



Universidade Federal do ABC

A

# Sistemas de Controle II - QS1.2021

## Laboratório Virtual 2

**Diagramas de Bode e Nyquist com Octave**

**Professora:** Dra. Heloise Assis Fazzolari

**Grupo G**

**Alunos:**

Daniel Macedo Costa Fagundes RA 11076809

Marcos Vinicius Fabiano de Oliveira RA 11067212

Santo André

2021

# SUMÁRIO

<b>1 Atividades</b>	<b>1</b>
1.1 Determinar o diagrama de Bode para a seguinte função de transferência:	1
Reescrever a função de transfer $G(j\omega)$ como um produto dos fatores básicos e identificar as frequências de quebra	1
Traçar curvas assintóticas de módulo em dB com as inclinações apropriadas em baixa e alta frequência	4
Traçar curvas lineares aproximadas de fase com os valores apropriados de fase em baixa e alta frequência, bem como nas frequências de quebra	5
Verifique a frequência de ressonância e o pico de ressonância em dB, caso existam	6
Determine o gráfico exato do diagrama de Bode usando o Matlab	7
1.2 Considere a seguinte função de transferência:	8
Determine os parâmetros da função padrão de segunda ordem: $\zeta$ , $\omega_n$ ;	8
Obtenha a função de transferência senoidal $G(j\omega)$ . Determine as partes real, imaginária, módulo e fase;	9
Esboce o diagrama de Nyquist manualmente tendo em vista os pontos característicos:	11
Utilizando o comando nyquist do Matlab, desenhe o diagrama	14
1.3 Sistema de Servomotor CC	15
Obtenha o modelo do sistema de servomotor, considerando como entrada a tensão da armadura ( $v_a$ em V) e saída a velocidade angular da carga ( em rad/s).	15
Considere agora o sistema completo. Aplique um sinal senoidal ao sistema e faça as leituras da saída (amplitude a fase) para vários valores de frequência.	17
Desenhe os diagramas de Bode e de Nyquist a partir dos dados obtidos.	21
<b>ANEXO A - Códigos Octave</b>	<b>24</b>
Atividade 1.1	24
Atividade 1.2	25
Atividade 1.3	26

## 1 Atividades

### 1.1 Determinar o diagrama de Bode para a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{s + 10}{s^2 + 2.4s + 4}$$

#### A. Reescrever a função de transfer $G(j\omega)$ como um produto dos fatores básicos e identificar as frequências de quebra

Podemos reescrever a função de transferência como produto de fatores básicos e colocar na forma padrão:

$$G(s) = \frac{10 \left( \frac{1}{10}s + 1 \right)}{4 \left( \frac{1}{4}s^2 + \frac{6}{10}s + 1 \right)} = \frac{2.5 \left( \frac{s}{10} + 1 \right)}{\left( \left( \frac{s}{2} \right)^2 + \frac{6}{10}s + 1 \right)}$$

Fazendo  $s = j\omega$ , temos a função de transferência senoidal.

$$G(j\omega) = \frac{2.5 \left( \frac{j\omega}{10} + 1 \right)}{\left( \left( \frac{j\omega}{2} \right)^2 + \frac{6}{10}j\omega + 1 \right)}$$

Avaliando a função de transferência senoidal acima, podemos analisar os fatores individualmente. Por questão de conveniência, para plotar as assíntotas de módulo no item B e as curvas aproximadas de fase no item C, iremos também abordar os comportamentos de módulo e fase em baixas e altas frequências para cada um dos fatores neste item.

- **Ganho K**

$$K = 2.5 \text{ rad/s}$$

$$M = 20 \log(2.5) \Rightarrow M = 7,96 \text{ dB}$$

$$\angle K = 0^\circ (K > 0)$$

A contribuição do ganho K é uma reta horizontal de valor 7,96 dB, e devido o valor de K ser maior do que zero, a contribuição para o ângulo de fase  $0^\circ$ .

- **Zero Real fora da Origem**

$$\omega_c = 10 \text{ rad/s}$$

$$M_{BF} = 0 \text{ dB}$$

$$M_{AF} = 20 \log(10) \Rightarrow M_{AF} = 20 \text{ dB}$$

$$fase_{BF} = 0^\circ$$

$$fase_{\omega_c} = 45^\circ$$

$$fase_{AF} = 90^\circ$$

A contribuição do zero real fora da origem é um segmento de reta de valor 0 dB (baixas frequências) até a frequência de canto, e depois, um novo segmento de reta partindo da frequência de canto, com a inclinação de +20 dB/década para altas frequências. A fase para baixas frequências fica em  $0^\circ$ , na frequência de canto passa por  $45^\circ$  e chegando a  $90^\circ$  para altas frequências. A variação de  $0^\circ$  a  $90^\circ$  é alcançada em duas décadas.

- **Polo de Segunda Ordem**

$$\text{Forma padrão: } \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + 1 \Rightarrow \omega_n = \omega_c = 2 \text{ rad/s}$$

$$M_{BF} = 0 \text{ dB}$$

$$M_{AF} = -40 \text{ dB/década}$$

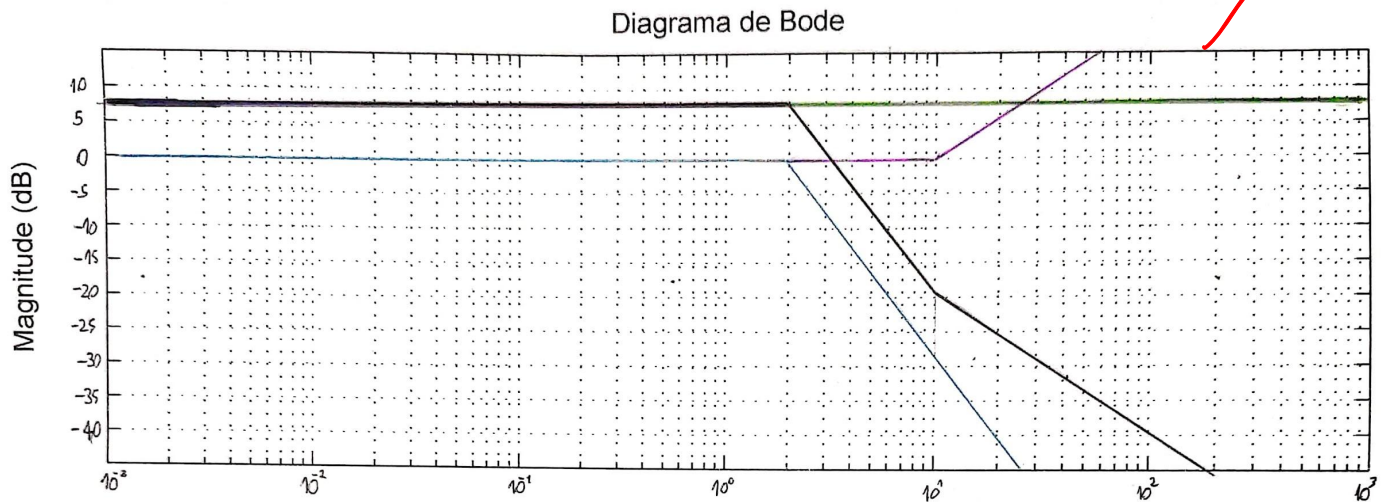
$$\text{fase}_{BF} = 0^\circ$$

$$\text{fase}_{\omega_c} = -90^\circ$$

$$\text{fase}_{AF} = -180^\circ$$

Em baixas frequências, temos uma assíntota que parte de 0 dB até a frequência de canto, sendo esta igual à frequência natural. A partir deste ponto, temos uma nova assíntota com declive de -40 dB/década (altas frequências). Vale ressaltar que o coeficiente de amortecimento  $\xi$  não influencia na caracterização das assíntotas, mas gera um pico de ressonância na região  $\omega_n$ , que deve ser considerado durante a criação do DB. Para baixas frequências, a fase fica em  $0^\circ$ , na frequência de canto passa por  $-90^\circ$  e chega em  $-180^\circ$  para altas frequências. A variação de  $0^\circ$  a  $-180^\circ$  é alcançada dependendo do valor do fator de amortecimento. Quanto mais próximo de 0, mais próximo de um segmento de reta vertical será.

B. Traçar curvas assintóticas de módulo em dB com as inclinações apropriadas em baixa e alta frequência



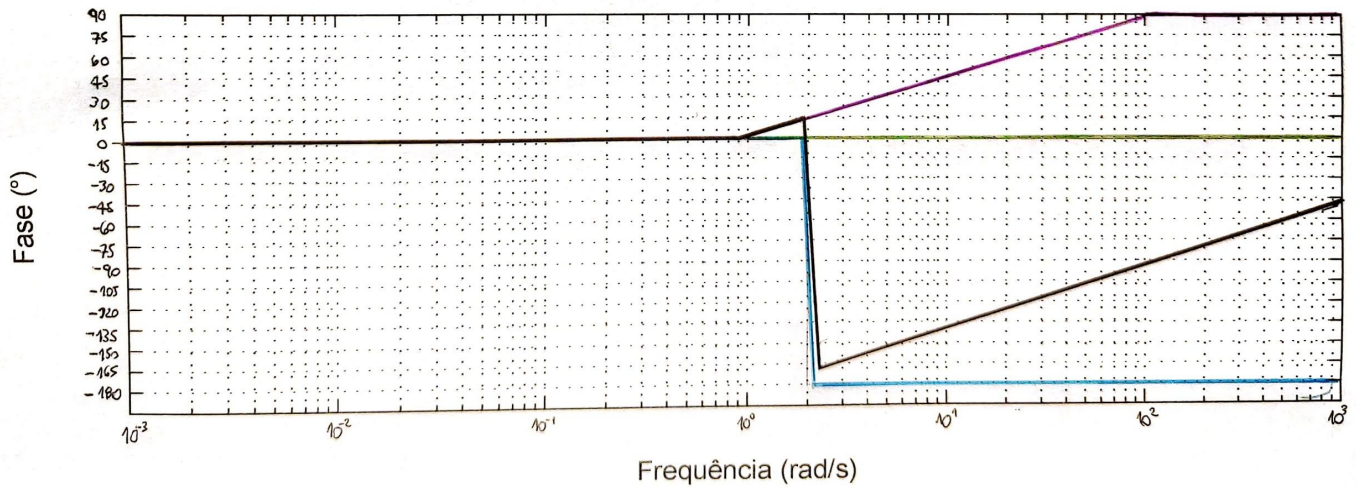
Em **verde** temos a assíntota relativa ao ganho K.

Em **roxo** temos as assíntotas relativas ao zero real fora da origem.

Em **azul claro** temos as assíntotas relativas ao polo de segunda ordem.

Em **preto** temos o somatório de todas as assíntotas, gerando uma aproximação para a curva de módulo vs. frequência.

C. Traçar curvas lineares aproximadas de fase com os valores apropriados de fase em baixa e alta frequência, bem como nas frequências de quebra



Em **verde** temos a assíntota relativa à fase de K.

Em **roxo** temos as assíntotas relativas à fase do zero real fora da origem.

Em **azul claro** temos as assíntotas relativas à fase do polo de segunda ordem.

Em **preto** temos o somatório de todas as assíntotas, gerando uma aproximação para a curva de fase vs. frequência.

**D. Verifique a frequência de ressonância e o pico de ressonância em dB, caso existam**

Comparando com a forma padrão, temos:

$$2\xi \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right) = \frac{6}{10} j\omega \Rightarrow \xi = 0,6 \quad (0 \leq \xi \leq 0,71)$$

Como temos  $\xi$  limitado entre 0 e 0,71, assim, há pico de ressonância e podemos calcular a frequência de ressonância da seguinte forma:

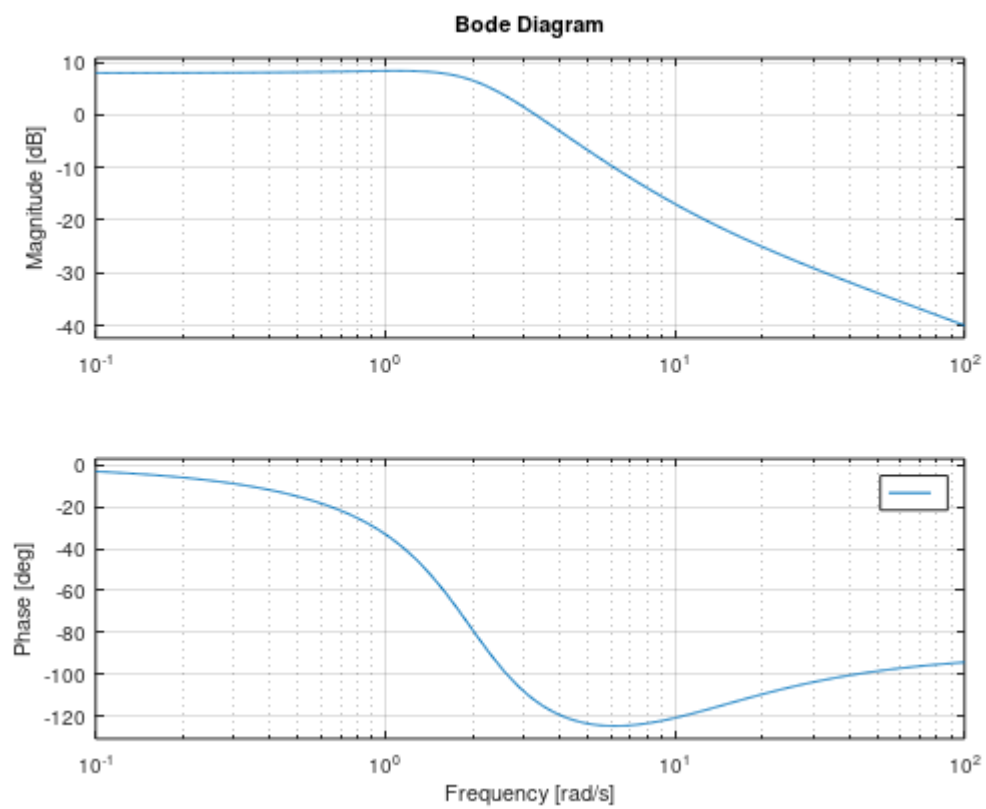
$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} = 2 \sqrt{1 - 2 \cdot (0,6)^2} \Rightarrow \omega_r = 1,02 \text{ rad/s}$$

Já o pico de ressonância pode ser determinado conforme abaixo:

$$M_r = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{1}{2(0,6) \sqrt{1 - (0,6)^2}} \Rightarrow M_r = 1,042 \text{ dB}$$



E. Determine o gráfico exato do diagrama de Bode usando o Matlab



**1.2 Considere a seguinte função de transferência:**

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0,8s + 1}$$

**A. Determine os parâmetros da função padrão de segunda ordem:  $\zeta$ ,  $\omega_n$ ;**

Dado para um sistema de segunda ordem a equação na forma padrão:

$$G(s) = \frac{K(\tau_a s + 1)}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1}$$

Podemos determinar para o numerador que:

$$\tau_a = 0 \text{ e } K = 1$$

Para o denominador temos:

$$s^2 = \tau s^2 \Rightarrow \tau^2 = 1 \Rightarrow \tau = 1$$

$$\therefore 2\xi\tau s = 0,8s \Rightarrow 2\xi = 0,8 \Rightarrow \xi = 0,4$$

$$\tau = \frac{1}{\omega_n} \Rightarrow \omega_n = 1 \text{ rad/seg}$$

**B. Obtenha a função de transferência senoidal  $G(j\omega)$ . Determine as partes real, imaginária, módulo e fase;**

Considerando a hipótese que  $G(s)$  é um sistema linear invariante no tempo (SLIT) é válido que sua função de transferência senoidal  $G(j\omega)$  seja obtida simplesmente substituindo  $s$  por  $j\omega$ .

$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 0,8(j\omega) + 1}$$

Analisando o numerador e denominador de  $G(j\omega)$  :

- Numerador

$$\Re\{1\} = 1$$

$$\Im\{1\} = 0$$

$$| | = \sqrt{(1^2)} = 1$$

$$\angle = 0^\circ$$

- Denominador

$$\Re\{(j\omega)^2 + 0,8(j\omega) + 1\} = 1 - \omega^2$$

$$\Im\{(j\omega)^2 + 0,8(j\omega) + 1\} = 0,8\omega$$

$$| | = \sqrt{(1 - \omega^2)^2 + (0,8\omega)^2}$$

$$\angle = \tan^{-1}\left(\frac{0,8\omega}{1 - \omega^2}\right)$$

Podemos calcular o módulo de  **$G(j\omega)$**  como a divisão dos módulos entre numerador e denominador, bem como a fase que é dada por *fase do numerador* menos *a fase do denominador*:

$$|G(j\omega)| = \frac{|num|}{|den|} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2)^2 + (0,8\omega)^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle(num) - \angle(den) = 0^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{0,8\omega}{1 - \omega^2}\right)$$

As partes reais e imaginárias podem ser encontradas fazendo a radiciação da equação:

$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 0,8(j\omega) + 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 0,8(j\omega) + 1} = \frac{1}{(1 - \omega^2) + 0,8(j\omega)} \cdot \frac{(1 - \omega^2) - 0,8j\omega}{(1 - \omega^2) - 0,8j\omega}$$

$$G(j\omega) = \frac{(1 - \omega^2) - 0,8j\omega}{(1 - \omega^2)^2 + (0,8\omega)^2} = \frac{1 - \omega^2}{(1 - \omega^2)^2 + (0,8\omega)^2} - \frac{0,8\omega}{(1 - \omega^2)^2 + (0,8\omega)^2}j$$

**C. Esboce o diagrama de Nyquist manualmente tendo em vista os pontos característicos:**

$$\bullet \omega \rightarrow 0 \quad \bullet \omega = \omega_r \quad \bullet \omega = \omega_n \quad \bullet \omega \rightarrow \infty$$

Temos todas as informações para determinar ***w<sub>r</sub>***

$$\omega_r = \sqrt{1 - 2\xi^2} = 0,824 \text{ rad/s}$$

Vamos aos cálculos!

$$\bullet \omega \rightarrow 0$$

Pela teoria , e por substituição direta sabemos que:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - 0^2)^2 + (0,8 \cdot 0)^2}} = 1$$

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{0,8 \cdot 0}{1 - 0^2}\right) = 0^\circ$$

$$\bullet \omega = \omega_r$$

$$|G(j\omega_r)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - 0,824^2)^2 + (0,8 \cdot 0,824)^2}} = 1,364$$

$$\angle G(j\omega_r) = -\tan^{-1}\left(\frac{0,8 \cdot 0,824}{1 - 0,824^2}\right) = -64,034^\circ$$

- $\omega = \omega_n$

$$|G(j\omega_r)| = \frac{1}{\sqrt{((1 - 1^2)^2 + (0,8 \cdot 1)^2)}} = 1,25$$

Como nosso sistema é subamortecido ( $0 < \zeta < 1$ ) pela teoria temos que:

$$\text{se } \omega = \omega_n \Rightarrow \angle G(j\omega_n) = -90^\circ$$

- $\omega \rightarrow \infty$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = \frac{1}{\infty} = 0$$

Por definição:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle G(j\omega) \Rightarrow \angle G(j\omega) = -180^\circ$$

O diagrama corta o eixo imaginário quando a parte real de  $\mathbf{G(j\omega)}$  é igual a zero:

$$\frac{1 - \omega^2}{(1 - \omega^2)^2 + (0,8\omega)^2} = 0 \Rightarrow \omega = 1$$

Para  $\omega=1$ , o eixo imaginário corresponde a  $1,25j$ .

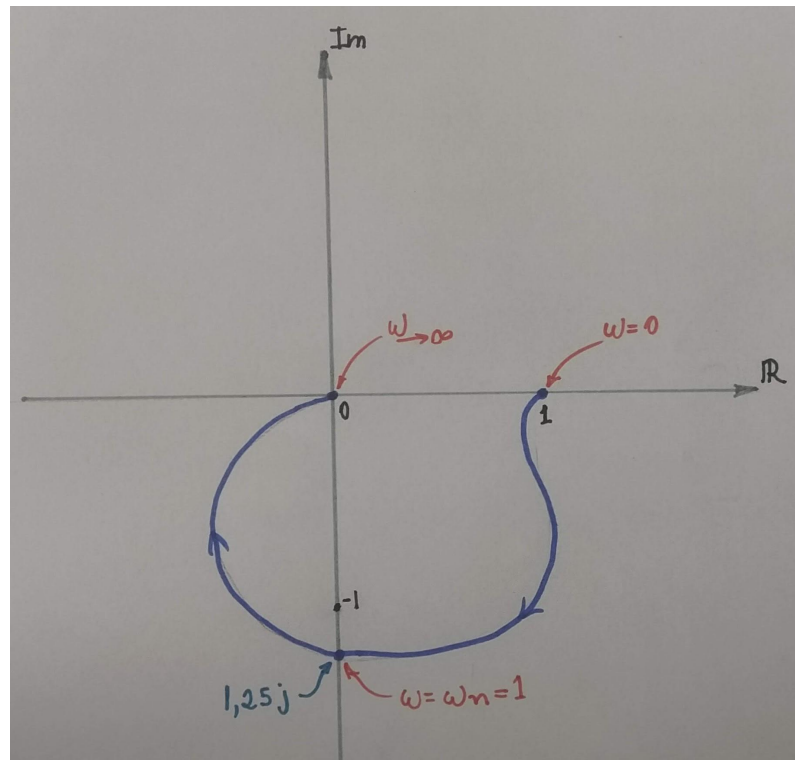
Assim, temos o ponto  $(0,1,25)$ .

O diagrama corta o eixo real quando a parte imaginária de  $\mathbf{G(j\omega)}$  é igual a zero:

$$\frac{0,8\omega}{(1 - \omega^2)^2 + (0,8\omega)^2}j = 0 \Rightarrow \omega = 0$$

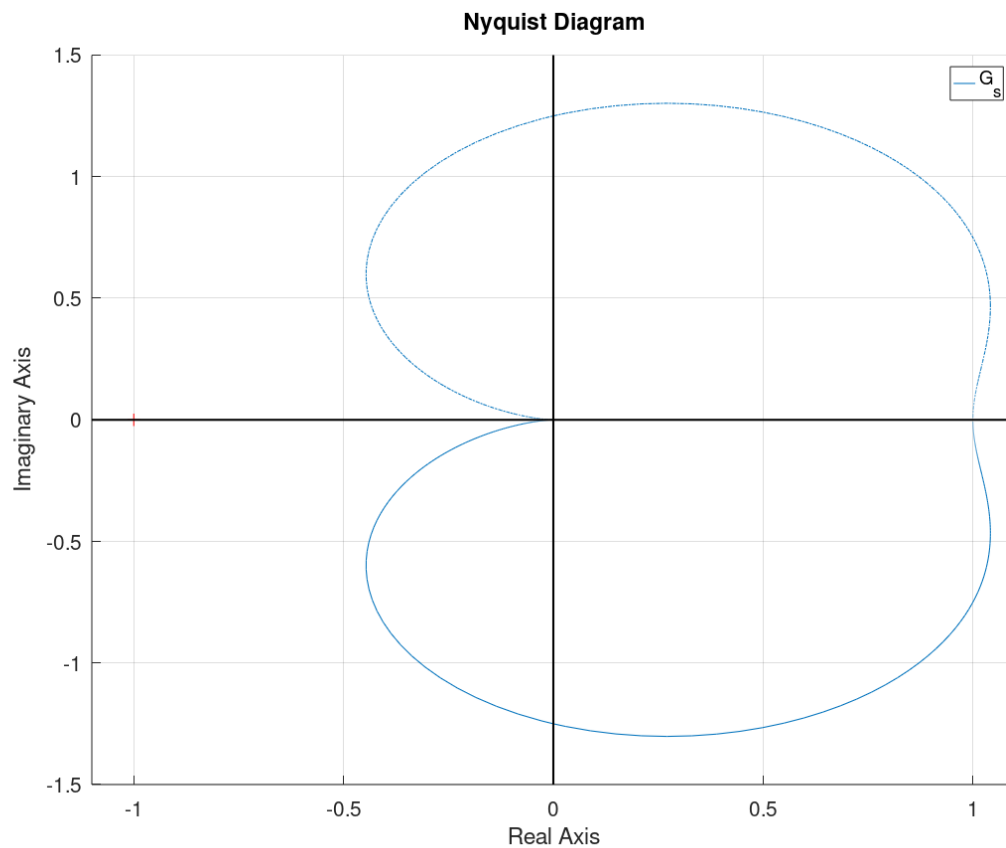
Para  $w=0$ , o eixo real corresponde a 0.

Assim, temos o ponto  $(0,0)$ .



#### D. Utilizando o comando nyquist do Matlab, desenhe o diagrama

O código utilizado para descrever o diagrama abaixo conta em anexo.

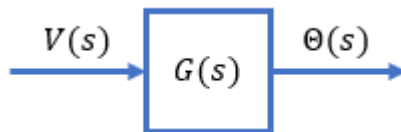




### 1.3 Sistema de Servomotor CC

- A. Obtenha o modelo do sistema de servomotor, considerando como entrada a tensão da armadura ( $v_a$  em V) e saída a velocidade angular da carga ( $\dot{\theta}$  em rad/s).**

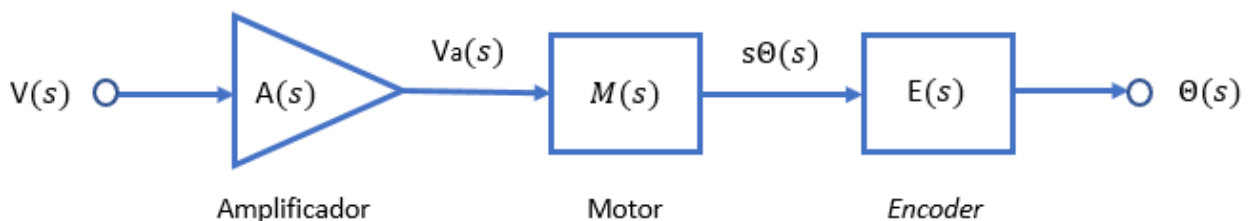
Para iniciar a modelagem do sistema, temos que avaliar os parâmetros de entrada e saída. Nesse caso, temos uma entrada elétrica  $V(s)$  e uma saída mecânica  $\theta(s)$ . Assim,



onde a função de transferência  $G(s)$  pode ser definida como:

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{V(s)}$$

Para o sistema proposto, temos uma representação por meio de diagrama de blocos, conforme a seguir:



Logo, podemos avaliar que a função de transferência de malha aberta é dada pelo produto de cada bloco. Ou seja,

$$G(s) = A(s) M(s) E(s)$$

Do enunciado, temos as seguintes definições:

$$A(s) = K_a$$

$$E(s) = \frac{K_{enc}}{s}$$

onde,  $K_{enc}$  é a resolução do encoder (1024 pulsos por revolução).

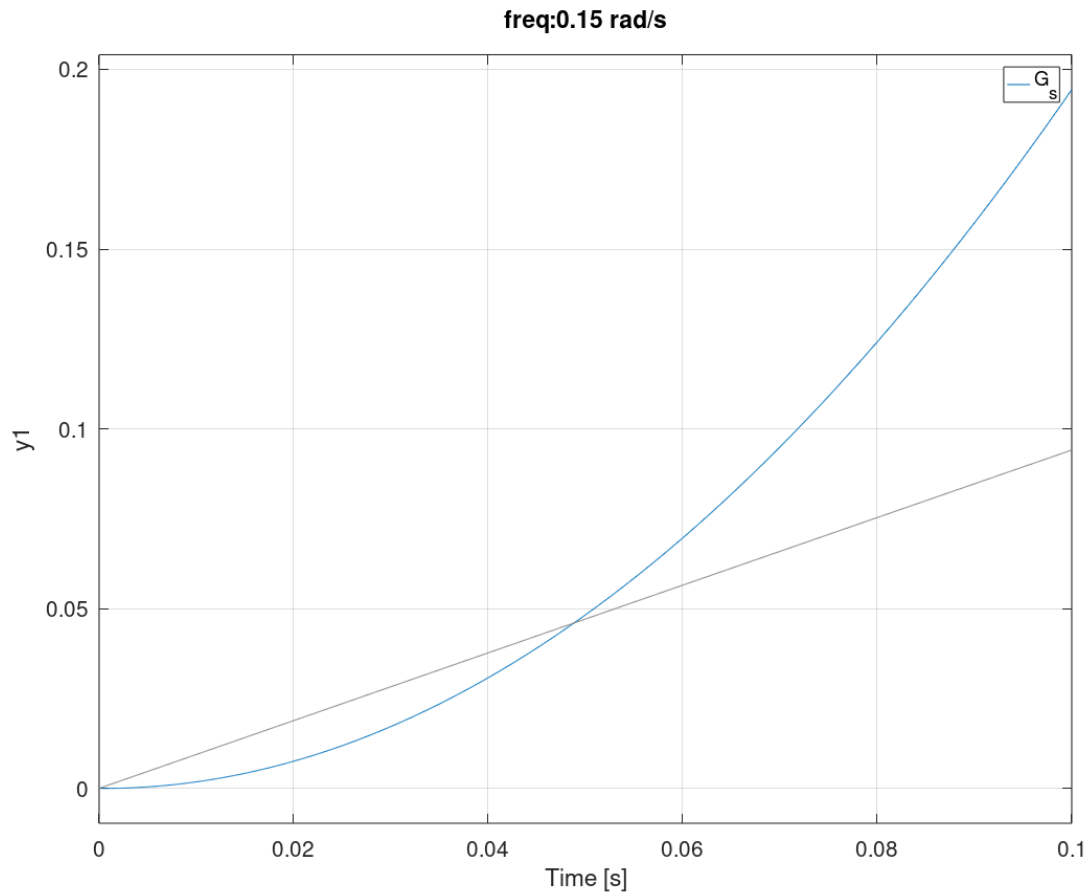
Através da modelagem de um motor de corrente contínua executada em Dorf *et al.* (2001), temos:

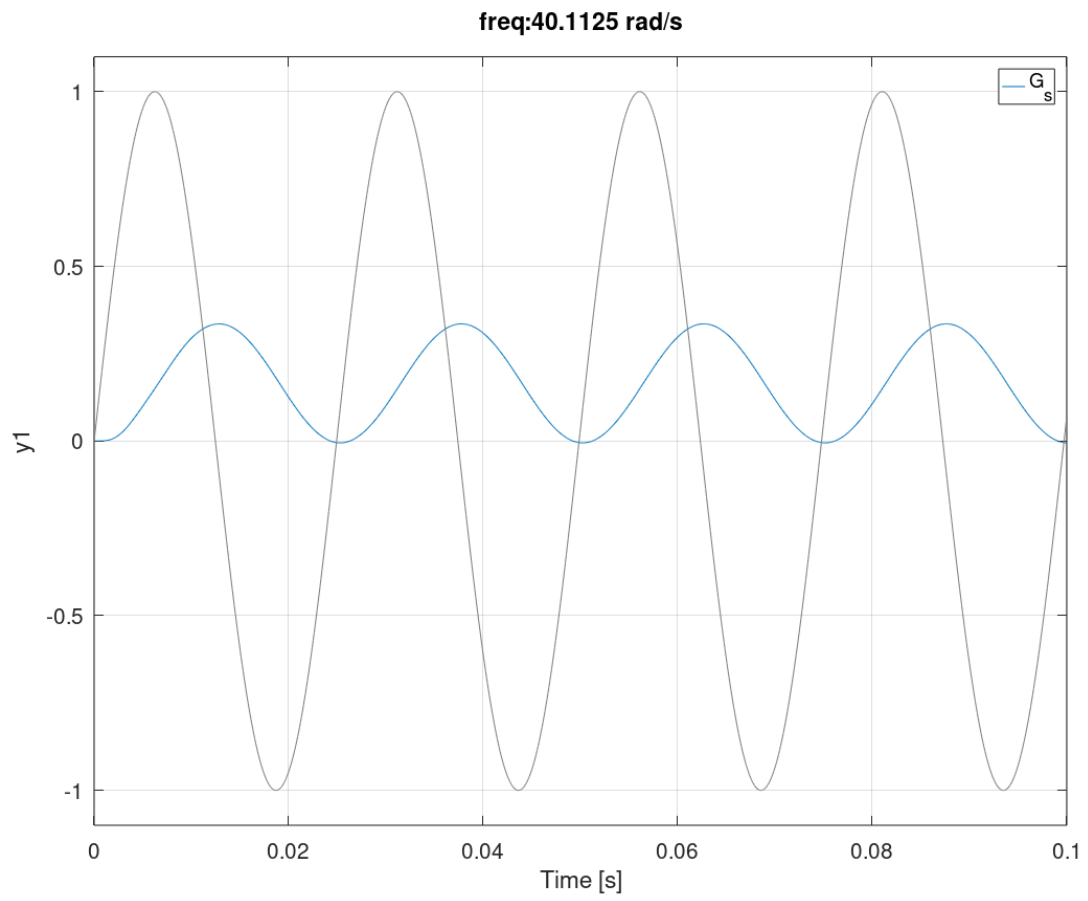
$$M(s) = \frac{K_e}{s[(R_a + L_a s)(Js + b) + K_b K_e]}$$

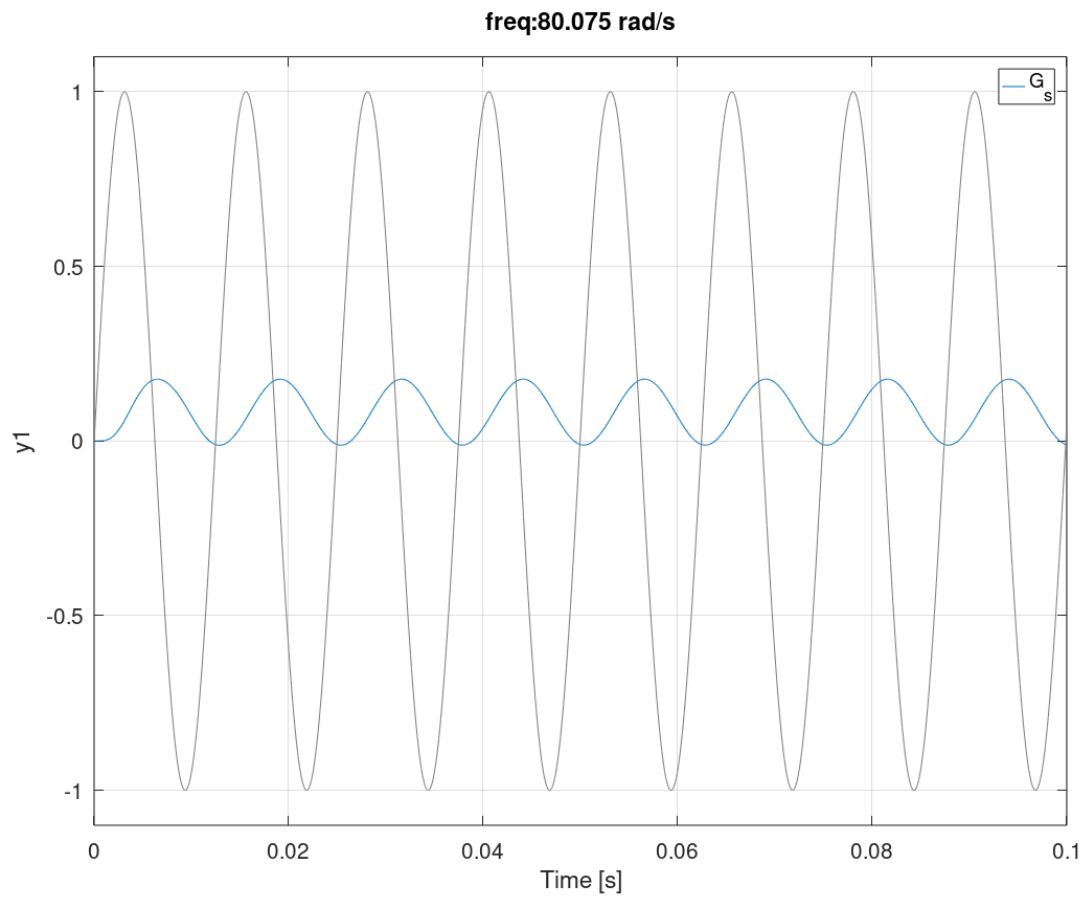
Devido à condição de estado estacionário, a potência de entrada será igual a potência entregue ao eixo, de modo que podemos observar que  $K_b$  é igual a  $K_e$ . Portanto, realizando todas as considerações anteriores, a função de transferência do modelo é então determinada.

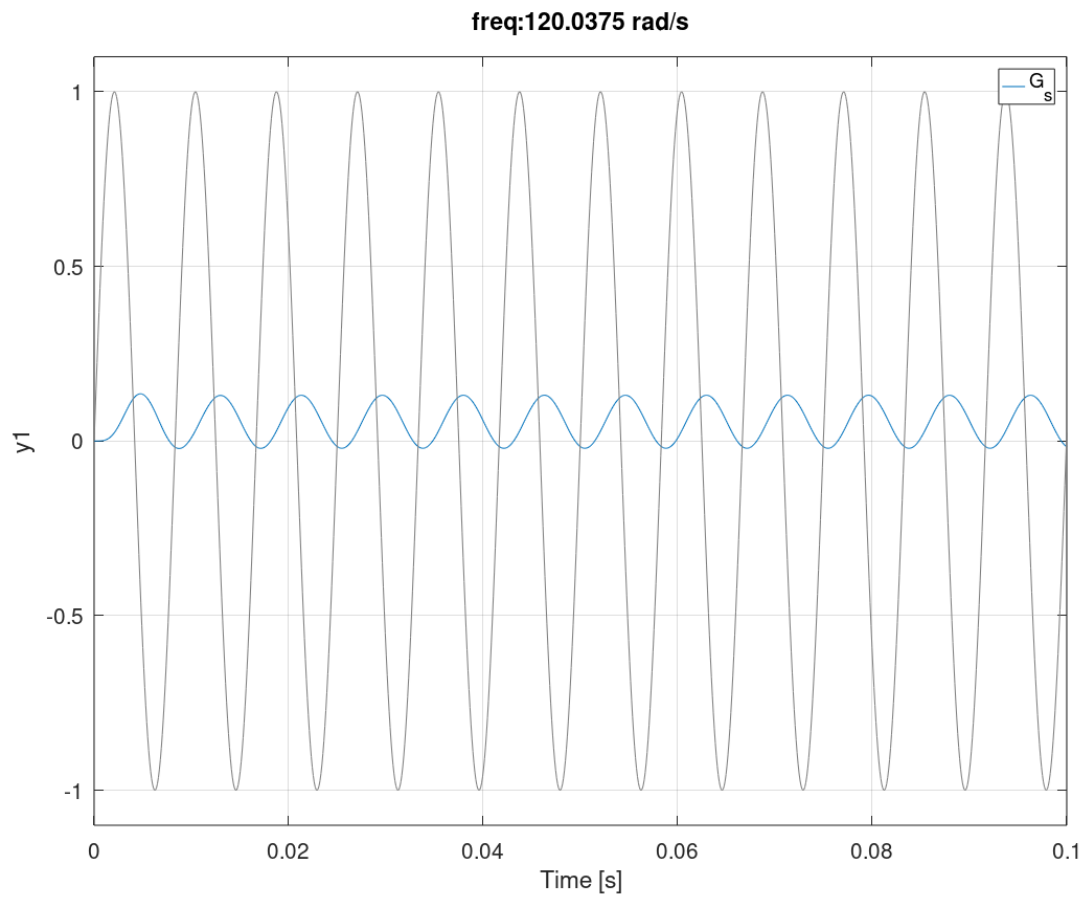
$$G(s) = \frac{K_a K_e}{s[(R_a + L_a s)(Js + b) + K_e^2]}$$

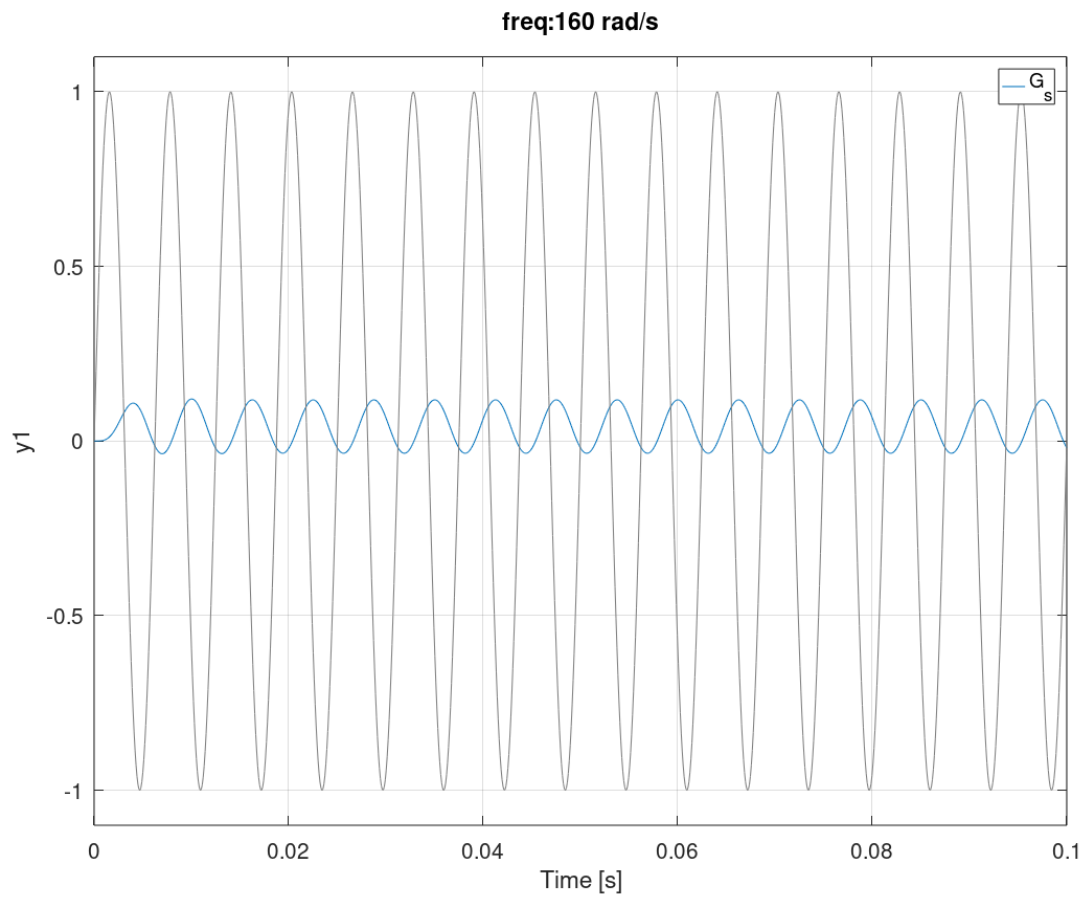
**B. Considere agora o sistema completo. Aplique um sinal senoidal ao sistema e faça as leituras da saída (amplitude a fase) para vários valores de frequência.**



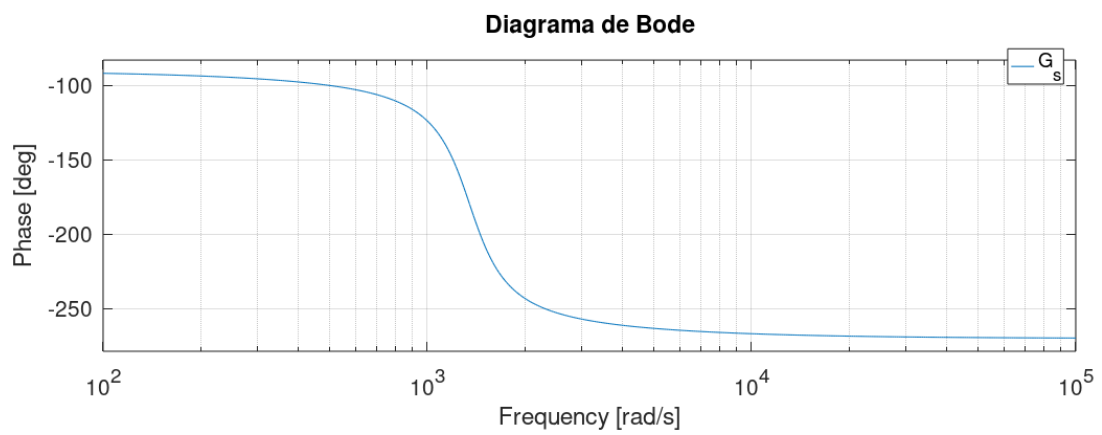
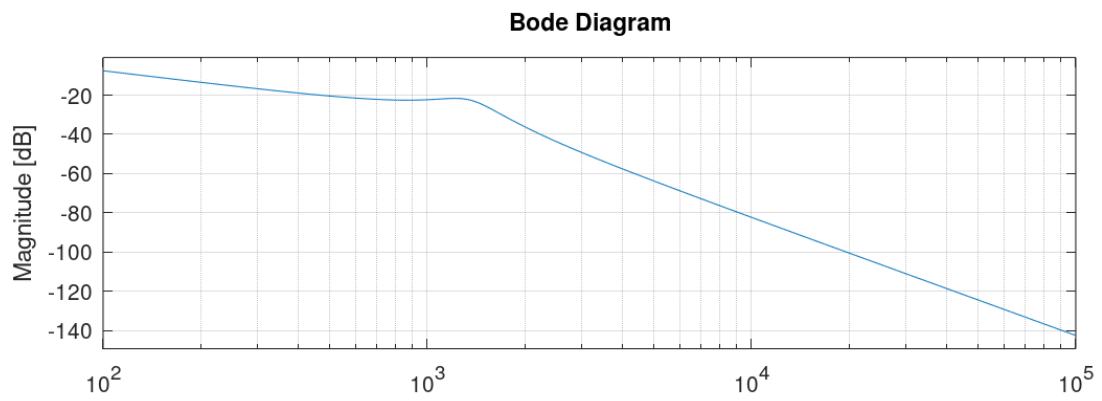




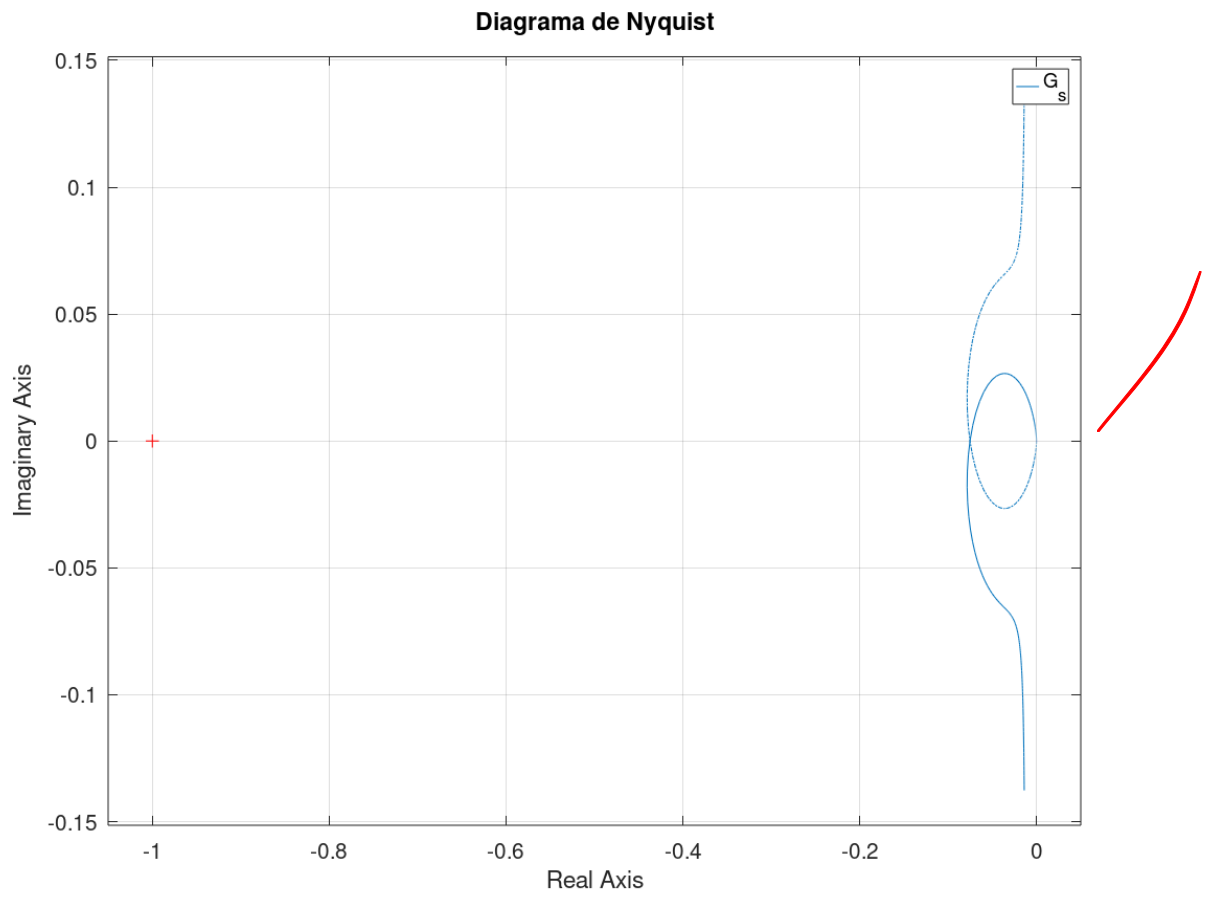




**C. Desenhe os diagramas de Bode e de Nyquist a partir dos dados obtidos.**







## ANEXO A - Códigos Octave

### Atividade 1.1

```
1 close all;
2 clear all;
3 clc;
4
5 pkg load control
6
7 n = [1 10];
8 d = [1 2.4 4];
9 sys = tf(n,d);
10
11 bode(sys);
```

## Atividade 1.2

```
1 close all; %fecha todas as figuras
2 clear all; %limpa todas as variáveis
3 clc; %limpa o terminal
4
5 pkg load control
6
7 s = tf('s'); %operador de laplace
8
9 x_min = -1.1;
10 x_max = 1.1;
11
12 y_min = -1.5;
13 y_max = 1.5;
14
15 G_s = (1)/(s^2 + 0.8*s + 1)
16
17 hold on;
18 grid on;
19 nyquist(G_s);
20
21 eixox_h = plot([x_min, x_max],[0 0], '-k','linewidth',1);
22 eixoy_h = plot([0 0],[y_min, y_max], '-k','linewidth',1);
23 legend('Gs');
24 axis([x_min, x_max, y_min, y_max]);
```

## Atividade 1.3

```
1 clear all;
2 close all;
3 clc;
4
5 ##Limpa todos os dados anteriores
6 clear -a
7 close all
8 clc
9 ## Inicia pacote de controle
10 pkg load control
11
12 s = tf('s');
13
14 ##constantes
15 Ke = 0.117;
16 Ka = 5;
17 J = 1.88e-6;
18 b = 2.13e-4;
19 Ra = 1.8;
20 La = 4.1e-3;
21
22 ##funcao de transferencia
23 G_s = (Ka*Ke)/(s*((Ra+La*s)*(J*s+b)+Ke^2));
24
25 ##numero de graficos para gerar
26 graphs = 5;
27
28 ##vetor de freq em hertz
29 omega_f = linspace(0.15,160,graphs);
30 ##vetor auxiliar para guardar os valores em rad/s
31 omega_n = zeros(length(omega_f),1);
32
33 ##vetor de tempo
34 t = linspace(0,0.1,1000);
35
36 for i=1:length (omega_f)
37
38     ## converte de hertz pra rad/s
39     omega_n(i) = omega_f(i)*2*pi;
40     ## sinal senoidal
41     u = sin(omega_n(i)*t);
42
43     ## gera grafico pra cada \omega
44     figure
45     lsim(G_s,u,t)
46     title(strcat("freq: ",num2str(omega_f(i)), " rad/s"))
47
48 end
49
```

```
50 figure
51 bode(G_s)
52 title('Diagrama de Bode')
53
54 figure
55 nyquist(G_s)
56 title('Diagrama de Nyquist')
```