9 – Diagramas de Bode

Diagramas de Bode

9.1 – **Introdução aos diagramas de Bode**

Neste capítulo estudaremos os diagramas de Bode ("*Bode plots*") que levam este nome devido à *Hendrik Wade* ***Bode*** (1905-1982), um engenheiro americano que actuava principalmente nas áreas de electrónica, telecomunicações e sistemas.

Fig. 9.1 – Hendrik Wade Bode (1905-1982), americano.

Os diagramas de Bode (de *módulo* e de *fase*) são uma das formas de caracterizar sinais no domínio da frequência.

9.2 – **A Função de Transferência**

Os sinais são representados no domínio da frequência por funções de s:

$$X(s),\ Y(s),\ \text{etc.}$$

como já vimos no capítulo 6 (Transformadas de Laplace, $\mathscr{L}\{\, x(t)\, \} = X(s)$ e $\mathscr{L}\{\, y(t)\, \} = Y(s)$) ou por funções de jω

$$X(j\omega),\ Y(j\omega),\ \text{etc.}$$

como já vimos no capítulo 8 (Transformadas de Fourier, $\mathscr{F}\{\, x(t)\, \} = X(j\omega)$ e $\mathscr{F}\{\, y(t)\, \} = Y(j\omega)$).

Na verdade as Transformadas de Laplace e as Transformadas de Fourier são representações que estão muito relacionadas uma com a outra. Em muitos casos, se substituirmos ‘s’ por ‘jω’, isto é, fazendo-se ‘s’ ser um número complexo com parte real *nula* e parte imaginária ‘ω’,

$$s = 0 + j\omega = j\omega$$

obtemos a Transformadas de Fourier a partir da Transformada de Laplace,

$$X(s) = X(0+j\omega) = X(j\omega),\ Y(s) = Y(0+j\omega) = Y(j\omega),\ \text{etc.}$$

Se x(t) é a entrada de um sistema e y(t) é a saída deste mesmo sistema, em certas aplicações podem ser mais interessante representar no diagrama de blocos estes sinais

$$X(s),\ X(j\omega),\ Y(s) \text{ e } Y(j\omega)$$

no domínio da frequência, em vez de no domínio do tempo conforme é ilustrado na figura 9.2.

Fig. 9.2 – Diagrama de blocos com os sinais de entrada e saída representados no domínio da frequência.

onde G(s) e G(jω) são a reposta impulsional do sistema conforme visto nas secções 5.10 (no capítulo 5, Transformada de Laplace) e 8.5 (no capítulo 8, Transformada de Fourier) respectivamente.

Note que lá a reposta impulsional do sistema era, de forma geral, H(s) e H(jω) enquanto que aqui, de forma geral, será utilizado a notação G(s) e G(jω).

No capítulo 4, sobre Sistemas e no capítulo 8 sobre Transformadas de Fourier nós vimos alguns resultados clássicos sobre SLIT (*sistemas lineares e invariantes no tempo*). Por exemplo, no caso particular da entrada x(t) = impulso unitário,

$$x(t) = u_o(t)$$

então a saída y(t) = g(t) = a "*resposta impulsional do sistema*".

Sabendo-se a *resposta impulsional* g(t) de um sistema linear e invariante no tempo (SLIT) podemos saber a saída y(t) para qualquer entrada x(t)

$$\begin{aligned} y(t) = g(t) * x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)\cdot x(\tau)\cdot d\tau \\ = x(t) * g(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\cdot g(\tau)\cdot d\tau. \end{aligned}$$

Ou seja, a saída y(t) é a convolução entre a resposta impulsional g(t) e a entrada x(t). Isso que implica que

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= G(j\omega)\cdot X(j\omega) \\ &= X(j\omega)\cdot G(j\omega). \end{aligned}$$

onde

$X(j\omega) = \mathscr{F}\{\, x(t) \,\}$	X(jω) = Transformada de Fourier de x(t),
$Y(j\omega) = \mathscr{F}\{\, y(t) \,\}$	Y(jω) = Transformada de Fourier de y(t), e
$G(j\omega) = \mathscr{F}\{\, h(t) \,\}$	G(jω) = Transformada de Fourier de g(t)

e que está ilustrado na figura 9.3 abaixo.

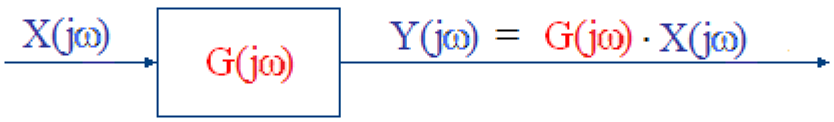

Fig. 9.3 – Diagrama de blocos com os sinais de entrada x(t) e de saída y(t) e resposta impulsional h(t), todos representados no domínio da frequência, em 'jω': X(jω), Y(jω) e G(jω).

Este resultado se deve ao facto que:

a transformada da convolução é o produto das transformadas.

a propriedade da Convolução para as Transformadas de Fourier, que foi vista na secção 8.4 (no capítulo 8, Propriedades da Transformada de Fourier).

Por esta razão pode-se expressar G(jω) como a razão entre o sinal de saída tomado no domínio da frequência [Y(jω)] e o sinal de entrada, também tomado no domínio da frequência [X(jω)], quando as condições iniciais do sistema são nulas

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \qquad \text{eq. (9.1)}$$

que é chamada de '*função de transferência*' do sistema.

Mas esta afirmação acima valida para as "Transformadas de Fourier", também vale para as "Transformadas de Laplace", conforme visto no capítulo 5. Logo:

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s) \cdot X(s) \\ &= X(s) \cdot G(s). \end{aligned}$$

onde

$X(s) = \mathscr{L}\{ x(t) \}$	X(s) = Transformada de Laplace de x(t),
$Y(s) = \mathscr{L}\{ y(t) \}$	Y(s) = Transformada de Laplace de y(t), e
$G(s) = \mathscr{L}\{ h(t) \}$	G(s) = Transformada de Laplace de h(t)

e que está ilustrado na figura 9.4 abaixo.

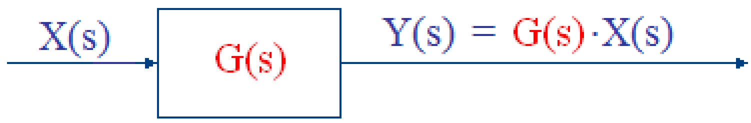

Fig. 9.4 – Diagrama de blocos com os sinais de entrada x(t) e de saída y(t) e resposta impulsional h(t), todos representados no domínio da frequência, em 's': X(s), Y(s) e G(s).

Mais uma vez este resultado se deve ao facto que:

a transformada da convolução é o produto das transformadas,

a propriedade da Convolução, mas agora para Transformada de Laplace, vista na secção 5.4 (no capítulo 5, Propriedades da Transformada de Laplace).

Por esta razão pode-se expressar G(s) como a razão entre o sinal de saída tomado no domínio da frequência [Y(s)] e o sinal de entrada também tomado no domínio da frequência [X(s)], quando as condições iniciais do sistema são nulas

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \qquad \text{eq. (9.2)}$$

que também é chamada de '*função de transferência*' do sistema.

Portanto a *função de transferência* de um sistema linear invariante no tempo (SLIT) representada no domínio da frequência:

$$G(s) \qquad \text{ou} \qquad G(j\omega),$$

conforme definidas nas equações eq. (9.1) e eq. (9.2), muito comummente são fracções racionais, ou seja, fracções cujo numerador e o denominador são polinómios, seja em 's':

$$G(s) = \frac{q(s)}{p(s)} \qquad \text{eq. (9.3)}$$

ou em 'jω'

$$G(j\omega) = \frac{q(j\omega)}{p(j\omega)} \qquad \text{eq. (9.4)}$$

onde q(s) e p(s) são polinómios em 's' do tipo

$$a_n\, s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + a_1\, s + a_o$$

e p(jω) e q(jω) são polinómios em 's = jω' do tipo

$$a_n\, (j\omega)^n + a_{n-1}\, (j\omega)^{n-1} + \ldots + a_1\, (j\omega) + a_o$$

9.3 – **Pólos e zeros da Função de Transferência**

Considere agora a função de transferência G(s) de um sistema, conforme foi definida na eq. (9.2), depois de reduzida para forma de fração racional da eq. (9.3)

$$G(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$$

e suponha que todos as eventuais raízes comuns de q(s) e p(s) tenham sido canceladas e portanto esta expressão acima está na forma irreductível.

- Equação Característica:

O polinómio p(s) é chamado de *polinómio característico* de G(s), ou o *polinómio característico* do sistema. A equação

$$p(s) = 0$$

é chamada de a "*equação característica*" do sistema.

- Pólos da função de transferência:

As raízes do *polinómio característico* são chamadas de *pólos* de G(s) ou *pólos* do sistema. Ou seja, os pólos são as soluções da *equação característica*.

- Zeros da função de transferência:

As raízes do numerados de G(s) (q(s)) são chamadas de *zeros* de G(s) ou *zeros* do sistema. Ou seja, os zeros são as soluções da *equação* q(s) = 0.

De maneira semelhante se define os *pólos* e *zeros* de uma resposta impulsional G(s).

Exemplo 9.1: Considere a *função de transferência* G(s) dada por

$$G(s) = \frac{2\cdot(s+30)}{s\,(s+2)(s^2+2s+2)}$$

É fácil de se verificar que G(s) tem um zero em

$$s = -30$$

e quatro pólos, respectivamente em:

$$s = 0, \qquad s = -2, \qquad e \qquad s = -1 \pm j$$

sendo que: 2 são reais e 2 são complexos.

Como s = 0 é um pólo de G(s), costuma-se dizer que este sistema tem um "*pólo na origem*".

A equação característica deste sistema é:

$$p(s) = s\,(s+2)(s^2+2s+2) = s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s$$

□

Exemplo 9.2: Considere agora a *função de transferência* $G_1(s)$ dada por

$$G_1(s) = \frac{10^5\, s}{(s+10)(s^2+10^2 s+10^4)}$$

Nitidamente $G_1(s)$ tem um "*zero na origem*", ou seja, em

$$s = 0$$

e três pólos, respectivamente em

$$s = -10 \quad e \quad s = -50 \pm j \cdot 50\sqrt{3}$$

A equação característica deste sistema é:

$$p_1(s) = (s+10)(s^2+10^2 s+10^4) = s^3 + 110\,s^2 + 11{\times}10^3\, s + 10^5$$

□

Exemplo 9.3: Considere agora a *função* G(s) dada por

$$G(s) = \frac{10s^2}{(s+a)^2\,(s+b^2)\,(s-c)},$$

G(s) tem um "*zero duplo na origem*" (i.e., em s = 0) e quatro pólos, respectivamente em

$$s = -a \ (\textit{duplo}), \quad s = -b^2 \quad e \quad s = c.$$

□

9.4 – **Os factores básicos em ‘s’ para a construção de um diagrama de Bode**

Vamos apresentar aqui os factores básicos para a construção de um diagrama de Bode de G(s).

Estes factores básicos são funções racionais em ‘s’. Qualquer G(s) da forma da eq. (9.4) acima pode ser desmembrado em factores básicos e com isso a construção de um esboço do diagrama de Bode se torna mais simples.

Na próxima secção apresentaremos de forma semelhante os factores básicos em ‘jω’ para a construção de um diagrama de Bode.

FACTORES BÁSICOS EM ‘S’:

- O ganho de Bode (K_B)

$$G(s) = K_B$$

- Factores integrativos [*pólos na origem*]: $(1/s)^n$, n = 1, 2, ...

$$G(s) = \frac{1}{s} \;,\; G(s) = \frac{1}{s^2} \;,\; G(s) = \frac{1}{s^3} \;,\; \cdots$$

- Factores derivativos [*zeros na origem*]: s^n , n = 1, 2, ...

$$G(s) = s \;,\; G(s) = s^2 \;,\; G(s) = s^3, \;\cdots$$

- Factores de 1ª ordem do tipo “*pólos reais*”: $1/(Ts + 1)^n$, n = 1, 2, ...

$$G(s) = \frac{1}{(Ts+1)} \;,\; G(s) = \frac{1}{(Ts+1)^2} ,\; G(s) = \frac{1}{(Ts+1)^3} \;,\; \cdots$$

- Factores de 1ª ordem do tipo “*zeros reais*”: $(Ts+ 1)^n$, n = 1, 2, ...

$$G(s) = (Ts+1) \;,\; G(s) = (Ts+1)^2 ,\; G(s) = (Ts+1)^3 \;,\; \cdots$$

- Factores de 2ª ordem ou quadráticos, do tipo "*pólos complexos*":
  $1/[1+2\zeta(s/\omega_n)+(s/\omega_n)^2]^n$, n = 1, 2, ...

$$G(s) = \frac{1}{\left[1+\left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\right)s+\frac{s^2}{\omega_n^2}\right]},$$

$$G(s) = \frac{1}{\left[1+\left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\right)s+\frac{s^2}{\omega_n^2}\right]^2},$$

$$G(s) = \frac{1}{\left[1+\left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\right)s+\frac{s^2}{\omega_n^2}\right]^3}, \quad \cdots$$

- Factores de 2ª ordem ou quadráticos, do tipo "*zeros complexos*":
  $[1+2\zeta(s/\omega_n)+(s/\omega_n)^2]^n$, n = 1, 2, ...

$$G(s) = 1+\left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\right)s+\frac{s^2}{\omega_n^2},$$

$$G(s) = \left[1+\left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\right)s+\frac{s^2}{\omega_n^2}\right]^2,$$

$$G(s) = \left[1+\left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\right)s+\frac{s^2}{\omega_n^2}\right]^3, \quad \cdots$$

9.5 – **Os factores básicos em ‘jω’ para a construção de um diagrama de Bode**

Vamos apresentar aqui os factores básicos para a construção de um diagrama de Bode de G(jω).

Estes factores básicos são na verdade derivados dos já vistos acima para G(s). Eles são as mesmas funções racionais em ‘s’ da secção anterior, depois de substituir-se s por jω.

$$s = 0 + j\omega = j\omega$$

Qualquer G(jω) da forma da eq. (9.4) acima pode ser desmembrado em factores básicos e com isso a construção de um esboço do diagrama de Bode se torna mais simples.

FACTORES BÁSICOS EM ‘S’:

- O ganho de Bode (K_B)

$$G(j\omega) = K_B$$

- Factores integrativos [*pólos na origem*]: $(1/j\omega)^n$, n = 1, 2, ...

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}, \ G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2}, \ G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^3}, \ \cdots$$

- Factores derivativos [*zeros na origem*]: $(j\omega)^n$, n = 1, 2, ...

$$G(j\omega) = j\omega, \ G(j\omega) = (j\omega)^2, \ G(j\omega) = (j\omega)^3, \ \cdots$$

- Factores de 1ª ordem do tipo “*pólos reais*”: $1/(1+ j\omega T)^n$, n = 1, 2, ...

$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega T+1)}, \ G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega T+1)^2}, \ G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega T+1)^3}, \ \cdots$$

- Factores de 1ª ordem do tipo “*zeros reais*”: $(1+ j\omega T)^n$, n = 1, 2, ...

$$G(j\omega) = (j\omega T+1), \ G(j\omega) = (j\omega T+1)^2, \ G(j\omega) = (j\omega T+1)^3, \ \cdots$$

- Factores de 2ª ordem ou quadráticos, do tipo "*pólos complexos*":
  $1/[1+2\zeta(j\omega/\omega_n)+(j\omega/\omega_n)^2]^n$, n = 1, 2, ...

$$G(j\omega)=\frac{1}{\left[1+2\zeta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]},$$

$$G(j\omega)=\frac{1}{\left[1+2\zeta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2},$$

$$G(j\omega)=\frac{1}{\left[1+2\zeta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^3},\ \ldots$$

- Factores de 2ª ordem ou quadráticos, do tipo "*zeros complexos*":
  $[1+2\zeta(j\omega/\omega_n)+(j\omega/\omega_n)^2]^n$, n = 1, 2, ...

$$G(j\omega)=1+2\zeta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2,$$

$$G(j\omega)=\left[1+2\zeta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2,$$

$$G(j\omega)=\left[1+2\zeta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^3,\ \ldots$$

9.6 – **Desmembramento de funções G(s) em factores básicos**

Qualquer função transferência G(s) pode facilmente ser reescrita somente com os factores básicos definidos acima nas duas secções anteriores.

Vamos ilustrar isso com um exemplo:

Exemplo 9.4: Considere agora a *função* G(s) vista no exemplo 9.1 que é dada por

$$G(s) = \frac{2\,(s+30)}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$$

Agora, substituindo-se (s + 30) no numerador por

$$(s+30) = 30 \cdot \left(\frac{s}{30}+1\right)$$

obtemos a expressão abaixo que já tem um fator básico no numerador:

$$G(s) = \frac{2 \cdot 30 \left(\frac{s}{30}+1\right)}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$$

Semelhantemente, para o denominador, uma vez que um dos 3 factores já é um factor básico (integrativo, pólo na origem), substituindo-se os outros dois:

$$(s+2) = 2 \cdot \left(\frac{s}{2}+1\right)$$

e

$$(s^2 + 2s + 2) = 2 \cdot \left(\frac{s^2}{2} + s + 1\right)$$

obtemos a expressão abaixo que já tem três fatores básico no denominador:

$$G(s) = \frac{2 \cdot 30 \left(\frac{s}{30} + 1\right)}{2 \cdot 2 \cdot s \cdot \left(\frac{s}{2} + 1\right) \cdot \left(\frac{s^2}{2} + s + 1\right)}$$

Finalmente, juntando as constantes (do numerador e do denominador), obtém-se:

$$K_B = \frac{2 \times 30}{2 \times 2} = 15$$

e podemos escrever a expressão abaixo:

$$G(s) = \frac{15 \cdot \left(\frac{s}{30} + 1\right)}{s \cdot \left(\frac{s}{2} + 1\right) \cdot \left(\frac{s^2}{2} + s + 1\right)}$$

que está inteiramente escrita em termos de factores básicos na forma:

$$G(s) = \frac{K_B \cdot (T's + 1)}{s \cdot (Ts + 1) \cdot \left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1\right)}$$

onde:

$K_B = 15$ $T = 1/2$ $T' = 1/30$

$\omega_n = \sqrt{2}$ $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$

□

Exemplo 9.5:

Para escrever a função de transferência G(s) do exemplo anterior na forma de factores básicos em $j\omega$ e então obtermos $G(j\omega)$ basta substituir no resultado obtido para G(s),

$$s = 0 + j\omega,$$

ou seja,

$$s = j\omega$$

pois esta é a única diferença entre as duas formas G(s) e $G(j\omega)$.

Fazendo isso, obtém-se:

$$G(j\omega) = \frac{15 \cdot \left(\dfrac{j\omega}{30} + 1\right)}{j\omega\left(\dfrac{j\omega}{2} + 1\right)\cdot\left(\dfrac{(j\omega)^2}{2} + j\omega + 1\right)} =$$

$$= \frac{15 \cdot \left(1 + j\cdot\dfrac{\omega}{30}\right)}{j\omega\left(1 + j\cdot\dfrac{\omega}{2}\right)\cdot\left[\left(1 - \dfrac{\omega^2}{2}\right) + j\omega\right]}$$

□

9.7 – **Diagramas de Bode dos factores básicos**

Os diagramas de Bode são construídos para funções de transferência G(jω) e são dois:

diagramas de Bode de ***módulo***

e

diagramas de Bode de ***fase***.

Os diagramas de Bode de ***módulo*** são gráficos de

$$|\, G(j\omega)\,| \text{ em dB } (|\, G(j\omega)\,|_{dB})$$
$$\times$$
$$\omega \text{ (com escala logarítmica)}$$

enquanto que os diagramas de Bode de ***fase*** são gráficos de

$$\angle\, G(j\omega) \text{ em graus}$$
$$\times$$
$$\omega \text{ (com escala logarítmica)}$$

Sabendo-se os diagramas de Bode dos factores básicos é possível utiliza-los na construção dos diagramas de Bode de qualquer outra função de transferência G(jω) que desmembrarmos em termos dos factores básicos.

Uma vez familiarizados com os gráficos dos diagramas de Bode dos factores básicos que apresentamos aqui nesta secção, a construção dos diagramas de Bode das demais funções de transferência fica facilitada, como veremos nos exemplos da próxima secção.

Portanto, agora vamos mostrar os diagramas de Bode (***módulo*** e ***fase***) para cada um dos factores básicos vistos na secção anterior.

- O ganho de Bode (K_B)

Como $G(j\omega) = K_B$ é uma constante (não varia com ω), temos que $|K_B|$ em dB é dado por:

$$\left|K_B\right|_{dB} = 20 \cdot \log_{10}\left|K_B\right|$$

enquanto que $\angle K_B$ é 0 ou – 180º, $\forall\omega$, isto é:

$$\angle K_B = 0^o \text{ se } K_B \text{ é uma constante positiva,}$$

ou

$$\angle K_B = -180^o \text{ se } K_B \text{ é uma constante negativa.}$$

Logo, como já dito acima na definição de diagramas de Bode da *fase*, o normal é representar a *fase* de K_B (i.e., o ângulo $\angle K_B$) em ***graus*** (em vez de radianos).

$$G(j\omega) = \angle K_B = \begin{cases} 0^o, & \text{se } K_B > 0 \\ -180^o, & \text{se } K_B < 0 \end{cases}$$

É claro que o ângulo de *fase* para K_B negativo, – 180º é o mesmo que +180º que é na verdade é π. No entanto, para efeito de diagrama de Bode tem-se a tendência de adoptar $\angle K_B = -180^o$ nestas situações.

Isso se deve ao facto de que, como $G(j\omega)$ tem um número de pólos superior (ou no máximo igual) ao número de zeros, então o $\angle G(j\omega)$ irá sempre tender para a parte *negativa* (para a parte de baixo, *abaixo* de 0º).

O diagrama de Bode (***módulo*** e ***fase***) de $G(j\omega) = \angle K_B$ está esboçado na figura 9.5.

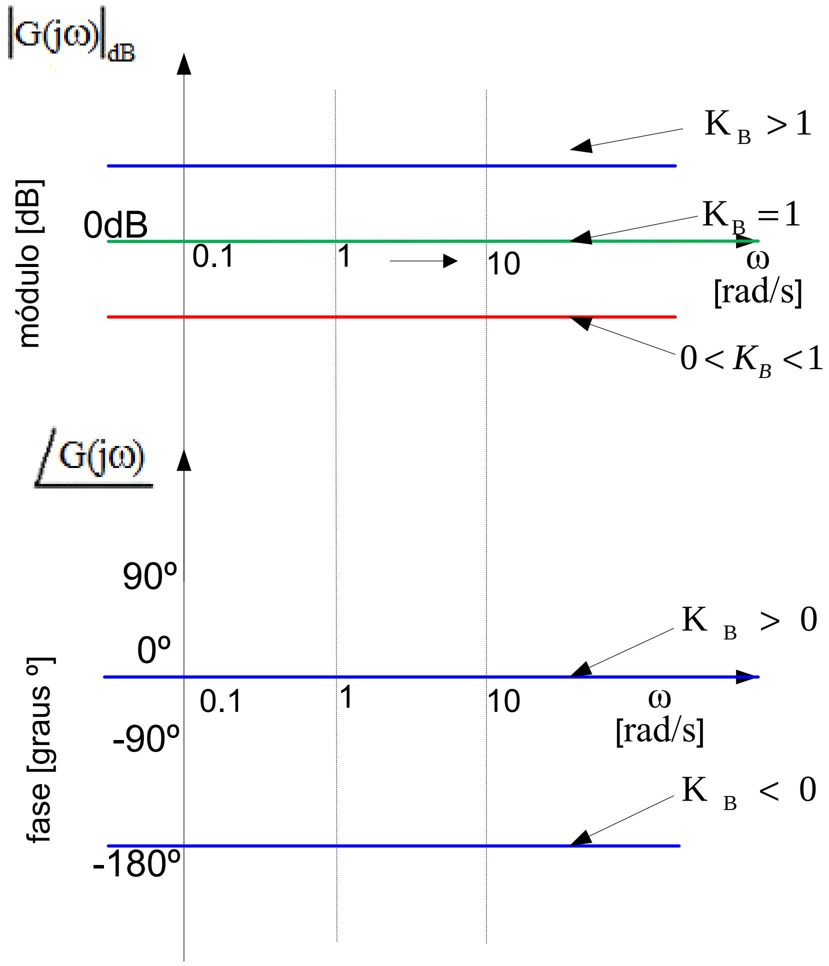

Fig. 9.5 – Diagrama de Bode (*módulo* e *fase*). O ganho de Bode G(jω) = K_B.

Note que no diagrama de Bode de ***módulo*** acima foi levado em consideração que:

Se K_B>1, então

$$|G(j\omega)|_{dB} > 0$$

Se K_B=1, então

$$|G(j\omega)|_{dB} = 0$$

Se 0<K_B<1, então

$$|G(j\omega)|_{dB} < 0$$

O efeito que uma variação do ganho K_B em um diagramas de Bode com vários factores básicos é que ele faz deslocar a curva de *módulo* ***para cima*** (se $K_B > 0$) ou ***para baixo*** (se $K_B < 0$) e ***não*** afecta a curva do *ângulo de fase*.

Isto é, aumentando-se o valor de K_B fazemos todo o diagrama de Bode de ***módulo*** "*subir*" enquanto que diminuindo-se o valor de K_B fazemos todo o diagrama de Bode de ***módulo*** "*descer*".

Por outro lado o diagrama de Bode de ***fase*** fica inalterado às variações de K_B se $K_B > 0$, ou fica deslocado para baixo de 180º, no caso de $K_B < 0$.

- Factor Integral $(j\omega)^{-1}$

Para $G(j\omega) = (j\omega)^{-1}$, temos que $|G(j\omega)|$ em dB é dado por:

$$G(j\omega)\Big|_{dB} = 20 \cdot \log_{10} \left| \frac{1}{j\omega} \right|$$

$$= -20 \cdot \log_{10} \omega \ \ [dB]$$

que é na verdade a equação de uma recta com declive – 20 dB/década pois ω está representado na escala logarítmica.

Para se ver isto, primeiramente note que

$$|G(j\omega)|_{dB} \text{ intercepta } 0 \text{ dB em } \omega = 1, \qquad \text{eq. (9.5)}$$

um detalhe que facilita para fazermos o seu esboço.

Na verdade temos que, olhando-se para algumas décadas consecutivas, temos que, no diagrama de Bode de *módulo* de $G(j\omega)$ ($|G(j\omega)|_{dB}$):

	⋮	⇒	⋮
para	$\omega = 0{,}01$	⇒	$G(j\omega) = 40$ dB
para	$\omega = 0{,}1$	⇒	$G(j\omega) = 20$ dB
para	$\omega = 1$	⇒	$G(j\omega) = 0$ dB
para	$\omega = 10$	⇒	$G(j\omega) = -20$ dB
para	$\omega = 10^2$	⇒	$G(j\omega) = -40$ dB
	⋮	⇒	⋮

o que permite se ver claramente que trata-se de uma recta com declive – 20 dB/década (como pode ser visto na figura 9.6).

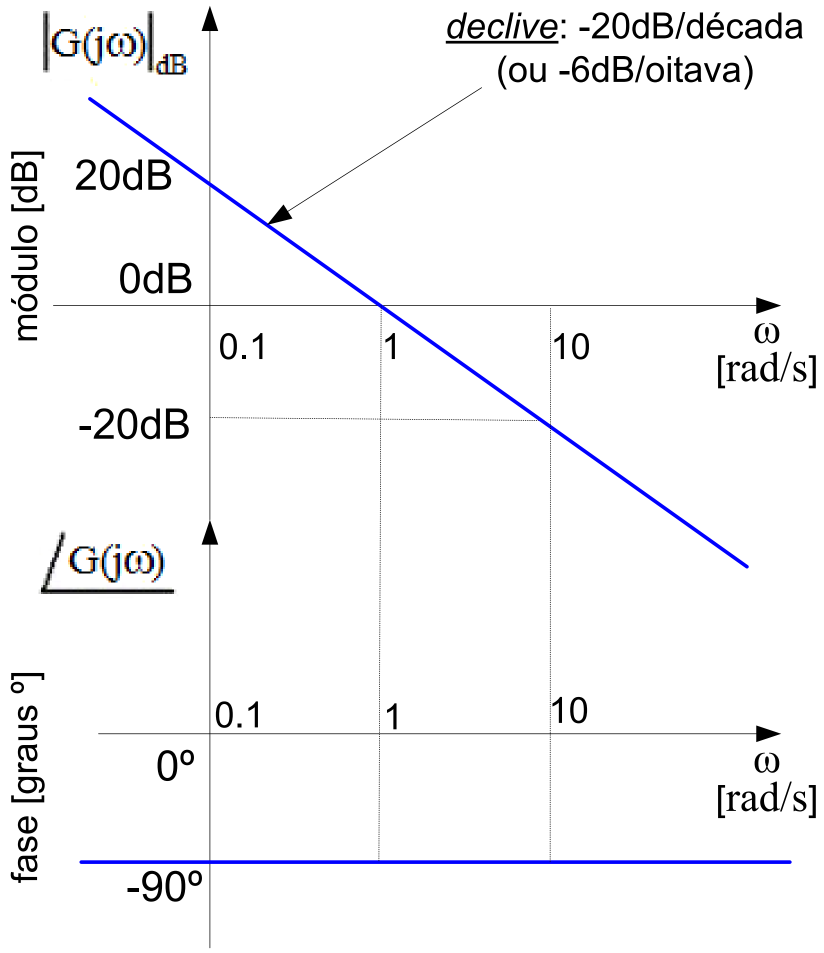

Fig. 9.6 – Diagrama de Bode (*módulo* e *fase*). Factor integral $G(j\omega) = 1/ j\omega$.

Também é costume se olhar para algumas oitavas consecutivas (em vez de décadas) do diagrama de Bode de *módulo* de $G(j\omega)$ ($|G(j\omega)|_{dB}$). Isto é: uma oitava corresponde à: o dobro /ou a metade, dependendo do sentido (para direita ou para esquerda / aumentando-se / ou diminuindo-se).

	$\vdots$	$\Rightarrow$	$\vdots$
para	$\omega = 0{,}5$	$\Rightarrow$	$G(j\omega) = 6$ dB
para	$\omega = 1$	$\Rightarrow$	$G(j\omega) = 0$ dB
para	$\omega = 2$	$\Rightarrow$	$G(j\omega) = -6$ dB
para	$\omega = 4$	$\Rightarrow$	$G(j\omega) = -12$ dB
	$\vdots$	$\Rightarrow$	$\vdots$

que é uma forma alternativa de olhar para esta recta pois o declive de – 20 dB/década é equivalente a – 6 dB/oitava.

Uma oitava corresponde à: o dobro /ou a metade, dependendo do sentido (para direita ou para esquerda; aumentando-se / ou diminuindo-se).

Assim como o termo "*harmónico*", que aparecia nas séries de Fourier (capítulo 5), vem da música, também este termo "*oitava*" vem da música. Corresponde à *oitava* nota, ou seja, a mesma nota mas no harmónico seguinte / ou no anterior, pois as notas são apenas sete e depois se repetem, com o dobro / ou com a metade da frequència. É como o oitavo dia, que é o mesmo dia da semana, mas na semana seguinte / ou na anterior.

Por outro lado, para a *fase* $\angle G(j\omega)$, temos que:

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega) &= \angle (1/ j\omega) = \\ &= -\angle j\omega = \\ &= -90^o , \qquad \forall\omega. \end{aligned}$$

Observe que, como ω está representado numa escala logarítmica, então ω é sempre positivo ($\omega > 0$) e portanto $\angle j\omega = 90^o$, e logo $-\angle j\omega = -90^o$.

Portanto, o diagrama de Bode de ***fase*** $\angle G(j\omega)$, $\forall\omega$, é uma constante igual a -90^o:

Este diagrama de Bode (***módulo*** e ***fase***) de $G(j\omega) = 1/ j\omega$ está esboçado na figura 9.6.

O efeito do factor básico $G(j\omega) = 1/j\omega$ em um diagrama de Bode de *fase* com vários factores básicos é que ele faz deslocar a curva de *fase* ***para baixo*** de 90^o.

- Outros factores integrativos $(j\omega)^{-2}$, $(j\omega)^{-3}$, …, $(j\omega)^{-n}$

Para $G(j\omega) = (j\omega)^{-n}$, temos uma situação bastante semelhante aos factores $(j\omega)^{-1}$ que vimos acima. O *módulo* $|G(j\omega)|$ em dB é dado por:

$$\begin{aligned} G(j\omega)\Big|_{dB} &= 20 \cdot \log_{10}\left|\frac{1}{(j\omega)^n}\right| \\ &= 20 \cdot n \cdot \log_{10}\left|\frac{1}{j\omega}\right| \\ &= -20 \cdot n \cdot \log_{10}\omega \quad [dB] \end{aligned}$$

que é na verdade a equação de uma recta com declive – 20n dB/década pois ω está representado na escala logarítmica (como pode ser visto na figura 9.7).

Equivalentemente esta recta tem o declive de – 6n dB/oitava.

Note também que, assim como antes [na eq. (9.5)],

$$|G(j\omega)|_{dB} \text{ intercepta 0 dB em } \omega = 1, \qquad \text{eq. (9.6)}$$

um detalhe que facilita para fazermos o esboço do diagrama de Bode.

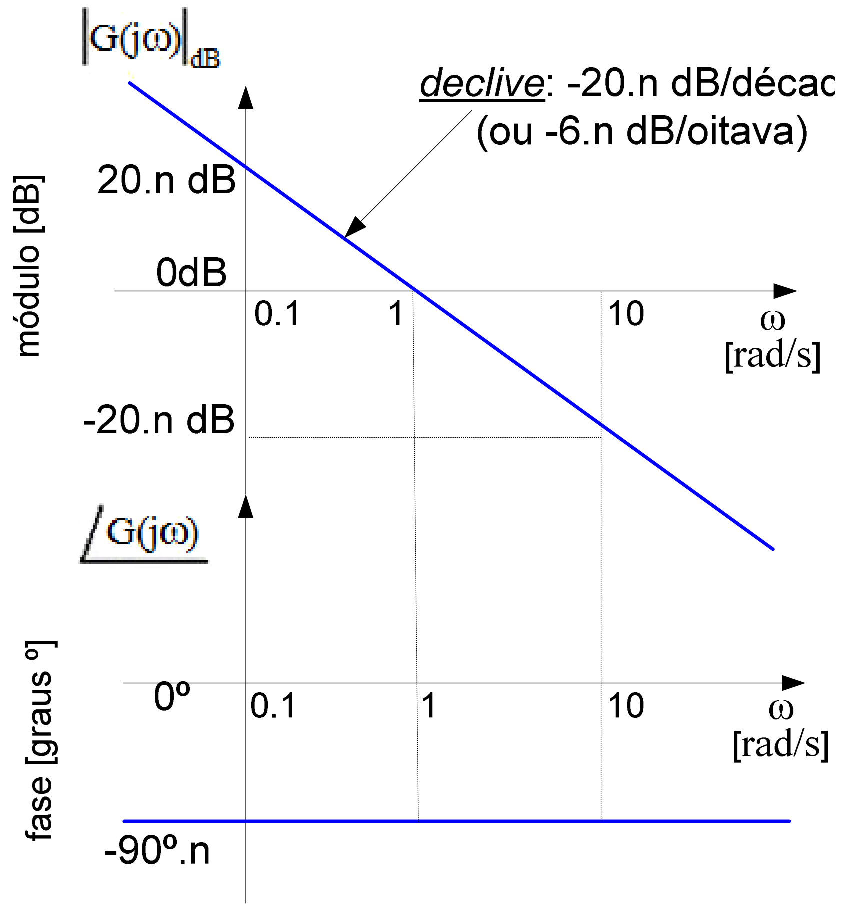

Fig. 9.7 – Diagrama de Bode (*módulo* e *fase*). Factores integrativos $G(j\omega) = (1/\, j\omega)^n$.

Por outro lado, para a *fase* $\angle\, G(j\omega)$, temos que:

$$\begin{aligned} \angle\, G(j\omega) &= \angle\, (1/\, j\omega)^n = \\ &= -\, n\, (\angle\, j\omega) = \\ &= -\, 90^o \times n, \qquad \forall\omega. \end{aligned}$$

Portanto, o diagrama de Bode de ***fase*** $\angle$ G(jω), ∀ω, é uma constante igual a

$$-\,90^{\circ} \times n:$$

Este diagrama de Bode (***módulo*** e ***fase***) de $G(j\omega) = (1/\ j\omega)^n$ está esboçado na figura 9.7.

O efeito do factor básico $G(j\omega) = (1/\ j\omega)^n$ em um diagrama de Bode de *fase* com vários factores básicos é que ele faz deslocar a curva de *fase* ***para baixo*** de $90^{\circ} \times n$.

- Factores derivativos jω, $(j\omega)^2$, $(j\omega)^3$, …, $(j\omega)^n$

Para $G(j\omega) = (j\omega)^n$, temos uma situação um pouco semelhante aos factores $(j\omega)^{-n}$ que vimos acima. O *módulo* |G(jω)| em dB é dado por:

$$\begin{aligned} G(j\omega)\big|_{dB} &= 20 \cdot \log_{10} \left| (j\omega)^n \right| \\ &= 20 \cdot n \cdot \log_{10} \left| j\omega \right| \\ &= 20 \cdot n \cdot \log_{10} \omega \ \ [dB] \end{aligned}$$

que é a equação de uma recta com declive +20n dB/década pois ω está representado na escala logarítmica (como pode ser visto na figura 9.8).

Equivalentemente esta recta tem o declive de +6n dB/oitava.

Note também que aqui novamente, assim como antes [na eq. (9.5) e (9.6)],

$$|G(j\omega)|_{dB} \ \text{intercepta 0 dB em } \omega = 1, \qquad \text{eq. (9.7)}$$

que nos facilita para fazermos o esboço do diagrama de Bode de *módulo*.

Por outro lado, para a *fase* $\angle$ G(jω), temos que:

$$\begin{aligned} \angle\, G(j\omega) &= \angle\, (1/\ j\omega)^n = \\ &= -\, n\, (\angle\, j\omega) = \\ &= -\, 90^{\circ} \times n, \qquad \forall\omega. \end{aligned}$$

Portanto, o diagrama de Bode de ***fase*** $\angle G(j\omega)$, $\forall\omega$, é uma constante igual a $+90^o \times n$:

Este diagrama de Bode (***módulo*** e ***fase***) de $G(j\omega) = (j\omega)^n$ está esboçado na figura 9.8.

O efeito do factor básico $G(j\omega) = (j\omega)^n$ em um diagrama de Bode de *fase* com vários factores básicos é que ele faz deslocar a curva de *fase* ***para cima*** de $90^o \times n$.

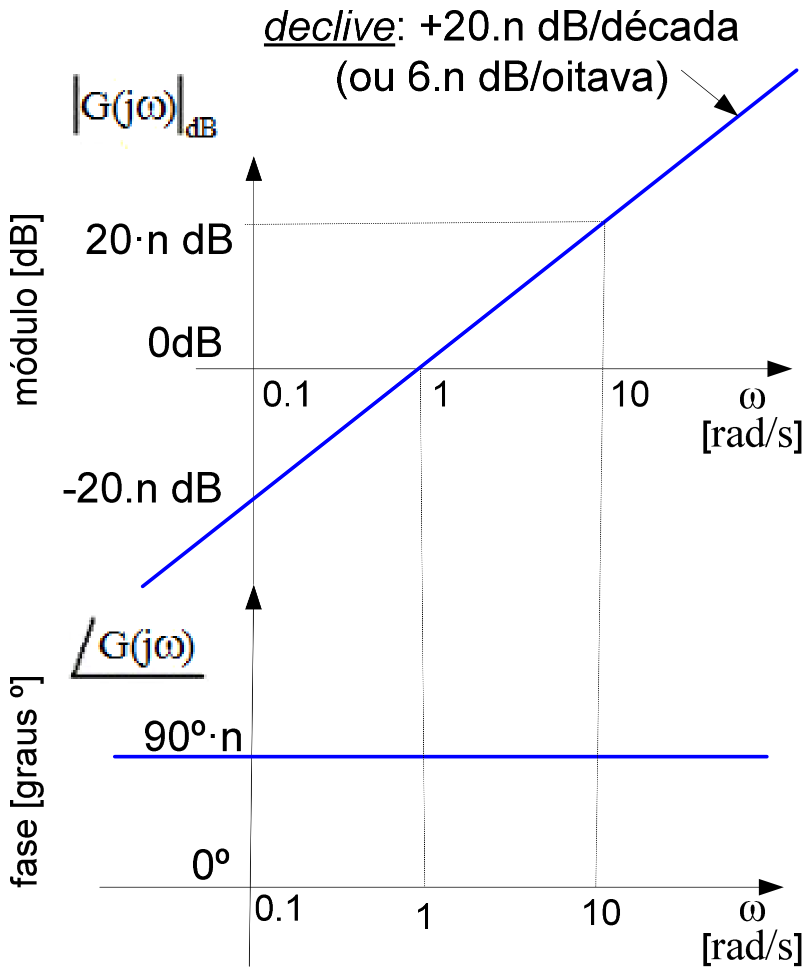

Fig. 9.8 – Diagrama de Bode (*módulo* e *fase*). Factores derivativos $G(j\omega) = (j\omega)^n$.

- Factor pólo primeira ordem $(1 + j\omega T)^{-1}$

Para $G(j\omega) = 1/\ (1 + j\omega T)$, temos que o *módulo* $|G(j\omega)|$ em dB é dado por:

$$G(j\omega)\Big|_{dB} = 20 \cdot \log_{10} \left| \frac{1}{(1 + j\omega T)} \right|$$

$$= -20 \cdot \log_{10} \cdot \sqrt{1 + (\omega \cdot T)^2}$$

que vamos dividir em 2 intervalos: $\omega << 1/T$ e $\omega >> 1/T$, ou seja, para *frequências baixas* e *altas*.

No intervalo, $\omega << 1/T$ (*frequências baixas*), observamos que:

$$\omega \cdot T << 1 \;\Rightarrow\; 1+(\omega \cdot T)^2 \cong 1 \quad \Rightarrow \quad G(j\omega)\big|_{dB} = -20 \cdot \log_{10} \cdot \sqrt{1+(\omega \cdot T)^2} \cong -20 \cdot \log_{10} \cdot (1) = 0\,dB$$

enquanto que no intervalo, $\omega >> 1/T$ (*frequências altas*), observamos que:

$$\omega \cdot T >> 1 \;\Rightarrow\; 1+(\omega \cdot T)^2 \cong (\omega \cdot T)^2 \quad \Rightarrow \quad G(j\omega)\big|_{dB} = -20 \cdot \log_{10} \cdot \sqrt{1+(\omega \cdot T)^2} \cong -20 \cdot \log_{10} (\omega \cdot T)$$

e portanto:

$$G(j\omega)\big|_{dB} = \begin{cases} 0, & \omega << \dfrac{1}{T} \\ -20 \cdot \log_{10}(\omega \cdot T), & \omega >> \dfrac{1}{T} \end{cases}$$

Logo, temos 2 aproximações para a curva $G(j\omega)|_{dB} = 1/\,(1 + j\omega T)|_{dB}$, ambas rectas, às quais chamamos de

"*rectas assímptotas*"

para *frequências altas* e *baixas*, que podem ser vistas na figura 9.9.

A expressão de $G(j\omega)|_{dB}$ para $\omega >> 1/T$ (*frequências altas*) é de facto uma recta com declive de – 20 dB/década, (ou – 6 dB/oitava), pois ω está representado na escala logarítmica.

Note que:

a *recta assímptota* para *frequências altas*
intercepta 0 dB em $\omega = \omega_c = 1/T$, eq. (9.8)

em vez de em $\omega = 1$, como era o caso das rectas das eq. (9.5), eq. (9.6) e eq. (9.7).

Este é um detalhe a ter em atenção ao fazermos o esboço do diagrama de Bode de *módulo*.

Na verdade, este ponto:

0 dB para $\omega = 1/T$

é onde as duas *rectas assímptotas* se interceptam (como pode ser visto na figura 9.9).

Por esta razão a frequência $\omega_c = \dfrac{1}{T}$ é chamada de *frequência de "canto"* ("*corner*" *frequency*), às vezes também chamada de *frequência de "corte"* (em processamento de sinais quando envolvem filtros).

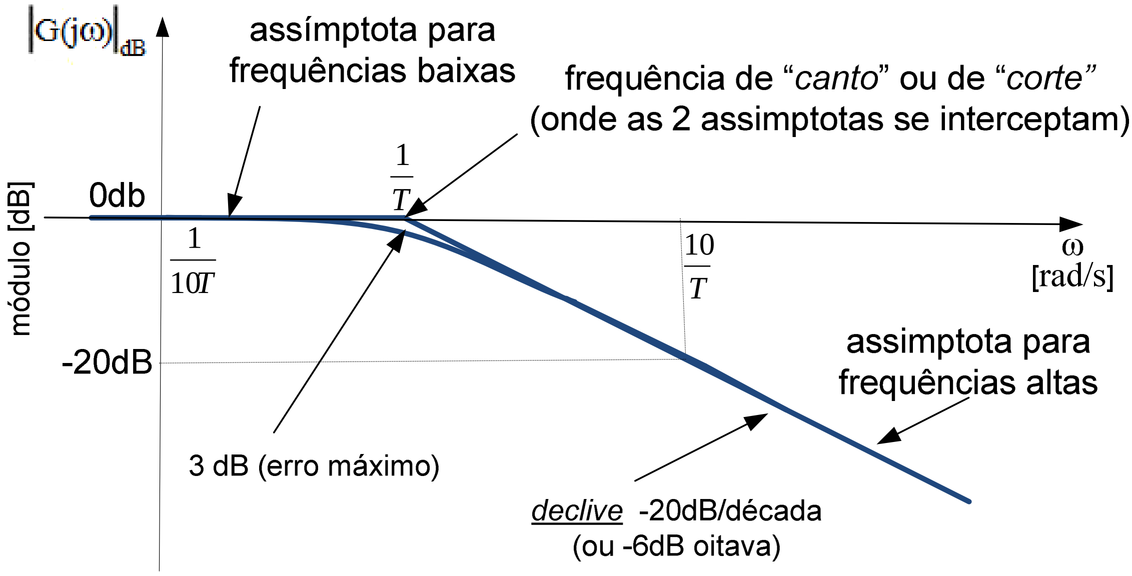

Fig. 9.9 – Diagrama de Bode de *módulo*. Factor pólo primeira ordem $G(j\omega) = 1/\,(1 + j\omega T)$.

A curva real de $G(j\omega)|_{dB}$ só coincide com as *assímptotas* quando $\omega << \omega_c$ ou quando $\omega >> \omega_c$, que na prática corresponde a

$$\omega < \frac{1}{(10 \cdot T)} \quad \text{(para } \textit{frequências baixas}\text{)} \quad \text{e} \quad \omega < \frac{10}{T} \quad \text{(para } \textit{frequências altas}\text{)}$$

Ou seja, as assímptotas são válidas para uma ***década antes*** da frequência de canto $\omega_c = 1/T$ (no caso da *assímptota* para *frequências baixas*) ou uma ***década depois*** da frequência de canto $\omega_c = 1/T$ (no caso da *assímptota* para *frequências altas*).

Na verdade mostra-se facilmente que tanto para $\omega = 1/10T$ (uma década abaixo de ω_c), como também para $\omega = 10T$ (uma década acima de ω_c), a curva de *módulo* $G(j\omega)|_{dB}$ apresenta erro desprezível, praticamente nulo:

$$G(j\omega)|_{dB} = -\,0{,}04 \text{ db} \cong 0 \text{ dB} \qquad \text{para } \omega = 1/(10T) \qquad \text{ou} \qquad \text{para } \omega = 10T.$$

Nas proximidades da frequência de *canto* ω_c as *assímptotas* apenas aproximam da curva real de $G(j\omega)|_{dB}$.

O erro máximo é de **3 dB** e ocorre exactamente na frequência de canto $\omega_c = 1/T$, o ponto onde as duas *assímptotas* se encontram, pois para este valor de ω,

$$G(j\omega)\Big|_{dB} = 20\cdot\log_{10}\left|\frac{1}{(1+j)}\right| = -20\cdot\log_{10}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}} = -3dB \quad , \qquad \text{para } \omega = \omega_c = \frac{1}{T}$$

(como pode ser visto na figura 9.9).

Para o ângulo de *fase* $\angle$ G(jω), temos que:

$$\begin{aligned}\angle G(j\omega) &= \angle 1/(1 + j\omega T) = \\ &= -\angle(1 + j\omega T) \\ &= -\operatorname{arctg}(\omega T) \qquad \text{eq. (9.9)}\end{aligned}$$

Aqui também pode-se pensar nos intervalos: $\omega << 1/T$ e $\omega >> 1/T$, ou seja, para *frequências baixa*s e *altas*.

Nas *frequências baixas*, $\omega << 1/T$, observamos que:

$$\omega\cdot T << 1 \;\Rightarrow\; 1+(\omega\cdot T) \cong 1 \;\Rightarrow\; \angle G(j\omega) = \angle 1 \cong 0^o$$

enquanto que nas *frequências altas*, $\omega >> 1/T$, observamos que:

$$\omega\cdot T >> 1 \;\Rightarrow\; 1+j\cdot(\omega T) \cong j\cdot(\omega T) \;\Rightarrow\; \angle G(j\omega) = -\angle j\cdot(\omega T) \cong -90^o$$

resultados que também poderiam ser facilmente obtidos usando a eq. (9.9) com $\omega T \cong 0$ e $\omega T \cong \infty$, respectivamente, pois

$$\operatorname{arctg}(0) = 0^o \qquad \text{e} \qquad -\operatorname{arctg}(\infty) = -90^o.$$

e portanto:

$$\angle G(j\omega) = \begin{cases} 0, & \omega << \dfrac{1}{T} \\ -\operatorname{arctg}(\omega T), & \dfrac{T}{100} < \omega < 100T \\ -90^o, & \omega >> \dfrac{1}{T} \end{cases}$$

Note que para $\omega_c = 1/T$, $G(j\omega_c) = -\operatorname{arctg}(\omega_c T) = -\operatorname{arctg}(1) = -45^o$, logo, na frequência de "*canto*" ou de "*corte*" $\omega_c = 1/T$ temos:

a curva do $\angle$ G(jω) passa por – 45º em ω = 1/T, eq. (9.10)

isto é, na metade do intervalo entre 0º e – 90º; um detalhe a ter em atenção ao fazermos o esboço do diagrama de Bode de *fase*.

Ou seja diagrama de Bode de ***fase*** $\angle$ G(jω) tende assimptoticamente para 0º (à esquerda) e para – 90º (à direita).

Na prática consideramos que $\angle$ G(jω) varia de 0º a – 90º enquanto a frequência ω varia

$$\text{de} \quad \frac{\omega_c}{10} \quad \text{até} \quad 10 \cdot \omega_c .$$

isto é, desde uma ***década antes*** da frequência de *canto* ω_c = 1/T (*assímptota* para *frequências baixas*) até uma ***década depois*** da frequência de *canto* ω_c = 1/T (*assímptota* para *frequências altas*).

O diagrama de Bode de ***fase*** de G(jω) = $(1 + j\omega T)^{-1}$ está esboçado na figura 9.10.

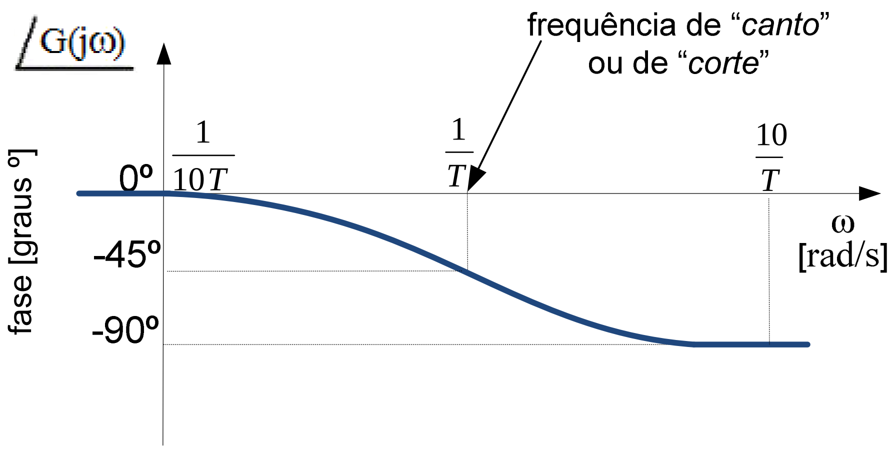

Fig. 9.10 – Diagrama de Bode de *fase*. Factor pólo primeira ordem G(jω) = 1/ (1 + jωT).

- Factores pólos múltiplos $(1 + j\omega T)^{-2}$, $(1 + j\omega T)^{-3}$, ..., $(1 + j\omega T)^{-n}$

Para G(jω) = $1/(1 + j\omega T)^{n}$, temos que o *módulo* |G(jω)| em dB é dado por:

$$G(j\omega)\big|_{dB} = 20 \cdot \log_{10}\left|\frac{1}{(1+j\omega T)^n}\right|$$

$$= -20 \cdot n \cdot \log_{10} \cdot \sqrt{1+(\omega \cdot T)^2} \quad [\,dB\,]$$

e dividindo em 2 intervalos: $\omega << 1/T$ e $\omega >> 1/T$, ou seja, para *frequências baixas* e *altas*, observamos que:

$$G(j\omega)\big|_{dB} = \begin{cases} 0, & \omega << \dfrac{1}{T} \\ -20 \cdot n \cdot \log_{10}(\omega \cdot T), & \omega >> \dfrac{1}{T} \end{cases}$$

que pode ser vista na figura 9.11.

Portanto, temos novamente 2 aproximações para a curva $G(j\omega)|_{dB} = 1/\,(1 + j\omega T)^n|_{\,dB}$, por duas "*rectas assímptotas*" em *frequências baixas* e *altas* (esta última com declive de – 20 dB/década ou – 6 dB/oitava).

Note que, aqui também tem-se a frequência de "*canto*" ou de "*corte*" ("*corner*" *frequency*), $\omega_c = 1/T$, e assim como na secção anterior, eq. (9.8), aqui também:

a *recta assímptota* para *frequências altas*
intercepta 0 dB em $\omega = \omega_c = 1/T$, eq. (9.11)

um detalhe a ter em atenção ao fazermos o esboço do diagrama de Bode de *módulo*.

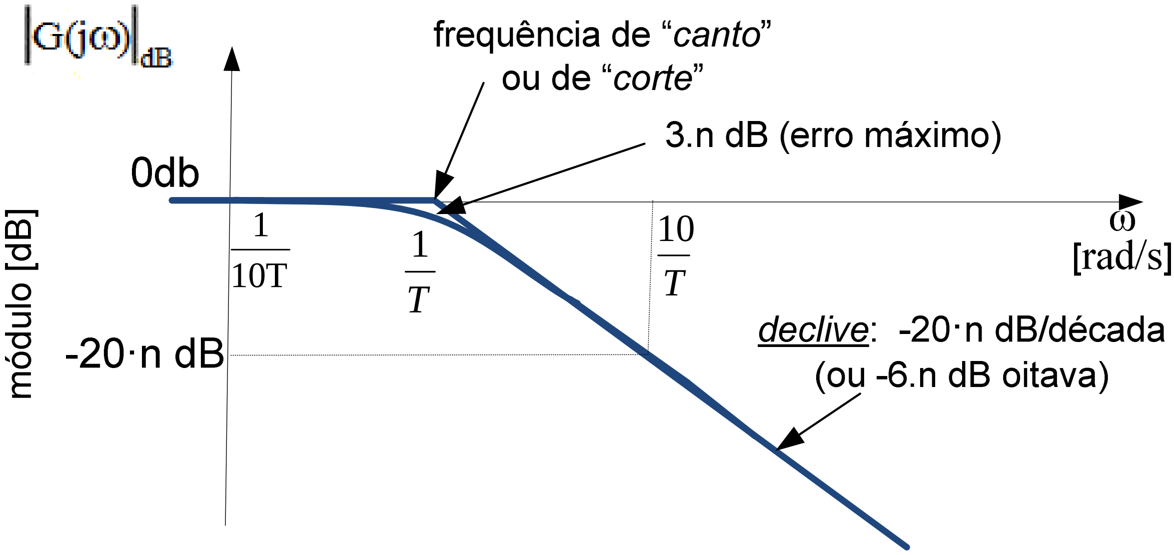

Fig. 9.11 – Diagrama de Bode de *módulo*. Factores pólos múltiplos
$G(j\omega) = 1/\,(1 + j\omega T)^n$, n = 2, 3, …

Novamente, a curva real de $G(j\omega)|_{dB}$ só coincide com as *assímptotas* quando $\omega << \omega_c$ ou quando $\omega >> \omega_c$, que na prática corresponde a

$$\omega < \frac{1}{(10 \cdot T)} \text{ (para } \textit{frequências baixas}\text{)} \quad \text{e} \quad \omega < \frac{10}{T} \text{ (para } \textit{frequências altas}\text{)}$$

Ou seja, as assímptotas são válidas para uma ***década antes*** da frequência de canto $\omega_c = 1/T$ (no caso da *assímptota* para *frequências baixas*) ou uma ***década depois*** da frequência de canto $\omega_c = 1/T$ (no caso da *assímptota* para *frequências altas*).

Nas proximidades da frequência de *canto* ω_c as *assímptotas* apenas aproximam da curva real de $G(j\omega)|_{dB}$.

O erro máximo agora é de **<u>3×n dB</u>** e ocorre exactamente na frequência de canto $\omega_c = 1/T$, o ponto onde as duas *assímptotas* se encontram, pois para este valor de ω,

$$G(j\omega)\Big|_{dB} = 20 \cdot \log_{10} \left| \frac{1}{(1+j)^n} \right| = -20 \cdot n \cdot \log_{10} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = -\mathbf{3 \cdot n\, dB}, \qquad \text{para } \omega = \omega_c = \frac{1}{T}$$

(como pode ser visto na figura 9.11).

Para o ângulo de *fase* $\angle G(j\omega)$, temos que:

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega) &= \angle 1/(1 + j\omega T)^n = \\ &= -\angle (1 + j\omega T)^n \\ &= -n \times \text{arctg}(\omega T) \end{aligned} \qquad \text{eq. (9.12)}$$

Nas *frequências baixas*, $\omega << 1/T$, observamos que:

$$\angle G(j\omega) \cong 0^o$$

enquanto que nas *frequências altas,* $\omega >> 1/T$, observamos que:

$$\angle G(j\omega) \cong -90^o \times n$$

resultados que também poderiam ser facilmente obtidos usando a eq. (9.12) com $\omega T \cong 0$ e $\omega T \cong \infty$, respectivamente, pois

$$\text{arctg}(0) = 0^o \qquad \text{e} \qquad -\text{arctg}(\infty) \times n = -90^o \times n,$$

e portanto:

$$\angle G(j\omega) = \begin{cases} 0, & \omega << \dfrac{1}{T} \\ -n \times \mathrm{arctg}(\omega T), & \dfrac{T}{100} < \omega < 100T \\ -90^{o} \times n, & \omega >> \dfrac{1}{T} \end{cases}$$

Note que para $\omega_c = 1/T$, $G(j\omega_c) = -\,\mathrm{arctg}\,(\omega_c T) = -\,\mathrm{arctg}\,(1) = -\,45^o \times n$, logo, na frequência de "*canto*" ou de "*corte*" $\omega_c = 1/T$ temos:

$$\text{a curva do } \angle G(j\omega) \text{ passa por } -45^o \times n \text{ em } \omega = \omega_c = 1/T, \qquad \text{eq. (9.13)}$$

isto é, na metade do intervalo entre 0^o e $-90^o \times n$; um detalhe a ter em atenção ao fazermos o esboço do diagrama de Bode de *fase*.

Ou seja, o diagrama de Bode de ***fase*** $\angle G(j\omega)$ tende assimptoticamente para 0^o (à esquerda) e para $-90^o \times n$ (à direita).

Na prática consideramos que $\angle G(j\omega)$ varia de 0^o a $-90^o \times n$ enquanto a frequência ω varia

$$\text{de} \quad \frac{\omega_c}{10} \quad \text{até} \quad 10 \cdot \omega_c .$$

isto é, desde uma ***década antes*** da frequência de *canto* $\omega_c = 1/T$ (*assímptota* para *frequências baixas*) até uma ***década depois*** da frequência de *canto* $\omega_c = 1/T$ (*assímptota* para *frequências altas*).

O diagrama de Bode de ***fase*** de $G(j\omega) = (1 + j\omega T)^{-n}$ está esboçado na figura 9.12.

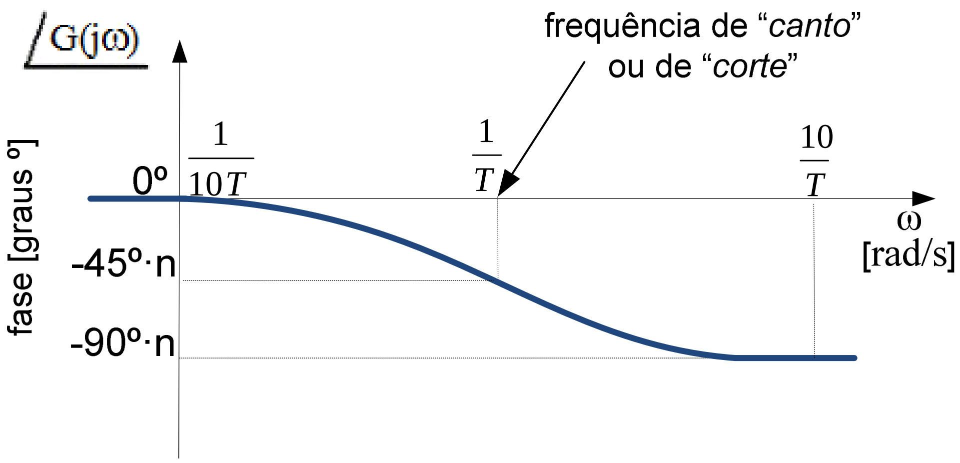

Fig. 9.12 – Diagrama de Bode de *fase*. Factores pólos múltiplos $G(j\omega) = 1/\,(1 + j\omega T)^n$, n = 2, 3, …

- Factores zeros simples e múltiplos $(1 + j\omega T)^1$, $(1 + j\omega T)^2$, ..., $(1 + j\omega T)^n$

Para $G(j\omega) = (1 + j\omega T)^n$, n = 1,2, …, n a situação é análoga aos casos de pólos simples e múltiplos nas duas secções anteriores. Temos que o *módulo* $|G(j\omega)|$ em dB é dado por:

$$\left.G(j\omega)\right|_{dB} = 20\cdot\log_{10}\left|(1+j\omega T)^n\right|$$

$$= 20\cdot n\cdot\log_{10}\cdot\sqrt{1+(\omega\cdot T)^2}$$

e dividindo em 2 intervalos: $\omega << 1/T$ e $\omega >> 1/T$, ou seja, para *frequências baixas* e *altas*, observamos que:

$$\left.G(j\omega)\right|_{dB} = \begin{cases} 0, & \omega << \dfrac{1}{T} \\ +20\cdot n\cdot\log_{10}(\omega\cdot T), & \omega >> \dfrac{1}{T} \end{cases}$$

que pode ser vista na figura 9.13.

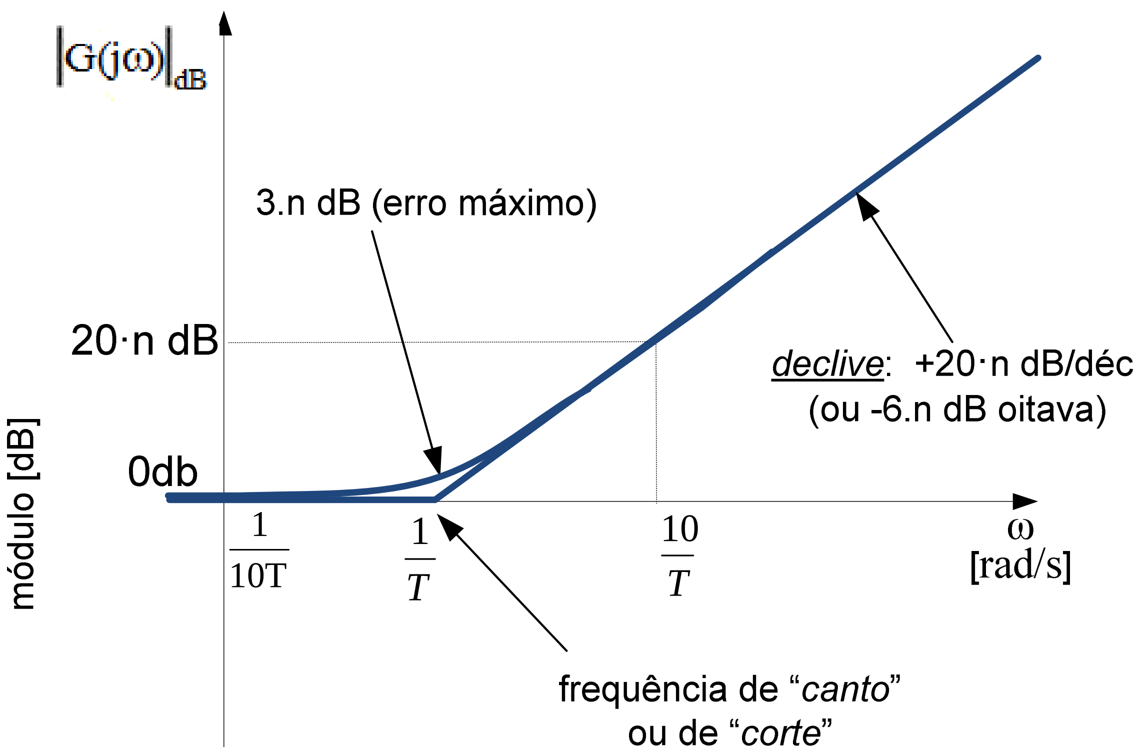

Fig. 9.13 – Diagrama de Bode de *módulo*. Factores zeros simples e múltiplos $G(j\omega) = (1 + j\omega T)^n$, n = 1, 2, …

Note que, aqui também tem-se a frequência de *"canto"* ou de *"corte"* (*"corner" frequency*), ω_c = 1/T, e assim como nas secções anteriores, eq. (9.8) e eq. (9.11), aqui também:

a *recta assímptota* para *frequências altas*
intercepta 0 dB em $\omega = \omega_c = 1/T$, eq. (9.14)

um detalhe a ter em atenção ao fazermos o esboço do diagrama de Bode de *módulo*.

Novamente, para a curva real de $G(j\omega)|_{dB}$, as assímptotas são válidas para uma ***década antes*** da frequência de canto ω_c = 1/T (no caso da *assímptota* para *frequências baixas*) ou uma ***década depois*** da frequência de canto ω_c = 1/T (no caso da *assímptota* para *frequências altas*).

Nas proximidades da frequência de *canto* ω_c as *assímptotas* apenas aproximam da curva real de $G(j\omega)|_{dB}$ apresentando um erro máximo de **$3\times n$ dB** que ocorre exactamente na frequência de canto ω_c = 1/T, o ponto onde as duas *assímptotas* se encontram.

Para o ângulo de *fase* $\angle G(j\omega)$, temos que:

$$\angle G(j\omega) = \angle (1 + j\omega T)^n = \\ = n \times \text{arctg}\,(\omega T)$$

e portanto:

$$\angle G(j\omega) = \begin{cases} 0, & \omega << \dfrac{1}{T} \\ n\times\text{arctg}(\omega T), & \dfrac{T}{100} < \omega < 100T \\ 90^o\times n, & \omega >> \dfrac{1}{T} \end{cases}$$

Note que para ω_c = 1/T, a frequência de "*canto*" ou de "*corte*", temos que:

a curva do $\angle G(j\omega)$ passa por $45^o \times n$ em $\omega = \omega_c = 1/T$, eq. (9.15)

isto é, na metade do intervalo entre 0º e $90^o \times n$; um detalhe a ter em atenção ao fazermos o esboço do diagrama de Bode de *fase*.

Na prática consideramos que $\angle G(j\omega)$ varia de 0º a $90^o \times n$ enquanto a frequência ω varia

$$\text{de} \quad \frac{\omega_c}{10} \quad \text{até} \quad 10\cdot\omega_c .$$

isto é, desde uma ***década antes*** da frequência de *canto* $\omega_c = 1/T$ (*assímptota* para *frequências baixas*) até uma ***década depois*** da frequência de *canto* $\omega_c = 1/T$ (*assímptota* para *frequências altas*).

O diagrama de Bode de ***fase*** de $G(j\omega) = (1 + j\omega T)^{-n}$ está esboçado na figura 9.14.

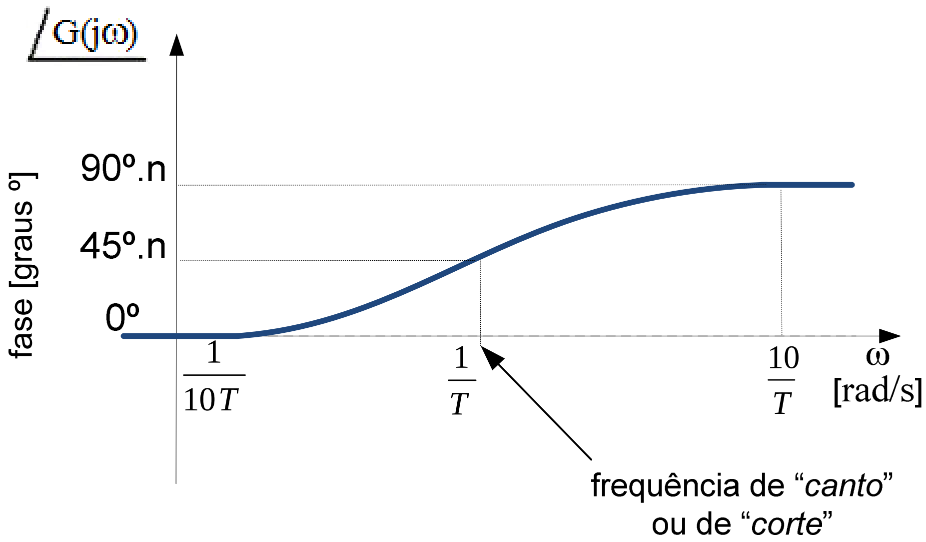

Fig. 9.14 – Diagrama de Bode de *fase*. Factores zeros simples e múltiplos $G(j\omega) = (1 + j\omega T)^n$, n = 1, 2, …

- Factores pólos quadráticos $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{-n}$, n = 1, 2, …, $0 \le \zeta \le 1$.

Note que a função de transferência G(jω)

$$G(j\omega) = \left[1 + 2\zeta\cdot\frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{-1} = \frac{1}{\left[1 + 2\zeta\cdot\frac{j\omega}{\omega_n} - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]}$$

tem um par de pólos que serão:

a) pólos complexos se $0 \le \zeta < 1$
b) pólos duplos se $\zeta = 1$
c) pólos reais e distintos se $\zeta > 1$

Os factores quadráticos que tratamos nesta secção fazem parte dos casos (a) e (b) acima, isto é $0 \le \zeta \le 1$, pois o caso (c), pólos reais e distintos ($\zeta > 1$), já estão cobertos nos factores básicos anteriores.

Na verdade, mesmo no caso (b), quando temos a situação limite de $\zeta = 1$, então

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left[1 + 2\cdot\frac{j\omega}{\omega_n} - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}$$

que corresponde a pólos duplos e iguais a $j\omega/\omega_n$, um caso que também já está abrangido nos factores básicos anteriores.

Portanto as técnicas que serão apresentadas nesta secção para $0 \leq \zeta \leq 1$ vão coincidir com outras já apresentadas anteriormente no caso particular de $\zeta = 1$.

Para $G(j\omega) = [1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{-n}$, n = 1,2, …, n temos que o *módulo* $|G(j\omega)|$ em dB é dado por:

$$G(j\omega)\big|_{dB} = -20\cdot\log_{10}\left|\left[1 + 2\zeta\cdot\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^n\right|$$

$$= -20\cdot n\cdot\log_{10}\cdot\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] + \left(2\zeta\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

e dividindo em 2 intervalos: $\omega << \omega_n$ e $\omega >> \omega_n$, ou seja, para *frequências baixa*s e *altas*, observamos que:

$$G(j\omega)\big|_{dB} = \begin{cases} 0, & \omega << \omega_n \\ -20\cdot n\cdot\log_{10}\cdot\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] + \left(2\zeta\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2} & 0{,}1\cdot\omega_n < \omega < 10\cdot\omega_n \\ -40\cdot n\cdot\log_{10}(\omega\cdot T), & \omega >> \omega_n \end{cases}$$

Note que, assim como nas secções anteriores tinha ω_c em eq. (9.8), eq. (9.11) e eq. (9.14), aqui também tem-se uma frequência ω_n que é chamada de

ω_n = frequência natural do sistema,

que separa as frequências *"altas*" e *"baixas*" e

a *recta assímptota* para *frequências altas*
intercepta 0 dB em $\omega = \omega_n$, eq. (9.16)

um detalhe a ter em atenção ao fazermos o esboço do diagrama de Bode de *módulo*.

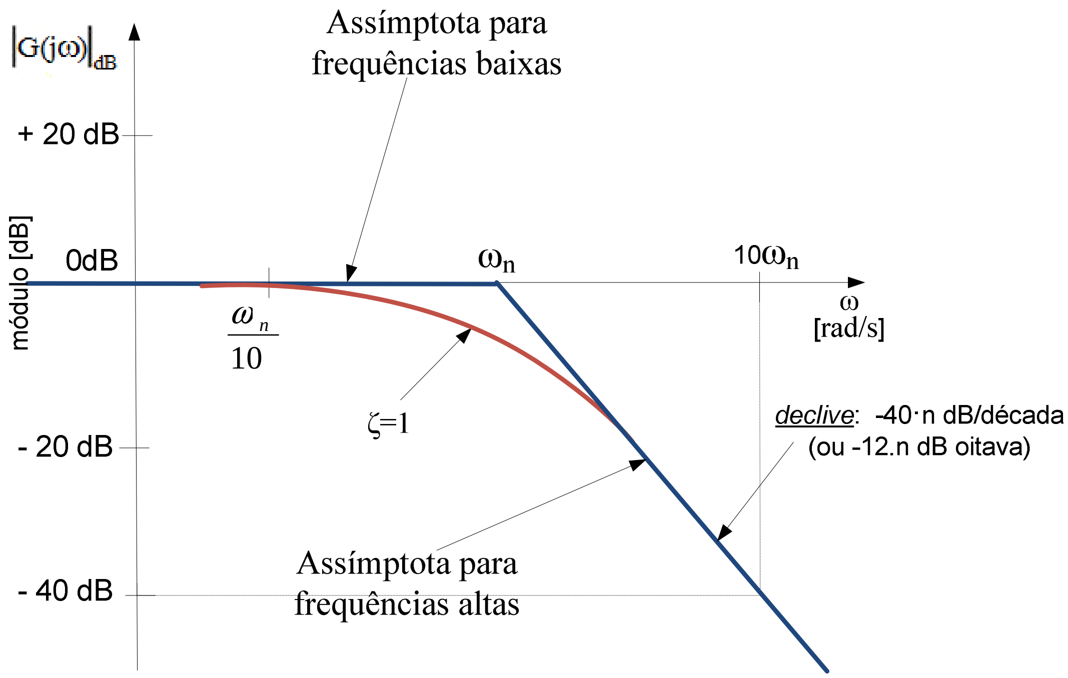

Fig. 9.15 – Diagrama de Bode de *módulo*. Factores pólos quadráticos
$G(j\omega) = [1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{-n}$, $\zeta = 1$, $n = 1$.

Nas proximidades da frequência natura ω_n as *assímptotas* apenas aproximam da curva real de $G(j\omega)|_{dB}$ apresentando um erro máximo de **<u>6×n dB</u>** que ocorre exactamente na frequência de canto ω_n , o ponto onde as duas *assímptotas* se encontram.

A curva $G(j\omega)|_{dB}$ para o caso particular que falamos acima, $\zeta = 1$, está representado na figura 9.15.

A medida que o valor de ζ diminui, $\zeta < 1$ as curvas de $|G(j\omega)|_{dB}$ vão ficando mais altas e vão criando picos (a partir de $\zeta < \sqrt{2}/2 = 0{,}707$) que vão se tornando cada vez mais altos a medida que $\zeta \to 0$.
Estas curvas de $|G(j\omega)|_{dB}$ estão ilustradas na figura 9.16 para o caso geral de $0 \leq \zeta \leq 1$.
Estes picos ocorrem nas frequências ω_r chamadas

ω_r = frequência de ressonância

que assume valores

$$\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2\zeta^2}\,, \qquad \text{para } \; 0 \leq \zeta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Note que para $\zeta = 0$, $\omega_r = \omega_n$. A medida que ζ aumenta a frequência de ressonância ω_r diminui ligeiramente até que, quando

$$\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$$

então a frequência de ressonância $\omega_r = \omega_n/2$.

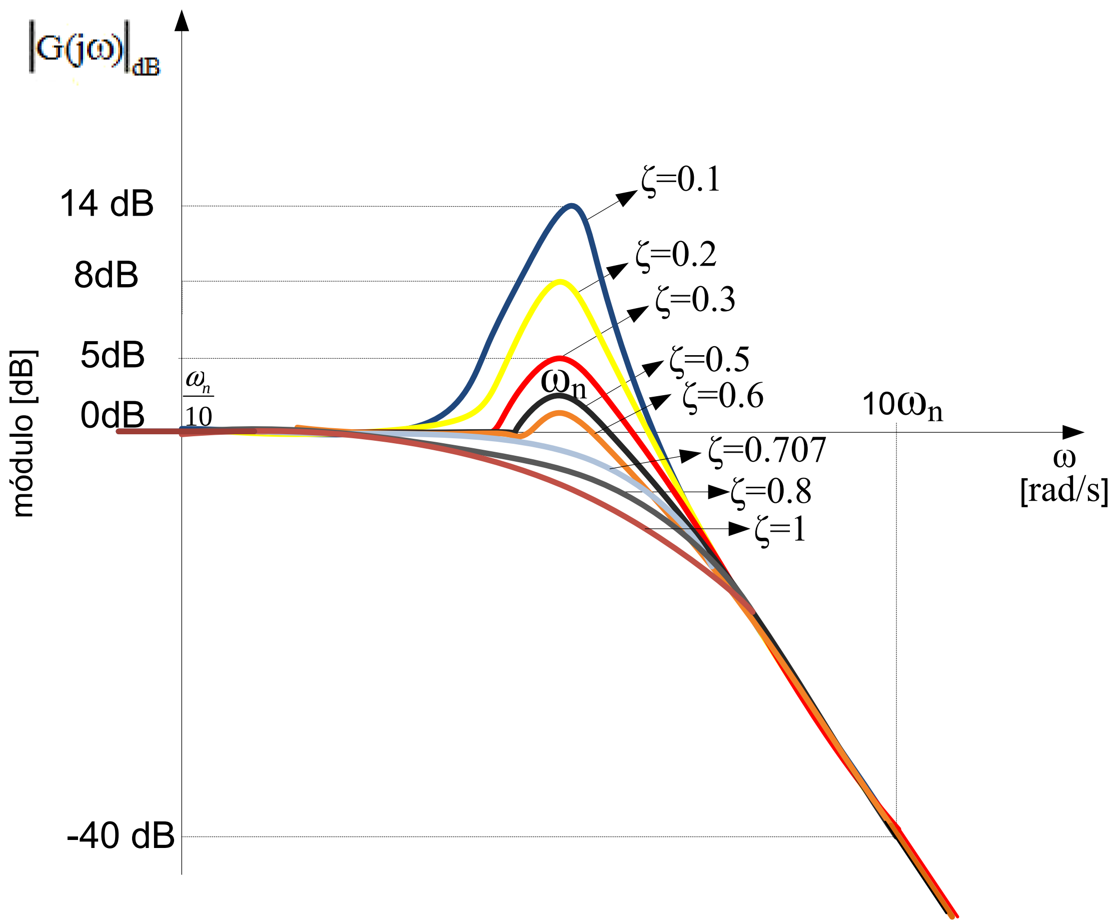

Fig. 9.16 – Diagrama de Bode de *módulo*. Factores pólos quadráticos
$G(j\omega) = [1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{-n}$, n = 1, 2, …

Por outro lado, estes picos atingem valores M_r

$$M_r = \text{pico de ressonância}$$

que tem os valores

$$M_r = \frac{1}{2\zeta \cdot \sqrt{1-\zeta^2}}, \qquad \text{para } 0 \le \zeta \le \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Note que para $0{,}707 \le \zeta \le 1$ não há pico de ressonância. Em particular, se $\zeta = 0{,}707$, então

$$M_r = 1 = 0 \text{ dB}$$

(também não há pico de ressonância).

A medida que ζ diminui, o pico de ressonância M_r aumenta. Por exemplo,

$$\text{quando } \zeta = 0{,}5 \;\Rightarrow\; M_r = 1{,}155 \cong 1{,}25\text{dB},$$
$$\text{quando } \zeta = 0{,}25 \;\Rightarrow\; M_r = 2{,}133 \cong 6{,}6\text{dB},$$
$$\text{quando } \zeta = 0{,}1 \;\Rightarrow\; M_r = 5{,}025 \cong 14\text{dB},$$
$$\text{quando } \zeta = 0{,}05 \;\Rightarrow\; M_r = 10{,}01 \cong 20\text{dB}.$$

A figura 9.16 ilustra estes picos de ressonância.

Para o ângulo de *fase* $\angle G(j\omega)$, temos que:

$$\angle G(j\omega) = \angle\left[1 - 2\zeta\cdot\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{-n} = -\,n\cdot\operatorname{arctg}\left[\frac{2\zeta\cdot\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right]$$

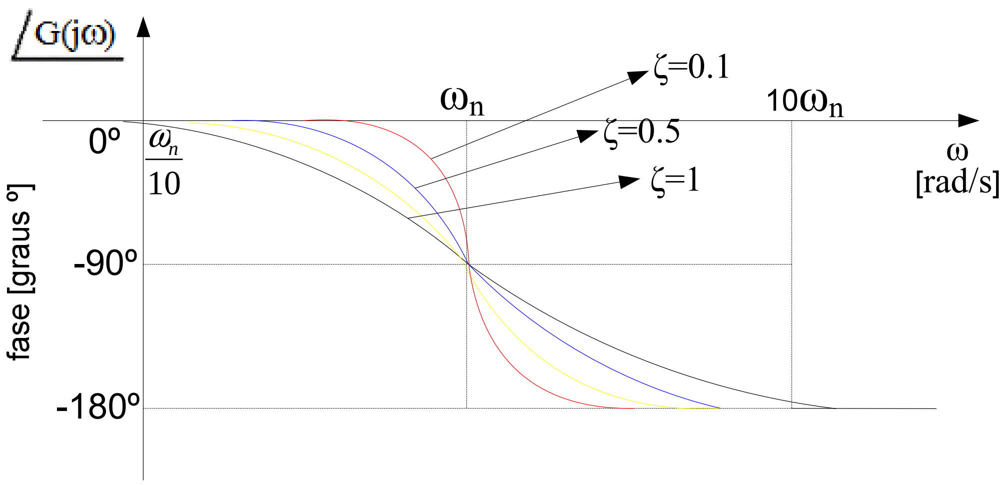

Fig. 9.17 – Diagrama de Bode de *fase*. Factores pólos quadráticos simples e múltiplos $G(j\omega) = (1 + j\omega T)^n$, n = 1, 2, …

Portanto:

$$\angle G(j\omega) = \begin{cases} 0^{\circ}, & \omega \to 0 \\ -90^{\circ}\cdot n, & \omega = \omega_n \\ -180^{\circ}\cdot n, & \omega \to \infty \end{cases}$$

conforme esboçado a figura 9.17.

Na prática consideramos que $\angle G(j\omega)$ varia de 0º a 180º $\times$ n enquanto a frequência ω varia

$$\text{de} \quad \frac{\omega_n}{10} \quad \text{até} \quad 10 \cdot \omega_n .$$

isto é, desde uma ***década antes*** da frequência de *natural* ω_n (*assímptota* para *frequências baixas*) até uma ***década depois*** da frequência de *natural* ω_n (*assímptota* para *frequências altas*).

O diagrama de Bode de ***fase*** de $G(j\omega)$ se torna mais íngreme (com declive mais acentuado) a medida que $\zeta \to 0$ e isto está ilustrado na figura 9.17.

- Factores zeros quadráticos $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^n$, n = 1, 2, …

Os factores zeros quadráticos que têm a função de transferência $G(j\omega)$

$$G(j\omega) = \left[1 + 2\zeta \cdot \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^n$$

são em tudo análogo aos factores pólos quadráticos que vimos acima. Ou seja, curva de *módulo* e *fase* para os factores zeros quadráticos podem ser obtidas invertendo-se o sinal das curvas de *módulo* e *fase* dos factores pólos quadráticos

As principais diferenças são que os picos de ressonância são para baixo em vez de para cima e as curvas de *fase* vão de 0º a 180º em vez de 0º a – 180º.

9.8 – **Factores básicos com sinais negativos**

No caso de factores básicos com sinais negativos do tipo

$$G(s) = \frac{1}{(Ts-1)} , \; G(s) = \frac{1}{(Ts-1)^2} , \; G(s) = \frac{1}{(Ts-1)^3} , \; \cdots$$

ou

$$G(s) = (Ts-1) , \; G(s) = (Ts-1)^2 , \; G(s) = (Ts-1)^3 , \; \cdots$$

é fácil mostrar que o diagrama de Bode de *módulo* é idêntico ao factor básico correspondente com sinal "+" , entretanto para a construção do diagrama de Bode de *fase* é necessário um cuidado maior na análise.

Nos próximos exemplos ilustramos como fazer nestas situações.

Exemplo 9.6:

$$G(j\omega) = \frac{(s+1)}{(s+100)} = \frac{\frac{1}{100}(s+1)}{\left(\frac{s}{100}+1\right)}$$

Note que neste caso K_B = 1/100= –40 dB e G(jω) tem mais dois factores básicos:

$$(s+1) \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{100}\cdot s+1\right)^{-1}$$

Além disso, a *fase* de G(jω) é dada por

$$G(j\omega) = \angle(1+j\omega) - \angle(1+j\omega/100)$$

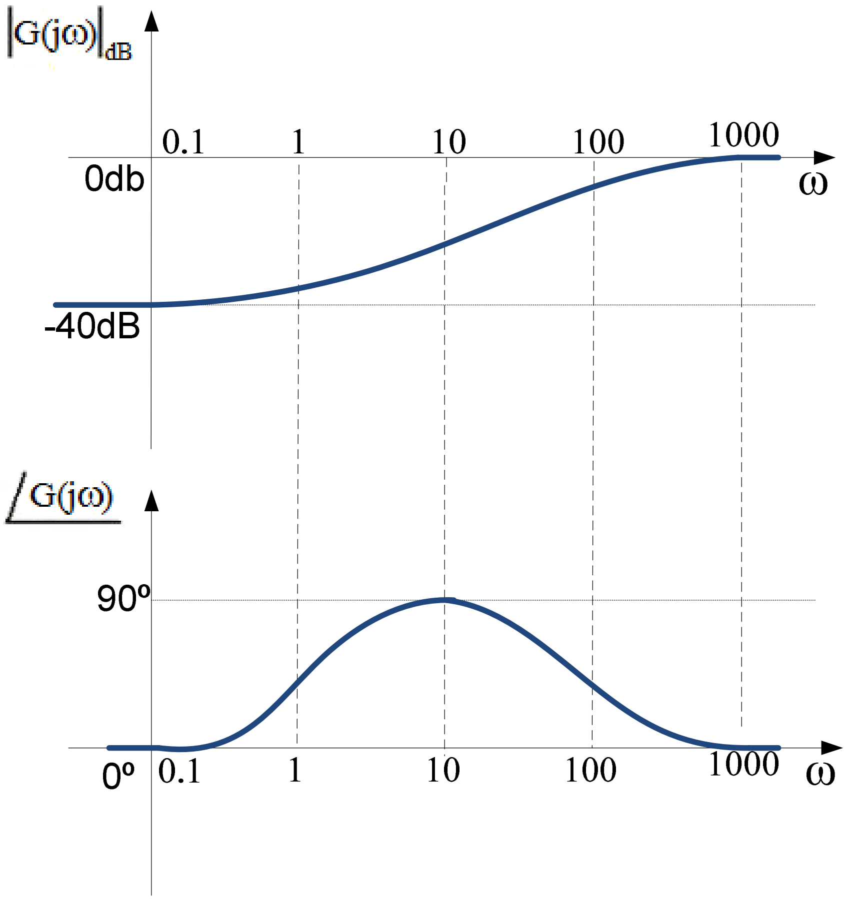

Fig. 9.18 – Diagrama de Bode de *módulo* e *fase* do Exemplo 9.6.

□

Exemplo 9.7:

$$G(j\omega) \;=\; \frac{(s-1)}{(s+100)} \;=\; \frac{\frac{1}{100}(s-1)}{\left(\frac{s}{100}+1\right)}$$

Note que neste caso K_B = 1/100= –40 dB novamente e G(jω) tem ainda mais dois factores básicos:

$$(s-1) \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{100}\cdot s+1\right)^{-1}$$

Logo, o diagrama de Bode de *módulo* é igual ao do exemplo anterior (Exemplo 9.6). Além disso, a *fase* de G(jω) é dada por

$$\angle G(j\omega) \;=\; \angle(-1+j\omega) - \angle(1+j\omega/100) \;=\; 180^\circ \;+\; \angle(1-j\omega) - \angle(1+j\omega/100)$$

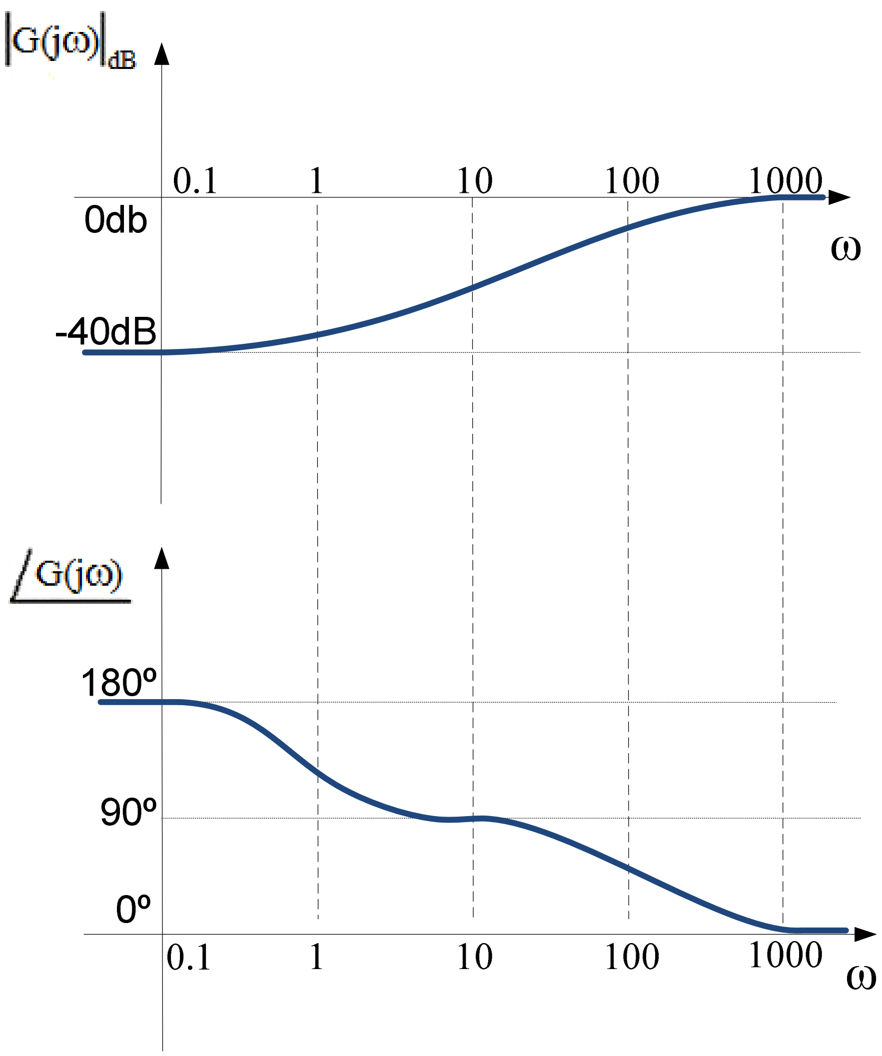

Fig. 9.19 – Diagrama de Bode de *módulo* e *fase* do Exemplo 9.7.

Exemplo 9.8:

$$G(j\omega) \;=\; \frac{(s+1)}{(s-100)} \;=\; \frac{\frac{1}{100}(s+1)}{\left(\frac{s}{100} - 1\right)}$$

Note que neste caso K_B = 1/100 = –40 dB novamente e G(jω) tem ainda mais dois factores básicos:

$$(s+1) \qquad e \qquad \left(\frac{1}{100}\cdot s - 1\right)^{-1}$$

Logo, o diagrama de Bode de *módulo* é igual aos 2 exemplos anteriores (Exemplos 9.6 e 9.7). Além disso, a *fase* de G(jω) é dada por

$$G(j\omega) \;=\; \angle(1+j\omega) - \angle(-1+j\omega/100) \;=\; \angle(1+j\omega) \;+\; 180^{o} - \angle(1-j\omega/100)$$

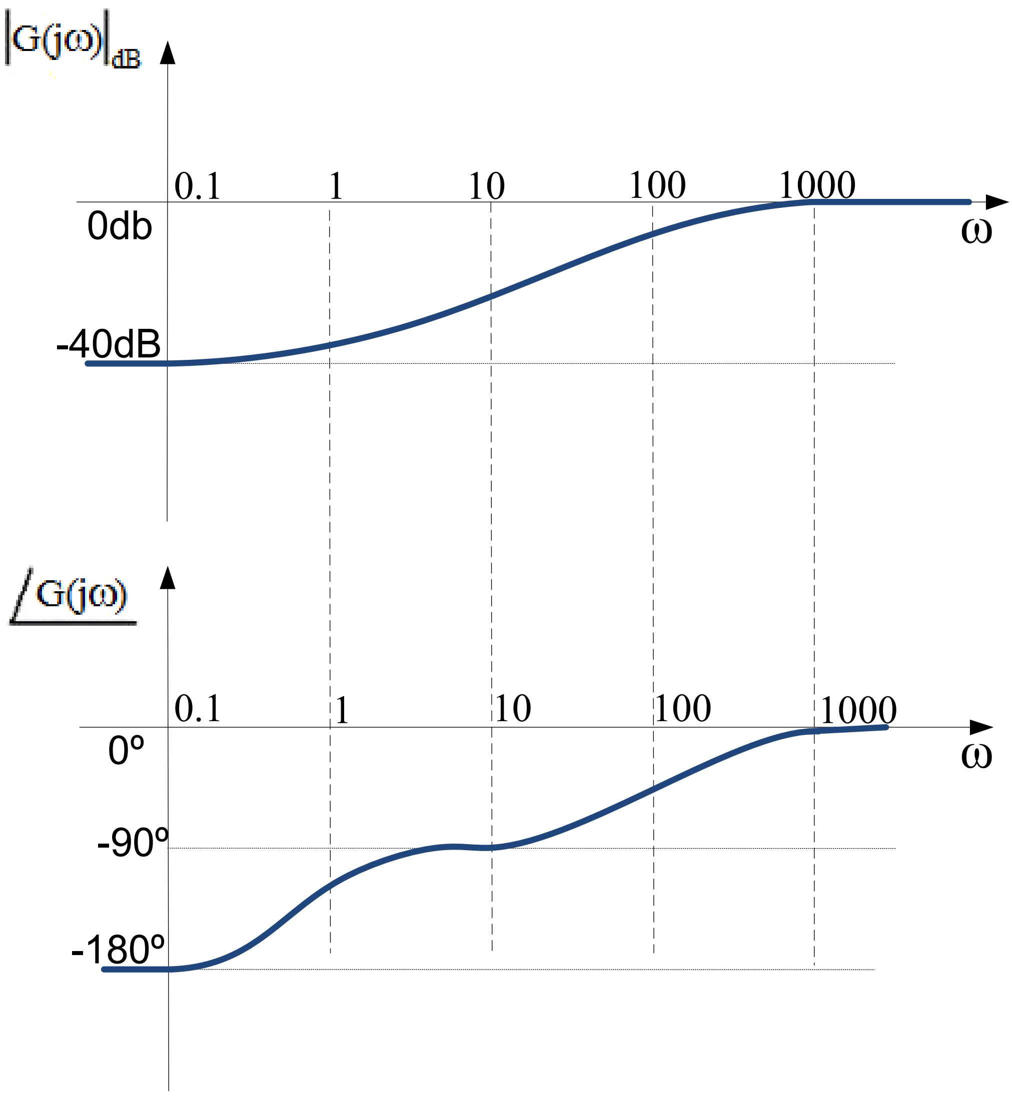

Fig. 9.20 – Diagrama de Bode de *módulo* e *fase* do Exemplo 9.8.

□

Exemplo 9.9:

$$G(j\omega) = \frac{(s-1)}{(s-100)} = \frac{\frac{1}{100}(s-1)}{\left(\frac{s}{100} - 1\right)}$$

Note que neste caso K_B = 1/100 = –40 dB novamente e G(jω) tem ainda mais os 2 factores básicos:

$$(s-1) \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{100}\cdot s - 1\right)^{-1}$$

Logo, o diagrama de Bode de *módulo* é igual aos 3 exemplos anteriores (Exemplos 9.6, 9.7 e 9.8). Além disso, a *fase* de G(jω) é dada por

$$G(j\omega) = \angle(-1+j\omega) - \angle(-1+j\omega/100) = 180^o + \angle(1-j\omega) - 180^o - \angle(1-j\omega/100)$$

$$= \angle(1-j\omega) - \angle(1-j\omega/100)$$

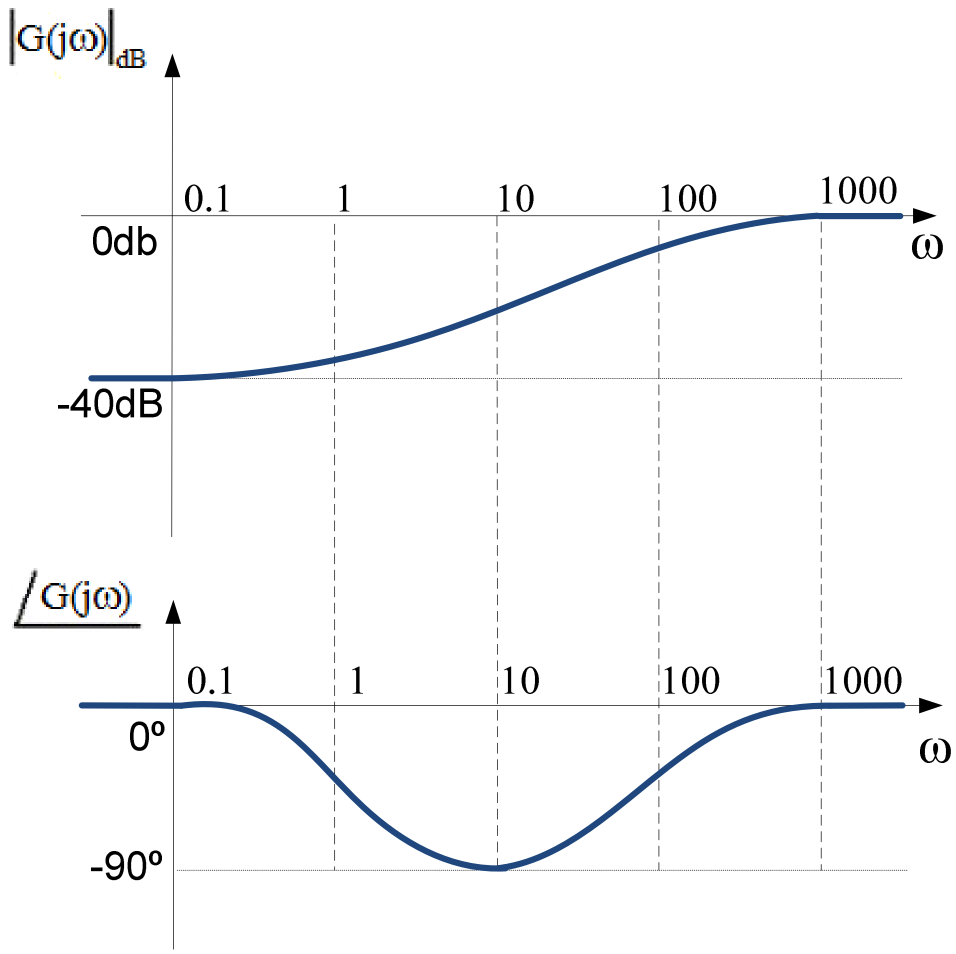

Fig. 9.21 – Diagrama de Bode de *módulo* e *fase* do Exemplo 9.9.

□

Exemplo 9.10:

$$G(j\omega) = \frac{100}{(s+1)(s+100)} = \frac{1}{(s+1)\left(\frac{s}{100}+1\right)}$$

Note que neste caso $K_B = 1 = 0$ dB e G(jω) tem ainda mais dois factores básicos:

$$(s+1)^{-1} \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{100}\cdot s+1\right)^{-1}$$

Além disso, a *fase* de G(jω) é dada por

$$\angle G(j\omega) = -\angle(1+j\omega) - \angle(1+j\omega/100)$$

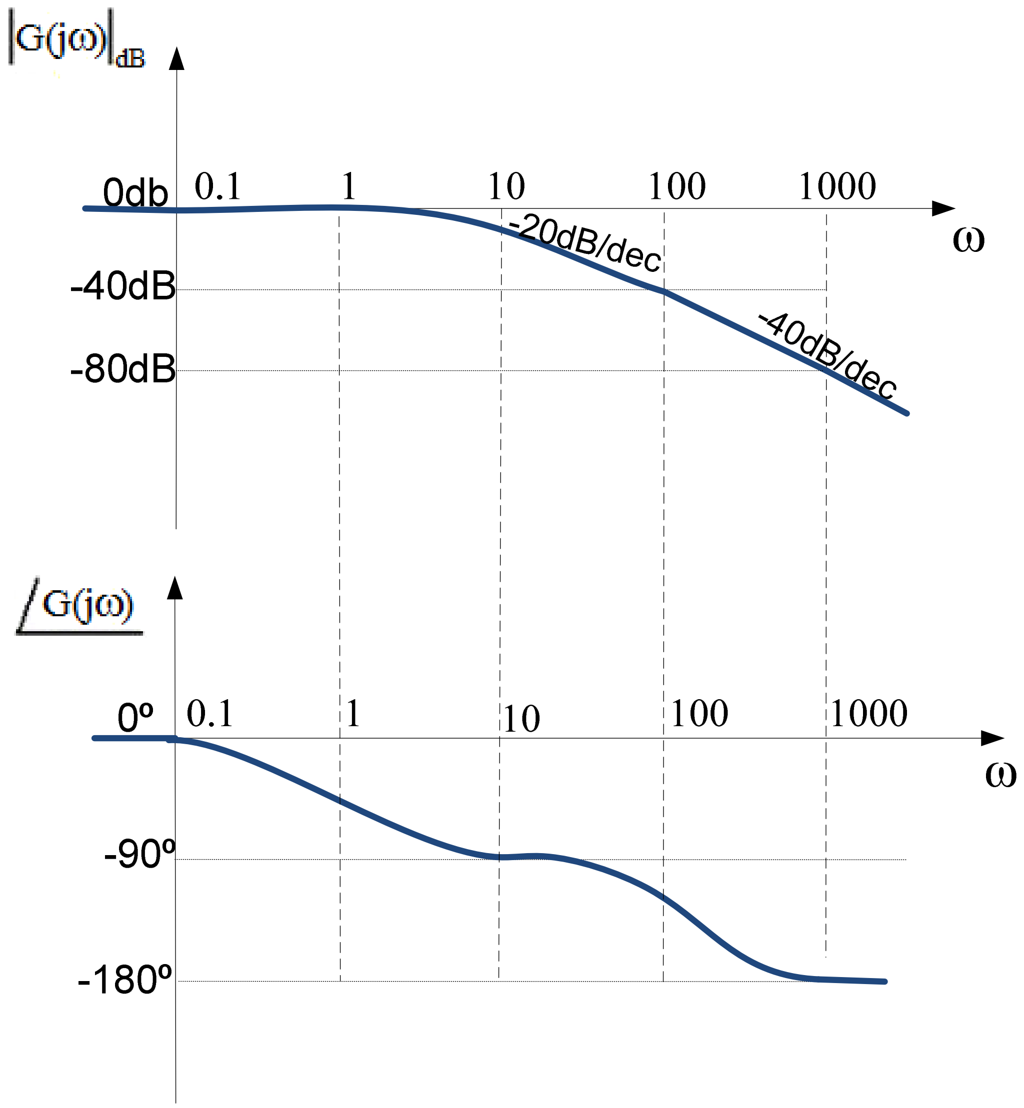

Fig. 9.22 – Diagrama de Bode de *módulo* e *fase* do Exemplo 9.10.

<u>Exemplo 9.11</u>:

$$G(j\omega) \;=\; \frac{100}{(s+1)(s-100)} \;=\; \frac{1}{(s\;+1)\left(\dfrac{s}{100}\;-1\right)}$$

Note que neste caso K_B = 1 = 0 dB novamente e G(jω) tem ainda mais dois factores básicos:

$$(s+1)^{-1} \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{1}{100}\cdot s - 1\right)^{-1}$$

Logo, o diagrama de Bode de *módulo* é igual ao exemplo anterior (Exemplo 9.10). Além disso, a *fase* de G(jω) é dada por

$$G(j\omega) \;=\; -\angle(1+j\omega) - \angle(-1+j\omega/100) \;=\; -\angle(1+j\omega) \;+\; 180^{o} \;-\angle(1-j\omega/100)$$

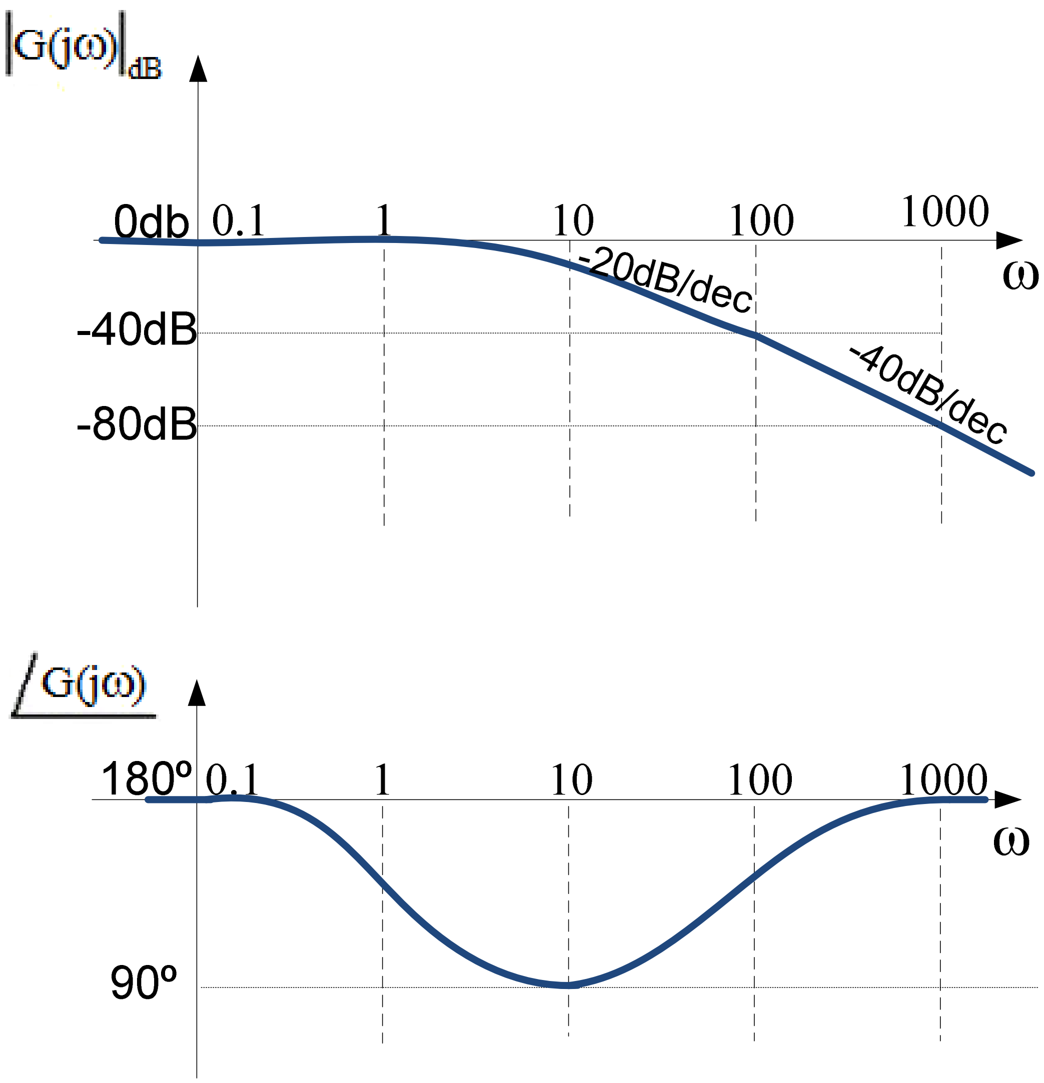

Fig. 9.23 – Diagrama de Bode de *módulo* e *fase* do Exemplo 9.11.

Exemplo 9.12:

$$G(j\omega) \;=\; \frac{100}{(s-1)(s+100)} \;=\; \frac{1}{(s-1)\left(\dfrac{s}{100}+1\right)}$$

Note que neste caso $K_B = 1 = 0$ dB novamente e $G(j\omega)$ tem ainda mais dois factores básicos:

$$(s-1)^{-1} \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{1}{100}\cdot s+1\right)^{-1}$$

Logo, o diagrama de Bode de *módulo* é igual aos dois exemplos anteriores (Exemplos 9.10 e 9.11). Além disso, a *fase* de G(jω) é dada por

$$G(j\omega) \;=\; -\angle(-1+j\omega) - \angle(1+j\omega/100) \;=\; 180^{o} \;-\; \angle(1-j\omega) \;-\; \angle(1+j\omega/100)$$

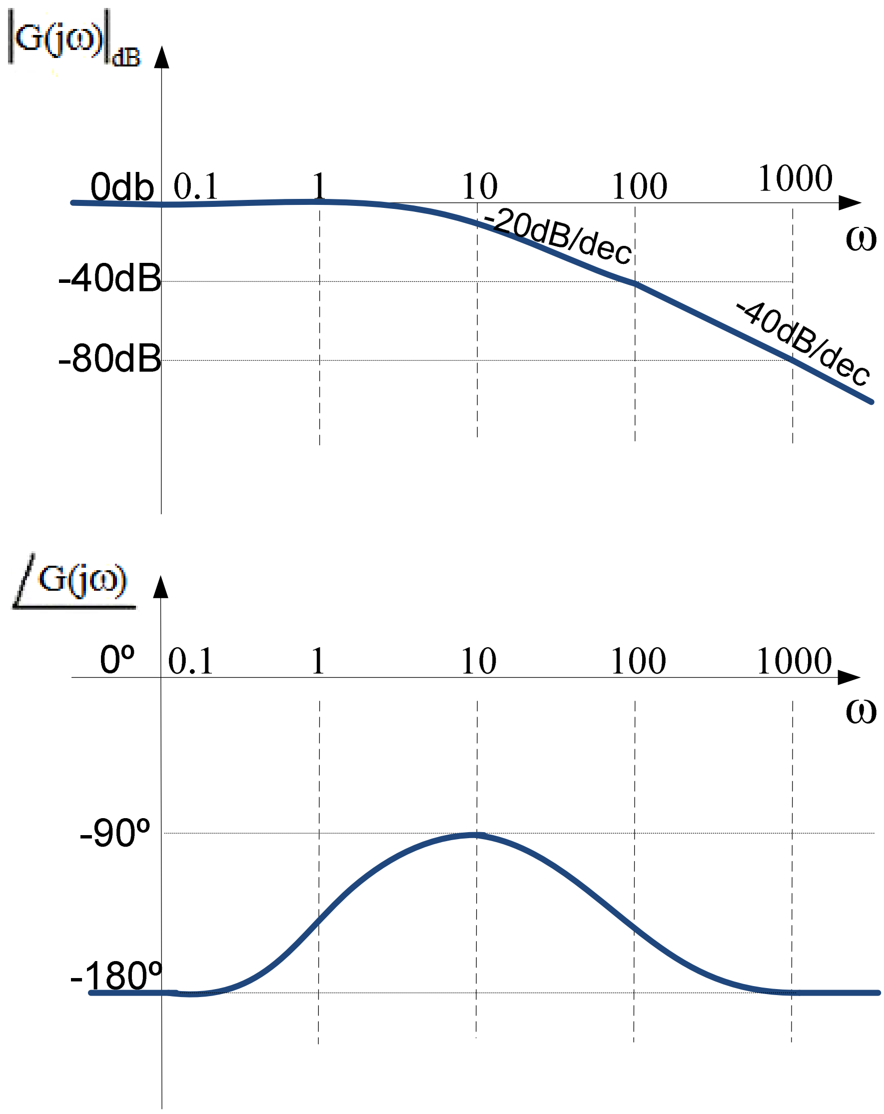

Fig. 9.24 – Diagrama de Bode de *módulo* e *fase* do Exemplo 9.12.

Exemplo 9.13:

$$G(j\omega) = \frac{100}{(s-1)(s-100)} = \frac{1}{(s-1)\left(\frac{s}{100}-1\right)}$$

Note que neste caso $K_B = 1 = 0$ dB novamente e $G(j\omega)$ tem ainda mais dois factores básicos:

$$(s-1)^{-1} \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{100}\cdot s - 1\right)^{-1}$$

Logo, o diagrama de Bode de *módulo* é igual aos três exemplos anteriores (Exemplos 9.10, 9.11 e 9.12). Além disso, a *fase* de $G(j\omega)$ é dada por

$$\angle G(j\omega) = -\angle(-1+j\omega) - \angle(-1+j\omega/100) = 180^\circ - \angle(1-j\omega) - 180^\circ - \angle(1-j\omega/100)$$

$$= -\angle(1-j\omega) - \angle(1-j\omega/100)$$

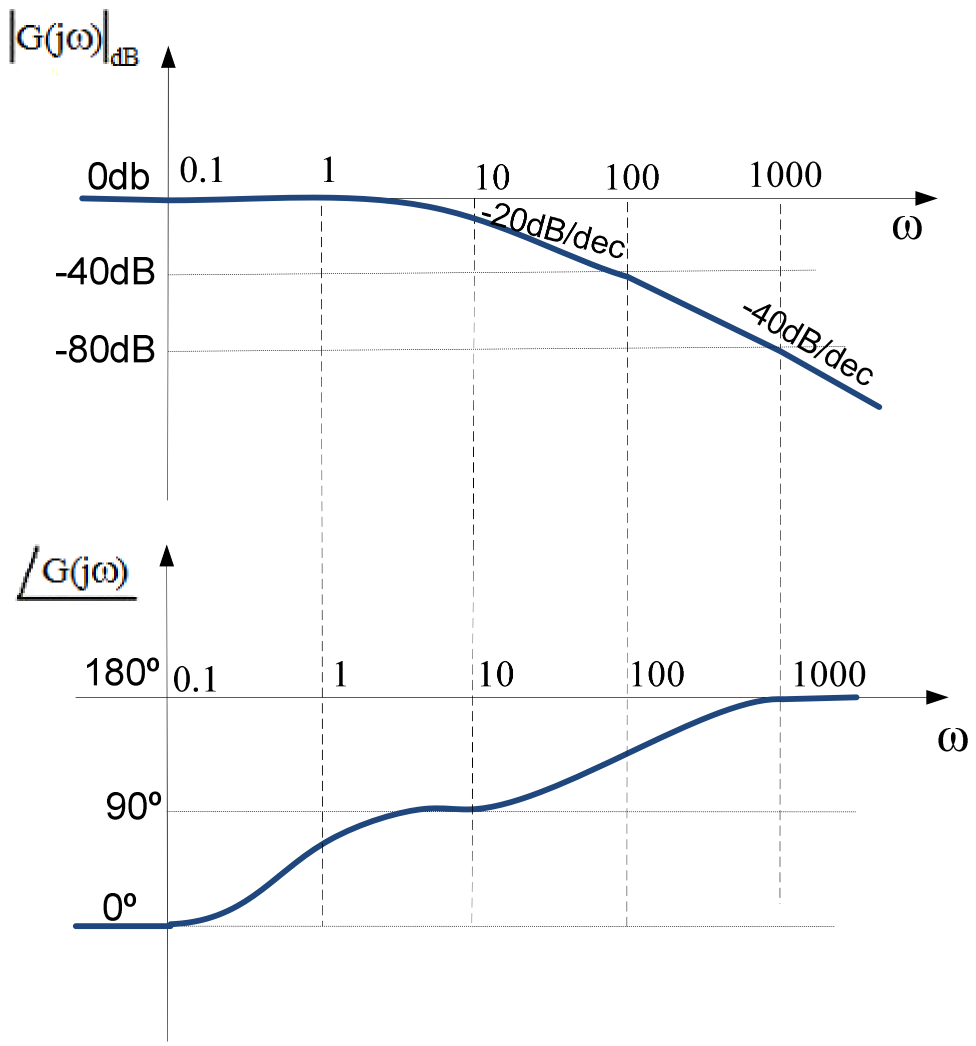

Fig. 9.25 – Diagrama de Bode de *módulo* e *fase* do Exemplo 9.13.

□

9.9 – **Exemplos adicionais de construção de diagramas de Bode (módulo e fase)**

Nesta secção apresentamos vários exemplos de diagramas de Bode (*módulo* e *fase*) que foram esboçados usando quase sempre o auxílio dos factores básicos apresentados aqui.

Exemplo 9.14:

$$G(j\omega) = \frac{1000\,(s+4)}{s\,(s+100)\,(s^2+5s+400)} = \frac{0{,}1\left(\frac{1}{4}\cdot s+1\right)}{s\left(\frac{1}{100}\cdot s+1\right)\left(\frac{s^2}{400}+\frac{5}{400}\cdot s+1\right)}$$

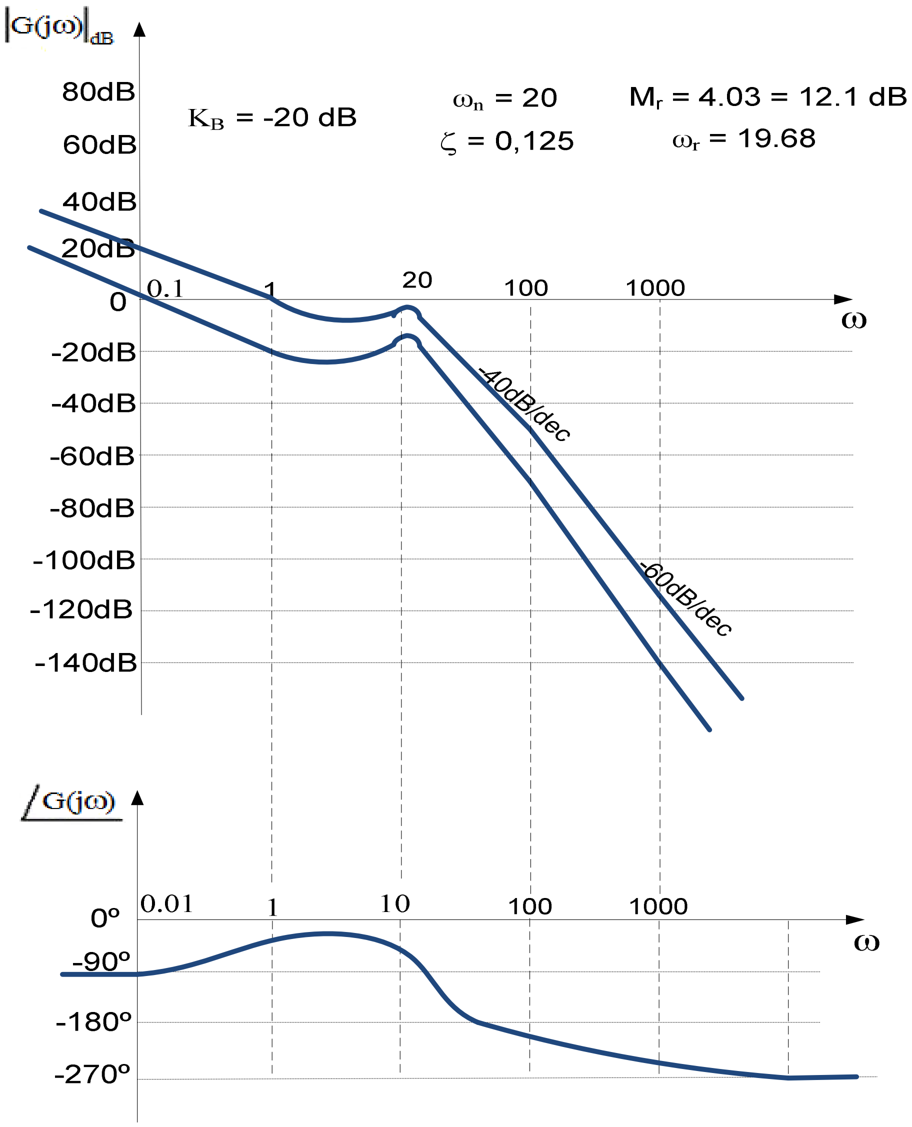

Fig. 9.26 – Diagrama de Bode de *módulo* e *fase* do Exemplo 9.14.

□

Exemplo 9.15:

$$G(j\omega) = \frac{1000\,(s+4)}{s\,(s+100)\,(s^2-5s+400)} = \frac{0{,}1\left(\frac{1}{4}\cdot s+1\right)}{s\left(\frac{1}{100}\cdot s+1\right)\left(\frac{s^2}{400} - \frac{5}{400}\cdot s + 1\right)}$$

O diagrama de Bode de *módulo* é igual ao do exemplo anterior (Exemplo 9.14). O diagrama de Bode de *fase* está esboçado na figura 9.27.

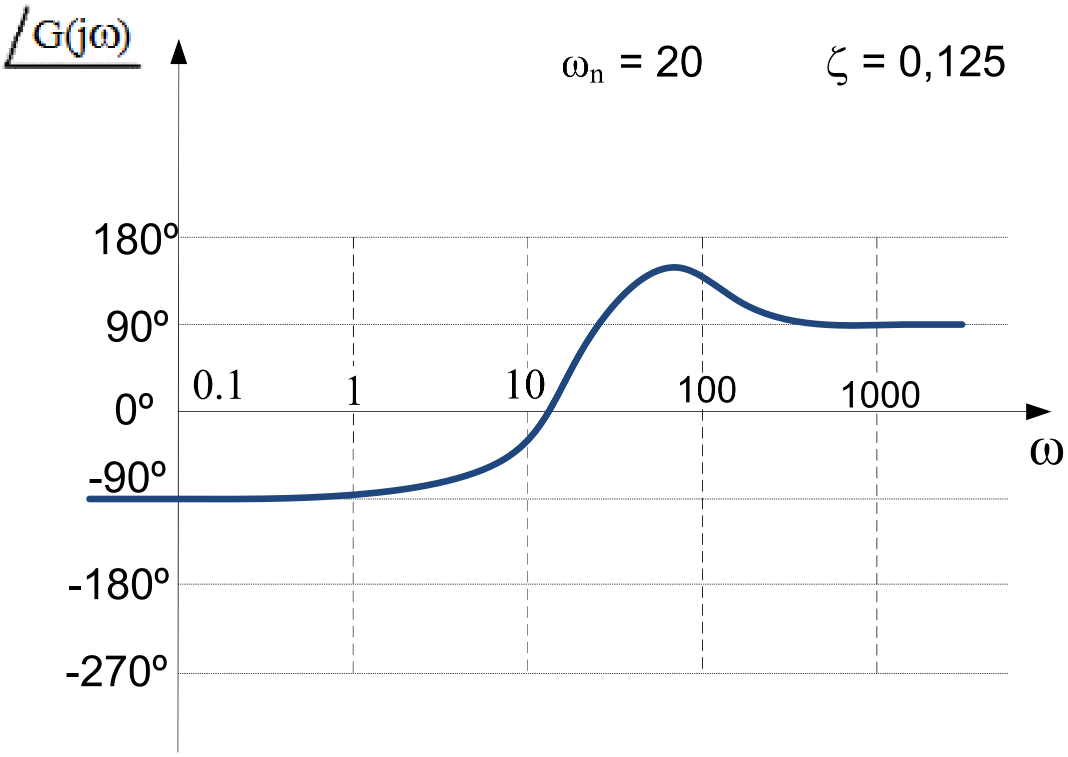

Fig. 9.27 – Diagrama de Bode de *fase* do Exemplo 9.15.

□

Exemplo 9.16:

$$G(j\omega) = \frac{1000\,(s+4)}{s\,(s-100)\,(s^2+5s+400)} = \frac{0{,}1\left(\frac{1}{4}\cdot s+1\right)}{s\left(\frac{1}{100}\cdot s-1\right)\left(\frac{s^2}{400} + \frac{5}{400}\cdot s + 1\right)}$$

O diagrama de Bode de *módulo* é igual aos dos 2 exemplos anteriores (Exemplos 9.14 e 9.15). O diagrama de Bode de *fase* está esboçado na figura 9.28.

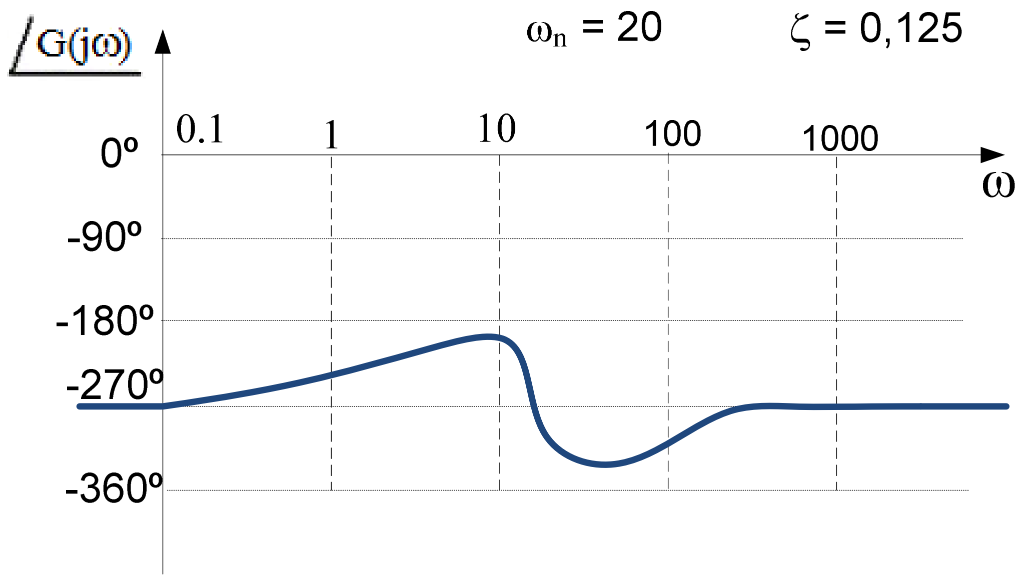

Fig. 9.28 – Diagrama de Bode de *fase* do Exemplo 9.16.

□

Exemplo 9.17:

$$G(j\omega) = \frac{1000\,(s-4)}{s\,(s+100)\,(s^2+5s+400)} = \frac{0{,}1\left(\frac{1}{4}\cdot s-1\right)}{s\left(\frac{1}{100}\cdot s+1\right)\left(\frac{s^2}{400}+\frac{5}{400}\cdot s+1\right)}$$

O diagrama de Bode de *módulo* é igual aos dos três exemplos anteriores (Exemplos 9.14, 9.15 e 9.16). O diagrama de Bode de *fase* está esboçado na figura 9.29.

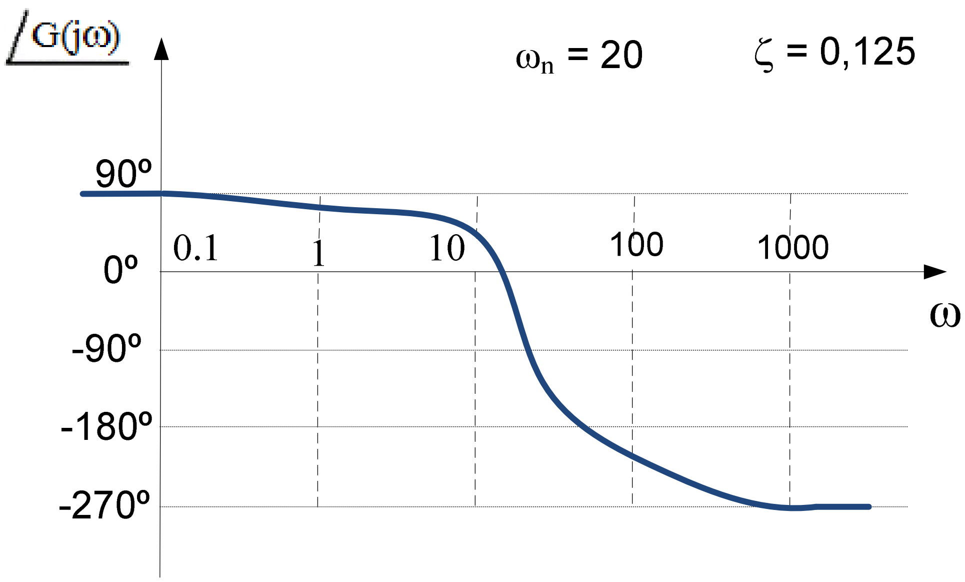

Fig. 9.29 – Diagrama de Bode de *fase* do Exemplo 9.17.

□

Exemplo 9.18:

$$G(j\omega) = \frac{1000\,(s-4)}{s\,(s-100)\,(s^2+5s+400)} = \frac{0{,}1\left(\frac{1}{4}\cdot s - 1\right)}{s\left(\frac{1}{100}\cdot s - 1\right)\left(\frac{s^2}{400} + \frac{5}{400}\cdot s + 1\right)}$$

O diagrama de Bode de *módulo* é igual aos dos quatro exemplos anteriores (Exemplos 9.14, 9.15, 9.16 e 9.17). O diagrama de Bode de *fase* está esboçado na figura 9.30.

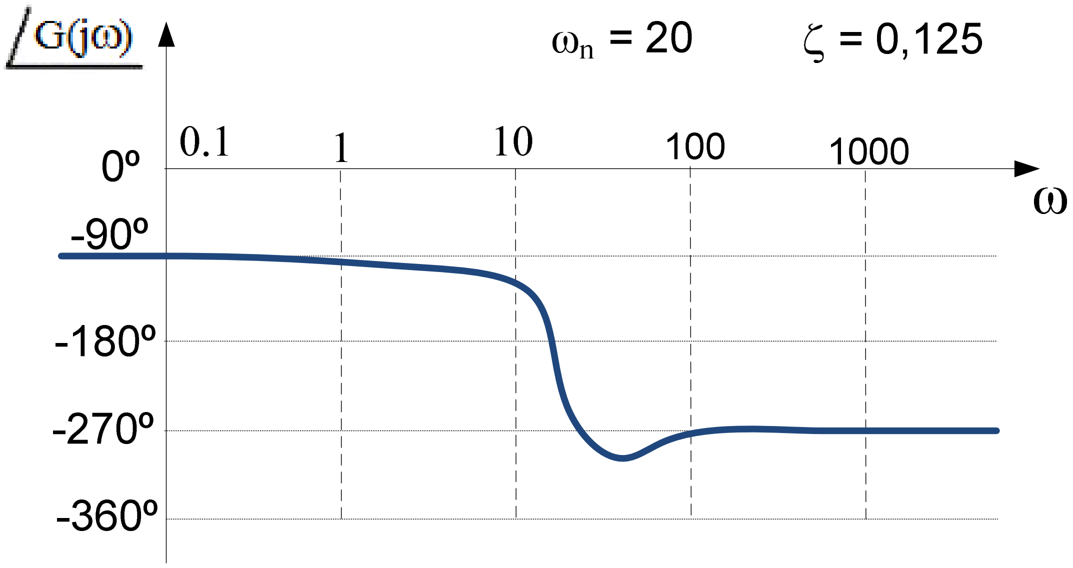

Fig. 9.30 – Diagrama de Bode de *fase* do Exemplo 9.18.

□

Exemplo 9.19:

$$G(j\omega) = \frac{10^6\ (s + 0{,}1)}{s\,(s+10)\,(s^2+10^2 s+10^4)} = \frac{(10 s + 1)}{s\left(\frac{1}{10}\cdot s + 1\right)\left(\frac{s^2}{10^4} + \frac{1}{10^2}\cdot s + 1\right)}$$

Note que

$K_B = 1 = 0$ dB $\qquad \omega_n = 100 \qquad \zeta = 0{,}5$

$\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1-2\zeta^2} = 70{,}71 \qquad M_r = \dfrac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1{,}155 = 0{,}897\,\text{dB}$

$T_1 = 10$ (zero) $\qquad T_2 = \dfrac{1}{10}$ (pólo)

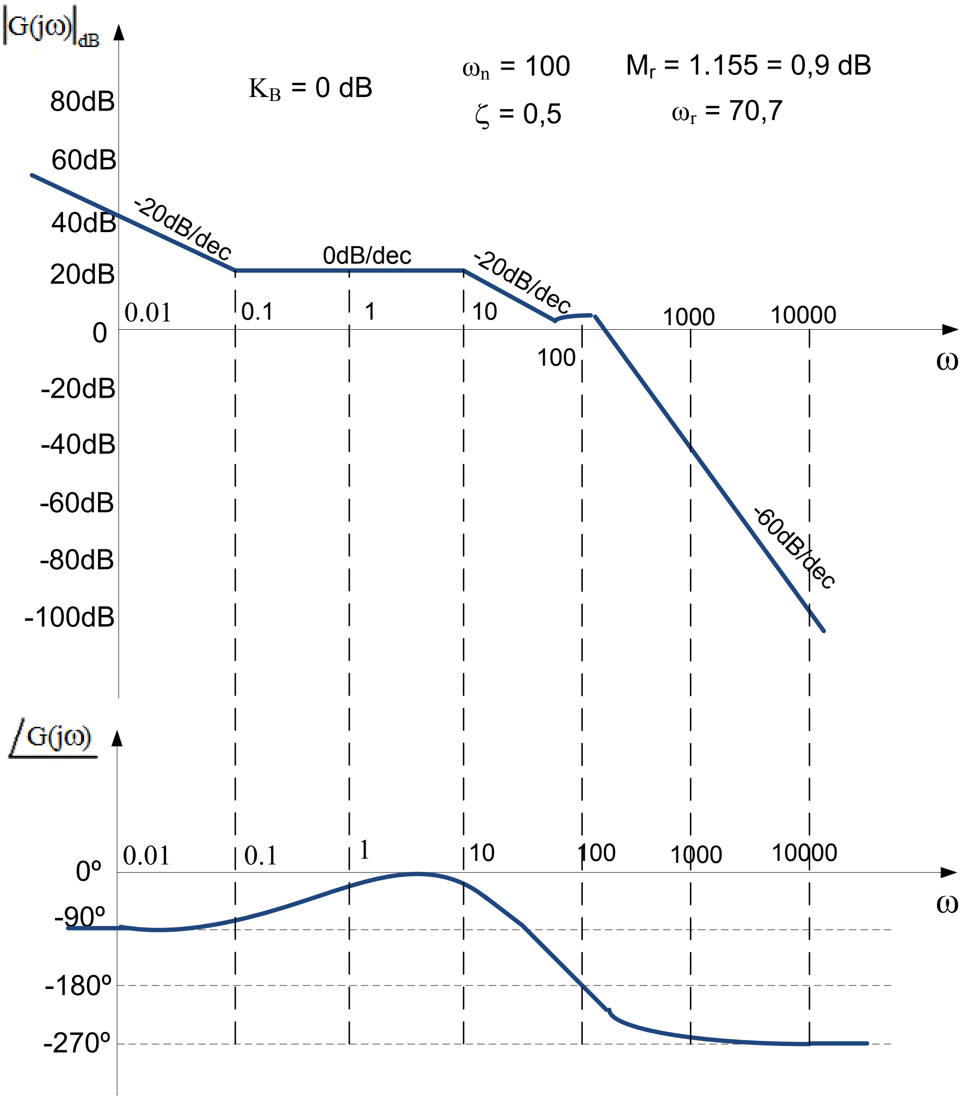

Fig. 9.31 – Diagrama de Bode de *fase* do Exemplo 9.19.

Exemplo 9.20:

$$G(j\omega) = \frac{10\,(s+0{,}1)}{s\,(s+10)\,(s^2+s+1)} = \frac{0{,}1\,(10\cdot s+1)}{s\,(0{,}1\cdot s+1)\,(s^2+s+1)}$$

Note que

$$K_B = 0{,}1 = -20\text{ dB} \qquad \omega_n = 1 \qquad \zeta = 0{,}5$$

$$\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1-2\zeta^2} = 0{,}707 \qquad M_r = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1{,}155 = 0{,}897\,\text{dB}$$

$$T_1 = 10 \;\; \text{(zero)} \qquad T_2 = \frac{1}{10} \;\; \text{(pólo)}$$

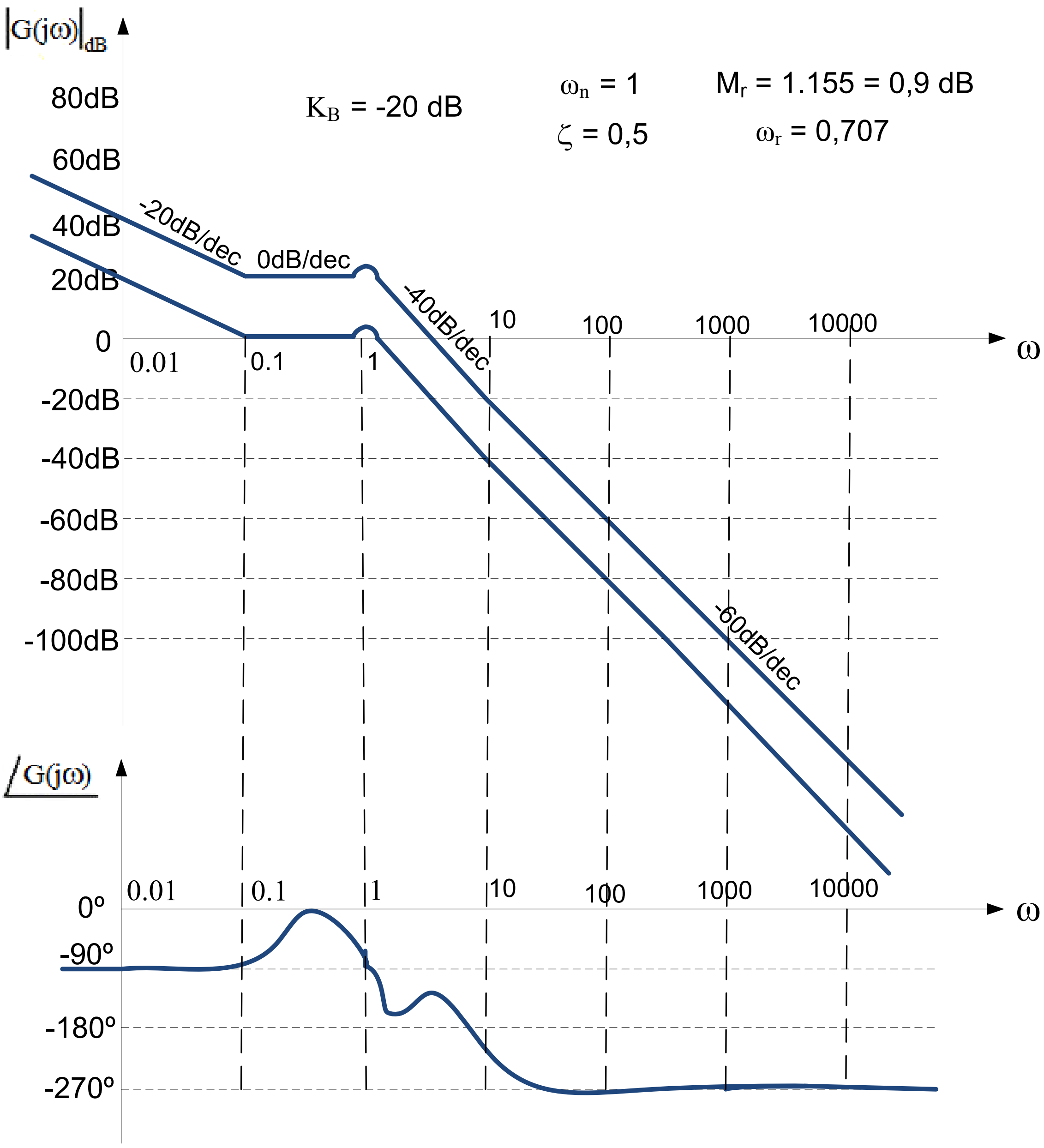

Fig. 9.32 – Diagrama de Bode de *fase* do Exemplo 9.20.

□

Exemplo 9.21:

$$G(j\omega) \;=\; \frac{80\left(s+\frac{1}{2}\right)}{s\,(s+20\,)\,(s^2+s+2\,)} \;=\; \frac{(\,2\cdot s\,+1\,)}{s\left(\frac{s}{20}\,+\,1\right)\left(\frac{s^2}{2}\,+\,\frac{s}{2}\,+1\right)}$$

Note que

$K_B\; = 1 = 0$ dB $\qquad \omega_n = \sqrt{2} = 1{,}414 \qquad \zeta = 0{,}354$

$$\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1-2\zeta^2} = 1{,}224 \qquad M_r = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1{,}069 = 0{,}58\,\text{dB}$$

$$T_1 = 2 \text{ (zero da F.T.)} \qquad T_2 = \frac{1}{20} \text{ (pólo da F.T.)}$$

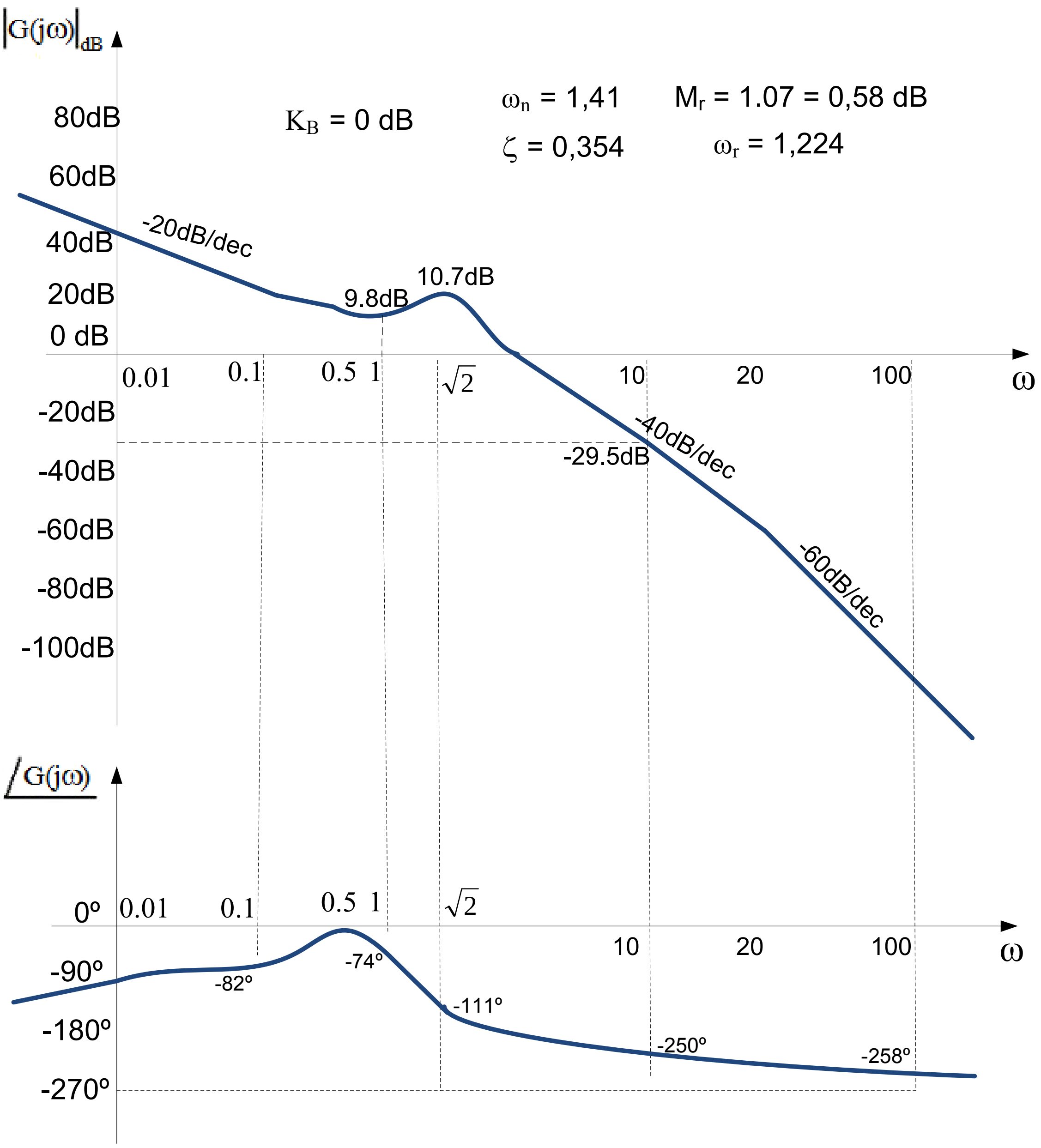

Fig. 9.33 – Diagrama de Bode de *fase* do Exemplo 9.21.