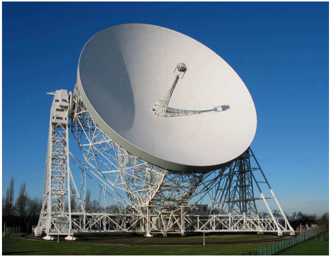
Introdução à disciplina e revisão da transformada de Laplace

Prof. Dr. Helói F. G. Genari
email:heloi.genari@ufabc.edu.br

Quadrimestre Suplementar

(a) Câmbio CVT

(b) Veículo autônomo



(c) Telescópio

Definições

- **Sistema:** é um conjunto de objetos agrupados que se deseja controlar. O sistema pode ser normalmente divididos em subsistemas. Ex: uma aeronave, um carro, um submarino, dentro outros;

- **Planta ou processo:** é um sistema que deseja controlar. Ex: trajetória de um carro autônomo ou suspensão de um veículo (subsistema);

- **Controlador:** é um subsistema com função de controlar a planta com um desempenho definido;

- **Distúrbios:** é um sinal que afetada os sinais entre os subsistemas.

- O valor do sinal de saída não influência a ação de controle:

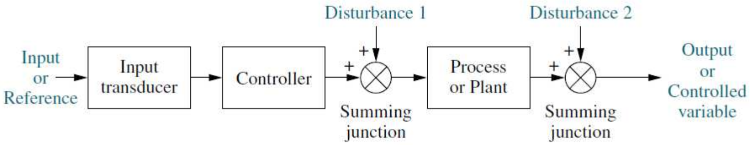


Figura: Malha aberta

- **Exemplo:** máquina de lavar roupa, semáforo, etc.

Sistema em malha fechada

- Atua para **diminuir a diferença** entre a **saída real** e a **desejada**:

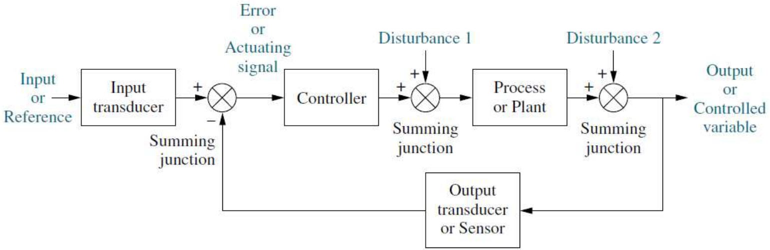


Figura: Malha fechada

- **Exemplo:** braço robótico, controle de trajetória de um drone, controle de vibrações de edifício, etc.

- São **sistemas mais complexos**, porém oferecem benefícios como rejeição de distúrbios e a robustez em relação a variação nos componentes da planta.

- A transformada de Laplace será a ferramenta matemática utilizada para descrever os sistemas na maior parte do curso;

- A **transformada de Laplace** de uma função $f(t)$ é definida como:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt, \text{ com } s = \sigma + j\omega$$

- A **transformada inversa** de Laplace de $F(s)$ é definida como:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

- A transforma inversa de Laplace dificilmente será obtida pela formula acima. Ainda nessa aula, veremos um método para realizar a transforma inversa.

- **Exponencial:** $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ e^{-at}, & t \geq 0 \end{cases}$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-at}e^{-st}dt = \frac{-1}{(s+a)}e^{-st} \,\Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{s+a}$$

- **Exponencial:** $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ e^{-at}, & t \geq 0 \end{cases}$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-at}e^{-st}dt = \frac{-1}{(s+a)}e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{s+a}$$

- **Degrau unitário:** $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1 = e^{0t}, & t \geq 0. \end{cases}$

$$F(s) = \frac{1}{s+0} = \frac{1}{s}$$

- **Exponencial:** $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ e^{-at}, & t \geq 0 \end{cases}$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-at}e^{-st}dt = \frac{-1}{(s+a)}e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{s+a}$$

- **Degrau unitário:** $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1 = e^{0t}, & t \geq 0. \end{cases}$

$$F(s) = \frac{1}{s+0} = \frac{1}{s}$$

- **Rampa unitária:** $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ t, & t \geq 0. \end{cases}$

$$F(s) = \frac{1}{s^2}$$ (**deduza em casa**)

- **Parábola unitária:** $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \frac{1}{2}t^2, & t \geq 0. \end{cases}$

$$F(s) = \frac{1}{s^3}$$ (**deduza em casa**)

Tabela de algumas transformadas

$f(t)$	$F(s)$
Impulso unitário $\delta(t)$	1
Degrau unitário $1(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{1}{s^n}$
$t^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{(s+a)}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
$t^n e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

$f(t)$	$F(s)$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$\dfrac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\,\mathrm{sen}\,\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t \quad (0<\zeta<1)$	$\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
$-\dfrac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\,\mathrm{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t-\phi)$ $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ $(0<\zeta<1,\quad 0<\phi<\pi/2)$	$\dfrac{s}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
$1-\dfrac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\,\mathrm{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\phi)$ $\phi=\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ $(0<\zeta<1,\quad 0<\phi<\pi/2)$	$\dfrac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$
$1-\cos\omega t$	$\dfrac{\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}$
$\omega t-\mathrm{sen}\,\omega t$	$\dfrac{\omega^3}{s^2(s^2+\omega^2)}$

- A transformada de Laplace é um **operador linear**:

$$\mathcal{L}[\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)] = \alpha_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + \alpha_2 \mathcal{L}[f_2(t)]$$

- A transformada de Laplace é um **operador linear**:

$$\mathcal{L}[\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)] = \alpha_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + \alpha_2 \mathcal{L}[f_2(t)]$$

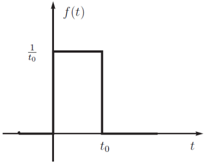
- **Diferenciação real:** se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^-)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(0^-) - \dot{f}(0^-)$$

$$\vdots$$

- Definição formal do **impulso unitário**: $\delta(t) = \lim_{t_0 \to 0} f(t)$



Observação: $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$, devido a diferenciação da função degrau.

Propriedades

- **Translação real:** seja $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, então:

$$\mathcal{L}[f(t-T)u(t-T)] = e^{-sT}F(s)$$

- **Teorema** do **valor final** e do **valor inicial**: se $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ e existirem $\mathcal{L}[\frac{df}{dt}]$, $\lim_{t\to\infty} f(t)$ e $\lim_{s\to 0} sF(s)$, então:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) \text{ (Valor final)}$$

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \text{ (Valor inicial)}$$

- **Convolução real:** define-se a convolução entre dois sinais $x(t)$ e $h(t)$ como:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Se $\mathcal{L}[x(t)] = F(s)$ e $\mathcal{L}[h(t)] = H(s)$, então

$$\mathcal{L}[x(t) * h(t)] = X(s)H(s)$$

- Se a resposta impulsiva ($h(t)$) de um sistema for conhecida, a **saída** do sistema será a **convolução da resposta impulsiva com a entrada** ($x(t)$).

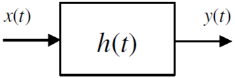


Tabela com algumas propriedades

$\mathcal{L}[Af(t)] = AF(s)$
$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$
$\mathcal{L}_{\pm}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0\pm)$
$\mathcal{L}_{\pm}\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0\pm) - \dot{f}(0\pm)$
$\mathcal{L}_{\pm}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} \overset{(k-1)}{f}(0\pm)$ onde $\overset{(k-1)}{f}(t) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}f(t)$
$\mathcal{L}_{\pm}\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s^n} + \frac{1}{s}\left[\int f(t)dt\right]_{t=0\pm}$
$\mathcal{L}_{\pm}\left[\int \cdots \int f(t)(dt)^n\right] = \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{s^{n-k+1}}\left[\int \cdots \int f(t)(dt)^k\right]_{t=0\pm}$
$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}$

Tabela com algumas propriedades

$\int_0^\infty f(t)\,dt = \lim_{s \to 0} F(s)$ se $\int_0^\infty f(t)\,dt$ existe
$\mathcal{L}[e^{-at}) f(t)] = F(s+a)$
$\mathcal{L}[f(t-\alpha)1(t-\alpha)] = e^{-\alpha s}F(s) \qquad \alpha \geq 0$
$\mathcal{L}[tf(t)] = -\dfrac{dF(s)}{ds}$
$\mathcal{L}[t^2 f(t)] = -\dfrac{d^2}{ds^2}F(s)$
$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n}F(s) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$
$\mathcal{L}\left[\dfrac{1}{t}f(t)\right] = \int_s^\infty F(s)\,ds$ se $\lim_{t \to 0} \dfrac{1}{t}f(t)$ existe
$\mathcal{L}\left[f\left(\dfrac{1}{a}\right)\right] = aF(as)$
$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau\right] = F_1(s)F_2(s)$
$\mathcal{L}[f(t)g(t)] = \dfrac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)G(s-p)\,dp$

- Este método se aplica quando $X(s)$ é uma **função racional** (quociente de dois polinômios), ou seja:

$$X(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{c_1}{r_1(s)} + \frac{c_2}{r_2(s)} + \ldots + \frac{c_n}{r_n(s)},$$

em que $r_i(s)$ são polinômios de grau 1 ou 2.

- **Exemplo:** Calcular a transformada inversa de Laplace de

$$X(s) = \frac{s-1}{s^2(s+2)} = \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s} + \frac{c}{(s+2)}$$

- Este método se aplica quando $X(s)$ é uma **função racional** (quociente de dois polinômios), ou seja:

$$X(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{c_1}{r_1(s)} + \frac{c_2}{r_2(s)} + \ldots + \frac{c_n}{r_n(s)},$$

em que $r_i(s)$ são polinômios de grau 1 ou 2.

- **Exemplo:** Calcular a transformada inversa de Laplace de

$$X(s) = \frac{s-1}{s^2(s+2)} = \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s} + \frac{c}{(s+2)}$$

Solução:

$$X(s) = \frac{a}{s^2}\frac{(s+2)}{(s+2)} + \frac{b}{s}\frac{s(s+2)}{s(s+2)} + \frac{c}{(s+2)}\frac{s^2}{s^2}$$
$$= \frac{(b+c)s^2 + (a+2b)s + 2a}{s^2(s+2)} = \frac{s-1}{s^2(s+2)}$$

- Este método se aplica quando $X(s)$ é uma **função racional** (quociente de dois polinômios), ou seja:

$$X(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{c_1}{r_1(s)} + \frac{c_2}{r_2(s)} + \ldots + \frac{c_n}{r_n(s)},$$

em que $r_i(s)$ são polinômios de grau 1 ou 2.

- **Exemplo:** Calcular a transformada inversa de Laplace de

$$X(s) = \frac{s-1}{s^2(s+2)} = \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s} + \frac{c}{(s+2)}$$

Solução:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{a}{s^2}\frac{(s+2)}{(s+2)} + \frac{b}{s}\frac{s(s+2)}{s(s+2)} + \frac{c}{(s+2)}\frac{s^2}{s^2} \\ &= \frac{(b+c)s^2 + (a+2b)s + 2a}{s^2(s+2)} = \frac{s-1}{s^2(s+2)} \end{aligned}$$

Comparando os polinômios termo a termo,

$$0a + b + c = 0 \quad a + 2b + 0c = 1 \quad 0a + 0b + 2a = -1,$$

em que $a = -\frac{2}{4}, b = \frac{3}{4}, c = -\frac{3}{4}$.

- A **transformada inversa** é dada por:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{-2}{s^2} + \frac{3}{s} - \frac{3}{s+2}\right)\right] = \frac{1}{4}(-2t + 3 - 3e^{-2t})u(t)$$