Actividad Grupal

Ejercicio 1:

Dadas las bases de $\mathbb{R}^3$:

$$B_1 =< (1,2,0),(1,0,0),(0,1,2) >$$

$$B_2 =< (1,0,1),(0,1,1),(0,0,2) >$$

a) Encontrar la matriz de cambio de base de B_1 a B_2

Sea M_{b_1,b_2} la matriz de cambio de base de B_1 a B_2. Para hallarla debemos calcular las coordenadas de los tres vectores de B_1 a B_2. Para ello haremos la combinación lineal para cada vector de B_1 de los vectores de B_2

$$(1,2,0) = x(1,0,1) + y(0,1,1) + z(0,0,2)$$
$$(1,2,0) = (x,0,x) + (0,y,y) + (0,0,2z) = (x, y+2z, x+2z)$$

Lo que resulta en un sistema formado por tres ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y + 2z = 2 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

$$x = 1, z = -\frac{1}{2}, y = 3$$

Ya tenemos las tres coordenadas de $(1,2,0)$ respecto a la base b_2:

$$M_{b_1,b_2} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots \\ 3 & \dots & \dots \\ -\frac{1}{2} & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Ahora ya sólo cambian los valores del sistema para adaptarlos a los otros vectores de B_1:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y + 2z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

$$x = 1, z = -\frac{1}{2}, y = 1$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + 2z = 1 \\ x + 2z = 2 \end{cases}$$

$$x = 0, z = 1, y = -1$$

$$\boxed{M_{b_1,b_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}}$$

b) ¿Cuáles son las coordenadas del vector $v = (2, 1, 1)_{B_1}$ en la base B_2?

$$\begin{cases} x = 2 \\ y + 2z = 1 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$$

$$v_{B_2} = \left(2, 2, -\frac{1}{2}\right)$$

Ejercicio 2

Sean los vectores en $\mathbb{R}^4$ dados por: $(2, 2, a, a), (0, -1, 0, -1), (b, 2, a, -1), (a, a, a, -4)$.

¿Qué condición deben verificar a y b de forma que estos vectores sean linealmente independientes?