1. Halla la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ que pasa por los puntos $(-2, 1)$, $(5, 0)$ y $(4, 1)$:

Planteamos nuestro sistema de ecuaciones sustituyendo los puntos dados en (x, y):

- (-2,1):

$$-2^2 + 1^2 + a(-2) + b(1) + c = 0 \Rightarrow -2a + b + c = -5$$

- (5,0):

$$5^2 + 0^2 + a(5) + b(0) + c = 0 \Rightarrow 5a + c = -25$$

- (4,1):

$$4^2 + 1^2 + a(4) + b(1) + c = 0 \Rightarrow 4a + b + c = -17$$

Por lo que nuestro sistema tendrá esta forma:

$$\begin{cases} 2a - b - c = 5 \\ 5a + c = -25 \\ 4a + b + c = -17 \end{cases}$$

Usamos el valor de c ya que está parcialmente despejada en la segunda ecuación $c = -25 - 5a$ y sustituimos en la primera ecuación :

$$-2a + b + (-25 - 5a) = -5$$
$$-7a + b = 20$$

Ahora lo usamos en la tercera ecuación:

$$4a + b + (-25 - 5a) = -17$$
$$-a + b = 8$$
$$a = b - 8$$

Por lo que volviendo a nuestra primera ecuación con el valor de a tenemos:

$$-7(b - 8) + b = 20$$
$$-7b + 56 + b = 20$$
$$-6b = -36$$
$$b = 6$$

Usamos ahora el valor de b para resolver a:

$$a = 6 - 8 = -2$$

Y despejamos c en la segunda ecuación:

$$c = -25 - 5a = -25 - 5(-2) = -25 + 10 = -15$$

Por lo que la ecuación de la circunferencia sería:

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$$

2. Una rotación en $\mathbb{R}^3$ respecto el eje vertical de $45°$ se puede expresar mediante la siguiente matriz: $R = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de forma que, dado un punto x del espacio $y = Rx$ nos determina el valor de aplicar la rotación R al punto x. Responde razonadamente:

a) ¿Cuál es el significdo geométrico de R^{-1}?

La matriz inversa o R^{-1} de una matriz de rotación representa un giro en el sentido opuesto al que lo hace R, por lo que en este caso sería un giro antihorario de 45° en el eje vertical

b) ¿Qué valor se obtiene si aplicamos la rotación a $x = (-1, 2, 1)^t$?

Para aplicar la rotación debemos aplicar $y = R \cdot x$:

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-1) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 2 + 0 \cdot 1 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-1) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 + 0 \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y_3 = 0 \cdot -1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 1$$

Por lo que el resultado de aplicar la rotación R al punto x es:

$$y = \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) ¿Cuál era el valor de partida si después de aplicar la rotación R hemos obtenido el punto y=(1,1,-2)?

Debemos encontrar la matriz inversa, que en este caso es la transpuesta de R (porque la rotación es ortogonal) y aplicarla al punto dado $y = (1, 1, -2)$ para encontrar el punto origina p:

$$p = R^-1 \cdot y = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$p_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 1 + 0 \cdot -2 = \sqrt{2}$$

$$p_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 + 0 \cdot -2 = 0$$

$$p_3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot -2 = -2$$

Por lo que el punto original p antes de rotar era:

$$p = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3. Consideremos la matriz $\begin{pmatrix} a & a-2 & a-6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2+a & a & a \end{pmatrix}$, para qué valores de a la matriz no es inversible?

Una matriz es invertible si y solo si su determinante es distinto de cero. Por lo que planteamos el determinante de la matriz y lo igualamos a 0 para encontrar los valores de a para los que la matriz es inversible. Podemos aplicar la regla de Sarrus para encontrar el determinante de una matriz 3x3 de la siguiente forma despues de añadir dos filas a la matriz original:

$$m = \begin{pmatrix} a & a-2 & a-6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2+a & a & a \\ a & a-2 & a-6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Para hallar el determinante multiplicamos las diagonales principales con dos filas añadidas, de izquierda a derecha y sumamos los resultados y le restamos los productos de las diagonales secundarias:

$$\det m = (a \cdot 1 \cdot a) + (1 \cdot a \cdot (a-6)) + ((2+a) \cdot (a-2) \cdot 3) - (1 * (a-2) * a) + (a * a * 3) + ((2+a) * 1 * (a-6))$$
$$\det m = (a^2 + a^2 - 6a + 3a^2 - 12) - (a^2 - 4a - 12 + 3a^2 + a^2 - 2a)$$
$$\det m = 5a^2 - 10a - 12 - a^2 + 4a + 12 - 3a^2 - a^2 + 2a$$
$$\det m = 0$$

b) Al resolver vemos que el determinante siempre será 0 ya que todas las a se simplifican. Por ello, **para todo valor de a la matriz es inversible.**