



**UFABC - Universidade Federal do ABC**

## Sistemas de Controle II

Resposta em Frequência de Malha Fechada de Sistemas com Realimentação

Prof<sup>a</sup> Dra. Heloise Assis Fazzolari

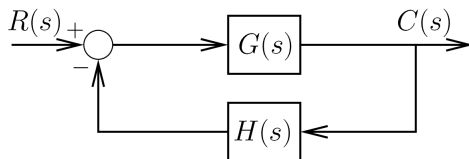
heloise.fazzolari@ufabc.edu.br

Sala 717-1, 7<sup>º</sup> andar, Torre 1, Bloco A - Campus Santo André

3<sup>º</sup> Quadrimestre de 2021

# Especificações no Domínio da Frequência

Consideremos o sistema de controle como mostrado na Figura.



$G(s)$  é a F.T. do sistema e a F.T.M.A. do sistema de controle é

$$G(s)H(s)$$

e a F.T.M.F. é

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

# Especificações no Domínio da Frequência

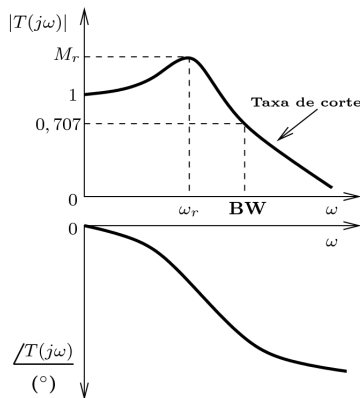
As especificações no domínio da frequência que são utilizadas frequentemente na prática são:

- **O pico de ressonância  $M_r$**  é o valor máximo de  $|T(j\omega)|$ . O pico de ressonância  $M_r$  indica a estabilidade relativa de um sistema em malha fechada estável. Um valor alto de  $M_r$  corresponde a um máximo sobre-sinal alto da resposta ao degrau. Para a maioria dos sistema de controle, é aceitável na prática que o valor desejável de  $M_r$  deve situar-se entre 1,1 e 1,5.
- **A frequência de ressonância  $\omega_r$**  é a frequência na qual ocorre o pico de ressonância  $M_r$ .

- **A banda passante BW** é a frequência na qual o valor de  $|T(j\omega)|$  cai para 70,7%, ou 3 dB abaixo de seu valor correspondente à frequência nula. A BW dá uma indicação da resposta transiente de um sistema de controle. Uma BW alta corresponde a um tempo de subida mais rápido, uma vez que os sinais de frequências mais altas passam mais facilmente pelo sistema. Contrariamente, se a BW é estreita, apenas os sinais de frequência relativamente baixas passarão, e a resposta do domínio do tempo será lenta. A BW dá uma indicação das características de filtragem de sinal e robustez do sistema. A robustez representa uma medida da sensibilidade de um sistema às variações de seus parâmetros. Um sistema robusto é aquele insensível a variações de parâmetros.

# Especificações no Domínio da Frequência

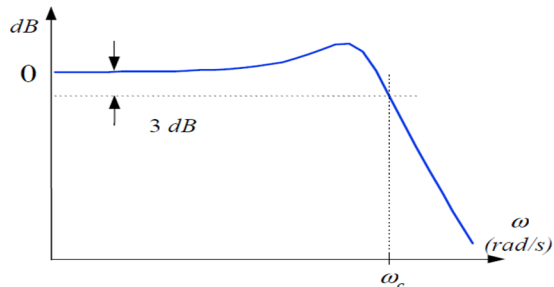
- **Taxa de corte.** A BW isolada é inadequada para indicar a habilidade de um sistema em distinguir os sinais de ruído. Em alguns casos pode ser necessário analisar a inclinação de  $|T(j\omega)|$ , a qual é denominada taxa de corte da resposta em frequência, em altas frequências.



# Especificações no Domínio da Frequência

## Frequência de Corte e Largura de Banda

A **banda passante BW** é conhecida também como a **largura de banda**. A frequência de corte  $\omega_c$  é definida como sendo aquela a partir da qual o ganho cai abaixo de 3 dB com relação ao ganho de baixas frequências. Desse modo, o sistema em malha fechada atenua com um fator maior ou igual a 0,707 as componentes dos sinais com frequências superiores a  $\omega_c$ .

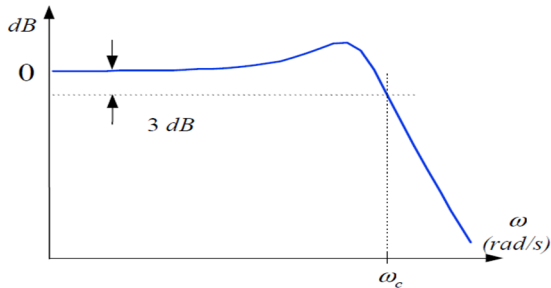


# Especificações no Domínio da Frequência

## Frequência de Corte e Largura de Banda

A região de frequências  $0 \leq \omega \leq \omega_c$  é denominada **largura de banda** (ou **banda passante**), que corresponde às componentes dos sinais que são transmitidas da entrada para a saída do sistema.

Assim, quanto maior for a largura de banda, maiores serão as frequências dos sinais transmitidos através do sistema. Consequentemente, maior será a velocidade de resposta do sistema.







# Especificações no Domínio da Frequência

Correlação entre a resposta transitória ao degrau e a resposta em frequência no sistema padrão de segunda ordem

A resposta do sistema a uma entrada degrau unitária é

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t) \right), \quad t \geq 0$$

no qual

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}.$$

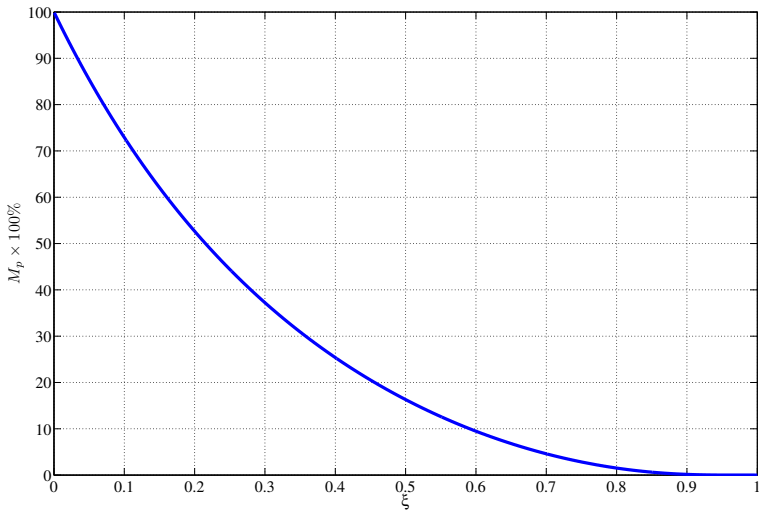
O máximo sobre-sinal  $M_p$  da resposta ao degrau unitário

$$M_p = e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi}$$

$M_p$  ocorre na resposta transitória que tem a frequência natural amortecida  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ .  
 $M_p$  excessivo para  $\zeta < 0,4$ .

# Especificações no Domínio da Frequência

Correlação entre a resposta transitória ao degrau e a resposta em frequência no sistema padrão de segunda ordem



# Especificações no Domínio da Frequência

Consideremos a F.T.M.F. do sistema básico de segunda ordem

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1)$$

No regime estacionário senoidal,  $s = j\omega$ , a equação (1) fica

$$\begin{aligned} T(j\omega) &= \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \\ &= \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)} = Me^{j\phi} \end{aligned} \quad (2)$$

onde

$$M = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right)^2}}, \quad \phi = -\tan^{-1}\left(\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)$$

# Especificações no Domínio da Frequência

A frequência de ressonância é dada por

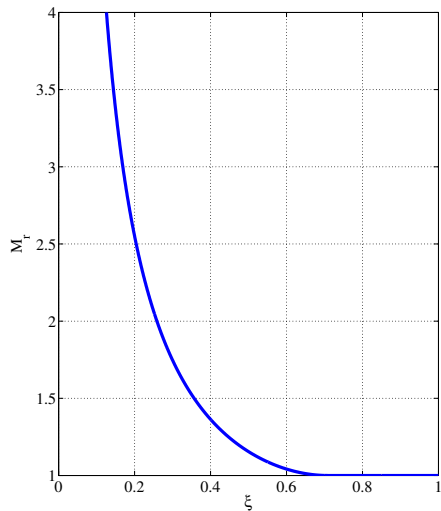
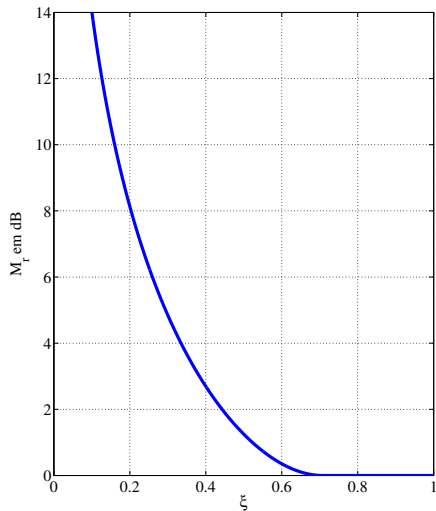
$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}, \quad \xi < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$

Como a frequência é uma grandeza real, a equação (3) somente terá significado para  $2\xi^2 \leq 1$ . Esta condição significa simplesmente que, para todos os valores de  $\xi$  maiores do que  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , a frequência de ressonância é  $\omega_r = 0$  e  $M_r = 1$ . A amplitude do pico de ressonância é dada por

$$M_r = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}, \quad \xi < \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707 \quad (4)$$

- $M_r$  grande, implica em um par de polos dominantes de M.F. com  $\xi$  pequeno, produz uma resposta transitória indesejada;
- $M_r$  pequeno, implica na ausência de um par de polos dominantes de M.F. com  $\xi$  pequeno, i.e., o sistema é bem amortecido.

# Especificações no Domínio da Frequência



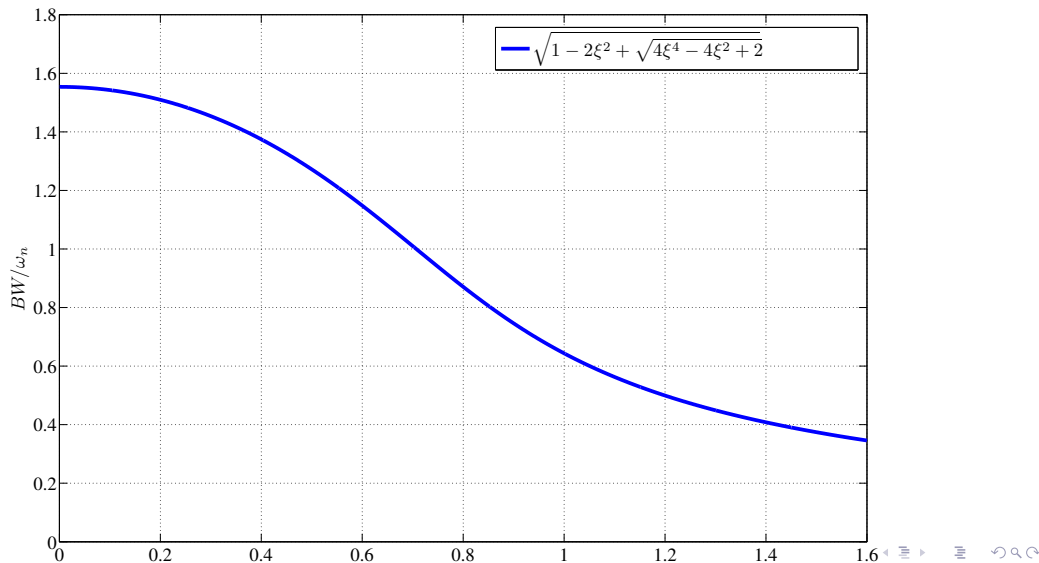
# Especificações no Domínio da Frequência

De acordo com a definição de banda passante, iguala-se o valor de  $|T(j\omega)|$  a  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . A banda passante do sistema básico de segunda ordem é determinada como

$$BW = \omega_c = \omega_n \sqrt{(1 - 2\xi^2) + \sqrt{4\xi^4 - 4\xi^2 + 2}} \quad (5)$$

Da Figura a seguir observamos que, quando  $\xi$  aumenta,  $BW/\omega_n$  diminui monotonicamente. Mesmo assim, a equação (5) mostra que a BW é diretamente proporcional a  $\omega_n$ .

# Especificações no Domínio da Frequência

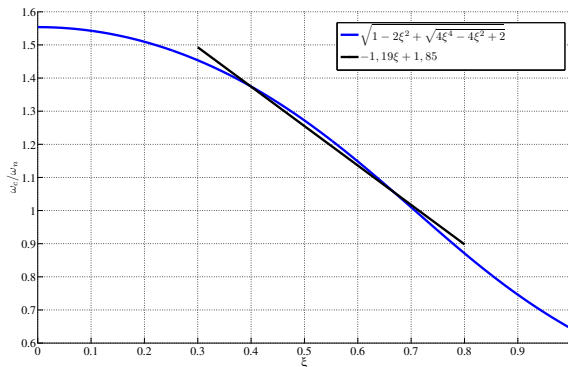


# Especificações no Domínio da Frequência

## Frequência de Corte e Largura de Banda

Defina-se  $\omega_c/\omega_n$  como a largura de banda normalizada em função da taxa de amortecimento  $\xi$ . No intervalo  $0,3 \leq \xi \leq 0,8$  vale a seguinte aproximação linear, útil para fins de projeto:

$$\frac{\omega_c}{\omega_n} \cong -1,19\xi + 1,85.$$





# Especificações no Domínio da Frequência

## Frequência de Corte e Largura de Banda

A especificação da largura de banda é determinada pelos seguintes fatores:

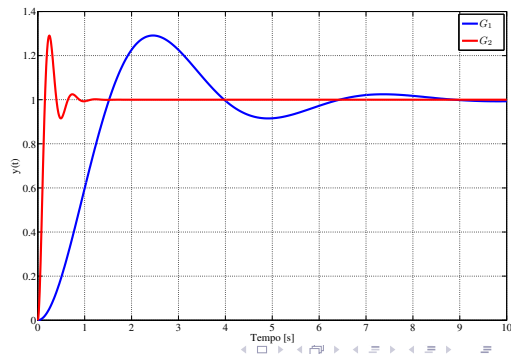
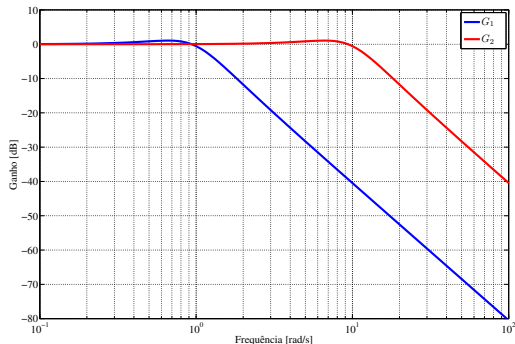
- Fidelidade de reprodução dos sinais de entrada pela saída;
- Características de filtragem requeridas para o ruído de alta frequência.

Por um lado, para que a saída do sistema siga com precisão entradas que variam rapidamente, é preciso que a largura de banda seja grande. Do ponto de vista de amplificação de ruídos, porém, é necessário que a largura de banda não seja excessivamente grande.

# Especificações no Domínio da Frequência

## Frequência de Corte e Largura de Banda

Para ilustrar, sejam dois sistemas com F.T.  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$ ; a frequência de corte de  $G_1(s)$  é aproximadamente 1,2 rad/s, enquanto que a de  $G_2(s)$  está em torno de 12 rad/s. Isso significa que  $G_2(s)$  responde mais rápido do que  $G_1(s)$ . Para comprovar, vejamos os gráficos das respostas ao degrau dos dois sistemas.



# Especificações no Domínio da Frequência

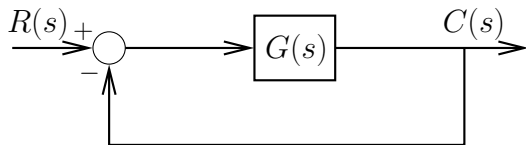
Foram estabelecidas algumas relações simples entre a resposta no domínio do tempo e as características no domínio da frequência do sistema básico de segunda ordem.

- O pico de ressonância  $M_r$  da resposta em frequência do sistema em malha fechada depende apenas de  $\xi$  [Equação (4)]. Quando  $\xi$  é igual a zero, o valor de  $M_r$  é infinito. Quando  $\xi$  é negativo, o sistema é instável, e o valor de  $M_r$  passa a ser desprovido de significado. Quando  $\xi$  aumenta,  $M_r$  diminui.
- Para  $\xi > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $M_r = 1$  e  $\omega_r = 0$ . Em comparação com a resposta no domínio do tempo ao degrau unitário, o máximo sobre-sinal também depende apenas de  $\xi$ . Entretanto, o máximo sobre-sinal é igual a zero quando  $\xi \geq 1$ .

- A banda passante BW é diretamente proporcional a  $\omega_n$  [Equação (5)]; isto é, a BW aumenta e diminui linearmente com  $\omega_n$ . A BW também diminui com o aumento de  $\xi$  para um  $\omega_n$  fixo. Para a resposta ao degrau unitário, o tempo de subida aumenta quando  $\omega_n$  diminui. Portanto, a BW e o tempo de subida são inversamente proporcionais entre si.
- A banda passante e  $M_r$  são proporcionais entre si para  $0 \leq \xi \leq 0,707$ .

# Resposta em frequência de M.F. de sistema com realimentação unitária

Para um sistema estável, de M.F., com realimentação unitária, a resposta em frequência de M.F. pode ser obtida da resposta em frequência de M.A. Para o sistema



A F.T.M.F. é

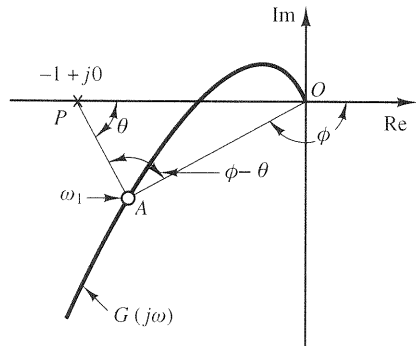
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

# Resposta em frequência de M.F. de sistema com realimentação unitária

No diagrama de Nyquist mostrado ao lado, o vetor  $\vec{OA}$  representa  $G(j\omega_1)$ ,  $\omega_1$  é a freq. em A. O comprimento de  $\vec{OA}$  é  $|G(j\omega_1)|$  e o ângulo de  $\vec{OA}$  é  $\angle G(j\omega_1)$ . O vetor  $\vec{PA}$  com início no ponto  $-1 + j0$  e extremidade no L.G. de Nyquits, representa  $1 + G(j\omega_1)$ .

Portanto, a relação de  $\vec{OA}$  e  $\vec{PA}$  representa a resp. em freq. de M.F. ou

$$\frac{\vec{OA}}{\vec{PA}} = \frac{G(j\omega_1)}{1 + G(j\omega_1)} = \frac{C(j\omega_1)}{R(j\omega_1)}$$



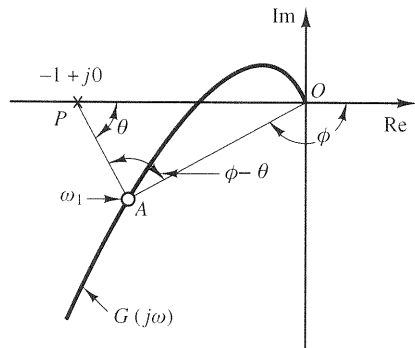
# Resposta em frequência de M.F. de sistema com realimentação unitária

O módulo da F.T. de M.F. em  $\omega = \omega_1$  é a relação entre os módulos  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{PA}$ . O ângulo de fase da F.T. em  $\omega = \omega_1$  é o ângulo formado pelos vetores  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{PA}$ , que é  $\phi - \theta$ , da Figura.

Definamos o módulo da resp. em freq. de M.F. como  $M$  e o ângulo de fase como  $\alpha$  ou

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = M e^{i\alpha}$$

Os L.Gs. de módulo constante e os L.Gs. de ângulo de fase constante são convenientes para determinar a resp. em freq. de M.F., a partir do diagrama polar ou do diagrama de Nyquist.



## Lugares geométricos de módulo constante (circunferências $M$ )

$$G(j\omega) = X + jY$$

$X$  e  $Y$  são grandezas reais. Então,

$$M = \frac{|X + jY|}{|1 + X + jY|}$$

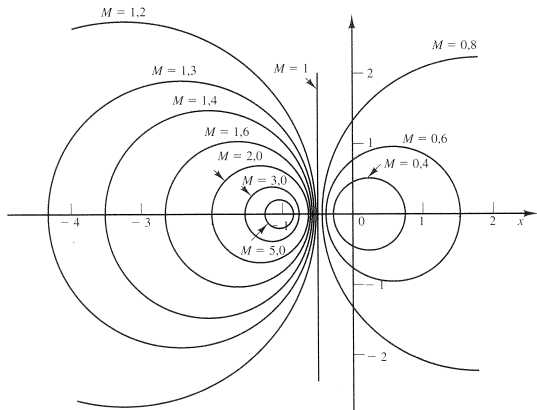
e

$$M^2 = \frac{X^2 + Y^2}{(1 + X)^2 + Y^2}$$

Manipulando obteremos

$$\left(X + \frac{M^2}{M^2 - 1}\right)^2 + Y^2 = \frac{M^2}{(M^2 - 1)^2}$$

equação de uma circunferência com centro  $X = -M^2/(M^2 - 1)$ ,  $Y = 0$  e raio  $|M/(M^2 - 1)|$





# Lugares geométricos de ângulo constante (circunferências $N$ )

O ângulo de fase  $\alpha$  em termos de  $X$  e  $Y$

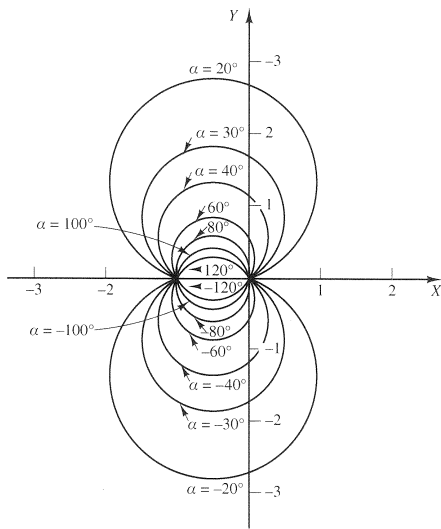
$$\angle e^{j\alpha} = \angle \frac{X + jY}{1 + X + jY}$$

o ângulo de fase  $\alpha$  é

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{Y}{1 + X}\right)$$

definamos

$$\tan(\alpha) = N$$



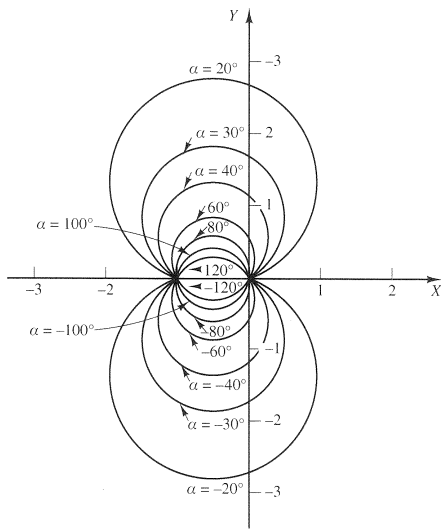
# Lugares geométricos de ângulo constante (circunferências $N$ )

Manipulando

$$\left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2N}\right)^2$$

equação de uma circunferência de centro  $X = -\frac{1}{2}$ ,  $Y = 1/(2N)$  e de raio

$$\sqrt{\frac{1}{4} + 1/(2N)^2}.$$

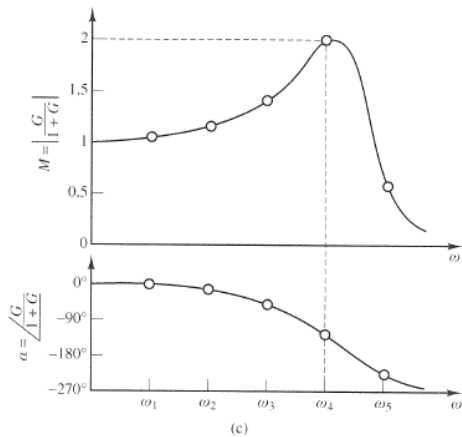
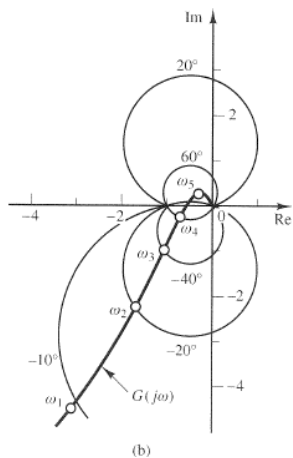
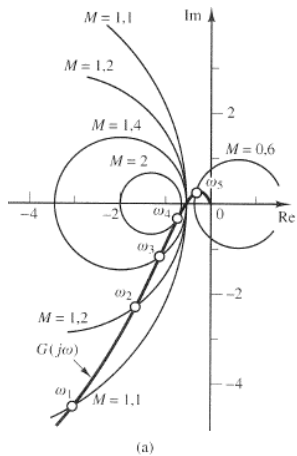


# Lugares geométricos de módulo e ângulo constante

O uso das circunferências  $M$  e  $N$  possibilita determinar toda a resposta em frequência de M.F. a partir da resposta em frequência de M.A.  $G(j\omega)$  sem calcular o módulo nem a fase da F.T. de M.F. para cada frequência.

Graficamente:

- $G(j\omega) \cap$  Circunferência  $M$  fornece os valores de  $M$  nas frequências indicadas no L.G. de  $G(j\omega)$ .
- Circunferência  $M$  com menor raio tangente a  $G(j\omega)$  fornece o valor da amplitude do pico de ressonância  $M_r$ .

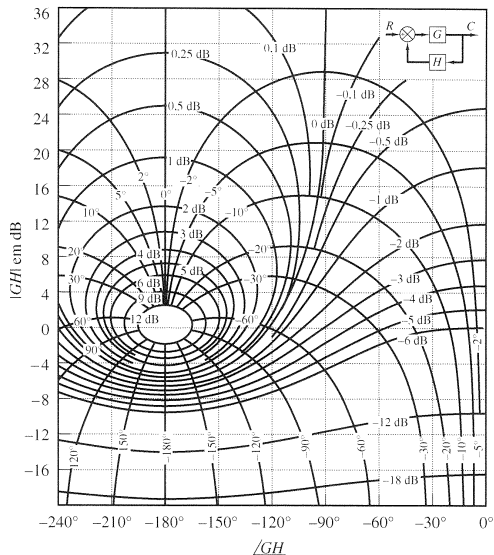


# Lugares geométricos de módulo e ângulo constante

- Assim, a cada ponto do plano complexo, é possível associar um número complexo que representa a resposta em frequência em M.F. correspondente.
- Isso pode ser feito sobre o plano Ganho (dB)  $\times$  Fase (graus) – a cada ponto deste plano pode-se associar um número complexo que representa a resposta em frequência correspondente em M.F.
- Unindo os pontos calculados de ganho constante, têm-se curvas de nível de ganho. Do mesmo modo, podem-se traçar as curvas de fase constante.
- O diagrama assim construído é chamado Cartas de Nichols.
- Então, conhecendo-se a resposta em frequência em M.A. de um sistema com realimentação unitária, a carta de Nichols permite determinar a resposta em frequência em M.F.
- Hoje em dia, o valor da carta de Nichols está na orientação do projetista sobre o tipo de compensador a utilizar num problema de projeto de modo a satisfazer especificações do sistema em M.F. dadas no domínio da frequência.

- O gráfico que representa os lugares geométricos de  $M$  e  $N$  no diagrama de módulo em dB *versus* fase é denominado a carta de Nichols. O lugar geométrico de  $G(j\omega)$  traçado na carta de Nichols fornece, ao mesmo tempo, tanto as características de ganho como as características de fase da FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE MALHA FECHADA.
- Note que o ponto crítico  $(-1 + j0)$  é mapeado na carta de Nichols como o ponto  $(0\text{dB}, -180^\circ)$ . A carta de Nichols contém curvas de módulo constante e ângulo de fase constante de MALHA FECHADA.
- Pode-se determinar graficamente a margem de fase, a margem de ganho, a amplitude de pico de ressonância, a frequência de ressonância e a banda passante do sistema de MALHA FECHADA a partir do lugar geométrico de malha aberta de  $G(j\omega)$ .

# Cartas de Nichols



A carta de Nichols é útil para a determinação da resposta em frequência de M.F. a partir da resposta em frequência em M.A. Se a curva de resposta em frequência de M.A. for superposta à carta de Nichols, as intersecções dessa curva de resposta em frequência de M.A.  $G(j\omega)$  com os lugares geométricos de  $M$  e  $N$  fornecerão os valores de módulo  $M$  e do ângulo de fase  $\alpha$  da resposta em frequência de M.F. para a frequência correspondente a cada ponto de intersecção. Se o lugar geométrico  $G(j\omega)$  não cruza o L.G. de  $M = M_r$ , mas for tangente a ele, então o valor do pico de ressonância de  $M$  da resp. em freq. de M.F. será dada por  $M_r$ . A frequência de ressonância é dada pela frequência no ponto de tangência.



NAS CARTAS DE NICHOLS AS LINHAS RETAS  
HORIZONTALAIS E VERTICAIS SÃO PARA  
MALHA ABERTA.

CURVAS NA CARTA DE NICHOLS SÃO PARA  
MALHA FECHADA.

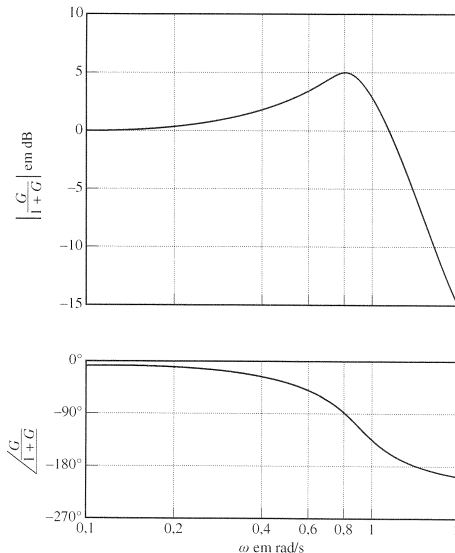
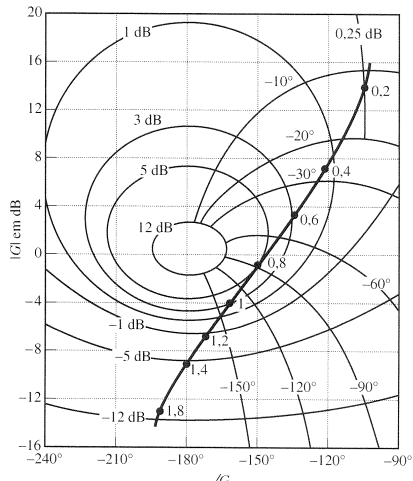
## Exemplo

Considere o sistema com realimentação unitária que possui a seguinte F.T. de M.A.:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0,5s+1)}, \quad K = 1.$$

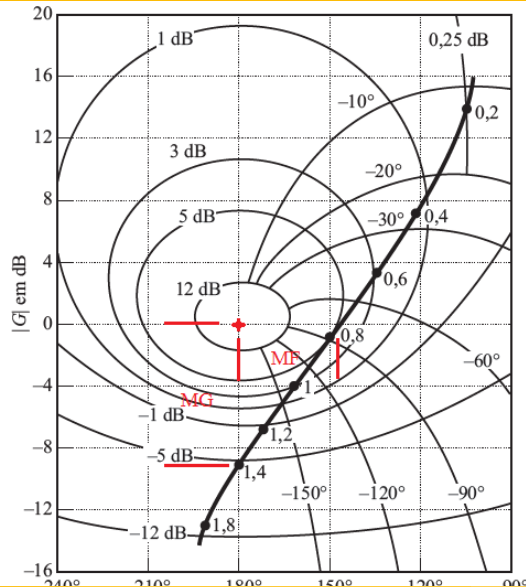
# Cartas de Nichols

Gráfico de  $G(j\omega)$  e curvas da resposta em frequência de malha fechada



- Primeiro, constrói-se o lugar geométrico de  $G(j\omega)$  no plano do módulo em dB versus ângulo de fase.
- A curva de resposta em frequência de malha fechada pode ser construída pela leitura dos módulos e dos ângulos de fase para as frequências de vários pontos sobre o lugar geométrico de  $G(j\omega)$  com o auxílio dos lugares geométricos de  $M$  e  $N$ .
- Como o contorno de maior valor tocado por  $G(j\omega)$  é o de  $5dB$ , a amplitude do pico de ressonância  $M_r$  é de  $5dB$ . A frequência correspondente de ressonância é  $0,8rad/s$ .
- O ponto de cruzamento de fase é o ponto onde o lugar geométrico de  $G(j\omega)$  cruza o eixo de  $-180^\circ$  ( $\omega = 1,4rad/s$ ) e o ponto do cruzamento de ganho é o ponto onde a curva cruza o eixo de  $0dB$  ( $\omega = 0,76rad/s$ ).
- A MF é a distância horizontal (em graus) entre o ponto do cruzamento de ganho e o ponto crítico ( $0dB, -180^\circ$ ). A MG é a distância (em decibéis) entre o ponto da fase de cruzamento e o ponto crítico.

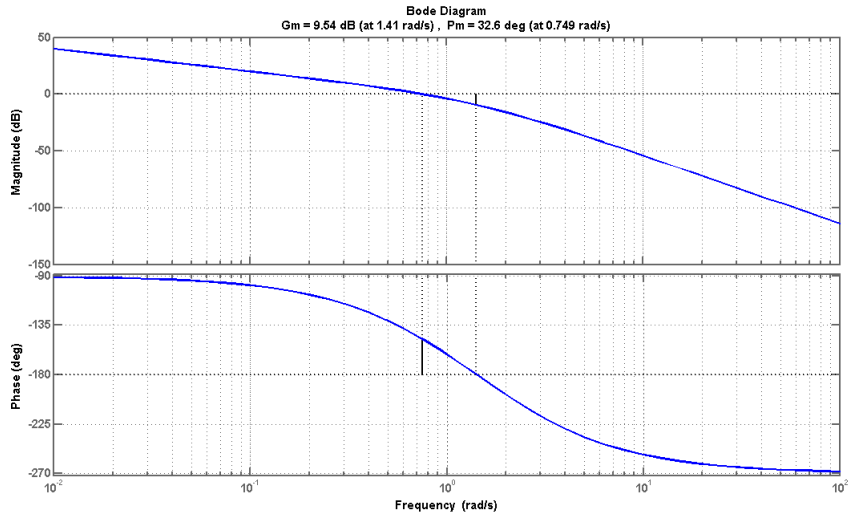
# Cartas de Nichols



- A frequência na intersecção do lugar geométrico de  $G(j\omega)$  com o lugar geométrico de  $M = -3dB$  indica a banda passante.
- Se o ganho de malha aberta  $K$  variar, a forma do lugar geométrico de  $G(j\omega)$  no diagrama de módulo em dB versus fase permanecerá a mesma, mas será deslocada para cima (se  $K$  aumentar) ou para baixo (se  $K$  diminuir) ao longo do eixo vertical. Portanto, o lugar geométrico de  $G(j\omega)$  cruza os lugares geométricos de  $M$  e  $N$  diferentemente, resultando em diferentes curvas de resposta em frequência de malha fechada. Para um pequeno valor do ganho  $K$ , o lugar geométrico de  $G(j\omega)$  não tangencia nenhum lugar geométrico  $M$ , o que significa que não há ressonância na resposta em frequência de malha fechada.

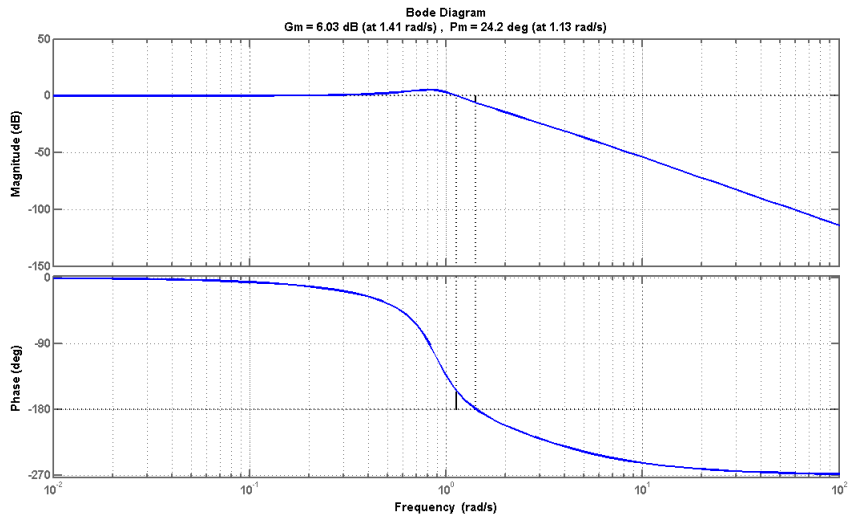
# Cartas de Nichols

Malha aberta



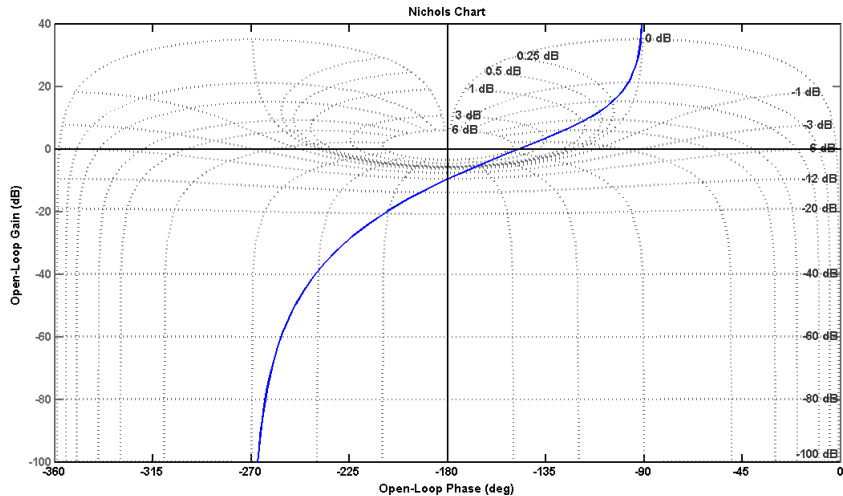
# Cartas de Nichols

Malha fechada





# Cartas de Nichols



## Exemplo

Considere o sistema de controle com realimentação unitária, cuja função de transferência de malha aberta é:

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + j\omega)}$$

Determine o valor de  $K$  tal que  $M_r = 1,4$ .

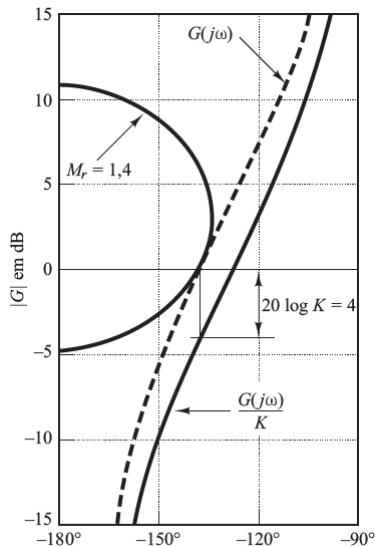
## Exemplo

Considere o sistema de controle com realimentação unitária, cuja função de transferência de malha aberta é:

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + j\omega)}$$

Determine o valor de  $K$  tal que  $M_r = 1,4$ .

Solução: O primeiro passo é esboçar o diagrama polar de  $\frac{G(j\omega)}{K}$ . A mudança de ganho não afeta o ângulo de fase, mas apenas move a curva verticalmente para cima, para  $K > 1$ , e para baixo, para  $K < 1$ .



A figura mostra o lugar geométrico  $M_r = 1,4$  e o lugar geométrico de  $G(j\omega)/K$ . Na figura, o lugar geométrico de  $G(j\omega)/K$  deve aumentar em  $4\text{dB}$ , de modo que ele seja tangente ao lugar geométrico de  $M_r$  desejado e que todo o lugar geométrico de  $G(j\omega)/K$  seja externo ao lugar geométrico de  $M_r = 1,4$ . O valor do deslocamento vertical do lugar geométrico de  $G(j\omega)/K$  determina o ganho necessário para conseguir o valor desejado de  $M_r$ . Assim, resolvendo a equação:  $20\log K = 4$ , obtemos  $K = 1,59$ .

# Estabilidade de Sistemas de Controle com Atraso

Muitos sistemas de controle apresentam atrasos de tempo em seus modelos, os quais afetam a estabilidade desse sistema.

# Estabilidade de Sistemas de Controle com Atraso

Muitos sistemas de controle apresentam atrasos de tempo em seus modelos, os quais afetam a estabilidade desse sistema.

Um atraso de tempo é um intervalo de tempo entre o início de um evento num certo ponto do sistema e a sua ação resultante em outro ponto do sistema.

# Estabilidade de Sistemas de Controle com Atraso

Muitos sistemas de controle apresentam atrasos de tempo em seus modelos, os quais afetam a estabilidade desse sistema.

Um atraso de tempo é um intervalo de tempo entre o início de um evento num certo ponto do sistema e a sua ação resultante em outro ponto do sistema.

O critério de Nyquist pode ser utilizado para estudar a estabilidade de sistemas com atrasos. Um atraso de tempo puro, sem atenuação, é representado pela seguinte F.T.:

$$G_d(s) = e^{-sT}$$

onde  $T$  é o atraso de tempo.

# Estabilidade de Sistemas de Controle com Atraso

Muitos sistemas de controle apresentam atrasos de tempo em seus modelos, os quais afetam a estabilidade desse sistema.

Um atraso de tempo é um intervalo de tempo entre o início de um evento num certo ponto do sistema e a sua ação resultante em outro ponto do sistema.

O critério de Nyquist pode ser utilizado para estudar a estabilidade de sistemas com atrasos. Um atraso de tempo puro, sem atenuação, é representado pela seguinte F.T.:

$$G_d(s) = e^{-sT}$$

onde  $T$  é o atraso de tempo.

O critério de Nyquist permanece válido para sistemas com atraso, pois o fator  $e^{-sT}$  não introduz nenhum polo ou zero adicionais no interior do contorno. Esse fator ocasiona um deslocamento de fase na resposta em frequência, sem alterar a curva de magnitude.



# Estabilidade de Sistemas de Controle com Atraso

O atraso pode ocorrer, por exemplo, em sistemas que envolvem um movimento de material que requer um tempo para passar de uma entrada (ou ponto de controle) para uma saída (ou ponto de medição).

# Estabilidade de Sistemas de Controle com Atraso

O atraso pode ocorrer, por exemplo, em sistemas que envolvem um movimento de material que requer um tempo para passar de uma entrada (ou ponto de controle) para uma saída (ou ponto de medição).

Num sistema cuja F.T.M.A. é dada por  $G(s)$ , teremos que a F.T. resultante após a inclusão do atraso será:

$$G(s)e^{-sT}$$

# Estabilidade de Sistemas de Controle com Atraso

O atraso pode ocorrer, por exemplo, em sistemas que envolvem um movimento de material que requer um tempo para passar de uma entrada (ou ponto de controle) para uma saída (ou ponto de medição).

Num sistema cuja F.T.M.A. é dada por  $G(s)$ , teremos que a F.T. resultante após a inclusão do atraso será:

$$G(s)e^{-sT}$$

A resposta em frequência desse sistema será:

$$G(j\omega)e^{-j\omega T}$$

# Estabilidade de Sistemas de Controle com Atraso

O atraso pode ocorrer, por exemplo, em sistemas que envolvem um movimento de material que requer um tempo para passar de uma entrada (ou ponto de controle) para uma saída (ou ponto de medição).

Num sistema cuja F.T.M.A. é dada por  $G(s)$ , teremos que a F.T. resultante após a inclusão do atraso será:

$$G(s)e^{-sT}$$

A resposta em frequência desse sistema será:

$$G(j\omega)e^{-j\omega T}$$

Pode-se então plotar o diagrama de Nyquist da função acima e analisar sua estabilidade. Além disso, pode-se também traçar as curvas de Bode incluindo o atraso de tempo e determinar as margens de estabilidade do sistema.

O fator de atraso resulta num deslocamento de fase de

$$\phi(\omega) = -\omega T$$

O fator de atraso resulta num deslocamento de fase de

$$\phi(\omega) = -\omega T$$

Esse deslocamento deve ser adicionado ao diagrama de fase de  $G(j\omega)$ . O ângulo acima é dado em radianos.

# Estabilidade de Sistemas de Controle com Atraso

O fator de atraso resulta num deslocamento de fase de

$$\phi(\omega) = -\omega T$$

Esse deslocamento deve ser adicionado ao diagrama de fase de  $G(j\omega)$ . O ângulo acima é dado em radianos.

Um atraso de tempo num sistema de controle com realimentação introduz um atraso de fase adicional, resultando num sistema menos estável. Como os atrasos aparecem em muitos sistemas reais, é necessário que o ganho de malha seja reduzido para que tenhamos uma resposta estável.

O fator de atraso resulta num deslocamento de fase de

$$\phi(\omega) = -\omega T$$

Esse deslocamento deve ser adicionado ao diagrama de fase de  $G(j\omega)$ . O ângulo acima é dado em radianos.

Um atraso de tempo num sistema de controle com realimentação introduz um atraso de fase adicional, resultando num sistema menos estável. Como os atrasos aparecem em muitos sistemas reais, é necessário que o ganho de malha seja reduzido para que tenhamos uma resposta estável.

Em contrapartida, essa redução de ganho ocasiona um aumento no erro estacionário.



## Exercício 1

Obtenha a resposta em frequência em malha fechada de um sistema com realimentação unitária em que  $G(s) = 50/[s(s + 3)(s + 6)]$ , utilizando os círculos de  $M$  constante, os círculos de  $N$  constante e a curva polar da resposta em frequência em malha aberta.

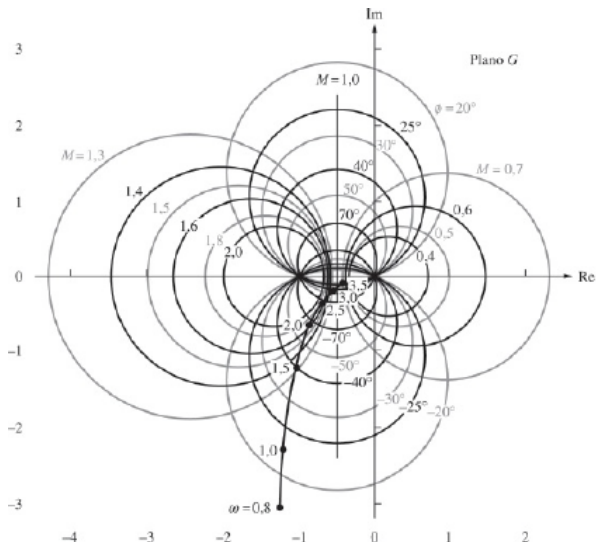
## Exercício 1

Obtenha a resposta em frequência em malha fechada de um sistema com realimentação unitária em que  $G(s) = 50/[s(s + 3)(s + 6)]$ , utilizando os círculos de  $M$  constante, os círculos de  $N$  constante e a curva polar da resposta em frequência em malha aberta.

Solução: Primeiro obtenha a função de frequência em malha aberta e construa um diagrama polar da resposta em frequência sobreposto aos círculos de  $M$  e  $N$  constante. A função de frequência em malha aberta é  $G(j\omega) = \frac{50}{-9\omega^2 + j(18\omega - \omega^3)}$ . A magnitude,  $|G(j\omega)|$ , e a fase,  $\angle G(j\omega)$ , podem ser determinadas e representadas graficamente.

# Exercícios

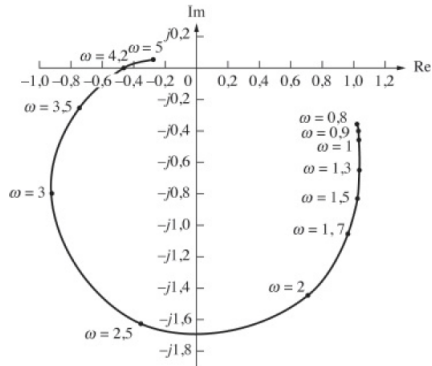
## Exercício 1



# Exercícios

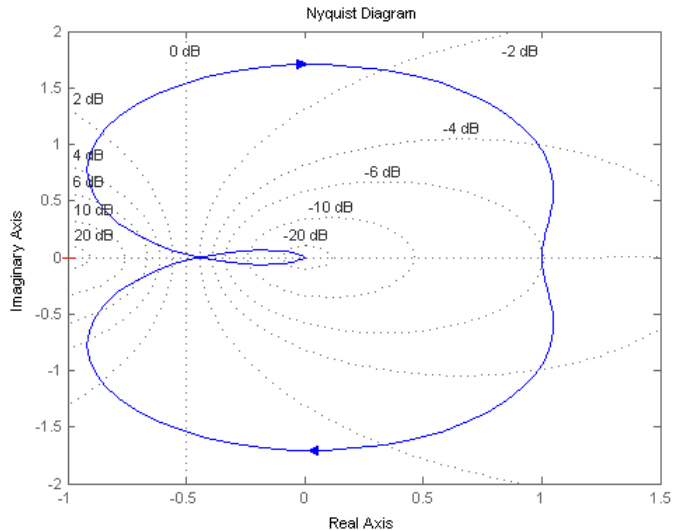
## Exercício 1

A magnitude da resposta em frequência em malha fechada pode agora ser obtida determinando-se a interseção de cada ponto do diagrama de Nyquist com os círculos M, enquanto a fase da resposta em malha fechada pode ser obtida determinando-se a interseção de cada ponto do diagrama de Nyquist com os círculos N.



# Exercícios

## Exercício 1



## Exercício 2

Dado o sistema com realimentação unitária, em que  $G(s) = \frac{8000}{(s+5)(s+20)(s+50)}$  represente graficamente os diagramas de logaritmo da magnitude e de fase da resposta em frequência em malha fechada utilizando os seguintes métodos:

- Círculos M e N;
- Carta de Nichols;

## Exercício 2

Dado o sistema com realimentação unitária, em que  $G(s) = \frac{8000}{(s+5)(s+20)(s+50)}$  represente graficamente os diagramas de logaritmo da magnitude e de fase da resposta em frequência em malha fechada utilizando os seguintes métodos:

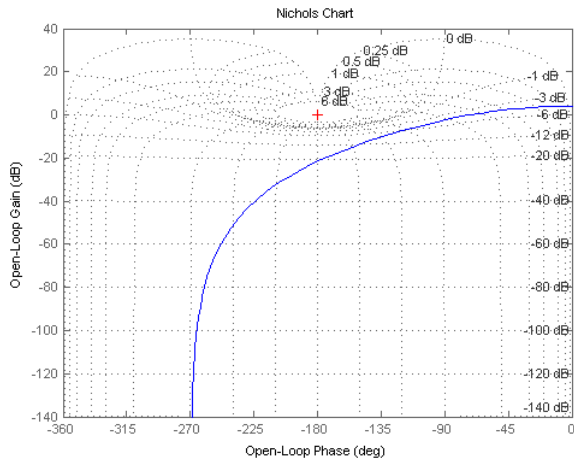
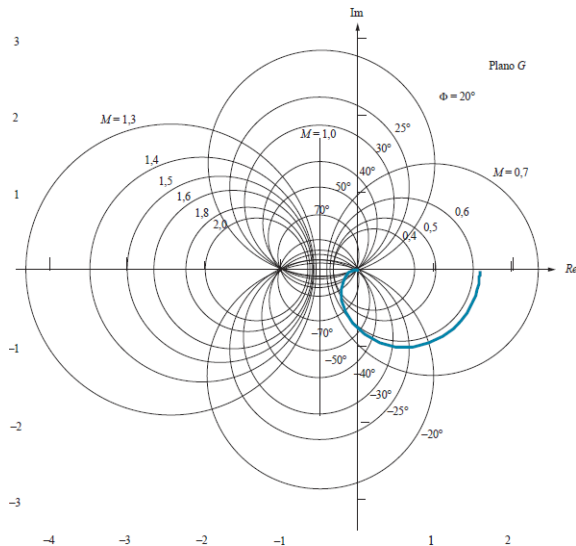
- Círculos M e N;
- Carta de Nichols;

Solução: Inicialmente, obtém-se  $G(j\omega) = \frac{160}{27} \times \frac{(6.750.000 - 101.250\omega^2) + j1350(\omega^2 - 1350)\omega}{\omega^6 + 2.925\omega^4 + 1.072.500\omega^2 + 25.000.000}$ .

Para a faixa de valores de  $\omega$ , superpomos  $G(j\omega)$  aos círculos M e N (primeiro item) e à carta de Nichols (segundo item).

# Exercícios

## Exercício 2





## Exercício 3

Determine o fator de amortecimento e a ultrapassagem percentual esperados para o sistema do Exercício 1, utilizando a resposta em frequência em malha aberta e os círculos M.

## Exercício 3

Determine o fator de amortecimento e a ultrapassagem percentual esperados para o sistema do Exercício 1, utilizando a resposta em frequência em malha aberta e os círculos M.

Solução: A equação  $M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$  mostra que existe uma relação única entre o fator de amortecimento do sistema em malha fechada e o valor de pico de ressonância,  $M_r$ , do diagrama de magnitude em frequência do sistema em malha fechada. Voltando na figura dos círculos M e N do Exercício 1, vemos que o diagrama de Nyquist é tangente ao círculo M de 1,8. Verificamos que este é o valor máximo para a resposta em frequência em malha fechada. Portanto,  $M_r = 1,8$ . Podemos resolver para  $\xi$ :  $\xi^4 - \xi^2 + (1/4M_r^2) = 0$ .

Como  $M_r = 1,8$ , então  $\xi = 0,29$  e  $0,96$ .

Como  $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$ , um fator de amortecimento maior que  $0,707$  resulta na inexistência de um pico acima da frequência zero. Dessa forma, escolhemos  $\xi = 0,29$ , que é equivalente a  $38,6\%$  de ultrapassagem.

## Exercício 3

Determine o fator de amortecimento e a ultrapassagem percentual esperados para o sistema do Exercício 1, utilizando a resposta em frequência em malha aberta e os círculos M.

Solução: Deve-se tomar cuidado para termos certeza de que podemos fazer uma aproximação de segunda ordem ao associar o valor de ultrapassagem percentual com o valor de  $\xi$ . Uma simulação computacional da resposta ao degrau mostra 35,6182% de ultrapassagem.

## Exercício 4

Para cada sistema em malha fechada com as características de desempenho a seguir, obtenha a faixa de passagem em malha fechada:

- $\xi = 0,2$  w  $t_s = 3s$
- $\xi = 0,2$  w  $t_p = 3s$
- $t_s = 4s$  w  $t_p = 2s$

## Exercício 5

Considere um sistema com realimentação unitária. Para cada  $G(s)$  a seguir, utilize os círculos M e N para construir um diagrama de resposta em frequência em malha fechada:

a  $G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+2)}$

b  $\frac{1000}{(s+3)(s+4)(s+5)(s+6)}$

c  $\frac{50(s+3)}{s(s+2)(s+4)}$

# Exercícios

## Exercício 5

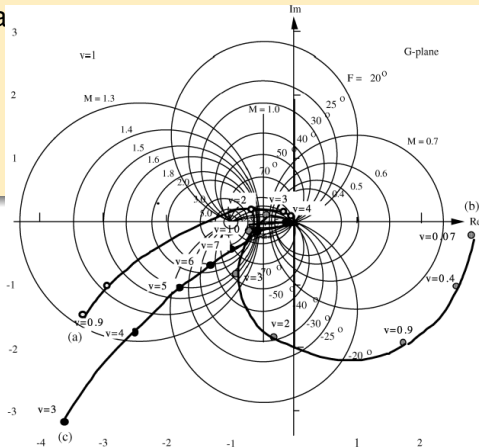
Considere um sistema com realimentação unitária. Para cada  $G(s)$  a seguir, utilize os círculos M e N para construir um diagrama fechada:

a  $G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+2)}$

b  $\frac{1000}{(s+3)(s+4)(s+5)(s+6)}$

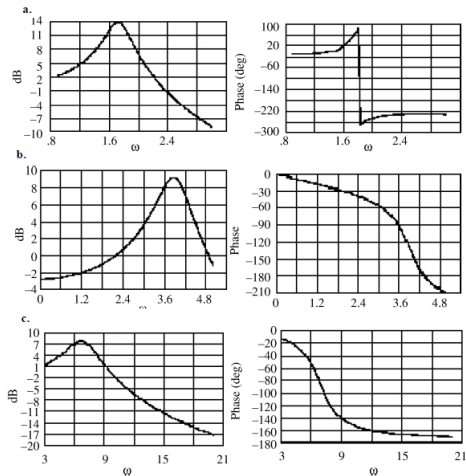
c  $\frac{50(s+3)}{s(s+2)(s+4)}$

Solução:



# Exercícios

## Exercício 5



## Exercício 6

Repita o Exercício 5 usando a Carta de Nichols ao invés das curvas M e N.

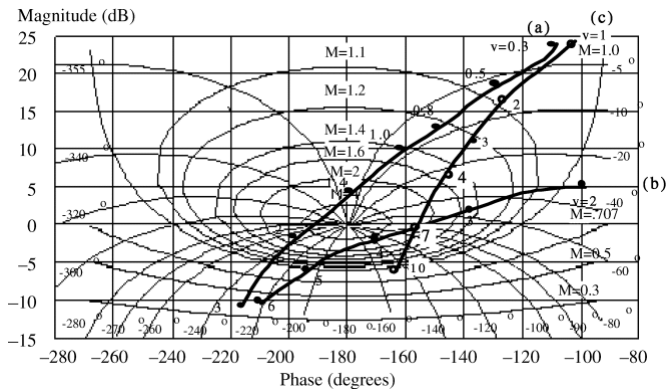


# Exercícios

## Exercício 6

Repita o Exercício 5 usando a Carta de Nichols ao invés das curvas M e N.

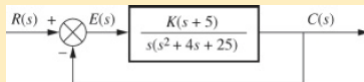
Solução:



## Exercício 7

Escreva um programa em Octave que fará o seguinte:

- Permitirá que um valor do ganho,  $K$ , seja entrado a partir do teclado;
- Mostrará os diagramas de magnitude e de fase da resposta em frequência em malha fechada de um sistema com realimentação unitária com uma função de transferência em malha aberta,  $KG(s)$
- Calculará e mostrará o pico de magnitude, a frequência do pico de magnitude e a faixa de passagem para a resposta em frequência em malha fechada e o valor de  $K$  fornecido. Teste seu programa com o sistema a seguir para  $K = 40$ .



# Exercícios

## Exercício 7

### Solução:

```
clc;
clear;
close all;
pkg load control
%% Enter G(s)
numg=[1 5];
deng=[1 4 25 0];
'G(s)'
G=tf(numg,deng)
%% Enter K
K=input('Type gain, K ');
'T(s)'
T=feedback(K*G,1)
bode(T)
grid on
title('Resposta em Frequencia de Malha Fechada')
[M,P,w]=bode(T);
[Mp i]=max(M);
Mp
MpdB=20*log10(Mp)
wp=w(i)
for i=1:1:length(M);
    if M(i)<=0.707;
        fprintf('Bandwidth = %g',w(i))
        break
    end
end
```

## Exercício 8

Utilize o *LTI Viewer do MATLAB* com o diagrama de Nichols para determinar a margem de ganho, a margem de fase, a frequência de zero dB e a frequência de  $180^\circ$  para um sistema com realimentação unitária com a função de transferência  $G(s) = \frac{5(s+6)}{s(s^2+4s+15)}$

# Exercícios

## Exercício 8

### Solução:

```
clc;  
clear;  
close all;  
numg=[5 30];  
deng=[1 4 15 0];  
G=tf(numg,deng)  
bode(G) %Desenha Diagrama de Bode  
title('Resposta em Frequencia de Malha Aberta') %Adiciona titulo no diagrama de Bode.  
[Gm,Pm,Wcp,Wcg]=margin(G); %encontra margens e frequencias das margens  
'Gain margin(dB); Phase margin(deg.); 0 dB freq. (r/s); 180 deg. freq. (r/s)' %Mostra label.  
margins=[20*log10(Gm),Pm,Wcg,Wcp] %Mostra dados de margens  
ltiview % abre o LTI Viewer
```

## Exercício 9

Escreva um programa em Octave que fará o seguinte:

- Construirá uma diagrama de Nichols de uma função de transferência em malha aberta;
- Permitirá que o usuário leia o diagrama de Nichols e entre o valor de  $M_r$ ;
- Construirá diagramas de magnitude e de fase em malha fechada;
- Mostrará os valores esperados de ultrapassagem percentual, tempo de acomodação e instante de pico;
- Apresentará a resposta ao degrau em malha fechada;

Teste seu programa com o sistema a seguir e explique quaisquer discrepâncias.

$$G(s) = \frac{5(s + 6)}{s(s^2 + 4s + 15)}$$

# Exercícios

## Exercício 9

### Solução:

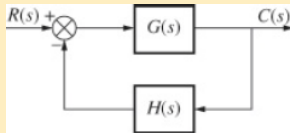
```
clc;
clear;
close all;
%% Enter G(s)
numg=5*[1 6];
deng=[1 4 15 0];
'Sistema em Malha Aberta'
'G(s)'
G=tf(numg,deng)
w=.10:1:10;
nichols(G,w)
ngrid
title('Diagrama de Nichols')
[M,P]=nichols(G,w);
for i=1:length(M);
if M(i)<=0.45;
BW=w(i);
break
end
end
pause
MrdB=input('Entre com Mr em dB do Diagrama de Nichols ');
Mr=10^(MrdB/20);
z2=roots([4,-4,(1/Mr^2)]);% Mr=1/sqrt(4z^2(1-z^2))
z1=sqrt(z2);
z=min(z1);
```

```
Pos=exp(-z*pi/(sqrt(1-z^2)));
Ts=(4/(BW*z))*sqrt((1-z^2)+sqrt(4*z^4-4*z^2+2));
Tp=(pi/(BW*sqrt(1-z^2)))*sqrt((1-z^2)+sqrt(4*z^4-4*z^2+2));
'Sistema em Malha Fechada'
'T(s)'
T=feedback(G,1)
figure
bode(T)
grid on
title('Resposta em frequencia de Malha Fechada')
fprintf('\nDamping Ratio = %g',z)
fprintf(' , Percent Overshoot = %g',Pos*100)
fprintf(' , Bandwidth = %g',BW)
fprintf(' , Mr (dB) = %g',MrdB)
fprintf(' , Mr = %g',Mr)
fprintf(' , Settling Time = %g',Ts)
fprintf(' , Peak Time = %g',Tp)
figure
step(T)
grid on
title('Resposta ao Degrau de Malha Fechada')
```

## Exercício 10

Considere um sistema de levitação magnética com uma função de transferência da planta  $P(s) = -\frac{1300}{s^2 - 860^2}$ . Admita que a planta esteja em cascata com uma  $M(s)$  e que o sistema será controlado pela malha mostrada na figura a seguir, em que  $G(s) = M(s)P(s)$  e  $H = 1$ . Para cada  $M(s)$  a seguir, trace o diagrama de Nyquist quando  $K = 1$  e determine a faixa de estabilidade em malha fechada para  $K > 0$ .

- $M(s) = -K$ ;
- $M(s) = -\frac{K(s+200)}{(s+1000)}$ .





## Exercício 11

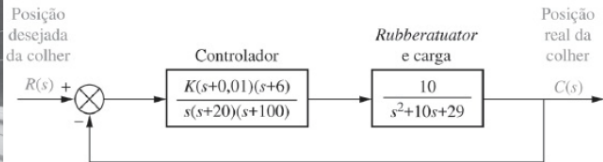
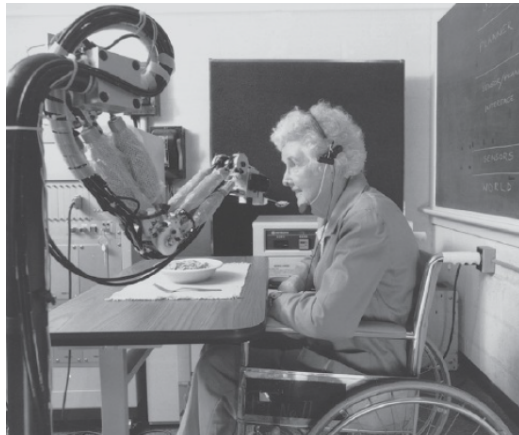
Considere o controle da posição radial da cabeça de captação de um DVD. A função de transferência em malha aberta da tensão de entrada da bobina para a posição radial da captação é  $P(s) = \frac{0,63}{\left(1 + \frac{0,36}{305,4}s + \frac{s^2}{305,4^2}\right)\left(1 + \frac{0,04}{248,2}s + \frac{s^2}{248,2^2}\right)}$ . Admita que a planta esteja em série com um controlador  $M(s) = \frac{0,5(s+1,63)}{s(s+0,27)}$  e na configuração em malha fechada mostrada no Exercício 10. Trace a resposta em frequência em malha fechada em uma carta Nichols. Prediga a resposta do sistema para uma entrada em degrau unitário. Calcule a  $M_p(\%)$  e  $t_s$ .

## Exercício 12

Um braço robótico chamado ISAC (*Intelligent Soft Arm Control* – Controle de braço suave inteligente) pode ser utilizado como parte de um sistema para alimentar pessoas com necessidades especiais. O sistema de controle guia a colher até a comida e, em seguida, para uma posição próxima à boca da pessoa. O braço utiliza um atuador controlado pneumaticamente especial chamado de *rubbertuator*. Este tipo de atuador consiste em tubos de borracha cobertos com cabos de fibra. O atuador se contrai em comprimento quando a pressão pneumática aumenta e se expande quando a pressão diminui. Estas expansões e contrações podem acionar uma polia ou outro dispositivo. Uma câmera de vídeo fornece a visão para o robô e para a malha de rastreamento. Considere o diagrama de blocos simplificado mostrado a seguir para regular a colher a uma certa distância da boca. Utilize técnicas de resposta em frequência para determinar a margem de ganho, a margem de fase, a frequência de zero dB e a frequência de  $180^0$ . O sistema é estável? Por quê?

# Exercícios

## Exercício 12



## Exercício 13

Obtenha o diagrama de Nyquist a partir do diagrama de Bode ( $K = 1$ ) a seguir e da função de transferência:

$$G(s) = \frac{K}{(s^2 + 10s + 1)(s + 1)}$$

A partir do diagrama obtido, estime a faixa  $K > 0$  para qual o sistema é estável.

## Exercício 13

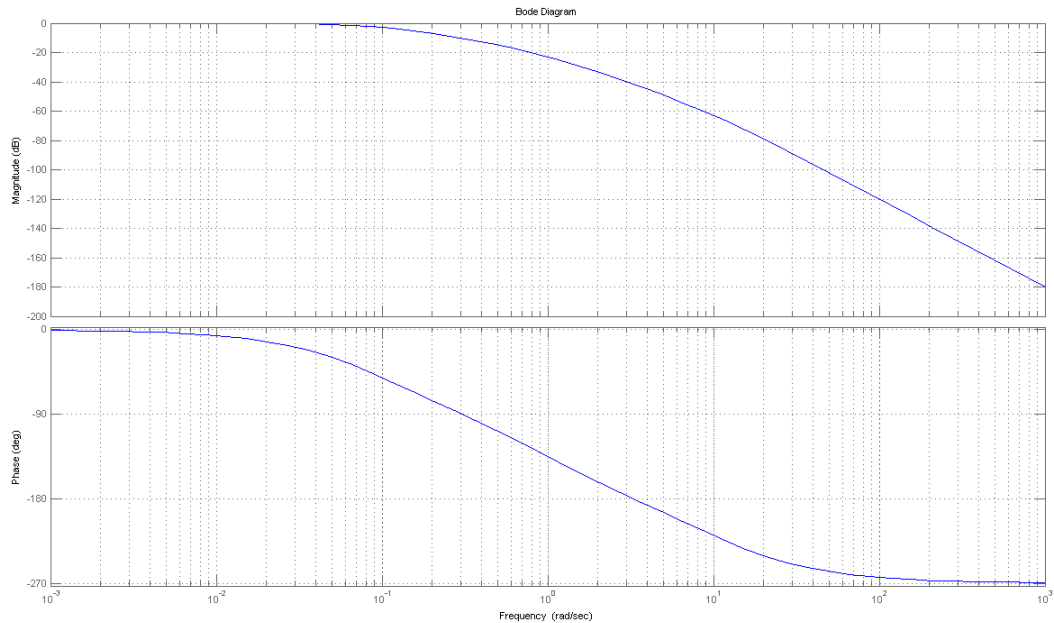
Obtenha o diagrama de Nyquist a partir do diagrama de Bode ( $K = 1$ ) a seguir e da função de transferência:

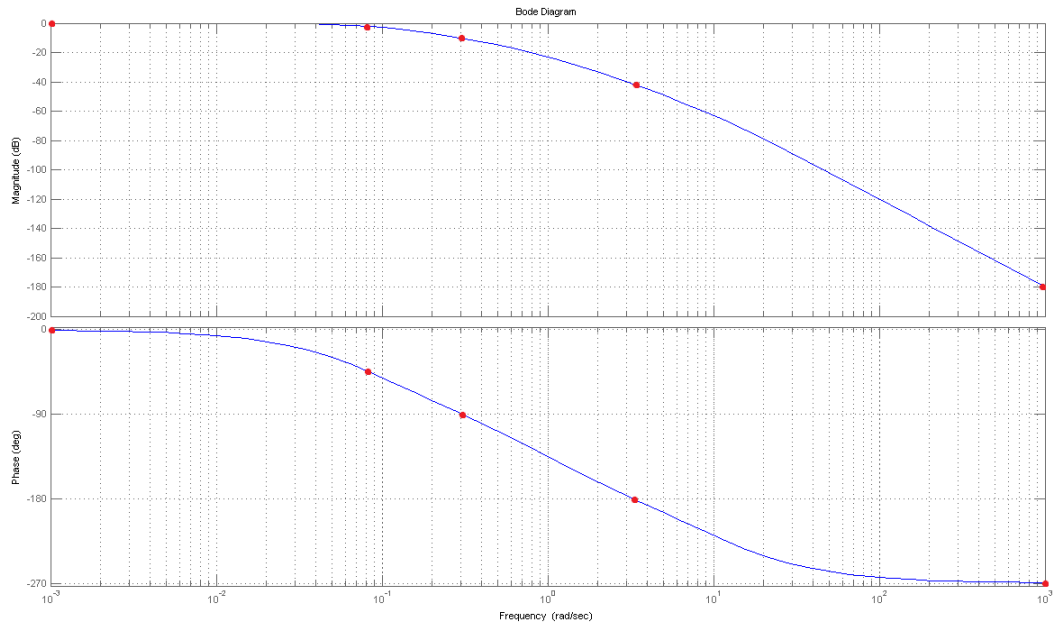
$$G(s) = \frac{K}{(s^2 + 10s + 1)(s + 1)}$$

A partir do diagrama obtido, estime a faixa  $K > 0$  para qual o sistema é estável.

Solução: A partir dos diagramas de Bode, obtemos alguns pontos principais para o traçado do diagrama de Nyquist

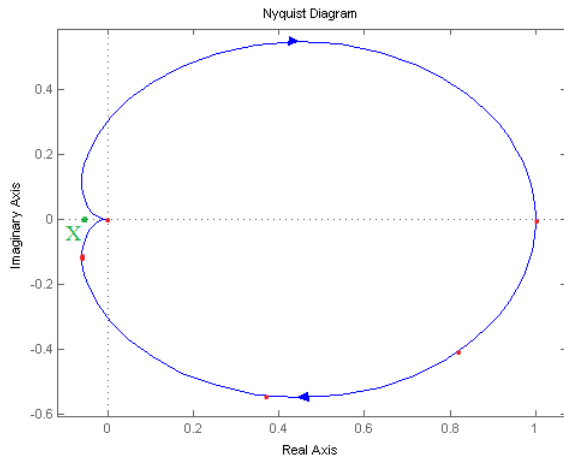
$\omega$	0	0,084	0,302	3,33	$\infty$
$ G(j\omega) _{dB}$	0	-2,31	-10,4	-41,7	-180
$ G(j\omega) $	1	0,7665	0,302	$8,2224 \cdot 10^{-3}$	0
$\angle G(j\omega)$	0	$-45^\circ$	$-90^\circ$	$-180^\circ$	$-270^\circ$





# Exercícios

Em seguida, traçamos o diagrama de Nyquist a partir dos pontos obtidos.





# Exercícios

Pelo diagrama de Nyquist, podemos obter:

$$\text{Im}[G(j\omega)] = 0 \rightarrow \omega^* \rightarrow G(j\omega^*) = X$$

$$\frac{-1}{K^*} < -X \rightarrow K^* > \frac{1}{X}$$

Ou, de maneira equivalente, a Margem de Ganho é o valor do módulo da função de transferência na frequência cuja fase é  $-180^\circ$ . Então:

$$MG = \frac{1}{|G(j\omega^*)|} = K^*$$

Logo, no nosso exercício, temos:

$$MG = \frac{1}{8,2224 \cdot 10^{-3}} \rightarrow K < 120$$

$$0 < K < 120$$

## Exercício 14

Considere

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + s + 4)}$$

Determine o valor de  $K$  para que a margem de fase seja de  $50^\circ$ . Desenhe o diagrama de Nichols para este sistema e determine as margens de ganho e de fase e a largura de banda.

## Exercício 14

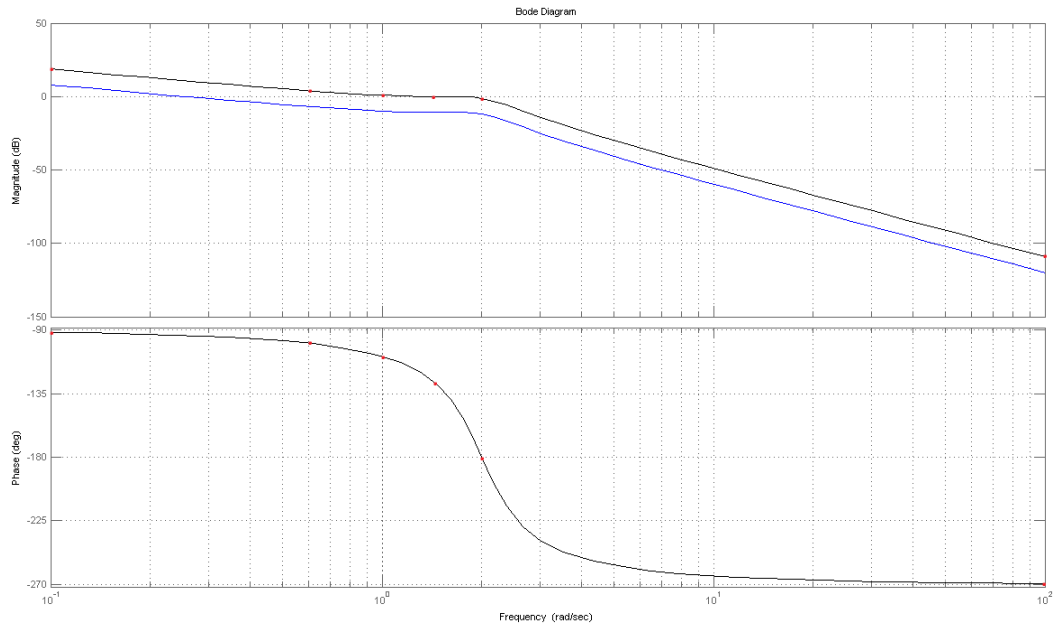
Considere

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + s + 4)}$$

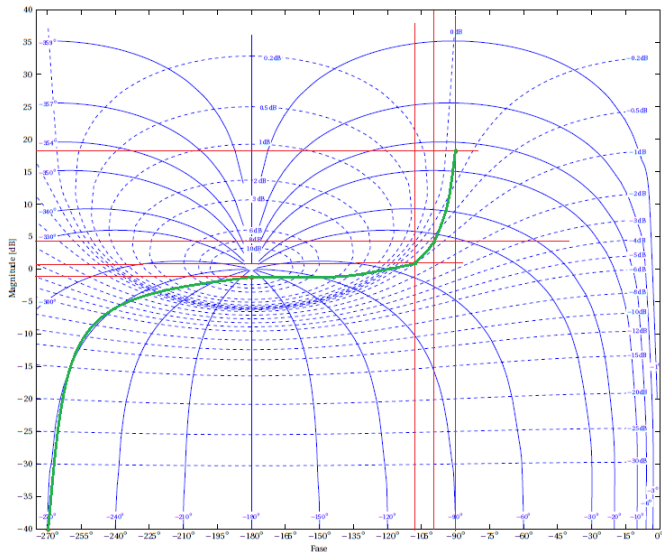
Determine o valor de  $K$  para que a margem de fase seja de  $50^\circ$ . Desenhe o diagrama de Nichols para este sistema e determine as margens de ganho e de fase e a largura de banda.

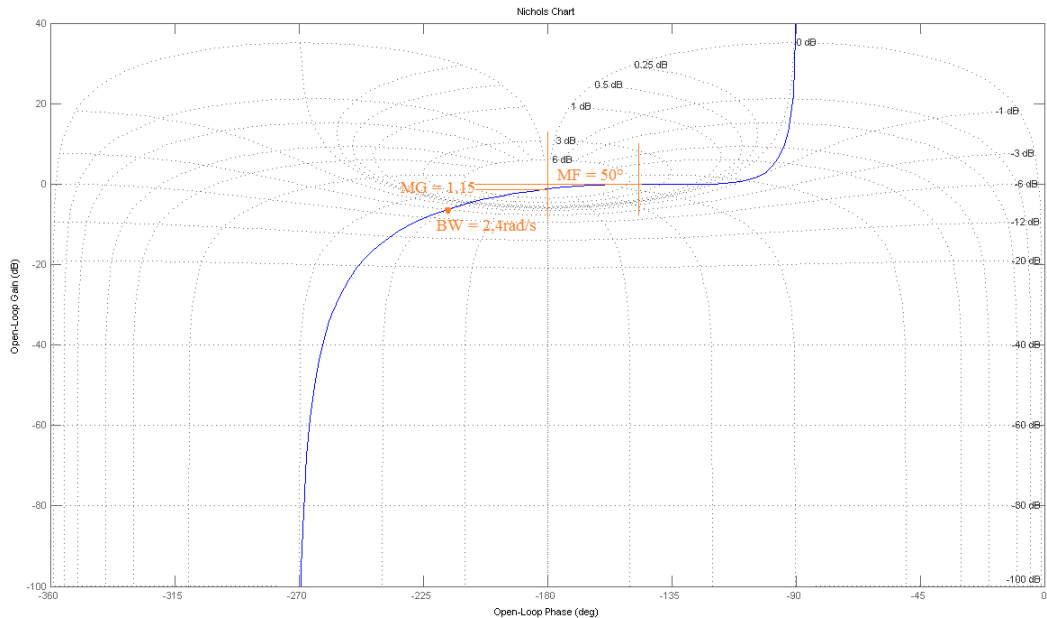
Solução:  $MF = 50^\circ \rightarrow \angle G(j\omega) = 50^\circ - 180^\circ = -130^\circ$ . Traçando o diagrama de Bode no Octave, em  $-130^\circ$  temos que o diagrama de módulo fornece aproximadamente  $-10,8dB$ . Logo,  $20 \log K = -10,8$ . Assim,  $K = 3,4674$ . Para obter a margem de fase requerida, precisamos de um ganho  $K = 3,4674$ .

Desta forma, podemos esboçar o diagrama de Bode para o novo ganho, uma vez que este diagrama possui o mesmo formato, sendo somente deslocado para cima.



A partir do novo Diagrama de Bode, selecionamos alguns valores importantes para traçar a Carta de Nichols e identificamos as Margens de Ganho e de Fase e a Largura de Banda.





## Exercício 15

Considere o sistema da Figura a seguir. Desenhe o diagrama de Bode da função de transferência de malha aberta e determine o valor do ganho  $K$  para que a margem de fase seja de  $50^\circ$ . Qual é a margem de ganho desse sistema com esse valor de  $K$ ?

