Análise do erro estacionário

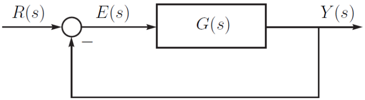
Prof. Dr. Helói F. G. Genari
email:heloi.genari@ufabc.edu.br

Quadrimestre Suplementar

Sumário: estabilidade

- Erro estacionário em realimentação unitária;
- Erro estacionário em realimentação não unitária.

- Seja um sistema em malha fechada e em **realimentação unitária** como representado na figura abaixo:



- A função de transferência $G(s)$ pode ser **representada genericamente** como:

$$G(s) = \frac{k(1+z_1s)(1+z_2s)\cdots(1+z_ms)}{s^n(1+p_1s)(1+p_2s)\cdots(1+p_ls)}$$

- Define-se o **tipo de sistema** em função da quantidade do **número de polos** localizados no **valor zero**;

- Se $n = 0$, o sistema é do tipo 0. Se $n = 1$, o sistema é do tipo 1, ...

Erro estacionário em realimentação unitária

- O **erro $E(s)$**, **a diferença entre entrada e saída**, é dado por:

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - Y(s) \\ &= R(s) - G(s)E(s) \\ &= \frac{R(s)}{1 + G(s)} \end{aligned}$$

- O **erro estacionário** é definido como:

$$e_{est} = \lim_{t \to \infty} e(t)$$

- Usando o **teorema do valor final**, o erro pode ser escrito como:

$$e_{est} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \left[\frac{sR(s)}{1 + G(s)} \right],$$

considerando que os **limites existam**.

Erro estacionário em realimentação unitária: entradas padrões

- O **erro estacionário** para entrada ao **degrau unitário** $(r(t) = u(t) \overset{\mathcal{L}}{\overbrace{\rightarrow}} R(s) = \frac{1}{s})$:

$$e_{est} = \lim_{s\to 0}\left[\frac{s\frac{1}{s}}{1+G(s)}\right] = \lim_{s\to 0}\left[\frac{1}{1+G(s)}\right] = \frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0} G(s)} = \frac{1}{1+k_{pos}},$$

em que $k_{pos} = \lim\limits_{s\to 0} G(s)$ é a **constante de erro de posição**;

- Para a **rampa unitária** $(r(t) = tu(t) \overset{\mathcal{L}}{\overbrace{\rightarrow}} R(s) = \frac{1}{s^2})$:

$$e_{est} = \lim_{s\to 0}\left[\frac{s\frac{1}{s^2}}{1+G(s)}\right] = \lim_{s\to 0}\left[\frac{1}{s+sG(s)}\right] = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} sG(s)} = \frac{1}{k_{vel}},$$

em que $k_{vel} = \lim\limits_{s\to 0} sG(s)$ é a **constante de erro de velocidade**;

- Para a **parábola unitária** $(r(t) = \frac{1}{2}t^2u(t) \overset{\mathcal{L}}{\overbrace{\rightarrow}} R(s) = \frac{1}{s^3})$:

$$e_{est} = \lim_{s\to 0}\left[\frac{s\frac{1}{s^3}}{1+G(s)}\right] = \lim_{s\to 0}\left[\frac{1}{s^2+s^2G(s)}\right] = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s^2G(s)} = \frac{1}{k_{ace}},$$

em que $k_{ace} = \lim\limits_{s\to 0} s^2G(s)$ é a **constante de erro de aceleração**;

- **Constante de erro de posição** (k_{pos}):

$$k_{pos} = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{k(1+z_1 s)(1+z_2 s)\cdots(1+z_m s)}{(1+p_1 s)(1+p_2 s)\cdots(1+p_l s)} = k,$$

  e o erro estacionário ao degrau unitário é constante:

$$e_{est} = \frac{1}{1+k_{pos}} = \frac{1}{1+k}$$

- **Constante de erro de velocidade** (k_{vel}):

$$k_{vel} = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} \frac{ks(1+z_1 s)(1+z_2 s)\cdots(1+z_m s)}{(1+p_1 s)(1+p_2 s)\cdots(1+p_l s)} = 0,$$

  e o erro estacionário à rampa unitária é:

$$e_{est} = \frac{1}{k_{vel}} = \infty$$

- **Constante de erro de aceleração** (k_{ace}):

$$k_{ace} = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{ks^2(1+z_1 s)(1+z_2 s)\cdots(1+z_m s)}{(1+p_1 s)(1+p_2 s)\cdots(1+p_l s)} = 0,$$

  e o erro estacionário à parábola unitária é:

$$e_{est} = \frac{1}{k_{ace}} = \infty$$

- **Constante de erro de posição** (k_{pos}):

$$k_{pos} = \lim_{s \to 0} G(s) = \lim_{s \to 0} \frac{k(1+z_1 s)(1+z_2 s)\cdots(1+z_m s)}{s(1+p_1 s)(1+p_2 s)\cdots(1+p_l s)} = \infty,$$

e o erro estacionário ao degrau unitário é nulo:

$$e_{est} = \frac{1}{1+k_{pos}} = 0$$

- **Constante de erro de velocidade** (k_{vel}):

$$k_{vel} = \lim_{s \to 0} sG(s) = \lim_{s \to 0} \frac{ks(1+z_1 s)(1+z_2 s)\cdots(1+z_m s)}{s(1+p_1 s)(1+p_2 s)\cdots(1+p_l s)} = k,$$

e o erro estacionário à rampa unitária é constante:

$$e_{est} = \frac{1}{k_{vel}} = \frac{1}{k}$$

- **Constante de erro de aceleração** (k_{ace}):

$$k_{ace} = \lim_{s \to 0} s^2 G(s) = \lim_{s \to 0} \frac{ks^2(1+z_1 s)(1+z_2 s)\cdots(1+z_m s)}{s(1+p_1 s)(1+p_2 s)\cdots(1+p_l s)} = 0,$$

e o erro estacionário à parábola unitária é:

$$e_{est} = \frac{1}{k_{ace}} = \infty$$

- **Constante de erro de posição** (k_{pos}):

$$k_{pos} = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{k(1+z_1 s)(1+z_2 s)\cdots(1+z_m s)}{s^2(1+p_1 s)(1+p_2 s)\cdots(1+p_l s)} = \infty,$$

  e o erro estacionário ao degrau unitário é nulo:

$$e_{est} = \frac{1}{1+k_{pos}} = 0$$

- **Constante de erro de velocidade** (k_{vel}):

$$k_{vel} = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} \frac{ks(1+z_1 s)(1+z_2 s)\cdots(1+z_m s)}{s^2(1+p_1 s)(1+p_2 s)\cdots(1+p_l s)} = \infty,$$

  e o erro estacionário à rampa unitária é nulo:

$$e_{est} = \frac{1}{k_{vel}} = 0$$

- **Constante de erro de aceleração** (k_{ace}):

$$k_{ace} = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{ks^2(1+z_1 s)(1+z_2 s)\cdots(1+z_m s)}{s^2(1+p_1 s)(1+p_2 s)\cdots(1+p_l s)} = k,$$

  e o erro estacionário à parábola unitária é constante:

$$e_{est} = \frac{1}{k_{ace}} = \frac{1}{k}$$

A tabela a seguir **condensa** o **erro estacionário** em relação ao **tipo** e ao **sinal de entrada** para sistema em malha fechada com realimentação unitária:

	Degrau unitário $r(t) = u(t)$	Rampa unitária $r(t) = tu(t)$	Parábola unitária $r(t) = \frac{1}{2}t^2u(t)$
Tipo 0	$\frac{1}{1+k}$	∞	∞
Tipo 1	0	$\frac{1}{k}$	∞
Tipo 2	0	0	$\frac{1}{k}$

Erro estacionário em realimentação unitária

Exemplo 1: para o ramo direto dado por

$$G(s) = \frac{0,1}{(0,2s+1)(0,25s+0,5)},$$

determinar o **erro estacionário ao degrau unitário, à rampa unitária e à parabola unitária** para o respectivo sistema em malha fechada com realimentação unitária negativa.

Exemplo 1: para o ramo direto dado por

$$G(s) = \frac{0,1}{(0,2s+1)(0,25s+0,5)},$$

determinar o **erro estacionário ao degrau unitário, à rampa unitária e à parabola unitária** para o respectivo sistema em malha fechada com realimentação unitária negativa.

- O sistema é do tipo 0;
- A função de transferência pode ser colocada na **forma padrão** como:

$$G(s) = \frac{0,1}{(0,2s+1)(0,25s+0,5)\frac{0,5}{0,5}} = \frac{0,2}{(0,2s+1)(0,5s+1)}$$

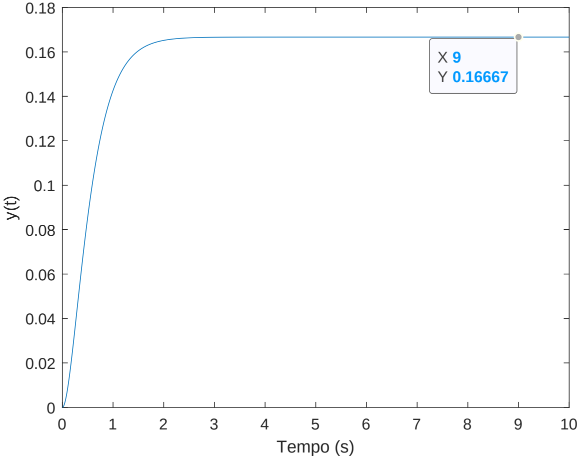
- Utilizando a **tabela**, determina-se o erro estacionário ao degrau unitário como:

$$e_{est} = \frac{1}{1+k} = \frac{1}{1+0,2} = 0,833$$

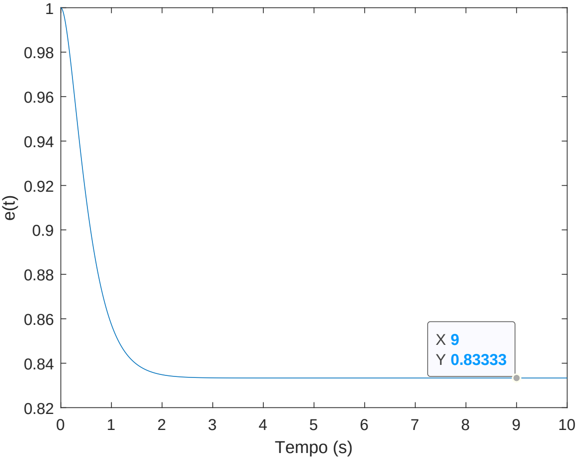
- Para a rampa e parábola tem-se $e_{est} = \infty$;
- O **erro estacionário** pode ser obtido diretamente pela **definição**:

$$e_{est} = \lim_{s\to 0}\left[\frac{s\frac{1}{s}}{1+\frac{0,1}{(0,2s+1)(0,25s+0,5)}}\right] = \frac{1}{1+\frac{0,1}{1\times 0,5}} = 0,833$$

- A resposta $y(t)$ do sistema em malha fechada do exemplo 1 está simulada na figura abaixo.



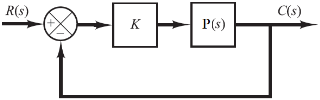
- O erro $e(t)$ do exemplo 1 está simulado na figura abaixo.



Exemplo 2: para a planta

$$P(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2},$$

determinar o controlador proporcional K que assegure um erro estacionário de $0,1$ ao degrau unitário, considerando que a malha é fechada e com realimentação unitária negativa.



- A função de transferência do **ramo direto** $G(s)$ é definida como:

$$G(s) = KP(s) = K\frac{2}{s^2 + 2s + 2}$$

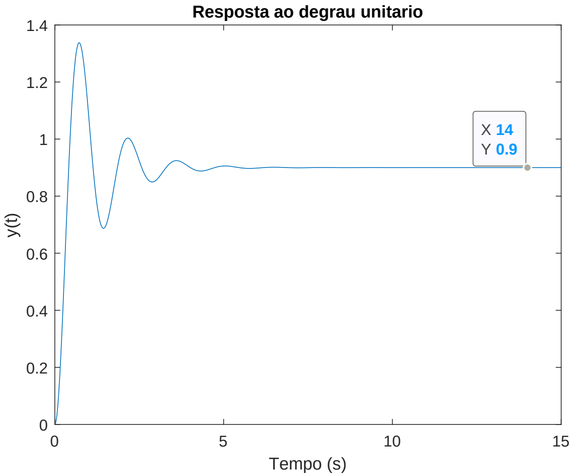
- O **erro estacionário** é definido como:

$$e_{est} = \lim_{s \to 0}\left[\frac{s\frac{1}{s}}{1 + K\frac{2}{s^2+2s+2}}\right] = 0,1,$$

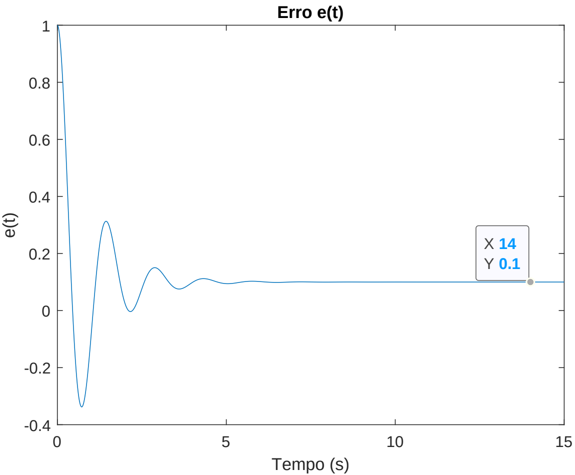
logo

$$\frac{1}{1+K} = 0,1 \;\Rightarrow\; K = 9.$$

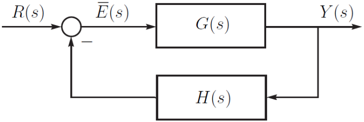
- A resposta $y(t)$ do sistema em malha fechada do exemplo 2 está simulada na figura abaixo.



- O erro $e(t)$ do exemplo 2 está simulado na figura abaixo.



- Seja um sistema em **realimentação não unitária** como representado na figura abaixo:



- A **função de transferência de malha fechada** é:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

- O **erro** $E(s)$, **a diferença entre entrada e saída**, é dado por:

$$E(s) = R(s) - Y(s),$$

considerando $Y(s) = T(s)R(s)$, então:

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - T(s)R(s) \\ &= (1 - T(s))R(s) \end{aligned}$$

- Usando o **teorema do valor final**, o erro pode ser escrito como:

$$e_{est} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \left[s(1 - T(s))R(s) \right],$$

considerando que os **limites existam**.

Erro estacionário em realimentação não unitária

Exemplo 3: considere um sistema de controle em realimentação não unitária em que a função de transferência da planta é $P(s) = \frac{1}{s+2}$ e a função de transferência da realimentação é $H(s) = \frac{2}{s+4}$. Assim, **determine o controlador proporcional** K que leva o **erro estacionário ser nulo** para entrada ao **degrau unitário**.

Exemplo 3: considere um sistema de controle em realimentação não unitária em que a função de transferência da planta é $P(s) = \frac{1}{s+2}$ e a função de transferência da realimentação é $H(s) = \frac{2}{s+4}$. Assim, **determine o controlador proporcional** K que leva o **erro estacionário ser nulo** para entrada ao **degrau unitário**.

- A função de transferência do **ramo direto** é:

$$G(s) = KP(s) = K\frac{1}{s+2}$$

- Aplicando a **definição de erro estacionário**:

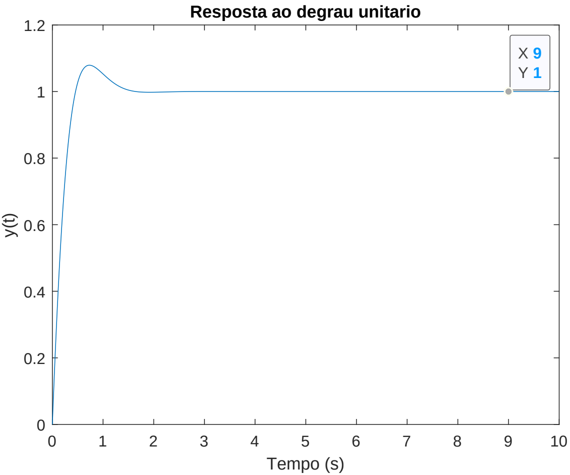
$$e_{est} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0}\left[s\frac{1}{s}(1 - \frac{k\frac{1}{s+2}}{1+K\frac{1}{s+2}\frac{2}{s+4}})\right] = 0,$$

- A partir da equação anterior, podemos determinar a seguinte equação:

$$\frac{0,5K}{1+0,25K} = 1$$

- Resolvendo o item anterior, tem-se $K = 4$.

- A resposta $y(t)$ do sistema em malha fechada do exemplo 3 está simulada na figura abaixo.



- O erro $e(t)$ do exemplo 3 está simulado na figura abaixo.