Actividad Grupal

Ejercicio 1:

Dadas las bases de $\mathbb{R}^3$:

$$B_1 =< (1,2,0), (1,0,0), (0,1,2) >$$

$$B_2 =< (1,0,1), (0,1,1), (0,0,2) >$$

a) Encontrar la matriz de cambio de base de B_1 a B_2

Sea M_{b_1,b_2} la matriz de cambio de base de B_1 a B_2. Para hallarla debemos calcular las coordenadas de los tres vectores de B_1 a B_2. Para ello haremos la combinación lineal para cada vector de B_1 de los vectores de B_2

$$(1,2,0) = x(1,0,1) + y(0,1,1) + z(0,0,2)$$
$$(1,2,0) = (x,0,x) + (0,y,y) + (0,0,2z) = (x,y,x+y+2z)$$

Lo que resulta en un sistema formado por tres ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$x = 1, y = 2, z = -\frac{3}{2}$$

Ya tenemos las tres coordenadas de $(1,2,0)$ respecto a la base b_2:

$$M_{b_1,b_2} = \begin{pmatrix} 1 & ... & ... \\ 2 & ... & ... \\ -\frac{3}{2} & ... & ... \end{pmatrix}$$

Ahora ya sólo cambian los valores del sistema para adaptarlos a los otros vectores de B_1:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$x = 1, y = 0, z = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$x = 0, y = 1, z = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{M_{b_1,b_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

b) ¿Cuáles son las coordenadas del vector $v = (2,1,1)_{B_1}$ en la base B_2?

$$v_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = 1(2) + 1(1) + 0(1) = 3$$

$$v_2 = 2(2) + 0(1) + 1(1) = 5$$

$$v_3 = -\frac{3}{2}(2) + \left(-\frac{1}{2}\right)(1) + \left(\frac{1}{2}\right)(1) = -\frac{6}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{6}{2} = -3$$

$$\boxed{v_{B_2} = (3, 5, -3)}$$

Ejercicio 2

a) Sean los vectores en $\mathbb{R}^4$ dados por: $(2,2,a,a), (0,-1,0,-1), (b,2,a,-1), (a,a,a,-4)$. ¿Qué condición deben verificar a y b de forma que estos vectores sean linealmente independientes?

Para que los vectores sean linealmente independientes, el determinante de la matriz formada por los vectores debe ser distinto de 0.

Por lo tanto, la condición que deben verificar a y b es que el determinante de la matriz formada por los vectores sea distinto de 0.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & b & a \\ 2 & -1 & 2 & a \\ a & 0 & a & a \\ a & -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$$

Usaremos la regla de laplace para calcular el determinante de la matriz, por lo que necesitaremos el adjunto de cada elemento usando la primera fila. Asignaremos un signo dependiendo de la suma de los índices de la fila y la columna y multiplicaremos por el determinante de la matriz 3x3 que resulta de eliminar la fila y la columna del elemento que estamos calculando el adjunto.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & b & a \\ 2 & -1 & 2 & a \\ a & 0 & a & a \\ a & -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 2 * \begin{vmatrix} -1 & 2 & a \\ 0 & a & a \\ -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} - 0 + b * \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 0 & a \\ a & -1 & -4 \end{vmatrix} - a * \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ a & 0 & a \\ a & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Ahora por la regla de Sarrus calculamos el determinante de las matrices 3x3:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & b & a \\ 2 & -1 & 2 & a \\ a & 0 & a & a \\ a & -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 2(a^2 + a) + b(-2a^2 - 2a) - a(-a^2 - a) =$$

$$2a^2 + 2a - 2a^2b - 2ab + a^3 + a^2 =$$

$$a^3 + 3a^2 + 2a - 2a^2b - 2ab$$

Por lo que a y b deben cumplir que:

$$\boxed{a^3 + 3a^2 + 2a - 2a^2b - 2ab \neq 0}$$

b) Dado el vector $v = (1, 2, 3)$. Expresar v como combinación lineal de los vectores $w_1 = (1, 0, 0), w_2 = (1, 1, 0)$ y $w_3 = (1, 0, -2)$. ¿Se podría expresar de dos formas distintas? Justifica tu respuesta.

Planteamos la ecuación y resolvemos los componentes de v como combinación lineal de w_1, w_2 y w_3:

$$(1, 2, 3) = c_1(1, 0, 0) + c_2(1, 1, 0) + c_3(1, 0, -2) \begin{cases} 1 = c_1 + c_2 + c_3 \\ 2 = c_2 \\ 3 = -2c_3 \end{cases}$$

$$c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = 2, c_3 = -\frac{3}{2}$$

$$\boxed{v = \frac{1}{2}v_1 + 2v_2 - \frac{3}{2}v_3}$$

Para saber si esta solución es única, vemos si el determinante de la matriz formada por los tres vectores w_1, w_2 y w_3 es igual a 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1((1 \cdot) - (2 - 0)) - 0 + 0 = -2$$

Al ser su determinante distinto de cero los vectores son linealmente independientes y:

$\boxed{\text{la combinación lineal con } v \text{ es por tanto única.}}$

Esto ocurre porque w_1, w_2 y w_3 forman una base para el subespacio que definen y garantiza que la combinación lineal con el vector v es única. Si no fuesen linealmente independientes podrían existir infinitas combinaciones lineales.

Ejercicio 3

a) Demuestra que el conjunto: $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 2y - t = 0, y = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$. Calcula su dimensión y una base.

Para que sea un subespacio vectorial la suma y el producto por escalar de dos vectores en el conjunto deben estar dentro de lo definido por las ecuaciones. Además debe contener el vector $(0, 0, 0, 0)$.

Veamos si la suma de $v_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2)$ están en S:

$$y_1 = 0 \land y_2 = 0 \therefore y_1 + y_2 = 0$$

$$2x_1 + 2y_1 - t_1 = 0 \land 2x_2 + 2y_2 - t_2 = 0 \therefore 2(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) - (t_1 + t_2) = 0$$
$$2(x_1 + x_2) - (t_1 + t_2) = 0$$

Se demuestra así que la suma de dos vectores cumplen las ecuaciones que definen el conjunto.

Para el producto por escalar, asumimos $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$y = 0 \therefore \lambda y = 0$$
$$2(\lambda x) + 2(\lambda y) - \lambda t = 2(\lambda x) + 2(0) - \lambda t = \lambda(2x - t) = 0$$

Por lo tanto cumple que el producto por escalar tambien satisface las ecuaciones que definen el conjunto.

Ahora usamos el vector $(0, 0, 0, 0)$ para comprobar si se cumplen las ecuaciones:

$$2x + 2y - t = 0 \therefore 2(0) + 2(0) - 0 = 0$$
$$y = 0 \therefore (0) = 0$$

Se cumple para el vector 0.

Queda demostrado que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

De las condiciones dadas extraemos que $y = 0$ junto con que $2x - t = 0 \therefore t = 2x$. Por ello podemos expresar los vectores en S como $(x, 0, z, 2x)$. Expresamos ahora el vector general dando valores a las variables libres x y z:

$$(x, 0, z, 2x) = x(1, 0, 0, 2) + z(0, 0, 1, 0)$$

$$B = \{(1, 0, 0, 2), (0, 0, 1, 0)\} \wedge \dim(S) = 2$$

b) Sea el subespacio vectorial T=⟨(1,2,3,4),(0,1,0,0),(1,0,2,0)⟩. Calcula su dimensión y una base.

El proceso se basa en verificar la independencia lineal de los vectores. Vamos a reducir la matriz formada por los vectores a su forma escalonada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$T_3{}' = T_3 - T_1 = (0, -2, -1, -4)$$
$$T_3{}'' = (T_2 \cdot 2) + (T_3{}') = (0, 2, 0, 0) + (0, -2, -1, -4) = (0, 0, -1, -4)$$
$$T_3{}''' = T_3 \cdot -1 = (0, 0, 1, 4)$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

La matriz tiene tres filas no nulas después de la reducción por lo que:

la dimensión del subespacio definido por $T = \langle (1, 2, 3, 4), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 2, 0) \rangle$ es 3 y al no anularse sus filas, los vectores dados son linealmente independientes y forman una base en $\mathbb{R}^3$.

c) Obtén la dimensión y una base de los subespacios $S \cap T$ y $S + T$.

Sabemos que la base de $S = \langle(1,0,0,2),(0,0,1,0)\rangle$ y la base de $T = \langle(1,2,3,4),(0,1,0,0),(1,0,2,0)\rangle$. Además sabemos que $\dim(S) = 2$ y $\dim(T) = 3$, ya que es el número de vectores linealmente independientes. Para encontrar $S \cap T$ debemos resolver las ecuaciones que describen ambos subespacios. Los de S ya los tenemos y cualquier vector será en la forma $(x, 0, z, 2x)$. En T será la combinación lineal de sus bases:

$$v = c_1(1,2,3,4) + c_2(0,1,0,0) + c_3(1,0,2,0) = (c_1 + c_3, 2c_1 + c_2, 3c_1 + 2c_3, 4c_1)$$

Ahora si $S \cap T$ entonces:

$$\begin{cases} x = c_1 + c_3 \\ 0 = 2c_1 + c_2 \\ z = 3c_1 + 2c_3 \\ 2x = 4c_1 \end{cases}$$

$$2x = 4c_1 \therefore x = 2c_1$$
$$x = c_1 + c_3 \therefore 2c_1 = c_1 + c + 3 \therefore c_1 = c_3$$
$$0 = 2c_1 + c_2 \therefore c_2 = -2c_1$$
$$z = 3c_1 + 2c_3 \therefore z = 3c_1 + 2c_1 = 5c_1$$

De la resulción del sistema de ecuaciones anterior vemos que $S \cap T$ puede expresarse como $(2c_1, 0, 5c_1, 4c_1)$ que sacando factor común quedaría $c_1(2,0,5,4)$. Entonces podemos afirmar que:

$$\boxed{\text{Base de } S \cap T = (2,0,5,4) \wedge \dim(S \cap T) = 1}$$

La suma de $S + T$ son los vectores que pueden escribirse como suma de un vector S y un vector T. Debemos verificar que son linealmente independientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Vemos que la base de $S + T$ estará formada por los cuatro vectores ya que son linealmente independientes. Por tanto:

$$\boxed{\text{Base de } S + T = \{(1,0,0,2),(0,0,1,0),(1,2,3,4),(0,1,0,0),(1,0,2,0)\} \wedge \dim(S + T) = 4}$$

Ejercicio 4

Sea la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Comprueba que M tiene columnas ortogonales

Para esto necesitamos comprobar que el producto escalar entre sus dos columnas da cero:

$$m_1 \cdot m_2 = (1)(-2) + (2)(-1) + (4)(1) = 0$$

Ya que $m_1 \cdot m_2 = 0$ sabemos que son ortogonales.

b) Construye la matriz M_2 añadiendo el vector $e_3 = (1, 0, 0) \exists \mathbb{R}^3$ como última columna de M. Aplica el proceso de Gram-Schmidt a las columnas de M_2 para ortonormalizarlas.

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Proceso de Gram-Schmidt convierte un conjunto de vectores lineales en ortonormales y se aplica de la siguiente manera:

1. Ortornormalización de $m_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ será n_1:

$$\|m_1\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{21}} \\ \frac{2}{\sqrt{21}} \\ \frac{4}{\sqrt{21}} \end{pmatrix}$$

2. Ortornormalización de m_2 para la cual debemos restar la proyección de m_2 sobre n_1 y normalizar el resultado:

$$\text{proj}_{u_1} m_2 = (m_2 \cdot n_1) n_1$$

$$m_2 \cdot n_1 = \left(-2\left(\frac{1}{\sqrt{21}}\right)\right) + \left(-1\left(\frac{2}{\sqrt{21}}\right)\right) + \left(1\left(\frac{4}{\sqrt{21}}\right)\right) = \frac{0}{\sqrt{21}} = 0$$

m_2 ya es ortogonal a n_1, por lo que n_2 es simplemente m_2 normalizado:

$$\|m_2\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$n_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

3. Ortonormalizar m_3, restando las proyecciones de m_3 sobre n_1 y n_2 y después normalizando el resultado:

$$m_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{proj}(m_3)_{n_1} = \left(\frac{m_3^T \cdot n_1}{n_1^T \cdot n_1}\right) \cdot n_1 = \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{proj}(m_3)_{n_2} = \left(\frac{m_3^T \cdot n_2}{n_2^T \cdot n_2}\right) \cdot n_1 = -\frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora operamos:

$$n_3 = m_3 - \text{proj}(m_3)_{n_1} - \text{proj}(m_3)_{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{21} - \frac{1}{\sqrt{21}} \\ -\frac{2}{\sqrt{21}} \\ -\frac{4}{\sqrt{21}} \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{21}-1}{\sqrt{21}} + \frac{4}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{21}} + \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{4}{\sqrt{21}} - \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Calculamos la norma de m_3:

$$\|m_3\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{21}-1}{\sqrt{21}} + \frac{4}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{21}} + \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(-\frac{4}{\sqrt{21}} - \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2}$$

Y finalmente podemos calcular

$$n_3 = \frac{m_3}{\|m_3\|} = \begin{pmatrix} 2.414 \\ 0.379 \\ -1.688 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2.972} = \begin{pmatrix} 0.813 \\ 0.128 \\ -0.5685 \end{pmatrix}$$

c) Forma la matriz A con las columnas de M_2 ortonormales y comprueba que A es una matriz ortogonal, es decir, $A^T A = I$.

Para esto multiplicaremos la transpuesta de A por la matriz formada por las columnas de M_2 ortonormalizadas anteriormente:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & \approx 0 & \approx 0 \\ \approx 0 & 1 & \approx 0 \\ \approx 0 & \approx 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se demuestra que es ortogonal ya que el resultado es la matriz identidad.

d) Calcula las coordenadas del vector (-1,-3,2) en la base de R^3 formada por las columnas de A.

Resolvemos para ello el sistema de ecuaciones haciendo uso de la propiedad de ortonormalidad que dice que el producto de un vector por otro vector ortonormal es igual a la proyección del vector sobre esa base.

$$v = c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3$$
$$c_1 = v \cdot a_1 = (-1) \cdot (0.2182) + (-3) \cdot (0.436) + (2) \cdot (0.872)$$
$$c_2 = v \cdot a_2 = (-1) \cdot (-0.816) + (-3) \cdot (-0.408) + (2) \cdot (0.408)$$
$$c_3 = v \cdot a_3 = (-1) \cdot (0.534) + (-3) \cdot (-0.802) + (2) \cdot (0.267)$$

El resultado es por tanto:

$$\boxed{v = 0.218 a_1, 2.857 a_2, 2.405 a_3}$$