Controle baseado no lugar das raízes

Prof. Dr. Helói F. G. Genari
email:heloi.genari@ufabc.edu.br

Quadrimestre Suplementar

Sumário: estabilidade

- **Controle** por **avanço** de fase;
- **Controle** por **atraso** de fase;
- **Controle avanço-atraso**.

- **Lembrando:** a função de transferência de malha fechada é:

$$T(s) = \frac{KP(s)}{1 + KP(s)H(s)}$$

- O **lugar das raízes** é caracterizado pela **equação característica**:

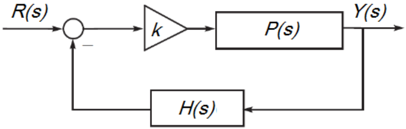
$$1 + KP(s)H(s) = 0$$

que pode ser reescrita como:

$$KP(s)H(s) = -1,$$

o que implica em:

$$|KP(s)H(s)| = 1, \qquad \angle KP(s)H(s) = \pm 180^\circ(2n+1), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$



- A **função de transferência** do **controlador** por **avanço** é definida como:

$$K(s) = K_c \alpha \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}} = K_c \frac{s+(-z)}{s+(-p)} \qquad (0<\alpha<1),$$

  em que z é o zero do controlador e p é o polo do controlador;

- Os valores de K_c, z e p são determinados para levar o **sistema controlado** para uma **determinado desempenho**: frequência natural, sobressinal, tempo de estabilização . . .

- O **controlador por avanço** será projetado usando o método do **lugar das raízes**.

Controlador por avanço baseado no lugar das raízes

- **Exemplo:** projete um controlador por avanço para a planta

$$P(s) = \frac{10}{s(s+1)},$$

considerando que o sistema está em malha fechada, com realimentação unitária ($H(s) = 1$) negativa e deve ter o **fator de amortecimento** $\xi = 0.5$ e **frequência natural** de $\omega_n = 3rad/s$;

- Os **polos desejados de malha fechada** podem ser definidos como:

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \\ &= -1.5 \pm 2.5981j \end{aligned}$$

- Definindo o polo com **parte imaginária positiva** $s = -1.5 + 2.5981j$ como **dominante principal**, o ângulo do sistema em malha aberta é:

$$\angle \frac{10}{s(s+1)}H(s)|_{s=-1.5+2.5981j} = \angle \frac{10}{(-1.5+2.5981j)(-1.5+2.5981j+1)}$$

- **Exemplo:** projete um controlador por avanço para a planta

$$P(s) = \frac{10}{s(s+1)},$$

considerando que o sistema está em malha fechada, com realimentação unitária ($H(s) = 1$) negativa e deve ter o **fator de amortecimento** $\xi = 0.5$ e **frequência natural** de $\omega_n = 3rad/s$;

- Os **polos desejados de malha fechada** podem ser definidos como:

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \\ &= -1.5 \pm 2.5981j \end{aligned}$$

- Definindo o polo com **parte imaginária positiva** $s = -1.5 + 2.5981j$ como **dominante principal**, o ângulo do sistema em malha aberta é:

$$\begin{aligned} \angle \frac{10}{s(s+1)}H(s)|_{s=-1.5+2.5981j} &= \angle \frac{10}{(-1.5+2.5981j)(-1.5+2.5981j+1)} \\ &= \angle \frac{10}{-6.0001-5.1962j} \\ &= \angle 10 - \angle -6.0001 - 5.1962j \\ &= 0 - (180^\circ + 40.89^\circ) \\ &= -220.89^\circ \end{aligned}$$

- Para satisfazer a **condição de ângulo** do lugar das raízes:

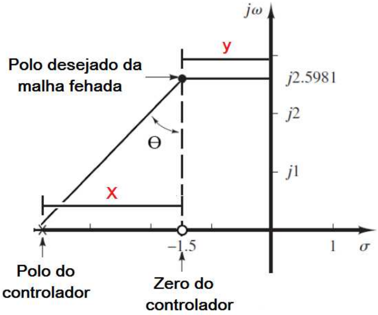
$$\angle P(s)H(s) = \pm 180^\circ(2n+1)$$

- Dessa forma, o **controlador deve adicionar** θ graus para **satisfazer a condição de angulo**:

$$\theta - 220.89^\circ = -180^\circ,$$

  em que $\theta = 40.89^\circ$.

- **O posicionamento dos polos e zeros do controlador pode adicionar o ângulo faltante** (**zeros adicionam fase e polos subtraem fase**);



- O **polo do controlador** é calculado como:

$$p = -(x + y) = -(x + 1.5),$$

em que

$$\tan(\theta = 40.89^\circ) = \frac{x}{2.5981} \Rightarrow x = 2.25$$

- O **polo do controlador** é determinado como:

$$p = -(2.25 + 1.5) = -3.75$$

- O **controlador** tem a seguinte forma:

$$K(s) = K_c \frac{s + (-z)}{s + (-p)} = K_c \frac{s + 1.5}{s + 3.75}$$

- O K_c é determinado pela **condição de módulo**:

$$|K(s)P(s)H(s)|_{s=-1.5+2.5981j} = 1$$

$$\left| Kc \frac{(-1.5 + 2.5981j + 1.5)}{(-1.5 + 2.5981j + 3.75)} \frac{10}{(-1.5 + 2.5981j)(-1.5 + 2.5981j + 1)} \right| = 1$$

$$|Kc| \frac{|2.5981j|}{|2.25 + 2.5981j|} \frac{|10|}{|-1.5 + 2.5981j||-0.5 + 2.5981j|} = 1$$

$$10K_c 0.0952 = 1 \Rightarrow K_c = 1.05$$

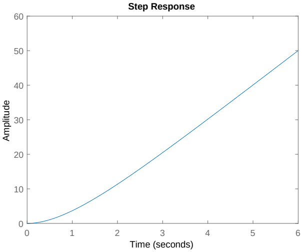
- A função de transferência de **malha fechada** é:

$$T(s) = \frac{10.5s + 15.75}{s^3 + 4.75s^2 + 14.25s + 15.75},$$

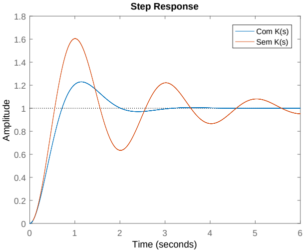
cujos polos são $s_{1,2} = -1.5 \pm 2.5981j$ e $s = -1.75$.

- O controlador colocou os **polos dominantes na posição desejada**, atendendo os requisitos de projeto;

- A seguir tem a **resposta ao degrau unitário**:

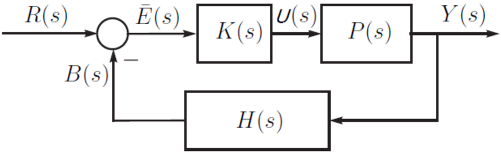


(a) Malha aberta



(b) Malha fechada.

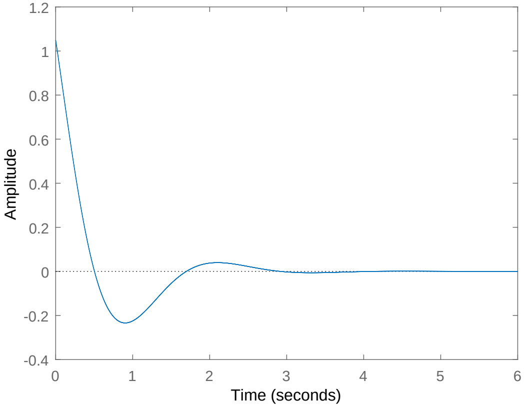
- Considere o seguinte **sistema de controle padrão** com controlador $K(s)$:



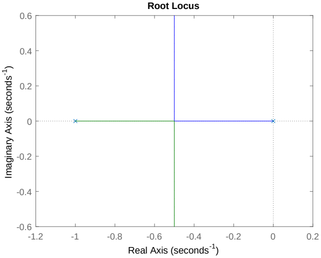
- Pode-se determinar a seguinte **função de transferência** que relaciona o **sinal de controle** $U(s)$ com o **sinal de entrada** $R(s)$:

$$
\begin{aligned}
U(s) &= K(s)(R(s) - B(s)) \\
U(s) &= K(s)(R(s) - P(s)H(s)U(s)) \\
U(s) + P(s)H(s)U(s) &= K(s)R(s) \\
(1 + P(s)H(s))U(s) &= K(s)R(s) \\
\frac{U(s)}{R(s)} &= \frac{K(s)}{1 + K(s)P(s)H(s)}
\end{aligned}
$$

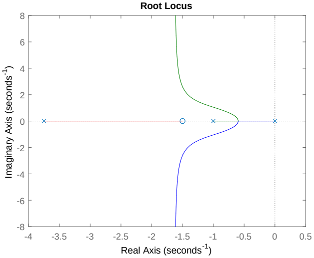
- O **sinal de controle** para a entrada em **degrau unitário** do sistema em **malha fechada** é mostrado a seguir.



A seguir é apresentado a comparação entre os **lugares das raízes**.



(c) Sem o controlador



(d) Com o controlador.

Controlador por atraso baseado no lugar das raízes

- A função de transferência do **controlador por atraso** é a seguinte:

$$K(s) = K_c \beta \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = K_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}} = K_c \frac{s+(-z)}{s+(-p)} \qquad \beta > 1$$

- Esse tipo de controlador é usado normalmente para **atender o requisito do erro estacionário**;

- A **metodologia não altera** significantemente os **lugares das raízes**;

- O **ângulo** que o **controlador provem** é muito pequeno:

$$-5^\circ < \angle K(s) < 0$$

- **Exemplo:** projetar um controlador por atraso para a planta

$$P(s) = \frac{1.06}{s(s+1)(s+2)}$$

que tenha uma constante de erro de velocidade de $K_{vel} = 5s^{-1}$ e que não altere drasticamente a localização dos polos de malha fechada.

- **Constante de erro de velocidade** do sistema **sem controlador**:

$$K_{vel} = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1.06}{s(s+1)(s+2)} = 0.53$$

- O K_{vel} do sistema controlado tem que ser aproximadamente 10 vezes maior que do sistema sem controlador;
- Para atingir esse valor no ganho K_{vel}, o **polo e zero do controlador** devem ser **próximos entre si e da origem do plano complexo**;
- Considerando isso, pode-se colocar o zero em $z = -0.05$ (**projetista escolhe**) e escrever o controlador como:

$$K(s) = K_c\frac{s+0.05}{s+0.005}$$

- A **constante de erro de velocidade com o controlador** é definida como:

$$
\begin{aligned}
K_{vel} &= \lim_{s\to 0} sK(s)G(s) \\
&= \lim_{s\to 0} sK_c \frac{s+0.05}{s+0.005} \frac{1.06}{s(s+1)(s+2)} \\
&= K_c 10 \frac{1.06}{2}
\end{aligned}
$$

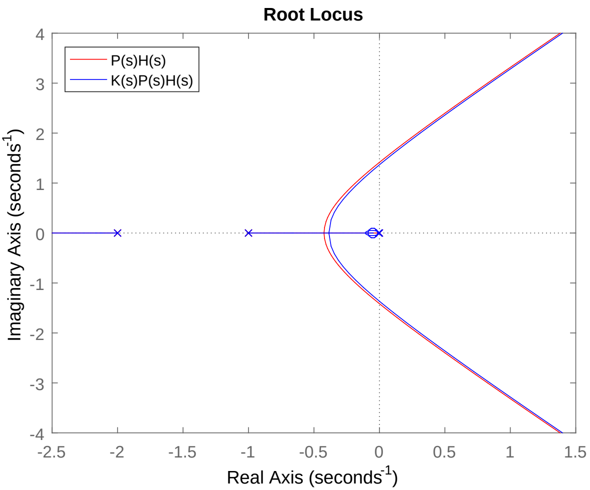
- Considerando o K_{vel} desejado, o **ganho do controlador** K_c é dado por

$$5 = K_c 10 \frac{1.06}{2} \qquad \Rightarrow \qquad K_c = 0.9434$$

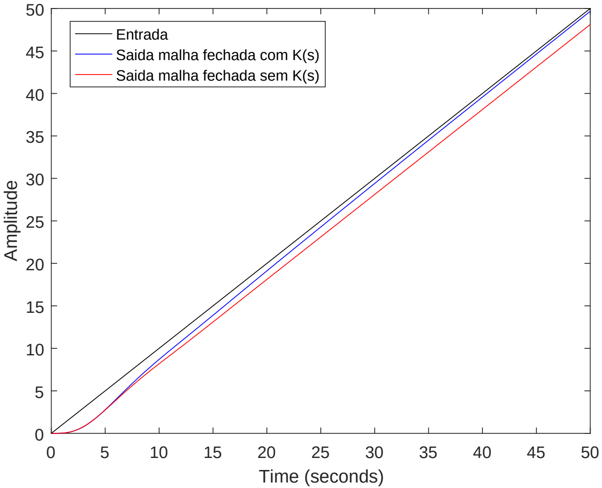
- O **controlador** tem a seguinte forma:

$$K(s) = 0.9434 \frac{s+0.05}{s+0.005}$$

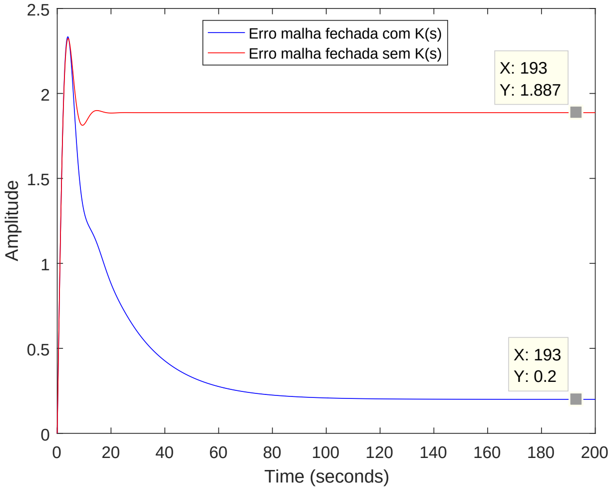
O **lugar das raízes com e sem controlador** é mostrado a seguir:



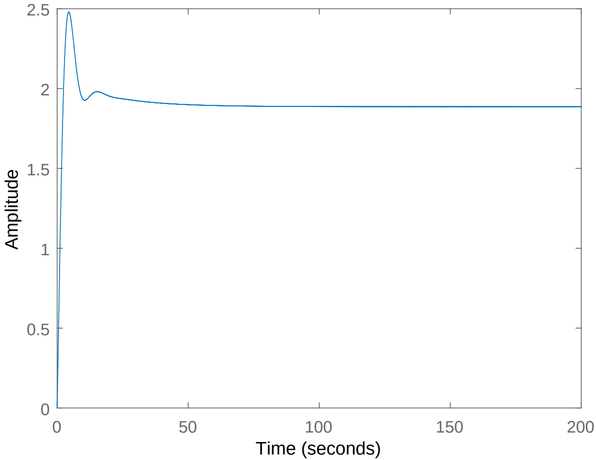
A **resposta** do **sistema em fechada** com e sem controlador à rampa unitária é mostrada a seguir:



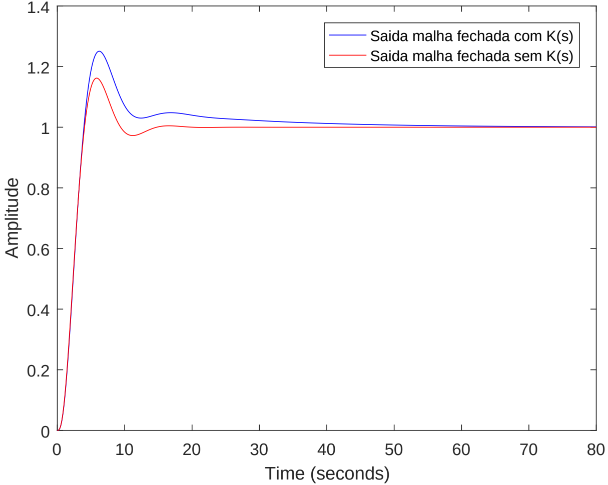
O **sinal de erro** do **sistema em malha fechada** com entrada em rampa unitária é mostrado a seguir.



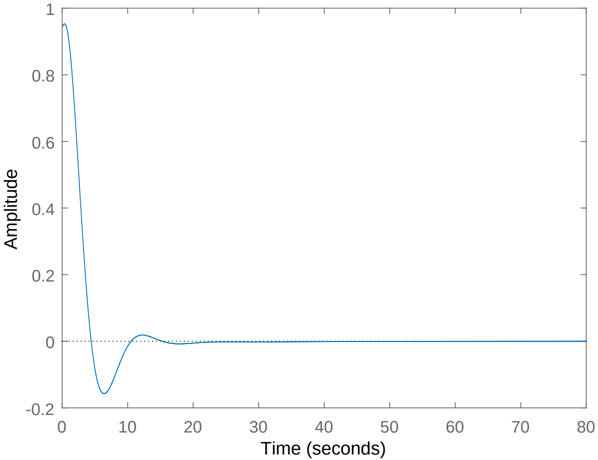
O **sinal de controle** do **sistema com entrada em rampa unitária** é mostrado a seguir.



A **resposta** do sistema em **malha fechada** com e sem controlador ao degrau unitária é mostrada a seguir:

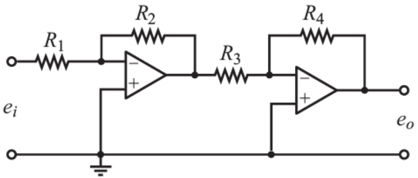


O **sinal de controle** do **sistema em malha fechada** é mostrado a seguir:



- O **controlador proporcional** tem a seguinte função de transferência:

$$K = \frac{E_0(s)}{E_I(s)} = \frac{R_4}{R_3}\frac{R_2}{R_1}$$



- O **controlador avanço/atraso** tem a seguinte função de transferência:

$$K(s) = \frac{E_0(s)}{E_I(s)} = \frac{R_4}{R_3}\frac{R_2}{R_1}\frac{R_1C_1s+1}{R_2C_2s+1} \Rightarrow R_1C_1 > R_2C_2(\textbf{avanço}), R_1C_1 < R_2C_2(\textbf{atraso})$$