Estabilidade de sistemas lineares

Prof. Dr. Helói F. G. Genari
email:heloi.genari@ufabc.edu.br

Quadrimestre Suplementar

Sumário: estabilidade

- Definição de estabilidade;
- Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

Estabilidade: definição

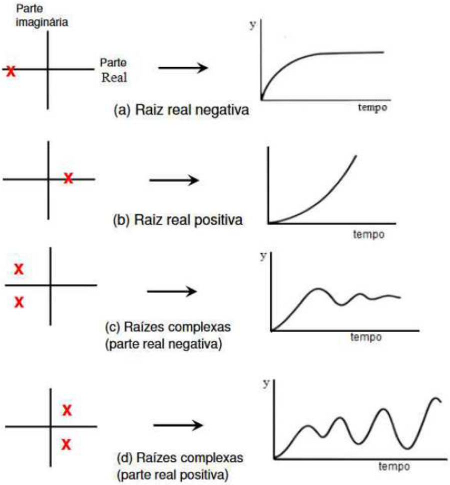
- A **estabilidade** é normalmente uma **condição necessária** para um sistema em malha fechada;

- **Estabilidade absoluta:** o sistema é estável ou não;

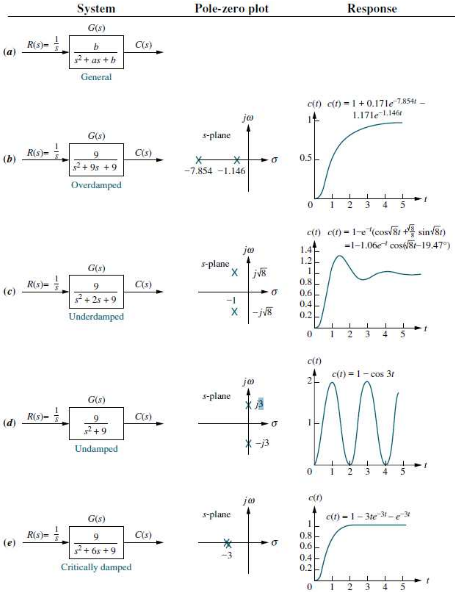
- **Estabilidade relativa:** define qual é o grau de estabilidade do sistema;

- A **condição necessária e suficiente** para que um sistema seja **estável** é que todos os **polos** da função de transferência tenham **parte real negativa**.

Relação entre a **localização dos polos** e a **estabilidade**:



Estabilidade: exemplo



Os critérios a seguir são usados para verificar a estabilidade sem resolver a equação característica:

- **Routh-Hurwitz** (no plano-s);
- **Nyquist** (domínio da frequência);
- **Temporal**.

Com as **ferramentas computacionais** ficou muito simples calcular as raízes de um polinômio, portanto, quais são as **vantagens** de analisar a estabilidade dessa forma?

- O critério tem a capacidade de analisar diretamente a estabilidade de um sistema, **não sendo necessário encontrar as raízes**;

- Para uma **equação característica genérica**:

$$\begin{aligned}\Delta(s) &= a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 \\ &= a_n (s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_n) \\ &= 0\end{aligned}$$

- Para a **estabilidade**, é necessário verificar se **nenhum polo** está no **semi-plano direito**.

- O critério de **Routh** é aplicado para **sistemas contínuos**, considerando a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}.$$

- **Aplicação:** organizar os coeficientes da equação característica na forma do arranjo do tipo:

$$\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots \\
s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
s^0 & d_{n-1} & & &
\end{array}$$

para

$$b_{n-1} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \qquad b_{n-3} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$c_{n-1} = \frac{b_{n-1}a_{n-3} - a_{n-1}b_{n-3}}{b_{n-1}}$$

- **Critério de Routh:** o número de **raízes** com parte **real positiva** é igual ao **número de mudanças de sinal na primeira coluna** do arranjo. Uma condição necessária e suficiente para **estabilidade** é que os **elementos da primeira coluna tenham o mesmo sinal**.

- **Exemplo:** avalie a estabilidade da seguinte equação característica:

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$$

- **Montagem da tabela de Routh**:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 3 & 5 \\ s^3 & 2 & 4 & 0 \\ s^2 & 1 & 5 & \\ s^1 & -6 & 0 & \\ s^0 & 5 & & \end{array}$$

- Tem-se **duas trocas de sinais** na primeira coluna, logo, tem-se **dois polos** com **parte real positiva**;

- Os **polos do sistema** são: $0.2878 \pm 1.4161j$ e $-1.2878 \pm 0.8579j$.

- Seja um sistema com a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{10}{s^3 + 2s^2 + 4s + K}.$$

Determine o intervalo de K para que o respectivo sistema seja estável.

- Seja um sistema com a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{10}{s^3 + 2s^2 + 4s + K}.$$

Determine o intervalo de K para que o respectivo sistema seja estável.

- **Montagem do arranjo**:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 2 & \mathrm{K} \\ s^1 & \frac{8-K}{2} & 0 \\ s^0 & \mathrm{K} & \end{array}$$

- Seja um sistema com a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{10}{s^3 + 2s^2 + 4s + K}.$$

Determine o intervalo de K para que o respectivo sistema seja estável.

- **Montagem do arranjo**:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 2 & \text{K} \\ s^1 & \frac{8-K}{2} & 0 \\ s^0 & \text{K} & \end{array}$$

- **Condição para estabilidade**: $K > 0$ e $\frac{8-K}{2} > 0$;

- Sistema é **estável** para $0 < K < 8$.

- **Restrição 1:** zero na primeira coluna, porém alguns elementos da linha correspondente não são nulos. Assim, substitui-se o zero por um parâmetro, $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno, e a montagem do arranjo prossegue;

- **Exemplo:** analise a estabilidade de um sistema que possui a seguinte equação caraterística:

$$s^3 - 3s + 2 = 0$$

- **Restrição 1:** zero na primeira coluna, porém alguns elementos da linha correspondente não são nulos. Assim, substitui-se o zero por um parâmetro, $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno, e a montagem do arranjo prossegue;

- **Exemplo:** analise a estabilidade de um sistema que possui a seguinte equação caraterística:

$$s^3 - 3s + 2 = 0$$

- O **arranjo** é montado como:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & -3 \\ s^2 & 0 \approx \in & 2 \end{array}$$

- Um **elemento** da primeira coluna e da segunda linha é **nulo**, logo, tem-se que substituí-lo por $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno e continuar o calculo:

- Assim, o **novo arranjo** é:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & -3 \\ s^2 & \in & 2 \\ s^1 & -3-\frac{2}{\in} & 0 \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

- Tem-se **duas trocas de sinais**, logo, a equação característica tem **dois polos instáveis**;

- Polos: $s=1$, $s=1$ e $s=-2$.

- **Restrição 2**: linha com todos elementos nulos; isso ocorre quando fatores do tipo $(s+\sigma)(s-\sigma)$ ou $(s+j\omega)(s-j\omega)$ aparecem na equação característica. Esse **problema é transposto** usando-se um **polinômio auxiliar**, $U(s)$, que corresponde à equação da linha que precede a linha de zeros. Então, a linha de zeros é substituída pelos fatores de $\frac{dU(s)}{ds}$;

- **Exemplo:** analise a estabilidade de um sistema que possui a seguinte equação caraterística:

$$s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$$

- A matriz dos coeficientes é:

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 24 & -25 \\ s^4 & \mathbf{2} & \mathbf{48} & \mathbf{-50} \\ s^3 & 0 & 0 & \end{array}$$

- O **polinômio auxiliar** $U(s)$ é definido como:

$$U(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50$$

- A derivada de $U(s)$ é:

$$\frac{U(s)}{ds} = 8s^3 + 96s$$

- Assim, podemos montar o **novo arranjo** como:

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 24 & -25 \\ s^4 & 2 & 48 & -50 \\ s^3 & 8 & 96 & \\ s^2 & 24 & -50 & \\ s^1 & 112.7 & 0 & \\ s^0 & -50 & & \end{array}$$

- A tabela tem **uma mudança de sinal** na primeira coluna, logo, a equação característica possuí **um polo com parte real positiva**;

- Polo: $s = -1$, $s = +1$, $s = -5j$, $s = 5j$ e $s = -2$.