Modelagem no domínio da frequência

Prof. Dr. Helói F. G. Genari
email:heloi.genari@ufabc.edu.br

Quadrimestre Suplementar

Modelagem de sistemas: sumário

- Sistemas mecânicos de translação e rotação;
- Tanques
- Sistemas elétricos;
- Sistemas eletromecânicos;

Modelagem de sistemas mecânicos: definições

- Os **sistemas mecânicos** podem ser divididos em dois grupos: sistemas mecânicos de **translação** e sistemas mecânicos de **rotação**;
- **Massa:** representa a quantidade de matéria do corpo, sendo responsável pela inércia, isto é, a resistência à mudança de movimento de um corpo;
- **Força:** agente que tende a produzir uma mudança de posição em um corpo. Podem ser divididas em duas: forças de contato e forças de campo;
- **Torque:** agente que tende a produzir uma mudança na posição angular (rotacional) de um corpo.

- Deslocamento, Velocidade e Aceleração:
  - **Deslocamento** $x(t)$ é a troca de posição do corpo;
  - **Velocidade** é a derivada temporal do deslocamento:

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

  - **Aceleração** é a derivada temporal da velocidade:

$$a(t) = \ddot{x}(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

- Deslocamento Angular, Velocidade Angular e Aceleração Angular:
  - **Deslocamento angular** $\theta(t)$ é a troca de posição angular do corpo;
  - **Velocidade angular** é a derivada temporal do deslocamento angular:

$$\omega(t) = \dot{\theta}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

  - **Aceleração angular** é a derivada temporal da velocidade angular:

$$\alpha(t) = \ddot{\theta}(t) = \frac{d\omega(t)}{dt}$$

- **Velocidade absoluta:** medida em relação a uma **referencial fixo**;
- **Velocidade relativa:** medida em relação a uma **referência móvel**.

A **segunda lei** é a mais importante dentre as três leis para a obtenção de **modelos matemáticos** de sistemas mecânicos;

- **Translação:** "A aceleração adquirida por qualquer corpo rígido é diretamente proporcional às forças que atuam neste corpo e inversamente proporcional à massa deste corpo"

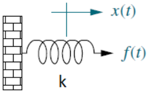
$$\Sigma F = m.a(t)$$

- **Rotação:** "A aceleração angular de qualquer corpo rígido é diretamente proporcional aos torques que atuam neste corpo e inversamente proporcional ao momento de inércia deste corpo"

$$\Sigma T = J.\alpha(t),$$

em que J é o momento de inercia.

- **Mola** (armazena energia elastica):

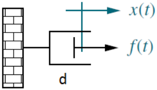


  - A força $f(t)$ é dada por:

$$f(t) = kx(t),$$

em que $f(t) - N$, $k - N/m$ e $x - m$.

- **Amortecedor** (dissipa energia):

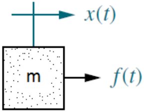


  - A força $f(t)$ é dada por:

$$f(t) = d\dot{x}(t),$$

em que $d - Ns/m$;

- **Massa** (armazena energia cinética):



  - A força $f(t)$ é dada por:

$$f(t) = m\ddot{x}(t),$$

em que $m - kg$;

Exemplo: sistema de um grau de liberdade

A figura abaixo apresenta um **sistema massa-mola-amortecedor** de um grau de liberdade para o qual é aplicada uma força $u(t)$ e $y(t)$ é considerada a resposta. Encontre a **função de transferência do sistema**:

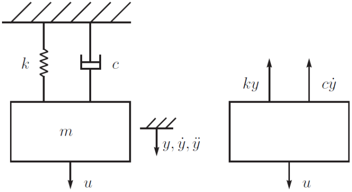


Figura: Sistema massa-mola-amortecedor e diagrama de corpo livre.

A figura abaixo apresenta um **sistema massa-mola-amortecedor** de um grau de liberdade para o qual é aplicada uma força $u(t)$ e $y(t)$ é considerada a resposta. Encontre a **função de transferência do sistema**:

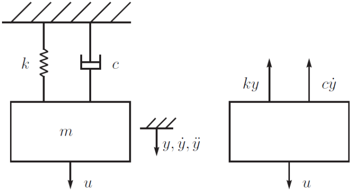


Figura: Sistema massa-mola-amortecedor e diagrama de corpo livre.

- Aplicando a **segunda Lei de Newton**:

$$u(t) - ky(t) - c\dot{y}(t) = m\ddot{y}(t) \quad \Rightarrow \quad m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = u(t)$$

- Aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados da equação acima, a **função de transferência** é definida como:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

Exemplo: dois graus de liberdade

Modele o sistema da figura abaixo:

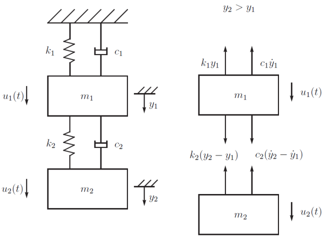


Figura: Sistema mecânico de dois graus de liberdade.

Modele o sistema da figura abaixo:

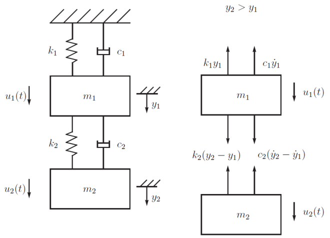


Figura: Sistema mecânico de dois graus de liberdade.

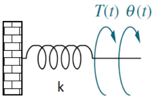
- As equações para esse sistema são:

$$k_2(y_2(t) - y_1(t)) + c_2(\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)) - k_1y_1(t) - c_1\dot{y}_1(t) + u_1(t) = m_1\ddot{y}_1(t)$$
$$-k_2(y_2(t) - y_1(t)) - c_2(\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)) + u_2(t) = m_2\ddot{y}_2(t)$$

- Essas equações podem ser organizadas da seguinte maneira:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{M}\underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \end{bmatrix}}_{\ddot{y}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}}_{C}\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{y}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}_{K}\underbrace{\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}}_{y(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}}_{u(t)}$$

- **Mola** (armazena energia elastica):

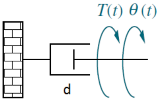


  - O torque $T(t)$ é dada por:

$$T(t) = k\theta(t),$$

em que $T(t) - N.m$, $k - N.m/rad$ e $\theta - rad$.

- **Amortecedor** (dissipa energia):

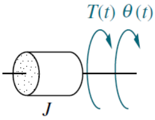


  - O torque $T(t)$ é dada por:

$$T(t) = d\dot{\theta}(t),$$

em que $d = N.m.s/rad$;

- **Massa** (armazena energia cinética):



  - O torque $T(t)$ é dada por:

$$T(t) = J\ddot{\theta}(t),$$

em que $J - kg.m^2$;

Determinar a função de transferência do sistema abaixo, considerando que $m(t)$ é a entrada e $\theta(t)$ é a saída.

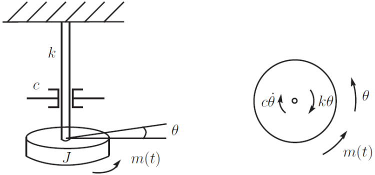


Figura: Sistema torcional de um grau de liberdade.

Determinar a função de transferência do sistema abaixo, considerando que $m(t)$ é a entrada e $\theta(t)$ é a saída.

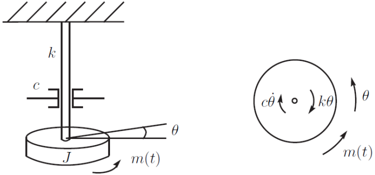


Figura: Sistema torcional de um grau de liberdade.

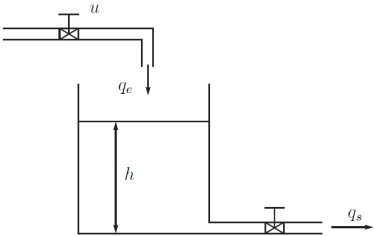
- Aplicando a **segunda lei de Newton**:

$$m(t) - k\theta(t) - c\dot{\theta}(t) = J\ddot{\theta}(t) \qquad \Rightarrow \qquad J\ddot{\theta}(t) + c\dot{\theta}(t) + k\theta(t) = m(t)$$

- Aplicando a **transformada de Laplace**:

$$\frac{\Theta(s)}{M(s)} = \frac{1}{Js^2 + cs + k}$$

Deduza a **função de transferência do tanque** da figura abaixo, em que $q_e(t)$ é a vazão de entrada, $q_s(t)$ é a vazão de saída, h é a altura do nível do líquido e u é o sinal que regula a posição da valvula de entrada. O tanque possui área de secção transversal A, de forma que o volume do líquido é $V = Ah$.



- Para a modelagem do tanque, utiliza-se o **princípio da conservação de massa**;

- A **variação do volume** do tanque é dado por:

$$\dot{V}(t) = q_e(t) - q_s(t),$$

se a area do tanque é constante:

$$\dot{V}(t) = A\dot{h}(t)$$

- Para o **escoamento laminar** na valvula de saída:

$$q_s(t) = \frac{1}{R}h(t),$$

em que R é o **coeficiente de resistência** que relaciona a altura do líquido e a vazão;

- As equações podem ser agrupadas:

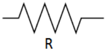
$$A\dot{h}(t) = q_e(t) - \frac{1}{R}h(t) \qquad \rightarrow \qquad RA\dot{h}(t) + h(t) = Rq_e(t)$$

- A **função de transferência** é definida como:

$$\frac{H(s)}{Q_E(s)} = \frac{R}{RAs + 1}$$

Sistema elétrico: componentes

- **Resistor** (dissipa energia):

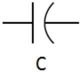


  - As equações para o resistor são:

$$v(t) = \underbrace{R}_{Impedância} i(t),$$

em que $v(t) - V$, $i(t) - A$ e $R - \Omega$.

- **Capacitor** (armazena energia em campo elétrico):

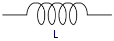


  - As equações para o capacitor são:

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \rightarrow V(s) = \underbrace{\frac{1}{Cs}}_{Impedância} I(s)$$

em que $C - F$;

- **Indutor** (armazena energia em campo magnético):

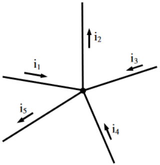


  - As equações para o indutor são:

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \rightarrow V(s) = \underbrace{Ls}_{Impedância} I(s)$$

Lei de Kirchhoff das correntes:

- A soma algébrica das correntes que chegam em um nó é igual a zero;

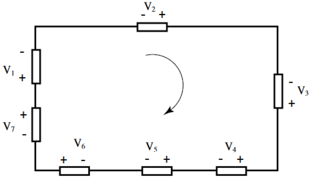


- ▶ Pode-se escrever que

$$i_1 - i_2 + i_3 + i_4 - i_5 = 0$$

Lei de Kirchhoff das tensões:

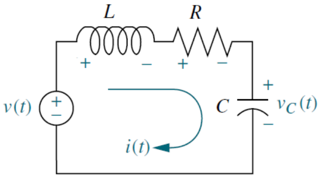
- A soma algébrica das tensões ao longo de um percurso fechado de um circuito é zero.



- ▶ Pode-se escrever que

$$V_1 - V_2 - V_3 + V_4 + V_5 - V_6 - V_7 = 0$$

Determinar a função de transferência $\frac{V_C(s)}{V(s)}$ para o circuito RLC abaixo:



- Aplicando a **lei de Kirchhoff das tensões**:

$$v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) = v(t)$$

$$LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{Cs}I(s) = V(s)$$

- **No capacitor**, $I(s) = CsV_C(s)$:

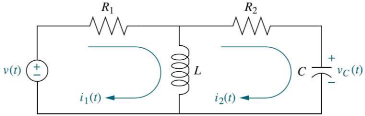
$$(LCs^2 + RCs + 1)V_C(s) = V(s)$$

- A **função de transferência** é definida como:

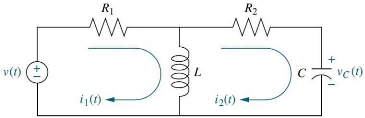
$$\frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Exemplo: malha dupla

Determinar a função de transferência $\frac{I_2(s)}{V(s)}$ para o circuito abaixo:



Determinar a função de transferência $\frac{I_2(s)}{V(s)}$ para o circuito abaixo:



- Assumindo que $i_1(t) > i_2(t)$;
- **Primeira malha:**

$$R_1 I_1(s) + Ls(I_1(s) - I_2(s)) = V(s)$$

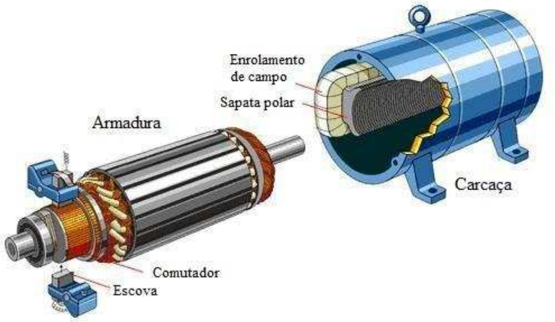
- **Segunda malha:**

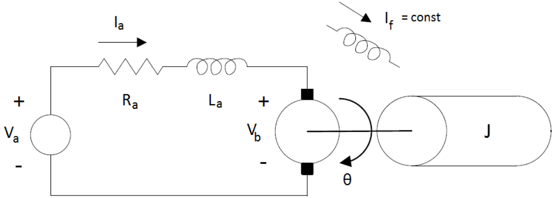
$$-Ls(I_1(s) - I_2(s)) + R_2 I_2(s) + \frac{1}{Cs} I_2(s) = 0$$

- Isolando $I_1(s)$ na equação da primeira malha e substituindo na equação da segunda malha:

$$\frac{I_2(s)}{V(s)} = \frac{CLs^2}{(R_1 + R_2)LCs^2 + (R_1 R_2 C + L)s + R_1}$$

A figura a seguir apresenta um diagrama de um motor **CC controlado pela armadura**:





- A **função de transferência** será deduzida por meio de uma **aproximação linear**;

- Os efeitos como **histerese** e **queda de tensão nas escovas** são **desprezados**;

- No motor CC controlado por amadura, a **corrente de campo** é mantida **constante**.

- Para **corrente de campo constante**, isso resulta em um **fluxo constante** e o torque torna-se proporcional a corrente de armadura:

$$T_m(t) = K_m i_a(t) \quad \overbrace{\Rightarrow}^{\mathcal{L}} \quad T_m(s) = K_m I_a(s),$$

em que K_m é a **constante de torque do motor**;

- Para o **fluxo constante**, a tensão induzida é proporcional a velocidade angular:

$$V_b(t) = K_b \frac{d\theta(t)}{dt} \quad \overbrace{\Rightarrow}^{\mathcal{L}} \quad V_b(s) = K_b s\theta(s) \tag{1}$$

- A **equação diferencial** para o **circuito de armadura** é:

$$L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) + v_b(t) = v_a(t),$$

em que aplicando a transformada de Laplace e substituindo Eq. (1):

$$I_a(s) = \frac{V_a(s) - K_b s\theta(s)}{L_a s + R_a}$$

- O **torque aplicado a carga** é definido como:

$$T_m(t) = J\frac{d^2\theta(t)}{d^2(t)} + c\frac{d\theta(t)}{dt} \qquad \overset{\mathcal{L}}{\overbrace{\Rightarrow}} \qquad T_m(s) = s(Js+c)\theta(s)$$

- Com isso, temos o seguinte conjunto de equações:

$$T_m(s) = K_m I_a(s) \tag{2}$$

$$I_a(s) = \frac{V_a(s) - K_b s\theta(s)}{L_a s + R_a} \tag{3}$$

$$T_m(s) = s(Js+c)\theta(s) \tag{4}$$

- A **função de transferência** é obtida substituindo Eq. (3) e Eq. (4) na Eq. (2):

$$\frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{s((L_a s + R_a)(Js+c) + K_m K_b)}$$