



UFABC - Universidade Federal do ABC

Sistemas de Controle II

Critério de Nyquist, Diagramas Polares

Prof^a Dra. Heloise Assis Fazzolari

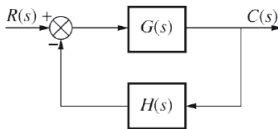
heloise.fazzolari@ufabc.edu.br

Sala 717-1, 7º andar, Torre 1, Bloco A - Campus Santo André

3º Quadrimestre de 2021

- **O critério de Nyquist relaciona a estabilidade de um sistema em malha fechada com a resposta em frequência em malha aberta e a posição dos polos em malha aberta.**
- Dessa forma, o conhecimento da resposta em frequência do sistema em malha aberta fornece informações sobre a estabilidade do sistema em malha fechada. Este conceito é semelhante ao do lugar geométrico das raízes.
- Embora a princípio o critério de Nyquist forneça informações sobre a estabilidade, estendemos o conceito para a resposta transitória e para os erros em regime permanente. Assim, as técnicas de resposta em frequência são uma abordagem alternativa ao lugar geométrico das raízes.

Considere o sistema



O critério de Nyquist pode nos dizer quantos polos em malha fechada estão no semiplano da direita. Antes de deduzir o critério, vamos estabelecer quatro conceitos importantes que serão utilizados durante a dedução:

- ① a relação entre os polos de $1 + G(s)H(s)$ e os polos de $G(s)H(s)$;
- ② a relação entre os zeros de $1 + G(s)H(s)$ e os polos da função de transferência em malha fechada, $T(s)$;
- ③ o conceito de mapeamento de pontos;
- ④ o conceito de mapeamento de contornos.

Fazendo

$$G(s) = \frac{N_G}{D_G} \text{ e } H(s) = \frac{N_H}{D_H}; \quad G(s)H(s) = \frac{N_G N_H}{D_G D_H}$$

obtemos

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{N_G N_H}{D_G D_H} = \frac{D_G D_H + N_G N_H}{D_G D_H}$$

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{N_G D_H}{D_G D_H + N_G N_H}$$

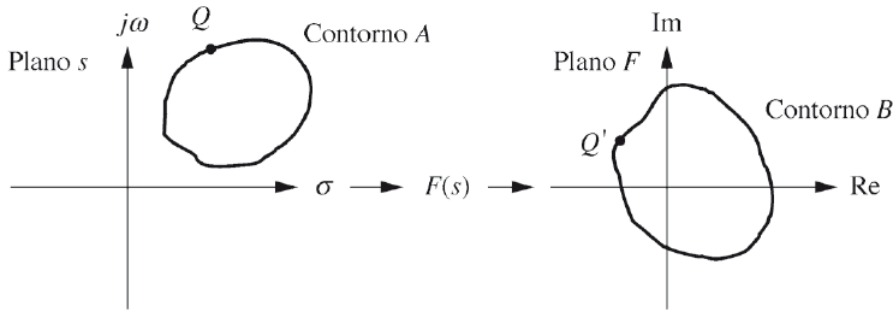
Assim, concluímos que

- 1 os pólos de $1 + G(s)H(s)$ são os mesmos que os pólos de $G(s)H(s)$, sistema em malha aberta
- 2 os zeros de $1 + G(s)H(s)$ são os mesmos que os pólos do sistema em malha fechada.

Se tomarmos um número complexo no plano s e o substituirmos em uma função, $F(s)$, o resultado é outro número complexo. Este processo é chamado de **mapeamento**.

Por exemplo, substituindo $s = 4 + j3$ na função $(s^2 + 2s + 1)$ resulta $16 + j30$. Dizemos que $4 + j3$ é mapeado em $16 + j30$ através da função $(s^2 + 2s + 1)$.

Considere agora o conjunto de pontos, chamado de *contorno* A .



Admita que

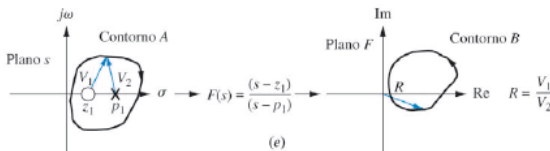
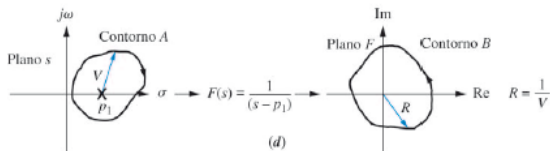
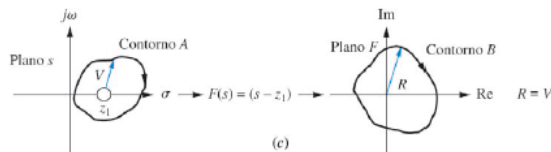
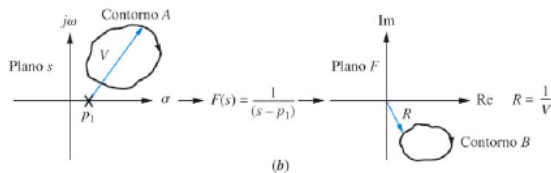
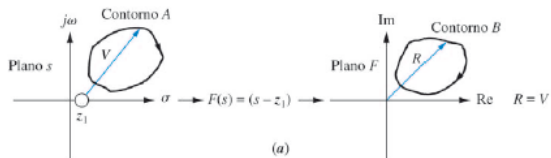
$$F(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2)\dots}{(s - p_1)(s - p_2)\dots}$$

O contorno A pode ser mapeado através de $F(s)$ no contorno B substituindo-se cada ponto do contorno A na função $F(s)$ e representando-se graficamente os números complexos resultantes.

Por exemplo, o ponto Q é mapeado no ponto Q' através da função $F(s)$.

Critério de Nyquist

Mapeamento



O mapeamento de cada ponto é definido pela aritmética de números complexos, onde o número complexo resultante, R , é calculado a partir dos números complexos representados por V .

Você deve verificar que, caso admitamos um sentido horário para o mapeamento dos pontos do contorno A , então o contorno B é mapeado no sentido horário se $F(s)$ possuir apenas zeros ou possuir apenas polos que não são envolvidos pelo contorno.

O contorno B é mapeado no sentido anti-horário se $F(s)$ possuir apenas polos que são envolvidos pelo contorno.

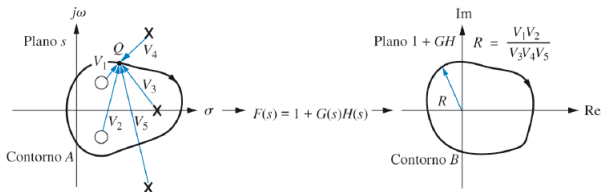
Se o polo ou o zero de $F(s)$ é envolvido pelo contorno A , o mapeamento envolve a origem.

No último caso da figura anterior, a rotação decorrente do polo e a rotação decorrente do zero se cancelam, e o mapeamento não envolve a origem.

Vamos agora come  ar a dedu   o do cr terio de Nyquist para estabilidade.

- Primeiro mostramos que existe uma rela   o única entre o número de polos de $F(s)$ contidos no interior de um contorno A , o número de zeros de $F(s)$ contidos no interior do contorno A e o número de voltas que o contorno mapeado B d  em torno da origem no sentido anti-horário.
- Em seguida, mostramos como esse interrelacionamento pode ser utilizado para determinar a estabilidade de sistemas em malha fechada.
- Esse método de determina   o da estabilidade   chamado de **cr terio de Nyquist**.

Vamos primeiro admitir que $F(s) = 1 + G(s)H(s)$, com o esboço de polos e zeros de $1 + G(s)H(s)$ próximos do contorno A. Assim, $R = (V_1V_2)/(V_3V_4V_5)$.

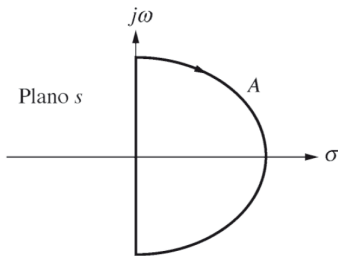


- À medida que cada ponto Q do contorno A é substituído em $1 + G(s)H(s)$, um ponto mapeado resulta no contorno B.
- À medida que nos movemos, no sentido horário, ao longo do contorno A cada vetor de $F(s)$ que se encontra no interior do contorno A aparentará ter passado por uma rotação completa, ou por uma mudança em ângulo de 360° .
- Por outro lado, cada vetor traçado a partir dos polos e dos zeros de $1 + G(s)H(s)$ que existem fora do contorno A, parecerá oscilar e retornar à sua posição anterior, passando por uma variação angular líquida de 0° .

- Cada fator de polo ou zero de $1 + G(s)H(s)$, cujo vetor passe por uma rotação completa ao redor do contorno A deve resultar em uma alteração de 360° no resultado, R , ou em uma rotação completa do contorno mapeado B.
- Caso nos movamos no sentido horário ao longo do contorno A, cada zero dentro do contorno A produz uma rotação no sentido horário, enquanto cada polo dentro do contorno A produz uma rotação no sentido anti-horário, uma vez que os polos estão no denominador.
- Assim, $N = P - Z$, em que N é igual ao número de voltas no sentido anti-horário do contorno B ao redor da origem; P é igual ao número de polos de $1 + G(s)H(s)$ no interior do contorno A, e Z é igual ao número de zeros de $1 + G(s)H(s)$ no interior do contorno A.

- Os polos de $1 + G(s)H(s)$ são também polos de $G(s)H(s)$ e são conhecidos.
- Os zeros de $1 + G(s)H(s)$ são *também polos do sistema em malha fechada e não são conhecidos*.
- P   igual ao número de polos em malha aberta envolvidos e Z   igual ao número de polos em malha fechada envolvidos.
- Assim, $N = P - Z$, ou alternativamente, $Z = P - N$, nos diz que o número de polos em malha fechada no interior do contorno (que   o mesmo que o número de zeros dentro do contorno)   igual ao número de polos em malha aberta de $G(s)H(s)$ no interior do contorno menos o número de voltas no sentido anti-horário do mapeamento em torno da origem.

- Caso estendamos o contorno para incluir todo o semiplano da direita podemos contar o número de polos em malha fechada no interior do contorno A , no semiplano da direita e determinar a estabilidade de um sistema.
- Uma vez que podemos contar o número de polos em malha aberta, P , dentro do contorno, que são os mesmos que os polos de $G(s)H(s)$ no semiplano da direita, o único problema que resta é como obter o mapeamento e determinar N .



Como todos os polos e zeros de $G(s)H(s)$ são conhecidos, o que acontece se mapearmos através de $G(s)H(s)$ em vez de através de $1 + G(s)H(s)$? O contorno resultante é o mesmo que o de um mapeamento através de $1 + G(s)H(s)$, exceto que ele é transladado uma unidade para a esquerda; assim, contamos as voltas em torno de -1 ao invés das voltas em torno da origem.

Critério de Nyquist

Se um contorno, A , que envolve todo o semiplano da direita, for mapeado através de $G(s)H(s)$, então o número de polos em malha fechada, Z , no semiplano da direita é igual ao número de polos em malha aberta, P , que estão no semiplano da direita menos o número de voltas do mapeamento no sentido anti-horário, N , em torno de -1 ; isto é, $Z = P - N$. O mapeamento é chamado de **diagrama de Nyquist**, ou curva de Nyquist, de $G(s)H(s)$.

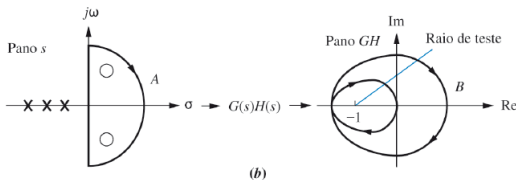
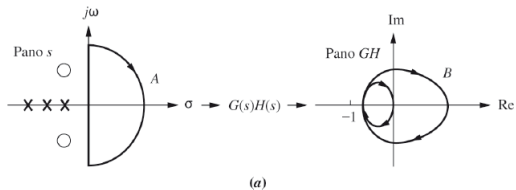
Por que este método é classificado como uma técnica de resposta em frequência?

Ao longo do contorno A, o mapeamento dos pontos sobre o eixo $j\omega$ através da função $G(s)H(s)$ é o mesmo que substituir $s = j\omega$ em $G(s)H(s)$ para formar a função de resposta em frequência $G(j\omega)H(j\omega)$. Estamos, portanto determinando a resposta em frequência de $G(s)H(s)$ sobre esta parte do contorno A que corresponde à parte positiva do eixo $j\omega$.

Em outras palavras, parte do diagrama de Nyquist é o diagrama polar da resposta em frequência de $G(s)H(s)$.

Aplicando o Critério de Nyquist para determinar a Estabilidade

Esses exemplos nos dão uma visão geral antes de nos preocuparmos com os detalhes do mapeamento.



○ = zeros de $1 + G(s)H(s)$
= polos do sistema em malha fechada
Posição desconhecida

× = polos de $1 + G(s)H(s)$
= polos de $G(s)H(s)$
Posição conhecida

- O número de voltas pode ser determinado traçando-se um raio de teste a partir de -1 em qualquer direção conveniente e contando-se o número de vezes que o diagrama de Nyquist cruza o raio de teste. Os cruzamentos no sentido anti-horário são positivos, e os cruzamentos no sentido horário são negativos.

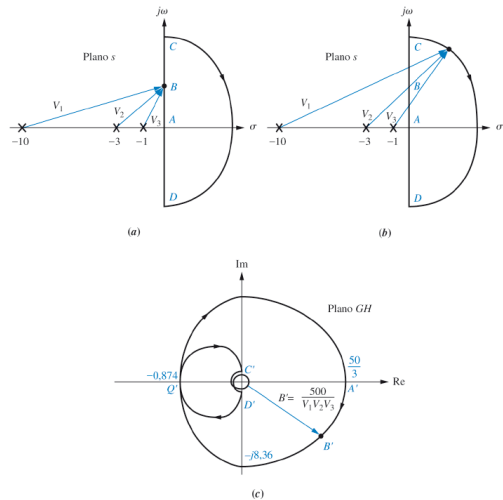
O contorno que envolve o semiplano da direita pode ser mapeado através da função $G(s)H(s)$ pela substituição de pontos ao longo do contorno em $G(s)H(s)$. Os pontos ao longo da extensão positiva do eixo imaginário resultam na resposta em frequência polar de $G(s)H(s)$.

Um esboço pode ser obtido rapidamente observando os vetores de $G(s)H(s)$ e seus movimentos ao longo do contorno.

Esboçando o Diagrama de Nyquist

Solução

O diagrama de Nyquist é traçado substituindo-se os pontos do contorno mostrado na Figura (a) em $G(s) = 500/[(s + 1)(s + 3)(s + 10)]$. Cada termo de polo e zero de $G(s)$, mostrado em (c), é um vetor na Figura (a) e (b). O vetor resultante, R , obtido em qualquer ponto ao longo do contorno é, em geral, o produto dos vetores de zeros dividido pelo produto dos vetores de polos. Assim, a magnitude do resultado é o produto das distâncias até os zeros dividido pelo produto das distâncias até os polos, e o ângulo do resultado é a soma dos ângulos dos zeros menos a soma dos ângulos dos polos.

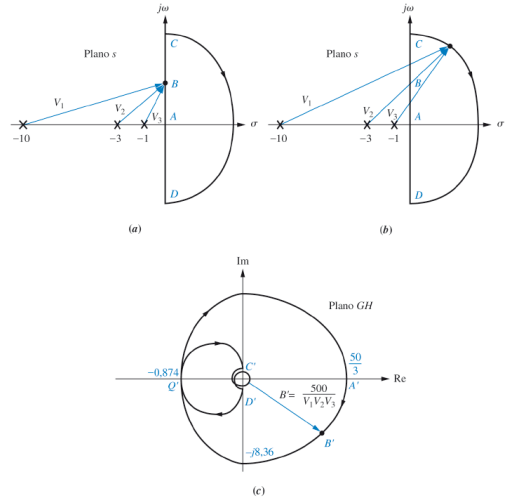


Esboçando o Diagrama de Nyquist

Solução

À medida que nos movemos no sentido horário ao longo do contorno, do ponto A até o ponto C na Figura (a), o ângulo resultante vai de 0° a $-3 \times 90^\circ = -270^\circ$, ou de A' a C' (c). Uma vez que os ângulos emanam de polos no denominador de $G(s)$, a rotação ou o aumento no ângulo é na verdade uma diminuição no ângulo da função $G(s)$; os polos ganham 270° no sentido anti-horário, o que explica porque a função perde 270° .

Enquanto o resultado se move de A' para C' na Figura (c), sua magnitude varia de acordo com o produto das distâncias até os zeros dividido pelo produto das distâncias até os polos. Assim, a resultado vai de um valor finito em frequência zero (ponto A, Figura (a)) até uma magnitude zero na frequência infinita no ponto C (Figura (a)).



Esboçando o Diagrama de Nyquist

O mapeamento do ponto A até o ponto C também pode ser explicado analiticamente. De A a C o conjunto de pontos ao longo do contorno é imaginário. Portanto, de A até C, $G(s) = G(j\omega)$, ou

$$G(j\omega) = \frac{500}{(s+1)(s+3)(s+10)} \Big|_{s=j\omega} = \frac{500}{(-14\omega^2 + 30) + j(43\omega - \omega^3)}$$

Multiplicando o numerador e o denominador pelo conjugado complexo do denominador, obtemos

$$G(j\omega) = 500 \frac{(-14\omega^2 + 30) - j(43\omega - \omega^3)}{(-14\omega^2 + 30)^2 + (43\omega - \omega^3)^2}$$

Em $\omega = 0$, $G(j\omega) = 500/30 = 50/3$. Assim, o diagrama de Nyquist começa em $50/3$ com um ângulo de 0° . À medida que ω aumenta, a parte real permanece positiva e a parte imaginária permanece negativa. Em $\omega = \sqrt{30/14}$ a parte real se torna negativa. Em $\omega = \sqrt{43}$, o diagrama de Nyquist cruza o eixo real negativo, uma vez que o termo imaginário se anula. O valor real no cruzamento do eixo, ponto Q' na Figura (c) é -0,874.

Continuando para $\omega = \infty$, a parte real é negativa e a parte imaginária é positiva. Em frequência infinita, $G(j\omega) \approx 500j/\omega^3$, ou aproximadamente zero a 90° .

Ao longo do semicírculo infinito do ponto C ao ponto D mostrados na Figura (b), os vetores giram no sentido horário, cada um por 180° . Portanto, o resultado passa por uma rotação no sentido anti-horário de $3 \times 180^\circ$, começando no ponto C' e terminando no ponto D' da Figura (c). Analiticamente, podemos ver isso admitindo que ao longo do semicírculo infinito, os vetores começam aproximadamente na origem e possuem módulos infinitos. Para qualquer ponto no plano s o valor de $G(s)$ pode ser obtido representando cada número complexo na forma polar, como a seguir:

$$G(s) = \frac{500}{(R_{-1}e^{j\theta_{-1}})(R_{-3}e^{j\theta_{-3}})(R_{-10}e^{j\theta_{-10}})}$$

em que R_{-i} é a magnitude do número complexo $(s + i)$ e θ_{-i} é o ângulo do número complexo $(s + i)$.

Esboçando o Diagrama de Nyquist

Ao longo do semicírculo infinito todos os R_{-i} são infinitos, e podemos aproximar os ângulos como se os vetores começassem na origem. Assim, ao longo do semicírculo infinito,

$$G(s) = \frac{500}{\infty \angle (\theta_{-1} + \theta_{-3} + \theta_{-10})} = 0 \angle -(\theta_{-1} + \theta_{-3} + \theta_{-10}).$$

No ponto C na Figura (b) os ângulos são todos 90° . Portanto, o resultado é $0 \angle -270^\circ$, mostrado como ponto C' na Figura (c). No ponto D, $G(s) = 0 \angle +270^\circ$ que é mapeado no ponto D'. Pode-se escolher pontos intermediários para verificar a espiral cujo vetor de raio tende a zero na origem, como mostrado na Figura (c).

O eixo imaginário negativo pode ser mapeado percebendo-se que a parte real de $G(j\omega)H(j\omega)$ é sempre uma função par, enquanto a parte imaginária é uma função ímpar. Isto é, a parte real não mudará de sinal quando valores negativos de ω são utilizados, enquanto a parte imaginária mudará de sinal. Portanto, o mapeamento do eixo imaginário negativo é uma imagem refletida do mapeamento do eixo imaginário positivo. O mapeamento do trecho do contorno do ponto D até A é traçado como uma imagem refletida em relação ao eixo real do mapeamento do ponto A até C.

Antes de aplicar o critério de estabilidade de Nyquist, vamos estudar um pouco mais sobre como traçar os esboços.

A utilização do diagrama polar possui a vantagem de representar as características da resposta em frequência de um sistema em toda a faixa de frequências em um só gráfico. Porém, não indica claramente as contribuições de cada fator individual sobre a F.T.M.A.

A seguir, vamos analisar cada tipo de termo da F.T. no traçado do diagrama polar.

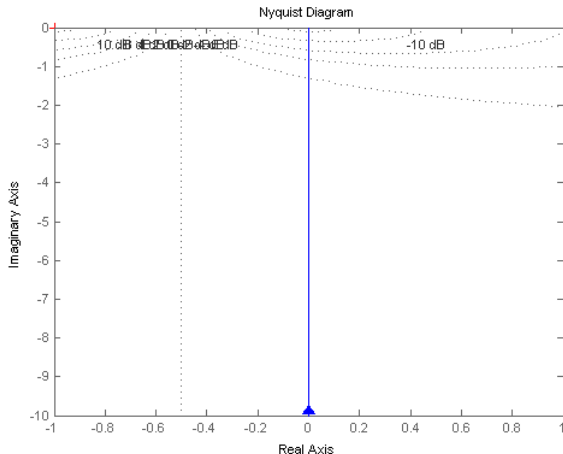
Diagramas polares

Fator Integral (Polo na origem)

Fator Integral (Polo na origem)

O diagrama polar de $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$ é o eixo imaginário negativo, visto que

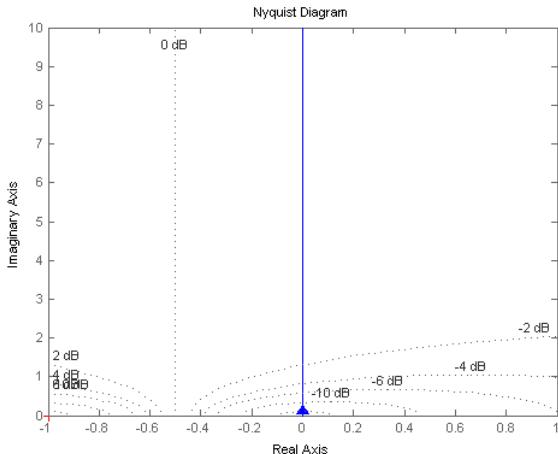
$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega} \angle -90^\circ$$



Fator Derivativo (Zero na origem)

O diagrama polar de $G(j\omega) = j\omega$ é o eixo imaginário positivo, visto que

$$G(j\omega) = j\omega = \omega \angle 90^\circ$$



Fator de primeira ordem (Polo real)

A função de transferência senoidal é

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \angle -\tan^{-1}(\omega\tau)$$

os valores de $G(j\omega)$ são mostrados na Tabela a seguir:

ω	$G(j\omega)$	$ G(j\omega) \angle G(j\omega)$
0	$G(j0)$	$1 \angle 0^\circ$
$\frac{1}{\tau}$	$G\left(j\frac{1}{\tau}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ$
∞	$G(j\infty)$	$0 \angle -90^\circ$

Fator de primeira ordem - Polo real

Para demonstrar que o diagrama polar do fator $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau}$ é uma semicircunferência, definamos:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = R(\omega) + jI(\omega)$$

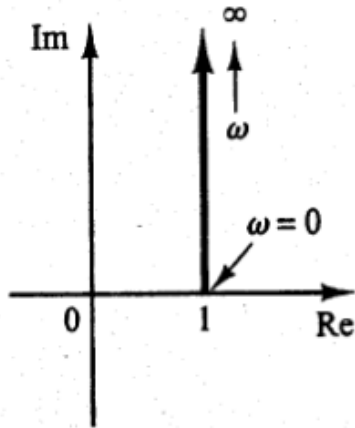
$$R = \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad I = \frac{-\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad \text{Então,}$$

$$\left(R - \frac{1}{2}\right)^2 + I^2 = \left(\frac{1}{2} \frac{1 - \omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2}\right)^2 + \left(\frac{-\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Fator de primeira ordem (Zero real)

O diagrama polar da F.T. $1 + j\omega T$ é a metade superior da reta que passa pelo ponto $(1, 0)$ no plano complexo e é paralela ao eixo imaginário.

O diagrama polar de $1 + j\omega T$ tem uma aparência completamente diferente da aparência de $\frac{1}{1 + j\omega\tau}$



Fator quadrático (Polos complexos conjugados)

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}, \quad \text{para } \xi > 0$$

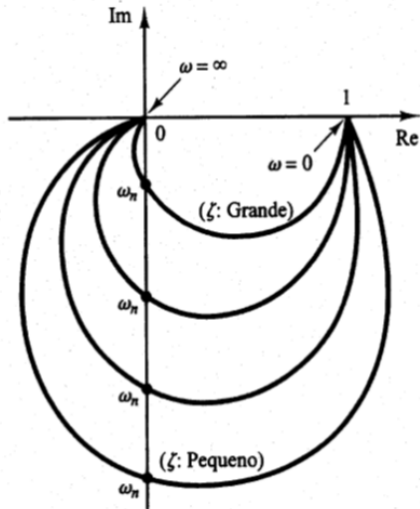
Porção relativa à baixa frequência	$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1 \angle 0^\circ$	Início do diagrama polar
Porção relativa à alta frequência	$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0 \angle -180^\circ$	Final do diagrama polar

A forma exata do diagrama polar depende do ξ , mas a forma geral do diagrama é a mesma tanto para o caso subamortecido ($0 < \xi < 1$) como para o superamortecido ($\xi > 1$).

Caso subamortecido ($0 < \xi < 1$): Para $\omega = \omega_n$ temos

$$G(j\omega_n) = \frac{1}{j2\xi},$$

e o ângulo de fase em que $\omega = \omega_n$ é -90° . A frequência na qual o lugar geométrico de $G(j\omega)$ cruza o eixo imaginário é a frequência natural não amortecida ω_n .

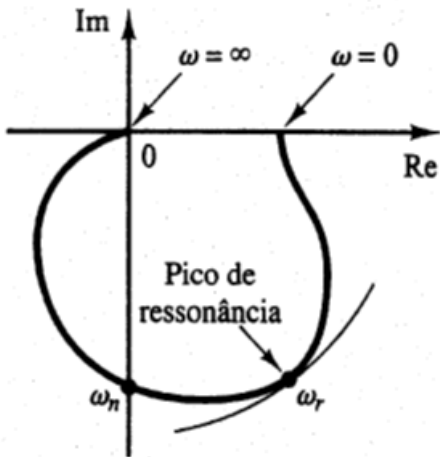


Diagramas polares

Fator quadrático - Polos complexos conjugados

A frequência cujo ponto está mais distante da origem corresponde a frequência de ressonância ω_r .

O valor de pico de $G(j\omega)$ é obtido pela relação entre o módulo do vetor na frequência de ressonância ω_r e o módulo do vetor em $\omega = 0$.



- Para o caso superamortecido, à medida que ξ aumenta muito além da unidade, o lugar geométrico de $G(j\omega)$ se aproxima de uma semicircunferência.
- Pode-se observar esse fator nos sistemas muito amortecidos, em que as raízes características são reais e uma delas é bem menor do que a outra.
- Dado que, para ξ suficientemente grande, o efeito da maior raiz (maior em valor absoluto) na resposta é muito pequeno, o sistema se comporta como de primeira ordem.

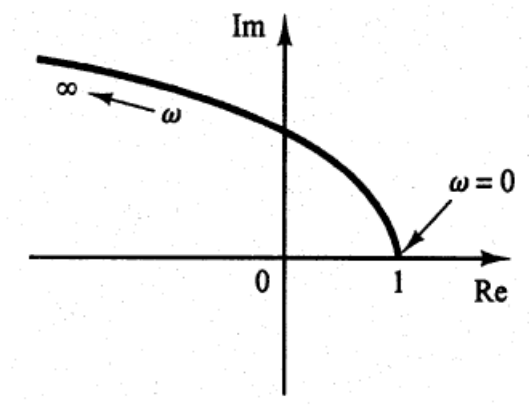
Fator quadrático (Zeros complexos conjugados)

Consideremos a seguinte função de transferência senoidal

$$G(j\omega) = 1 + 2\xi \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) + j \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n} \right)$$

Porção relativa à baixa frequência	$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1 \angle 0^\circ$	Início do diagrama polar
Porção relativa à alta frequência	$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \infty \angle -180^\circ$	Final do diagrama polar

Como a parte imaginária de $G(j\omega)$ é positiva para $\omega > 0$ e é monotonicamente crescente e a parte real decresce monotonicamente a partir da unidade, a forma geral do diagrama polar de $G(j\omega)$ é mostrada na Figura. O ângulo de fase fica entre 0° e 180° .



Exemplo 2

Um filtro RC simples é mostrado na Figura.

A F.T. deste filtro é

$$G(s) = \frac{V_c(s)}{U(s)} = \frac{1}{RCs + 1}, \quad (1)$$

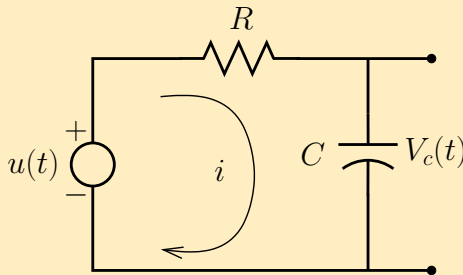
e função de transferência senoidal em regime permanente é

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(RC)s + 1} = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_1} + 1}, \quad (2)$$

onde

$$\omega_1 = \frac{1}{RC}.$$

Desenhe o diagrama polar do filtro.



O diagrama polar é obtido a partir da relação

$$\begin{aligned}
 G(j\omega) &= R(\omega) + jI(\omega) \\
 &= \frac{1 - j\frac{\omega}{\omega_1}}{\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 + 1} \\
 &= \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} - \frac{j\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}
 \end{aligned}$$

O primeiro passo é se determinar $R(\omega)$ e $I(\omega)$ nas frequências, $\omega = 0$ e $\omega = \infty$.

ω	$R(\omega)$	$I(\omega)$
0	1	0
∞	0	0

É fácil demonstrar que o diagrama é um círculo com centro em $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Quando $\omega = \omega_1$, as partes real e imaginária são iguais em magnitude e o ângulo $\phi(\omega_1) = -45^\circ$.

O diagrama polar pode ser prontamente obtido a partir da equação

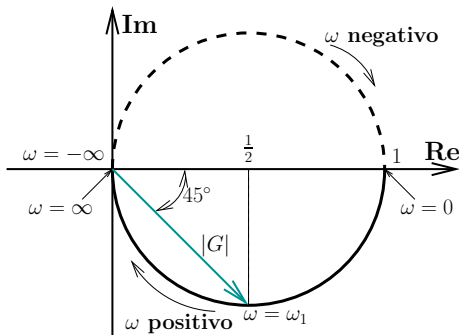
$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi(\omega)} = |G(j\omega)|\angle\phi(\omega)$$

onde

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]^{1/2}}$$

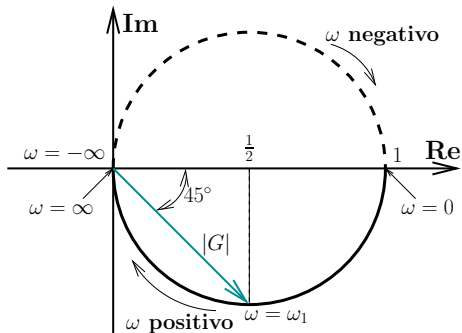
e

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right).$$



Portanto,

ω	$ G(j\omega) $	$\angle G(j\omega) = \phi(\omega)$
0	1	0°
ω_1	$1/\sqrt{2}$	-45°
∞	0	-90°



Exemplo 3

O diagrama polar de uma F.T. é útil para se investigar a estabilidade do sistema. Consideremos a F.T.

$$G(s)\Big|_{s=j\omega} = G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega\tau + 1)} = \frac{K}{j\omega - \omega^2\tau}, \quad (3)$$

Desenhar o diagrama polar

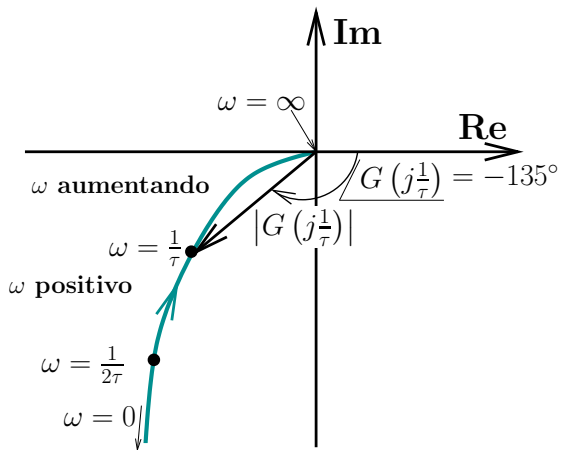
A magnitude e a fase são escritas como

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{(\omega^2 + \omega^4\tau^2)^{1/2}} \quad \text{e} \quad \phi(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{1}{-\omega\tau}\right).$$

A fase e a magnitude são prontamente calculadas nas frequências $\omega = 0$, $\omega = \frac{1}{2\tau}$, $\omega = \frac{1}{\tau}$ e $\omega = +\infty$. Os valores de $|G(j\omega)|$ e $\phi(\omega)$ são mostrados na Tabela a seguir.

ω	$ G(j\omega) $	$\angle G(j\omega) = \phi(\omega)$
0	∞	-90°
$\frac{1}{2\tau}$	$\frac{4K\tau}{\sqrt{5}}$	-117°
$\frac{1}{\tau}$	$\frac{K\tau}{\sqrt{2}}$	-135°
∞	0	-180°

Observe que $\omega = \infty$ na origem.



Uma solução alternativa utiliza as partes real e imaginária de $G(j\omega)$ como

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{K}{j\omega - \omega^2\tau} \\ &= \frac{K(-j\omega - \omega^2\tau^2)}{\omega^2 + \omega^4\tau^2} \\ &= R(\omega) + jI(\omega), \end{aligned} \quad (4)$$

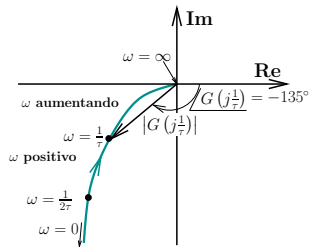
onde

$$R(\omega) = \frac{-K\omega^2\tau}{\omega^2 + \omega^4\tau^2}$$

e

$$I(\omega) = \frac{-\omega K}{\omega^2 + \omega^4\tau^2}$$

ω	$R(\omega)$	$I(\omega)$
0	$-K\tau$	$-\infty$
$\frac{1}{2\tau}$	$-\frac{4K\tau}{5}$	$-\frac{8K\tau}{5}$
$\frac{1}{\tau}$	$-\frac{K\tau}{2}$	$-\frac{K\tau}{2}$
∞	0^-	0^-



Seja a F.T.:

$$G(j\omega) = \frac{K_0(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2) \cdots (1 + j\omega T_m)}{(j\omega)^N(1 + j\omega \tau_1)(1 + j\omega \tau_2) \cdots (1 + j\omega \tau_p)} \quad K_0 > 0$$

Sejam $n = N + p$ e m os graus dos polinômios do denominador e do numerador, respectivamente. Ainda, $n \geq m$. Vamos analisar o comportamento de $G(j\omega)$ quando ω tende a ∞ . Há dois casos possíveis:

❶ **n = m.** Neste caso, temos

$$G(j\omega) = \frac{K_0 T_1 T_2 \cdots T_m}{\tau_1 \tau_2 \cdots \tau_p}$$

ou seja o **diagrama de Nyquist termina sobre o eixo real e fora da origem.**

- ② $n > m$. Neste caso, $G(j\infty)$. Assim, o diagrama de Nyquist termina sobre a origem. A forma como $G(j\omega)$ se aproxima da origem depende do excesso do número de polos sobre o número de zeros. Para ω suficientemente grande, temos as seguintes possibilidades:

- a) $n - m = 1$, então

$$\angle G(j\infty) = -90^\circ.$$

- b) $n - m = 2$, então

$$\angle G(j\infty) = -180^\circ.$$

Isto mostra que para $n > m$, os diagramas de Nyquist se aproximam da origem (para ω indo para ∞) por direções tangentes aos eixos real e imaginário, positivo ou negativo.

Vamos analisar agora o comportamento do diagrama de Nyquist em baixas frequências. Para isso, precisamos distinguir o tipo de sistema:

❶ **Sistemas do tipo 0** temos que $N = 0$ e, assim, $G(j\omega) = K_0$.

Porção relativa à baixa frequência	Isto significa que o ponto inicial do diagrama de Nyquist se localiza sobre o eixo real positivo. Além disso, a tangente ao diagrama em $\omega = 0$ é perpendicular ao eixo real.
Porção relativa à alta frequência	O ponto terminal, que corresponde a $\omega = \infty$, está sobre a origem e a curva é tangente a um dos eixos.

- ② **Sistemas do tipo 1** temos que $N = 1$ e, portanto, o termo predominante de $G(j\omega)$ é o fator $j\omega$ que aparece no denominador.

Porção relativa à baixa frequência	<p>Assim ,temos:</p> $\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \infty$ $\lim_{\omega \rightarrow 0} \angle G(j\omega) = -90^\circ$ <p>Isto significa que, em baixas frequências, o diagrama de Nyquist é assintótico a uma reta paralela ao eixo imaginário negativo.</p>
Porção relativa à alta frequência	<p>Em $\omega = \infty$, o módulo torna-se nulo e a curva converge para a origem, tangenciando um dos eixos.</p>

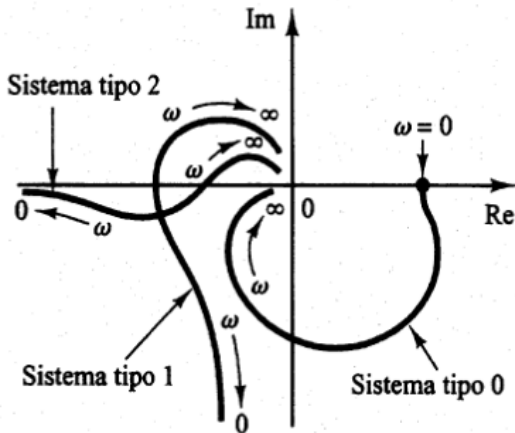
- ③ **Sistemas do tipo 2** temos que $N = 2$ e, portanto, o termo predominante de $G(j\omega)$ é o fator $(j\omega)^2$ que aparece no denominador. Assim

Porção relativa à baixa frequência	$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \infty$ $\lim_{\omega \rightarrow 0} \angle G(j\omega) = -180^\circ$ <p>Então, em baixas frequências o diagrama de Nyquist é assintótico a uma reta paralela ao eixo real negativo.</p>
Porção relativa à alta frequência	<p>Em $\omega = \infty$, o módulo torna-se nulo e a curva é tangente a um dos eixos.</p>

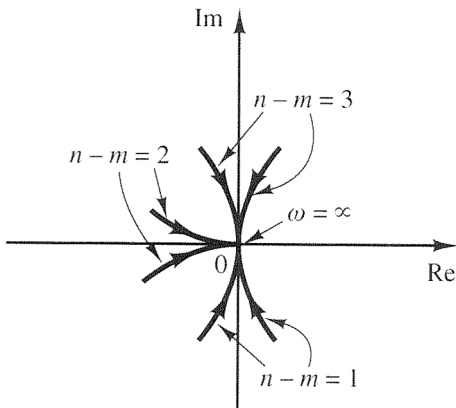
Diagramas polares

Forma gerais de gráficos polares

As formas gerais dos ramos de baixa frequência dos diagramas polares dos sistemas dos tipos 0, 1 e 2 são apresentadas na Figura.



Pode-se observar que, se o grau do polinômio do denominador de $G(j\omega)$ for maior que o do numerador, então os lugares geométricos de $G(j\omega)$ vão convergir para a origem no sentido horário. Em $\omega = \infty$, os lugares são tangentes a um ou outro eixo.

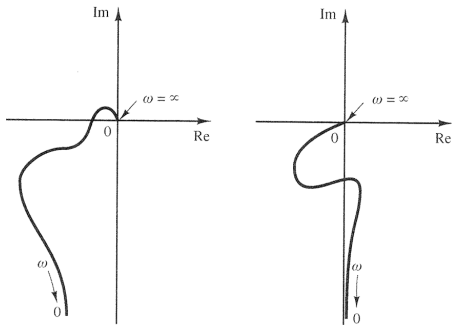


$$G(j\omega) = \frac{b_o(j\omega)^m + \dots}{a_o(j\omega)^n + \dots}$$

Diagramas polares

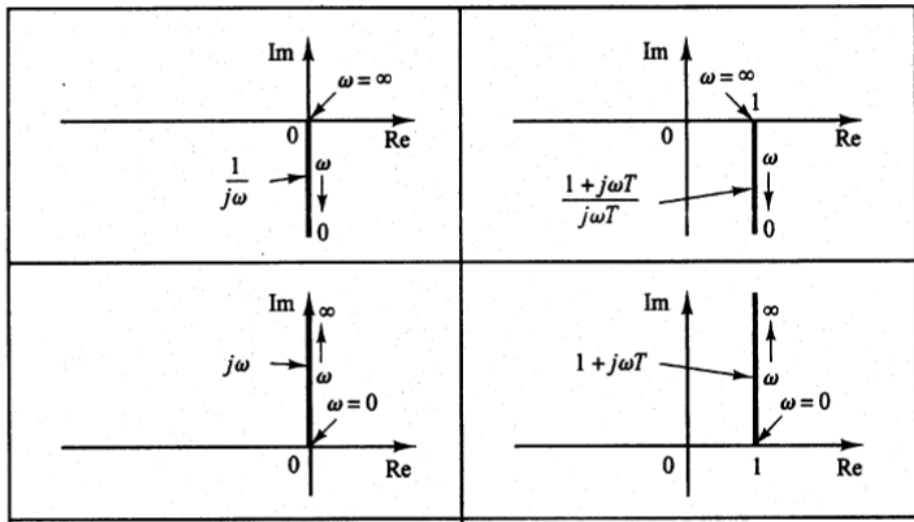
Formas gerais de gráficos polares

Quaisquer formas complicadas nas curvas do diagrama polar são causadas pela dinâmica do numerador, i.e., pelas constantes de tempo do numerador. Na análise de sistemas de controle, o diagrama polar $G(j\omega)$ deve ser determinado com precisão na faixa de frequência de interesse.



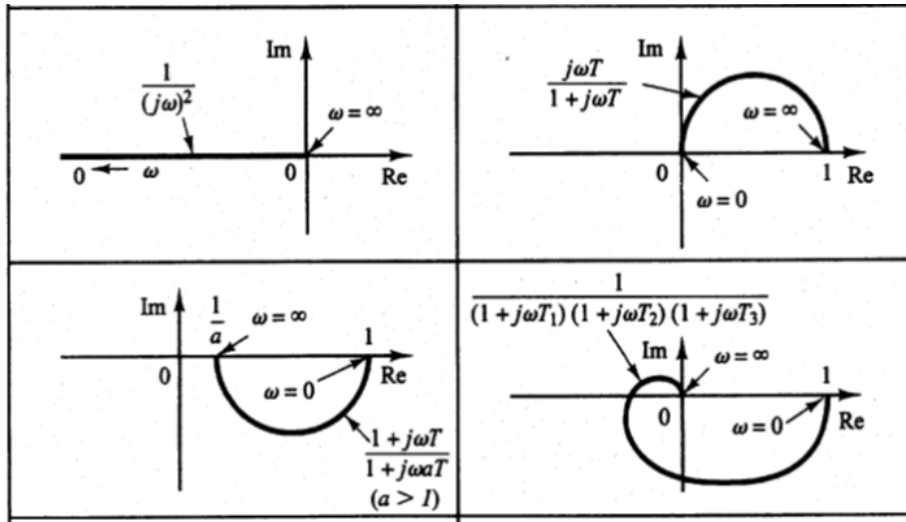
Diagramas polares

Diagramas polares de F.T. simples



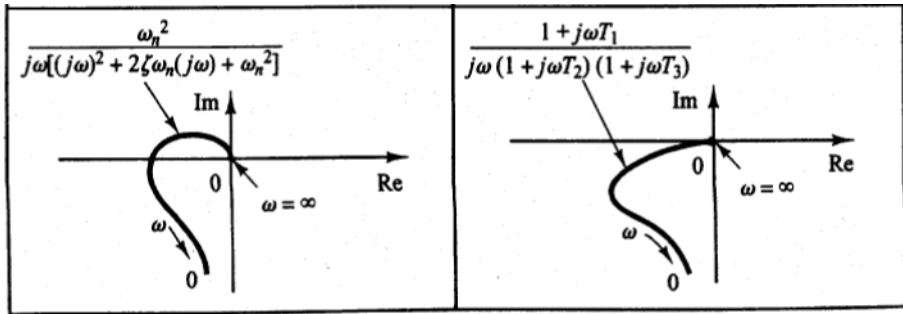
Diagramas polares

Diagramas polares de F.T. simples



Diagramas polares

Diagramas polares de F.T. simples



O comando do Octave `nyquist` calcula a resposta em frequência de sistemas de tempo contínuo, lineares e invariantes no tempo. O comando

`nyquist(sys)`

desenha o diagrama de Nyquist da F.T.

$$G(s) = \frac{num(s)}{den(s)}$$

onde `sys = tf(num,den)` é a função de transferência do sistema definida por `num` e `den`, os quais contêm os coeficientes dos polinômios em ordem decrescente dos expoentes de s . O comando que contém o vetor de frequência w , especificado pelo usuário como

`nyquist(sys,w)`

calcula a resposta em frequência para os vários valores da frequência, especificados em radianos por segundo.

Quando executado com argumentos no lado esquerdo como

```
[re,im,w]=nyquist(sys)  
[re,im,w]=nyquist(sys,w)
```

o Octave retorna a resposta em frequência do sistema nas matrizes `re`, `im` e `w`. Nenhum diagrama é apresentado na tela.

Exemplo 4

Considere a seguinte F.T. de malha aberta

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0,8s + 1}$$

Desenhe o diagrama de Nyquist com o Octave.

Exemplo 5

Considere a seguinte F.T. de malha aberta

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Desenhe o diagrama de Nyquist com o Octave.

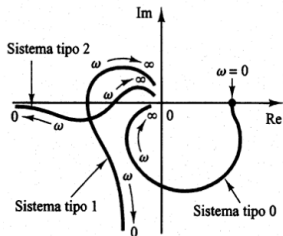
1 A F.T.M.A.

$$G(j\omega) = \frac{K_0(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)\cdots(1+j\omega T_m)}{(j\omega)^N(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)\cdots(1+j\omega\tau_p)} \quad K_0 > 0 \quad (5)$$

Para esta F.T. determina-se o tipo de sistema. Traça-se de maneira aproximada a porção do diagrama polar referente a baixas frequências

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega)$$

Comportamento em baixas frequências relativo a diferentes tipos de sistemas é mostrado na Figura. A fase em $\omega = 0$ é $N(-90^\circ)$.



- ② O diagrama polar em altas frequências pode ser determinado como

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} = 0 / \underline{m - N - p} \times 90^\circ \quad (6)$$

Note-se que, em decorrência do grau do denominador da equação (5) ser sempre maior que o grau do numerador, o ponto em altas frequências ($\omega \rightarrow \infty$) é aproximado (i.e., a condição angular) no sentido horário ($n = N + p > m$). O diagrama termina na origem, sendo tangente ao eixo determinado pela equação (6). A tangência pode ocorrer em quaisquer dos lados dos eixos.

- ③ A assíntota relativa a baixas frequências, para sistemas de tipo 1, é determinada tomando o limite da parte real da F.T. quando $\omega \rightarrow 0$.

- ④ As frequências relativas aos pontos de interseção do diagrama polar com o semi-eixo real negativo e com o eixo imaginário são determinadas, respectivamente, fazendo-se.

$$\operatorname{Im}[G(j\omega)] = 0 \text{ (Semi-eixo real negativo)} \quad (7)$$

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)] = 0 \text{ (Eixo imaginário)} \quad (8)$$

- ⑤ Se não houver constantes de tempo no numerador, a curva representa um comportamento uniforme com a fase de $G(j\omega)$ decrescendo continuamente à medida que ω varia de 0 a $+\infty$. Se houver constantes de tempo no numerador, e dependendo dos valores destas, a fase não pode apresentar uma variação contínua na mesma direção, criando deste modo, "saliências", no diagrama polar.
- ⑥ É importante saber a forma exata do diagrama polar nas proximidades do ponto $-1 + j0$.

Exemplo 6

Sistema de Tipo 0, cuja função de transferência é

$$G(j\omega) = \frac{K_0}{(1 + j\omega T_f)(1 + j\omega T_m)}$$

Traçar o diagrama polar.

Exemplo 7

Sistema de Tipo 0, cuja função de transferência é

$$G(j\omega) = \frac{K_0}{(1 + j\omega T_f)(1 + j\omega T_m)(1 + j\omega T)}$$

Traçar o diagrama polar.

Exemplo 8

Sistema de Tipo 1, cuja função de transferência é

$$G(j\omega) = \frac{K_1}{j\omega (1 + j\omega T_f)(1 + j\omega T_m)}$$

Traçar o diagrama polar.

Exemplo 9

Sistema de Tipo 2, cuja função de transferência é

$$G(j\omega) = \frac{K_2}{(j\omega)^2 (1 + j\omega T_f)(1 + j\omega T_m)}$$

Traçar o diagrama polar.

Diagramas módulo em dB versus ângulo de fase

Outra maneira de representar graficamente as características da resposta em frequência é utilizando o diagrama de módulo em dB versus ângulo de fase para uma gama de valores de frequência de interesse. Esses diagramas de módulo em dB versus ângulo de fase normalmente são chamados carta de Nichols.

Note que, no diagrama de módulo em dB versus fase, uma variação na constante de ganho de $G(j\omega)$ simplesmente desloca a curva para cima (para ganhos crescentes) ou para baixo (para ganhos decrescentes), mas a forma da curva permanece a mesma.

As vantagens do diagrama de módulo em dB versus fase são:

- que a estabilidade relativa do sistema de malha fechada pode ser determinada rapidamente e
- que a compensação pode ser realizada com facilidade

Diagramas módulo em dB versus ângulo de fase

O diagrama de módulo em dB versus ângulo de fase da F.T. Senoidal $G(j\omega)$ e de $\frac{1}{G(j\omega)}$ são anti-simétricos em relação à origem

$$\left| \frac{1}{G(j\omega)} \right| \text{ em dB} = - |G(j\omega)| \text{ em dB}$$

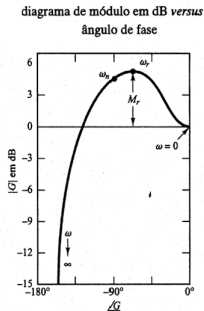
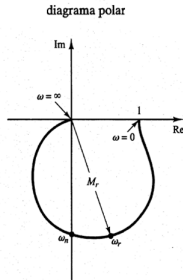
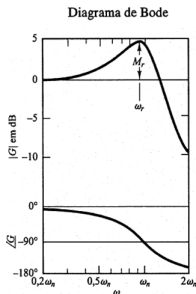
e

$$\angle \frac{1}{G(j\omega)} = - \angle G(j\omega)$$

Diagramas módulo em dB versus ângulo de fase

Comparemos as curvas de resposta em frequência de

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}, \quad \text{para } \xi > 0$$



Diagramas módulo em dB versus ângulo de fase

Diagrama de Bode

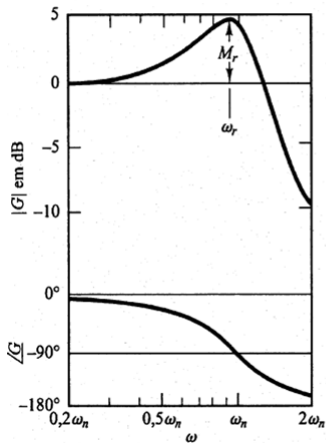


diagrama polar

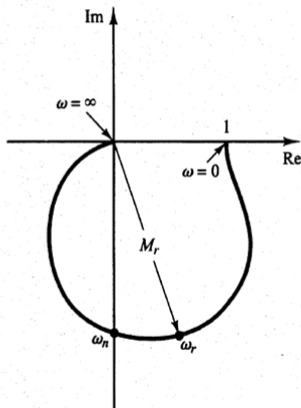
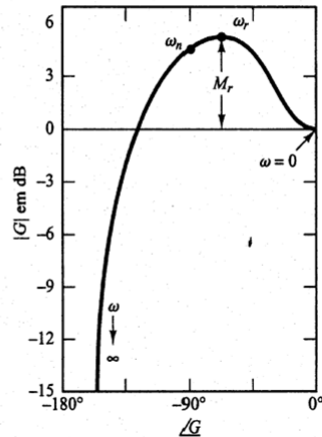


diagrama de módulo em dB versus ângulo de fase



Diagramas módulo em dB versus ângulo de fase

Exemplos de alguns diagramas de módulo em dB versus ângulo de fase.

