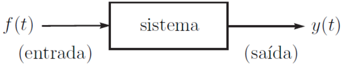
# Função de transferência e diagrama de blocos

Prof. Dr. Helói F. G. Genari
email:heloi.genari@ufabc.edu.br

**Quadrimestre Suplementar**

# Função de transferência

- Seja um **sistema físico** que estabelece uma **relação entre entrada** e **saída** na forma:




- Este sistema pode ser descrito por uma **equação diferencial genérica** como:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m f(t)}{dt^m} + \ldots + b_1 \frac{df(t)}{dt} + b_0 f(t),$$

  em que $m \leq n$.

- Se as **condições iniciais** são **nulas**, $y(0) = \dot{y}(0) = \ldots = y^{n-1}(0) = 0$, tem-se, através da transformada de Laplace, a seguinte relação (**função de transferência**):

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0};$$

- A **equação característica** é definida como:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0,$$

  em que a respectiva solução são os **polos** do sistema ($s_1, s_2, \ldots, s_n$);

- A solução da equação abaixo são os **zeros** do sistema:

$$b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0 = 0.$$

**Exemplo:** encontre a função de transferência, os respectivos polos e zeros, e a resposta ($y(t)$) para a entrada impulso unitário considerando a seguinte equação diferencial:

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = \dot{f}(t) + f(t)$$

**Exemplo:** encontre a função de transferência, os respectivos polos e zeros, e a resposta ($y(t)$) para a entrada impulso unitário considerando a seguinte equação diferencial:

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = \dot{f}(t) + f(t)$$

- Aplicando a transformada de Laplace e considerando as **condições iniciais nulas**:

$$\begin{aligned} s^2Y(s) + 5sY(s) + 6Y(s) &= sF(s) + F(s) \\ (s^2 + 5s + 6)Y(s) &= (s+1)F(s) \\ \frac{Y(s)}{F(s)} &= \frac{s+1}{s^2+5s+6} = \frac{(s+1)}{(s+2)(s+3)} \end{aligned}$$

**Exemplo:** encontre a função de transferência, os respectivos polos e zeros, e a resposta ($y(t)$) para a entrada impulso unitário considerando a seguinte equação diferencial:

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = \dot{f}(t) + f(t)$$

- Aplicando a transformada de Laplace e considerando as **condições iniciais nulas**:

$$\begin{aligned} s^2Y(s) + 5sY(s) + 6Y(s) &= sF(s) + F(s) \\ (s^2 + 5s + 6)Y(s) &= (s+1)F(s) \\ \frac{Y(s)}{F(s)} &= \frac{s+1}{s^2+5s+6} = \frac{(s+1)}{(s+2)(s+3)} \end{aligned}$$

- **Polos:** $s = -2$ e $s = -3$, são **estáveis**, pois a parte real das raízes são menores que zero;
- **Zeros:** $s = -1$;

**Exemplo:** encontre a função de transferência, os respectivos polos e zeros, e a resposta ($y(t)$) para a entrada impulso unitário considerando a seguinte equação diferencial:

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = \dot{f}(t) + f(t)$$

- Aplicando a transformada de Laplace e considerando as **condições iniciais nulas**:

$$s^2Y(s) + 5sY(s) + 6Y(s) = sF(s) + F(s)$$
$$(s^2 + 5s + 6)Y(s) = (s + 1)F(s)$$
$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{s+1}{s^2 + 5s + 6} = \frac{(s+1)}{(s+2)(s+3)}$$

- **Polos:** $s = -2$ e $s = -3$, são **estáveis**, pois a parte real das raízes são menores que zero;
- **Zeros:** $s = -1$;
- Resposta Impulsiva (**entrada** $F(s) = 1$**):**

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{(s+1)}{(s+2)(s+3)}F(s) \\ &= \frac{(s+1)}{(s+2)(s+3)}1 \\ &= \frac{(s+1)}{(s+2)(s+3)} \end{aligned}$$

- Decompondo $Y(s)$ em **frações parciais:**

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{(s+1)}{(s+2)(s+3)} \\ &= \frac{A}{(s+2)} + \frac{B}{(s+3)} \\ &= \frac{A}{(s+2)}\frac{(s+3)}{(s+3)} + \frac{B}{(s+3)}\frac{(s+2)}{(s+2)} \\ &= \frac{(A+B)s+3A+2B}{(s+2)(s+3)} = \frac{(s+1)}{(s+2)(s+3)} \end{aligned}$$

- Comparando os polinômios termo a termo, $A = -1$ e $B = 2$. Portanto,

$$Y(s) = \frac{-1}{(s+2)} + \frac{2}{(s+3)}$$

- Fazendo a **transformada inversa** de $Y(s)$:

$$y(t) = (-e^{-2t} + 2e^{-3t})u(t)$$

- **Função de transferência:** é a razão entre a transformada de Laplace da saída e a transformada de Laplace da entrada:

$$\frac{\text{Saída}(s)}{Entrada(s)} = G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0} = K \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)},$$

em que
$z_i$ são os **zeros do sistema**;
$p_i$ são os **polos do sistema**;

- **Função de transferência:** é a razão entre a transformada de Laplace da saída e a transformada de Laplace da entrada:

$$\frac{\text{Saída}(s)}{Entrada(s)} = G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0} = K \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)},$$

  em que
  $z_i$ são os **zeros do sistema**;
  $p_i$ são os **polos do sistema**;

- **Exemplo:** decompor a função de transferência abaixo em zeros, polos e ganhos:

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6} = \frac{(s+1)}{(s+2)(s+3)}$$

- **Função de transferência:** é a razão entre a transformada de Laplace da saída e a transformada de Laplace da entrada:

$$\frac{\text{Saída}(s)}{Entrada(s)} = G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0} = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)},$$

em que
$z_i$ são os **zeros do sistema**;
$p_i$ são os **polos do sistema**;

- **Exemplo:** decompor a função de transferência abaixo em zeros, polos e ganhos:

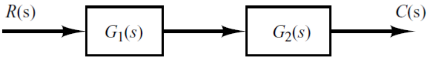
$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6} = \frac{(s+1)}{(s+2)(s+3)}$$

- **Exemplo:** construir a função de transferência para $K = 10$, polos $p_1 = -1; p_2 = -3; p_3 = -1 + 2j; p_4 = -1 - 2j$ e zeros $z_1 = -1$ e $z_2 = -2$:

$$G(s) = 10\frac{(s+1)(s+2)}{(s+1)(s+3)(s+1-2j)(s+1+2j)} = 10\frac{(s+1)(s+2)}{(s+1)(s+3)(s^2+2s+5)}$$

# Diagrama em série e em paralelo

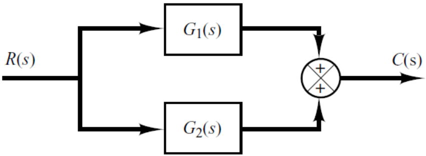
- **Série:**




A função de transferência é:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_1(s)G_2(s)$$

- **Paralelo:**

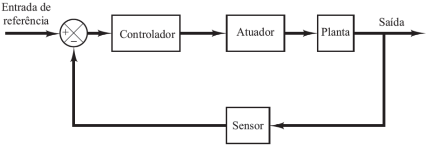



A função de transferência é:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_1(s) + G_2(s)$$

# Diagrama padrão de malha fechada

- A figura a seguir apresenta um diagrama de um **sistema de controle industrial:**




- Pode-se escrever o diagrama na **configuração padrão de malha fechada:**

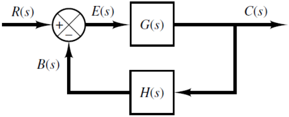
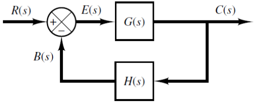



Figura: Configuração padrão

- **Definições:** o bloco $G(s)$ representa o ramo direto (controlador e planta), $H(s)$ representa a dinâmica do sensor/transdutor, $R(s)$ é o sinal de entrada ou referência e $C(s)$ é o sinal de saída;
- A função de transferência de **malha aberta** é definida como:

$$\frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s)$$




- A função de transferência do **ramo direto** é definida como:

$$\frac{C(s)}{E(s)} = G(s)$$

- Baseado na figura acima, pode-se escrever as seguintes relações:

$$E(s) = R(s) - B(s) \tag{1}$$
$$B(s) = H(s)C(s) \tag{2}$$
$$C(s) = G(s)E(s) \tag{3}$$

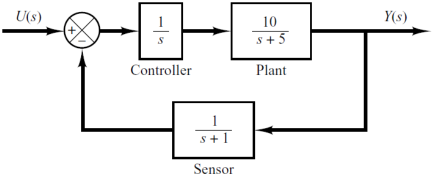
- Substituindo a Eq. 1 e Eq. 2 na Eq. 3, tem-se

$$C(s) = G(s)E(s)$$
$$C(s) = G(s)(R(s) - B(s))$$
$$C(s) = G(s)R(s) - G(s)H(s)C(s)$$

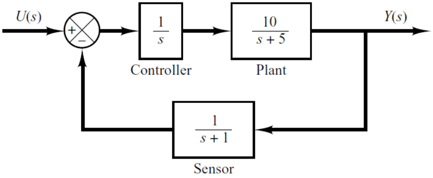
- A função de transferência de **malha fechada** é definida como:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Baseado na figura abaixo, calcule a função de transferência de **malha fechada:**



Baseado na figura abaixo, calcule a função de transferência de **malha fechada:**

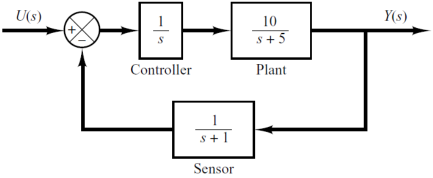



- Tem-se os seguintes blocos:

$$G(s) = K(s)P(s) = \frac{1}{s}\frac{10}{(s+5)} = \frac{10}{s(s+5)}$$

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

Baseado na figura abaixo, calcule a função de transferência de **malha fechada:**




- Tem-se os seguintes blocos:

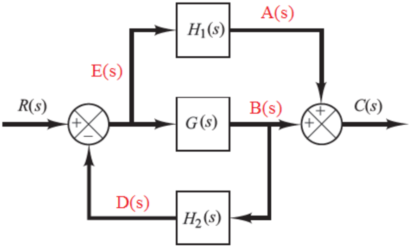
$$G(s) = K(s)P(s) = \frac{1}{s}\frac{10}{(s+5)} = \frac{10}{s(s+5)}$$

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

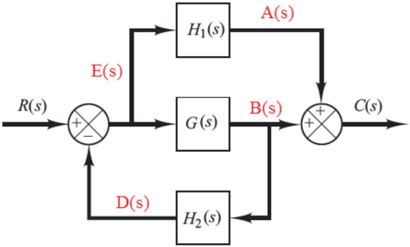
- **Função de transferência de malha fechada:**

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{(1+G(s)H(s))} = \frac{10(s+1)}{s^3+6s^2+5s+10}$$

Para a figura abaixo, calcule a função de transferência de malha fechada:



Para a figura abaixo, calcule a função de transferência de malha fechada:




- Da figura, pode-se escrever as seguintes expressões:

$$A(s) = H_1(s)E(s) \tag{4}$$

$$B(s) = G(s)E(s) \tag{5}$$

$$C(s) = A(s) + B(s) \tag{6}$$

$$D(s) = H_2(s)B(s) \tag{7}$$

$$E(s) = R(s) - D(s) \tag{8}$$

- Substituindo a Eq. (4) e a Eq. (5) na Eq. (6):

$$\begin{aligned} C(s) &= A(s) + B(s) \\ &= H_1(s)E(s) + G(s)E(s) \\ &= (H_1(s) + G(s))E(s) \end{aligned} \tag{9}$$

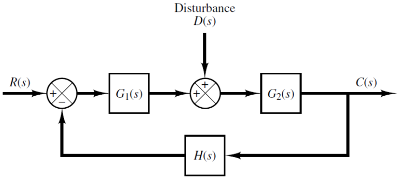
- Substituindo a Eq. (7) e a Eq. (5) na Eq. (8):

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - D(s) \\ &= R(s) - H_2(s)B(s) \\ &= R(s) - H_2(s)G(s)E(s) \\ &= \frac{R(s)}{1 + H_2(s)G(s)} \end{aligned} \tag{10}$$

- Substituindo a Eq. (10) na Eq. (9), a **função de transferência de malha fechada** é definida como:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{H_1(s) + G(s)}{1 + H_2(s)G(s)}$$

- A seguir é apresentado um sistema em **malha fechada com distúrbio:**




- Para analisar o **efeito do distúrbio** $D(s)$ na saída, iremos considerar $R(s) = 0$:

$$\begin{aligned} C_D(s) &= G_2(s)(D(s) - G_1(s)H(s)C_D(s)) \\ &= G_2(s)D(s) - G_1(s)G_2(s)H(s)C_D(s), \end{aligned}$$

em que

$$\frac{C_D(s)}{D(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

- Para analisar o **efeito da entrada** $(R(s))$ na saída, iremos considerar $D(s) = 0$:

$$\frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

# Sistema em malha fechada sujeito a distúrbios

- A resposta do sistema linear considerando ambos os sinais de entrada é:

$$\begin{aligned} C(s) &= C_R(s) + C_D(s) \\ &= \frac{G_1(s)G_2(s)R(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} + \frac{G_2(s)D(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \\ &= \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}(G_1(s)R(s) + D(s)) \end{aligned}$$

- Considerando $|G_1(s)G_2(s)H(s)| \gg 1$ e $|G_1(s)H(s)| \gg 1$, $\frac{C_D(s)}{D(s)}$ torna-se muito pequeno, **minimizando o efeito do distúrbio no sistema de malha fechada**;

- Agora, considerando $|G_1(s)G_2(s)H(s)| \gg 1$, $\frac{C_R(s)}{R(s)} \approx \frac{1}{H(s)}$:

  - $\frac{C_R(s)}{R(s)}$ torna-se independente de $G_1(s)$ e $G_2(s)$. Dessa forma, o impacto devido as **variações** em $G_1(s)$ e $G_2(s)$ no desempenho do sistema de **controle em malha fechada é minimizado**;

  - Para **realimentação unitária**, $H(s) = 1$, o sistema de controle de **malha fechada tende igualar a entrada e a saída**;