



UFABC - Universidade Federal do ABC

Sistemas de Controle II

Projeto de Sistemas de Controle pela Resposta em Frequência

Prof^a Dra. Heloise Assis Fazzolari

heloise.fazzolari@ufabc.edu.br

Sala 717-1, 7^º andar, Torre 1, Bloco A - Campus Santo André

3^º Quadrimestre de 2021

Especificações no Domínio da Frequência

Consideremos a F.T.M.F. do sistema básico de segunda ordem

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1)$$

No regime estacionário senoidal, $s = j\omega$, a equação (1) fica

$$\begin{aligned} T(j\omega) &= \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \\ &= \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)} = Me^{j\phi} \end{aligned} \quad (2)$$

onde

$$M = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right)^2}}, \quad \phi = -\tan^{-1}\left(\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)$$

Efeitos da adição de um zero à F.T. do caminho direto

A F.T. do sistema em malha fechada da equação (1) pode ser considerada como a de um sistema de controle com realimentação unitária com a F.T. do caminho direto do sistema básico de segunda ordem

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)} \quad (3)$$

Adiciona-se, agora, um zero em $s = -1/T$ à F.T., de modo que a equação (3) fica

$$G(s) = \frac{\omega_n^2(1 + Ts)}{s(s + 2\xi\omega_n)} \quad (4)$$

A F.T.M.F. passa a ser expressa por

$$T(s) = \frac{\omega_n^2(1 + Ts)}{s^2 + (2\xi\omega_n + T\omega_n^2)s + \omega_n^2} \quad (5)$$

Efeitos da adição de um zero à F.T. do caminho direto

Agora existem três parâmetros em ξ , ω_n e T , a expressão exata para M_r , ω_r e BW é difícil de se obter analiticamente. Após uma dedução extensa, a BW do sistema é obtida

$$BW = \sqrt{-\frac{b}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + 4\omega_n^4}} \quad (6)$$

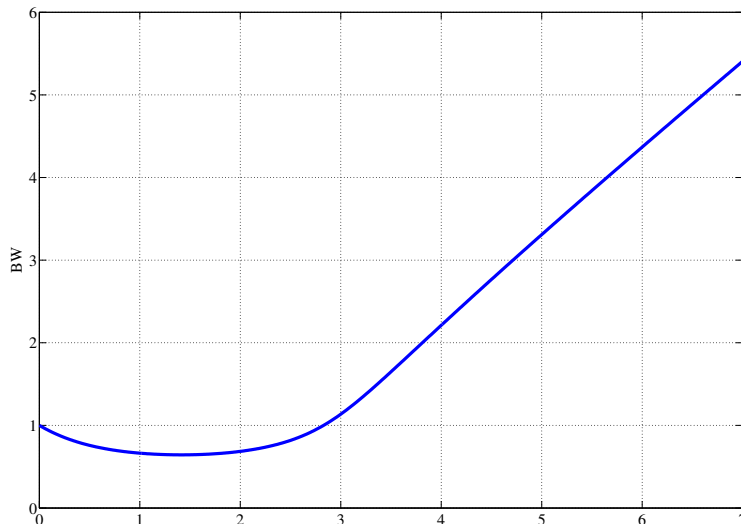
em que

$$b = 4\xi^2\omega_n^2 + 4\xi\omega_n^3T - 2\omega_n^2 - \omega_n^4T^2 \quad (7)$$

Enquanto é difícil perceber como cada um dos parâmetros da equação (6) afeta a BW, a figura a seguir mostra a relação entre BW e T para $\xi = 0,707$ e $\omega_n = 1$. Observe que **o efeito geral da adição de um zero à função de transferência do caminho direto é aumentar a banda passante do sistema em malha fechada.**

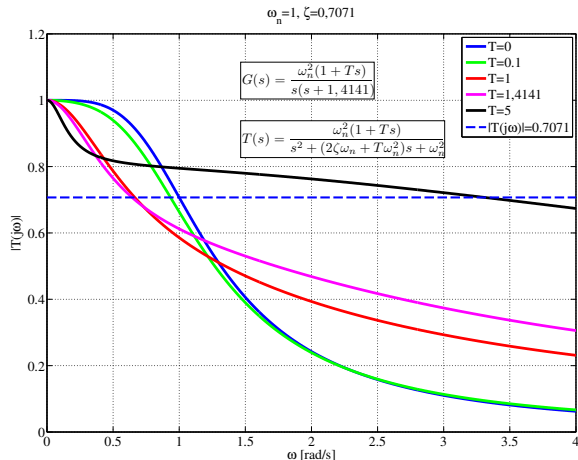
Efeitos da adição de um zero à F.T. do caminho direto

BW de um sistema de segunda ordem com F.T.M.A $G(s) = (1 + Ts)/(s(s + 1,414))$.



Efeitos da adição de um zero à F.T. do caminho direto

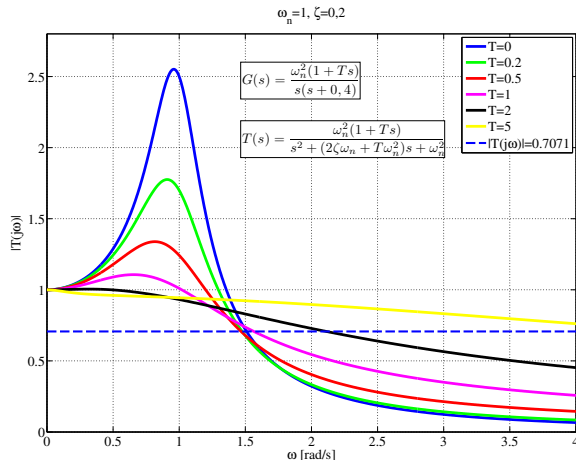
Estas curvas confirmam que a BW, geralmente, aumenta com o aumento de T pela adição de um zero a $G(s)$, exceto para uma faixa de valores menores de T , para a qual a BW, na realidade, diminui. Curvas de amplificação para o sistema de segunda ordem com a F.T. do caminho direto da equação (5). (a) $\omega_n = 1$ e $\xi = 0,707$



(a)

Efeitos da adição de um zero à F.T. do caminho direto

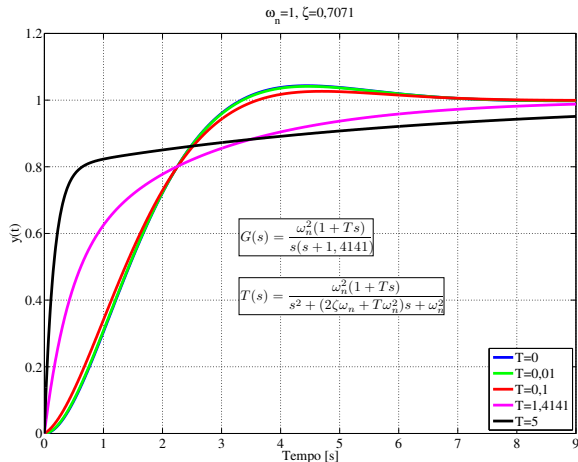
Curvas de amplificação para o sistema de segunda ordem com a F.T. do caminho direto da equação (5). (b) $\omega_n = 1$ e $\xi = 0,2$.



(b)

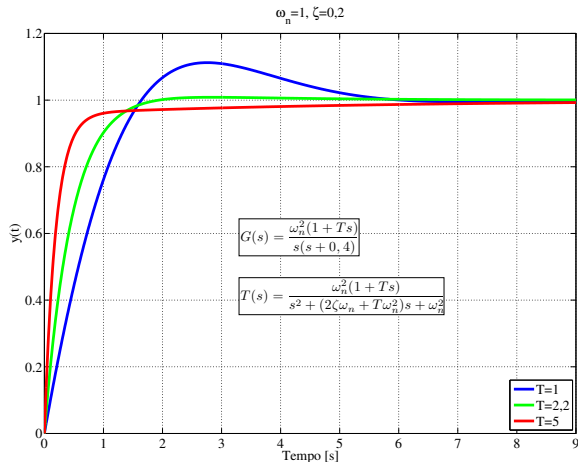
Efeitos da adição de um zero à F.T. do caminho direto

Respostas ao degrau unitário do sistema em M.F. Estas curvas mostram que a uma BW alta corresponde um t_r mais rápido.



Efeitos da adição de um zero à F.T. do caminho direto

Entretanto, quando T se torna muito alto, o zero da F.T.M.F., que se situa em $s = -1/T$, se move aproximando-se da origem, fazendo com que o t_r é mais rápido, porém, a alta constante de tempo relacionada ao zero próximo da origem do plano s faz com que a resposta no domínio do tempo demore mais a atingir o regime estacionário final, i.e., t_s será maior.



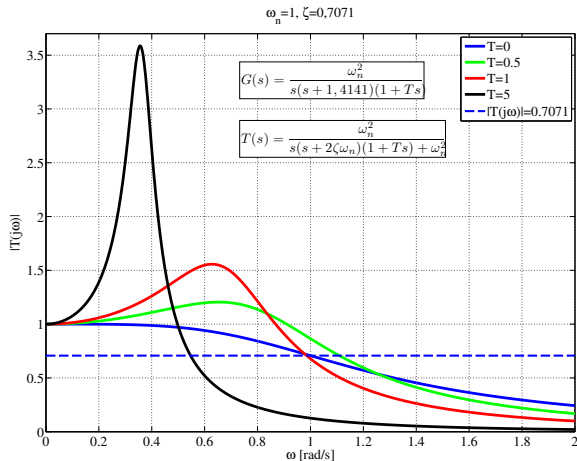
Efeitos da adição de um polo à F.T. do caminho direto

A adição de um polo em $s = -1/T$ à F.T. do caminho direto da equação (3) conduz à

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)(1 + Ts)} \quad (8)$$

Efeitos da adição de um polo à F.T. do caminho direto

A figura mostra as curvas de $|T(j\omega)|$ em função de ω para $\omega_n = 1$, $\xi = 0,707$, e diversos valores de T . Como o sistema agora é de terceira ordem, ele pode ser instável para algum conjunto de seus parâmetros. Pode ser mostrado que, para $\omega_n = 1$ e $\xi = 0,707$, o sistema é estável para todos os valores positivos de T . A figura mostra que, para pequenos valores de T , a BW do sistema é ligeiramente aumentada pela adição do polo, porém, M_r também é aumentado. Quando o valor de T se torna alto, o polo adicionado a $G(s)$ tem o efeito de diminuir a BW aumentando o valor de M_r .

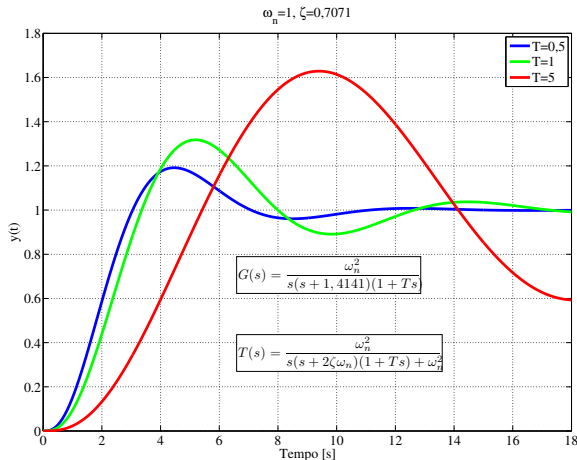


Efeitos da adição de um polo à F.T. do caminho direto

As respostas ao degrau unitário da figura mostram que, para altos valores de T , $T = 1$ e $T = 5$, as seguintes relações podem ser observadas:

- O t_r aumenta com a diminuição da BW.
- Os valores de M_r mais altos também correspondem a sobrevalores máximos maiores nas respostas ao degrau unitário.

A correlação entre M_r e o M_p da resposta ao degrau só apresenta significado quando o sistema é estável.



O objetivo é apresentar procedimentos para o projeto e a compensação pelo método da resposta em frequência (avanço, atraso, atraso-avanço).

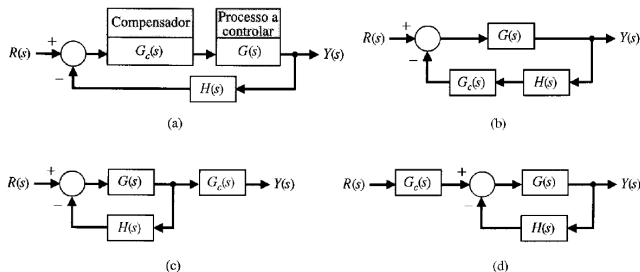
- Compensação é a definição e o ajuste de dispositivos que são incluídos no sistema a fim de que este atenda a especificações de desempenho.
- Em um projeto de controle, o desempenho da resposta transitória é a mais importante. A especificação é feita de maneira indireta pela MF, MG, amplitude de pico de ressonância (ideia aproximada do amortecimento do sistema), a frequência de cruzamento de ganho, frequência de ressonância, a banda passante (dão uma estimativa da velocidade da resposta transitória) e as constantes de erro estático (fornecem a precisão do regime permanente).
- O projeto de sistemas de controle desenvolve-se num esquema de tentativa e erro.

- É quase sempre possível ajustar os parâmetros do sistema no sentido de se obter uma resposta desejada, mas muitas vezes se percebe que não é suficiente ajustar um parâmetro do sistema e assim obter o desempenho desejado. Portanto, torna-se necessário reconsiderar a estrutura do sistema e reprojeta-lo a fim de que seja obtido o sistema adequado, i.e., examinar o arranjo ou a implementação do sistema e obter uma nova realização que sejam adequados.
- O projeto de um sistema de controle trata da concepção da realização da estrutura do sistema e da seleção de componentes e de parâmetros adequados.
- Por exemplo, ao se desejar que um conjunto de medidas de desempenho possua valores inferiores aos especificados, ocorrem muitas vezes requisitos conflitantes. Assim, deve-se alterar, de algum modo, a estrutura do sistema.

- A alteração ou o ajuste de um sistema de controle com a finalidade de obter um desempenho adequado é chamado de compensação.
- Ao se reprojeter um SC de modo a alterar a resposta, insere-se um componente adicional na estrutura do sistema com retroação. É este componente ou dispositivo adicional que equaliza ou compensa a deficiência de desempenho.
- O dispositivo de compensação pode ser elétrico, mecânico, hidráulico, pneumático ou algum outro tipo de dispositivo ou estrutura e é frequentemente chamado de compensador. Os circuitos elétricos servem comumente como compensadores.

Introdução

A FT de um compensador é designada por $G_c(s)$ e o compensador pode ser posicionado em um local adequado na estrutura do sistema.



- a No percurso direto de ação à frente é chamado de compensador em cascata ou compensador em série.
- b Compensação na retroação.
- c Compensação na saída (ou na carga). Não é Fisicamente realizável.
- d Compensação na entrada.

- Pode-se acrescentar uma estrutura de compensação adequada, se necessário, a fim de satisfazer as especificações do sistema. O projeto da estrutura $G_c(s)$ é desenvolvida em termos da resposta em frequência retratada no plano polar, nos diagramas de Bode ou na carta de Nichols.
- Como uma F.T. em cascata é facilmente levada em conta em um gráfico de Bode através da adição da resposta de frequência da estrutura, prefere-se abordar os métodos de resposta em frequência utilizando os diagramas de Bode.
- Depois de projetar a M.A. pela técnica da resp. em freq., os polos e zeros de M.F. podem ser determinados. As características da resp. transitória devem ser verificadas, se não forem satisfatórias, deve-se modificar o compensador e repetir análise até um resultado satisfatório.

- O projeto no domínio de freq. é simples e direto. A resp. em freq. pode ser obtida experimentalmente.
- Existem duas técnicas de projeto no domínio da frequência:
 - ▶ Técnica de diagrama polar. Desvantagem ao adicionar o compensador o diagrama polar não mantém a forma original.
 - ▶ Técnica de diagrama de Bode. O compensador pode simplesmente ser acrescentado ao diagrama de Bode. Melhor de trabalhar.

Introdução

Informações fornecidas pela Resposta em Frequência de Malha Aberta

- Região de baixa frequência (abaixo da frequência de cruzamento de ganho):
Indica o comportamento em regime permanente do sistema em malha fechada.
- Região de média frequência (próxima à frequência de cruzamento de ganho):
Indica a estabilidade relativa.
- Região de alta frequência (bem acima da frequência de cruzamento de ganho):
Indica a complexidade do sistema.

O projeto do lugar das raízes nos dá uma informação direta da resposta transitória do sistema em M.F., o projeto da resposta em frequência nos dá essa informação indiretamente, ou seja, ela não é tão visível como no lugar das raízes. Entretanto, a resposta em frequência nos dá informação sobre a resposta em regime estacionário (resposta em baixa frequência), as margens de estabilidade e sobre a largura de faixa do sistema. As especificações dependem do sistema considerado. Por exemplo:

- Os servo-sistemas de um plotter digital devem ter uma resposta rápida.
- Os sistemas de controle de atitude de amplificadores espaciais são projetados para responder lentamente.

As características necessárias ou requisitos são chamadas de especificações dos sistemas e devem ser desenvolvidas antes do início do projeto. Especificações:

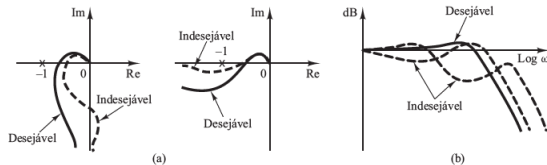
- O sistema deve ser estável.
- Os erros em regime estacionário permissíveis.
- Rejeição ao distúrbio necessária.
- Sobre-sinal permitido para as variações em degrau na entrada.

Requisitos da Resposta em Frequência em Malha Aberta

Em muitos casos práticos a compensação é essencialmente uma conciliação entre a precisão em regime permanente e a estabilidade relativa.

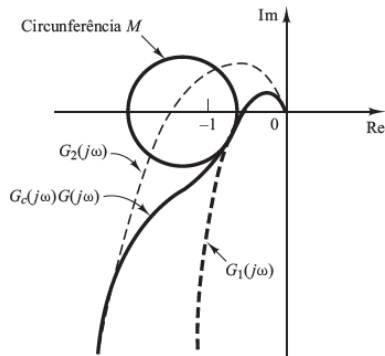
Para se ter uma constante de erro de velocidade elevada e ainda uma estabilidade relativa satisfatória, verifica-se que é necessário reconfigurar a curva de resposta em frequência de malha aberta. O ganho na região de baixa frequência deve ser suficientemente elevado e próximo da frequência de cruzamento de ganho, e a inclinação da curva de módulo em dB no diagrama de Bode deve ser -20 dB/década nas vizinhanças da frequência de cruzamento de ganho. Essa inclinação deve se estender sobre uma faixa de frequência bastante ampla para assegurar uma margem de fase adequada. Na região de alta frequência, o ganho deve ser atenuado tão rapidamente quanto possível, para que os efeitos de ruído sejam minimizados.

(a) Exemplos de curvas de resposta em frequência de malha aberta desejáveis e indesejáveis; (b) exemplos de curvas de resposta em frequência de malha fechada desejáveis e indesejáveis.



Requisitos da Resposta em Frequência em Malha Aberta

Pode-se observar na figura que a reconfiguração da curva de resposta em frequência de malha aberta pode ser feita desde que a parte relativa à alta frequência siga o lugar geométrico de $G_1(j\omega)$ e a parte relativa à baixa frequência siga o lugar geométrico de $G_2(j\omega)$. O lugar geométrico redefinido de $G_c(j\omega)G(j\omega)$ deve ter as margens de fase e ganho razoáveis ou deve ser tangente a uma circunferência M adequada.



Características básicas de compensação por avanço, atraso e atraso-avanço de fase

- Compensação por Avanço de Fase:

Melhoria apreciável na resposta transitória e uma pequena variação da precisão em regime estacionário. Ela pode acentuar os efeitos dos ruídos de alta frequência.

- Compensação por Atraso de Fase:

Produz uma sensível melhora na precisão do regime estacionário à custa de um aumento da duração da resposta transitória. Suprime os efeitos dos sinais de ruído de alta frequência.

- Compensação por Atraso e Avanço de Fase:

Combina as características tanto da compensação por avanço como da compensação por atraso de fase.

Características básicas de compensação por avanço, atraso e atraso-avanço de fase

- O uso de um compensador por avanço ou atraso de fase aumenta a ordem do sistema de uma unidade (a menos que ocorra cancelamento entre o zero do compensador e um polo da função de transferência de malha aberta não compensada).
- O uso de um compensador de atraso e avanço eleva a ordem do sistema em duas unidades (a menos que ocorra o cancelamento entre zero(s) do compensador de atraso e avanço de fase e polo(s) da função de transferência de malha aberta não compensada), o que significa que o sistema se torna mais complexo e fica mais difícil controlar o comportamento da resposta transitória.
- Cada situação em particular determina o tipo de compensação a ser utilizada.

Compensador por avanço de fase

Características básicas da compensação por avanço de fase:

- Produz uma melhoria apreciável da resposta transitória.
- Produz uma pequena variação da precisão em regime estacionário.
- Pode acentuar os efeitos dos ruídos de alta frequência.
- Aumenta a ordem do sistema em um (a menos que ocorra cancelamento de zero do compensador e um polo da F.T.M.A. não compensada.)
- Não altera o ganho de malha aberta em baixas frequências e aumenta o ganho nas altas frequências.
- Praticamente não altera a fase de M.A. para frequências distantes de ω_m e, nas vizinhanças desta, introduz um avanço na fase.

Compensador por avanço de fase

O objetivo do compensador por avanço de fase é aumentar a margem de fase, deformando o diagrama de Nyquist no sentido anti-horário (ou seja, avançando a fase) na região de frequências em torno de ω_{cg} .

A principal função do compensador por avanço de fase é configurar a curva de resposta em frequência para conseguir um ângulo de avanço de fase suficiente para compensar o atraso de fase excessivo.

Os compensadores de avanço de fase destinam-se a introduzir, em uma certa faixa de frequência, um avanço de fase no diagrama da resposta em frequência, de forma a aumentar a margem de fase do sistema.

Compensador por avanço de fase

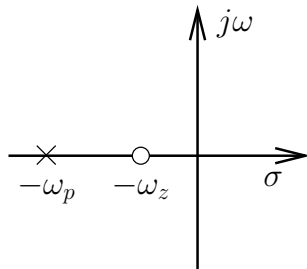
Compensadores por avanço de fase têm FT do tipo:

$$G_c(s) = \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_p}}, \quad \omega_z < \omega_p \quad \text{ou}$$

$$G_c(s) = K_c \frac{s + z}{s + p} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} = K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}$$

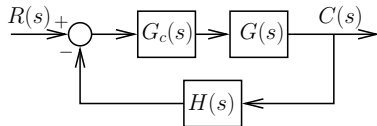
$$K_1 = K_c \alpha \quad 0, 1 \leq \alpha < 1.$$

Em geral, como $0, 1 \leq \alpha < 1$ por isso o zero fica sempre à direita do polo. α é o fator de atenuação do compensador por avanço de fase. Em baixas frequências, o ganho de $G_c(s)$ é unitário e o ganho K_c é o ganho que satisfaz o requerimento de regime estacionário.



Compensador por avanço de fase

No compensador por avanço de fase, $\omega_z < \omega_p$. Desejamos determinar o valor de ω_z e ω_p , para satisfazer certos critérios do projeto para o sistema de M.F. mostrado na figura



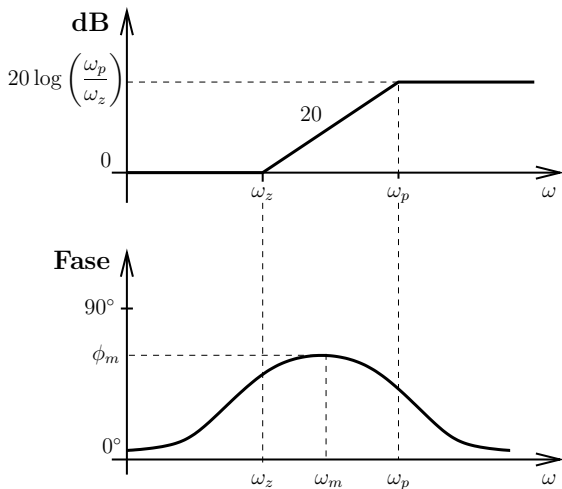
cuja equação característica é

$$1 + G_c(s)G(s)H(s) = 0. \quad (9)$$

Compensador por avanço de fase

O D.B. do compensador por avanço tem a forma mostrada na figura a seguir, desde que $\omega_z < \omega_p$. Assim, vemos que este controlador é um tipo de filtro passa-altas.

O controlador introduz um ganho em altas frequências, o que geralmente causa desestabilização. Entretanto, o ângulo fase positivo do controlador tende a girar o diagrama de Nyquist afastando-o do ponto -1 e com isso impondo a estabilidade.

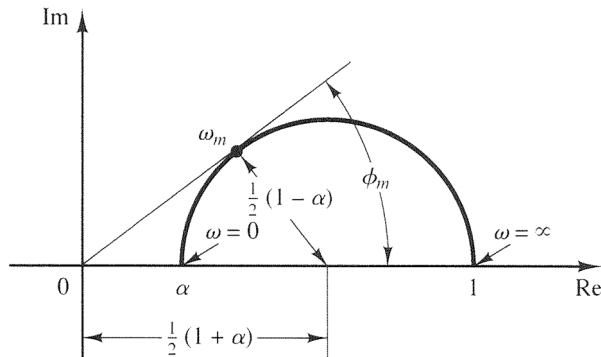


Compensador por avanço de fase

Diagrama polar de um compensador por avanço de fase, com $K_c = 1$.
Frequências de canto do compensador:

$$\omega_z = \frac{1}{T}$$

$$\omega_p = \frac{1}{\alpha T}$$



Compensador por avanço de fase

- O D.B. de ganho mostra que $G_c(s)$ tem características de um filtro passa-altas.
- Podemos mostrar que o ângulo máximo de avanço de fase (ϕ_m) e a frequência em que ele ocorre são dados por:

$$\phi_m = \arcsin\left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}\right)$$

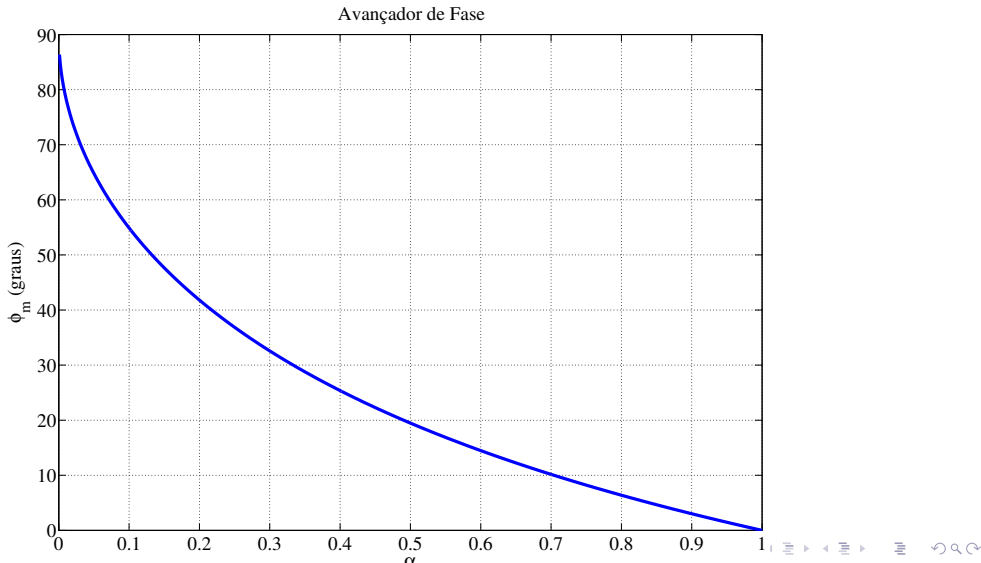
$$\omega_m = \sqrt{z p} = \sqrt{\frac{1}{T} \frac{1}{\alpha T}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha} T}$$

- Relaciona o ângulo de avanço de fase máximo e o valor de α

$$\sin(\phi_m) = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

- O gráfico de ϕ_m em função de α é mostrado a seguir.

Compensador por avanço de fase



Compensador por avanço de fase

Portanto, devemos escolher cuidadosamente a localização do polo e do zero para que o efeito de estabilização do ângulo de fase positivo seja dominante.

O valor de ϕ_m , o atraso máximo introduzido pelo controlador, geralmente não tem significado particular e não foi calculado. Entretanto, no caso do avanço de fase, este valor é importante, uma vez que a fase aumenta a estabilidade. A relação entre ϕ_m e o polo e o zero do controlador é mostrado a seguir, a F.T. do controlador é dada por

$$G_c(j\omega) = |G_c(j\omega)| e^{j\phi} = \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_z}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_p}}.$$

Então

$$\tan \phi = \tan \left(\tan^{-1} \frac{\omega}{\omega_z} - \tan^{-1} \frac{\omega}{\omega_p} \right) = \tan (\alpha - \beta)$$

Compensador por avanço de fase

Assim,

$$\tan \phi = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{\omega}{\omega_z} - \frac{\omega}{\omega_p}}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_z \omega_p}}$$

o deslocamento de fase máxima ocorre na frequência

$$\omega_m = \sqrt{\omega_z \omega_p}.$$

Assim, o valor de ϕ_m é calculado a partir de

$$\tan \phi_m = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\omega_p}{\omega_z}} - \sqrt{\frac{\omega_z}{\omega_p}} \right)$$

O deslocamento de fase máximo ϕ_m é então uma função apenas da relação $\frac{\omega_p}{\omega_z}$.

Compensador por avanço de fase

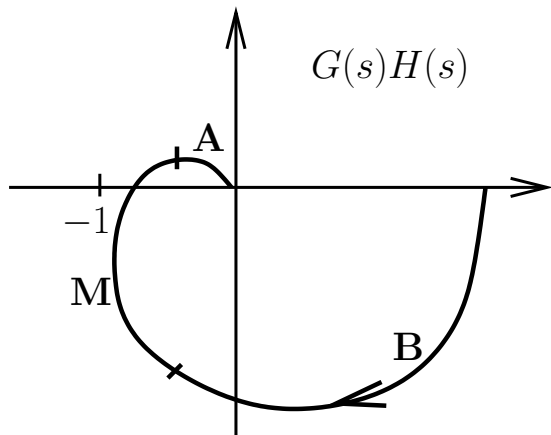
O ganho do controlador em ω_m é

$$|G_c(j\omega_m)| = \left(\frac{1 + \left(\frac{\omega_m}{\omega_z}\right)^2}{1 + \left(\frac{\omega_m}{\omega_p}\right)^2} \right)^{1/2} = \left(\frac{1 + \frac{\omega_p}{\omega_z}}{1 + \frac{\omega_z}{\omega_p}} \right)^{1/2} = \left(\frac{\omega_p}{\omega_z} \right)^{1/2}$$

Compensador por avanço de fase

Consideremos o diagrama de Nyquist como mostrado ao lado, com o diagrama dividido em 3 regiões: B, M, A.

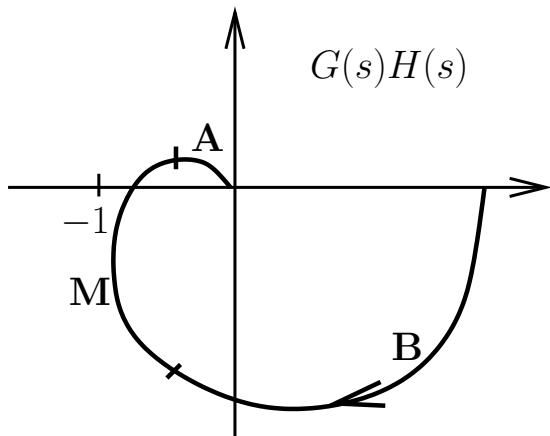
Região A (alta frequência): Como o ganho de malha aberta é bastante pequeno, a introdução do controlador com polo e zero nesta região terá um pequeno efeito.



Compensador por avanço de fase

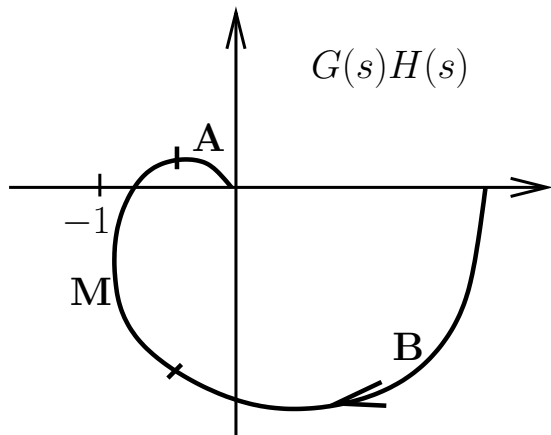
Região B (baixa frequência): Como o diagrama de Nyquist não está próximo do ponto -1 , o avanço de fase do controlador não aumenta as margens de estabilidade do sistema em M.F. Entretanto, o aumento do ganho em altas frequências reduz estas margens.

Assim, o polo e o zero do controlador não podem ser localizados na região de baixa frequência da função de M.A.



Compensador por avanço de fase

Região M (media frequência): Para que o sistema se beneficie da introdução do controlador, este deverá ter o polo e o zero localizados nesta faixa, que se situa nas vizinhanças do ponto -1 no diagrama.



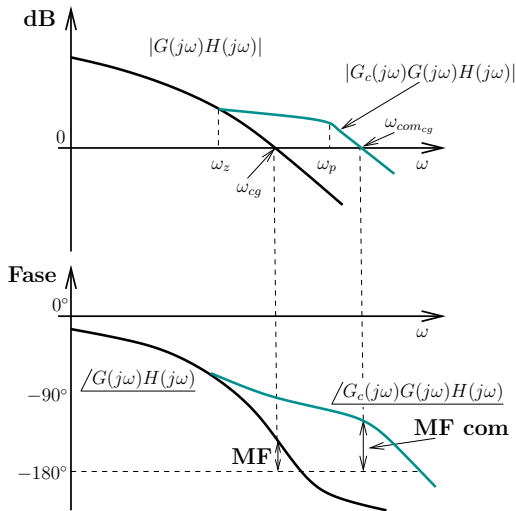
Compensador por avanço de fase

O projeto do avanço de fase é ilustrado na figura a seguir.

O polo e o zero do controlador são colocados próximos de 0 dB, ou ganho unitário, da resposta em frequência da F.T.M.A.

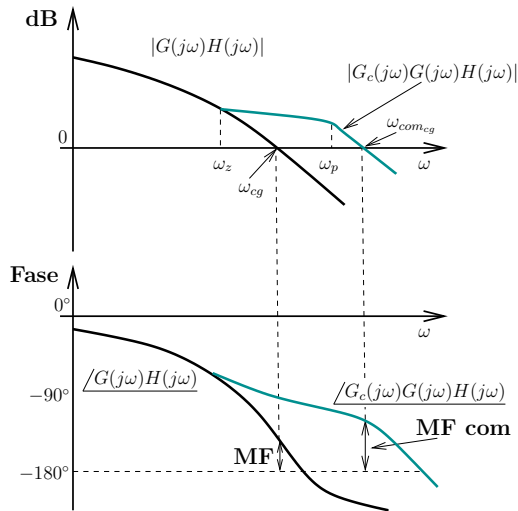
$G(j\omega)H(j\omega)$.

Note que tanto o aumento do ganho como o do ângulo positivo do controlador têm efeito na determinação das margens de estabilidade do sistema de malha fechada. Portanto, a localização do polo e do zero é bem mais crítica do que no caso do controlador por atraso de fase.



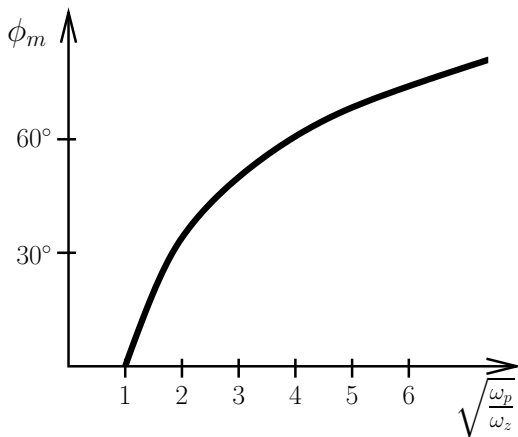
Compensador por avanço de fase

Uma vez que o ganho e a fase do controlador afetam a margem de fase na figura ao lado, o projeto do avanço de fase tende a ser um processo de tentativa e erro. Um possível procedimento será:



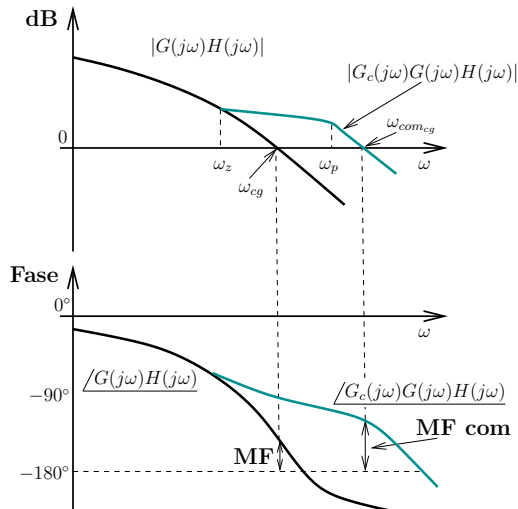
Compensador por avanço de fase

- 1 Escolher uma localização na vizinhança do cruzamento da função de M.A. $G(j\omega)H(j\omega)$, com o eixo 0 dB, como mostramos na figura anterior.
- 2 Anotar a MF do sistema não-compensado. Então da figura a seguir, escolhemos uma relação entre o polo e o zero que resulte em um valor de ϕ_m maior que o avanço de fase adicional necessário para alcançar a MF. Este valor de ϕ_m deve ser maior, uma vez que o compensador adiciona um ganho à resposta em frequência de M.A.



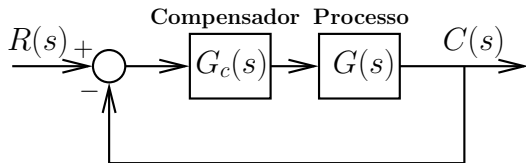
Compensador por avanço de fase

- 3 A partir do zero de 1 e da relação em 2, calculamos a amplitude do polo ω_p . A seguir, calculamos o D.B. compensado, e determinamos se a MF é adequada. Se não for, movemos o polo na direção que ajustará a MF ao valor desejado. Se o deslocamento do polo não produzir o resultado desejado, tentamos mover o zero.



Compensador por avanço de fase

Consideremos o sistema mostrado na figura abaixo,



Supõe-se que as especificações de desempenho sejam dadas em termos de:

- Margem de fase
- Margem de ganho
- Constante de erro estático de velocidade, etc.

Compensador por avanço de fase

O procedimento de projeto é o seguinte:

- 1 Supõe-se que o compensador por avanço de fase tem a F.T.

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{1 + sT}{1 + s\alpha T} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad \text{e} \quad 0 < \alpha < 1$$

Definamos: $K_c \alpha = K$. A F.T.M.A. do sistema compensado é

$$\begin{aligned} G_c(s)G(s) &= K\alpha \frac{1 + sT}{1 + s\alpha T} G(s) \\ &= \frac{1 + sT}{1 + s\alpha T} G_1(s) \quad \text{onde} \quad G_1(s) = KG(s). \end{aligned}$$

Determinemos o ganho K a fim de satisfazermos o requisito da constante de erro estático dado.

Compensador por avanço de fase

- 2 Utilizando o ganho K assim determinado, construa o D.B. de $G_1(j\omega)$, o sistema com ganho ajustado, mas não compensado. Avalie a margem de fase.
- 3 Determine o ângulo de avanço de fase necessário que deve ser acrescentado ao sistema. Adicione 5° a 12° ao ângulo assim determinado, porque a adição do compensador por avanço de fase desloca a frequência de cruzamento de ganho para direita e diminui a margem de fase.

Compensador por avanço de fase

- 4 Determine o fator de atenuação

$$\sin(\phi_m) = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}, \quad \text{então} \quad \alpha = \frac{1 - \sin(\phi_m)}{1 + \sin(\phi_m)}$$

Definamos a frequência em que o módulo do sistema não compensado $G_1(j\omega)$ seja igual a

$$-20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$$

Selecione essa frequência como a nova frequência de cruzamento de ganho, que corresponde a

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$$

e a defasagem máxima ϕ_m ocorre nessa frequência. Esta deve ser a nova frequência na qual o ganho é 0 dB.

Compensador por avanço de fase

- 5 Determine as frequências de canto do compensador por avanço de fase:

$$\text{Zero do compensador: } \omega_z = \frac{1}{T}$$

$$\text{Polo do compensador: } \omega_p = \frac{1}{\alpha T}$$

- 6 Utilizando o valor de K determinado no passo 1 e no passo 4, calculemos a constante K_c como

$$K_c = \frac{K}{\alpha}.$$

- 7 Verifique a margem de ganho para se certificar de que é satisfatória. Se não for, repita o processo modificando a localização polo zero do compensador.
- 8 Calcule os zero e polos da F.T.M.F.

Compensador por avanço de fase

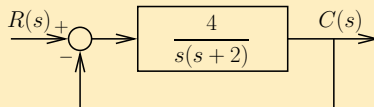
- 9 Calcule a MF do sistema sem compensação quando as constantes de erro foram satisfeitas, i.e., sistema com ganho ajustado mas não compensado.
- 10 Acrescentar uma pequena margem de segurança, determine o avanço de fase adicional necessário, ϕ_m .
- 11 Calcule α .
- 12 Calcule $20 \log(\alpha)$ e determine a frequência na qual a curva de magnitude com ganho ajustado é igual a $-20 \log(\alpha)$ dB. Como a estrutura de compensação fornece um ganho de $20 \log(\alpha)$ em ω_m esta frequência é, simultaneamente, a nova frequência de 0 dB, i.e., nova frequência de cruzamento de ganho, ω_m .
- 13 Calcule o polo e o zero do compensador.
- 14 Trace a resposta em frequência compensada, verifique a margem de fase resultante e repita os passos, se necessário. Finalmente, para um projeto aceitável, aumente o ganho do amplificador a fim de levar em conta a atenuação α .

Compensador por avanço de fase

Exemplo 1

Consideremos o sistema mostrado na figura abaixo, cuja F.T.M.A. é

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$



Deseja-se projetar um compensador, de modo que a constante de erro estático de velocidade K_v seja 20 s^{-1} , a margem de de fase seja pelo menos 50° e a margem de ganho seja pelo menos 10 dB.

Compensador por avanço de fase

Solução Exemplo 1

As especificações de projeto são:

- Erro estacionário para entrada rampa unitária deve ser inferior a 0,05 s.
- Margem de fase de pelo menos 50° .
- Margem de ganho de pelo menos 10 dB.

O projeto e a simulação deste Exemplo é realizado utilizando o script que estará sendo mostrado ao longo do desenvolvimento do mesmo.

Compensador por avanço de fase

Solução Exemplo 1

Procedimento de projeto:

- 1 Requerimento de regime estacionário:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} G_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{4K}{s + 2} = 2K = 20$$

então, devemos adotar o valor mínimo: $K = 10$.

Compensador por avanço de fase

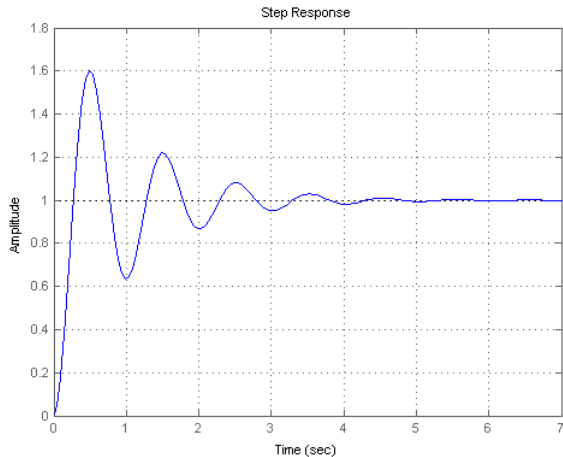
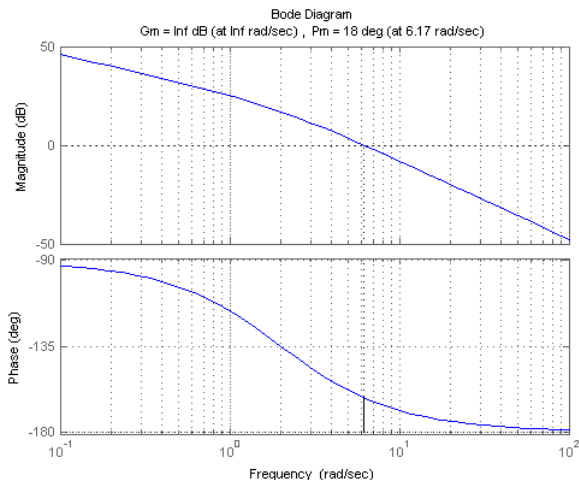
Solução Exemplo 1

- 2 Traçar o D.B. do sistema com ganho ajustado mas não compensado $G_1(s) = KG(s)$

$$G_1(s) = \frac{40}{j\omega(j\omega + 2)} = \frac{20}{j\omega(j0,5\omega + 1)}$$

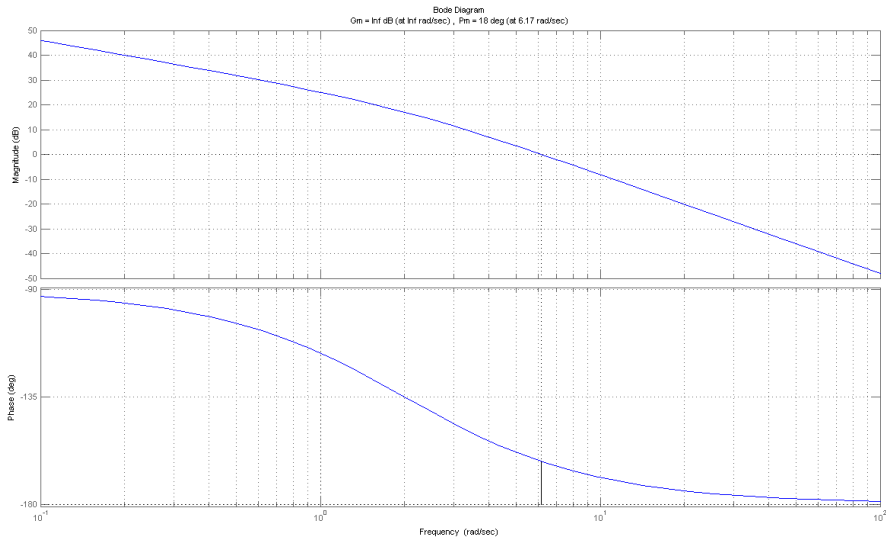
Compensador por avanço de fase

Solução Exemplo 1



Compensador por avanço de fase

Solução Exemplo 1 - D.B. do sistema com ganho ajustado mas não compensado.



Compensador por avanço de fase

Solução Exemplo 1

- 3 Do D.B. podemos observar que: $MG=\infty$ e $MF=18^\circ$. Para que tenhamos uma MF de 50° é necessário adicionar um avanço de

$$\phi_m = MF - 18^\circ = 50^\circ - 18^\circ = 32^\circ$$

Devemos calcular o respectivo fator de atenuação α para dito avanço de fase, ϕ_m ,

$$\alpha = \frac{1 - \sin(\phi_m)}{1 + \sin(\phi_m)} = \frac{1 - \sin(32^\circ)}{1 + \sin(32^\circ)} = 0,31$$

A adição do compensador por avanço de fase altera a curva de módulo em dB para

$$\left| \frac{1 + j\omega T}{1 + j\alpha\omega T} \right|_{\omega=\omega_m=\frac{1}{\sqrt{\alpha}T}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

Assim,

$$-20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) = -5,13\text{dB}$$

Compensador por avanço de fase

Solução Exemplo 1

Reduzindo o valor de K , poderíamos conseguir a MF desejada. Mas se isso fosse feito a especificação relativa ao erro de estacionário seria violada.

- 4 Do D.B. do sistema com ganho ajustado mas não compensado, observamos que $\omega_m \approx 8,38$ rad/s. Assim,

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T} \Rightarrow T = 0,2153 \text{ s.}$$

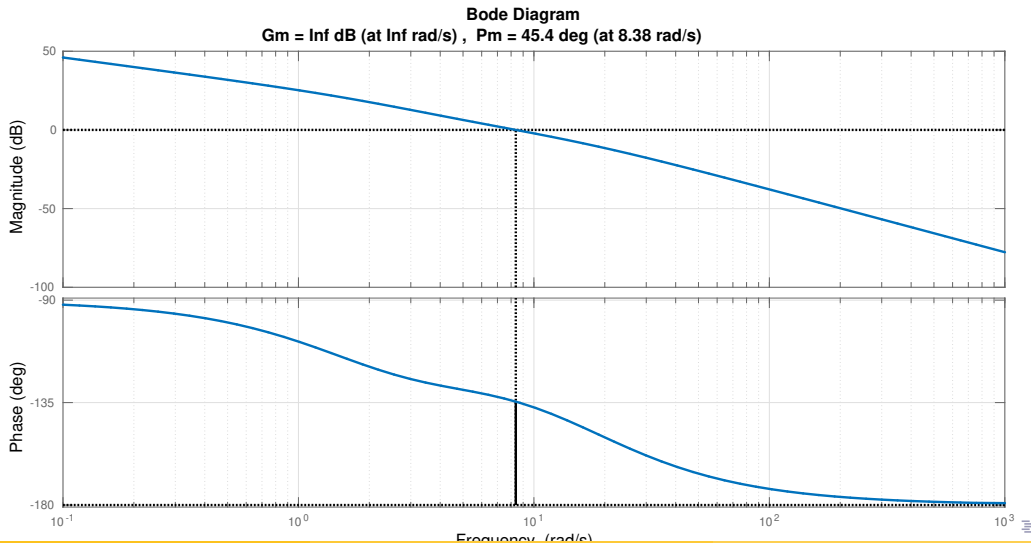
Então, a F.T. do compensador será:

$$KG_c(s) = 10 \frac{1 + 0,2153s}{1 + 0,0661s}. \quad \text{Logo, } G_c(s)G(s) = 40 \frac{(1 + 0,2153s)}{s(s + 2)(1 + 0,0661s)}$$

Observamos do D.B. do sistema em M.A. que obtivemos: $MG=\infty$ e $MF=45,4^\circ$.

Compensador por avanço de fase

Solução Exemplo 1



Compensador por avanço de fase

Solução Exemplo 1

- 5 A adição de um compensador por avanço de fase modifica a curva de módulo em dB no diagrama de Bode. Percebemos que a frequência de cruzamento de ganho será deslocada para a direita. Este aumento na frequência de cruzamento de ganho gerará um atraso de fase, o que deverá ser compensado com a adição de uma margem de ganho extra. Vamos impor uma tolerância de 6° o que significa que $\phi_m = 38^\circ$. Assim,

$$\alpha = \frac{1 - \sin(\phi_m)}{1 + \sin(\phi_m)} = \frac{1 - \sin(38^\circ)}{1 + \sin(38^\circ)} = 0,2379$$

Para este valor de α :

$$-20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) = -6,24\text{dB}$$

Do D.B. da figura a seguir, podemos obter a frequência $\omega_m = 8,96 \text{ rad/s}$.

Compensador por avanço de fase

Solução Exemplo 1

6 Assim,

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$$

daqui

$$T = 0,2288 \text{ s.}$$

Então, a F.T. do compensador será:

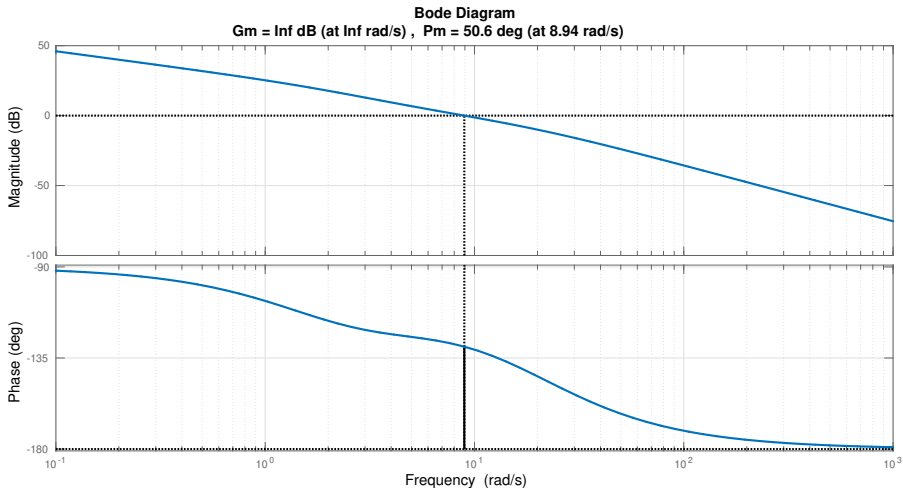
$$KG_c(s) = 10 \frac{1 + 0,2288s}{1 + 0,0544s}$$

Observamos do D.B. do sistema em M.A. a seguir que obtivemos: $MG=\infty$ e $MF=50,6^\circ$.

Compensador por avanço de fase

Solução Exemplo 50

Diagrama de Bode do Sistema Compensado



Compensador por avanço de fase

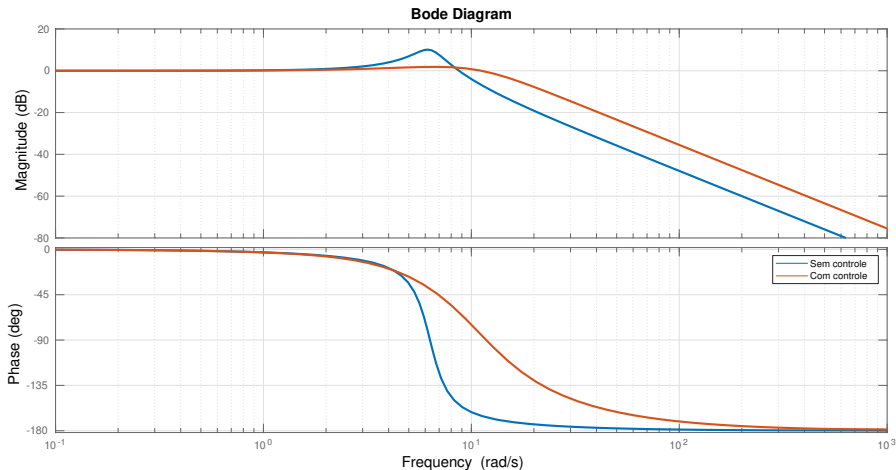
Solução Exemplo 50

- A frequência na qual o ganho vale 0 dB passou de 6,17 para 8,94 rad/s, o que significa que o sistema tem agora maior velocidade de resposta (aumento da banda passante).
- Outro modo de constatar isso é comparando as respostas em frequência em M.F. para o sistema sem o compensador (ou seja, somente com o ajuste de ganho) e com o compensador por avanço de fase (Figura a seguir).
- Percebe-se um aumento na banda passante do sistema. Observa-se ainda que o pico de ressonância do sistema compensado é menor do que o pico do sistema sem o compensador.
- Ainda nota-se que, como o sistema é de fase mínima e as margens de ganho são positivas, então o sistema de M.F. é estável.

Compensador por avanço de fase

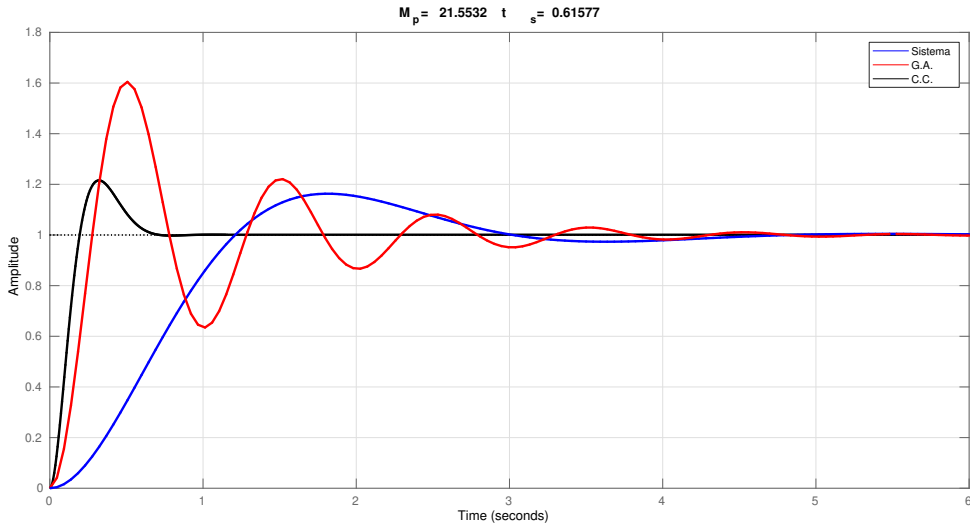
Solução Exemplo 1

D.B. da F.T.M.F. do sistema com ganho ajustado e compensado por avanço.



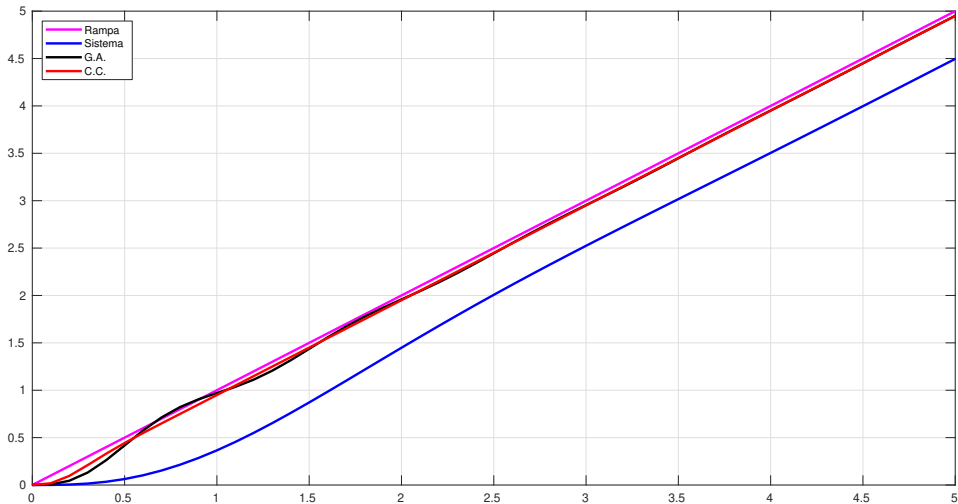
Compensador por avanço de fase

Solução Exemplo 1



Compensador por avanço de fase

Solução Exemplo 1



Compensador por avanço de fase

Solução Exemplo 1

%% Exemplo 1 – Aula 7

```
clc;
clear;
close all;
pkg load control
%% Sistema original
n = 4;
d = [1 2 0];
G = tf(n,d);
%% Sistema compensado por ganho
% Ganho definido pela especificacao de ess:  $K_v = 20s^{-1}$ 
K = 10;
G1 = K*G;
figure
margin(G1);
grid on;
figure
step(feedback(G1,1))
grid on
w = 0:0.01:10;
[mag,fase] = bode(G1,w);
alpha = (1-sind(32))/(1+sind(32));
alphadB = -20*log10(1/sqrt(alpha));
mag = 20*log10(mag);
for i = 1:length(mag)
    if mag(i) >= alphadB
        wm = w(i);
    end
end
```

```
T = 1/(wm*sqrt(alpha));
%% Compensador por avanço de fase sem tolerancia
nc = K*[T 1];
dc = [alpha*T 1];
Gc = tf(nc,dc);
GcG = Gc*G;
figure;
margin(GcG);
grid on;
%% Compensador por avanço de fase com tolerancia de 6 graus
alpha2 = (1-sind(38))/(1+sind(38));
alpha2dB = -20*log10(1/sqrt(alpha2));
for i = 1:length(mag)
    if mag(i) >= alpha2dB
        wm2 = w(i);
    end
end
T2 = 1/(wm2*sqrt(alpha2));
nc2 = K*[T2 1];
dc2 = [alpha2*T2 1];
Gc2 = tf(nc2,dc2);
Gc2G = Gc2*G;
figure;
margin(Gc2G);
grid on;
```

Compensador por avanço de fase

Solução Exemplo 1

%% Diagramas de Bode dos Sistemas em Malha Fechada

```
GMF = feedback(G,1);  
G1MF = feedback(G1,1);  
Gc2GMF = feedback(Gc2G,1);  
figure  
bode(GMF, 'k', G1MF, 'b', Gc2GMF, 'r')  
grid on  
legend('Sistema Original', 'Sistema Ajustado com Ganho', '  
Sistema Compensado')  
hold off
```

%% Respostas ao Degrau dos Sistemas em Malha Fechada

```
figure  
t = 0:0.01:5;  
step(GMF, t, 'k')  
hold on  
step(G1MF, t, 'r')  
hold on  
step(Gc2GMF, t, 'b')  
grid on  
legend('Sistema Original', 'Sistema Ajustado com Ganho', '  
Sistema Compensado')  
hold off
```

%% Respostas a Rampa dos Sistemas em Malha Fechada

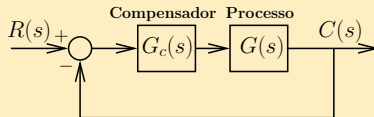
```
t = 0:0.01:3;  
GMFr = tf(4,[1 2 4 0]);  
figure  
plot(t, t, 'k')  
hold on  
step(GMFr, t, 'g')  
G1MFr = tf(40,[1 2 40 0]);  
hold on  
step(G1MFr, t, 'r')  
Gc2GMFr = tf([9.174 40],[0.05456 1.109 11.17 40 0]);  
grid on  
hold on  
step(Gc2GMFr, t, 'b')  
legend('Rampa', 'Sistema Original', 'Sistema Ajustado com Ganho',  
, 'Sistema Compensado')  
hold off
```

Compensador por avanço de fase

Exemplo 2

Consideremos o sistema mostrado na figura a seguir, cuja F.T.M.A. é

$$G(s) = \frac{K}{s(0,1s + 1)(s + 1)}$$



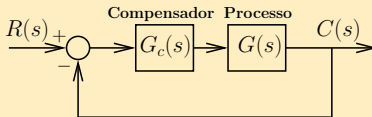
Projete um compensador por avanço de fase $G_c(s)$, de modo que a margem de fase seja 45° , a margem de ganho não seja inferior a 8 dB e a constante de erro estático de velocidade K_v seja de 4 s^{-1} . Trace o gráfico das curvas de resposta ao degrau unitário e à rampa unitária do sistema compensado utilizando o Octave.

Compensador por avanço de fase

Exemplo 3

Seja o sistema mostrado na Figura a seguir, cuja F.T.M.A. é

$$G(s) = \frac{K_1}{s^2}$$



este é um sistema de tipo 2, e parece apresentar um erro estacionário satisfatório tanto para entrada degrau como para entrada rampa.

Compensador por avanço de fase

Contudo, a resposta do sistema não compensado é uma oscilação não amortecida, pois a F.T.M.F. é:

$$T(s) = \frac{C(s)}{G(s)} = \frac{K_1}{s^2 + K_1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

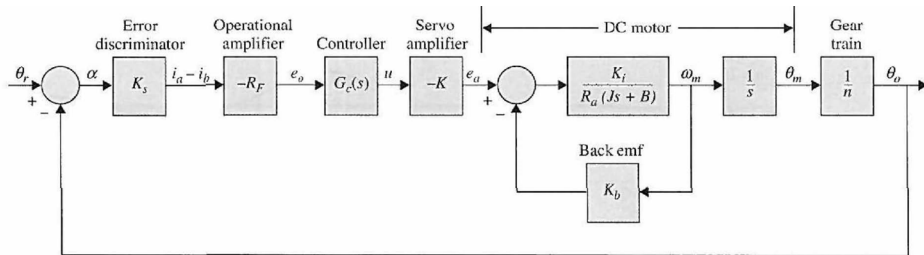
neste caso $\xi = 0$ e a resposta é oscilatória, $\omega_n = \sqrt{K_1}$. As especificações desejadas para o sistema são:

- 1 $t_s(2\%) \leq 4s$
- 2 $\xi \geq 0,45$.

Compensador por avanço de fase

Exercício 1

O diagrama de blocos do sistema de controle do sun-seeker é como mostrado na figura abaixo.



Compensador por avanço de fase

O sistema pode ser montado em um veículo espacial tal que este seguirá o sol com alta precisão. A variável θ_r representa o ângulo de referência dos raios solares, θ_O denota o eixo do veículo.

O objetivo do sistema sun-seeker é manter o erro α entre θ_r e θ_O próximo de zero. Os parâmetros do sistema são:

$R_F = 10K\Omega$	$K_b = 0,0125V/rad/s$	
$K_i = 0,0125N - m/A$	$R_a = 6,25\Omega$	
$J = 10^{-6}kg - m^2$	$K_s = 0,1A/rad$	K será determinado.
$n = 800$	$B = 0$	

A F.T.M.A. do sistema não compensado é

$$G(s) = \frac{\Theta_O(s)}{A(s)} = \frac{K_s R_F K K_i / n}{R_a J s^2 + K_i K_b s}$$

Compensador por avanço de fase

no qual $\Theta_O(s)$ e $A(s)$ são as transformadas de Laplace de $\theta_O(t)$ e $\alpha(t)$, respectivamente. Substituindo os valores numéricos do sistema, obtemos

$$G(s) = \frac{\Theta_O(s)}{A(s)} = \frac{2500K}{s(s + 25)}$$

Especificações do sistema são:

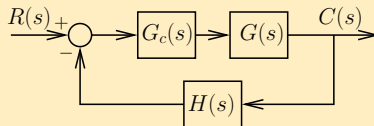
- 1 O erro de estado estacionário de $\alpha(t)$ devido à rampa unitária deverá ser menor que 1%.
- 2 M_p da resposta ao degrau deverá ser menor que 5%.
- 3 Tempo de subida $t_r \leq 0,02$ s.
- 4 Tempo de acomodação $t_s \leq 0,02$ s.

Compensador por avanço de fase

Exercício 2

Um sistema de controle com retroação como mostrado na figura abaixo, possui uma F.T.M.A.

$$GH(s) = \frac{K}{s(s+2)}$$



Deseja-se para uma entrada rampa unitária

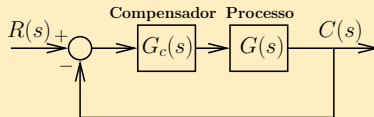
- 1 Um erro de estado estacionário de 5% da magnitude da rampa;
- 2 Uma margem de fase do sistema no mínimo igual a 45° .

Compensador por avanço de fase

Exercício 3

Considere o sistema indicado na figura abaixo, cuja F.T.M.A. é

$$GH(s) = \frac{1}{s^2(s+5)}$$



Projete um compensador por avanço de fase, de modo que o sistema de malha fechada tenha uma margem de fase de 50° e a margem de ganho não seja inferior a 10 dB. É desejável que a banda passante do sistema de malha fechada seja $1 \sim 2$ rad/s. Quais são os valores de M_r e ω_r do sistema compensado?

Compensador por avanço de fase

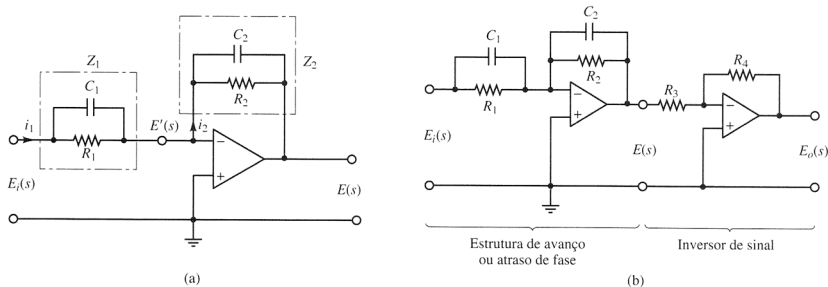


Fig. 5-48 (a) Circuito com amplificador operacional; (b) circuito com amplificador operacional usado como compensador de avanço ou atraso de fase.

Esta estrutura se comporta como avanço de fase se $R_1 C_1 > R_2 C_2$, ou $\alpha < 1$; como atraso de fase se $R_1 C_1 < R_2 C_2$.

Compensador por avanço de fase

Circuito elétrico de avanço

