

Actividad Grupal

Ejercicio 1:

Dadas las bases de \mathbb{R}^3 :

$$B_1 = \langle (1, 2, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 2) \rangle$$

$$B_2 = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 2) \rangle$$

a) Encontrar la matriz de cambio de base de B_1 a B_2

Sea M_{b_1, b_2} la matriz de cambio de base de B_1 a B_2 . Para hallarla debemos calcular las coordenadas de los tres vectores de B_1 a B_2 . Para ello haremos la combinación lineal para cada vector de B_1 de los vectores de B_2

$$(1, 2, 0) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1) + z(0, 0, 2)$$

$$(1, 2, 0) = (x, 0, x) + (0, y, y) + (0, 0, 2z) = (x, y + 2z, x + 2z)$$

Lo que resulta en un sistema formado por tres ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y + 2z = 2 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

$$x = 1, z = -\frac{1}{2}, y = 3$$

Ya tenemos las tres coordenadas de $(1, 2, 0)$ respecto a la base b_2 :

$$M_{b_1, b_2} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots \\ 3 & \dots & \dots \\ -\frac{1}{2} & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Ahora ya sólo cambian los valores del sistema para adaptarlos a los otros vectores de B_1 :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y + 2z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

$$x = 1, z = -\frac{1}{2}, y = 1$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + 2z = 1 \\ x + 2z = 2 \end{cases}$$

$$x = 0, z = 1, y = -1$$

$$M_{b_1, b_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

b) ¿Cuáles son las coordenadas del vector $v = (2, 1, 1)_{B_1}$ en la base B_2 ?

$$\begin{cases} x = 2 \\ y + 2z = 1 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$$

$$v_{B_2} = \left(2, 2, -\frac{1}{2}\right)$$

Ejercicio 2

a) Sean los vectores en \mathbb{R}^4 dados por: $(2, 2, a, a), (0, -1, 0, -1), (b, 2, a, -1), (a, a, a, -4)$.

¿Qué condición deben verificar a y b de forma que estos vectores sean linealmente independientes?

Para que los vectores sean linealmente independientes, el determinante de la matriz formada por los vectores debe ser distinto de 0.

Por lo tanto, la condición que deben verificar a y b es que el determinante de la matriz formada por los vectores sea distinto de 0.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & b & a \\ 2 & -1 & 2 & a \\ a & 0 & a & a \\ a & -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$$

Usaremos la regla de laplace para calcular el determinante de la matriz, por lo que necesitaremos el adjunto de cada elemento usando la primera fila. Asignaremos un signo dependiendo de la suma de los índices de la fila y la columna y multiplicaremos por el determinante de la matriz 3x3 que resulta de eliminar la fila y la columna del elemento que estamos calculando el adjunto.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & b & a \\ 2 & -1 & 2 & a \\ a & 0 & a & a \\ a & -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 2 * \begin{vmatrix} -1 & 2 & a \\ 0 & a & a \\ -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} - 0 + b * \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 0 & a \\ a & -1 & -4 \end{vmatrix} - a * \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ a & 0 & a \\ a & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Ahora por la regla de Sarrus calculamos el determinante de las matrices 3x3:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & b & a \\ 2 & -1 & 2 & a \\ a & 0 & a & a \\ a & -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 2(a^2 + a) + b(-2a^2 - 2a) - a(-a^2 - a) =$$
$$2a^2 + 2a - 2a^2b - 2ab + a^3 + a^2 =$$
$$a^3 + 3a^2 + 2a - 2a^2b - 2ab$$

Por lo que a y b deben cumplir que:

$$a^3 + 3a^2 + 2a - 2a^2b - 2ab \neq 0$$

b) Dado el vector $v = (1, 2, 3)$. Expresar v como combinación lineal de los vectores $w_1 = (1, 0, 0)$, $w_2 = (1, 1, 0)$ y $w_3 = (1, 0, -2)$. ¿Se podría expresar de dos formas distintas? Justifica tu respuesta.

Planteamos la ecuación y resolvemos los componentes de v como combinación lineal de w_1 , w_2 y w_3 :

$$(1, 2, 3) = c_1(1, 0, 0) + c_2(1, 1, 0) + c_3(1, 0, -2) \begin{cases} 1 = c_1 + c_2 + c_3 \\ 2 = c_2 \\ 3 = -2c_3 \end{cases}$$

$$c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = 2, c_3 = -\frac{3}{2}$$

$$v = \frac{1}{2}w_1 + 2w_2 - \frac{3}{2}w_3$$

Para saber si esta solución es única, vemos si el determinante de la matriz formada por los tres vectores w_1, w_2 y w_3 es igual a 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1((1 \cdot -) - (2 - 0)) - 0 + 0 = -2$$

Al ser su determinante distinto de cero los vectores son linealmente independientes y la combinación lineal con w_1 por tanto es única. Esto ocurre porque w_1, w_2 y w_3 forman una base para el subespacio que definen y garantiza que la combinación lineal con el vector v es única. Si no fuesen linealmente independientes podrían existir infinitas combinaciones lineales.