1. Simplifica la siguiente expresión con potencias:

$$\frac{a^3b^4c^7}{a^{-2}b^5\sqrt{(c)}}$$

a. Reescribimos la raiz como una potencia elevada a la fracción de exponente fraccionario:

$$\frac{a^3b^4c^7}{a^{-2}b^5c^{\frac{1}{2}}}$$

b. Simplificamos los términos a, b y c usando la división de potencias con la misma base $\frac{n^x}{n^y} = n^{x-y}$:

$$\frac{a^3}{a^{-2}} = a^{3-(-2)} = a^5$$

$$\frac{b^4}{b^5} = b^{4-5} = b^{-1}$$

$$\frac{c^7}{c^{\frac{1}{2}}} = c^{7-\left(\frac{1}{2}\right)} = c^{\frac{14}{2}-\frac{1}{2}} = c^{\frac{13}{2}}$$

c. Resultado:

$$a^5b^{-1}c^{\frac{13}{2}}$$

d. Podemos ir un paso más allá y eliminar exponentes negativos y fraccionarios:

$$\frac{a^5\sqrt{c^{13}}}{b}$$

2. Calcular el cociente de potencias:

$$\frac{2^3 3^2}{3^2 2}$$

a. Como en el anterior ejercicio simplificamos usando la división de potencias con la misma base $\frac{n^x}{n^y} = n^{x-y}$:

$$\frac{2^3 3^2}{3^2 2} = 2^{3-1} \cdot 3^{2-2} = 2^2 \cdot 3^0$$

b. Cualquier número elevado a 0 es igual a 1 por lo que la operación se resolvería como

$$2^2 \cdot 3^0 = 4$$

3. Calcular:

$$\frac{2\left(\frac{3}{9}\right) : 3}{\left(\frac{9}{4}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}}$$

a. Resolver el numerador:

$$\frac{2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\left(\frac{9}{4}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\left(\frac{9}{4}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}} = \frac{\frac{2}{9}}{\left(\frac{9}{4}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}}$$

b. Resolver el denominador:

$$\frac{\frac{2}{9}}{\left(\frac{9}{4}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{81}{16}\frac{5}{2}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{405}{32}}$$

c. Dividimos fracciones multiplicando el numerador por el inverso del denominador y obtenemos el resultado:

$$\frac{\frac{2}{9}}{\frac{405}{32}} = 2 \cdot \frac{32}{9} \cdot 405 = \frac{64}{3645}$$

4. Calcular y:

$$\log_2 y^3 = 6$$

a. El exponente de y pasa a multiplicar el logaritmo:

$$3 \cdot \log_2 y = 6$$

b. Dividimos ambos lados de la ecuación entre 3:

$$\log_2 y = 2$$

c. Resolvemos usando $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$:

$$y = 2^2 = 4$$

5. Sea $\log_{10} 2 = 0.3010$, calcula el siguiente logaritmo: $\log_{10} \sqrt[4]{8}$

a. Resolvemos el logaritmo usando una incognita x como resultado:

$$\log_{10} \sqrt[4]{8} \Rightarrow 10^x = \sqrt[4]{8}$$

b. Aplicamos $\sqrt[n]{m} = m^{\frac{1}{n}}$

$$10^x = 8^{\frac{1}{4}}$$

c. Resolvemos expresando ambos términos en logaritmos

$$x \cdot \log(10) = \frac{1}{4} \cdot \log(8)$$

d. $\log(10)$ es igual a 1:

$$x = \frac{1}{4} \cdot \log(8)$$

e. Aplicamos la regla de los logaritmos sabiendo que $8 = 2^3$

$$x = \frac{1}{4} \cdot \log(2^3)$$

f. Tenemos el valor de $\log(2)$ en el enunciado, por lo que sustituimos y resolvemos:

$$x = \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot \log(2) = \frac{3}{4} \cdot 0.3010 = 0.22575$$

6. Convierte los siguientes ángulos de radiantes a grados sexagesimales: 3 rad, 2π/5 rad, 3π/20.

Para convertir ángulos radianes a grados sexagesimales usamos la siguiente fórmula: $1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi}$

- 3 rad:

$$3 \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{570}{\pi} = 171.89°$$

- $\frac{2\pi}{5}$ rad:

$$\frac{2\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi} = \pi \cdot \frac{180}{5} = 113.09°$$

- $\frac{3\pi}{20}$ rad:

$$\frac{3\pi}{20} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{2\pi}{20} \cdot 180 = 56.54°$$

7. Sabiendo que $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ y que el ángulo está en el primer cuadrante, calcular las restantes razones trigonométricas para dicho ángulo.

a. Usamos la identidad pitagórica:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

b. Sustituimos el valor conocido para obtener $\sin\alpha$:

$$\sin^2\alpha + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1$$
$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{16}$$
$$\sin^2\alpha = \frac{16}{16} - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$
$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

c. Calculamos el resto de razones trigonométricas:

$$\tan\alpha = \frac{\sin}{\cos} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{4}} = \sqrt{15}$$
$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan}\alpha = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{15}} \cdot \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos}\alpha = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$
$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin}\alpha = \frac{\frac{1}{\sqrt{15}}}{4} = \frac{4}{\sqrt{15}} \cdot \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = 4\frac{\sqrt{15}}{15}$$

8. Calcula la altura de una torre de refrigeración de una central nuclear sabiendo que la sombra mide 271 metros cuando los rayos solares forman un ángulo de 30˚.

En este caso la sombra que proyecta será el cateto de la base de un triángulo rectángulo. Sabemos que el ángulo agudo que forma la sombra de la torre será de 30°. Los dos ángulos agudos deben sumar 90° entre ellos, por lo que si uno es de 30° el otro tendrá 60°.

Además sabemos que para un triágulo rectángulo el cos relaciona el cateto adyacente con la hipotenusa por lo que podemos obtenerla:

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$
$$\cos 30 = \frac{271}{h}$$
$$0.866 = \frac{271}{h}$$
$$h = \frac{271}{0.866} = 312.933$$

Ahora con el Teorema de Pitágoras calculamos el otro cateto, que queda definido por la torre:

$$h^2 = c^2 + c^2$$
$$312^2 = c^2 + 271^2$$
$$c^2 = 97927.078 - 73441 = 24486.078$$
$$c = \sqrt{24486.078} = 156.480$$

9. Calcula sin usar la calculadora ni tablas trigonométricas: $\cos\frac{5\pi}{12}, \cos\frac{7\pi}{6}$

a. $\cos 5\frac{\pi}{12}$**:**

Sabemos que 2π es igual a 360 grados, por lo que:

$$\cos 5\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{2\pi}{12} + \frac{2\pi}{12} + \frac{\pi}{12}\right) =$$
$$= \cos(30° + 30° + 15°)$$

Ahora utilizamos angulos conocidos y la fórmula del coseno de suma de ángulos:

$$\cos(45° + 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° - \sin 45° \cdot \sin 35° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

b. $\cos\frac{7\pi}{6}$**:**

$$\frac{\cos(7\pi)}{6} = \cos\left(\frac{2\pi}{6} + \frac{2\pi}{6} + \frac{2\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) =$$
$$= \cos(60°) \cdot \cos(60°) \cdot \cos(60°) \cdot \cos(30°) - \sin(60°) \cdot \sin(60°) \cdot \sin(60°) \cdot \sin(30°) =$$
$$= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) =$$
$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{16} - \frac{3\sqrt{3}}{16}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{8}$$

10. Calcular el seno, el coseno y la tangente de 105˚ en función del ángulo 210˚:

Podemos utilizar el ángulo mitad, aplicado sus reglas:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$$

Por lo que:

$$\cos 105° = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 210°}{2}}$$

Calculamos $\cos 210°$:

$$\cos 210° = (\cos 180° \cdot \cos 30°) - (\sin 180° \cdot \sin 30)$$
$$\cos 210° = -1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(0 \cdot \frac{1}{2}\right)$$
$$\cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Hallamos el coseno de 105:

$$\cos 105° = \pm\sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \pm\left(\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}\right) = \pm\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

Sabemos que el coseno de 105° está en el segundo cuadrante, por lo que su signo será negativo. Por lo que $\cos 105° = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ es el resultado válido.

Para el seno:

$$\sin 105° = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 210°}{2}}$$
$$\cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin 105° = \pm\sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}} = \pm\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \pm\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

El seno de 105° está en el segundo cuadrante es positivo, por lo que elegimos como resultado $\sin 105° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Calculamos la tangente sustituyendo en la fórmula y racionalizando el denominador:

$$\tan 105° = \pm\sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}}$$
$$\tan 105° = \pm\sqrt{\frac{\left(2 + \sqrt{3}\right)^2}{\left(2 - \sqrt{3}\right)\left(2 + \sqrt{3}\right)}}$$
$$\tan 105° = \pm\sqrt{\frac{4 + 3 + 4\sqrt{3}}{1}} = \pm\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$$

Nos quedamos con el valor negativo ya que la 105° está en el segundo cuadrante, por lo que $\tan 105° = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$.

Solución:

$$\sin 105° = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos 105° = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$\tan 105° = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$$