Universidade Federal do ABC

Sistemas de Controle II – 2021.Q1

Laboratório Virtual 3

Margem de Ganho, Margem de Fase e Carta de Nichols com Octave

Professora: Dra. Heloise Assis Fazzolari

Grupo G

Alunos:	**RA:**
Daniel Macedo Costa Fagundes	11076809
Gutemberg Cordeiro Borges	11075013
Marcos Vinicius Fabiano de Oliveira	11067212

Santo André

2021

Sumário

1 Exercícios

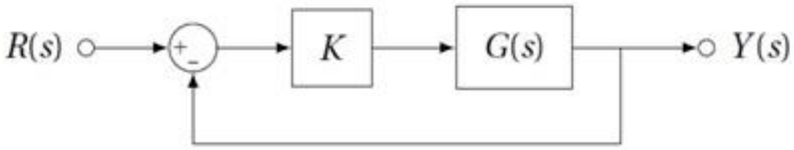
1.1 Exercício 1

2.1 Exercício 1

Considere o sistema da figura, com

$$G(s) = \frac{7.5}{s(s^2 + 2s + 4)}$$

Ajuste o ganho K para alcançar uma margem de fase de pelo menos $30°$ e uma margem de ganho de pelo menos $3\,\text{dB}$.



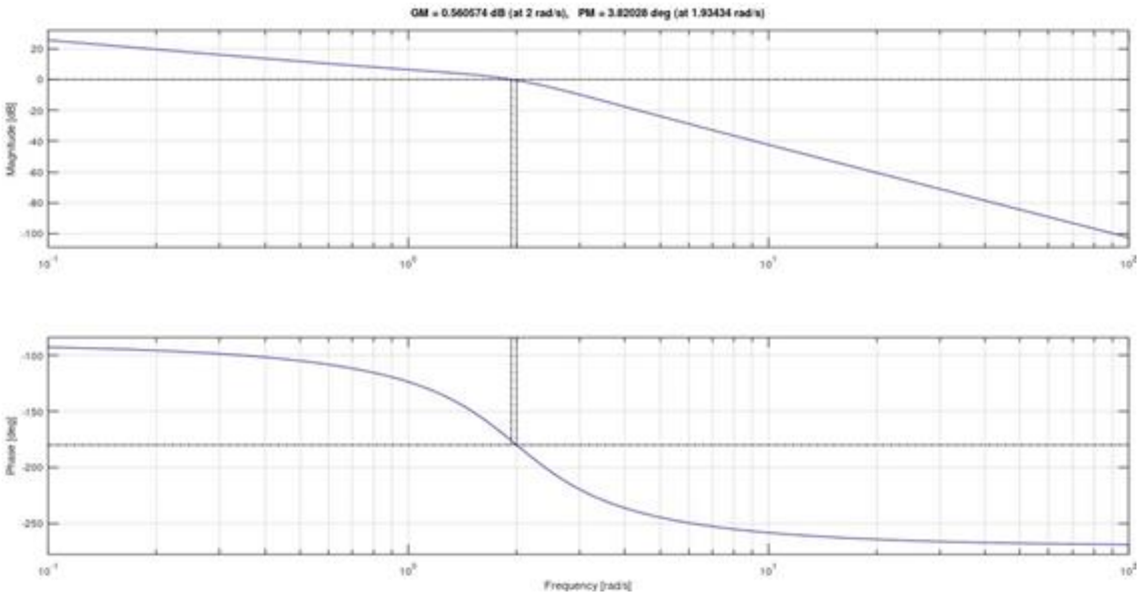
Para a solução:

(a) Faça o diagrama de Bode com $K = 1$. Use o comando `margin`.

A função de transferência para $K = 1$ é

```
              7.5
yl:  -----------------
     s^3 + 2 s^2 + 4 s
```

O diagrama de Bode com a margem de estabilidade para essa função de transferência é mostrado abaixo.



Para esse valor de ganho, o sistema possui margem de ganho e margem de fase positiva, o que indica uma estabilidade. Porém, a margem de estabilidade é pequena e o sistema pode atingir o limiar de instabilidade.

(b) Encontre a frequência na qual $\angle G(j\omega) = -150°$. Esta é a frequência de cruzamento do ganho para margem de fase de 30°.

Utilizando o Octave a frequência de cruzamento de ganho encontrada para a fase de =150° foi de:

$$w_c = 1,5043\, rad/s$$

Essa frequência pode ser obtida também, de maneira mais imprecisa, pela observação do diagrama de Bode de fase.

(c) Encontre o ganho logarítmico nessa frequência. Usando este valor, encontre o ganho K.

(d) Verifique o sistema com o novo ganho com o comando `margin`.

O ganho logarítmico para a frequência de cruzamento de

$$amplitude = 3,1378\, dB$$

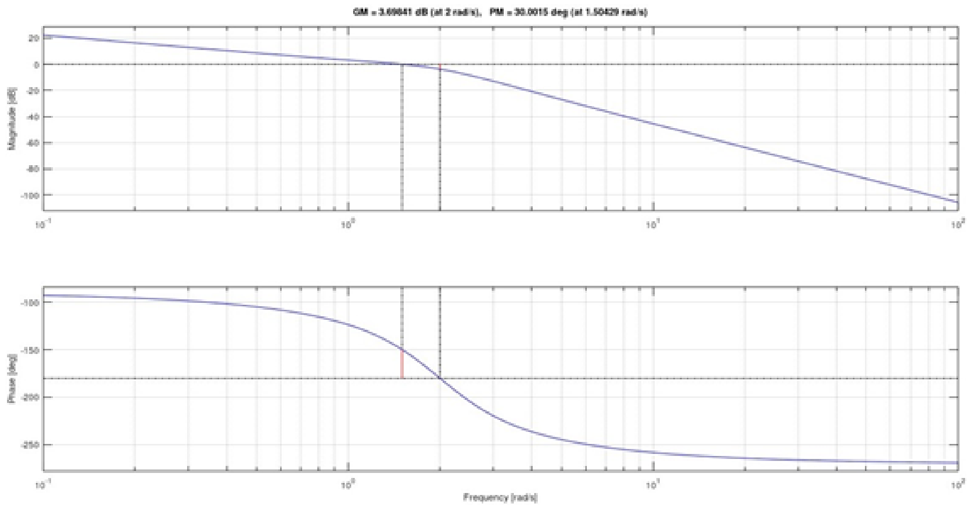
Logo, para encontrar o ganho K correspondente à margem de fase desejada, o diagrama de Bode de amplitude do item a) deve ser deslocado –3,1378 dB para baixo. Assim o ganho K obtido é

$$20 * \log_{10}(K) = -3,1378$$
$$\log_{10}(K) = \frac{-3,1378}{20}$$
$$K = 10^{\frac{-3,1378}{20}}$$
$$K = 0,6968$$

A função de transferência para K = 0,6968 é

```
               5.226
yl:    ------------------
       s^3 + 2 s^2 + 4 s
```

O diagrama de Bode com a margem de estabilidade para a função de transferência com o novo ganho é mostrado abaixo.



Para esse valor de ganho, o sistema possui margem de ganho de GM = 3,6984 dB e margem de fase PM = 30,0015°, ambas positivas. O sistema é estável.

1.2 Exercício 2

Um sistema de armazenamento holográfico experimental usa um disco de polímero flexível. Durante a rotação, o disco inclina, tornando difícil a recuperação das informações. Um sistema que compensa a inclinação foi desenvolvido. Para isso, um feixe de laser é focado na superfície do disco e as variações são medidas pela reflexão. Um espelho é ajustado para alinhar com o disco e tornar a recuperação da informação possível. O sistema pode ser representado por um sistema com realimentação unitária na qual um controlador com função de transferência

$$D(s) = \frac{78.575(s+436)^2}{(s+132)(s+8030)}$$

e uma planta e

$$P(s) = \frac{1{,}163 \cdot 10^8}{s^3+962.5s^2+5.985 \cdot 10^5 s+1.16 \cdot 10^8}$$

formam uma função de malha aberta G(s) = D(s)P(s).

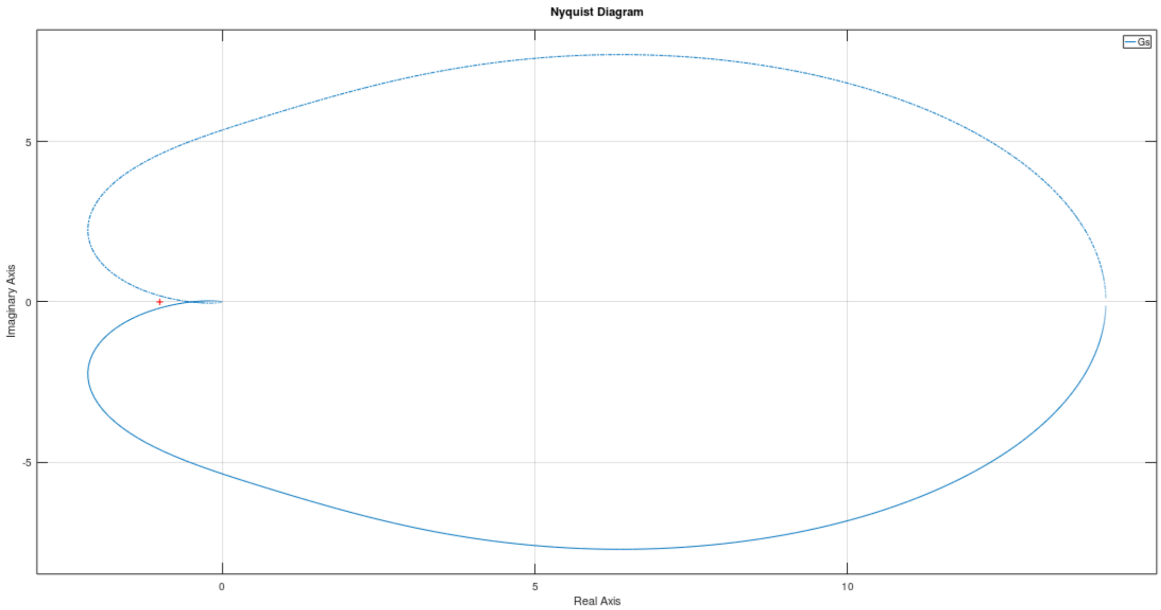
Utilizando o software Octave podemos determinar a estabilidade do sistema, mas antes precisamos definir nossas funções de transferência D(s), P(s) e G(s):

```
##Funcao do controlador
Ds = (78.5758*(s+436)^2)/((s+132)*(s+8030))

##Funcao da planta
Ps = (1.163*10^8)/(s^3 + 962.5*s^2 + 5.986*10^5*s + 1.16*10^8)

##Funca em malha aberta
Gs = Ds*Ps
```

Onde s é definido por:

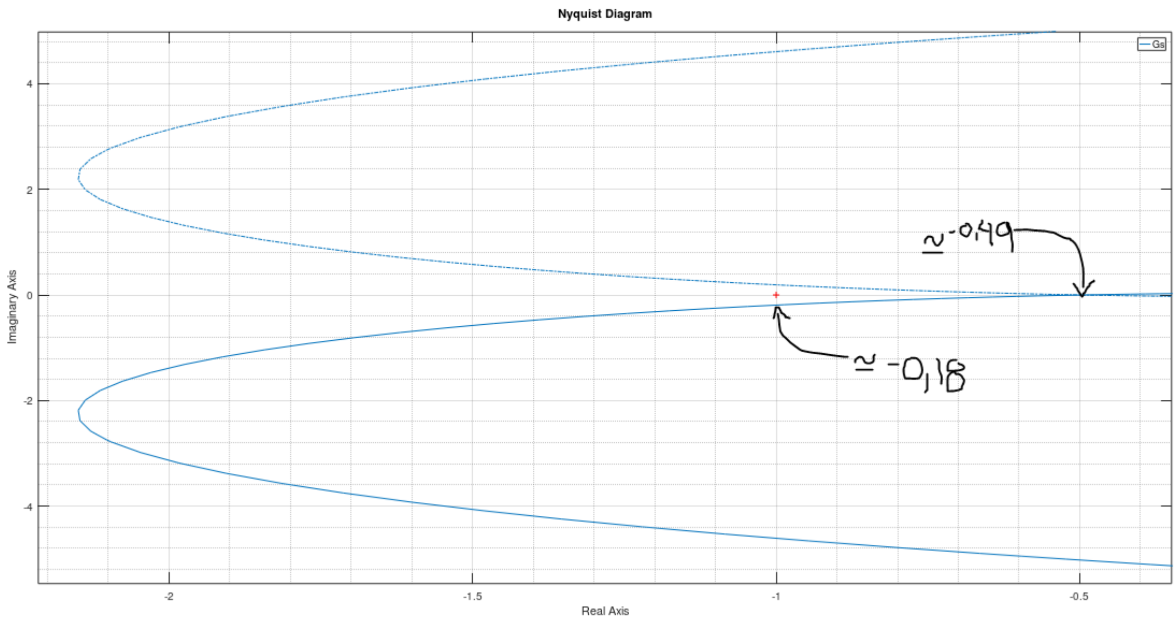
```
##Operador
s = tf('s');
```

Utilizando o comando nyquist para a função Gs obtemos o seguinte diagrama:

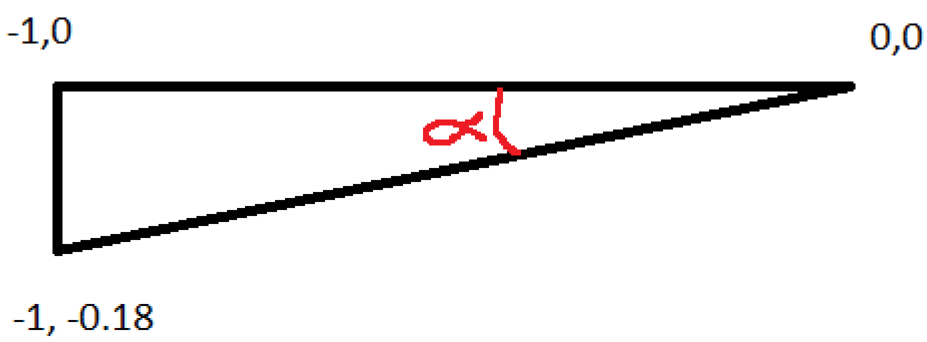


Analisando a região de interesse ao redor do –1 notamos que o sistema apresenta características que o determinam como **estável,** pois o diagrama não dá nenhuma volta ao redor de –1.

Olhando mais de perto podemos inferir a margem de ganho e com um pouco de matemática a margem de fase.



Para o ponto de cruzamento com o zero do eixo imaginário no semiplano esquerdo temos aproximadamente –0,49 no eixo real. A margem de fase é defendida como o inverso desse valor, portanto podemos aproximar para 2,04. Em dB temos 6.1926dB. Analisando a distância entre –1 + 0j até o valor mais próximo do diagrama em que a parte real seja –1 chegamos no ponto –1 –0,18j.



Por Pitágoras chegamos que o ângulo entre os pontos citados é de 10,20°. Esse seria nossa margem de fase.

Felizmente temos maneiras mais precisas e eficazes de encontrar esses valores. O comando *margin()* do Octave retorna os valores de margem de fase e margem de ganho e também as respectivas frequências.

```
##Analise de marges de fase e ganho
[Gm, Pm, wg, wm] = margin (Gs);
Gm_db = 20*log10(Gm);
printf("margem de Ganho: %f \nmargem de fase: %f \n", Gm_db, Pm);
```

O resultado não se afasta muito da estimativa inicial.

```
margem de Ganho: 6.073565
margem de fase: 10.532825
>> |
```

A margem de fase está ligada ao sobressinal do comportamento do sistema em malha fechada, pois existe uma relação entre o valor da margem e o fator de amortecimento em um sistema de segunda ordem do tipo 1:

$$PM^{o} = \arctan\left(\frac{2\xi}{\sqrt{\sqrt{1+4\xi^4}-2\xi^2}}\right)$$

Entretanto para valores de margem de fase até 60° é válida a aproximação linear:

$$\xi = \frac{MF}{100}$$

Para o valor calculado para a margem de fase (10.53°), temos:

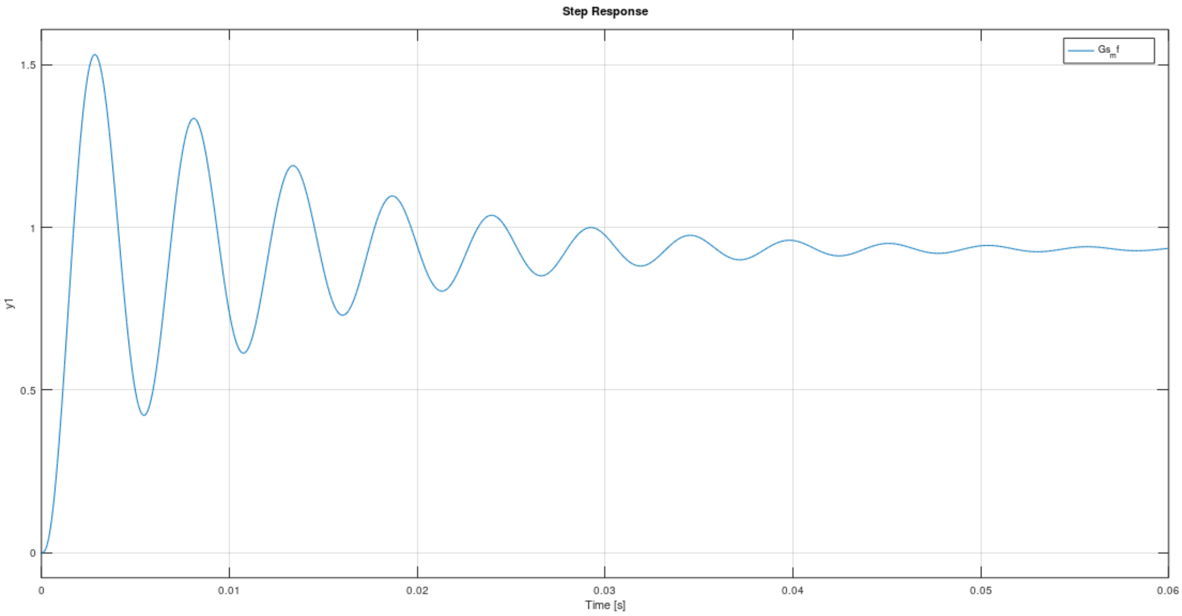
$$\xi = \frac{10.53}{100} = 0.1053$$

Substituindo na equação de sobressinal:

$$M_p = e^{-\frac{\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}}\pi} = e^{-\frac{0.1053}{\sqrt{(1-0.1053^2)}}\pi} = 0.71695$$

Podemos simular a resposta ao degrau e verificar o sobressinal.

```
##Fator de amortecimento
qsi = Pm / 100;

##Maximo sobressinal estimado
Mp = e^(-((qsi)/(sqrt(1-qsi^2)))*pi)

##Funcao de transferencia em malha fechada
Gs_mf = feedback(Gs,1);

##Verificadndo resposta ao degrau
step(Gs_mf);
```



Visivelmente o sobressinal experimental não alcançou o teórico, mas utilizando o Octave podemos ver o quanto o valor real se afasta da estimativa:

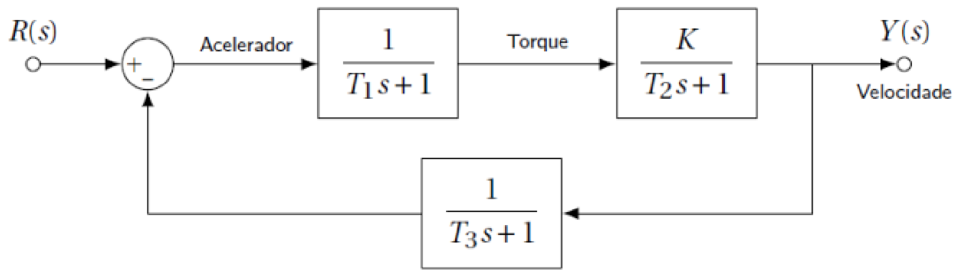
```
##Maximo sobressinal experimental
[amp, t] = step(Gs_mf);
Mp_exp = abs(max(amp)-1);

##Transforma em porcentagem
Mp = Mp*100;
Mp_exp = Mp_exp*100;

##Imprime os valores de sobressinal
printf("maximo sobressinal teórico:\t\t %.2f%% \n", Mp);
printf("maximo sobressinal experimental:\t %.2f%%  \n", Mp_exp);

##Calculo do erro de aproximacao
erro = (abs(Mp - Mp_exp) / Mp)*100;
printf("erro de aprox:\t\t\t\t %.2f%%  \n", erro);
```

```
maximo sobressinal teórico:              71.69%
maximo sobressinal experimental:         53.17%
erro de aprox:                           25.84%
```

Podemos associar o erro as simplificações adotadas ao longo da análise, em especial simplificamos nosso modelo para um sistema de ordem 2.

1.3 Exercício 3

Dado o sistema a seguir,



temos,

$$G_1(s) = \frac{1}{T_1 s + 1}$$

$$G_2(s) = \frac{K}{T_2 s + 1}$$

$$H(s) = \frac{1}{T_3 s + 1}$$

onde a função de transferência de malha aberta pode ser determinada da seguinte forma:

$$A(s) = G_1(s) G_2(s) H(s)$$

Logo, a FTMA do sistema é dada por:

$$A(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$$

Sabendo que $T_1 = 1s$, $T_2 = 3s$ e $T_3 = 0{,}4s$, portanto:

$$A(s) = \frac{K}{(s+1)(3s+1)(0{,}4s+1)}$$

a) Determinar o ganho K necessário para atender o requisito de que o erro estacionário seja menor que 13,7% do valor ajustado para a velocidade de referência;

De acordo com a função de transferência A(s) gerada, podemos verificar que se trata de um sistema do tipo 0 ($N = 0$). Logo, o erro estacionário pode ser determinado através da seguinte equação,

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}$$

onde a assíntota de baixa frequência é uma constante e assim, $K_p = K$. Dessa forma, para que o erro estacionário seja menor do que 13,7%, podemos fazer a seguinte relação para determinar o ganho K:

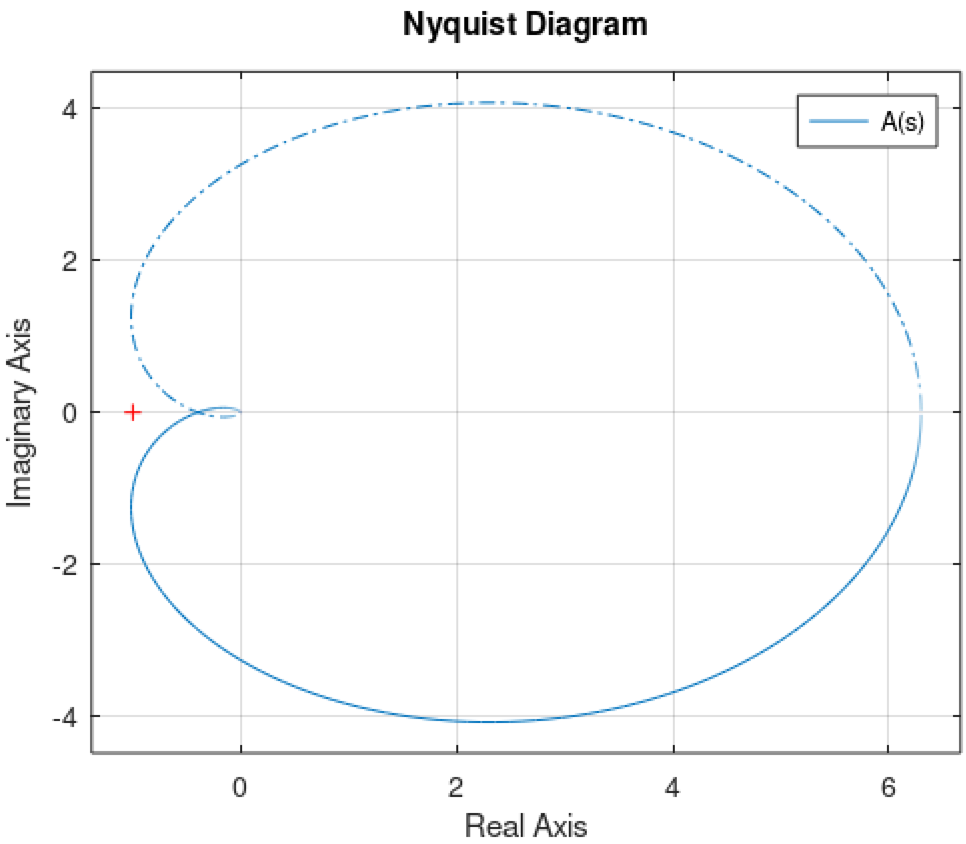
$$0{,}137 > \frac{1}{1+K} \quad \Rightarrow \quad K > \frac{1}{0{,}137} - 1$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{K > 6,299}$$

b) Com o ganho determinado em (a), utilizar o critério de Nyquist para investigar a estabilidade do sistema;

Através da função de transferência A(s), podemos assumir o valor do ganho K como igual a 6,299 e gerar o Diagrama de Nyquist no sistema Octave, conforme a seguir:

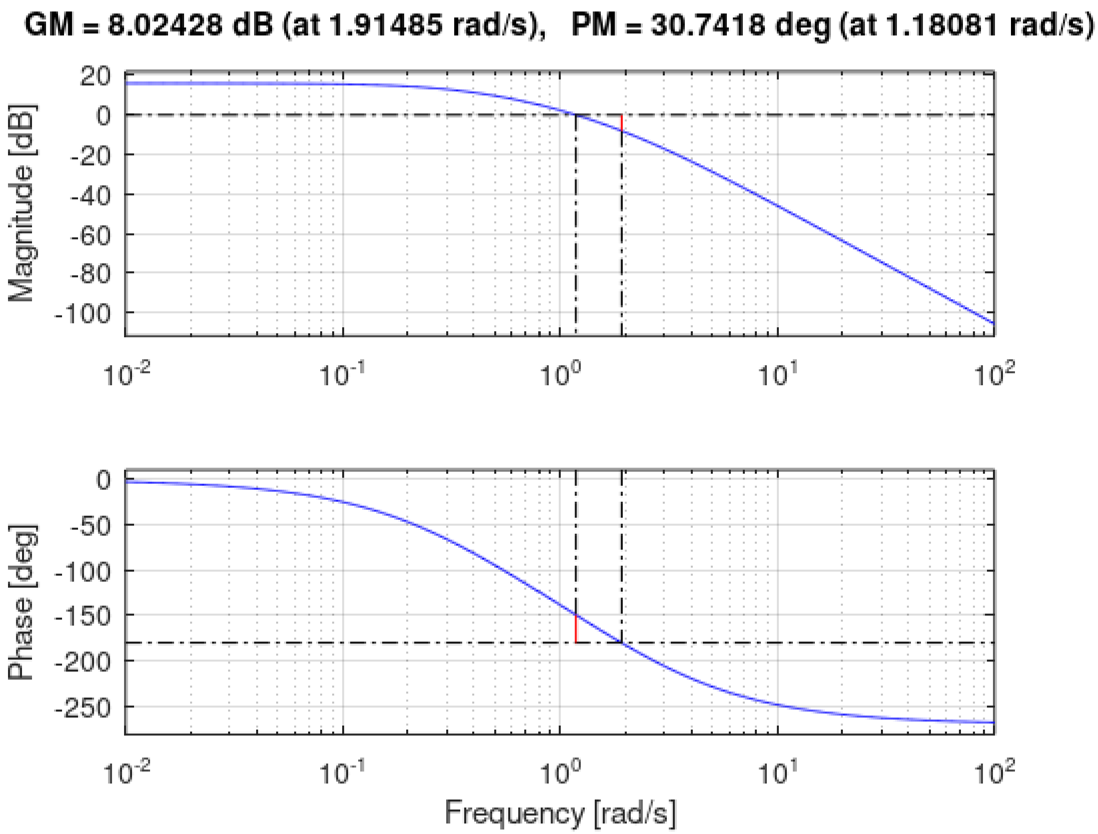
$$A(s) = \frac{6{,}299}{(s+1)(3s+1)(0{,}4s+1)}$$



Uma vez que não há nenhum polo no semiplano direito, temos que $P = 0$. Como já foi determinado no item (a) que $N = 0$, podemos assumir que $Z = 0$. Portando, **o sistema é estável**. A estabilidade do sistema é confirmada analisando o Diagrama de Nyquist, uma vez que não há o envolvimento do ponto -1 pela curva.

c) Determinar as margens de ganho e fase do sistema;

Utilizando o código do Anexo C, foi possível determinar que para A(s), a **margem de ganho é de 8,03 dB** em 1,92 rad/s e a **margem de fase é de 30,8°** em 1,18 rad/s.



d) **Usando a carta de Nichols, encontre a largura de banda do sistema em malha fechada, o valor do pico de ressonância e a frequência angular correspondente;**

A largura de banda ou banda passante (BW) é definida como a região entre zero e a frequência de corte (ω_c). Já a frequência de corte é definida como sendo aquela a partir da qual o ganho cai abaixo de 3 dB com relação ao ganho de baixas frequências. Assim, para determinar BW do sistema de malha fechada, devemos buscar o ponto onde a curva da FTMA toca a curva de -3 dB da carta. Com o auxílio de software, foi possível gerar a Carta de Nichols para o sistema, onde pode ser verificado que a largura de banda **BW é aproximadamente igual a 1,8 rad/s**.

Analisando a carta, podemos verificar que o contorno de maior valor que é tangenciado pela curva é o de 6 dB. Logo, o pico de ressonância M_r **é igual a 6 dB**, cuja **frequência angular correspondente é de aproximadamente 1,2 rad/s**.

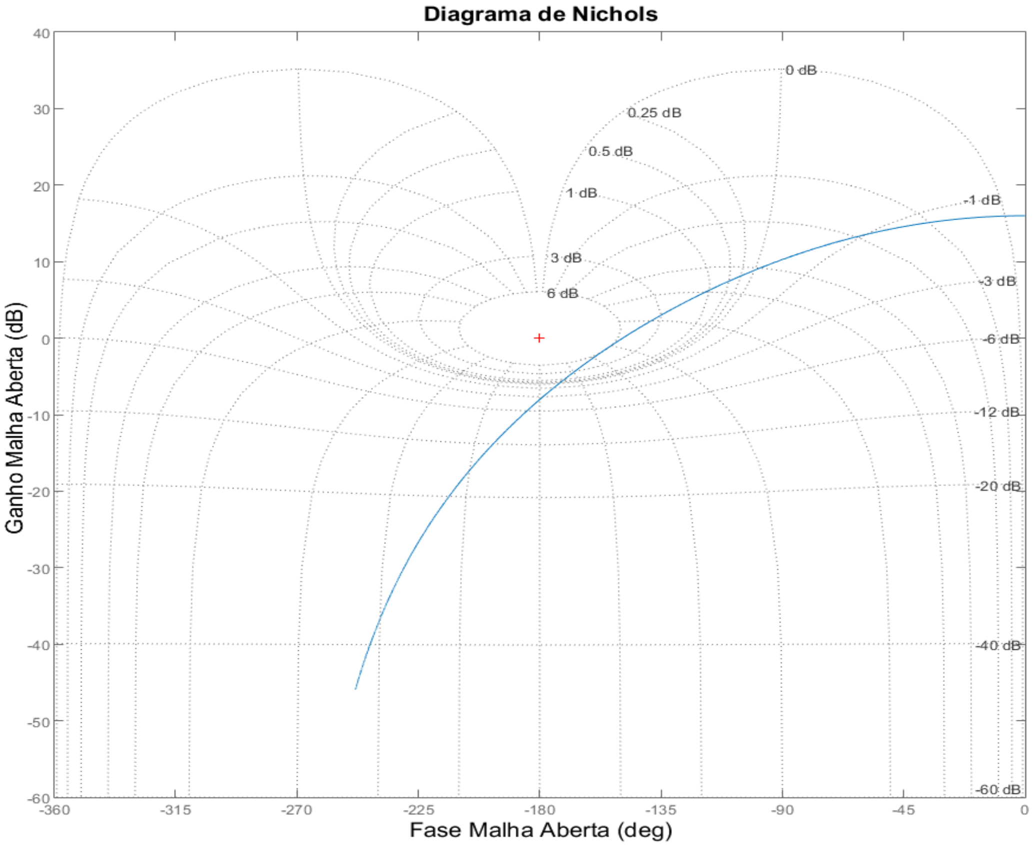


Diagrama de Nichols
Ganho Malha Aberta (dB)
Fase Malha Aberta (deg)
0 dB
0.25 dB
0.5 dB
1 dB
3 dB
6 dB
-1 dB
-3 dB
-6 dB
-12 dB
-20 dB
-40 dB
-60 dB

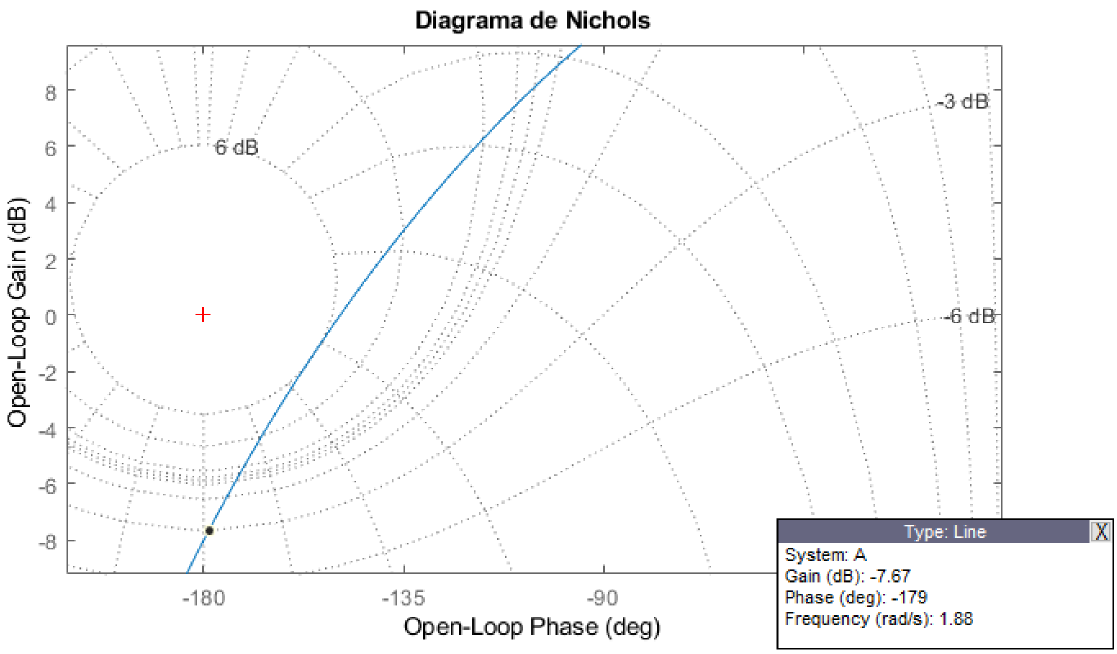
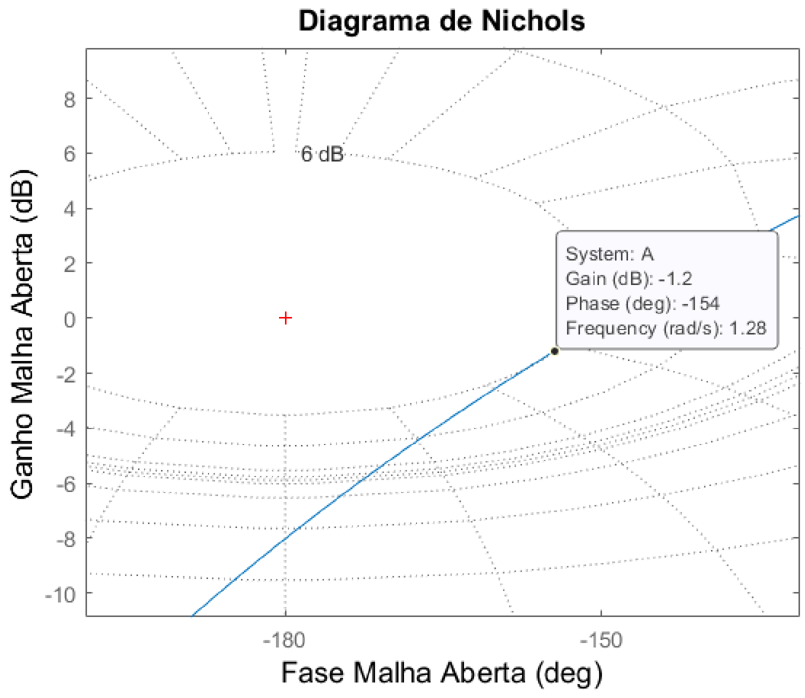


Diagrama de Nichols
Open-Loop Gain (dB)
Open-Loop Phase (deg)
6 dB
-3 dB
-6 dB
Type: Line
System: A
Gain (dB): -7.67
Phase (deg): -179
Frequency (rad/s): 1.88



e) Com os valores encontrados no item (d), calcule o máximo sobressinal e o tempo de assentamento. Obtenha a resposta ao degrau unitário e verifique os valores obtidos.

O máximo sobressinal, o pico de ressonância e a frequência de ressonância são dados por:

$$M_p = e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi}$$

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

Com os valores obtidos no item (d), temos:

$$6 = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \Rightarrow \quad \zeta = 0{,}2595$$

Assim, podemos calcular o máximo sobressinal:

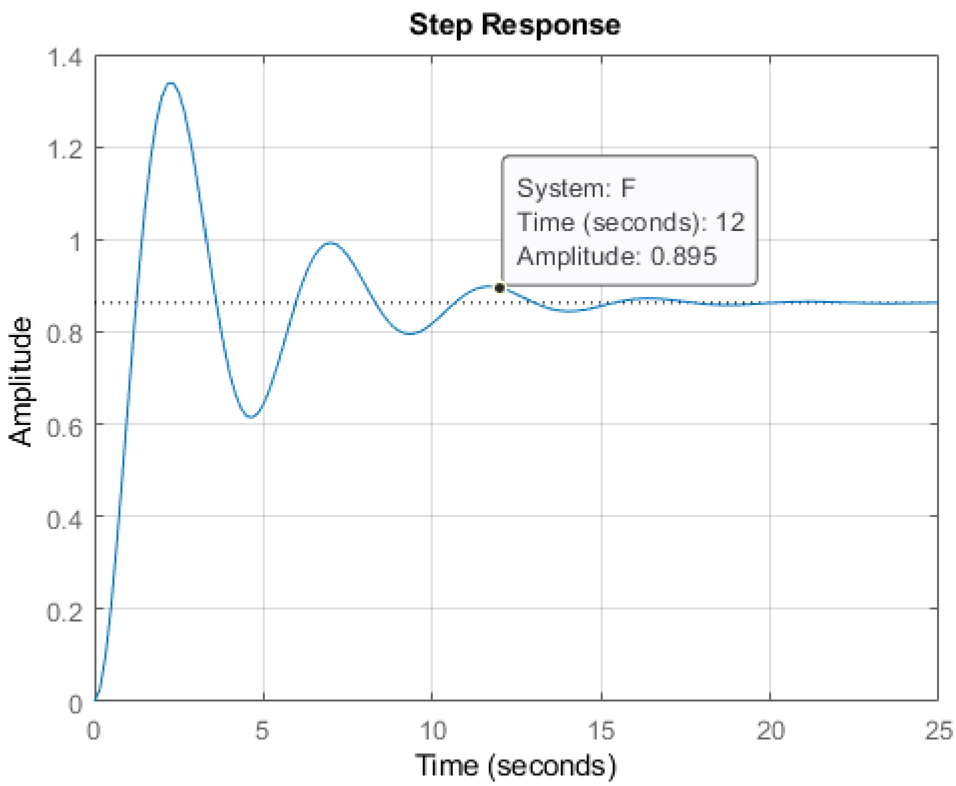
$$M_p = e^{-\frac{0{,}2595}{\sqrt{1-0{,}2595^2}}\pi} \quad \therefore \quad \boldsymbol{M_p = 0{,}4299}$$

Para determinar a frequência angular, temos:

$$1{,}2 = \omega_n\sqrt{1 - 2.\,0{,}2595^2} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = 1{,}29\,rad/s$$

Logo, podemos calcular o tempo de assentamento:

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad \Rightarrow \quad t_s = \frac{4}{0{,}2595.1{,}29} \quad \therefore \quad \boldsymbol{t_s = 11{,}94\ s}$$




```
Máximo Sobressinal = 0.429946
BW = 1.804 rad/s
Mr = 6 dB
Mr = 1.99526
Tempo de Acomodação (ts) = 12.8322 s
```

Comparando os resultados calculados com a resposta em degrau unitário, podemos verificar que os cálculos obtiveram êxito, e a pequena diferença encontrada para o tempo de acomodação é devido as aproximações durante os cálculos manuais e a precisão quando calculado via software.

Anexo A – Código Exercício 1

```
%Ex_2.1
%Laboratório Virtual 3

close all; %---------------------------fecha todas as figuras
clear all; %---------------------------limpa todas as variáveis
clc; %---------------------------------limpa o terminal

pkg load control %---------------------abre o pacote de controle

k = 1; %-------------------------------ganho
s = tf('s'); %-------------------------operador de laplace
G_sa = (k*7.5) / (s*(s^2 + 2*s + 4)) %-função de transferência de malha aberta

figure(1) %----------------------------abre a figura 1
margin(G_sa) %-------------------------diagrama de Bode com as margens de ganho e fase

w = logspace(-1,1,100000); %-----------faixa de frequências
[mag,phase,w] = bode(G_sa,w); %--------valores do diagrama de Bode

%--------------------------------------loop para encontrar a frequência associada à fase de -150°
for i = 1:100000
  x = phase(i,1);
  if x > -150.002 && x < -149.995
    c = x
    pos = i
  endif
endfor
w_b = w(1,pos) %-----------------------frequência de cruzamento do ganho
amp = mag(pos,1) %---------------------amplitude associada a frequência de cruzamento do ganhc
amp_dB = 20 * log10(amp) %-------------amplitude em dB
k_n = 10^(-amp_dB/20) %----------------novo ganho

k = k_n; %-----------------------------ganho da segunda F.T.M.A
s = tf('s'); %-------------------------operador de laplace
G_sa = (k*7.5) / (s*(s^2 + 2*s + 4)) %-função de transferência de malha aberta para k_n

figure(2) %----------------------------abre a figura 2
margin(G_sa) %-------------------------diagrama de Bode com as margens de ganho e fase
```

Anexo B – Código Exercício 2

```
##Sistemas de controle II | LAB03: ex 2

##Reseta ambiente
clear all;
close all;
clc;

##Carrega pacote de controle
pkg load control;

##Operador
s = tf('s');

##Funcao do controlador
Ds = (78.5758*(s+436)^2)/((s+132)*(s+8030))

##Funcao da planta
Ps = (1.163*10^8)/(s^3 + 962.5*s^2 + 5.986*10^5*s + 1.16*10^8)

##Funca em malha aberta
```

```
Gs = Ds*Ps

##Diagrama de Nyquist para o sistema
nyquist(Gs);

##Analise de marges de fase e ganho
[Gm, Pm, wg, wm] = margin (Gs);
Gm_db = 20*log10(Gm);
printf("margem de Ganho:\t\t\t %f \nmargem de fase:\t\t\t\t %f \n", Gm_db,
Pm);

##Fator de amortecimento
qsi = Pm / 100;

##Maximo sobressinal estimado
Mp = e^(-((qsi)/(sqrt(1-qsi^2)))*pi);

##Funcao de transferencia em malha fechada
Gs_mf = feedback(Gs,1);

##Verificadndo resposta ao degrau
figure;
step(Gs_mf);

##Maximo sobressinal experimental
[amp, t] = step(Gs_mf);
Mp_exp = abs(max(amp)-1);

##Transforma em porcentagem
Mp = Mp*100;
Mp_exp = Mp_exp*100;

##Imprime os valores de sobressinal
printf("maximo sobressinal teórico:\t\t %.2f%% \n", Mp);
printf("maximo sobressinal experimental:\t %.2f%%  \n", Mp_exp);

##Calculo do erro de aproximacao
erro = (abs(Mp - Mp_exp) / Mp)*100;
printf("erro de aprox:\t\t\t\t %.2f%%  \n", erro);
```

Anexo C – Código Exercício 3

```
clear all;
close all;
clc;

disp('Função de Transferência de Malha Aberta')

n = 6.299;

f1 = [1 1];
f2 = [3 1];
f3 = [0.4 1];
d = conv(f1,conv(f2,f3));
```

```
A = tf(n,d)
pole(A);

figure
nyquist(A)

figure
margin(A)

figure
w=1e-3:1e-3:10;
nichols(A,w)
grid on
ngrid
title('Diagrama de Nichols')

[M,P]=nichols(A,w);
for k=1:1:length(M)
    if M(k)<=0.45
        BW=w(k);
        break
    end
end

pause
MrdB=input('Entre com Mr em dB do Diagrama de Nichols');

Mr=10^(MrdB/20);
z2=roots([4,-4,(1/Mr^2)]);% Mr=1/sqrt(4z^2(1-z^2))
z1=sqrt(z2);
z=min(z1);
Pos=exp(-z*pi/(sqrt(1-z^2)));
Ts=(4/(BW*z))*sqrt((1-z^2)+sqrt(4*z^4-4*z^2+2));
Tp=(pi/(BW*sqrt(1-z^2)))*sqrt((1-z^2)+sqrt(4*z^4-4*z^2+2));

disp('Função de Transferência de Malha Fechada')

% Malha Fechada G(s) e H(s)
d = conv(f1,f2);
G = tf(n,d);
H = tf(1,f3);

F = feedback(G,H)

figure
step(F)
grid on

fprintf('\n Máximo Sobressinal = %g',Pos)
fprintf('\n BW = %g rad/s',BW)
fprintf('\n Mr = %g dB',MrdB)
fprintf('\n Mr = %g ',Mr)
fprintf('\n Tempo de Acomodação (ts) = %g s',Ts)
```