

ESTA008-17 – Sistemas de Controle II

1º Quadrimestre de 2021

Prof^a. Heloise Assis Fazzolari

Aula Prática Virtual 1 – Obtenção Experimental do Diagrama de Bode

Aviso: O grupo deverá imprimir as escalas logarítmicas para obter à mão os diagramas de Bode a partir dos dados experimentais. Em seguida deverá escanear ou fotografar os gráficos obtidos e anexar junto ao relatório, que será entregue em arquivo .pdf com o seguinte padrão de nome: NomeDoGrupo_LabVirtual1.pdf

1 Objetivo

Obter experimentalmente o diagrama de Bode de circuitos RC e RLC por meio da técnica de varredura de frequência. Verificar a ocorrência de ressonância.

2 Introdução

A resposta em frequência de um sistema é definida como a resposta de estado estacionário do sistema a um sinal senoidal de entrada (Ogata, 2008; Dorf and Bishop, 2011). A resposta de um sistema linear com coeficientes constantes a um sinal de entrada senoidal é um sinal de saída senoidal de mesma frequência do sinal de entrada. Contudo, a magnitude e a fase do sinal de saída diferem da magnitude e da fase do sinal de entrada; o quanto diferem é uma função da frequência do sinal de entrada. Assim, será investigada a resposta em regime permanente do sistema a uma entrada senoidal variando-se a frequência.

A resposta em frequência define de maneira unívoca a dinâmica de um sistema, motivo pelo qual a representação gráfica da resposta em frequência é uma "radiografia" da dinâmica de um sistema. Um sistema linear invariante no tempo (LIT) de função de transferência $G(s)$, tem um ganho $|G(j\omega)|$ e produz uma defasagem $\angle G(j\omega)$.

Para obter de maneira experimental a resposta em frequência de um sistema, sugere-se o seguinte procedimento:

1. Aplicar sinais senoidais de frequências diferentes à entrada do sistema a ser analisado.
2. Determinar os ganhos e defasagem que produz o sistema a ditas frequências comparando os sinais de saída e de entrada senoidais.
3. Finalmente, representar os pontos nos diagramas logarítmicos (de amplitude e fase) que fazem parte do diagrama de Bode.

Antes de obter a resposta em frequência de maneira experimental é importante relembrar o comportamento dos sistemas de primeira e segunda ordem.

2.1 Comportamento de sistema de primeira ordem

Consideremos o comportamento dos sistemas de primeira ordem sem zeros para que as especificações de desempenho desses sistemas sejam definidas. Um sistema de primeira ordem pode ser descrito pela seguinte função de transferência

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{a}{s + a} = \frac{1}{s/a + 1} = \frac{1}{\tau s + 1}, \quad (1)$$

da Equação 1 podemos obter a frequência de canto $\omega_c = 1/\tau = a$. Se a entrada for um degrau unitário $U(s) = 1/s$, a transformada de Laplace da resposta do sistema ao degrau é

$$Y(s) = U(s) G(s) = \frac{a}{s(s + a)}. \quad (2)$$

A solução de uma equação diferencial correspondente a uma determinada entrada é composta de dois termos: (i) o termo da resposta natural, $y_n(t)$, e (ii) o termo da resposta forçada, $y_f(t)$. A resposta natural advém da dinâmica do sistema e a resposta forçada é devida ao sinal de entrada.

Aplicando a transformada inversa de Laplace à resposta do sistema à entrada degrau unitário, temos

$$y(t) = y_f(t) + y_n(t) = 1 - e^{-at} = 1 - e^{-t/\tau} \quad (3)$$

na qual o polo de entrada na origem gerou a resposta forçada $y_f(t) = 1$ e o polo do sistema em $-a$ gerou a resposta natural $y_n(t) = -e^{-at} = e^{-t/\tau}$. A Equação 3 é representada na Figura 1.

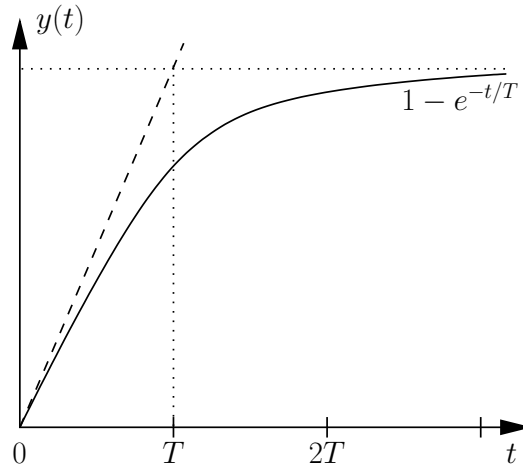


FIGURA 1: Resposta de um sistema de primeira ordem para uma entrada degrau unitária.

O parâmetro a é o único necessário para descrever a resposta transiente. Quando $t = 1/a$,

$$e^{-at} \Big|_{t=1/a} = e^{-1} = 0,37 \quad (4)$$

ou

$$y(t) \Big|_{t=1/a} = 1 - e^{-at} \Big|_{t=1/a} = 1 - 0,37 = 0,63. \quad (5)$$

As Equação 3, Equação 4 e Equação 5 são utilizadas para definir as especificações da resposta transitória. O fator $\tau=1/a$ é denominado como *constante de tempo* da resposta dada pela Equação 3. Uma característica importante de uma curva de resposta exponencial $y(t)$ é que em $t = \tau = 1/a$ o valor de $y(t)$ é 0,632 ou a resposta alcançou 63,2% de sua variação total, como verificado na

Equação 5. A inversa da constante de tempo possui as unidades (1/segundo) ou frequência. Assim, pode-se chamar o parâmetro a de *frequência exponencial*. Assim, a constante de tempo pode ser considerada uma especificação da resposta transitória para um sistema de primeira ordem, uma vez que ela está relacionada à velocidade com a qual o sistema responde a entrada degrau. Os parâmetros de desempenho para sistemas de primeira ordem são o tempo de subida, t_r , e o tempo de assentamento t_s .

O tempo de subida é definido como o tempo necessário para que a forma de onda partindo de 10 % de seu valor atinja 90 % desse valor. O tempo de subida é obtido resolvendo-se a Equação 3 para a diferença no tempo entre $y(t) = 0,9$ e $y(t) = 0,1$. Portanto,

$$t_r = \frac{2,31}{a} - \frac{0,11}{a} = \frac{2,2}{a}. \quad (6)$$

O tempo de assentamento é definido como o tempo para a resposta alcançar uma faixa de valores de 2 % em torno de seu valor final e ali permanecer. Fazendo $y(t) = 0,98$ na Equação 3 resolvendo o tempo, t , obtém-se o tempo de assentamento como sendo

$$t_s = \frac{4}{a}. \quad (7)$$

A variação de um parâmetro de um sistema de primeira ordem altera a velocidade da resposta. As variações nos parâmetros de um sistema de segunda ordem podem alterar a forma da resposta.

2.2 Comportamento de sistemas de segunda ordem

Um sistema de segunda ordem apresenta características muito similares a um sistema de primeira ordem dependendo dos valores de seus elementos, bem como podem apresentar oscilações puras ou amortecidas para uma resposta transiente.

A função de transferência de segunda ordem geral é dada por

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (8)$$

e a ampla variedade de respostas de um sistema de segunda ordem devido a uma entrada degrau unitária pode ser deduzida do diagrama de blocos da Figura 2.

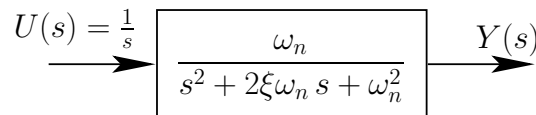


FIGURA 2: Diagrama de blocos de um sistema de segunda ordem geral.

Existem duas grandezas que podem ser utilizadas para descrever as características da resposta transitória de segunda ordem: a frequência natural e o coeficiente de amortecimento.

A frequência natural de um sistema de segunda ordem é a frequência de oscilação do sistema sem amortecimento. Por exemplo, a frequência de oscilação para um circuito RLC em série sem a resistência será igual a frequência natural.

O coeficiente de amortecimento, ξ , pode ser estabelecido de modo a comparar a frequência de decaimento exponencial da envoltória à frequência natural. Também o inverso dessas frequências, que é proporcional à relação do período natural e a constante de tempo exponencial, permanece o mesmo independente da base do tempo. Define-se o coeficiente de amortecimento, ξ , como sendo:

$$\xi = \frac{\text{Frequência exponencial de decaimento}}{\text{Frequência natural (rad/s)}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\text{Período natural (s)}}{\text{Constante de tempo exponencial}}.$$

O sistema de segunda ordem geral mostra, Equação 8, as grandezas ξ e ω_n . A resposta para esse tipo de sistema pode ser de quatro tipos:

- Resposta sem amortecimento
- Resposta subamortecida
- Resposta criticamente amortecida
- Resposta super amortecida

A natureza da resposta para os circuitos estudados será dependente dos valores de resistência, indutância e capacitância. Tais valores terão influência sobre a frequência natural do sistema (ω_n) e o coeficiente de amortecimento (ξ) do mesmo. Para os sistemas subamortecidos outros parâmetros de desempenho são o tempo de pico (t_p), o sobressinal percentual (%MP), o tempo de acomodação (t_s) e o tempo de subida (t_r).

3 Procedimento básico

3.1 Sistema de primeira ordem

Para os sistemas de primeira ordem será simulado um circuito RC série, como mostrado na Figura 3, no qual $u(t)$ é a tensão de entrada e $y(t)$ é a tensão do capacitor e representa a saída do sistema. Experimentalmente o circuito deverá ser simulado utilizando o software LTSpice. Vídeos tutoriais auxiliares estão disponíveis no Moodle. A entrada do circuito RC será dada por uma *fonte de tensão alternada configurada para gerar um sinal senoidal*. A Figura 4 mostra o circuito montado no simulador LTSpice.

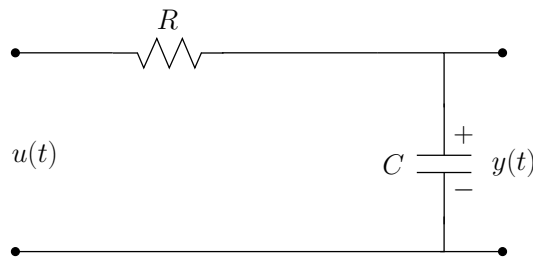


FIGURA 3: Circuito RC genérico utilizado no estudo de sistemas de primeira ordem.

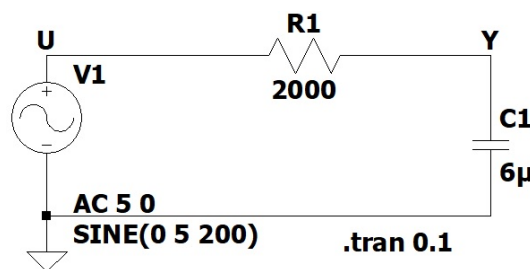


FIGURA 4: Representação da implementação virtual do circuito RC utilizado no estudo de sistemas de primeira ordem.

3.1.1 Metodologia

1. Calcular a função de transferência do sistema dado na Figura 3.
2. Calcular a função de transferência senoidal dada uma entrada senoidal

$$u(t) = 5 \sin(\omega t).$$

TABELA 1: Valores dos componentes utilizados na prática.

Grupo	Resistência	Capacitância
Grupo 1	10 k Ω	1 μ F
Grupo 2	1 k Ω	10 μ F
Grupo 3	2 k Ω	5 μ F
Grupo 4	10 k Ω	2 μ F
Grupo 5	20 k Ω	50 μ F
Grupo 6	1 k Ω	20 μ F
Grupo 7	50 k Ω	1 μ F
Grupo 8	30 k Ω	1 μ F
Grupo 9	5 k Ω	3 μ F
Grupo 10	1 k Ω	5 μ F
Grupo 11	1 k Ω	1 μ F
Grupo 12	12 k Ω	5 μ F
Grupo 13	15 k Ω	1 μ F
Grupo 14	10 k Ω	4 μ F
Grupo 15	15 k Ω	5 μ F

Deve-se calcular o módulo e a defasagem da função de transferência senoidal

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \right|$$

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}$$

3. Calcular a constante de tempo do sistema.
4. Calcular a frequência de canto da função de transferência.
5. Obter experimentalmente os valores de defasagem e módulo a partir da análise dos sinais de tensão na entrada e saída do sistema. (Vide Seção 4).
6. Trace o diagrama de Bode para a função de transferência de malha aberta do sistema da Figura 3. Considere um sinal senoidal de 5 sen(ωt) V e os valores dos componentes indicados na Tabela 1. Mostre UM gráfico de simulação para a frequência de canto ou para altas frequências e faça os respectivos comentários. O gráfico deve mostrar os sinais senoidais da entrada e da saída para uma dada frequência ω .

3.2 Sistema de segunda ordem

Circuito RLC

Considere o circuito RLC série como mostrado na Figura 5, no qual $u(t)$ é a tensão de entrada e $y(t)$ é a tensão do capacitor e representa a saída do sistema. Experimentalmente o circuito deverá ser simulado utilizando o software LTSpice. Vídeos tutoriais auxiliares estão disponíveis no Moodle. A entrada do circuito RLC será dada por uma *fonte de tensão alternada configurada para gerar um sinal senoidal*. A Figura 6 mostra o circuito montado no simulador LTSpice.

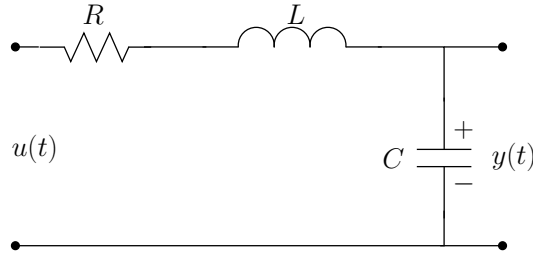


FIGURA 5: Circuito RLC genérico utilizado no estudo de sistemas de segunda ordem.

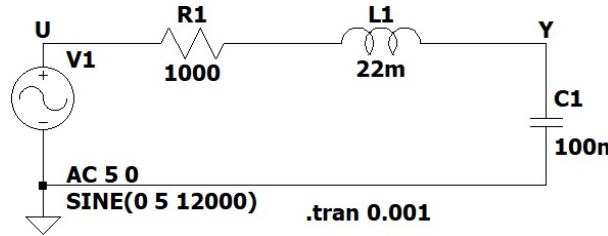


FIGURA 6: Representação da simulação do circuito RLC utilizado no estudo de sistemas de segunda ordem.

3.2.1 Tarefa a ser desenvolvida no relatório

1. Calcular a função de transferência do sistema dado na Figura 5.
2. Calcular a função de transferência senoidal dada uma entrada senoidal

$$u(t) = 5 \sin(\omega t).$$

Deve-se calcular o módulo e a defasagem da função de transferência senoidal

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \right|$$

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}$$

3. Verificar as relações da frequência natural (ω_n) e do coeficiente de amortecimento (ξ). Calcular os valores da frequência natural e coeficiente de amortecimento para os valores dados na Tabela 2. A seguir, são dadas as relações dos diferentes parâmetros de desempenho:

- Frequência natural (ω_n):

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- Coeficiente de amortecimento (ξ):

$$\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

- Tempo de pico (T_p):

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

- Tempo de assentamento (T_s):

$$T_s = \frac{4}{\xi \omega_n}$$

- Sobre-sinal percentual (%SP):

$$\%SP = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100$$

- Tempo de subida (T_r): usando um polinômio que aproxima a curva de tempo de subida normalizado em função do coeficiente de amortecimento, obtemos:

$$\omega_n T_r = 1,76 \xi^3 - 0,417 \xi^2 + 1,039 \xi + 1$$

TABELA 2: Valores dos componentes utilizados na prática.

Grupo	Resistência	Indutância	Capacitância
Grupo 1	1000 Ω	22 mH	100 nF
Grupo 2	500 Ω	30 mH	500 nF
Grupo 3	100 Ω	10 mH	500 nF
Grupo 4	1000 Ω	100 mH	100 nF
Grupo 5	500 Ω	500 mH	100 nF
Grupo 6	1000 Ω	500 mH	100 nF
Grupo 7	750 Ω	22 mH	100 nF
Grupo 8	400 Ω	30 mH	500 nF
Grupo 9	50 Ω	10 mH	500 nF
Grupo 10	500 Ω	100 mH	900 nF
Grupo 11	650 Ω	100 mH	900 nF
Grupo 12	1000 Ω	50 mH	100 nF
Grupo 13	500 Ω	50 mH	100 nF
Grupo 14	1350 Ω	50 mH	100 nF
Grupo 15	500 Ω	20 mH	350 nF

- Trace o diagrama de Bode para a função de transferência de malha aberta do sistema da Figura 5. Considere um sinal senoidal de 5 sen(ωt) V e os valores dos componentes indicados na Tabela 2. Mostre UM gráfico de simulação para a frequência natural ou para altas frequências e faça os respectivos comentários. O gráfico deve mostrar os sinais senoidais da entrada e da saída para uma dada frequência ω .

4 Cálculo do ganho e defasagem

Para obter os ganhos e defasagens da função de transferência dos circuitos estudados, um método baseado em inspeção visual é apresentado a seguir. **Recomenda-se medir a defasagem no cruzamento a zero.**

Simulação de Transitório no LTSpice

Para uma dada frequência ω , o ganho em dB e a defasagem em graus são calculados da seguinte maneira:

$$\text{ganho dB} = A_{dB} = 20 \log_{10} \left| \frac{y_{pp}}{u_{pp}} \right|$$

$$\text{fase}^\circ = \phi = \frac{360^\circ * t_{atraso}}{T_{sinal}}$$

onde y_{pp} é a amplitude pico a pico do sinal de saída, u_{pp} é a amplitude pico a pico do sinal de entrada, t_{atraso} é a defasagem do sinal de saída em relação ao sinal de entrada em unidades de

tempo, T_{signal} é o período do sinal de tensão da entrada. Todos estes valores serão obtidos da análise das curvas senoidais de entrada e saída obtidas na simulação de transitório do LTSpice. *Um vídeo tutorial disponível no Moodle explica como configurar esta simulação e obter os valores desejados.*

4.1 Sistemas de primeira ordem

Obter o ganho e fase para pelo menos oito frequências. Para esta parte observe a Figura 7 e analise quais valores de frequência são importantes de serem analisados para obter um diagrama de Bode adequado.

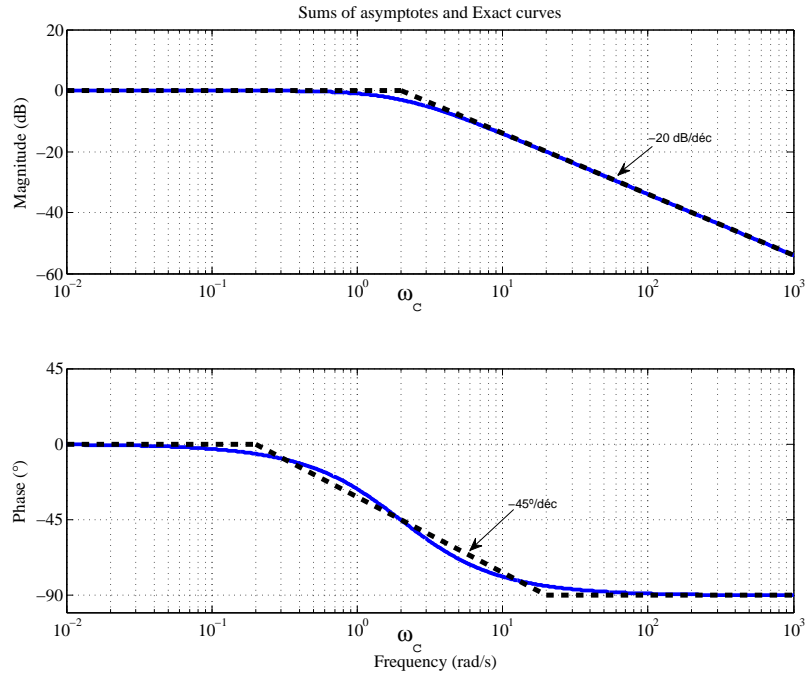


FIGURA 7: Diagrama de Bode de um sistema de primeira ordem.

1. Considere uma frequência na região de baixa frequência ($\omega \approx 0$). Determinar o ganho estático do sistema $G(j0)$ aplicando muito baixas frequências, nas quais a defasagem entre as senoides de saída e entrada é quase nula.
2. Frequência de canto ω_c . **Procurar a frequência na qual a defasagem** seja de -45° e o ganho seja de -3 dB. Dita frequência coincide com a frequência de canto $\omega_c = 1/T$. Esta frequência define a largura de banda do sistema de primeira ordem e nessa frequência o diagrama assintótico tem uma mudança de inclinação de 0 dB/déc a -20 dB/déc.
3. Baixas frequências. Escolher aproximadamente frequências $0,2\omega_c$, $0,4\omega_c$, $0,5\omega_c$, $0,8\omega_c$.
4. Altas frequências. Escolher aproximadamente frequências $1,2\omega_c$, $1,5\omega_c$, $2\omega_c$, $5\omega_c$.
5. Frequências muito altas. Escolher frequências $10\omega_c$, $20\omega_c$.
6. Preencher a Tabela 3 com os dados. Pode-se realizar uma varredura mais detalhada escolhendo mais pontos e ampliando a Tabela 3.
7. Desenhar os dados no diagrama de Bode da Figura 9. Imprimir a folha e desenhar à mão.

TABELA 3: Tabela de dados: Para ser preenchida com os dados experimentais do sistema de primeira ordem RC. $\omega_c =$ _____ (rad/s).
 $f_c =$ _____ (Hertz).

	ω (rad/s)	f (Hertz)	$T_{\text{sin}}al$	T_{atraso}	u_{pp} (V)	y_{pp} (V)	ϕ ($^\circ$)	$A_{dB} = 20 \log_{10} \frac{y_{pp}}{u_{pp}}$
≈ 0								
$0,2 \omega_c$								
$0,4 \omega_c$								
$0,5 \omega_c$								
$0,8 \omega_c$								
ω_c								
$1,2 \omega_c$								
$1,5 \omega_c$								
$2 \omega_c$								
$5 \omega_c$								
$10 \omega_c$								
$20 \omega_c$								

4.2 Sistemas de segunda ordem

Obter o ganho e fase para pelo menos oito frequências. Para esta parte observe a Figura 8 e analise quais valores de frequência são importantes de serem analisados para obter um diagrama de Bode adequado.

1. Considere uma frequência na região de baixa frequência ($\omega \approx 0$). Determinar o ganho estático do sistema $G(j0)$ aplicando muito baixas frequências, nas quais a defasagem entre as senoidais de saída e entrada é quase nula.
2. Frequência de oscilação natural ω_n . **Procurar a frequência na qual a defasagem seja de -90° .** O ganho neste caso pode ser muito variável e dependerá do coeficiente de amortecimento do sistema ξ . Em dita frequência o diagrama assintótico tem uma mudança de inclinação de 0 dB/déc a -40 dB/déc.
3. Baixas frequências. Escolher aproximadamente frequências $0,2 \omega_n$, $0,4 \omega_n$, $0,5 \omega_n$, $0,8 \omega_n$.
4. Altas frequências. Escolher aproximadamente frequências $1,2 \omega_n$, $1,5 \omega_n$, $2 \omega_n$, $5 \omega_n$.
5. Frequências muito altas. Escolher frequências $10 \omega_n$, $20 \omega_n$.
6. Preencher a Tabela 4 com os dados. Pode-se realizar uma varredura mais detalhada escolhendo mais pontos e ampliando a tabela.
7. Desenhar os dados no diagrama de Bode da Figura 10. Imprimir a folha e desenhar à mão.

Recomenda-se fazer as medições da defasagem dos sinais no cruzamento com o zero ao invés de medir a defasagem dos picos.

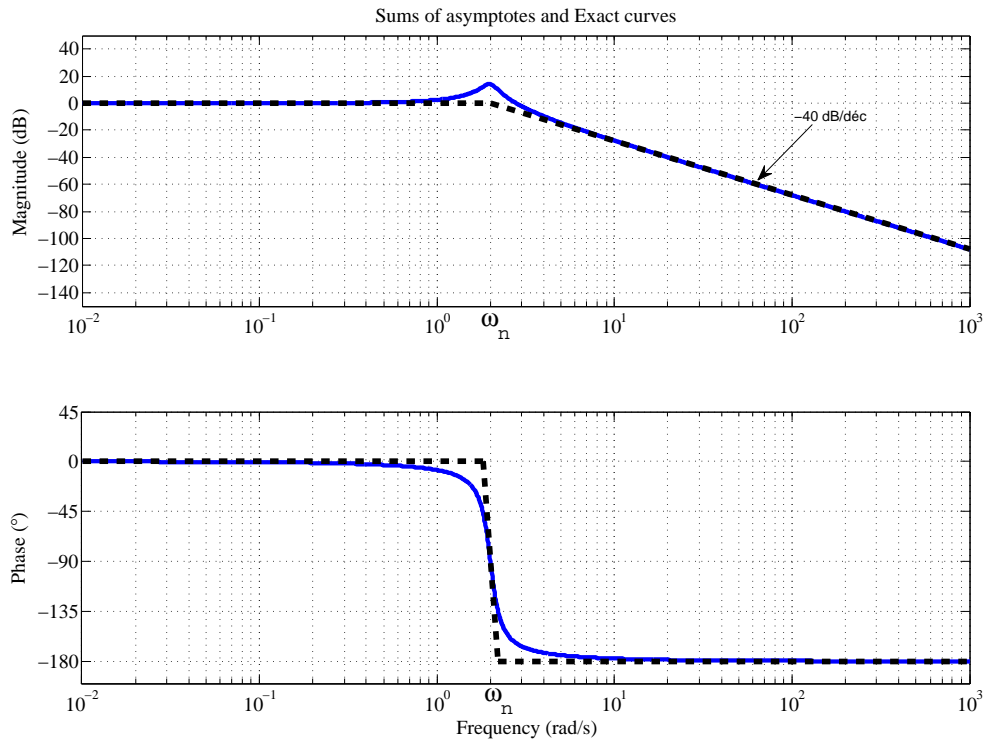


FIGURA 8: Diagrama de Bode de um sistema de segunda ordem.

TABELA 4: Tabela de dados: Para ser preenchida com os dados experimentais do sistema de segunda ordem RLC. $\omega_n =$ _____ (rad/s).
 $f_n =$ _____ (Hertz).

	ω (rad/s)	f (Hertz)	T_{sinal}	T_{atraso}	u_{pp} (V)	y_{pp} (V)	ϕ (°)	$A_{dB} = 20 \log_{10} \frac{y_{pp}}{u_{pp}}$
≈ 0								
$0,2 \omega_n$								
$0,4 \omega_n$								
$0,5 \omega_n$								
$0,8 \omega_n$								
ω_n								
$1,2 \omega_n$								
$1,5 \omega_n$								
$2 \omega_n$								
$5 \omega_n$								
$10 \omega_n$								
$20 \omega_n$								

5 Questões

Responder as seguintes questões:

1. A frequência de canto ω_c calculada teoricamente é a mesma obtida experimentalmente? Quais são os fatores de influenciariam nessa diferença?
2. A frequência natural ω_n calculada teoricamente é a mesma obtida experimentalmente? Quais são os fatores de influenciariam nessa diferença?
3. Em qual dos circuitos se observa ressonância? Justifique sua resposta.

4. Enumere as possíveis fontes de erro nas experiências.
5. É possível obter ressonância em um circuito RLC? Quais seriam as condições para que ocorra ressonância em dito circuito?

6 Estrutura do Relatório

1. Capa. (Bem identificado. Nome do grupo, nomes completos dos alunos, RA, Quadrimestre, Ano.)
2. Objetivo
3. Descrição experimental/Metodologia
 - (a) Sistema de primeira ordem circuito RC
 - i. Itens da seção 3.1.1
 - ii. Tabela para os dados experimentais, conforme Tabela 3, para o par de valores da Tabela 1.
 - iii. Figura para o diagrama de Bode experimental, conforme Figura 9, para o par de valores da Tabela 1.
 - (b) Sistema de segunda ordem circuito RLC
 - i. Itens da seção 3.2.1
 - ii. Tabela para os dados experimentais, conforme Tabela 4 para o trio de valores da Tabela 2.
 - iii. Figura para o diagrama de Bode experimental, conforme Figura 10, para o trio de valores da Tabela 4.
4. Responder as questões da seção 5.
5. Resultados e Discussões. (Incluir figuras de simulação com suas respectivas discussões).
6. Conclusões.
7. Referências bibliográficas.

Referências

- Dorf, R. C., Bishop, R. H., 2011. Sistemas de Controle Modernos, 11th Edition. LTC, Rio de Janeiro.
- Ogata, K., 2008. Engenharia de Controle Moderno. Pearson & Prentice Hall, Brasil.

A Anexos

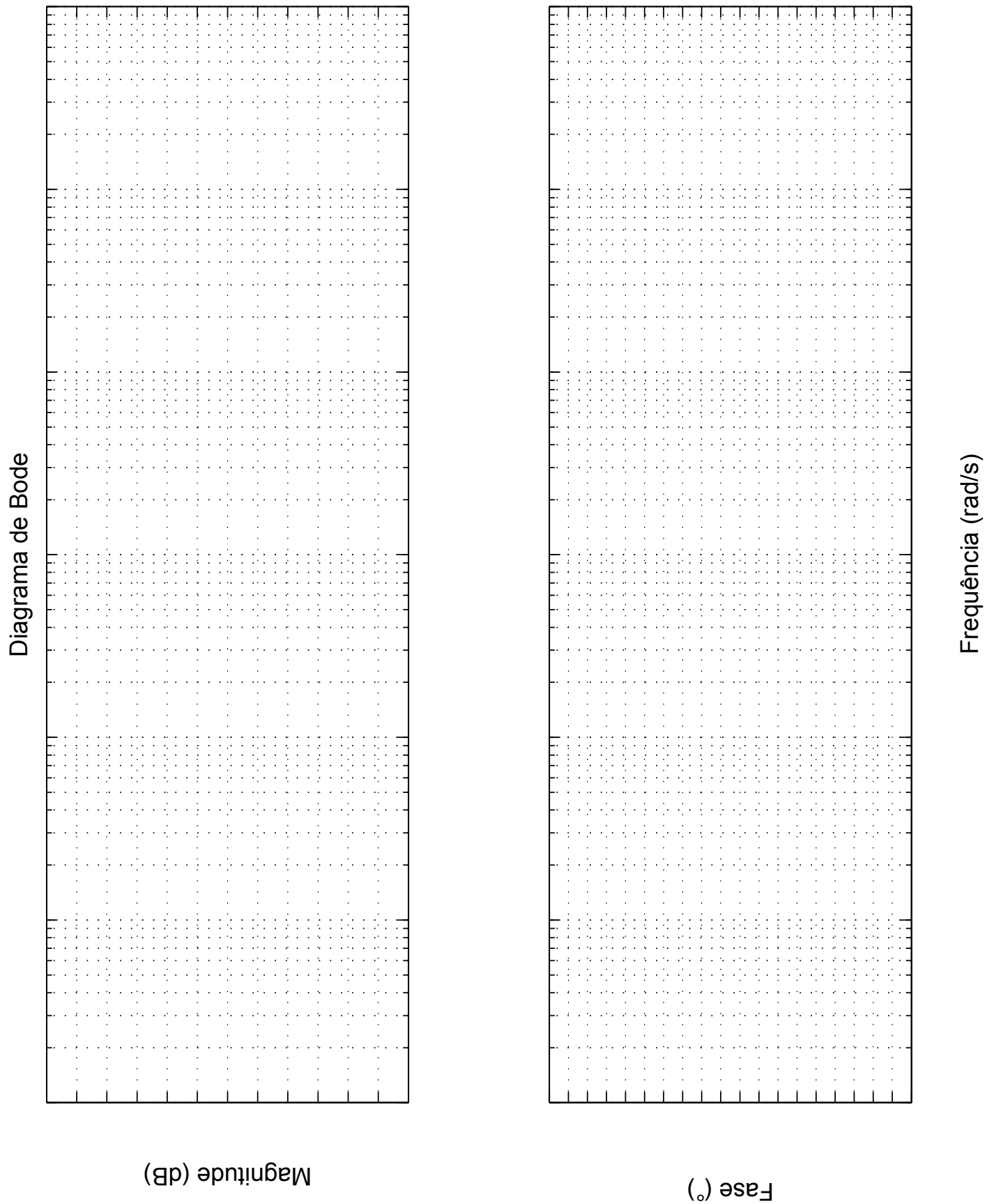


FIGURA 9: Diagrama de Bode do circuito RC (sistema de primeira ordem).

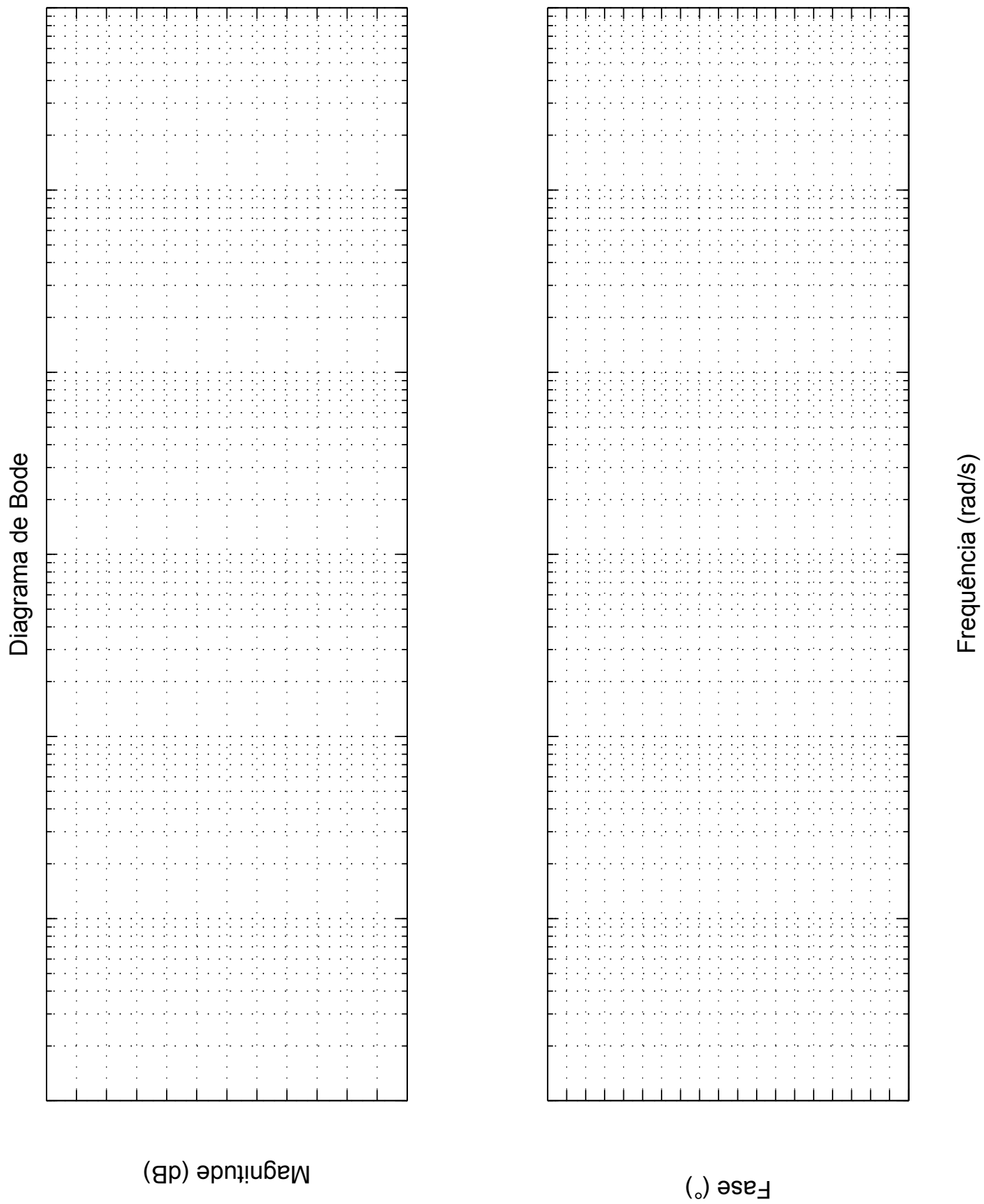


FIGURA 10: Diagrama de Bode do circuito RLC (sistema de segunda ordem).