1. Simplifica la siguiente expresión con potencias:

$$\frac{a^3b^4c^7}{a^{-2}b^5\sqrt{(c)}}$$

a. Reescribimos la raíz como una potencia elevada a la fracción de exponente fraccionario:

$$\frac{a^3b^4c^7}{a^{-2}b^5c^{\frac{1}{2}}}$$

b. Simplificamos los términos a, b y c usando la división de potencias con la misma base $\frac{n^x}{n^y} = n^{x-y}$:

$$\frac{a^3}{a^{-2}} = a^{3-(-2)} = a^5$$

$$\frac{b^4}{b^5} = b^{4-5} = b^{-1}$$

$$\frac{c^7}{c^{\frac{1}{2}}} = c^{7-\left(\frac{1}{2}\right)} = c^{\frac{14}{2}-\frac{1}{2}} = c^{\frac{13}{2}}$$

c. Resultado:

$$a^5b^{-1}c^{\frac{13}{2}}$$

d. Podemos ir un paso más allá y eliminar exponentes negativos y fraccionarios:

$$\frac{a^5\sqrt{c^{13}}}{b}$$

2. Calcular el cociente de potencias:

$$\frac{2^3 3^2}{3^2 2}$$

a. Como en el anterior ejercicio simplificamos usando la división de potencias con la misma base $\frac{n^x}{n^y} = n^{x-y}$:

$$\frac{2^3 3^2}{3^2 2} = 2^{3-1} \cdot 3^{2-2} = 2^2 \cdot 3^0$$

b. Cualquier número elevado a 0 es igual a 1 por lo que la operación se resolvería como :

$$2^2 \cdot 3^0 = 4$$

3. Calcular:

$$\frac{2\left(\frac{3}{9}\right) : 3}{\left(\frac{9}{4}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}}$$

a. Resolver el numerador:

$$\frac{2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\left(\frac{9}{4}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\left(\frac{9}{4}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}} = \frac{\frac{2}{9}}{\left(\frac{9}{4}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}}$$

b. Resolver el denominador:

$$\frac{\frac{2}{9}}{\left(\frac{9}{4}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{81}{16}\frac{5}{2}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{405}{32}}$$

c. Dividimos fracciones multiplicando el numerador por el inverso del denominador y obtenemos el resultado:

$$\frac{\frac{2}{9}}{\frac{405}{32}} = \frac{2 \cdot 32}{9 \cdot 405} = \frac{64}{3645}$$

4. Calcular y:

$$\log_2 y^3 = 6$$

a. El exponente de y pasa a multiplicar el logaritmo:

$$3 \cdot \log_2 y = 6$$

b. Dividimos ambos miemberos de la ecuación entre 3:

$$\log_2 y = 2$$

c. Resolvemos usando $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$:

$$y = 2^2 = 4$$

5. Sea $\log_{10} 2 = 0.3010$, calcula el siguiente logaritmo: $\log_{10} \sqrt[4]{8}$

a. Resolvemos el logaritmo usando una incógnita x como resultado:

$$x = \log_{10} \sqrt[4]{8} \Rightarrow 10^x = \sqrt[4]{8}$$

b. Aplicamos $\sqrt[n]{m} = m^{\frac{1}{n}}$:

$$10^x = 8^{\frac{1}{4}}$$

c. Resolvemos expresando ambos términos en logaritmos:

$$x \cdot \log(10) = \frac{1}{4} \cdot \log(8)$$

d. $\log(10)$ es igual a 1:

$$x = \frac{1}{4} \cdot \log(8)$$

e. Aplicamos la regla de los logaritmos sabiendo que $8 = 2^3$:

$$x = \frac{1}{4} \cdot \log(2^3)$$

f. Tenemos el valor de $\log(2)$ en el enunciado, por lo que sustituimos y resolvemos:

$$x = \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot \log(2) = \frac{3}{4} \cdot 0.3010 = 0.22575$$

6. Convierte los siguientes ángulos de radiantes a grados sexagesimales: 3 rad, 2π/5 rad, 3π/20.

Para convertir ángulos radianes a grados sexagesimales usamos la siguiente fórmula: $1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi}$

- 3 rad:

$$3 \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{570}{\pi} = 171.89°$$

- $\frac{2\pi}{5}$ rad:

$$\frac{2\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{2 \cdot 180}{5} = 72°$$

- $\frac{3\pi}{20}$ rad:

$$\frac{3\pi}{20} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{3 \cdot 180}{20} = 27°$$

7. Sabiendo que $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ y que el ángulo está en el primer cuadrante, calcular las restantes razones trigonométricas para dicho ángulo.

a. Usamos la identidad pitagórica:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

b. Sustituimos el valor conocido para obtener $\sin\alpha$:

$$\sin^2\alpha + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{16}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{16}{16} - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

c. Calculamos el resto de razones trigonométricas:

$$\tan\alpha = \sin\frac{\alpha}{\cos}\alpha = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{4}} = \sqrt{15}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan}\alpha = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{15}} \cdot \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos}\alpha = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin}\alpha = \frac{\frac{1}{\sqrt{15}}}{4} = \frac{4}{\sqrt{15}} \cdot \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = 4\frac{\sqrt{15}}{15}$$

8. Calcula la altura de una torre de refrigeración de una central nuclear sabiendo que la sombra mide 271 metros cuando los rayos solares forman un ángulo de 30˚.

La altura de la torre es el cateto opuesto a ángulo de 30°. La sombra de la torre es el cateto adyacente a ese mismo ángulo. Para resolver este problema usamos la tangente que relaciona el angulo con el cateto opuesto y el cateto adyacente.

$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$
$\alpha = 30°$
$\text{cateto adyacente} = \text{sombra} = 271m$
$\text{cateto opuesto} = \text{altura de la torre}$

Resolvemos:

$$\tan(30°) = \frac{\text{altura}}{271}$$

$$\text{altura} = 271 \cdot 0.577 \approx 156.27m$$

9. Calcula sin usar la calculadora ni tablas trigonométricas: $\cos\frac{5\pi}{12}, \cos\frac{7\pi}{6}$

a. $\cos 5\frac{\pi}{12}$**:**

Sabemos que 2π es igual a 360 grados, por lo que:

$$\cos 5\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{2\pi}{12} + \frac{2\pi}{12} + \frac{\pi}{12}\right) =$$
$$= \cos(30° + 30° + 15°)$$

Ahora utilizamos angulos conocidos y la fórmula del coseno de suma de ángulos:

$$\cos(45° + 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° - \sin 45° \cdot \sin 35° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

b. $\cos\frac{7\pi}{6}$**:**

$$\frac{\cos(7\pi)}{6} = \cos\left(\frac{2\pi}{6} + \frac{2\pi}{6} + \frac{2\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) =$$
$$= \cos(60°) \cdot \cos(60°) \cdot \cos(60°) \cdot \cos(30°) - \sin(60°) \cdot \sin(60°) \cdot \sin(60°) \cdot \sin(30°) =$$
$$= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) =$$
$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{16} - \frac{3\sqrt{3}}{16}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{8}$$

10. Calcular el seno, el coseno y la tangente de 105˚ en función del ángulo 210˚:

Podemos utilizar el ángulo mitad, aplicado sus reglas:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$$

Por lo que:

$$\cos 105° = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 210°}{2}}$$

Calculamos $\cos 210°$:

$$\cos 210° = (\cos 180° \cdot \cos 30°) - (\sin 180° \cdot \sin 30)$$

$$\cos 210° = -1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(0 \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$\cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Hallamos el coseno de 105:

$$\cos 105° = \pm\sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \pm\left(\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}\right) = \pm\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

Sabemos que el coseno de 105° está en el segundo cuadrante, por lo que su signo será negativo. Por lo que $\cos 105° = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ es el resultado válido.

Para el seno:

$$\sin 105° = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 210°}{2}}$$

$$\cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 105° = \pm\sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}} = \pm\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \pm\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

El seno de 105° está en el segundo cuadrante es positivo, por lo que elegimos como resultado $\sin 105° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Calculamos la tangente sustituyendo en la fórmula y racionalizando el denominador:

$$\tan 105° = \pm\sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}}$$

$$\tan 105° = \pm\sqrt{\frac{\left(2 + \sqrt{3}\right)^2}{\left(2 - \sqrt{3}\right)\left(2 + \sqrt{3}\right)}}$$

$$\tan 105° = \pm\sqrt{\frac{4 + 3 + 4\sqrt{3}}{1}} = \pm\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$$

Nos quedamos con el valor negativo ya que la 105° está en el segundo cuadrante, por lo que $\tan 105° = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$.

Solución:

$$\sin 105° = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos 105° = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$\tan 105° = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$$