Resposta no domínio do tempo

Prof. Dr. Helói F. G. Genari
email:heloi.genari@ufabc.edu.br

Quadrimestre Suplementar

Sumário: sistema de primeira ordem e de segunda ordem

- Sistema padrão de primeira ordem;
- Sistema padrão de segunda ordem;
- Função de transferência;
- Malha fechada.

Sistema de primeira ordem: definição

- Seja um **sistema de primeira ordem** dado por:

$$a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_o c(t) = b_o r(t)$$
$$T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = \gamma r(t),$$

em que $T = \frac{a_1}{a_o}$ é **constante de tempo** e $\gamma = \frac{b_o}{a_o}$ é o **ganho estático**;

- Aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados da equação **(C.I.=0)**:

$$TsC(s) + C(s) = \gamma R(s)$$

- Pode-se definir a **função de transferência** como:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\gamma}{Ts + 1} = P(s)$$

- A **constante de tempo** T do sistema determina a **rapidez** que o sistema irá **responder a uma entrada**;

Sistema de primeira ordem: resposta ao degrau unitário

- A **resposta** $C(s)$ ao **degrau unitário** no domínio da frequência é:

$$C(s) = P(s)R(s)$$

$$C(s) = \frac{\gamma}{Ts+1}\frac{1}{s}$$

- A **resposta** $C(s)$ ao **degrau unitário** no domínio da frequência é:

$$C(s) = P(s)R(s)$$
$$C(s) = \frac{\gamma}{Ts+1}\frac{1}{s}$$

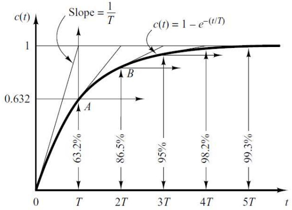
- Decompondo em frações parciais:

$$C(s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{Ts+1} = \frac{\gamma}{s} - \frac{\gamma T}{Ts+1}$$

- Fazendo a transformada inversa de $C(s)$:

$$c(t) = \gamma(\underbrace{1}_{Resp.Par.} - \underbrace{e^{\frac{-1}{T}t}}_{Resp.Homog.}),\ \text{para } t \geq 0$$

- Para $t = T$, $c(t) = 0.632\gamma$;
- Considerando $\gamma = 1$, a resposta ao degrau unitário é ilustrada na figura a seguir:



- A **resposta** $C(s)$ **à rampa unitária** ($r(t) = t$) no domínio da frequência é:

$$C(s) = \frac{1}{s^2}\frac{\gamma}{Ts+1}$$

- A **resposta** $C(s)$ **à rampa unitária** ($r(t) = t$) no domínio da frequência é:

$$C(s) = \frac{1}{s^2}\frac{\gamma}{Ts+1}$$

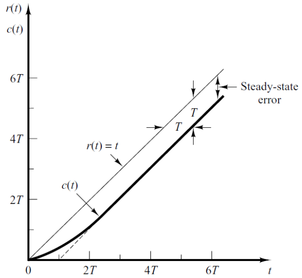
- Decompondo em frações parciais:

$$C(s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{Ts+1} = -\frac{\gamma T}{s} + \frac{\gamma}{s^2} + \frac{\gamma T^2}{Ts+1}$$

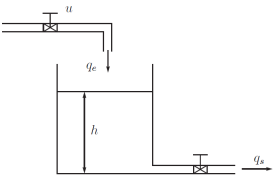
- Fazendo a transformada inversa de $C(s)$:

$$c(t) = \gamma(\underbrace{-T+t}_{Resp.Par.} + \underbrace{Te^{\frac{-1}{T}t}}_{Resp.Homog.}), \text{ para } t \geq 0$$

- Para $\gamma = 1$, a resposta a rampa é ilustrada a seguir:



Determine a constante de tempo e o ganho estacionário para o tanque:



- A **variação do volume** do tanque é dado por:

$$\dot{V}(t) = q_e(t) - q_s(t) = A\dot{h}(t)$$

- Para o **escoamento laminar** na valvula de saída:

$$q_s(t) = \frac{1}{R}h(t)$$

- As equações podem ser agrupadas:

$$A\dot{h}(t) = q_e(t) - \frac{1}{R}h(t) \qquad \rightarrow \qquad RA\dot{h}(t) + h(t) = Rq_e(t)$$

- A **função de transferência** é definida como:

$$\frac{H(s)}{Q_E(s)} = \frac{R}{RAs+1} = \frac{\gamma}{Ts+1}$$

- Um **sistema de segunda ordem padrão** é definido como:

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = \gamma\omega_n^2 f(t),$$

em que ω_n é a **frequência natural** do sistema, ξ é o **fator de amortecimento** e γ é o **ganho estático**.

- A função de transferência correspondente é:

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{\gamma\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

- As **raízes** (polos) da **equação característica** são:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \underbrace{\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}_{\omega_d},$$

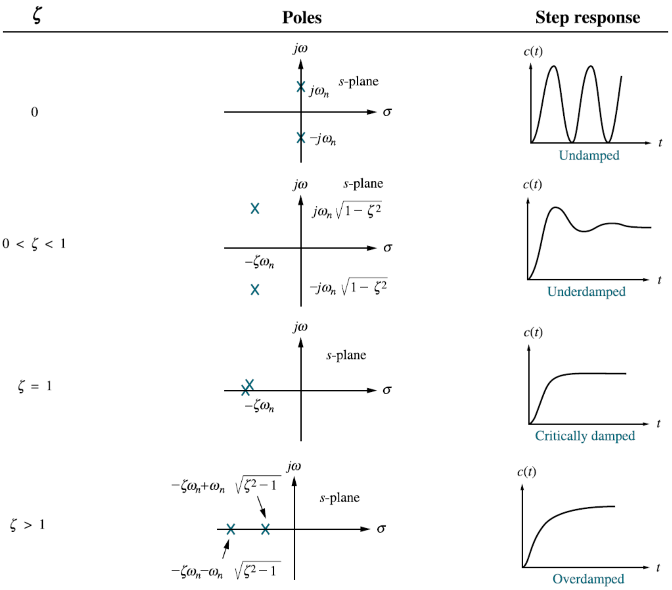
em que ω_d é a **frequência natural amortecida**;

- Para $\xi < 1$:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\,\underbrace{\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}}_{\omega_d},$$

A **resposta natural** do sistema de segunda ordem pode ser analisada utilizando os três principais casos de ξ:

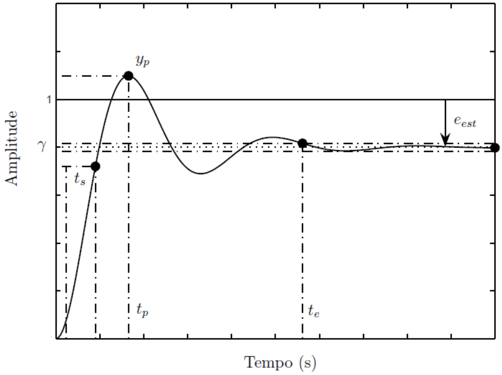
- $\xi > 1$: **sistema superamortecido**, comportamento não oscilatório;
- $0 < \xi < 1$: **sistema subamortecido**, comportamento oscilatório durante o transitório;
- $\xi = 1$: **sistema criticamente amortecido**, não oscilatório.



ζ
Poles
Step response
0
$0 < \zeta < 1$
$\zeta = 1$
$\zeta > 1$
$j\omega$
s-plane
σ
$j\omega_n$
$-j\omega_n$
$j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$
$-j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$
$-\zeta\omega_n$
$-\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$
$-\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$
$c(t)$
t
Undamped
Underdamped
Critically damped
Overdamped

- O **comportamento** de um sistema de **segunda ordem subamortecido** é normalmente analisado em termos da **resposta ao degrau unitário**;

- O **desempenho** do sistema de **segunda ordem** é analisado em função de **alguns parâmetros** como: erro estacionário, tempo para o pico máximo, percentual de sobressinal, constante de tempo e tempo de estabilização.



- **Valor de regime**:

$$\gamma = \lim_{t\to\infty} y(t)$$

- **Erro estacionário** (e_{est}): diferença entre o valor de entrada e o valor de regime:

$$e_{est} = 1 - \gamma$$

- **Tempo de pico** (t_p): é o tempo para a resposta atingir o primeiro pico da sobre-elevação (overshoot). Para a resposta ao degrau unitário:

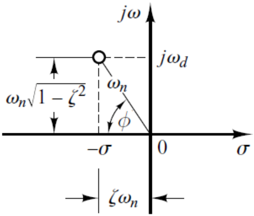
$$y(t) = \gamma \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t + \phi)\right],$$

o **pico da curva** pode ser determinado por:

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \xi\omega_n \sin(\omega_d t + \phi) = \omega_d \cos(\omega_d t + \phi)$$

- A equação anterior pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\tan(\omega_d t + \phi) = \frac{\omega_d}{\xi\omega_n} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = \tan(\phi)$$



- Assim, pode-se escrever a seguinte relação:

$$\omega_d t = k\pi \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots,$$

logo, o primeiro pico ocorre (**tempo de pico**):

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

Sistema de segunda ordem: subamortecido

- Substituindo o tempo de pico na resposta ao degrau unitário:

$$
\begin{aligned}
y_p = y(t_p) &= \gamma \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n \frac{\pi}{\omega_d}}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_d \frac{\pi}{\omega_d} + \phi \right) \right] \\
&= \gamma \left[1 - \frac{e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}{\sqrt{1-\xi^2}} (-\sin(\phi)) \right] \\
&= \gamma \left[1 + e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \right] \qquad (1)
\end{aligned}
$$

- O **percentual de sobressinal**, *pss*, representa o valor do pico em relação ao valor de regime de forma percentual, ou seja,

$$pss = 100\frac{y_p - \gamma}{\gamma}$$

- Substituindo o valor y_p dado na Eq. (1):

$$pss = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}},$$

ou ainda,

$$\xi = \frac{\ln\left(\frac{100}{pss}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln\left(\frac{100}{pss}\right)\right)^2}}$$

- A **constante de tempo** de um sistema de segunda ordem é definida como:

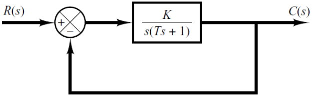
$$T = \frac{1}{\xi \omega_n}$$

- O **tempo de estabilização** é o tempo que o sistema leva para atingir $x\%$ de erro do valor de regime:

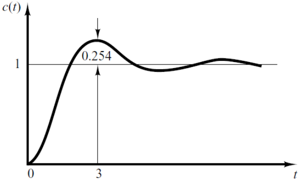
$$t_{5\%} = 3T = \frac{3}{\xi \omega_n} \qquad \text{5\% de erro}$$

$$t_{2\%} = 4T = \frac{4}{\xi \omega_n} \qquad \text{2\% de erro}$$

Quando o sistema em malha fechada da Figura (a) é submetido a degrau unitário, ele responde segundo segundo a Figura (b). Considerando os dados na resposta, determine os valores de K e T:



(a) Malha fechada.



(b) Resposta ao degrau unitário.

- O **sistema em malha fechada** é:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{K}{Ts^2+s+K} = \frac{\frac{K}{T}}{s^2+\frac{1}{T}s+\frac{K}{T}}$$

- Considerando o **sistema padrão de segunda ordem**:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\gamma\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2},$$

pode-se definir as seguintes relações:

$$\gamma = 1, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}} \quad \text{e} \quad 2\xi\omega_n = \frac{1}{T}$$

- O **sobressinal do sistema** é 25.4%, logo:

$$\xi = \frac{\ln\left(\frac{100}{pss}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln\left(\frac{100}{pss}\right)\right)^2}} = \frac{\ln\left(\frac{100}{25.4}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln\left(\frac{100}{25.4}\right)\right)^2}} = 0.4$$

- O **tempo de pico** é de 3 s:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \frac{\pi}{t_p\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{3\sqrt{1-0.4^2}} = 1.14\ rad\backslash s$$

- **Os termos T e K** são calculados como:

$$T = \frac{1}{2\xi\omega_n} = \frac{1}{2 \times 0.4 \times 1.14} = 1.09$$
$$K = T\omega_n^2 = 1.09 \times 1.14^2 = 1.42$$