode eliminar o efeito do atraso de transporte; assim, a F.T. de malha é

$$G_c(s)G(s)e^{-sT} \quad (2)$$

Exemplo 2

Construa o diagrama de Bode da seguinte função de transferência

$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega L}}{1 + j\omega\tau}$$

Exemplo 2

Construa o diagrama de Bode da seguinte função de transferência

$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega L}}{1 + j\omega\tau}$$

Solução

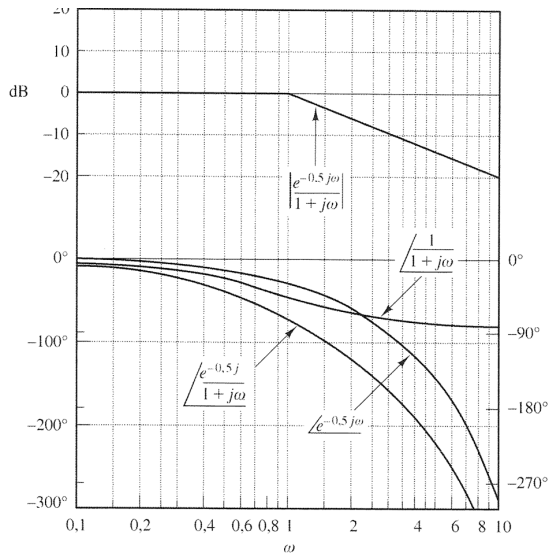
O módulo em dB é:

$$20\log|G(j\omega)| = 20\log|e^{-j\omega L}| + 20\log\left|\frac{1}{1 + j\omega T}\right| = 0 + 20\log\left|\frac{1}{1 + j\omega T}\right|$$

O ângulo de fase de $G(j\omega)$ é:

$$\angle G(j\omega) = \angle e^{-j\omega L} + \angle \frac{1}{1 + j\omega T} = -\omega L - \operatorname{tg}^{-1} \omega T$$

D.B. do sistema $e^{-j\omega L}/(1 + j\omega\tau)$ com $L = 0,5$ e $T = 1$.



Exemplo 3

Um sistema de controle de nível e o diagrama de blocos são mostrados abaixo. O atraso de transporte entre o ajuste da válvula e a saída do fluido é $T = d/v$.
Sistema de controle de nível de líquido.

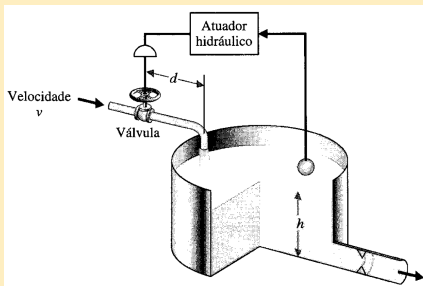
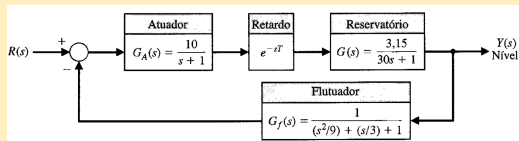


Diagrama de blocos.



Portanto, se a vazão for de $5 \text{ m}^3/\text{s}$, a área da seção reta da tubulação for 1 m^2 e a distância for igual a 5 m, então tem-se um atraso de transporte $T = 1 \text{ s}$. A F.T. de malha é

$$\begin{aligned} L(s) &= G_A(s)G(s)G_f(s)e^{-sT} \\ &= \frac{31,5}{(s+1)(30s+1)\left(\frac{s^2}{9} + \frac{s}{3} + 1\right)} e^{-sT} \end{aligned} \quad (3)$$

O D.B. para este sistema é mostrado na Figura. A fase é mostrada tanto para o sistema com atraso de transporte e para o sistema sem atraso de transporte.

```
%% Exemplo 3_aula2
clear all
close all
clc
n1=31.5;
% Denominador com multiplos fatores
f1=[1 1]; f2 =[30 1]; f3 =[1/9 1/3 1];
d1=conv (f1, conv (f2, f3)) ;
% F.T. com atraso de transporte
G1=tf (n1, d1, 'InputDelay', 1.0);
% F.T. sem atraso de transporte
G2=tf (n1, d1);
set( gcf, 'Units', 'Normalized', 'OuterPosition', [0, 0.04, 1, 0.96]);
figure(1);
h = bodeoptions;
h.PhaseMatching = 'on';
bodeplot(G1,G2, {0.1 10}, h);
set( findall(gcf, 'type', 'line'), 'linewidth', 2); % largura da linha
grid;
legend ( 'Exact delay' , 'No delay' , 'Location' , 'SouthWest');
```

A curva de ganho logarítmico cruza a reta 0 dB em $\omega = 0,8$ rad/s. Portanto a *margem de fase* do sistema sem o atraso de transporte puro seria 40° . Contudo, com o atraso de transporte adicionado, descobre-se que a margem de fase é igual a -3° , e o sistema é instável. Consequentemente, o ganho do sistema deve ser reduzido para proporcionar uma margem de fase aceitável. Para produzir uma margem de fase de 30° , o ganho deveria ser reduzido por um fator de 5 dB, para $K = 31,5/1,78 = 17,7$.

Um atraso de transporte e^{-sT} em um sistema com realimentação introduz um atraso de fase adicional e resulta em um sistema menos estável. Consequentemente, como atrasos de transporte puros são inevitáveis em muitos sistemas, é frequentemente necessário reduzir-se o ganho de malha a fim de se obter uma resposta estável. Contudo, o custo da estabilidade é o aumento resultante no erro de regime permanente do sistema à medida que o ganho de malha é reduzido.

As F.T. consideradas pela maioria das ferramentas analíticas são descritas por funções racionais ou por um conjunto finito de equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes. Uma vez que o atraso no tempo é dado por e^{-sT} , onde T é o atraso, observa-se que o atraso no tempo não é racional. Seria útil se fosse possível obter-se uma aproximação na forma racional para o atraso de tempo.

A aproximação de **Padé** utiliza uma expansão em série da função transcendental e^{-sT} e iguala tantos coeficientes quando possível com uma expansão em série de uma função racional de ordem específica.

Por exemplo, para aproximar a função e^{-sT} com uma função racional de primeira ordem, inicia-se expandindo-se ambas funções em séries,

$$e^{-sT} = 1 - sT + \frac{(sT)^2}{2!} - \frac{(sT)^3}{3!} + \frac{(sT)^4}{4!} - \frac{(sT)^5}{5!} + \dots \quad (4)$$

$$\frac{n_1s + n_0}{d_1s + d_0} = \frac{n_0}{d_0} + \left(\frac{d_0n_1 - n_0d_1}{d_0^2} \right)s + \left(\frac{d_1^2n_0}{d_0^3} - \frac{d_1n_1}{d_0^2} \right)s^2 + \dots$$

Para uma aproximação de primeira ordem, deseja-se encontrar n_0 , n_1 , d_0 e d_1 de modo que

$$e^{-sT} \approx \frac{n_1s + n_0}{d_1s + d_0}.$$

Igualando-se os coeficientes correspondentes dos termos em s , obtém-se as relações

$$\frac{n_0}{d_0} = 1, \quad \frac{n_1}{d_0} - \frac{n_0d_1}{d_0^2} = -T, \quad \frac{d_1^2n_0}{d_0^3} - \frac{d_1n_1}{d_0^2} = \frac{T^2}{2}, \dots$$

Resolvendo para n_0 , d_0 , n_1 e d_1 resulta

$$\begin{aligned}n_0 &= d_0, \\d_1 &= \frac{d_0 T}{2}, \\n_1 &= -\frac{d_0 T}{2}.\end{aligned}$$

Fazendo $d_0 = 1$ e resolvendo, resulta

$$e^{-sT} \approx \frac{n_1 s + n_0}{d_1 s + d_0} = \frac{-\frac{T}{2}s + 1}{\frac{T}{2}s + 1}. \quad (5)$$

Uma expressão em série da equação (5) resulta

$$e^{-sT} \approx \frac{n_1 s + n_0}{d_1 s + d_0} = \frac{-\frac{T}{2}s + 1}{\frac{T}{2}s + 1} = 1 - Ts + \frac{T^2 s^2}{2} - \frac{T^3 s^3}{4} + \dots. \quad (6)$$

Comparando a equação (6) com a equação (4), verifica-se que os três primeiros termos são iguais. Então, para um s pequeno, a aproximação de Padé é uma representação aceitável do atraso de transporte. Funções racionais de ordem mais elevada podem ser obtidas.

pade

Aproximação Padé para retardo de transporte.

Sintaxe

`[num,den] = pade(T,N)`

retorna a aproximação de Padé da N-ésima ordem do tempo de atraso e^{-sT} , na forma de função de transferência. O `num` e `den` contém o vetor dos coeficientes do numerador e do denominador em ordem decrescente de potências de s . Ambos são polinômios de N-ésima ordem. Por exemplo, para $T = 0,2$ e a aproximação de primeira ordem $N = 1$.

% Definição do comando pade

```
clc;  
clear;  
close all;  
[num den] = pade(0.2, 1)
```

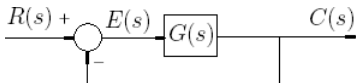
```
num =  
-1 10  
den =  
1 10
```

Relacionamento entre tipo de sistema e Curva de Módulo em dB

- As constante de erro estático de posição, velocidade e aceleração descrevem o comportamento de baixa frequência dos tipos 0, 1 e 2, respectivamente.
- Quanto maior o valor da constante de erro estático finita, maior o ganho de malha quando ω tende a zero.
- O tipo de sistema determina a inclinação da curva de módulo em dB em baixas frequências. Assim, a informação relativa ao erro estático de um sistema de controle para dada entrada pode ser determinada a partir da observação da região de baixas frequências da curva de módulo em dB.

Determinação da constante de erro estático de posição

Considere o sistema de controle com realimentação unitária.



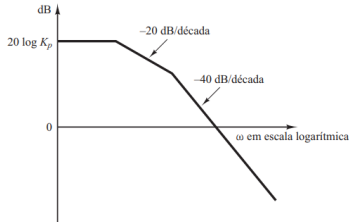
Suponha que a F.T. de malha aberta seja:

$$G(s) = \frac{K(T_as + 1)(T_bs + 1) \cdots (T_ms + 1)}{s^N(T_1s + 1)(T_2s + 1) \cdots (T_ps + 1)} \quad \text{ou} \quad G(j\omega) = \frac{K(T_aj\omega + 1)(T_bj\omega + 1) \cdots (T_mj\omega + 1)}{(j\omega)^N(T_1j\omega + 1)(T_2j\omega + 1) \cdots (T_pj\omega + 1)}$$

Num sistema do tipo 0 o módulo de $G(j\omega)$ nas baixas frequências é igual a K_p , ou

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = K = K_p$$

A assíntota de baixa frequência é uma reta horizontal de $20\log K_p$ dB.



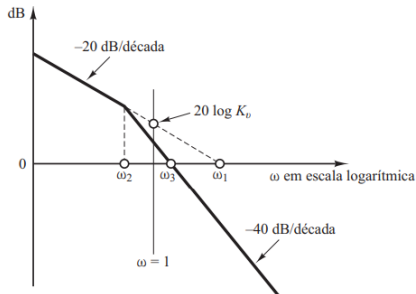
Determinação da constante de erro estático de velocidade

A intersecção do segmento inicial -20dB/década (ou sua extensão) com a reta $\omega = 1$, vale $20\log K_v$, pois, em um sistema do tipo 1

$$G(j\omega) = \frac{K_v}{j\omega}, \text{ para } \omega \ll 1. \text{ Então } 20\log \left| \frac{K_v}{j\omega} \right|_{\omega=1} = 20\log K_v$$

A intersecção do segmento inicial -20dB/década (ou sua extensão) com o eixo 0dB ocorre em uma frequência numericamente igual a K_v .

Para verificar isso, defina a frequência nessa intersecção como ω_1 . Então, $\left| \frac{K_v}{j\omega_1} \right| = 1$, ou $K_v = \omega_1$.



Determinação da constante de erro estático de aceleração

A intersecção do segmento inicial $-40\text{dB}/\text{dcada}$ (ou sua extensão) com a reta $\omega = 1$, tem módulo de $20\log K_a$. Como em baixas frequências,

$$G(j\omega) = \frac{K_a}{(j\omega)^2}, \text{ para } \omega \ll 1. \text{ Então } 20\log \left| \frac{K_a}{(j\omega)^2} \right|_{\omega=1} = 20\log K_a$$

A frequência ω_a na intersecção do segmento inicial $-40\text{dB}/\text{dcada}$ (ou sua extensão) com a reta 0dB nos fornece o valor numérico da raiz quadrada de K_a .

Pois

$$20\log \left| \frac{K_a}{(j\omega_a)^2} \right| = 20\log 1 = 0$$

Do que resulta $\omega_a = \sqrt{K_a}$

