

1. Halla la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ que pasa por los puntos $(-2, 1)$, $(5, 0)$ y $(4, 1)$:

Planteamos nuestro sistema de ecuaciones sustituyendo los puntos dados en (x, y) :

- $(-2, 1)$:

$$-2^2 + 1^2 + a(-2) + b(1) + c = 0 \Rightarrow -2a + b + c = -5$$

- $(5, 0)$:

$$5^2 + 0^2 + a(5) + b(0) + c = 0 \Rightarrow 5a + c = -25$$

- $(4, 1)$:

$$4^2 + 1^2 + a(4) + b(1) + c = 0 \Rightarrow 4a + b + c = -17$$

Por lo que nuestro sistema tendrá esta forma:

$$\begin{cases} 2a - b - c = 5 \\ 5a + c = -25 \\ 4a + b + c = -17 \end{cases}$$

Usamos el valor de c ya que está parcialmente despejada en la segunda ecuación $c = -25 - 5a$ y sustituimos en la primera ecuación :

$$\begin{aligned} -2a + b + (-25 - 5a) &= -5 \\ -7a + b &= 20 \end{aligned}$$

Ahora lo usamos en la tercera ecuación:

$$\begin{aligned} 4a + b + (-25 - 5a) &= -17 \\ -a + b &= 8 \\ a &= b - 8 \end{aligned}$$

Por lo que volviendo a nuestra primera ecuación con el valor de a tenemos:

$$\begin{aligned} -7(b - 8) + b &= 20 \\ -7b + 56 + b &= 20 \\ -6b &= -36 \\ b &= 6 \end{aligned}$$

Usamos ahora el valor de b para resolver a :

$$a = 6 - 8 = -2$$

Y despejamos c en la segunda ecuación:

$$c = -25 - 5a = -25 - 5(-2) = -25 + 10 = -15$$

Por lo que la ecuación de la circunferencia sería:

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$$

2. Una rotación en \mathbb{R}^3 respecto el eje vertical de 45° se puede expresar mediante la siguiente matriz: $R = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de forma que, dado un punto x del espacio $y = Rx$ nos determina el valor de aplicar la rotación R al punto x . Responde razonadamente:

a) ¿Cuál es el significado geométrico de R^{-1} ?

La matriz inversa o R^{-1} de una matriz de rotación representa un giro en el sentido opuesto al que lo hace R , por lo que en este caso sería un giro antihorario de 45° en el eje vertical

b) ¿Qué valor se obtiene si aplicamos la rotación a $x = (-1, 2, 1)^t$?

Para aplicar la rotación debemos aplicar $y = R \cdot x$:

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-1) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 2 + 0 \cdot 1 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-1) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 + 0 \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y_3 = 0 \cdot -1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 1$$

Por lo que el resultado de aplicar la rotación R al punto x es:

$$y = \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) ¿Cuál era el valor de partida si después de aplicar la rotación R hemos obtenido el punto $y=(1,1,-2)$?

Debemos encontrar la matriz inversa, que en este caso es la transpuesta de R (porque la rotación es ortogonal) y aplicarla al punto dado $y = (1, 1, -2)$ para encontrar el punto original p :

$$p = R^{-1} \cdot y = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$p_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 1 + 0 \cdot -2 = \sqrt{2}$$

$$p_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 + 0 \cdot -2 = 0$$

$$p_3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot -2 = -2$$

Por lo que el punto original p antes de rotar era:

$$p = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$