DCC
DEPARTAMENTO DE
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

UFMG
UNIVERSIDADE FEDERAL
DE MINAS GERAIS

# Estruturas de Dados

## Análise de Algoritmos Recursivos

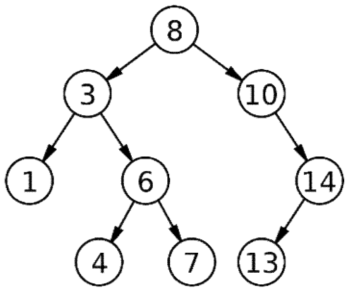
Professores: Luiz Chaimowicz e Raquel Prates

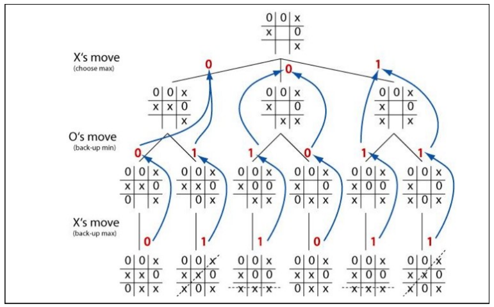
# Análise de Algoritmos Recursivos

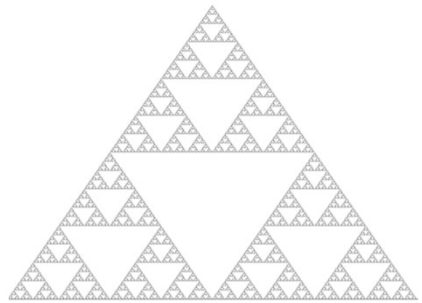
- Sumário
  - Revisão de Algoritmos Recursivos
    - Definição
    - Pilha de Execução
    - Exemplos
  - Equações de Recorrência
    - Como representar o custo do algoritmo
  - Resolução de Equações de Recorrência
    - Expansão de Termos (árvore de recursão)
    - Teorema Mestre

# Recursividade

- **Definição:** Um procedimento que chama a si mesmo é dito ser **recursivo**.
- **Vantagem:** Recursividade permite descrever algoritmos de forma mais clara e concisa, especialmente problemas recursivos por natureza ou que utilizam estruturas recursivas.





DCC

# Recursividade

- Fatorial:

  $n! = n*(n-1)!$ para $n>0$

  $0! = 1$

- Em C

```
int Fat (int n) {
    if (n == 0)
        return 1;
    else
        return n * Fat(n-1);
}
```

# Estrutura de uma função recursiva

- Normalmente, as funções recursivas são divididas em duas partes
  - Chamada Recursiva
  - Condição de Parada

```
int Fat (int n) {
   if (n == 0)
      return 1;
   else
      return n * Fat(n-1);
}
```

# Estrutura de uma função recursiva

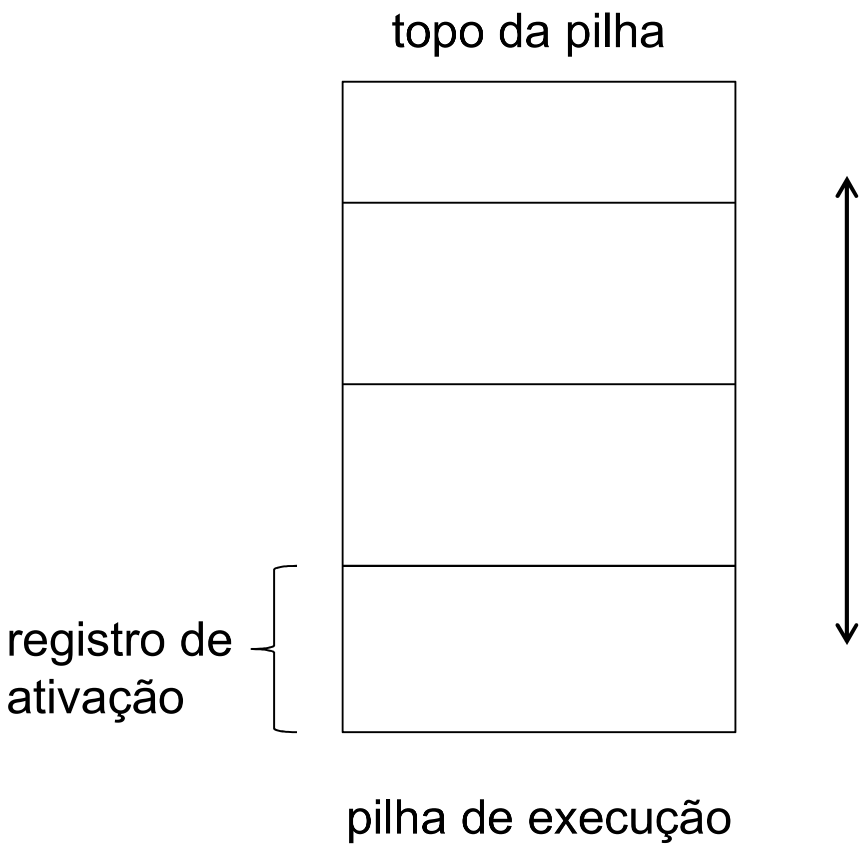
- A condição de parada é fundamental para evitar a execução de loops infinitos

- A chamada recursiva pode ser
  - Direta: função A chama ele mesma
  - Indireta: A chama B que chama A novamente

- A chamada recursiva pode ocorrer mais de uma vez dentro da função

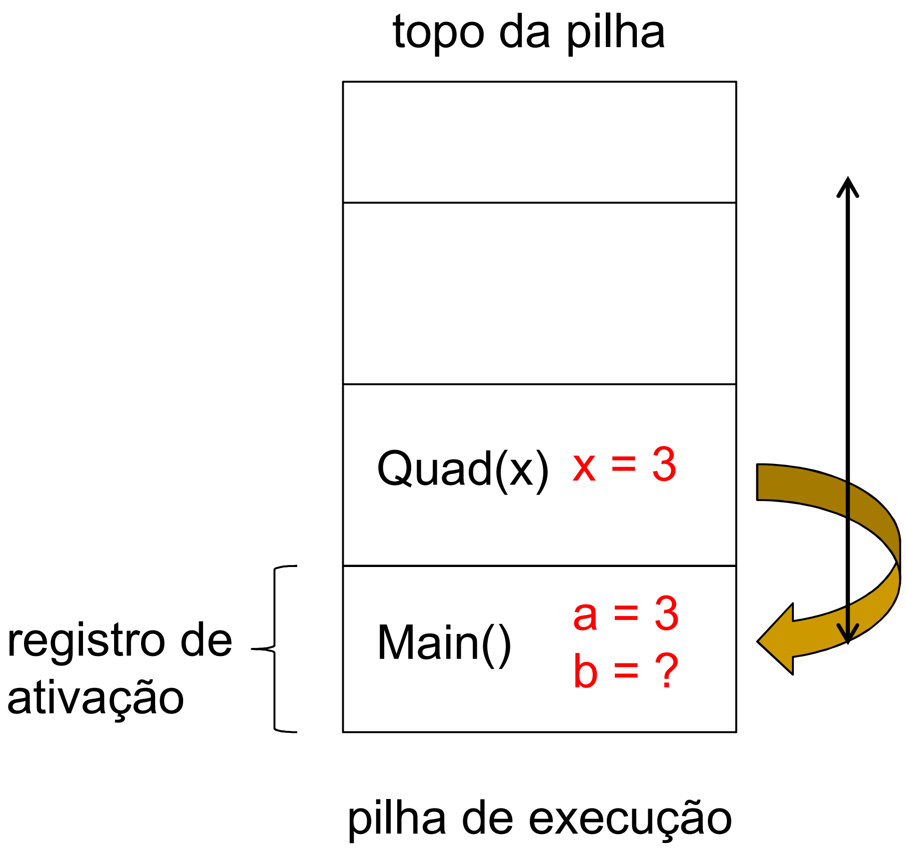
# Execução de Algoritmos Recursivos

- Internamente, quando qualquer chamada de função é feita dentro de um programa, é criado um **Registro de Ativação** na **Pilha de Execução** do programa



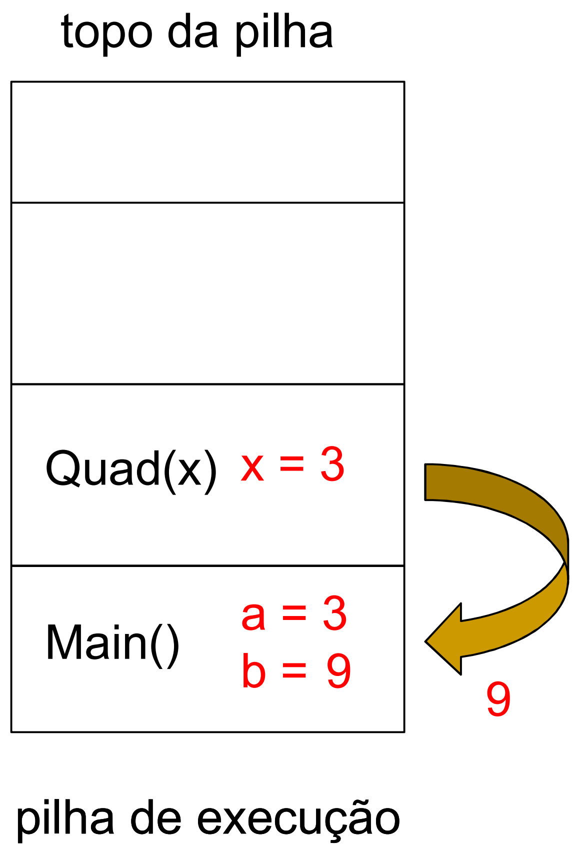
# Execução de Algoritmos Recursivos

- O registro de ativação armazena os parâmetros e variáveis locais da função bem como o “ponto de retorno” no programa ou subprograma que chamou essa função.



# Execução de Algoritmos Recursivos

- Ao final da execução dessa função, o registro é desempilhado e a execução volta ao subprograma que chamou a função



# Exemplo de execução

```
int fat (int n) {
    if (n<=0)
        return 1;
    else
        return n * fat(n-1);
}


main() {
  int f;
  f = fat(4);
  printf("%d",f);
}
```

| | |
|---|---|
| fat(0) | 1 |
| fat(1) | 1 |
| fat(2) | 2 |
| fat(3) | 6 |
| fat(4) | 24 |
| Main() | |

pilha de execução

# Função Fatorial Não Recursiva

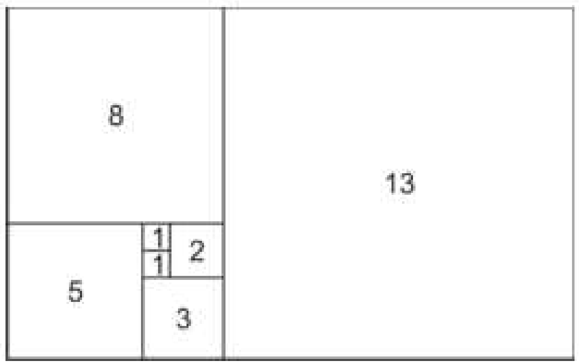
```
int fat (int n) {
   int f;
   f = 1;
   while(n > 0){
     f = f * n;
     n = n - 1;
   }
   return f;
}


main() {
  int f;
  f = fat(4);
  printf(“%d”,f);
}
```

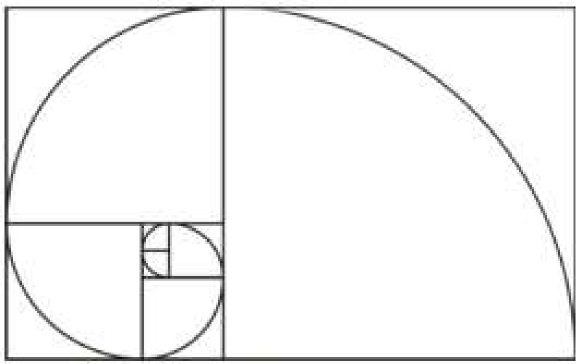
fat(4) 24

Main()

# Série de Fibonacci

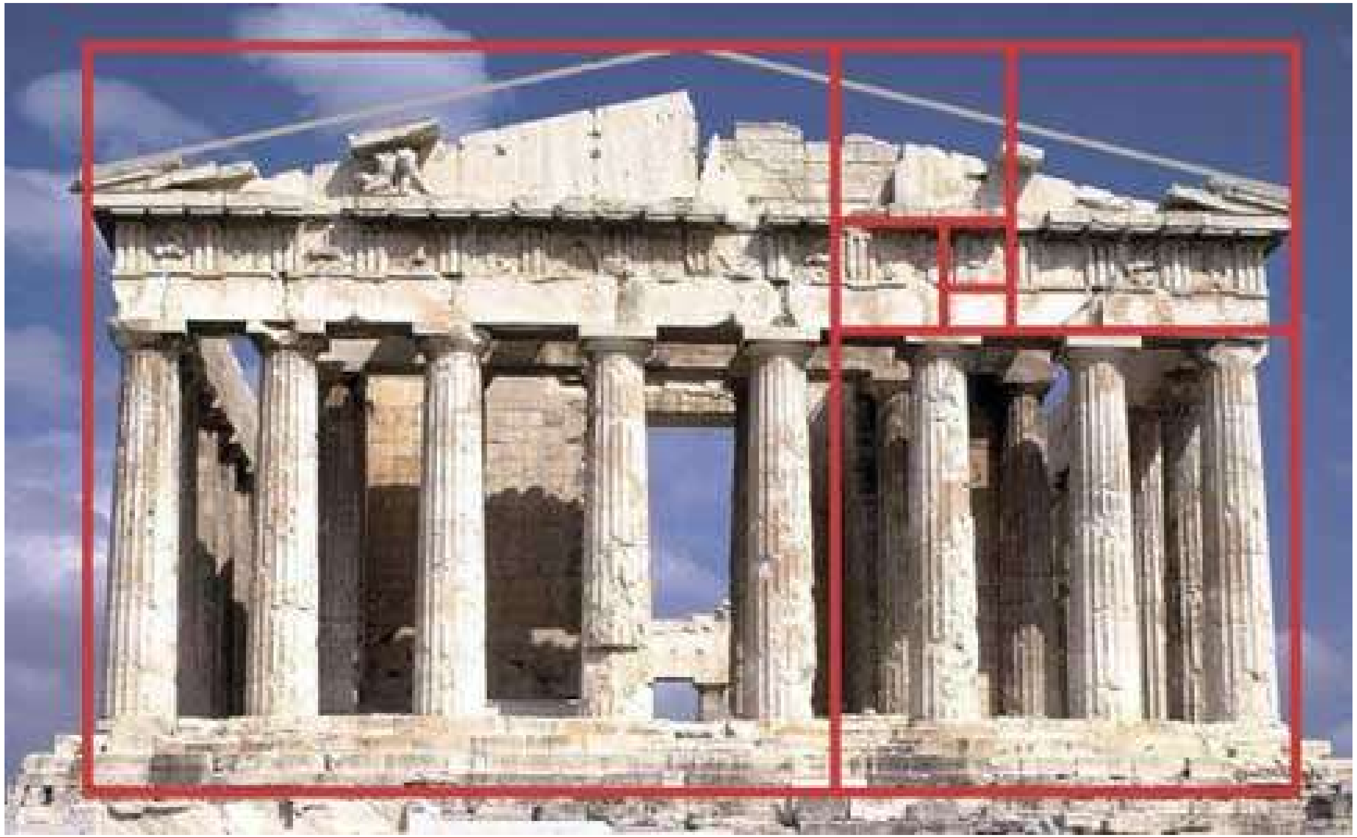
- $F(n) = F(n-1) + F(n-2) \qquad n > 2,$
- $F(1) = F(2) = 1$
  - 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89...
  - A razão do item atual e o anterior é aproximadamente 1,618 (*golden ratio* $\phi$)






# Série de Fibonacci

- Partenon, largura/altura = $\phi$ = 1,6180339...



# Série de Fibonacci

- **Série de Fibonacci:**
  - F(n) = F(n-1)+ F(n-2)        n > 2,
  - F(1) = F(2) = 1

```
int Fib(int n) {
    if (n < 3)
        return 1;
    else
        return Fib(n-1) + Fib(n-2);
}
```

# Análise da função Fibonacci

- Ineficiência em Fibonacci
- Termos F(n-1) e F(n-2) são computados independentemente
  - Custo para cálculo de F(n)
  - $O(\phi^n)$ onde $\phi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1{,}61803...$
  - *Golden ratio, Número de ouro, Phi*
- O custo é exponencial!

# Fibonacci não recursivo

- Complexidade: O(n)
- **Conclusão: não usar recursividade cegamente!**

```
int FibIter(int n) {
    int fn1 = 1, fn2 = 1;
    int fn, i;

    if (n < 3) return 1;

    for (i = 3; i <= n; i++) {
        fn = fn2 + fn1;
        fn2 = fn1;
        fn1 = fn;
    }
    return fn;
}
```

| $n$ | 20 | 30 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|
| *Recursiva* | 1 seg | 2 min | 21 dias | $10^9$ anos |
| *Iterativa* | 1/3 mseg | 1/2 mseg | 3/4 mseg | 1,5 mseg |

# Quando vale a pena usar recursividade?

- Algoritmos complexos, cuja a implementação iterativa é complexa e normalmente requer o uso explícito de uma pilha
  - Dividir para Conquistar (Ex. Quicksort)
  - Caminhamento em Árvores (pesquisa)

Voltando para

# ANÁLISE DE COMPLEXIDADE dos Algoritmos Recursivos

# Função Fatorial Não Recursiva

- Qual a ordem de complexidade?

```
int fat (int n) {
    int f;
    f = 1;              → O(1)
    while(n > 0){
      f = f * n;        → O(1)  ┐
      n = n - 1;        → O(1)  ┘ x n = O(n)
    }
    return f;           → O(1)
}
```

Complexidade de Tempo: O(1) + O(n) + O(1) = **O(n)**

Complexidade de Espaço: O(1)




DCC

# Análise de Complexidade

- E para a função recursiva?

```
int fat (int n) {
    if (n <= 0)              → O(1)
        return 1;            → O(1)
    else
        return n * fat(n-1); → O(1) + ?
}
```

**Problema:** a análise de complexidade da função **`fat`** com o parâmetro *n*, depende da complexidade da própria função com o parâmetro *n-1*

# Análise de Algoritmos Recursivos

- Na análise de complexidade, para cada procedimento é associada uma função de complexidade *f(n)* desconhecida, onde n normalmente é relacionado com o tamanho da entrada do procedimento.

- Por se tratar de um algoritmo recursivo, *f(n)* vai ser obtida através de uma equação de recorrência.

# Análise de Algoritmos Recursivos

- **Equação de recorrência**: maneira de definir uma função por uma expressão envolvendo a mesma função com entradas menores.
- Uma equação de recorrência tem 2 partes
  - Caso base: no qual a equação tem uma solução para um determinado valor de entrada
  - Recorrência: no qual a solução da equação para uma entrada *n* é expressa em função da solução para valores menores

# Análise de Algoritmos Recursivos

- Exemplos:

$$\begin{cases} T(n) = T(n-1) + n, \text{ para } n > 1 \\ T(n) = 1, \text{ para } n \leq 1 \end{cases}$$

T(1) = 1

T(2) = T(1) + 2 = 3

T(3) = T(2) + 3 = 6

T(4) = T(3) + 4 = 10

...

# Análise de Algoritmos Recursivos

- Vamos utilizar a equação de recorrência para estimar o **custo** de se resolver um problema de tamanho n em função do custo de se resolver um problema menor

- Voltando à função fat:

```
int fat (int n) {
    if (n <= 0)
        return 1;
    else
        return n * fat(n-1);
}
```

- **Equação de recorrência:** (considerando como custo o número de multiplicações):

$$T(n) = 1 + T(n-1), \quad para\ n > 0$$
$$T(n) = 0 \quad para\ n \leq 0$$

# Análise de Algoritmos Recursivos

- E para Fibonacci?

```
int Fib(int n) {
   if (n <= 2)
      return 1;
   else
      return Fib(n-1) + Fib(n-2);
}
```

$$T(n) = T(n\text{-}1) + T(n\text{-}2) + c, \quad para\ n > 2$$
$$T(n) = d \qquad para\ n \leq 2$$

onde $c$ e $d$ são constantes

# Exemplo / Exercício

- Para a função Pesquisa mostrada abaixo, determine a sua equação de recorrência. (operação relevante “inspecione item”):

```
Pesquisa(n)
   Se (n <= 1)
        'inspecione item' e termine;
   Senão {
       para cada um dos n elementos'inspecione item';
       Pesquisa(n/3) ;
   }
}
```

$$T(n) = n + T(n/3), \quad para\ n > 1$$
$$T(n) = 1 \quad\quad\quad\quad para\ n \leq 1$$

# Exemplo / Exercício

- O que faz a função abaixo?
- Qual a sua equação de recorrência? (considere como operação relevante o # de comparações de elementos)

```
void SRec(int *A, int n){ // A[0..n-1] é um vetor de int
    int i, imax, aux;
    if (n > 1) {
        imax = n-1;
        for(i=0; i<n-1; i++)
            if(A[i] > A[imax])
                imax = i;
        aux = A[imax];
        A[imax] = A[n-1];
        A[n-1] = aux;
        SRec(A,n-1);
    }
}
```

***Ordena o Vetor*** *usando o algoritmo "Seleção" recursivo*

$T(n) = n\text{-}1+T(n\text{-}1), \quad para\ n > 1$

$T(n) = 0. \qquad para\ n \leq 1$

# Exemplo / Exercício

- O que faz a função abaixo?
- Qual a sua equação de recorrência? (considere como operação relevante a comparação "**`if (u > v)`**" )

```
int X(int *A, int e, int d){ // A[e..d] é um vetor de int
    int u, v, m;
    if (e == d) return A[e];
    m = (e+d)/2;
    u = X(A, e, m);
    v = X(A, m+1, d);

    if (u > v)
        return u;
    else
        return v;
}
```

Encontra o maior elemento do vetor

$$T(n) = 2T(n/2) + 1, \quad para\ n > 1$$
$$T(n) = 0. \quad para\ n \leq 1$$

# Análise de Algoritmos Recursivos

- Como resolver a equação de recorrência?
- Vários métodos de resolução:
  - **Expansão de termos / Árvore de Recursão**
  - **Teorema Mestre**
  - Método da Substituição

# Análise de Algoritmos Recursivos

- Expansão de termos
  - A partir da recorrência, expanda os termos obtendo termos com entradas menores
  - Repita o processo até chegar no caso base
  - Substitua os valores com os termos de entradas menores já computados
  - Some os custos de todos os termos
  - Calcule a fórmula fechada do somatório

# Qual é a ordem de complexidade?

- Voltando à função fat

```
int fat (int n) {
    if (n <= 0)
        return 1;
    else
        return n * fat(n-1);
}
```

- Equação de recorrência para o Fatorial (Custo geral da função):

$$
\boxed{\begin{array}{ll} T(n) = c + T(n\text{-}1), & para\ n > 0 \\ T(n) = d & para\ n \leq 0 \end{array}}
$$

# Análise de Algoritmos Recursivos

- Expandindo a equação e depois fazendo uma substituição dos termos:

$$T(n) = c + T(n\text{-}1)$$
$$T(n\text{-}1) = c + T(n\text{-}2)$$
$$T(n\text{-}2) = c + T(n\text{-}3)$$
$$\ldots$$
$$T(1) = c + T(0)$$
$$T(0) = d$$

$$T(n) = \underbrace{c + c + c + \ldots + c}_{n \text{ vezes}} + d$$

$$T(n) = n.c + d \quad \rightarrow \quad O(n)$$

# Análise de Algoritmos Recursivos

- A ordem complexidade do algoritmo para calcular o fatorial de maneira recursiva é **O(n)**

- E quanto à versão não recursiva?

```
int fat (int n) {
   int f;
   f = 1;
   while(n > 0){
     f = f * n;
     n = n - 1;
   }
   return f;
}
```

Também é O(n)

# Análise de Algoritmos Recursivos

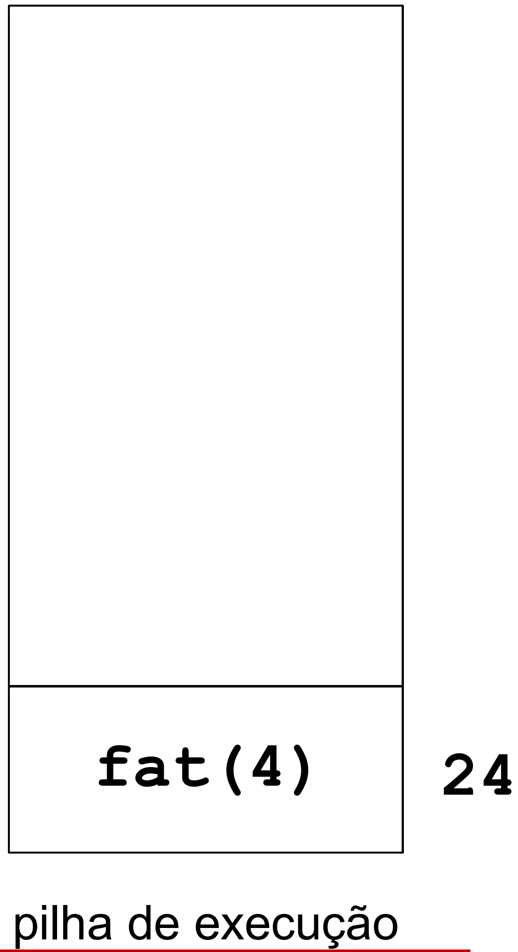
- Qual é a melhor alternativa? O código recursivo ou o código iterativo?

- Vamos olhar o que acontece com a complexidade de espaço...

# Exemplo de execução

## Versão Iterativa:

```
void fat (int n) {
   int f = 1
   while(n > 0){
      f = f * n;
      n = n - 1;
    }
    return f;
}
main() {
   int f;
   f = fat(4);
   printf("%d",f);
}
```



# Exemplo de execução

## Versão Recursiva:

```
int fat (int n) {
    if (n<=0)
        return 1;
    else
        return n * fat(n-1);
}


main() {
   int f;
   f = fat(4);
   printf("%d",f);
}
```

| | |
|---|---|
| fat(0) | 1 |
| fat(1) | 1 |
| fat(2) | 2 |
| fat(3) | 6 |
| fat(4) | 24 |

pilha de execução

# Análise de Algoritmos Recursivos

- Para a abordagem recursiva complexidade de espaço é O(n), devido a pilha de execução
- Já na abordagem iterativa complexidade de espaço é O(1)
- Novamente, vemos que a recursividade nem sempre é a melhor solução, mesmo quando a definição matemática do problema é feita em termos recursivos

# Análise de Algoritmos Recursivos

Resolvendo a equação de recorrência do Seleção Recursivo (SRec):

$$\boxed{\begin{array}{ll} T(n) = n\text{-}1 + T(n\text{-}1), & para\ n > 1 \\ T(n) = 0 & para\ n \leq 1 \end{array}}$$

$$T(n) = (n\text{-}1) + T(n\text{-}1)$$

$$T(n\text{-}1) = (n\text{-}2) + T(n\text{-}2)$$

$$T(n\text{-}2) = (n\text{-}3) + T(n\text{-}3)$$

$$\ldots$$

$$T(2) = 1 + T(0)$$

$$T(1) = 0$$

$$T(n) = \underbrace{(n\text{-}1) + (n\text{-}2) + \ldots + 2 + 1 + 0}$$

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$O(n^2)$$

# Análise de Algoritmos Recursivos

- E para a função max?

```
int max(int *A, int e, int d){
    int u, v, m;
    if (e == d) return A[e];
    m = (e+d)/2;
    if (e == d) return A[e];
    u = max(A, e, m);
    v = max(A, m+1, d);

    if (u > v)
        return u;
    else
        return v;
}
```

$$T(n) = 2T(n/2) + 1, \quad para\ n > 1$$
$$T(n) = 0. \quad para\ n \leq 1$$

$$T(n) = 2T(n/2) + 1$$
$$T(1) = 0$$

Expandindo a equação :

$$T(n) = 2T(n/2) + 1$$
$$2T(n/2) = 4T(n/4) + 2$$
$$(n/4) = 8T(n/8) + 4$$
$$\vdots$$
$$2^{i-1}T(n/2^{i-1}) = 2^{i}T(n/2^{i}) + 2^{i-1}$$

Substituin do os termos :

$$T(n) = 2^{i}T(n/2^{i}) + 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{i-1}$$

Para colocar a Condição de Parada :

$$T(n/2^{i}) \rightarrow T(1)$$
$$n/2^{i} = 1 \rightarrow i = \log_2 n$$

Logo :

$$T(n) = 2^{i}T(n/2^{i}) + \sum_{k=0}^{\log_2 n - 1} 2^{k}$$
$$T(n) = 0 + \frac{1 - 2^{\log_2 n}}{1 - 2} = n - 1$$

$$O(n)$$

Somatório de uma PG finita:

$$\sum_{i=0}^{n} r^{i} = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

# Teorema Mestre

Método "receita de bolo" para resolver recorrências do tipo

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

onde $a \geq 1, b > 1$ e $f(n)$ positiva

# Teorema Mestre

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

$$\text{onde } a \geq 1, b > 1 \text{ e } f(n) \text{ positiva}$$

- Este tipo de recorrência é típico de algoritmos "dividir para conquistar"
  - Dividem um problema em $a$ subproblemas
  - Cada subproblema tem tamanho $n/b$
  - Cada chamada realiza um trabalho de custo $\mathbf{f}(n)$
  - O caso base, normalmente omitido, tem um custo constante para um valor de $n$ pequeno: $\mathbf{T(n)=c,\ n< k}$

# Teorema Mestre

- Exemplo: Algoritmo Max

```
int Max(int *A, int e, int d){ // A[e..d] é um vetor de int
    int u, v, m;

    if (e == d) return A[e];
    m = (e+d)/2;
    u = Max(A, e, m);
    v = Max(A, m+1, d);

    if (u > v)
        return u;
    else
        return v;
}
```

$$T(n) = 2T(n/2) + 1, \quad para\ n > 1$$
$$T(n) = 0. \quad para\ n \leq 1$$

$$a = 2,\ b = 2\ e\ f(n) = 1$$

# Teorema Mestre

$$\boxed{T(n) = aT(n/b) + f(n)}$$

Compara-se a função $f(n)$ com o termo $n^{\log_b a}$

**Caso 1**: se $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon}) \rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

$f(n)$ é polinomialmente menor que $n^{\log_b a}$

**Caso 2**: se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) \rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a}.\log n)$

**Caso 3**: se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}) \rightarrow T(n) = \Theta(f(n))$

$f(n)$ é polinomialmente maior que $n^{\log_b a}$

Deve também satisfazer uma
**Condição de Regularidade:** $af(n/b) \leq cf(n), \quad c < 1, n \geq n_0$

# Teorema Mestre

**Intuição:** a função ***f(n)*** é comparada com $\boldsymbol{n^{\log_b a}}$ e a maior das duas funções é a solução da recorrência. No caso das duas funções serem equivalentes, a solução é $n^{\log_b a}$ multiplicada por um fator logarítmico

**Detalhes:** nos casos 1 e 3, a função *f(n)* deve ser polinomialmente menor / maior do que $\mathbf{n^{\log_b a}}$ . Além disso, a função deve satisfazer uma condição de regularidade.

# Teorema Mestre

**Teorema Mestre:** Sejam $a \geq 1$ e $b > 1$ constantes, $f(n)$ uma função assintoticamente positiva e $T(n)$ uma medida de complexidade definida sobre os inteiros. A solução da equação de recorrência:

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

para $b$ uma potência de $n$ é:

1. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, se $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$,
2. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$, se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$,
3. $T(n) = \Theta(f(n))$, se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$, e se $af(n/b) \leq cf(n)$ para alguma constante $c < 1$ e todo $n$ a partir de um valor suficientemente grande.

# Teorema Mestre - Exemplos

$$T(n) = 9T(n/3) + n$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 9 \\ b = 3 \end{array}\right\} n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = n^2$$

$$f(n) = n \qquad \textit{fazendo} \quad \varepsilon = 1 \quad \textit{temos}$$

$$f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon}) = O(n^{2-1}) = O(n)$$

**Caso 1**: $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

$$\boxed{T(n) = \Theta(n^2)}$$

# Teorema Mestre - Exemplos

$$T(n) = 3T(n/4) + n\log n$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 3 \\ b = 4 \end{array}\right\} \quad n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = n^{0,793}$$

$$f(n) = n\log n$$

$$fazendo \quad \varepsilon = 0,207 \quad temos$$

$$f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon}) = \Omega(n^{0,793+0,207}) = \Omega(n)$$

Condição de Regularidade

$$af(n/b) \le cf(n), \quad c < 1, n \ge n_0$$

$$3(n/4)\log(n/4) \le (3/4)n\log n$$

$$\text{OK} : c = 3/4, n_0 = 1$$

**Caso 3**: $T(n) = \Theta(f(n))$

$$\boxed{T(n) = \Theta(n\log n)}$$

# Teorema Mestre - Exemplos

$$T(n) = 2T(n/2) + n - 1$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 2 \end{array}\right\} \quad n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n$$

$$f(n) = n - 1 \qquad f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n)$$

**Caso 2**: $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}.\log n)$

$$\boxed{T(n) = \Theta(n \log n)}$$

# Teorema Mestre - Exemplos

$$T(n) = 3T(n/3) + n \log n$$

$$\left.\begin{aligned} a &= 3 \\ b &= 3 \end{aligned}\right\} \quad n^{\log_b a} = n^{\log_3 3} = n$$

$$f(n) = n \log n$$

$$\textit{não existe } \varepsilon \textit{ tal que}:$$

$$f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}) = \Omega(n^{1+\varepsilon})$$

Apesar de $f(n)$ *ser maior que n, ela não é polinomialmente maior…*

$$\frac{f(n)}{n^{\log_b a}} = \frac{n \log n}{n} = \log n$$

**Teorema mestre não pode ser utilizado**