UFABC - Universidade Federal do ABC

Sistemas de Controle II

Determinação Experimental de Funções de Transferência

Profª Dra. Heloise Assis Fazzolari

heloise.fazzolari@ufabc.edu.br
Sala 717-1, 7º andar, Torre 1, Bloco A - Campus Santo André

3º Quadrimestre de 2021

O primeiro passo para a análise e o projeto de um sistema de controle é estabelecer um modelo matemático da planta considerada. A obtenção analítica do modelo pode ser muito difícil.

A importância dos métodos de resposta em frequência é que a função de transferência da planta ou de qualquer outro componente do sistema pode ser obtida por medidas simples de resposta em frequência. Se forem medidas a relação de amplitudes e a defasagem em um número suficiente de frequências dentro do intervalo de frequências de interesse, elas podem ser representadas no diagrama de Bode. Então, a função de transferência pode ser determinada por aproximação assintótica.

Determinação de função de transferência de fase mínima a partir do diagrama de Bode

Um sistema de fase mínima pode ser determinado pela curva de resposta em frequência examinando-se as características de alta frequência. Para determinar a função de transferência:

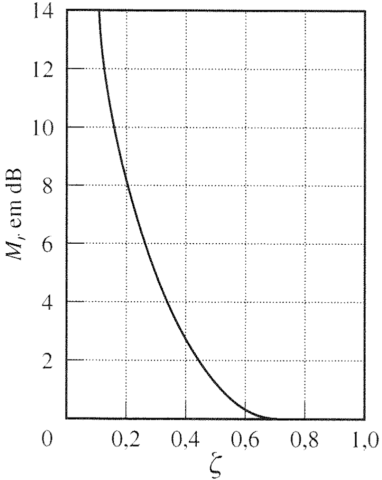
1. Traçar as assíntotas às curvas de módulo em dB obtidas experimentalmente. Assíntotas devem ter inclinações múltiplas de ± 20 dB/déc.
2. Se a inclinação da curva de módulo em dB mudar de -20 para -40 dB/década em $\omega = \omega_1$ existe um fator $\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_1}}$ na F.T.
3. Se a inclinação mudar em -40dB/década em $\omega = \omega_2$ deverá ter um fator

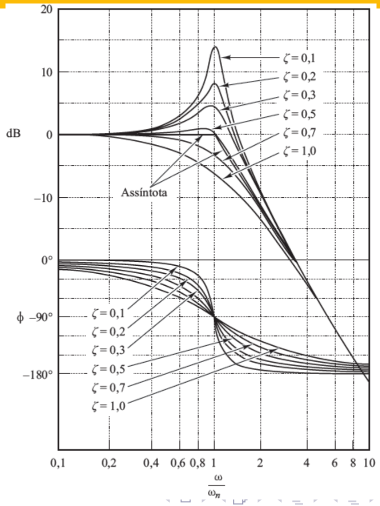
$$\frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_2}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}$$

na F.T. A frequência natural $\omega_n = \omega_2$. ζ pode ser determinado da curva experimental de módulo em dB medindo-se a amplitude do pico de ressonância próximo à freq. ω_2 e

Determinação de função de transferência de fase mínima a partir do diagrama de Bode

Curva de M_r versus ζ relativa ao sistema de segunda ordem.





Determinação de função de transferência de fase mínima a partir do diagrama de Bode

O ganho pode ser obtido a partir da porção de baixa frequência da curva de módulo em dB. Para frequências muito baixas a função de transferência senoidal $G(j\omega)$ pode ser escrita como:

$$\lim_{\omega \to 0} G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^{\lambda}}$$

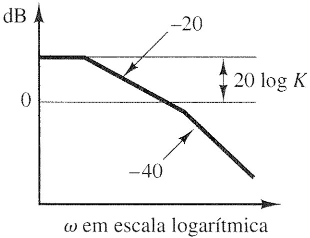
em muitos casos práticos $\lambda = 0$, 1 ou 2.

1. Para $\lambda = 0$ ou sistema tipo 0,

$$G(j\omega) = K, \quad \text{para} \quad \omega \ll 1, \text{ ou}$$

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log K, \quad \text{para} \quad \omega \ll 1$$

A assíntota de baixa freq. é uma linha horizontal de $20 \log K$ dB.



Determinação de função de transferência de fase mínima a partir do diagrama de Bode

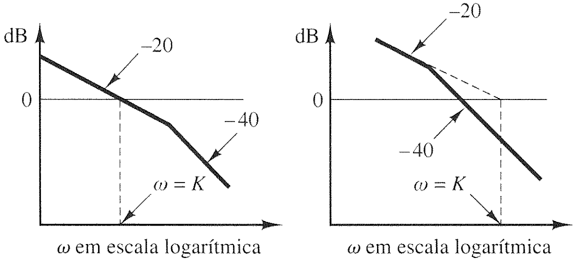
2. Para $\lambda = 1$ ou sistema tipo 1,

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega}, \quad \text{para} \quad \omega \ll 1$$

ou

$$20\log|G(j\omega)| = 20\log K - 20\log\omega, \quad \text{para} \quad \omega$$

A assíntota de baixa freq. tem inclinação de -20dB/década. A freq. na qual a assíntota de baixa freq. (ou sua extensão) cruza a linha 0dB é igual a K.



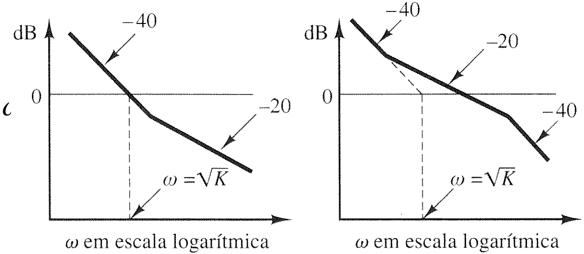
Determinação de função de transferência de fase mínima a partir do diagrama de Bode

3. Para $\lambda = 2$ ou sistema tipo 2,

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2}, \quad \text{para} \quad \omega \ll 1$$

ou

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log K - 40 \log \omega, \quad \text{para}$$



A assíntota de baixa freq. tem inclinação de −40dB/década. A freq. na qual essa assíntota de baixa freq. (ou sua extensão) cruza a linha 0dB é igual a $\sqrt{K}$.

Determinação de função de transferência de fase mínima a partir do diagrama de Bode

A curva de ângulo de fase obtida experimentalmente fornece meios para testar a função de transferência obtida a partir da curva de módulo em dB. Para sistemas de fase mínima, a curva de ângulo de fase obtida experimentalmente deve coincidir razoavelmente bem com a curva de ângulo de fase obtida teoricamente da função de transferência que acaba de ser determinada. As duas curvas de ângulo de fase devem coincidir exatamente tanto para as frequências muito baixas como para as muito altas.

Se os ângulos de fase obtidos experimentalmente em freq. altas não coincidem com $-90°(q-p)$, p grau do numerador e q grau do denominador da F.T., então a F.T. deverá ser de fase não mínima.

Funções de transferência de fase não mínima.

Se, na extremidade de alta frequência, o atraso de fase calculado for 180^o menor que o obtido experimentalmente, então um dos zeros da função de transferência deverá situar-se no semiplano direito do plano s, em vez de no semiplano esquerdo. Se o atraso de fase calculado diferir do atraso de fase determinado experimentalmente em uma taxa constante de variação de fase, então haverá um retardo de transporte ou tempo morto.

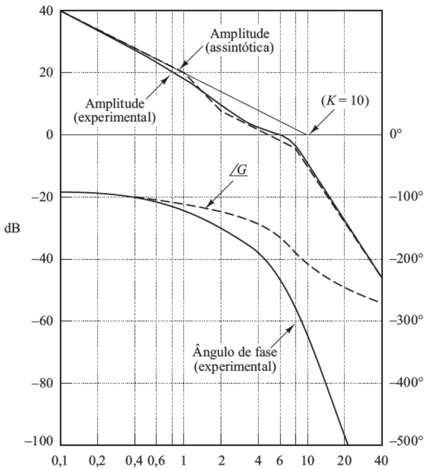
A F.T. $G(s)\,e^{-Ts}$ onde $G(s)$ é uma relação de polinômios em s, então

$$
\begin{aligned}
\lim_{\omega\to\infty} \frac{d}{d\omega} \underline{/G(j\omega)\,e^{-j\omega T}} &= \lim_{\omega\to\infty} \frac{d}{d\omega} \left[\underline{/G(j\omega)} + \underline{/e^{-j\omega T}}\right] \\
&= \lim_{\omega\to\infty} \frac{d}{d\omega} \left[\underline{/G(j\omega)} - \omega T\right] \\
&= 0 - T = -T
\end{aligned}
$$

$\lim_{\omega\to\infty} \underline{/G(j\omega)} =$ constante. Daqui podemos avaliar a amplitude do atraso de transporte T.

Exemplo

Determine a função de transferência do sistema cujas curvas de resposta em frequência experimentais são mostradas a seguir.



O primeiro passo na determinação da função de transferência é aproximar a curva de módulo em dB por assíntotas com inclinações de ± 20 dB/década e seus múltiplos. Em seguida, estimamos as frequências de canto.

$$G(j\omega) = \frac{K(1 + 0,5j\omega)}{j\omega(1 + j\omega)\left[1 + 2\xi\left(j\frac{\omega}{8}\right) + \left(j\frac{\omega}{8}\right)^2\right]}, \quad \text{ou}$$

$$G(s) = \frac{320(s + 2)}{s(s + 1)(s^2 + 8s + 64)}$$

Exemplo

Essa função de transferência é uma primeira tentativa, porque não examinamos ainda a curva de ângulo de fase. Uma vez anotadas as frequências de canto na curva de módulo em dB, a curva de ângulo de fase correspondente a cada fator componente da função de transferência pode ser facilmente obtida. A soma dessas curvas componentes do ângulo de fase é a da função de transferência admitida.

Na figura, vemos de modo claro a discrepância entre a curva de ângulo de fase calculada e a curva de ângulo de fase obtida experimentalmente. A diferença entre as duas curvas nas frequências muito elevadas parece ter uma taxa de variação constante. Assim, a discrepância entre as curvas de ângulo de fase deve ser causada por um retardo de transporte.

Então, vamos supor que a função de transferência completa seja $G(s)e^{-Ts}$. Como a discrepância entre os ângulos de fase calculados e experimentais é igual a $-0,2\omega rad$ para frequências muito elevadas, podemos determinar o valor de T como

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{d}{d\omega} \underline{/G(j\omega)\, e^{-j\omega T}} = -T = -0,2.$$

Exemplo

Desse modo, a presença do atraso de transporte pode ser determinada, e a função de transferência completa obtida a partir das curvas experimentais é:

$$G(s) = \frac{320(s+2)e^{-0,2s}}{s(s+1)(s^2+8s+64)}$$