Lugar das raízes

Prof. Dr. Helói F. G. Genari
email:heloi.genari@ufabc.edu.br

Quadrimestre Suplementar

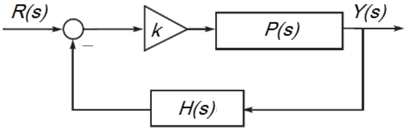
Sumário: lugar das raízes

- Definição do **lugar das raízes**;
- **Esboço do lugar das raízes**.

- Considere as seguintes funções de transferência

$$P(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \qquad \text{e} \qquad H(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$$

e o **controlador** representado pelo **ganho** K;



- A **função de transferência de malha fechada** é:

$$T(s) = \frac{KP(s)}{1 + KP(s)H(s)} = \frac{K\frac{N_1(s)}{D_1(s)}}{1 + K\frac{N_1(s)}{D_1(s)}\frac{N_2(s)}{D_2(s)}} = \frac{KN_1(s)D_2(s)}{D_1(s)D_2(s) + KN_1(s)N_2(s)},$$

em que $G(s) = KP(s)$.

- Pode-se determinar os **polos em malha fechada** com a **equação característica**:

$$D_1(s)D_2(s) + KN_1(s)N_2(s) = 0$$

- O **lugar das raízes** é um **gráfico dos polos** da função de transferência de **malha fechada**, $T(s)$, quando K varia de 0 a ∞;

- **Considerando $K = 0$**, a equação característica torna-se:

$$D_1(s)D_2(s) = 0,$$

  que é os **polos** de $L(s) = G(s)H(s)$ (função de transferência de **malha aberta**);

- **Considerando K muito grande**, a equação característica torna-se:

$$KN_1(s)N_2(s) = 0$$

  que é os **zeros** de $L(s) = G(s)H(s)$ (função de transferência de **malha aberta**);

- **Portanto, o lugar das raízes começa nos polos de $G(s)H(s)$ e termina nos zeros de $G(s)H(s)$**

- **Lembrando:** a função de transferência de malha fechada é:

$$T(s) = \frac{KP(s)}{1 + KP(s)H(s)}$$

- O **lugar das raízes** é caracterizado pela **equação característica**:

$$1 + KP(s)H(s) = 0$$

que pode ser reescrita como:

$$KP(s)H(s) = -1,$$

o que implica em:

$$|KP(s)H(s)| = 1, \qquad \angle KP(s)H(s) = \pm 180^\circ(2n+1), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

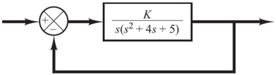
- **Condição de módulo:**

$$|KP(s)H(s)| = 1$$

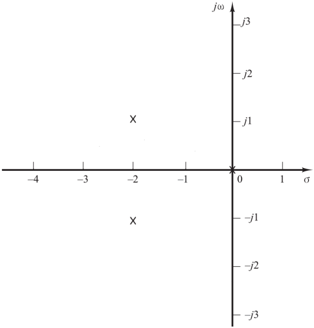
- **Condição de ângulo:**

$$\angle KP(s)H(s) = \pm 180^\circ(2n+1), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

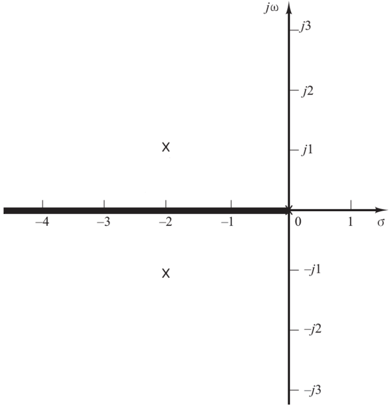
Exemplo: esboçar o lugar das raízes para o seguinte sistema de controle com realimentação unitária ($H(s) = 1$) e com o controlador proporcional K.



- **Passo 1:** localizar os polos e zeros de $G(s)H(s) = kP(s)H(s)$ no plano s. Os ramos do lugar das raízes se iniciam nos polos de malha aberta e terminam nos zeros (zeros finitos ou zeros no infinito).
  Aplicação: polos da malha aberta: $s = 0$, $-2 + 1j$ e $-2 - 1j$. Não tem zeros finitos na malha aberta;



- **Passo 2:** determinar os trechos do lugar das raízes no eixo real. Os trechos do lugar das raízes no eixo real são determinados pelos polos e zeros de malha aberta que se encontram sobre ele. **Os polos e zeros complexos conjugados de malha aberta da função de transferência não têm nenhum efeito na determinação dos trechos do lugar das raízes no eixo real**. Escolha um ponto de teste sobre ele. Se o número total de polos reais e zeros reais à direita desse ponto de teste for ímpar, então esse ponto estará situado em uma região do lugar das raízes.



- **Passo 3:** determinação das assíntotas. Os **ângulos das assíntotas** são determinados como:

$$\text{Ângulos das assíntotas} = \frac{180^\circ}{n-m}(2k+1), \quad (k = 0, 1, 2 \ldots), \tag{1}$$

em que

$$n = \text{número finito de polos de } G(s)H(s) = kP(s)H(s)$$
$$m = \text{número de zeros finitos de } G(s)H(s) = kP(s)H(s)$$

- Aplicando a Eq. 1 para o exercício ($n = 3$ e $m = 0$):

$$\text{Ângulos das assíntotas} = \frac{180^\circ}{3-0}(2k+1), \quad (k = 0, 1, 2 \ldots)$$
$$= 60^\circ(2k+1), \quad (k = 0, 1, 2 \ldots)$$

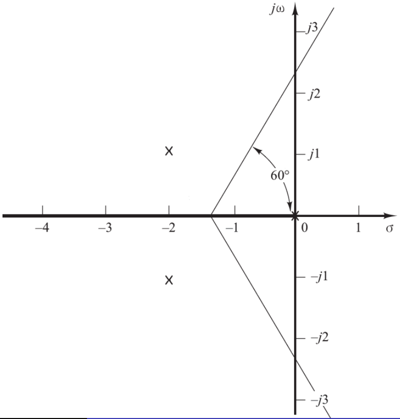
- A **intersecção das assíntotas com o eixo real** é:

$$s = \frac{(p_1 + p_2 + \ldots + p_n) - (z_1 + z_2 + \ldots + \ldots z_n)}{n - m}, \qquad (2)$$

em que p_i são os polos e z_i são os zeros (finitos) de $G(s)H(s) = kP(s)H(s)$.

- Aplicando a Eq. 2 no exemplo:

$$s = \frac{(0 - 2 + 1j - 2 - 1j) - (0)}{3 - 0} = -\frac{4}{3} = -1,33$$



- **Passo 4:** determinar os **pontos de partida** e os de **chegada ao eixo real** do lugar das raízes. Suponha que a equação característica seja dada por:

$$B(s) + KA(s) = 0,$$

então:

$$K = -\frac{B(s)}{A(s)}$$

- Os pontos de partida e de chegada do lugar das raízes no eixo real são as raízes de $\frac{dK(s)}{ds} = 0$;
- A equação característica do exercício é:

$$1 + \frac{K}{s(s^2 + 4s + 5)} = 0,$$

que pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} K &= -s(s^2 + 4s + 5) \\ &= -s^3 - 4s^2 - 5s \end{aligned} \tag{3}$$

- Derivando a Eq. 3 e igualando a zero, temos:

$$\frac{dK(s)}{ds} = -3s^2 - 8s - 5 = 0,$$

que resulta em $s = -1$ e $s = -1,6667$.

- **Passo 5:** determinar o ângulo de partida de um polo complexo (ou de chegada a um zero complexo) do lugar das raízes.

$$\underline{\text{Ângulo de partida de um polo complexo}} = 180^\circ - \alpha + \beta,$$

em que

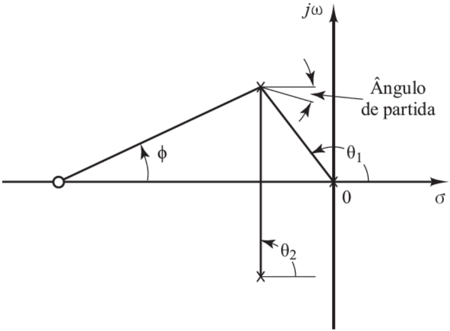
$$\begin{aligned} \alpha &= \text{soma dos ângulos dos vetores que chegam ao polo complexo em questão,} \\ &\quad \text{com origem em outros polos;} \\ \beta &= \text{soma dos ângulos dos vetores que chegam ao polo complexo em questão,} \\ &\quad \text{com origem nos zeros.} \end{aligned}$$

$$\underline{\text{Ângulo de chegada em um zero complexo}} = 180^\circ - \eta + \tau,$$

em que

$$\begin{aligned} \eta &= \text{soma dos ângulos dos vetores que chegam ao zero complexo em questão,} \\ &\quad \text{originários de outros zeros;} \\ \tau &= \text{soma dos ângulos dos vetores que chegam ao zero complexo em questão,} \\ &\quad \text{partindo dos polos.} \end{aligned}$$

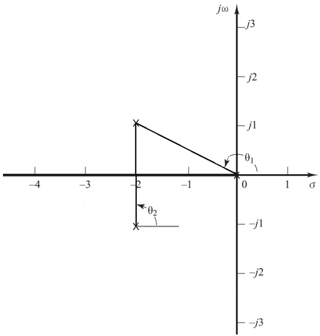
- Exemplo genérico:



- O ângulo de partida para a figura é:

$$\text{Ângulo de partida} = 180^\circ - (\theta_1 + \theta_2) + \phi$$

- Para o exercício:



- O ângulo de partida para a figura é:

$$
\begin{aligned}
\text{Ângulo de partida} &= 180^\circ - (\theta_1 + \theta_2) \\
&= 180^\circ - (\theta_1 + 90^\circ) \\
&= 180^\circ - \left(90^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right) + 90^\circ\right) \\
&= 180^\circ - (90^\circ + 63{,}43^\circ + 90^\circ) \\
&= -63{,}43^\circ
\end{aligned}
$$

- **Passo 6:** determinar os pontos onde o **lugar das raízes pode cruzar o eixo imaginário**. Os pontos onde o lugar das raízes cruza o eixo $j\omega$ podem ser determinados facilmente fazendo $s = j\omega$ na equação característica, igualando a zero tanto a parte real como a parte imaginária e resolvendo para ω e K.

- A equação característica do exercício é:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{K}{s(s^2+4s+5)} &= 0 \\ \frac{s(s^2+4s+5)+K}{s(s^2+4s+5)} &= 0 \\ s^3 + 4s^2 + 5s + K &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

- Substituindo $s = j\omega$ na Eq. 4, tem-se:

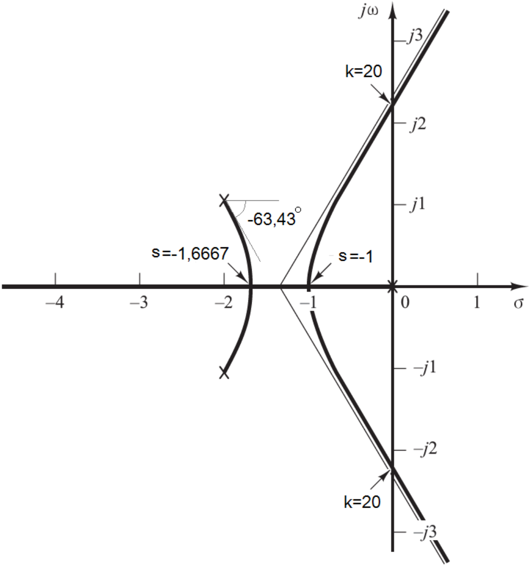
$$\begin{aligned} (j\omega)^3 + 4(j\omega)^2 + 5j\omega + K &= 0 \\ (K - 4\omega^2) + j\omega(5-\omega^2) &= 0, \end{aligned}$$

então

$$\omega = \pm\sqrt{5} \Leftrightarrow K = 20 \quad \text{ou} \quad \omega = 0 \Leftrightarrow K = 0$$

- Os ramos do lugar das raízes cruzam o eixo imaginário $j\omega$ nos pontos $\sqrt{5}j$ e $-\sqrt{5}j$. O ramo do lugar das raízes sobre o eixo real toca o eixo $j\omega$ em 0.

- O esboço do diagrama do lugar das raízes é:



Para traçar o **diagrama no Octave/Matlab** basta fazer rlocus(P(s)H(s)):