$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$$K_1 = \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x_1 = \bar{x}_1,\, x_2 = \bar{x}_2}$$

$$K_2 = \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{x_1 = \bar{x}_1,\, x_2 = \bar{x}_2}$$

A técnica de linearização apresentada aqui é válida nas proximidades das condições de operação. No entanto, se as condições de operação variam muito, essas equações linearizadas não são adequadas, e as equações não lineares devem ser utilizadas. É importante lembrar que um modelo matemático particular, utilizado para fins de análise e projeto, pode representar com precisão a dinâmica de um sistema real para certas condições de operação, mas pode não ser preciso para outras condições de operação.

Exemplo 2.5 Linearize a equação não linear

$$z = xy$$

na região $5 \leq x \leq 7$, $10 \leq y \leq 12$. Encontre o erro para o caso em que a equação linearizada seja utilizada para calcular o valor de z quando $x = 5$ e $y = 10$.

Como a região considerada é dada por $5 \leq x \leq 7$, $10 \leq y \leq 12$, selecione $\bar{x} = 6$, $\bar{y} = 11$. Então, $\bar{z} = \bar{x}\,\bar{y} = 66$. Vamos obter a equação linearizada para a equação não linear nas proximidades do ponto $\bar{x} = 6$, $\bar{y} = 11$.

Expandindo a equação não linear em uma série de Taylor próxima do ponto $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$ e desprezando os termos de ordem mais elevada, temos:

$$z - \bar{z} = a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y})$$

onde

$$a = \left.\frac{\partial(xy)}{\partial x}\right|_{x = \bar{x},\, y = \bar{y}} = \bar{y} = 11$$

$$b = \left.\frac{\partial(xy)}{\partial y}\right|_{x = \bar{x},\, y = \bar{y}} = \bar{x} = 6$$

Então, a equação linearizada é:

$$z - 66 = 11(x - 6) + 6(y - 11)$$

ou

$$z = 11x + 6y - 66$$

Quando $x = 5$, $y = 10$, o valor de z dado pela equação linearizada é:

$$z = 11x + 6y - 66 = 55 + 60 - 66 = 49$$

O valor exato de z é $z = xy = 50$. Assim, o erro é $50 - 49 = 1$. Em termos de porcentagem, o erro é de 2%.

Exemplos de problemas com soluções

A.2.1 Simplifique o diagrama de blocos da Figura 2.17.

Solução. Inicialmente, mova o ponto de ramificação que contém H_1 para fora da malha que contém H_2, como mostra a Figura 2.18(a). Em seguida, a eliminação de duas malhas resulta na Figura 2.18(b). Reduzindo dois blocos a um único, teremos a Figura 2.18(c).

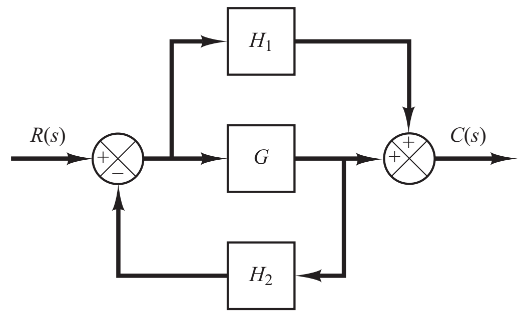


FIGURA 2.17 Diagrama de blocos de um sistema.

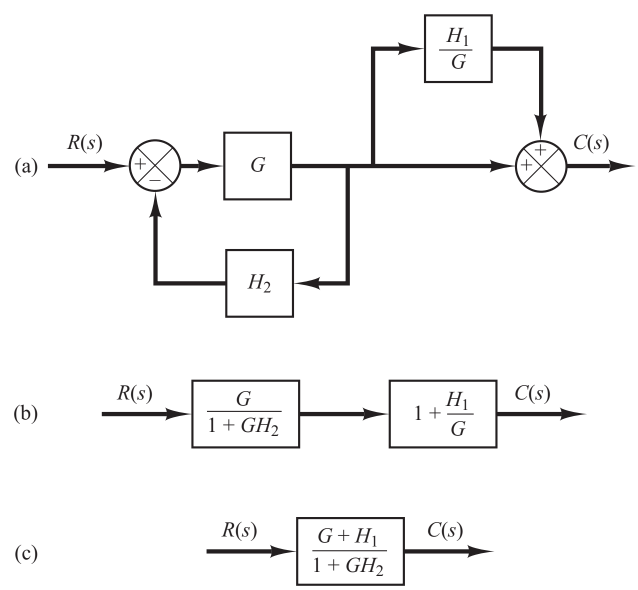


FIGURA 2.18 Diagrama de blocos simplificado para o sistema mostrado na Figura 2.17.

A.2.2 Simplifique o diagrama de blocos da Figura 2.19. Obtenha a função de transferência relacionando $C(s)$ e $R(s)$.

Solução. O diagrama de blocos da Figura 2.19 pode ser modificado como indica a Figura 2.20(a). Eliminando o ramo direto menor, obtemos a Figura 2.20(b), que pode ser reduzida à Figura 2.20(c). A função de transferência $C(s)/R(s)$ é, então, dada por:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_1 G_2 + G_2 + 1$$

O mesmo resultado pode ser obtido procedendo-se como se segue: sendo o sinal $X(s)$ a soma de dois sinais, $G_1R(s)$ e $R(s)$, temos:

$$X(s) = G_1R(s) + R(s)$$

O sinal de saída $C(s)$ é a soma de $G_2X(s)$ e $R(s)$. Então,

$$C(s) = G_2X(s) + R(s) = G_2[G_1R(s) + R(s)] + R(s)$$

E, assim, obtemos o mesmo resultado anterior:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_1 G_2 + G_2 + 1$$

FIGURA 2.21
Diagrama de blocos de um sistema.

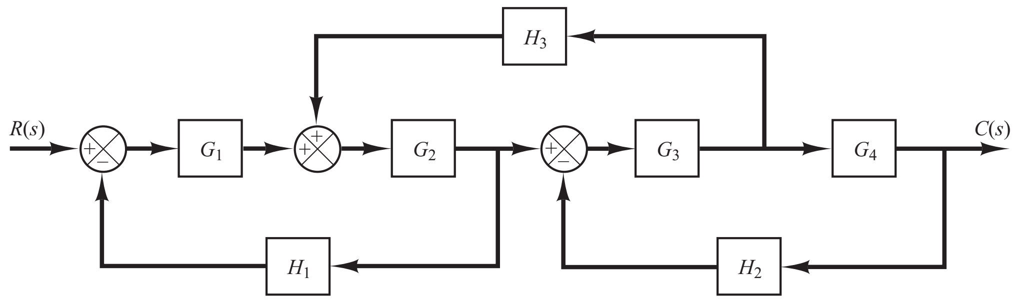
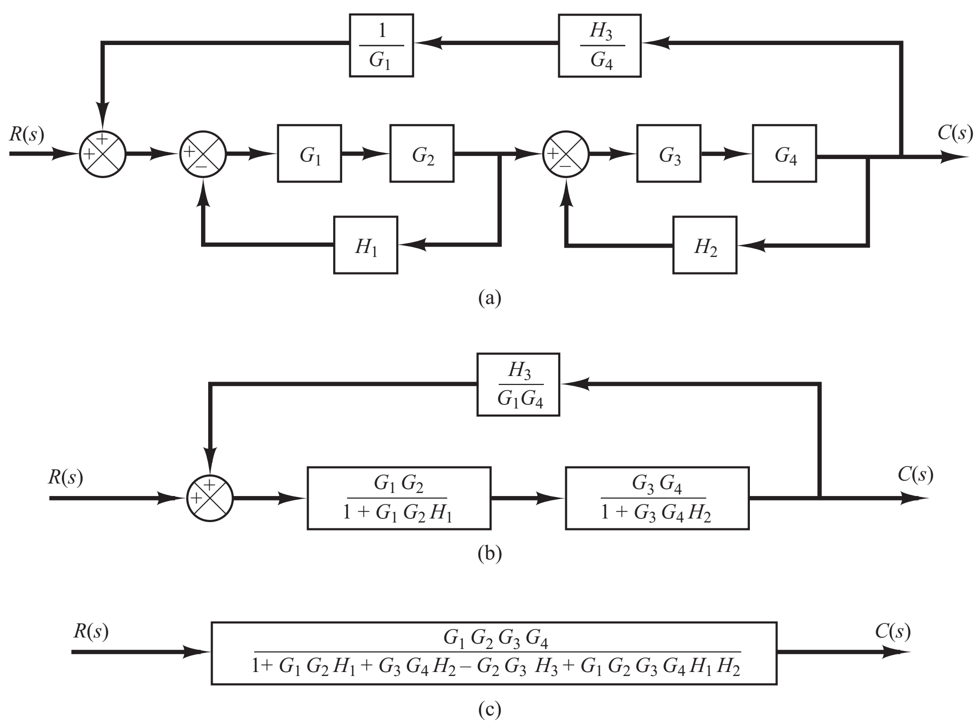


FIGURA 2.22
Sucessivas reduções do diagrama de blocos mostrado na Figura 2.21.



A.2.4 Obtenha as funções de transferência $C(s)/R(s)$ e $C(s)/D(s)$ do sistema indicado na Figura 2.23.

Solução. A partir da Figura 2.23, temos:

$$U(s) = G_f R(s) + G_c E(s) \tag{2.47}$$

$$C(s) = G_p[D(s) + G_1 U(s)] \tag{2.48}$$

$$E(s) = R(s) - HC(s) \tag{2.49}$$

Substituindo a Equação 2.47 na Equação 2.48, obtemos:

$$C(s) = G_p D(s) + G_1 G_p[G_f R(s) + G_c E(s) \tag{2.50}$$

Substituindo a Equação 2.49 na Equação 2.50, obtemos:

$$C(s) = G_p D(s) + G_1 G_p\{G_f R(s) + G_c[R(s) - HC(s)]\}$$

Solucionando essa última equação para $C(s)$, obtemos:

$$C(s) + G_1 G_p G_c HC(s) = G_p D(s) + G_1 G_p(G_f + G_c) R(s)$$

Então,

$$C(s) = \frac{G_p D(s) + G_1 G_p (G_f + G_c) R(s)}{1 + G_1 G_p G_c H} \tag{2.51}$$

Note que a Equação 2.51 fornece a resposta $C(s)$ quando ambas as entradas, a de referência, $R(s)$, e a de distúrbio, $D(s)$, estão presentes.

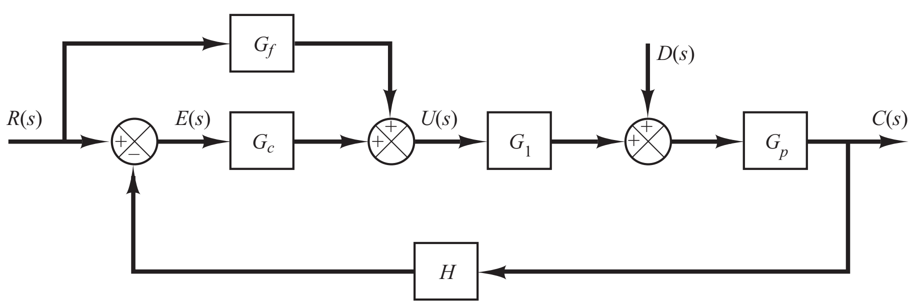
Para determinar a função de transferência $C(s)/R(s)$, fazemos $D(s) = 0$ na Equação 2.51. Assim, obtemos:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_p (G_f + G_c)}{1 + G_1 G_p G_c H}$$

Da mesma maneira, para determinar a função de transferência $C(s)/D(s)$, fazemos $R(s) = 0$ na Equação 2.51. Assim, $C(s)/D(s)$ pode ser dado por:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_p}{1 + G_1 G_p G_c H}$$

FIGURA 2.23 Sistema de controle com entrada de referência e entrada de distúrbio.



A.2.5 A Figura 2.24 mostra um sistema com duas entradas e duas saídas. Determine $C_1(s)/R_1(s)$, $C_1(s)/R_2(s)$, $C_2(s)/R_1(s)$ e $C_2(s)/R_2(s)$. (Ao determinar as saídas correspondentes a $R_1(s)$, considere $R_2(s) = 0$ e vice-versa.)

Solução. A partir da figura, obtemos:

$$C_1 = G_1(R_1 - G_3C_2) \tag{2.52}$$

$$C_2 = G_4(R_2 - G_2C_1) \tag{2.53}$$

Substituindo a Equação 2.53 na Equação 2.52, obtemos:

$$C_1 = G_1[R_1 - G_3G_4(R_2 - G_2C_1)] \tag{2.54}$$

Substituindo a Equação 2.52 na Equação 2.53, temos:

$$C_2 = G_4[R_2 - G_2G_1(R_1 - G_3C_2)] \tag{2.55}$$

Resolvendo a Equação 2.54 para obter C_1, o resultado é:

$$C_1 = \frac{G_1 R_1 - G_1 G_3 G_4 R_2}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4} \tag{2.56}$$

Resolvendo a Equação 2.55 para obter C_2, temos:

$$C_2 = \frac{-G_1 G_2 G_4 R_1 + G_4 R_2}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4} \tag{2.57}$$

As equações 2.56 e 2.57 podem ser combinadas para obtermos a matriz de transferência a seguir:

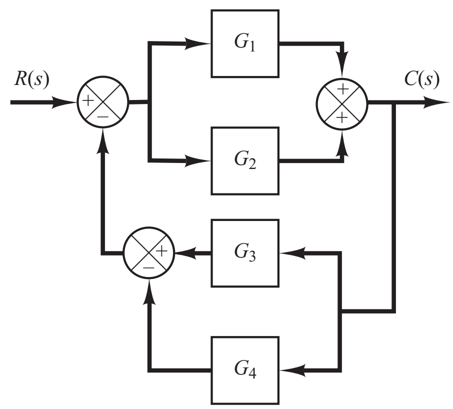
Assim, a aproximação linear da equação não linear dada, nas proximidades do ponto de operação, é:

$$z - 30x - 72y + 243 = 0$$

Problemas

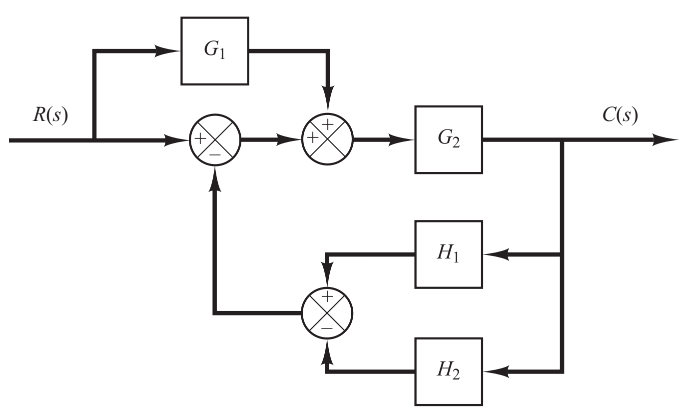
B.2.1 Simplifique o diagrama de blocos mostrado na Figura 2.29 e obtenha a função de transferência de malha fechada $C(s)/R(s)$.

FIGURA 2.29 Diagrama de blocos de um sistema.



B.2.2 Simplifique o diagrama de blocos exposto na Figura 2.30 e obtenha a função de transferência de malha fechada $C(s)/R(s)$.

FIGURA 2.30 Diagrama de blocos de um sistema.



B.2.3 Simplifique o diagrama de blocos mostrado na Figura 2.31 e obtenha a função de transferência de malha fechada $C(s)/R(s)$.

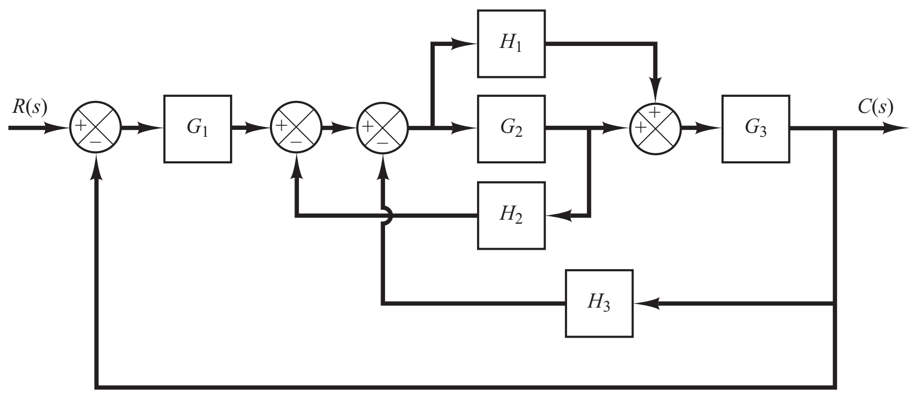


FIGURA 2.31 Diagrama de blocos de um sistema.

B.2.4 Considere os controladores automáticos industriais cujas ações de controle são proporcionais, integrais, proporcionais-integrais, proporcionais-derivativas e proporcionais-integrais-derivativas. As funções de transferência desses controladores podem ser dadas, respectivamente, por:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p(1 + T_d s)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$

onde $U(s)$ é a transformada de Laplace de $u(t)$, a saída do controlador, e $E(s)$ é a transformada de Laplace de $e(t)$, o sinal de erro atuante. Esboce as curvas de $u(t)$ *versus* t para cada um dos cinco tipos de controladores quando o sinal de erro atuante for:

(a) $e(t)$ = função degrau unitário

(b) $e(t)$ = função rampa unitária

No esboço das curvas, suponha que os valores numéricos de K_p, K_i e T_i sejam dados como:

K_p = ganho proporcional = 4

K_i = ganho integral = 2

T_i = tempo integrativo = 2 s

T_d = tempo derivativo = 0,8 s

B.2.5 A Figura 2.32 mostra um sistema de malha fechada com uma entrada de referência e um distúrbio de entrada. Obtenha a expressão para a saída $C(s)$ quando tanto a entrada de referência como a de distúrbio estiverem presentes.

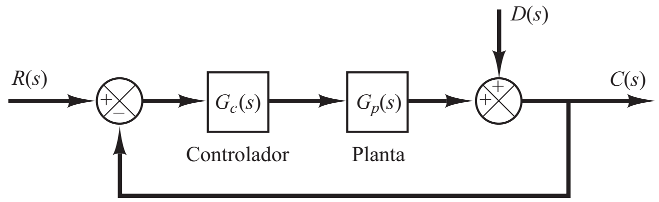


FIGURA 2.32 Sistema de malha fechada.

B.2.6 Considere o sistema mostrado na Figura 2.33. Deduza a expressão para os erros de estado estacionário quando tanto a entrada de referência $R(s)$ como a de distúrbio $D(s)$ estiverem presentes.

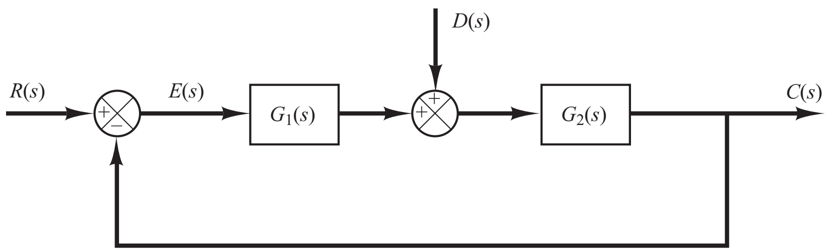


FIGURA 2.33 Sistema de controle.

B.2.7 Obtenha as funções de transferência $C(s)/R(s)$ e $C(s)/D(s)$ do sistema apresentado na Figura 2.34.

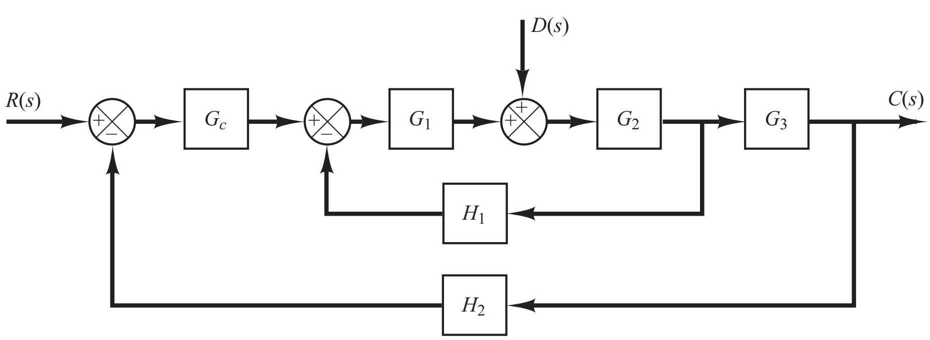


FIGURA 2.34 Sistema de controle.

B.2.8 Obtenha a representação no espaço de estados do sistema mostrado na Figura 2.35.

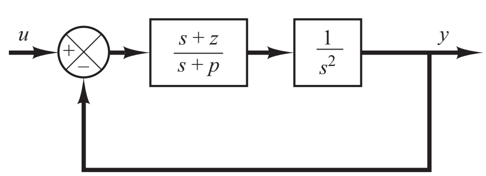


FIGURA 2.35 Sistema de controle.