UFABC - Universidade Federal do ABC

Sistemas de Controle II

Casos Especiais do Diagrama de Nyquist, Estabilidade

Profª Dra. Heloise Assis Fazzolari

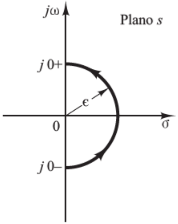
heloise.fazzolari@ufabc.edu.br
Sala 717-1, 7º andar, Torre 1, Bloco A - Campus Santo André

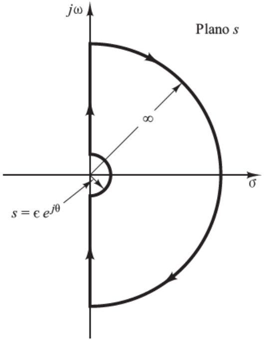
3º Quadrimestre de 2021

Caso existam polos sobre o eixo $j\omega$, então um desvio ao redor dos polos sobre o contorno é necessário, caso contrário, o mapeamento iria para infinito de uma forma indeterminada, sem informação angular. Consequentemente, um esboço completo do diagrama de Nyquist não poderia ser feito, e o número de voltas em torno de -1 não poderia ser determinado.

Como o percurso de Nyquist não deve passar pelos polos ou zeros de $G(s)H(s)$, se a função $G(s)H(s)$ tiver polos ou zeros na origem (ou sobre qualquer ponto no o eixo $j\omega$) o contorno no plano s deve ser modificado.

O modo usual é utilizar uma semicircunferência de raio infinitesimal ϵ. A área que o contorno fechado evita é muito pequena e tende a zero, à medida que $\epsilon \to 0$.

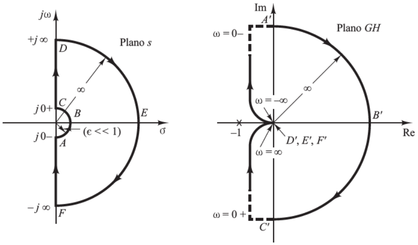




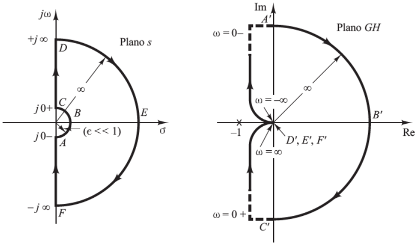
$$G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

Os pontos correspondentes a $s = j0+$ e $s = j0-$ no lugar geométrico de $G(s)H(s)$ no plano $G(s)H(s)$ são $-j\infty$ e $+j\infty$, respectivamente. No percurso semicircular com raio ϵ (onde $\epsilon \ll 1$), a variável complexa s pode ser escrita como $s = \epsilon e^{j\theta}$, com θ variando de -90^o a $+90^o$. Então, $G(s)H(s)$ torna-se $G(\epsilon e^{j\theta})H(\epsilon e^{j\theta}) = \frac{K}{\epsilon e^{j\theta}} = \frac{K}{\epsilon} e^{-j\theta}$

O valor K/ϵ tende a infinito a medida que ϵ tende a zero e $-\theta$ varia de 90^o a -90^o, conforme um ponto representativo s se move ao longo da semicircunferência no plano s. Portanto, os pontos $G(j0-)H(j0-) = j\infty$ e $G(j0+)H(j0+) = -j\infty$ são ligados por uma semicircunferência de raio infinito no semiplano direito do plano GH.



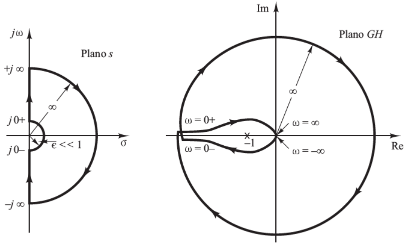
Como não existem polos no semiplano direito do plano s e o lugar geométrico de $G(s)H(s)$ não envolve o ponto $-1 + j0$, não há zeros da função $1 + G(s)H(s)$ no semiplano direito do plano s e portanto o sistema é estável.



Para uma F.T. de malha aberta $G(s)H(s)$ que envolve um fator $1/s^n$ $(n = 1, 2, 3...)$, o diagrama de $G(s)H(s)$ descreve no sentido horário n semicircunferências de raio infinito em torno da origem, à medida que um ponto representativo s se move ao longo do semicírculo de raio ϵ.

Considere $G(s)H(s) - \frac{K}{s^2(Ts+1)}$. Então, $\lim_{s \to \epsilon e^{j\theta}} G(s)H(s) = \frac{K}{\epsilon^2 e^{2j\theta}} = \frac{K}{\epsilon^2} e^{-2j\theta}$.

Conforme θ varia de -90^o a $+90^o$ no plano s, o ângulo de $G(s)H(s)$ varia de -180^o a $+180^o$. Uma vez que não há nenhum polo no semiplano direito do plano s e que o lugar geométrico envolve o ponto $-1 + j0$ duas vezes no sentido horário para qualquer valor positivo de K, existem dois zeros de $1 + G(s)H(s)$ no semiplano direito do plano s. Portanto, o sistema é sempre instável.



O critério de estabilidade de Nyquist pode ser generalizado para um caso geral em que $G(s)H(s)$ tem polos e/ou zeros no eixo $j\omega$

Critério de Estabilidade de Nyquist

Se a função de transferência de malha aberta $G(s)H(s)$ possuir k polos no semiplano direito do plano s, então, para que haja estabilidade, o lugar geométrico de $G(s)H(s)$, à medida que um ponto representativo s descrever o percurso modificado de Nyquist no sentido horário, deverá envolver o ponto $-1 + j0$ k vezes no sentido anti-horário.

$$Z = N + P$$

Z = número de zeros de $1 + G(s)H(s)$ no semiplano direito do plano s;
N = número de envolvimentos do ponto $-1 + j0$ no sentido horário;
P = número de polos $G(s)H(s)$ no semiplano direito do plano s.

Examinando a estabilidade de sistemas lineares de controle utilizando o critério de estabilidade de Nyquist, vemos que podem ocorrer três possibilidades:

1. Não existe nenhum envolvimento do ponto $-1 + j0$. Isso implica que o sistema será estável se não houver polos de $G(s)H(s)$ no semiplano direito do plano s; caso contrário, o sistema será instável.
2. Existem um ou mais envolvimentos do ponto $-1 + j0$ no sentido anti-horário. Nesse caso, o sistema será estável se o número de envolvimentos no sentido anti-horário for o mesmo que o número de polos de $G(s)H(s)$ no semiplano direito do plano s; caso contrário, o sistema será instável.
3. Existem um ou mais envolvimentos do ponto $-1 + j0$ no sentido horário. Nesse caso, o sistema é instável.

Exemplo 3

Considere um sistema de malha fechada cuja função de transferência de malha aberta é dada por:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}.$$

Examine a estabilidade do sistema.

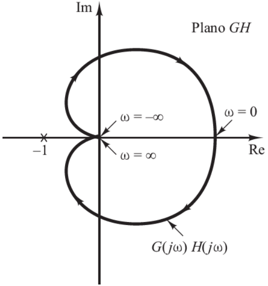
Exemplo 3

Considere um sistema de malha fechada cuja função de transferência de malha aberta é dada por:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}.$$

Examine a estabilidade do sistema.

Solução:



Dado que $G(s)H(s)$ não tem nenhum polo no semiplano direito do plano s e que o ponto $-1 + j0$ não é envolvido pelo lugar geométrico de $G(j\omega)H(j\omega)$, esse sistema é estável para quaisquer valores positivos de K, T_1 e T_2.

Exemplo 4

Considere o sistema com a seguinte função de transferência:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}.$$

Examine a estabilidade do sistema para dois casos. (1) ganho K é pequeno e (2) K é grande.

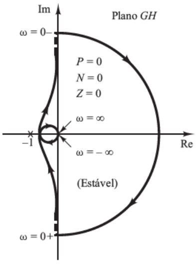
Exemplo 4

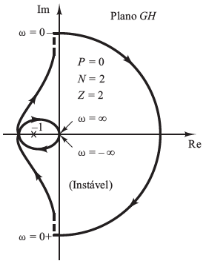
Considere o sistema com a seguinte função de transferência:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}.$$

Examine a estabilidade do sistema para dois casos. (1) ganho K é pequeno e (2) K é grande.

Solução:





Para valores pequenos de K não há nenhum envolvimento do ponto $-1 + j0$, portanto o sistema é estável. Para valores elevados de K, o lugar geométrico de $G(s)H(s)$ envolve o ponto $-1 + j0$ duas vezes no sentido horário, indicando dois polos de malha fechada no semiplano direito do plano s, e o sistema é instável.

Exemplo 5

A estabilidade de um sistema de malha fechada com a seguinte função de transferência de malha aberta:

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_2 s + 1)}{s^2(T_1 s + 1)}.$$

depende dos valores relativos de T_1 e T_2. Construa os diagramas de Nyquist e determine a estabilidade do sistema.

Exemplo 5

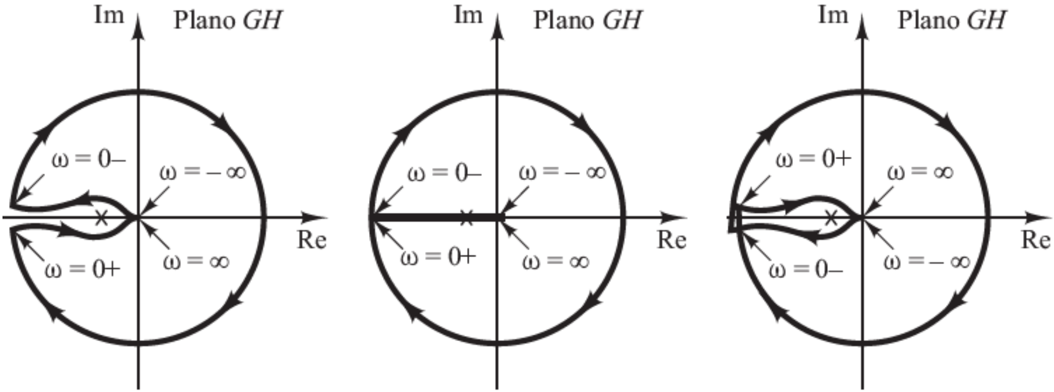
A estabilidade de um sistema de malha fechada com a seguinte função de transferência de malha aberta:

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_2 s + 1)}{s^2(T_1 s + 1)}.$$

depende dos valores relativos de T_1 e T_2. Construa os diagramas de Nyquist e determine a estabilidade do sistema.

Solução: Para $T_1 < T_2$, o lugar geométrico de $G(s)H(s)$ não envolve o ponto $-1 + j0$ e o sistema de malha fechada é estável. Para $T_1 = T_2$, o lugar geométrico de $G(s)H(s)$ passa pelo ponto $-1 + j0$, o que indica que os polos de malha fechada estão localizados no eixo $j\omega$. Para $T_1 > T_2$, o lugar geométrico de $G(s)H(s)$ envolve o ponto $-1 + j0$ duas vezes no sentido horário. Portanto, o sistema de malha fechada tem dois polos de malha fechada no semiplano direito do plano s e é instável.

Exemplos



$T_1 < T_2$
(Estável)

$T_1 = T_2$
O lugar geométrico
de $G(j\omega)\,H(j\omega)$ passa
pelo ponto $-1 + j0$

$T_1 > T_2$
(Instável)

Exemplo 6

Desenhe o diagrama de Nyquist para o sistema de controle com realimentação unitária cuja função de transferência de malha aberta é:

$$G(s) = \frac{K(1-s)}{s+1}$$

Utilizando o critério de estabilidade de Nyquist, determine a estabilidade do sistema de malha fechada.

Exemplo 7

Um sistema com a função de transferência de malha aberta

$$G(s) = \frac{K}{s^2(T_1 s + 1)}$$

é inerentemente instável. Esse sistema pode ser estabilizado pela adição de um controle derivativo. Esboce os diagramas polares para a função de transferência de malha aberta com e sem o controle derivativo.

Exercício 1

Desenhe o diagrama de Nyquist para a seguinte $G(s)$:

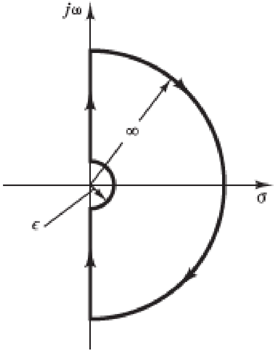
$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + 0,8s + 1)}$$

Exercício 2

Considere o sistema de controle dotado de realimentação unitária:

$$G(s) = \frac{1}{s(s-1)}$$

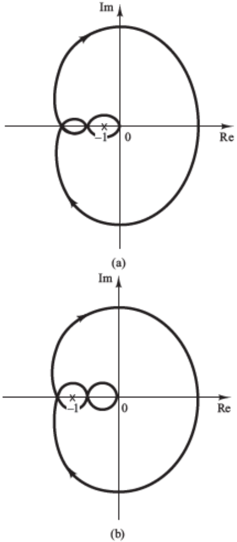
Suponha que escolhamos o contorno de Nyquist mostrado na Figura. Desenhe o lugar geométrico correspondente de $G(j\omega)$ no plano $G(s)$. Utilizando o critério de estabilidade de Nyquist, determine a estabilidade do sistema.



Exercícios

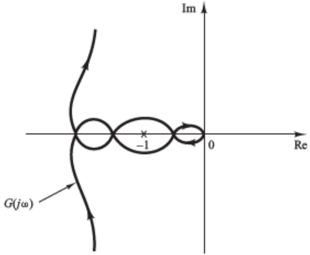
Exercício 3

Considere um sistema de malha fechada com realimentação unitária, no qual $G(s)$ não possui polos no semiplano direito do plano s. Se o diagrama de Nyquist for o indicado na Figura (a), esse sistema será estável? Se o diagrama de Nyquist for o indicado na Figura (b), esse sistema será estável?

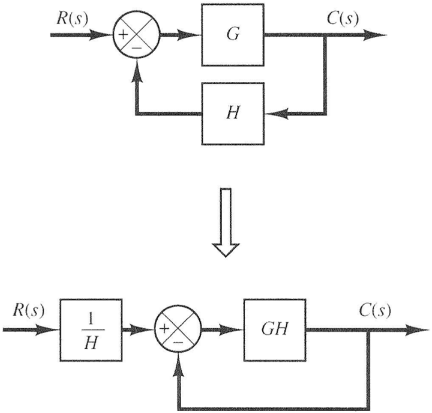


Exercício 4

O diagrama de Nyquist de um sistema dotado de realimentação unitária tem a função de transferência $G(s)$ no ramo direto mostrada na Figura.
Se $G(s)$ tiver um polo no semiplano direito do plano s, o sistema será estável? Se $G(s)$ não tiver nenhum polo no semiplano direito do plano s, mas tiver um zero nesse semiplano, o sistema será estável?



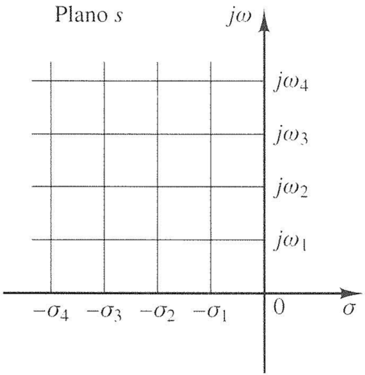
No projeto de sistemas de controle, exige-se que o sistema seja estável e que tenha uma estabilidade relativa adequada.
Vamos supor que o sistema considerado tenha realimentação unitária.
Portanto, é possível estender a análise de estabilidade relativa do sistema com realimentação unitária a sistemas com realimentação não unitária.
O sistemas considerados serão de fase mínima.

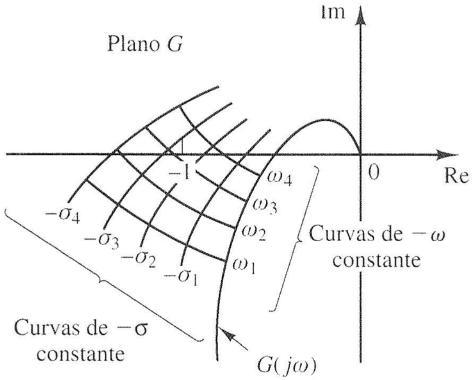


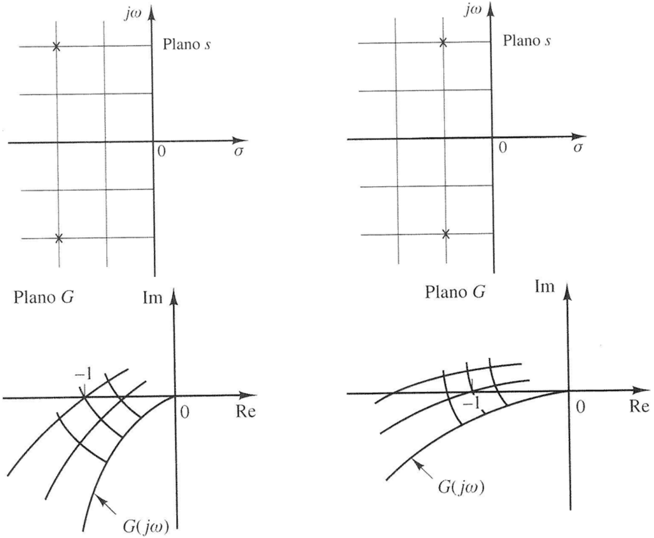
Um dos problemas importantes na análise de sistemas de controle é determinar todos os polos de malha fechada ou, pelo menos, aqueles mais próximos do eixo $j\omega$ (ou o par dominante de polos de malha fechada).

A reta $\sigma = 0$ (o eixo $j\omega$) no plano s é mapeado no diagrama de Nyquist no plano $G(s)$.

A aproximação do lugar geométrico de $G(j\omega)$ ao ponto $-1 + j0$ é uma indicação da estabilidade relativa de um sistema estável. Em geral, quando mais próximo o lugar geométrico de $G(j\omega)$ esteja do ponto $-1 + j0$, maior será o M_p nas resposta transitória ao degrau e maior o t_s.


Plano s
$j\omega$
$j\omega_4$
$j\omega_3$
$j\omega_2$
$j\omega_1$
$-\sigma_4$ $-\sigma_3$ $-\sigma_2$ $-\sigma_1$
0
σ

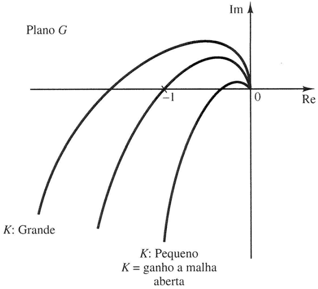

Im
Plano G
-1
0
Re
ω_4
ω_3
ω_2
ω_1
$-\sigma_4$
$-\sigma_3$
$-\sigma_2$
$-\sigma_1$
Curvas de $-\omega$ constante
Curvas de $-\sigma$ constante
$G(j\omega)$



jω
Plano s
0
σ
jω
Plano s
0
σ
Plano G
Im
−1
0
Re
G(jω)
Plano G
Im
−1
0
Re
G(jω)

O ganho K de M.A.

1. Para K elevado, o sistema é instável.
2. Para K que passa pelo ponto $-1 + j0$, o sistema está no limite da instabilidade e o sistema apresenta oscilações sustentadas.
3. Para K pequeno, o sistema é estável.



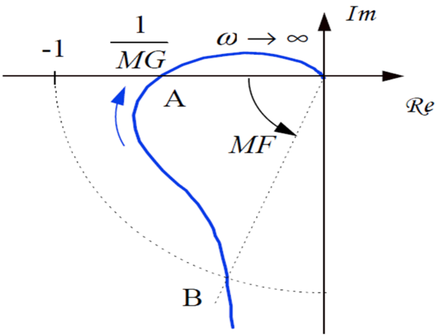
Para muitos sistemas de controle, dois parâmetros são de extrema importância para medir a distância do diagrama de Nyquist ao ponto $-1 + j0$. Esses parâmetros são:

- a margem de ganho (MG) e
- a margem de fase (MF),

e constituem o que se denomina **margens de estabilidade** de um sistema de controle.

- A MG é uma medida de quanto o ganho pode ser aumentado antes de causar instabilidade no sistema.
- A MF é uma medida de quanto de defasagem pura o sistema tolera antes de se tornar instável.

Deve-se notar que variações de ganho preservam a forma do diagrama de Nyquist, alterando apenas suas dimensões. Ao aumentarmos o ganho do sistema, o ponto A caminha para a esquerda (sobre o eixo real negativo). Se o ganho chegar a MG, o ponto A estará exatamente sobre o ponto crítico $-1 + j0$ e o sistema estará na iminência de perder a estabilidade.
De modo similar, o efeito de defasagens puras é somente girar o diagrama de Nyquist em torno da origem. Tomando como base o ponto B, notamos que se for introduzida uma defasagem pura na F.T. de malha do sistema de valor igual a MF esse ponto coincidirá com $-1 + j0$.



Margem de fase é o ângulo de atraso de fase adicional, na frequência de cruzamento de ganho, ω_{cg}, necessária para que o sistema atinja o limiar de estabilidade.
A frequência de cruzamento de ganho, ω_{cg}, é a frequência na qual o módulo da F.T.M.A. for unitário ou 0 dB, i.e., $\left|G(j\omega_{cg})\right| = 1$ ou $\left|G(j\omega_{cg})\right|_{\text{dB}} = 0$ dB.
Assim, a MF é determinada como

$$MF = 180^{\circ} + \phi$$

onde
MF é a margem de fase;
$\phi = \underline{/G(j\omega_{cg})}$ é o ângulo de fase da F.T.M.A. de cruzamento de ganho.

Margem de ganho é o recíproco do módulo $|G(j\omega)|$ na frequência em que o ângulo é $-180°$.
Definamos a frequência de cruzamento de fase, ω_{cf}, como a frequência em que o ângulo de fase da F.T.M.A. é igual a $-180°$ resulta na margem de ganho MG:

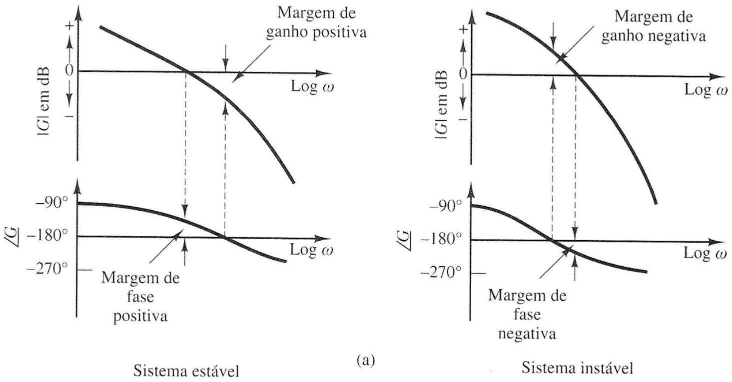
$$MG = \frac{1}{\left|G(j\omega_{cf})\right|}$$

$$\mathbf{MG_{dB} = 20\log_{10} MG = -20\log_{10} |G(j\omega_{cf})|}$$

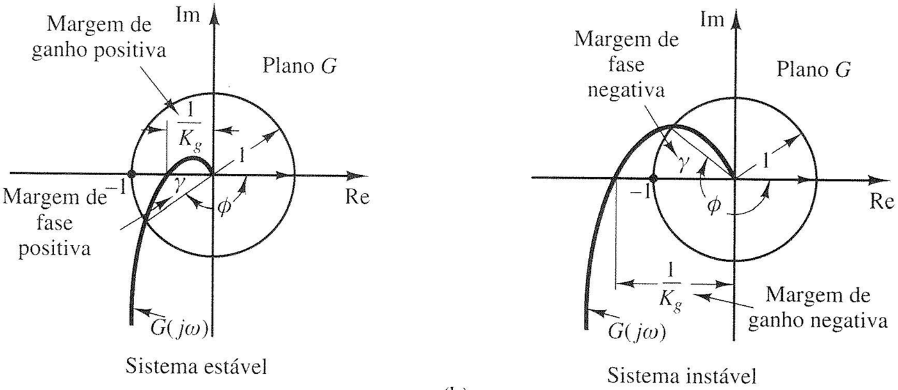
$MG_{dB} > 0$ se $MG > 1$.
$MG_{dB} < 0$ se $MG < 1$.
$MG_{dB} > 0$ significa que o sistema é estável.
$MG_{dB} < 0$ significa que o sistema é instável.

Nos diagramas logarítmicos, o ponto crítico $-1 + j0$ no plano complexo corresponde às retas 0 dB e $-180°$.

Para determinarmos **a MG a partir dos diagramas de Bode, devemos obter o valor do ganho na frequência em que a defasagem for igual a $-180°$. O valor de MF pode ser lido diretamente do gráfico de defasagem na frequência em que o ganho for igual a 0 dB.**

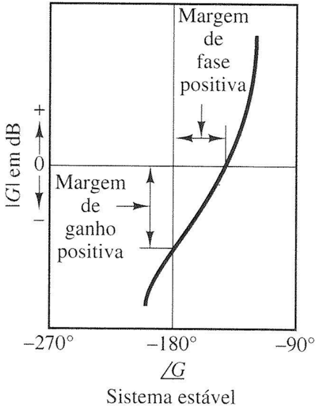


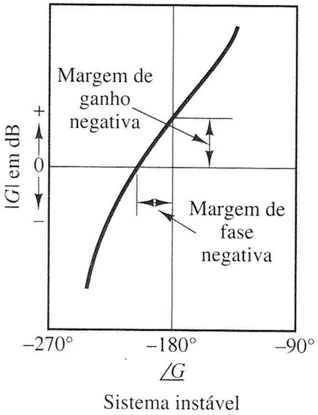
Para determinarmos **a MG a partir do diagrama polar, devemos obter o valor do ganho na frequência em que a defasagem for igual a $-180°$. O valor de MF pode ser lido diretamente do gráfico polar em que o ganho for igual a 1.**



(b)

Para determinarmos **a MG a partir do diagrama de Módulo em dB versus ângulo de fase, devemos obter o valor do ganho na frequência em que a defasagem for igual a $-180°$.** **O valor de MF pode ser lido diretamente do gráfico de Módulo em dB versus ângulo de fase em que o ganho for igual a 0 dB.**





(c)

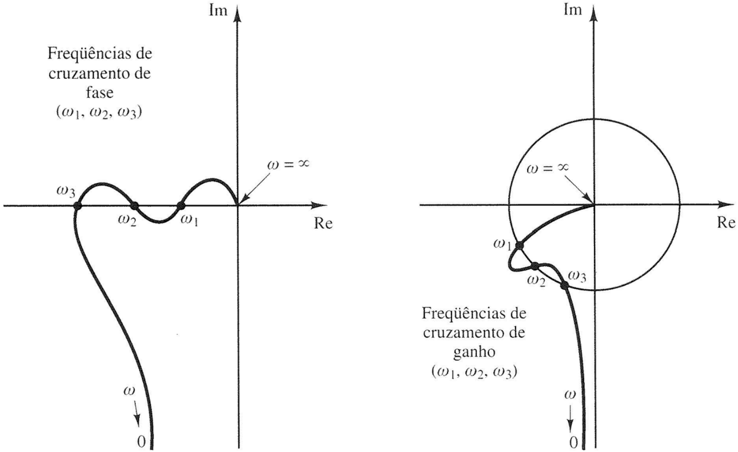
Assim, MG e MF podem ser utilizados como critérios de projeto.

É usual considerar satisfatórias as margens de ganho superiores a 6 dB (o que corresponde a ganhos maiores que 2) e margens de fase entre $30°$ e $60°$.

Em alguns casos, as noções de margens de estabilidade falham. **Para sistemas de primeira e segunda ordem, a fase nunca atinge $180°$ e, assim, a margem de ganho é infinita.** Para sistemas de ordem mais elevada, é possível que haja mais de um ponto de cruzamento de 0 dB e mais de um cruzamento de $180°$, e as margens de estabilidade podem levar a erros. Além disso, os sistemas de fase não mínima apresentam critérios de estabilidade opostos aos definidos acima.

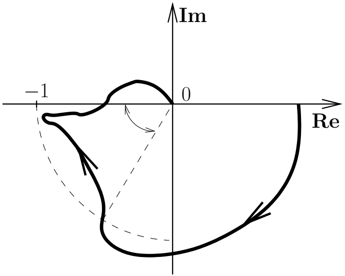
Para sistemas de fase não mínima, é preciso examinar o diagrama de Nyquist completo para se determinar a estabilidade. Não se pode basear somente nas margens de ganho e fase nesses casos.

Observar que, para sistemas de fase não mínima em que a malha aberta é instável, a condição de estabilidade não será satisfeita a menos que o diagrama de $G(j\omega)$ envolva o ponto $-1+j0$. Portanto, um sistema estável de fase não mínima terá margens de fase e de ganho negativas.



Im
Freqüências de cruzamento de fase
(ω_1, ω_2, ω_3)
$\omega = \infty$
ω_3
ω_2
ω_1
Re
ω
0
Im
$\omega = \infty$
Re
ω_1
ω_2
ω_3
Freqüências de cruzamento de ganho
(ω_1, ω_2, ω_3)
ω
0

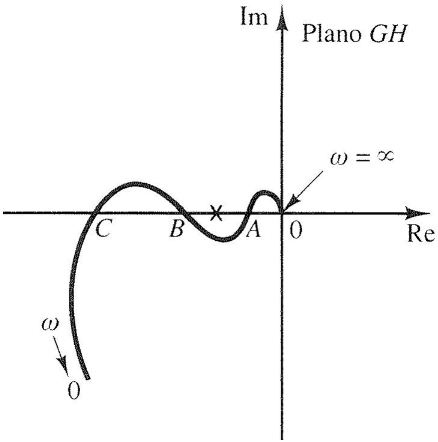
Mesmo para sistemas de fase mínima, valores considerados bons de margens de ganho e de fase podem não ser indicadores confiáveis da distância do diagrama de Nyquist ao ponto $-1 + j0$. No gráfico mostrado, o sistema tem amplas margens de ganho e fase. Contudo, uma pequena perturbação na região de frequências próxima ao ponto $-1 + j0$ pode desestabilizar o sistema.



Comentários:

- MF e MG de um sistema de controle são uma medida da proximidade do diagrama polar em relação ao ponto $-1 + j0$. Portanto, MF e MG podem ser utilizadas como critérios de projeto.
- MF e MG ambas devem ser fornecidas para determinação da estabilidade relativa.
- Para sistemas de fase mínima, ambas MF e MG devem ser positivas.
- MF e MG apropriadas protegem contra variações nas componentes do sistema.
- Desempenho satisfatório, MG ≥ 6 dB e MF entre 30° e 60°.

Seja um sistema tal que o diagrama polar de $G(j\omega)H(j\omega)$ tem o aspecto mostrado na Figura. Supondo que $G(s)H(s)$ seja estável ($P = 0$), o critério de Nyquist permite concluir que o sistema é estável em M.F., pois $N = 0$.
Aumentando o ganho de modo que o ponto -1 pertença ao segmento AO, temos $N = 2$, e o sistema em M.F. passa a ser instável. O mesmo ocorre quando se reduz o ganho de forma que o ponto -1 pertença ao segmento CB.
Sistemas em M.F. que são estáveis apenas para valores de ganho num certo intervalo são chamados condicionalmente estáveis.



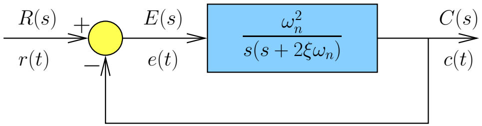
Correlação entre a resposta transitória ao degrau e a resposta em frequência no sistema padrão de segunda ordem

A resposta do sistema abaixo a uma entrada degrau unitária é

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t)\right), \quad t \geq 0$$

no qual

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}.$$



Correlação entre a resposta transitória ao degrau e a resposta em frequência no sistema padrão de segunda ordem

O máximo sobre-sinal M_p da resposta ao degrau unitário

$$M_p = e^{\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi\right)}$$

M_p ocorre na resposta transitória que tem a frequência natural amortecida $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$.
M_p excessivo para $\zeta < 0,4$.
Como o sistema tem a F.T.M.A.

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

para se obter a MF desse sistema, deve-se determinar a frequência de cruzamento de ganho, ω_{cg}, quando o módulo de $|G(j\omega)| = 1$, obtemos

$$\omega_{cg} = \omega_n\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2}$$

Correlação entre a resposta transitória ao degrau e a resposta em frequência no sistema padrão de segunda ordem

nessa frequência, o ângulo de fase de $G(j\omega_{cg})$ é

$$\begin{aligned}
\angle G(j\omega_{cg}) &= -\angle j\omega_{cg} - \angle (j\omega_{cg} + 2\zeta\omega_n) \\
&= -90^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2}}{2\zeta}\right)
\end{aligned}$$

Portanto, a MF é

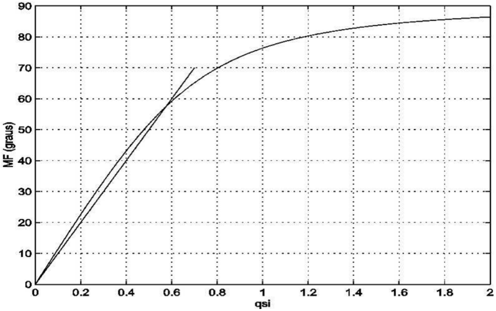
$$\begin{aligned}
\mathrm{MF} &= 180^\circ + \angle G(j\omega_{cg}) \\
&= 90^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2}}{2\zeta}\right) \\
&= \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2}}\right)
\end{aligned}$$

Resumo da correlação:

1. MF e ζ estão diretamente relacionados como mostrado na Figura.
2. Para o sistema padrão de segunda ordem, a MF e o fator de amortecimento estão aproximadamente relacionados por uma reta, para $0 \leq \zeta \leq 0,7$

$$\zeta = \frac{\text{MF}}{100}.$$

Se a MF é 60° corresponde a $\zeta = 0,6$.



Correlação entre a resposta transitória ao degrau e a resposta em frequência no sistema padrão de segunda ordem

3. Para sistemas de ordem superior com par de polos dominantes de M.F. essa relação pode ser utilizada como regra prática na avaliação da estabilidade relativa da resposta transitória a partir da resposta em frequência.
4. ω_r e ω_d são quase iguais para ζ pequeno. Assim, para ζ pequeno, ω_r indica a velocidade transitória do sistema.
5. Para ζ pequeno, M_r e M_p são maiores. Para ζ muito pequeno, M_r fica muito elevado ($M_r \gg 1$) e M_p não excede de 1.
6. O valor de M_r é indicativo da estabilidade relativa. Desempenho transitório satisfatório para $1,0 < M_r < 1,4$ (0dB $< M_r <$ 3dB) que corresponde a $0,4 < \zeta < 0,7$. Para $M_r > 1,5$ a resposta transitória ao degrau apresenta diversos sobre-sinais.

Correlação entre a resposta transitória ao degrau e a resposta em frequência nos sistemas genéricos

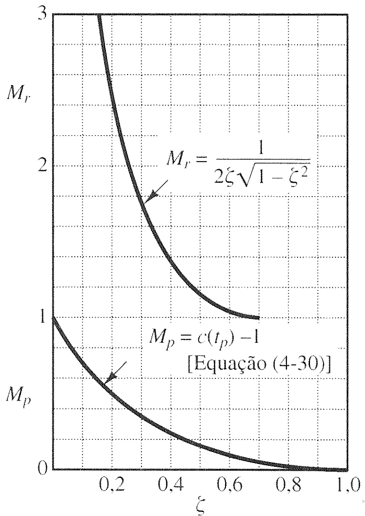
7. A amplitude da frequência de ressonância ω_r é indicativo da velocidade da resposta transitória. ω_r maior, a resposta temporal é rápida. Tempo de subida é inversa a ω_r. Na resposta em frequência de M.A., ω_d da resposta transitória fica entre ω_{ganho} e ω_{fase}.
8. ω_r e ω_d da resposta transitória ao degrau são muito próximas em sistemas pouco amortecidos.

As três relações mostradas são úteis para relacionar a resp. transitória ao degrau com a resp. em freq. de sistemas de ordem superior, desde que estes possam ser aproximados a um sistema padrão de segunda ordem ou a um par de polos complexos conjugados de M.F.

A MF, a MG, o pico de ressonância M_r, a freq. de ressonância ω_r são grandezas no domínio da freq. utilizadas nas especificações de desempenho. Outras grandezas são: freq. de canto, a banda passante e a taxa de corte.

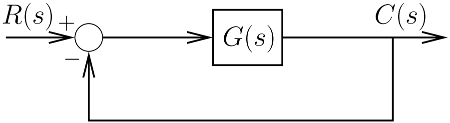
Correlação entre a resposta transitória ao degrau e a resposta em frequência nos sistemas genéricos

Curvas M_r versus ζ e M_p versus ζ para o sistema de segunda ordem.



Correlação entre a resposta transitória ao degrau e a resposta em frequência no sistema padrão de segunda ordem

Para sistemas de fase mínima de ordem qualquer pode-se mostrar que sistemas com pequena margem de fase apresentam ressonância. Seja o sistema



Temos que F.T.M.F. é dada por

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

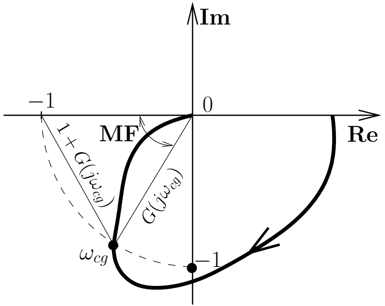
Correlação entre a resposta transitória ao degrau e a resposta em frequência no sistema padrão de segunda ordem

Para a frequência de cruzamento de ganho:

$$\left|G(j\omega_{cg})\right| = 1$$

Assim,

$$\begin{aligned}\left|T(j\omega_{cg})\right| &= \frac{\left|G(j\omega_{cg})\right|}{\left|1 + G(j\omega_{cg})\right|} \\ &= \frac{1}{\left|1 + G(j\omega_{cg})\right|}\end{aligned}$$



Pelo diagrama de Nyquist, pode-se escrever que:

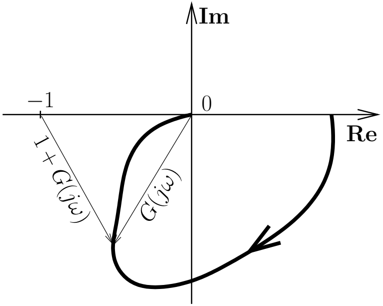
$$\left|1 + G(j\omega_{cg})\right| = 2\sin\left(\frac{\text{MF}}{2}\right)$$

Correlação entre a resposta transitória ao degrau e a resposta em frequência no sistema padrão de segunda ordem

Assim, temos que

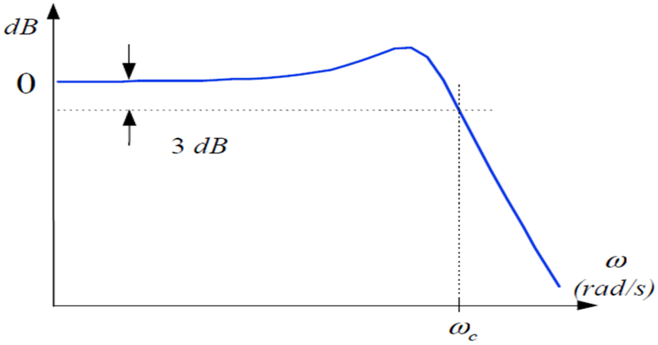
$$\left|T(j\omega_{cg})\right| = \frac{1}{2\sin\left(\frac{\text{MF}}{2}\right)}$$

Conclui-se, então, que se a MF for pequena, $\left|T(j\omega_{cg})\right|$ será grande. Assim, haverá ressonância em torno da frequência ω_{cg}.



Frequência de canto (freq. de corte) e banda passante (largura de banda)

Na Figura, a frequência ω_c na qual a amplitude da resposta em frequência de M.F. é 3dB abaixo de seu valor na frequência zero e é denominada *frequência de canto*.



Frequência de canto (freq. de corte) e banda passante (largura de banda)

Assim,

$$\left|\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)}\right| < \left|\frac{C(j0)}{R(j0)}\right| - 3\,dB, \quad \text{para} \quad \omega > \omega_c$$

Para os sistemas em que $|C(j0)/R(j0)| = 0\,dB$,

$$\left|\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)}\right| < -3\,dB, \quad \text{para} \quad \omega > \omega_c$$

O sistema de M.F. filtra o sinal dos componentes cujas freq. são maiores do que a freq. de canto e transmite o sinal daqueles componentes com freq. menores que a freq. de canto. O intervalo de freq. $0 \leq \omega \leq \omega_c$, no qual o ganho de M.F. não cai abaixo de -3dB, é chamada de banda passante do sistema.
A banda passante indica a a freq. em que o ganho começa a cair a partir de seu valor de baixa freq., i.e., indica até que ponto o sistema seguirá bem uma entrada senoidal.
O tempo de subida e a banda passante são inversamente proporcionais entre si.

Frequência de canto (freq. de corte) e banda passante (largura de banda)

A especificação da banda passante pode ser determinada pelos seguintes fatores:

- A capacidade de reproduzir o sinal de entrada. Uma banda passante grande corresponde a um tempo de subida pequeno ou resposta rápida. Pode-se dizer que a banda passante é proporcional à velocidade de resposta.
- As características de filtragem necessárias de ruídos de alta frequência.

Taxa de corte é a inclinação da curva de módulo em dB próxima à freq. de canto. A taxa de corte indica a capacidade de um sistema distinguir o sinal de ruído.

Pode-se notar que uma curva de resposta em freq. de M.F., com características de corte acentuada, pode ter uma amplitude do pico de ressonância muito grande, o que indica ter o sistema um margem de estabilidade pequena.