ÁRVORE B

Profa. Taiane C. Ramos

Estruturas de Dados e Seus Algoritmos

Turma de Verão 2023

CONSULTA A ARQUIVOS GRANDES

Arquivos binários grandes

- Busca sequencial é muito custosa
- Busca binária fará muitas leituras em arquivo

É possível acelerar a busca usando duas técnicas:

- Índice
- Hashing

ÍNDICE

Índice é uma estrutura de dados auxiliar para localizar registros no arquivo

Cada entrada do índice contém

- Valor da chave
- Ponteiro para o arquivo de dados

Pode-se pensar então em dois arquivos:

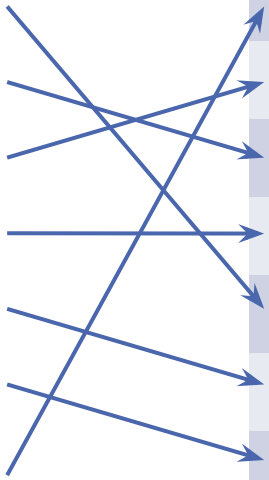
- Um de índice
- Um de dados

Isso é eficiente?

EXEMPLO DE ÍNDICE PLANO

Arquivo de Índice

	CHAVE	PONTEIRO
0	3	4
1	5	2
2	10	1
3	15	3
4	16	5
5	21	6
6	23	0



Arquivo de Dados

	COD	NOME
0	23	JOSE
1	10	MARIO
2	5	ANA
3	15	MARCIA
4	3	JULIO
5	16	BEATRIZ
6	21	CAMILA

ÍNDICE

Comparação do método direto no arquivo ou no índice:

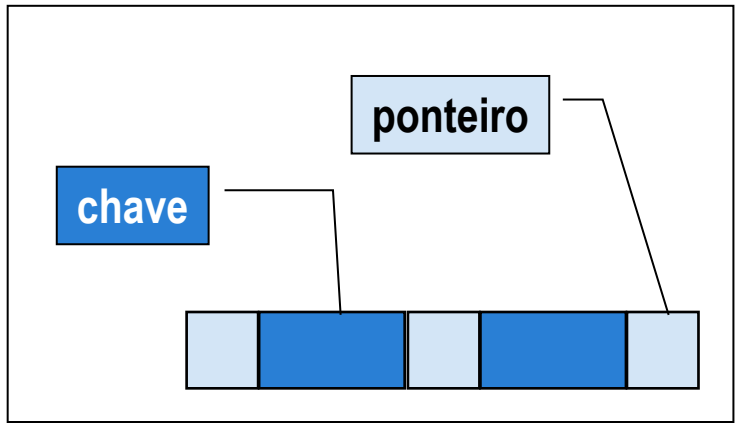
Busca sequencial - Vantagem de poder botar mais chaves em memória

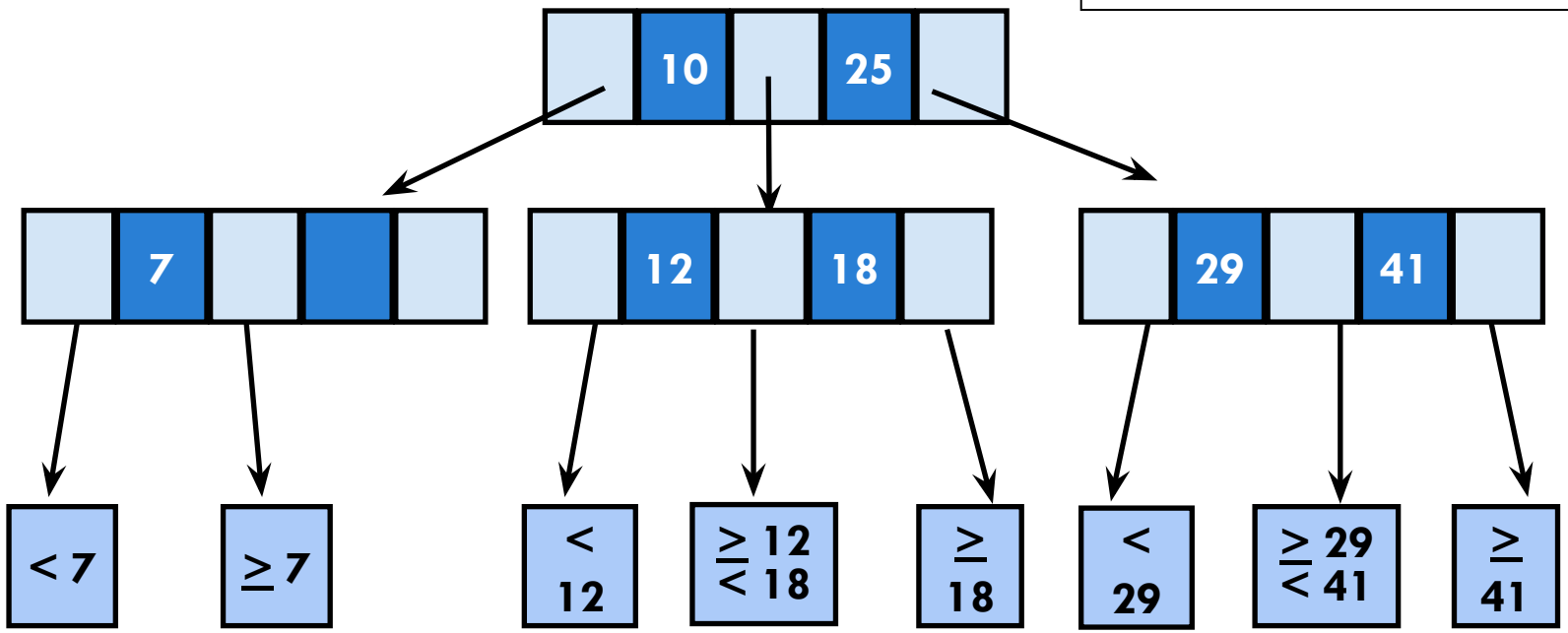
Busca binária - Ainda fará muito I/O

ORGANIZAR OS REGISTROS EM UMA ESTRUTURA HIERÁRQUICA

- Vamos colocar os registros em uma estrutura hierárquica (árvore).
- Queremos minimizar ao máximo os acessos em disco
- Então queremos que a altura da árvore seja bem baixa
- Em vez de ter 1 registro em cada nó, vamos colocar um vetor de registros que caiba na memória principal (página).

EXEMPLO





ÁRVORES DE MÚLTIPLOS CAMINHOS

Características

- Cada nó contém ***n-1*** chaves
- Cada nó contém ***n*** filhos
- As chaves dentro do nó estão ordenadas
- As chaves dentro do nó funcionam como separadores para os ponteiros para os filhos do nó

VANTAGENS

Têm altura bem menor que as árvores binárias

Ideais para uso como **índice de arquivos em disco**

Como as árvores são baixas, são necessários poucos acessos em disco até chegar ao ponteiro para o bloco que contém o registro desejado

ÁRVORE B

Fonte de consulta: Szwarcfiter, J.; Markezon, L. Estruturas de Dados e seus Algoritmos, 3a. ed. LTC. Seção 5.5

ÁRVORE B

Consegue armazenar índice e dados na mesma estrutura (mesmo arquivo físico)

Características de uma árvore B de ordem **d**

- A raiz é uma folha ou tem no mínimo 2 filhos
- Cada nó interno (não folha e não raiz) possui no mínimo **d + 1** filhos
- Cada nó tem no máximo **2d + 1** filhos
- Todas as folhas estão no mesmo nível

Um nó de uma árvore B é também chamado de página

Uma página armazena diversos registros da tabela original armazenados sequencialmente em disco (página).

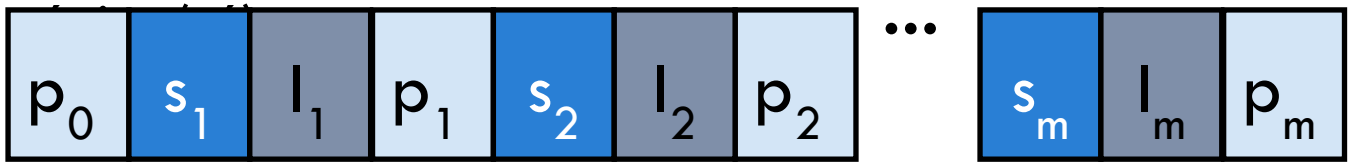
ÁRVORE B

Seja **m** o número de chaves de uma página **P** não folha

- **P** tem **m+1** filhos, **P** tem entre **d** e **2d** chaves, exceto o nó raiz, que possui entre **1** e **2d** chaves
- Em cada página, as chaves estão ordenadas
- **P** contém **m+1** ponteiros $p_0, p_1, \ldots, p_m$ para os filhos de P
- Nas páginas correspondentes às folhas, esses ponteiros apontam para NULL
- Os nós também armazenam, além da chave s_k, os dados (I_k) relativos àquela chave

ÁRVORE B

Estrutura de uma



REPRESENTAÇÃO EM C
ÁRVORE B EM RAM

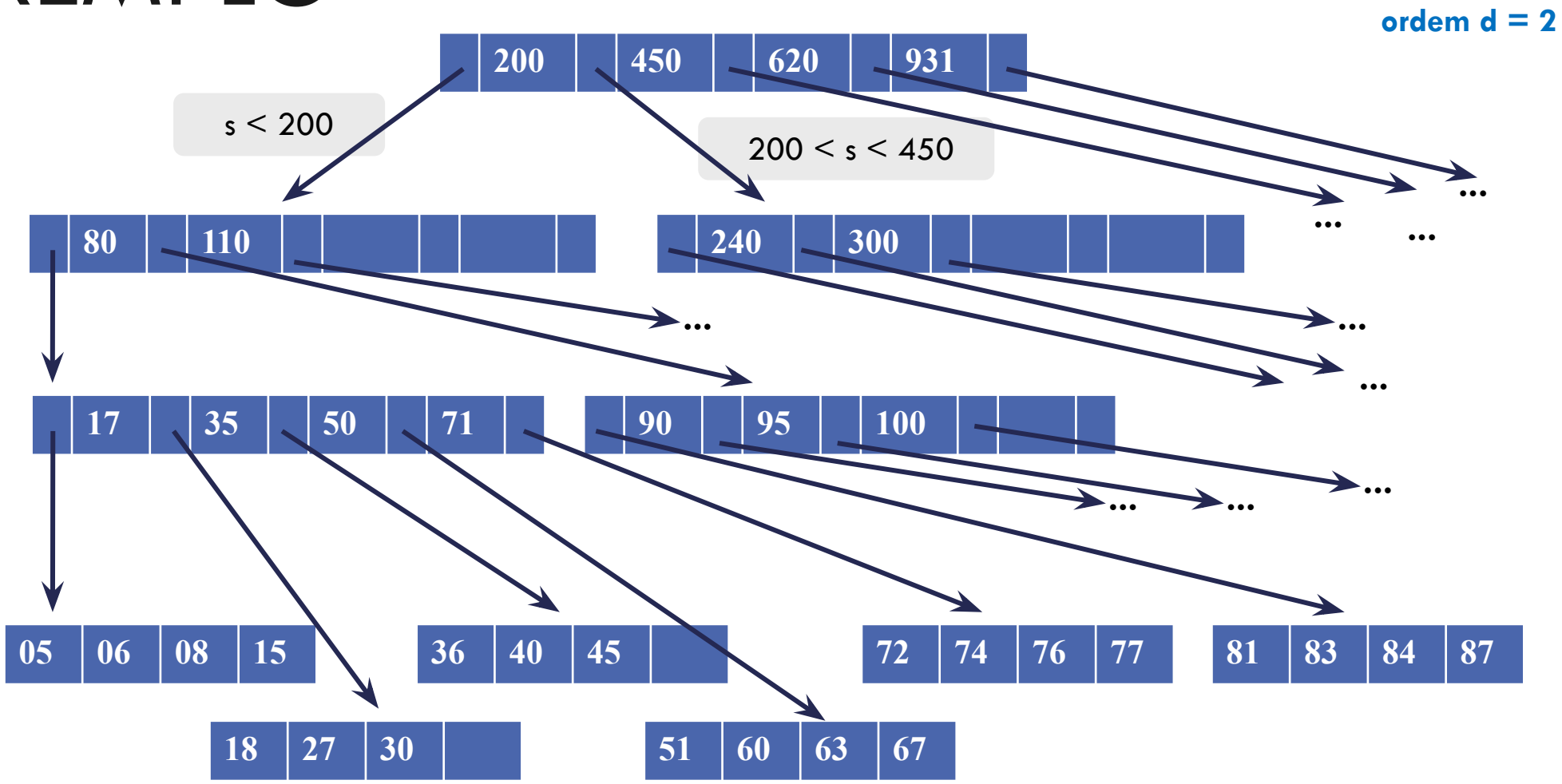
```
typedef struct No {
   int m; //quantidade de chaves armazenadas no nó
   struct No *pont_pai; //pt para o nó pai
   int *s; //array de chaves
   struct No **p; //pt para array de pt p/ os filhos
} TNo;

//Essa estrutura é uma simplificação:
//na prática também seria necessário armazenar os outros dados
//dos registros, e não apenas as chaves
```

BUSCA DE UMA CHAVE X EM ÁRVORE B EM RAM

1. pt = ponteiro p/ raiz da árvore
2. Percorra as chaves do nó apontado por pt, até encontrar X, ou até encontrar uma chave > X, ou até percorrer todas as chaves do nó
   a) Se encontrou chave X, encerre a busca retornando pt
   b) Senão, se encontrou chave maior que X, ptNovo = ponteiro da esquerda dessa chave
   c) Senão, se percorreu todas as chaves do nó atual, ptNovo = ponteiro da direita da última chave do nó
   d) Se ptNovo = NULL, encerre a busca, retornando pt (chave não está na árvore, mas, se estivesse, deveria estar no nó apontado por pt)
   e) Senão, pt = ptNovo, volte ao passo 2

Buscar chaves 240, 76 e 85 na árvore

EXEMPLO



FUNÇÃO BUSCA

```
TNo *busca(TNo *no, int ch) {
    if (no != NULL) {
        int i = 0;
        while (i < no->m && ch > no->s[i]) {
            i++;
        }
        if (i < no->m && ch == no->s[i]) {
            return no; // encontrou chave
        } else if (no->p[i] != NULL) {
            return busca(no->p[i], ch);
        } else return no; //nó era folha -- não existem mais
nós a buscar, então retorna o nó onde a chave deveria estar
    } else return NULL; //nó é NULL, não há como buscar
}
```

INSERÇÃO

Para inserir um registro de chave **x** na árvore B

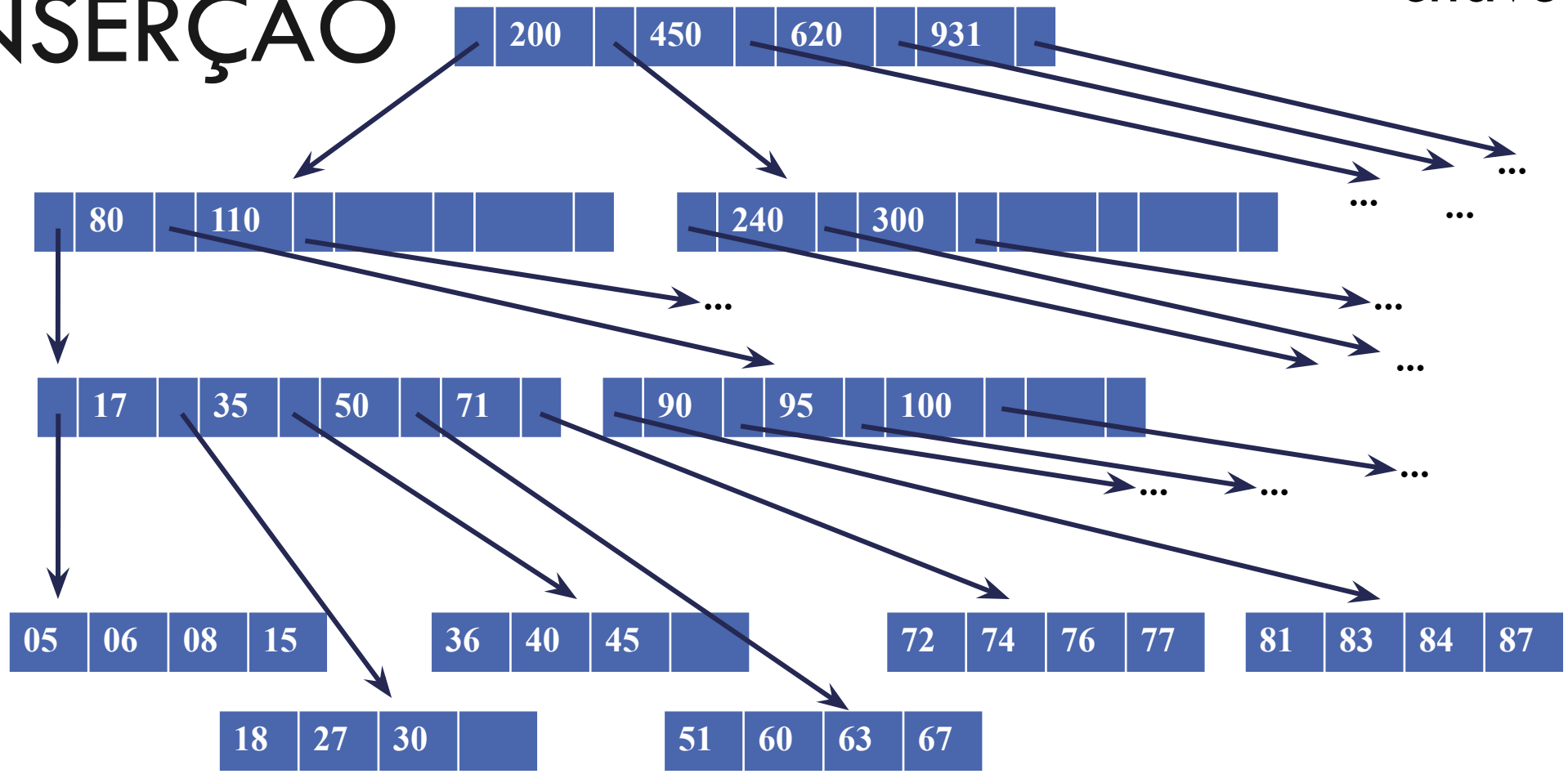
- Executar o algoritmo de busca
- Se chave está no nó retornado pela busca (é preciso checar)
  - Inserção é inválida
- Se chave não está no nó retornado pela busca:
  - Inserir a chave no nó retornado pela busca

INSERÇÃO

Inserir

chave 32

ordem d = 2

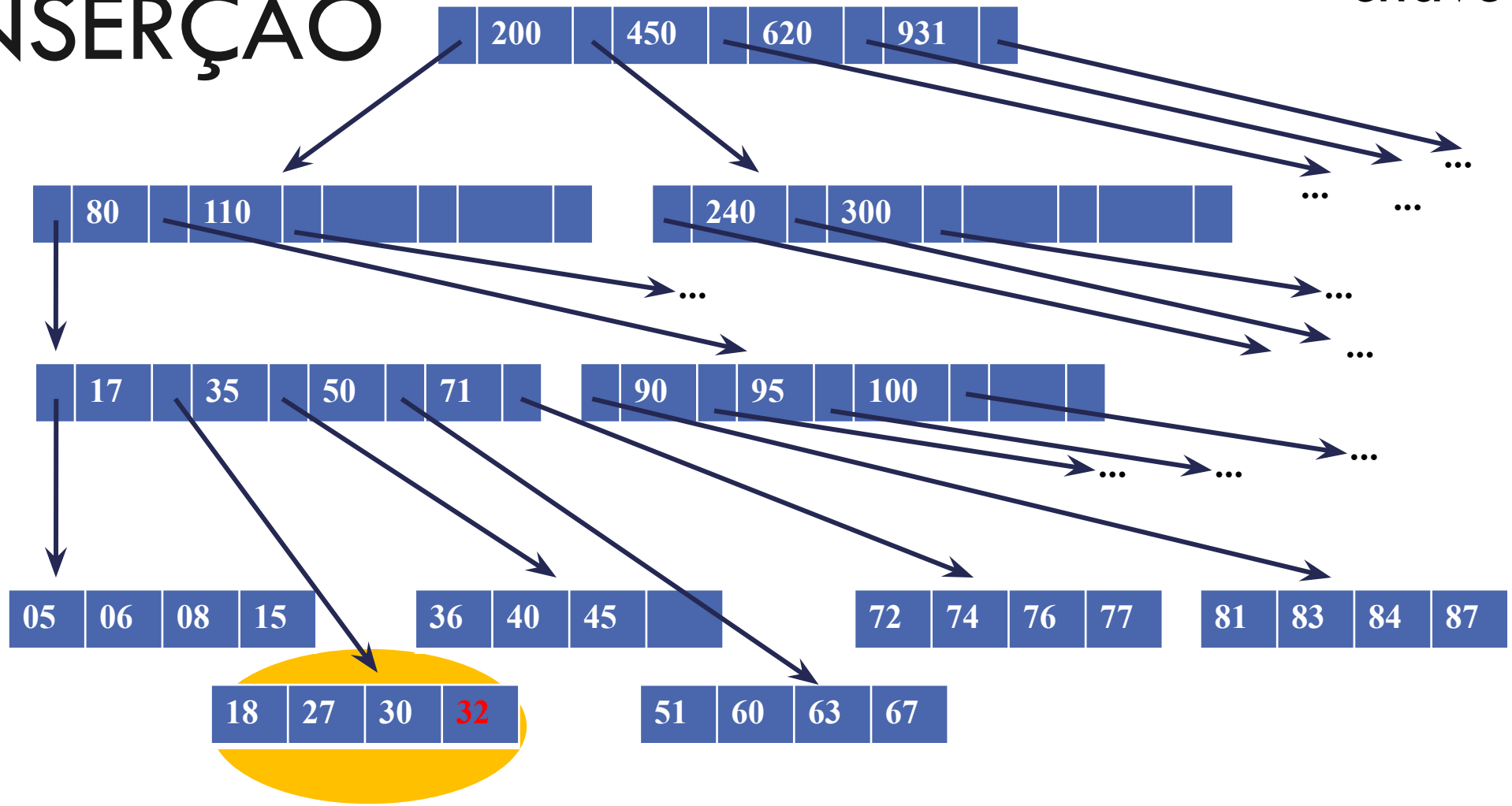


INSERÇÃO

Inserir

chave 32

ordem d = 2



DISCUSSÃO SOBRE O ALGORITMO

Inserção sempre ocorre nas folhas

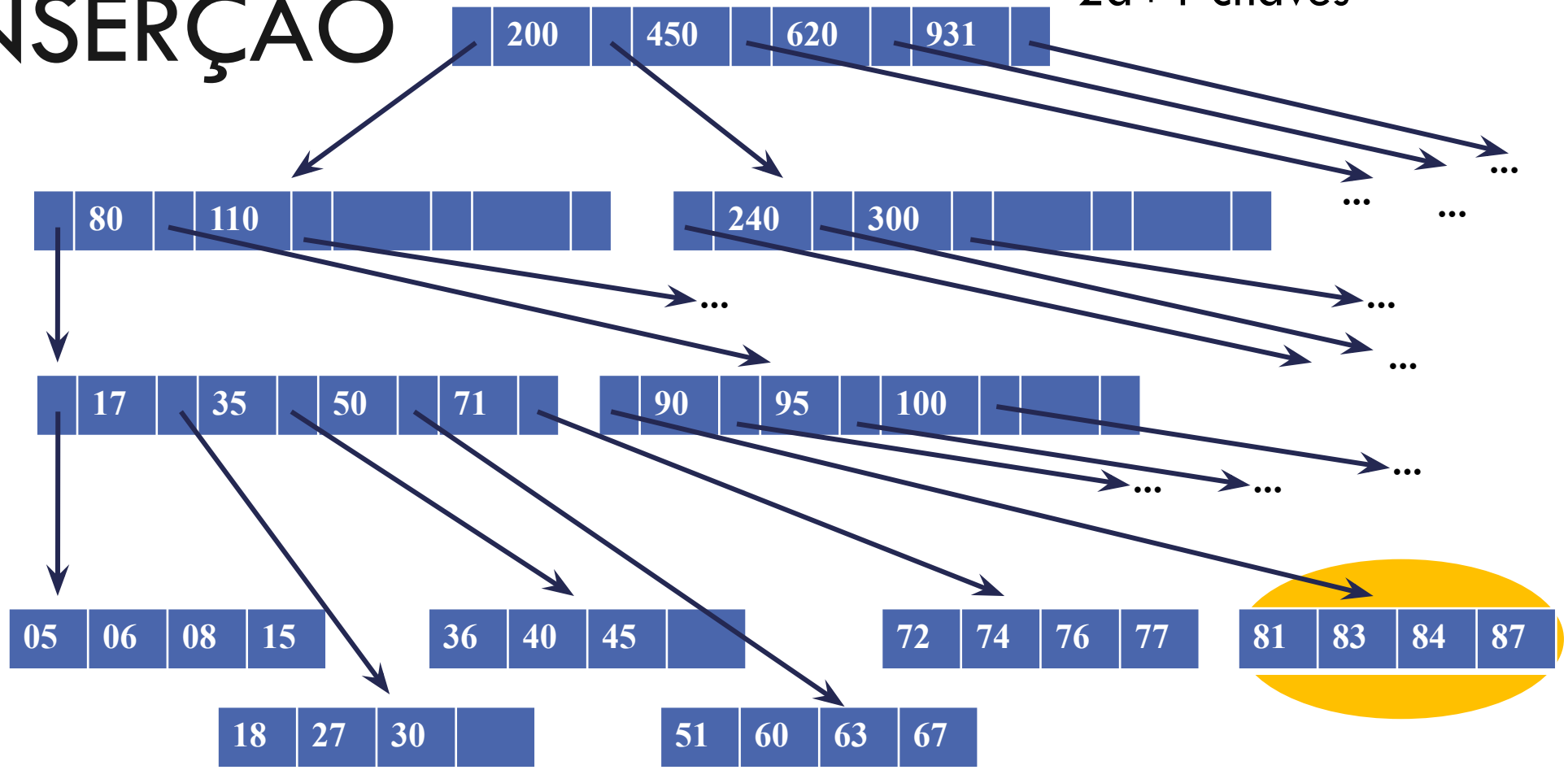
Por quê?

INSERÇÃO

Inserir chave 85

Inserção faria página ficar com 2d+1 chaves

ordem d = 2



SOLUÇÃO

Particionar a página em 2

- Na página **P** permanecem **d** entradas
- Entrada **d+1** sobe para o pai
- Alocar outra página, **Q**, e nela alocar as outras **d** entradas

ALOCAÇÃO DE S_{D+1}

O nó W, agora também pai de Q, receberá a nova entrada **(s_{d+1}, pt)**

- **pt** aponta para a nova página **Q**

Se não houver mais espaço livre em W, o processo de particionamento também é aplicado a W

PARTICIONAMENTO

Observação importante: particionamento se propaga para os pais dos nós, podendo, eventualmente, atingir a raiz da árvore

O particionamento da raiz é a **única forma de aumentar a altura da árvore**

PROCEDIMENTO DE INSERÇÃO

1. Aplicar o procedimento busca, verificando a validade da inserção
2. Se a inserção é válida, realizar inserção no nó F retornado pela busca
3. Verificar se nó F precisa de particionamento. Se sim, propagar o particionamento enquanto for necessário.

EXEMPLO DE INSERÇÃO QUE CAUSA PARTICIONAMENTO

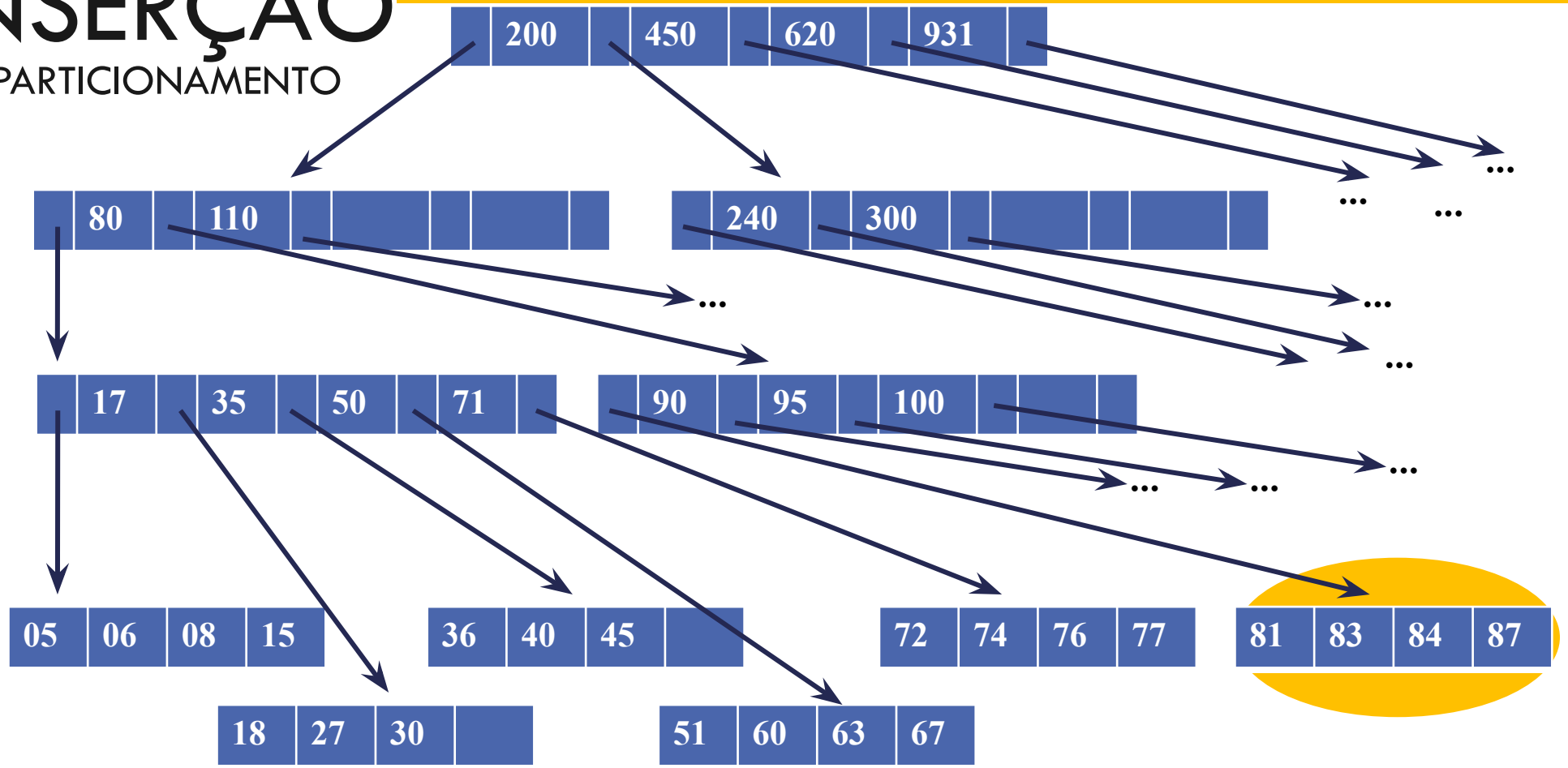
Inserir chave 85

INSERÇÃO
C/ PARTICIONAMENTO

Inserir chave 85

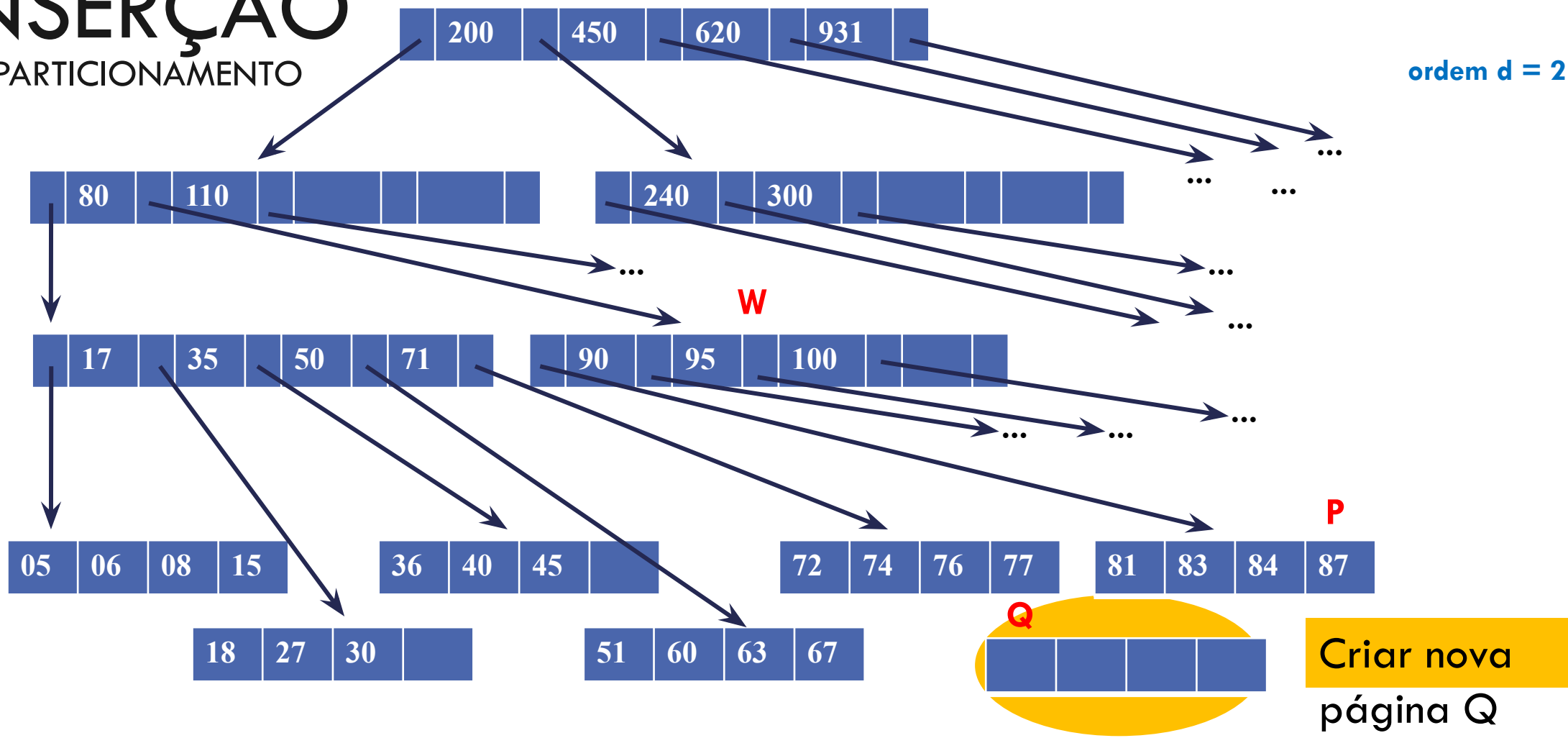
Inserção faria página ficar com 2d+1 chaves

81; 83; 84; 85; 87



ordem d = 2

INSERÇÃO
C/ PARTICIONAMENTO



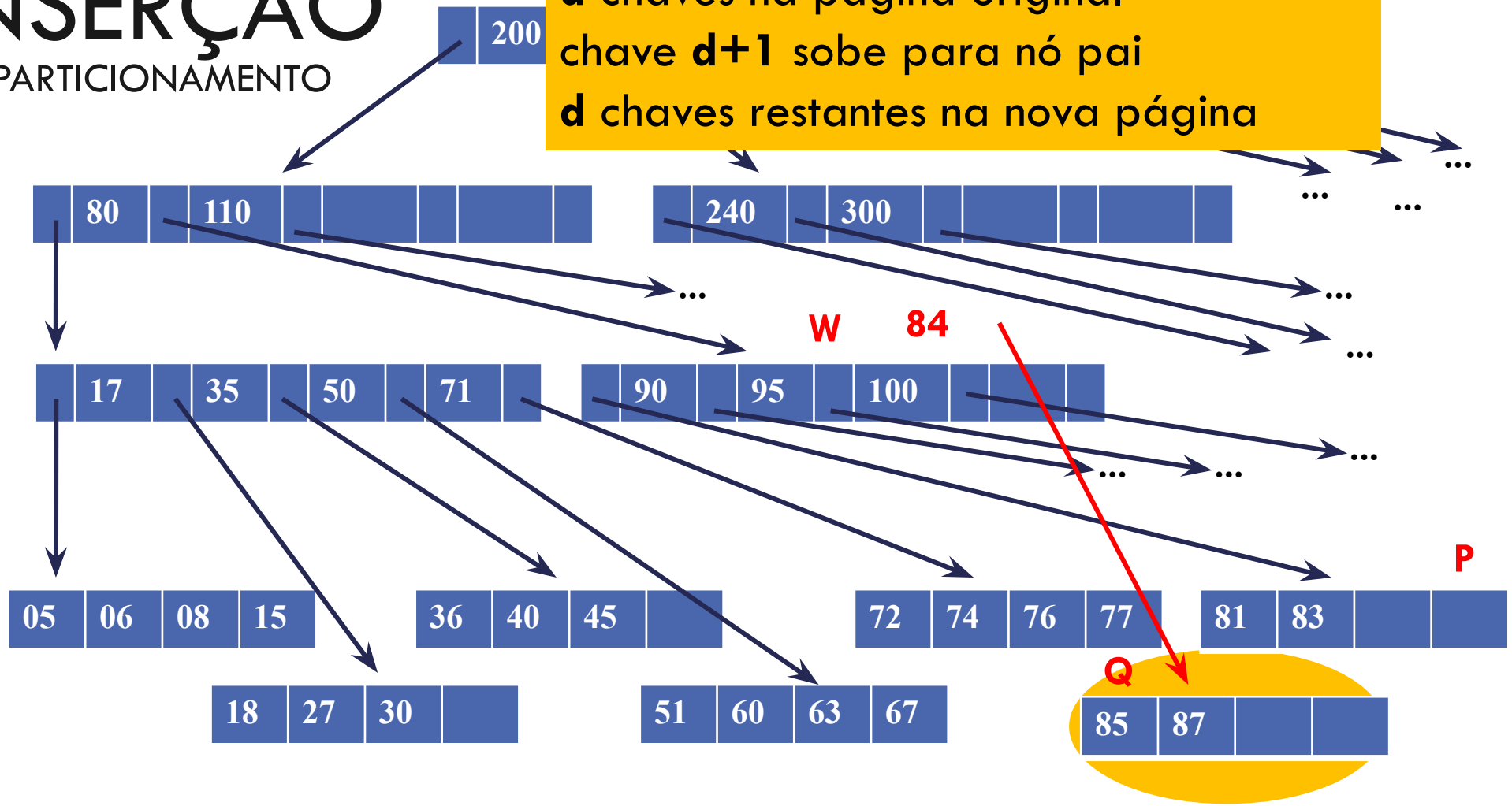
ordem d = 2

Criar nova página Q

INSERÇÃO
C/ PARTICIONAMENTO

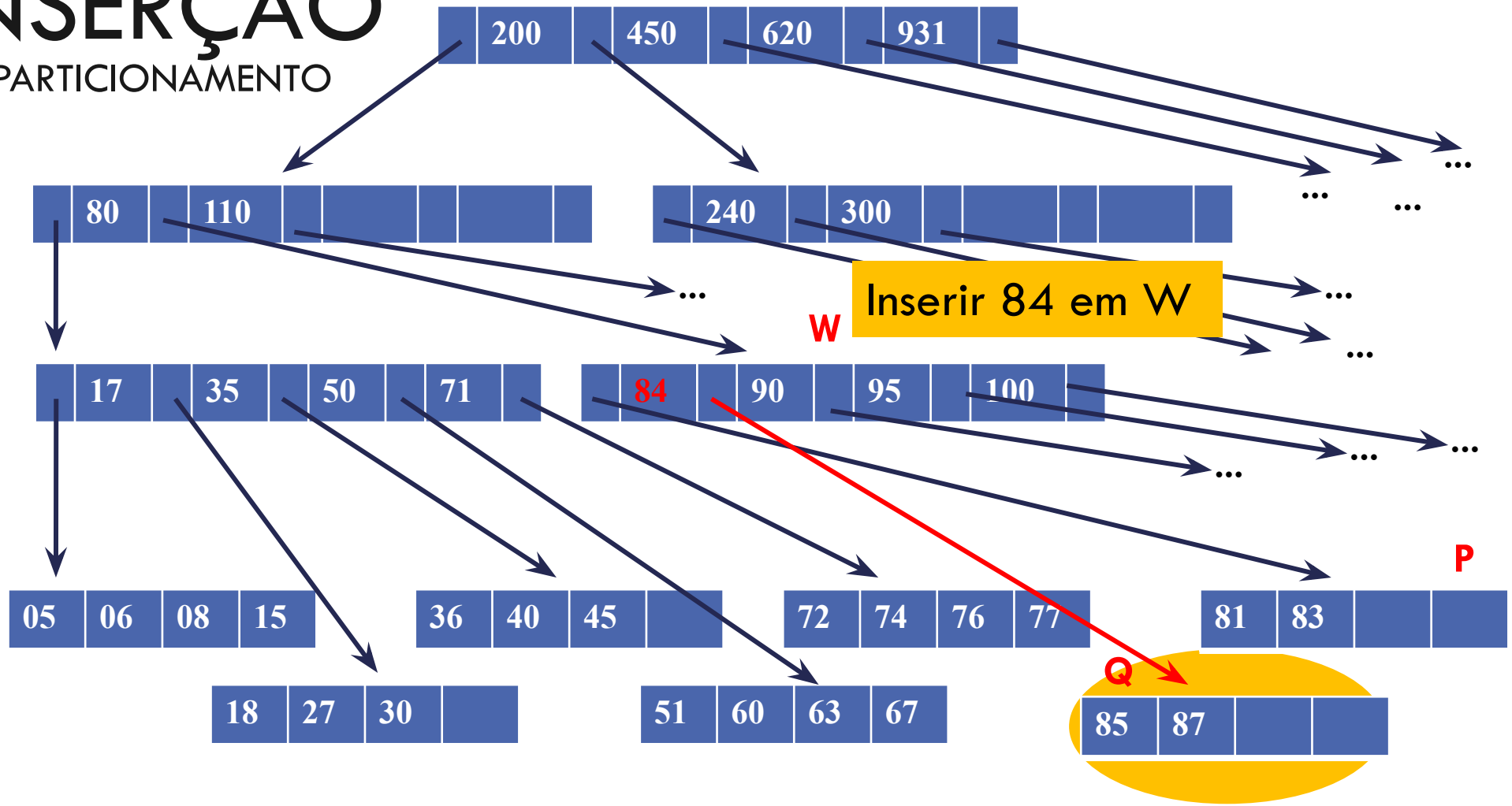
Dividir as chaves entre as duas páginas
(81; 83; 84; 85; 87)
d chaves na página original
chave **d+1** sobe para nó pai
d chaves restantes na nova página

ordem d = 2



INSERÇÃO
C/ PARTICIONAMENTO

ordem d = 2



EXEMPLO DE PROPAGAÇÃO

Inserir chave 73

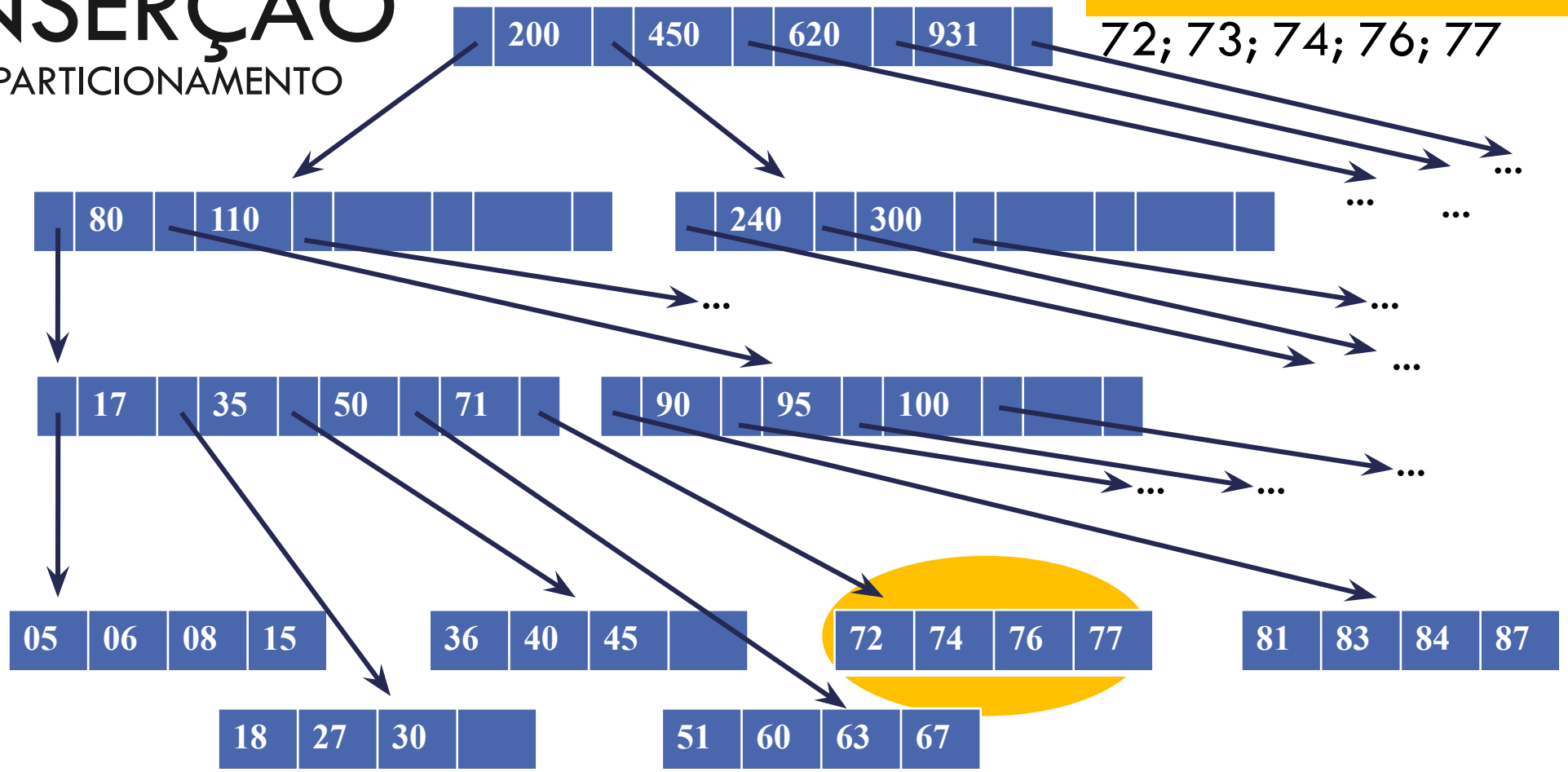
INSERÇÃO
C/ PARTICIONAMENTO

Inserir chave 73

Inserção faria página ficar com 2d+1 chaves

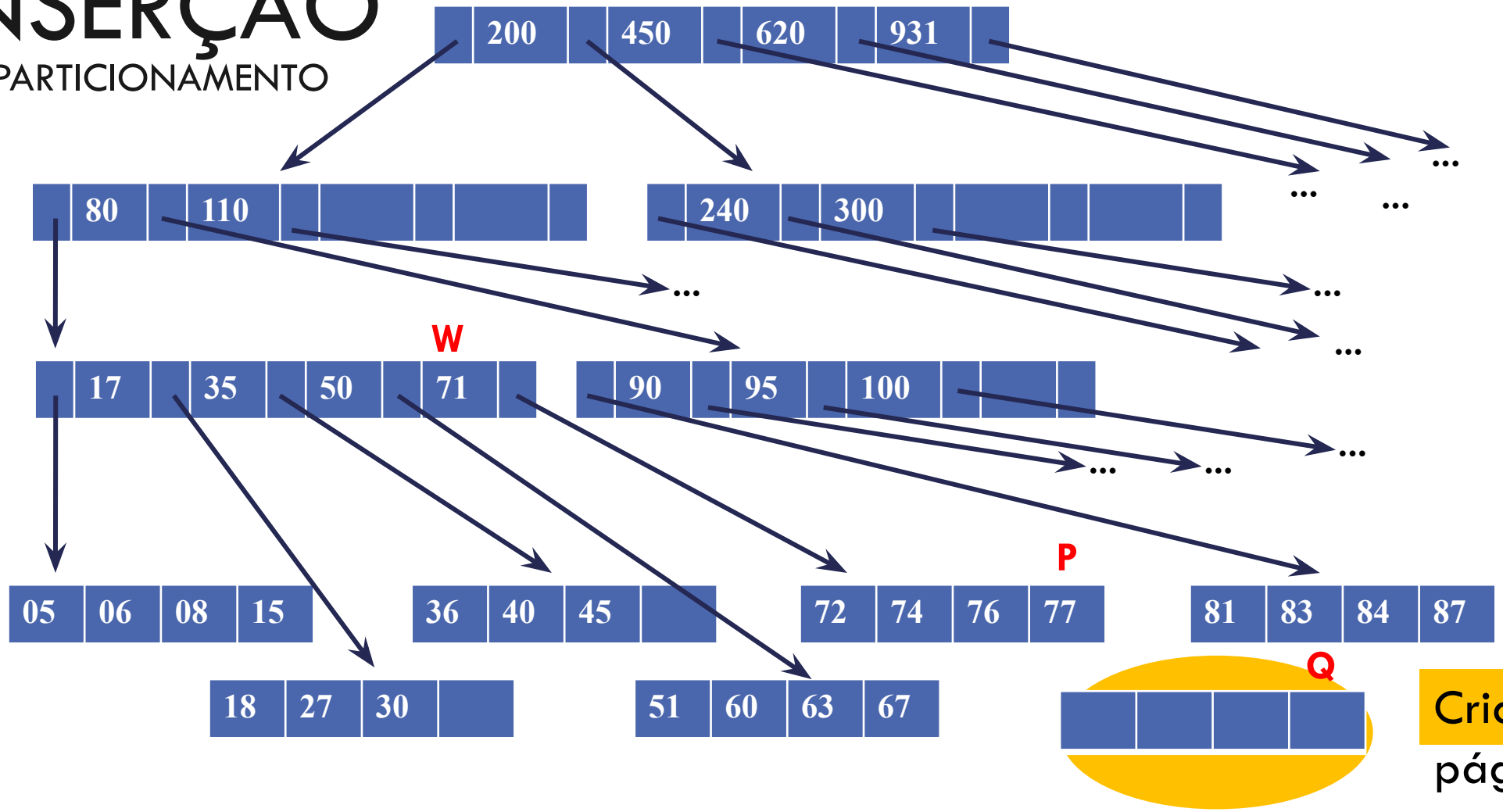
72; 73; 74; 76; 77

ordem d = 2



INSERÇÃO
C/ PARTICIONAMENTO

ordem d = 2

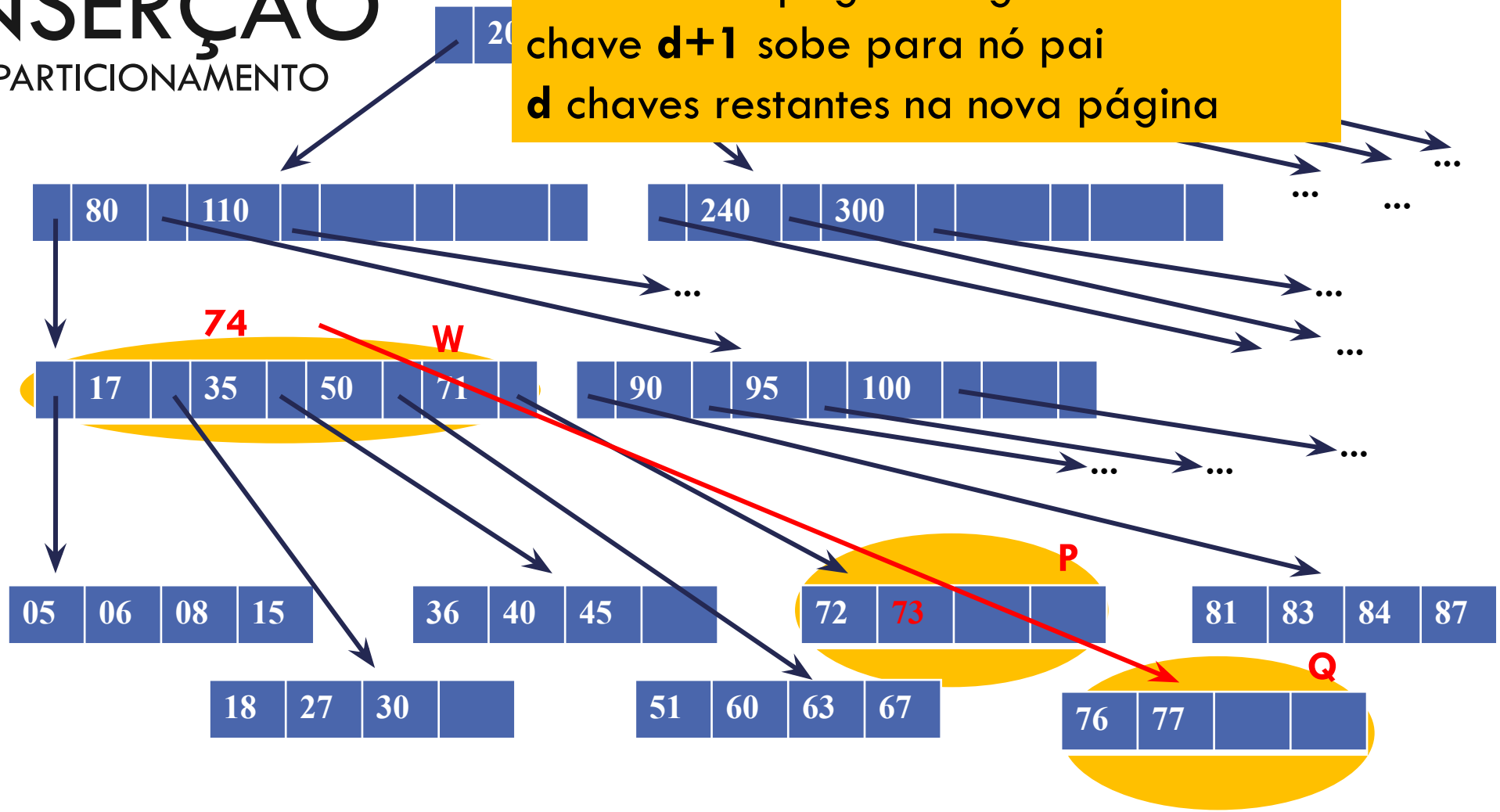


Criar nova página Q

INSERÇÃO
C/ PARTICIONAMENTO

Dividir as chaves entre as duas páginas
(72; 73; 74; 76; 77)
d chaves na página original
chave **d+1** sobe para nó pai
d chaves restantes na nova página

ordem d = 2

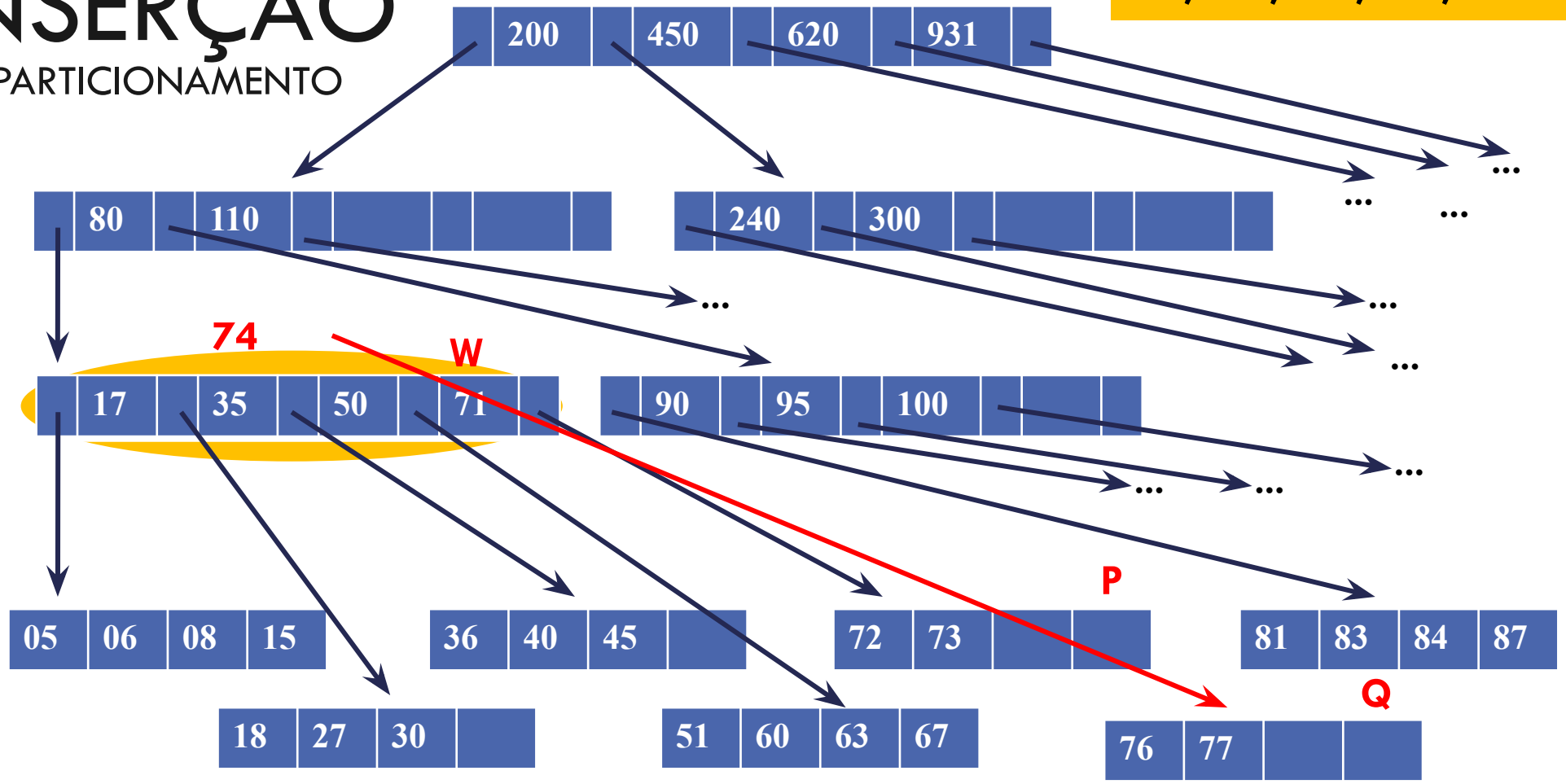


Atenção: os ponteiros dos nós folha foram omitidos por questões de legibilidade da figura.

INSERÇÃO
C/ PARTICIONAMENTO

Inserir 74 em W
Não há espaço: particionar nó
17; 35; 50; 71; 74

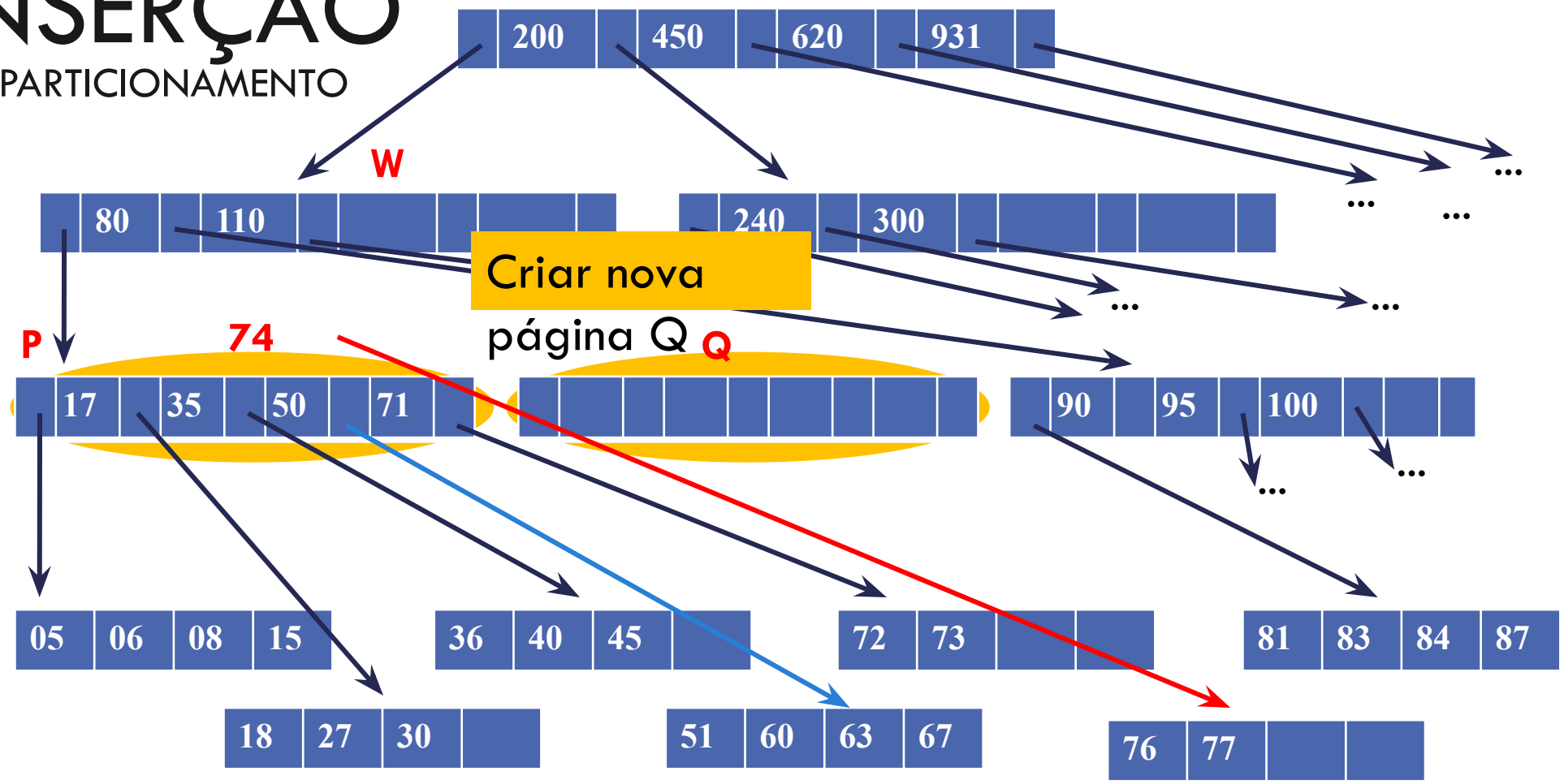
ordem d = 2



Atenção: os ponteiros dos nós folha foram omitidos por questões de legibilidade da figura.

INSERÇÃO
C/ PARTICIONAMENTO

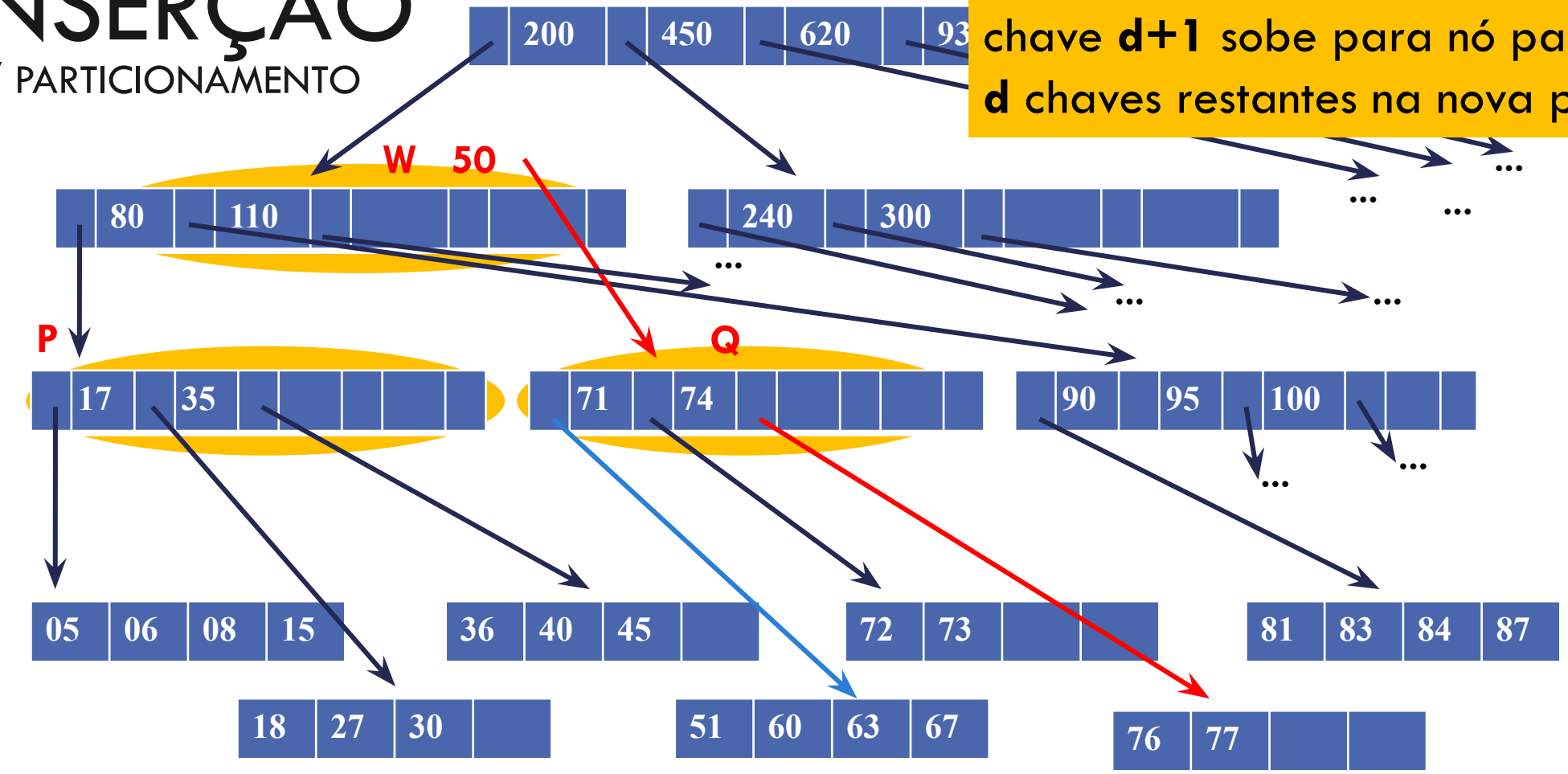
ordem d = 2



Atenção: os ponteiros dos nós folha foram omitidos por questões de legibilidade da figura.

INSERÇÃO
C/ PARTICIONAMENTO

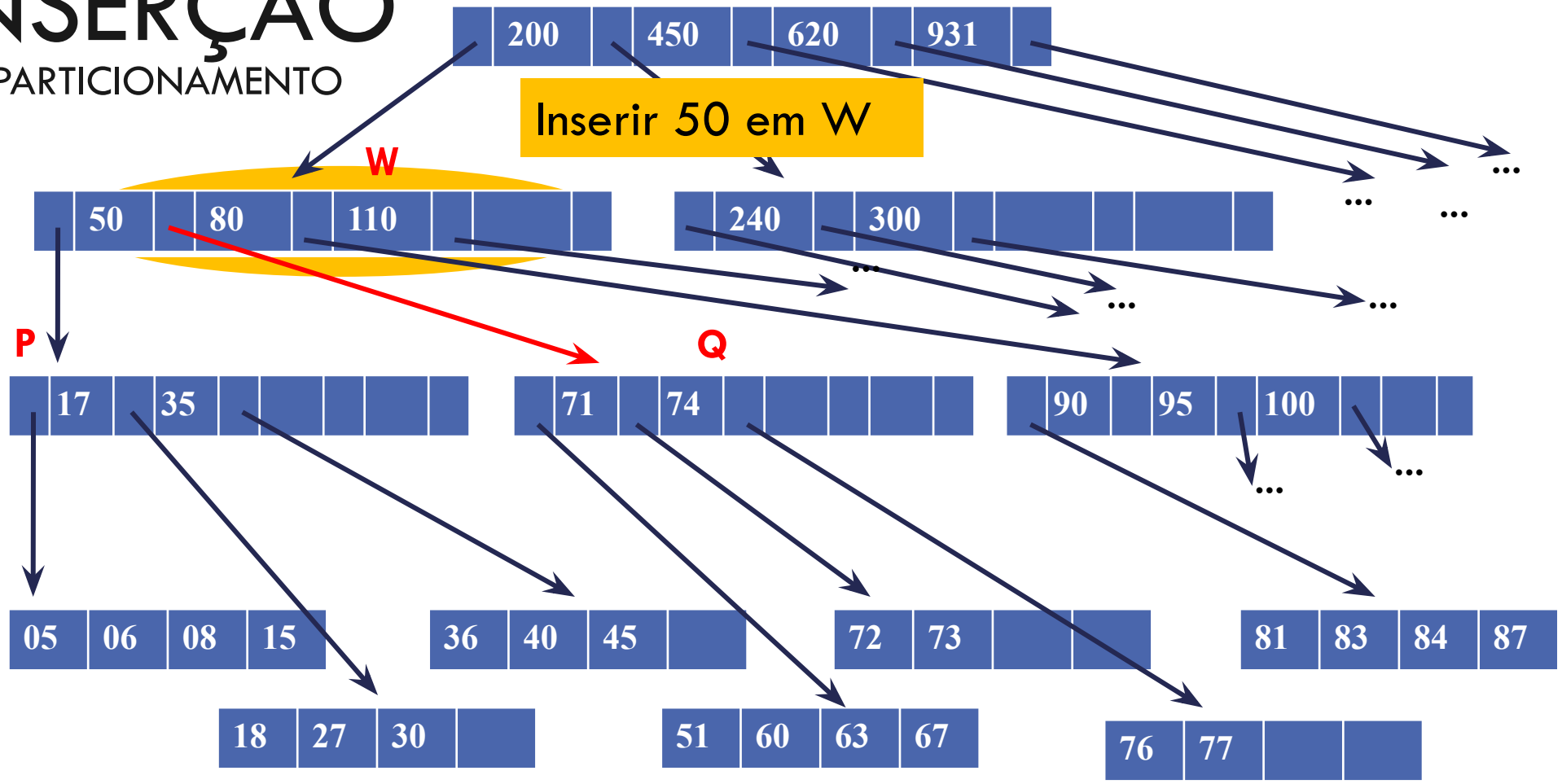
Dividir as chaves entre as duas páginas
(17; 35; 50; 71; 74)
d chaves na página original
chave **d+1** sobe para nó pai
d chaves restantes na nova página



Atenção: os ponteiros dos nós folha foram omitidos por questões de legibilidade da figura.

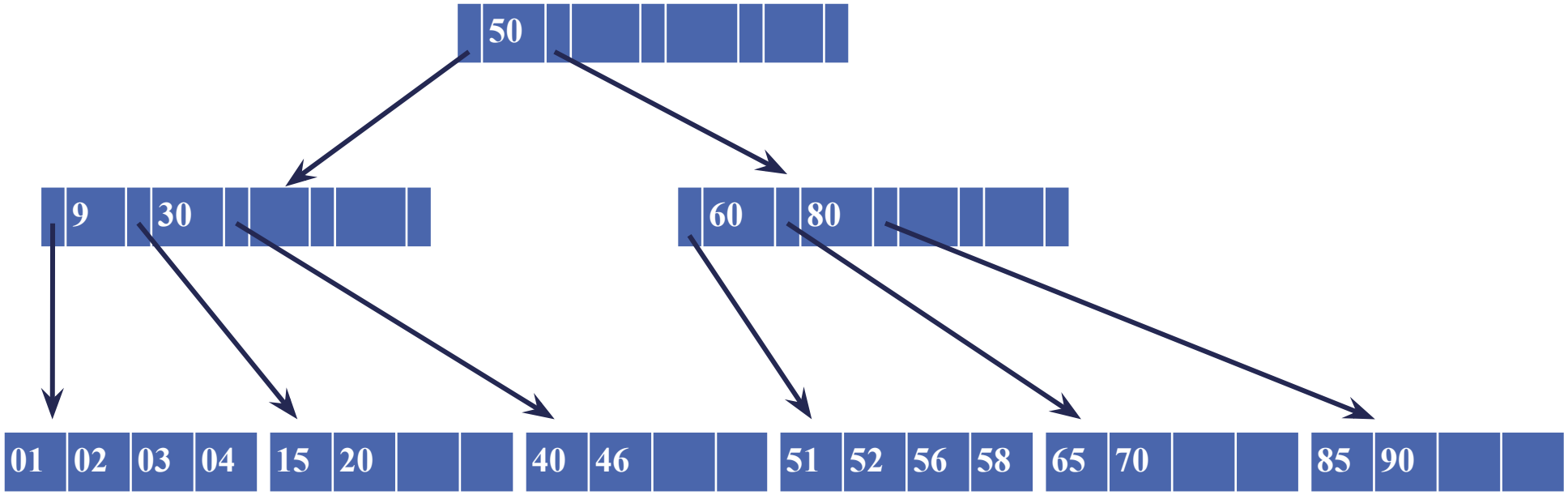
INSERÇÃO
C/ PARTICIONAMENTO

ordem d = 2



Atenção: os ponteiros dos nós folha foram omitidos por questões de legibilidade da figura.

EXERCÍCIO 1:
INSERIR CHAVES 57, 71, 72, 73

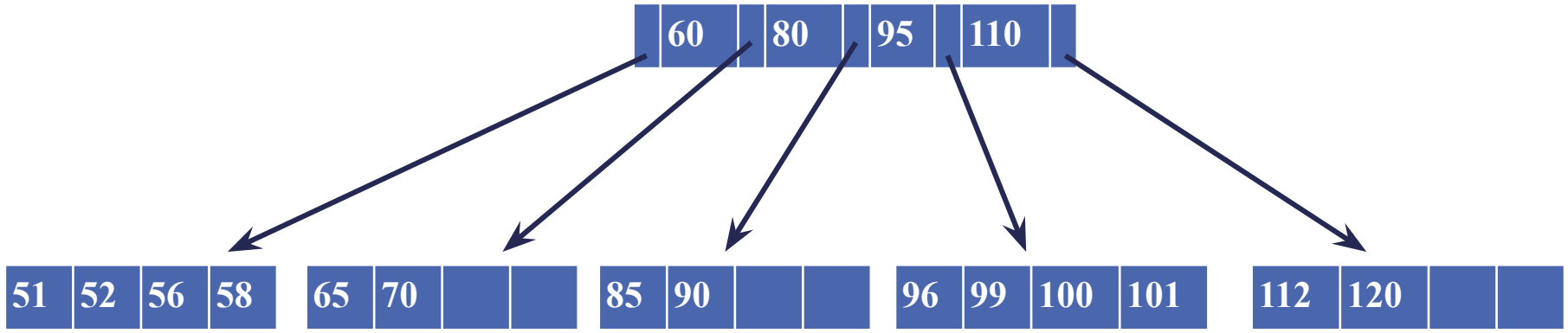


DIVISÃO DO NÓ RAIZ

Em alguns casos o particionamento se propaga para a raiz

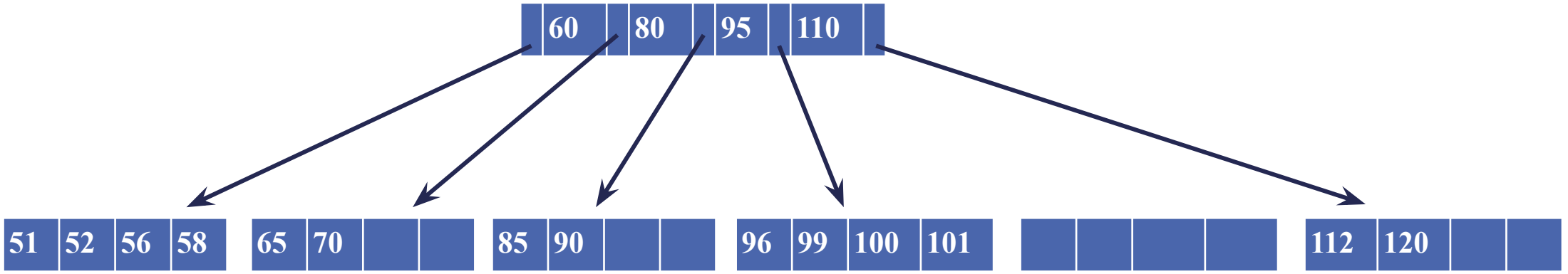
Nesse caso, o nó raiz é particionado normalmente, mas, como a raiz não tem pai, cria-se um novo nó, que passa a ser a nova raiz

EXEMPLO
INSERIR CHAVE 97



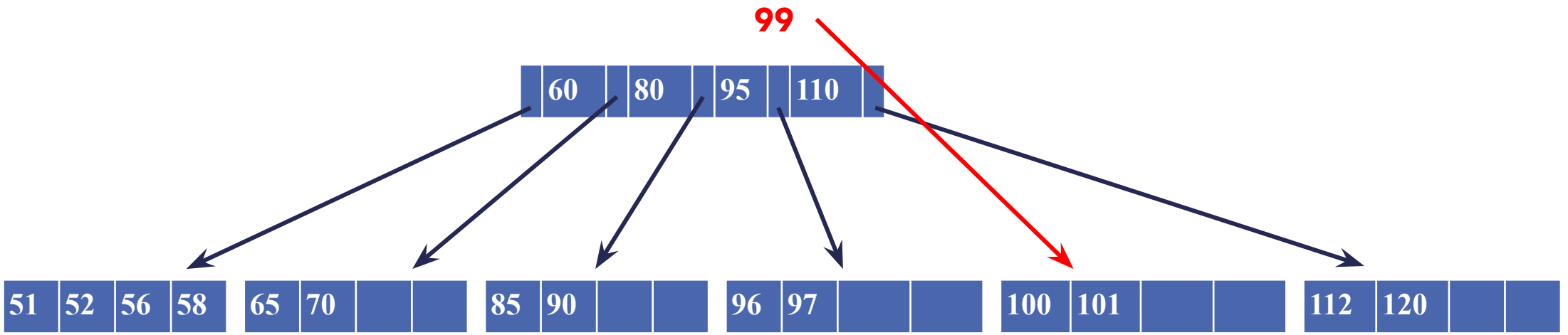
Atenção: os ponteiros dos nós folha foram omitidos por questões de legibilidade da figura.

EXEMPLO
INSERIR CHAVE 97

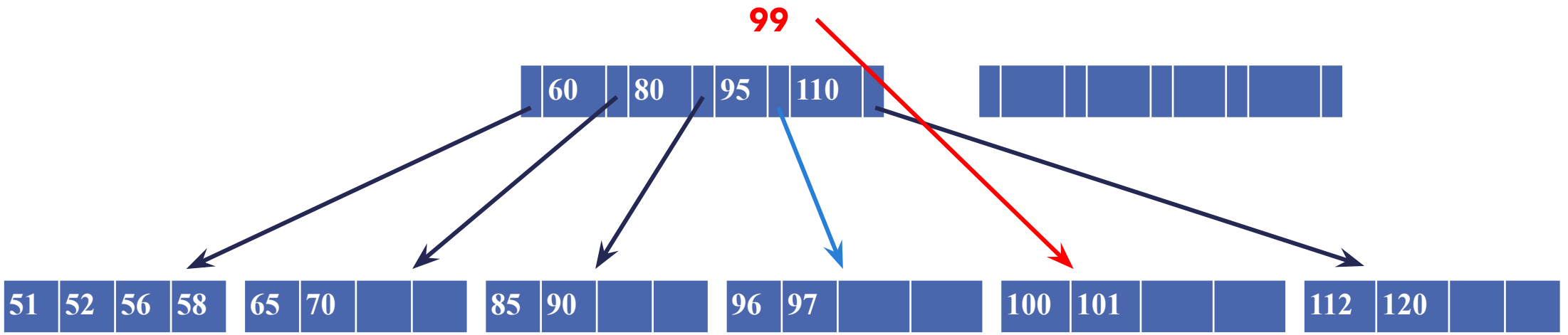


Atenção: os ponteiros dos nós folha foram omitidos por questões de legibilidade da figura.

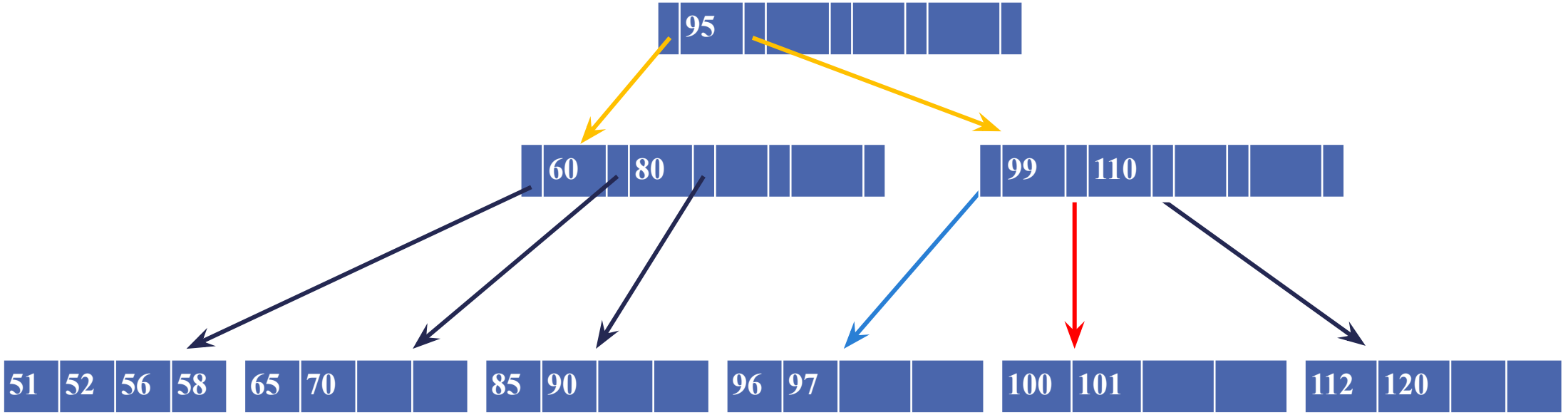
EXEMPLO
INSERIR CHAVE 97



EXEMPLO
INSERIR CHAVE 97



EXEMPLO
INSERIR CHAVE 97



Atenção: os ponteiros dos nós folha foram omitidos por questões de legibilidade da figura.

IMPLEMENTAÇÃO

Ver implementação da inserção no código arvore-b.c

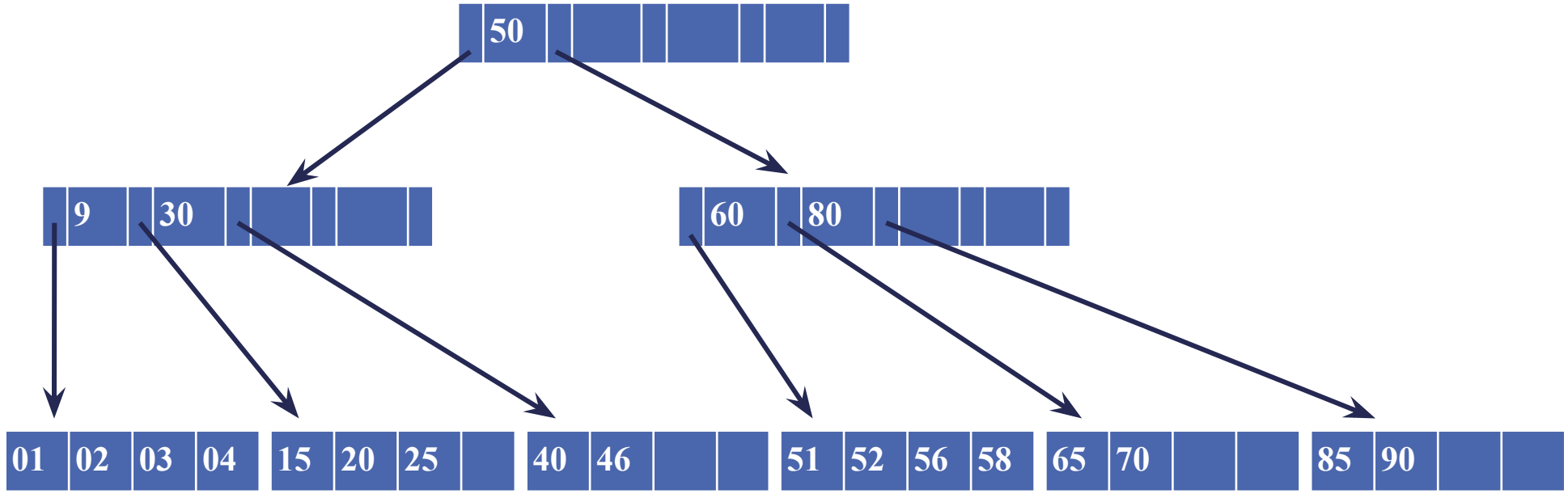
EXCLUSÃO

Duas situações possíveis:

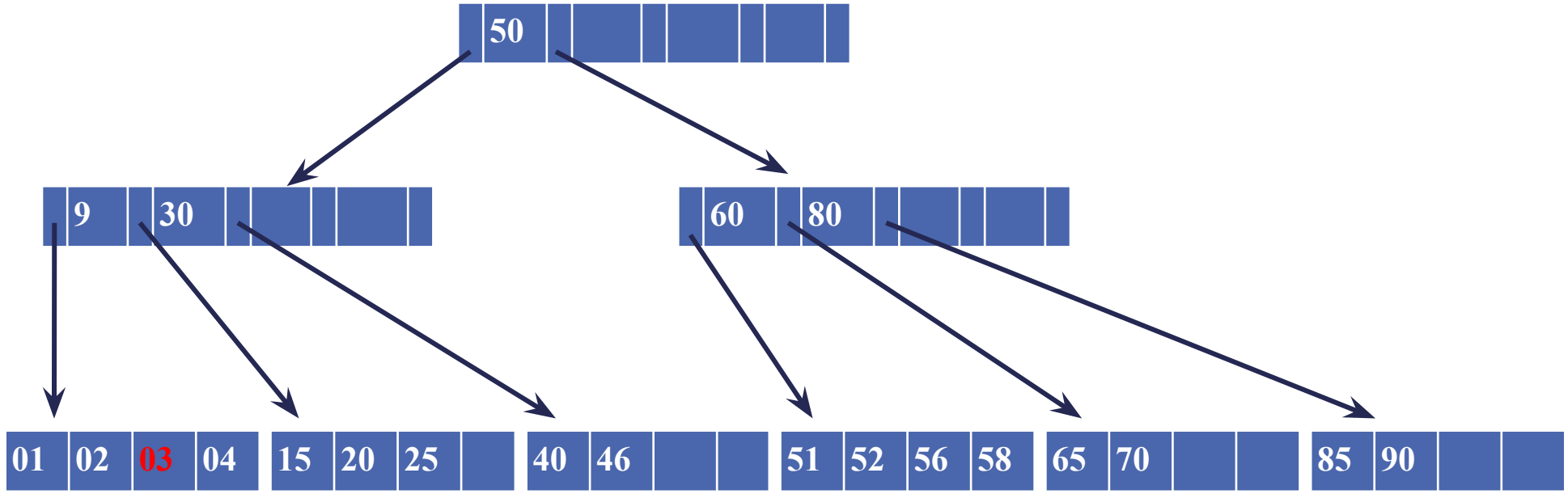
- A entrada **x** está em um nó folha
  - Neste caso, simplesmente remover a entrada **x**

- A entrada **x** não está em um nó folha
  - Substituir **x** pela chave **y** imediatamente maior
  - Note que **y** necessariamente pertence a uma folha, pela forma como a árvore B é estruturada

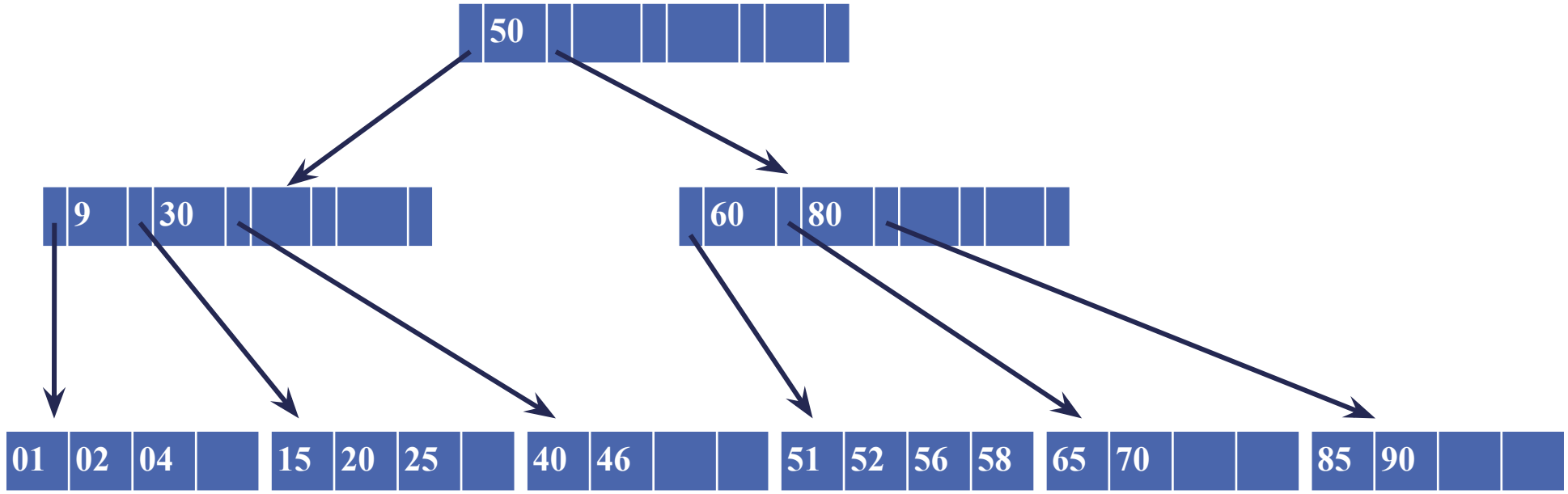
EXEMPLO: EXCLUSÃO DA CHAVE 03



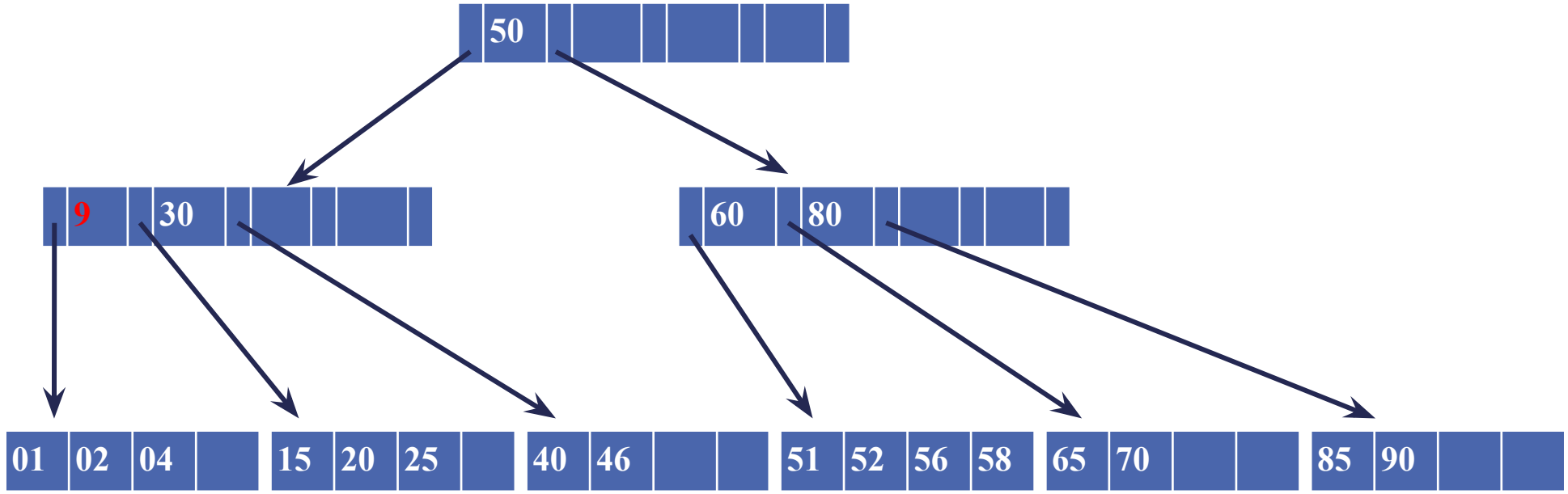
EXEMPLO: EXCLUSÃO DA CHAVE 03



EXEMPLO: EXCLUSÃO DA CHAVE 03

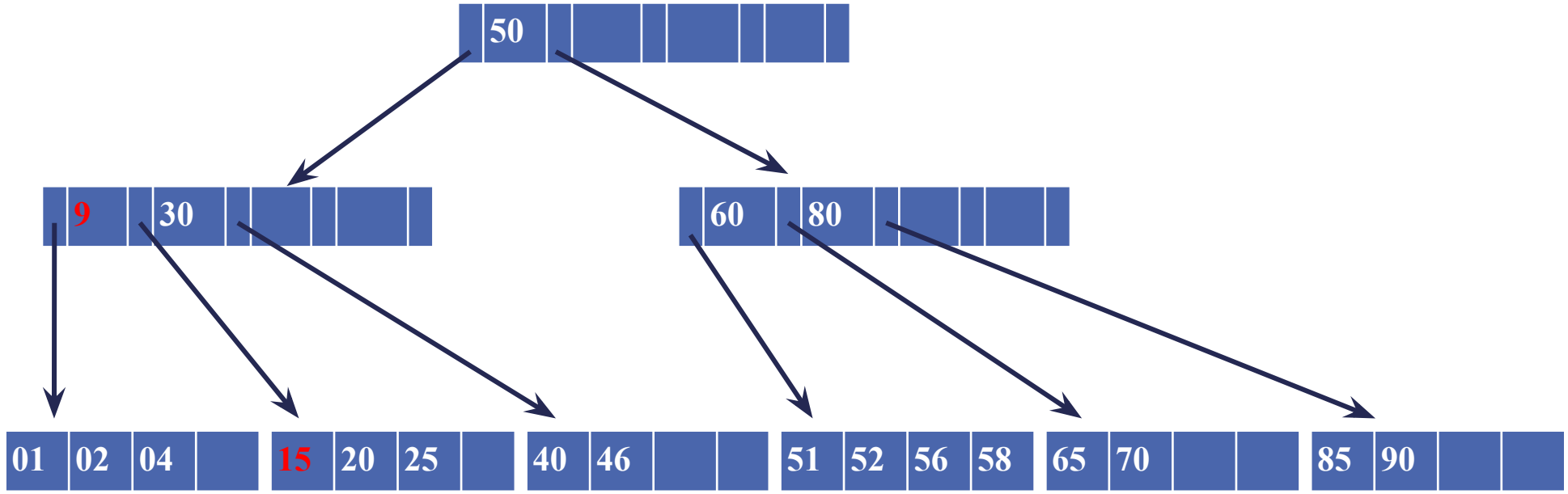


EXEMPLO: EXCLUSÃO DA CHAVE 9



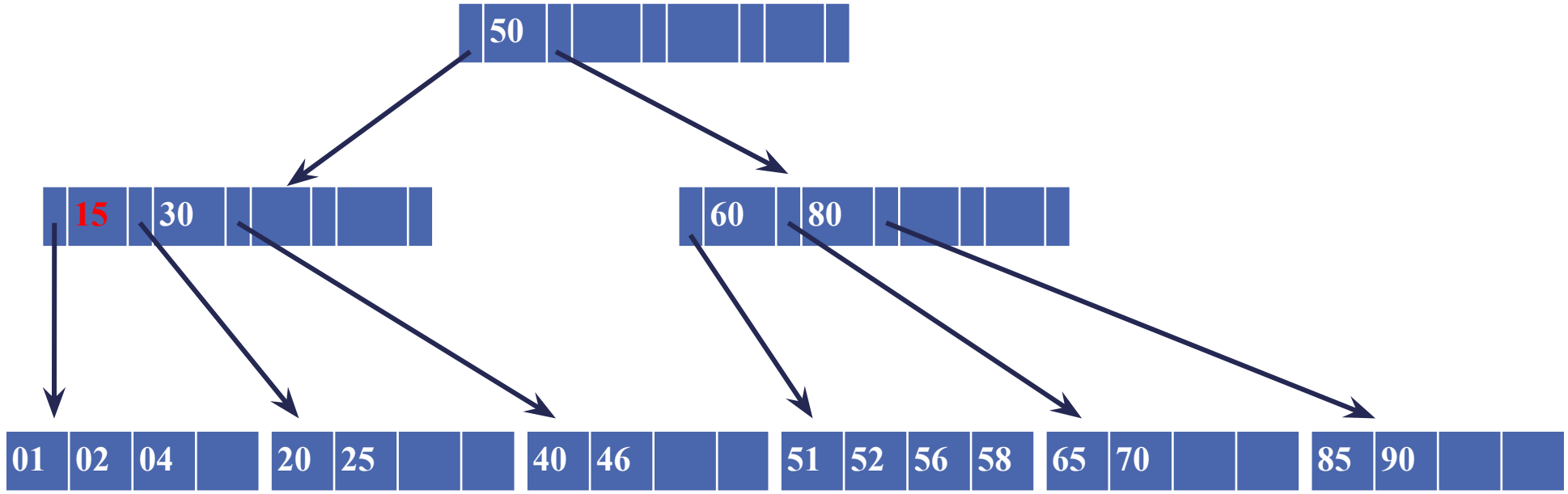
Substituir pela chave imediatamente maior

EXEMPLO: EXCLUSÃO DA CHAVE 9



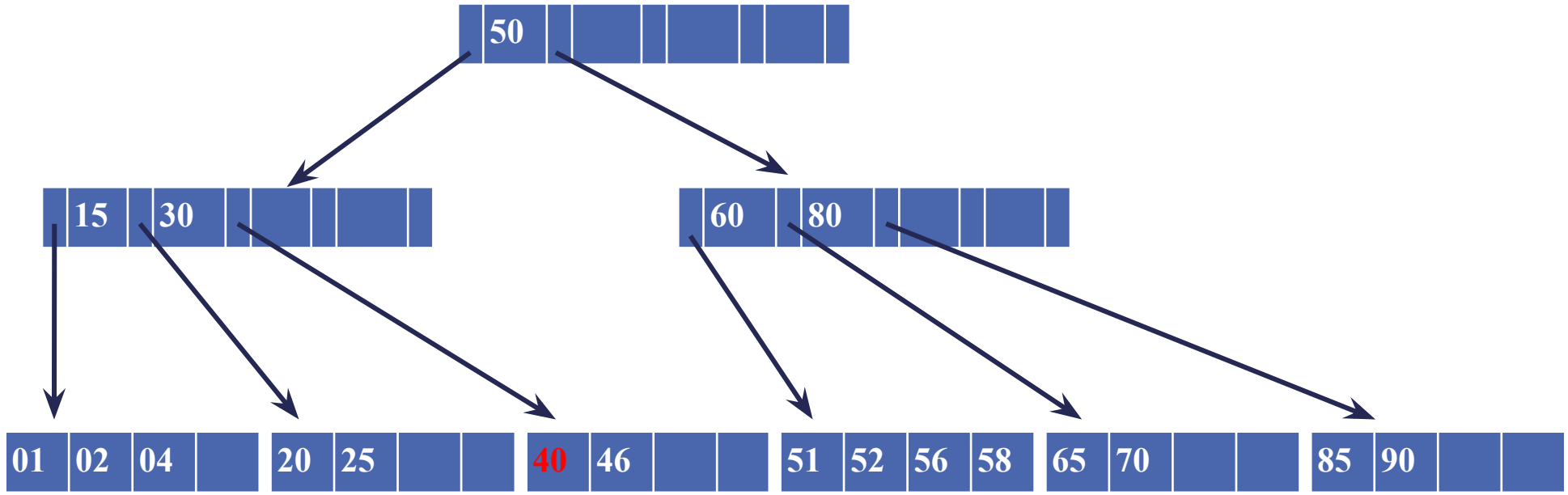
Substituir pela chave imediatamente maior

EXEMPLO: EXCLUSÃO DA CHAVE 9



Substituir pela chave imediatamente maior

EXEMPLO: EXCLUSÃO DA CHAVE 40



Problema: o nó ficaria com menos de d chaves, o que não é permitido

SOLUÇÃO:

Concatenação ou Redistribuição

CONCATENAÇÃO

Duas páginas **P** e **Q** são **irmãs adjacentes** se têm o mesmo pai **W** e são apontadas por dois ponteiros adjacentes em **W**

P e **Q** podem ser concatenadas se:

- são **irmãs adjacentes**; e
- juntas possuem menos de **2d** chaves

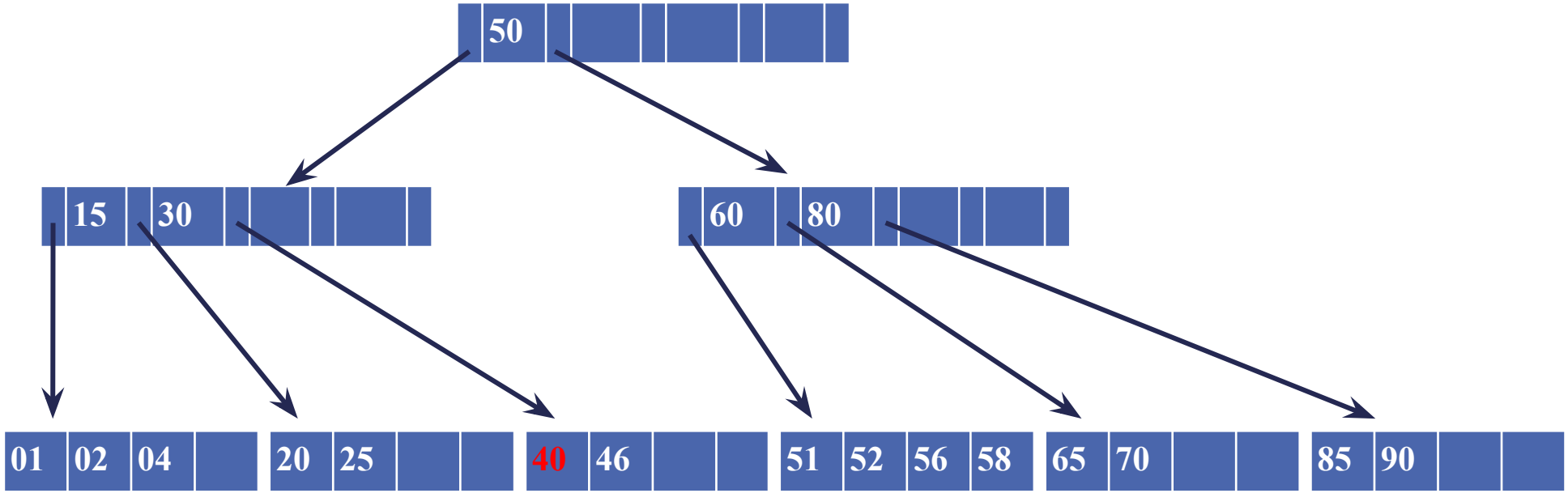
OPERAÇÃO DE CONCATENAÇÃO DE P E Q

Agrupar as entradas de **Q** em **P**

Em **W**, pegar a chave s_i que está entre os ponteiros que apontam para **P** e **Q**, e transferi-la para **P**

Em **W**, eliminar o ponteiro p_i (ponteiro que ficava junto à chave s_i que foi transferida)

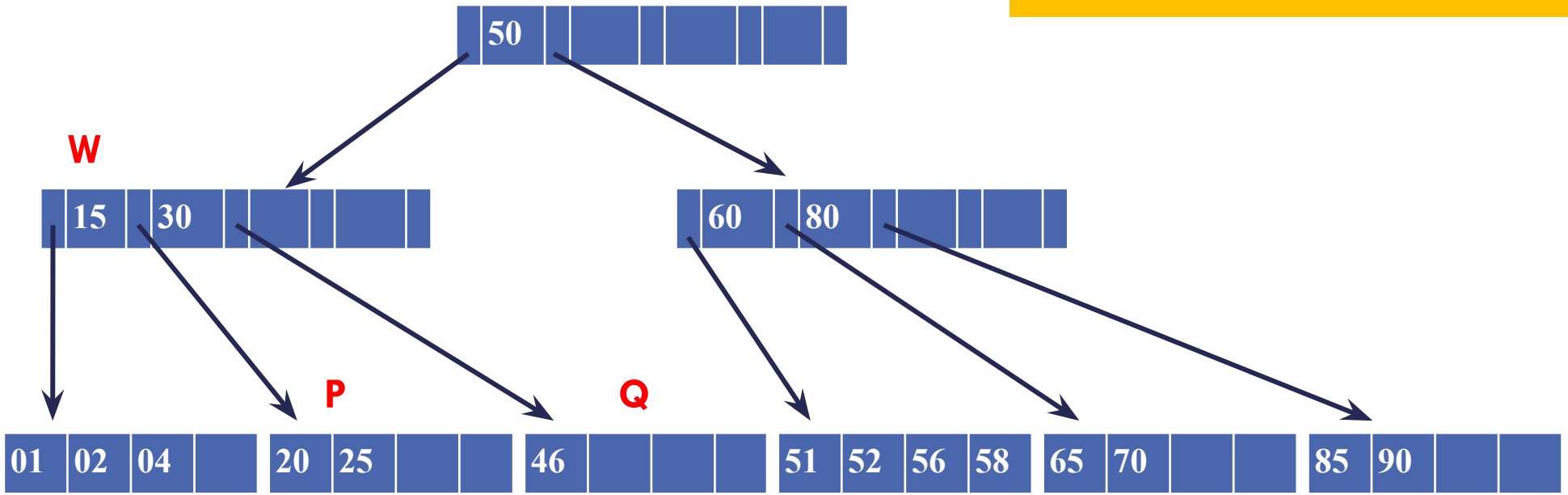
EXEMPLO: EXCLUSÃO DA CHAVE 40



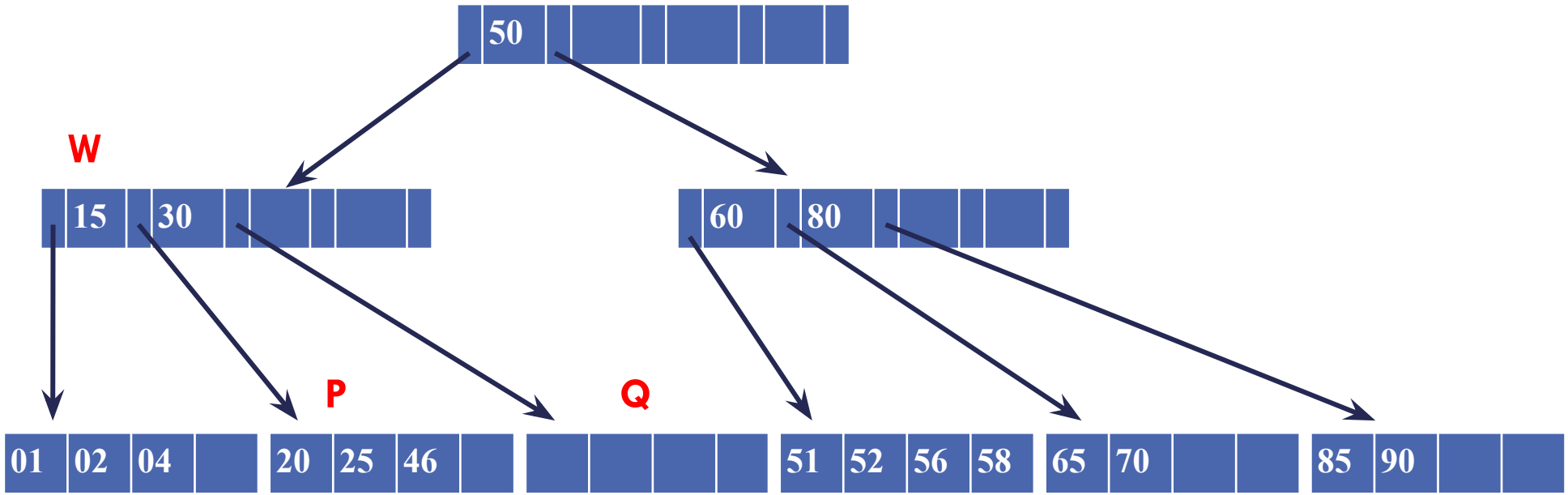
EXEMPLO: EXCLUSÃO DA CHAVE 40

Página Q ficou com menos de d chaves

Página P e Q são irmãs adjacentes
Soma de chaves de P e Q < 2d
CONCATENAR P e Q



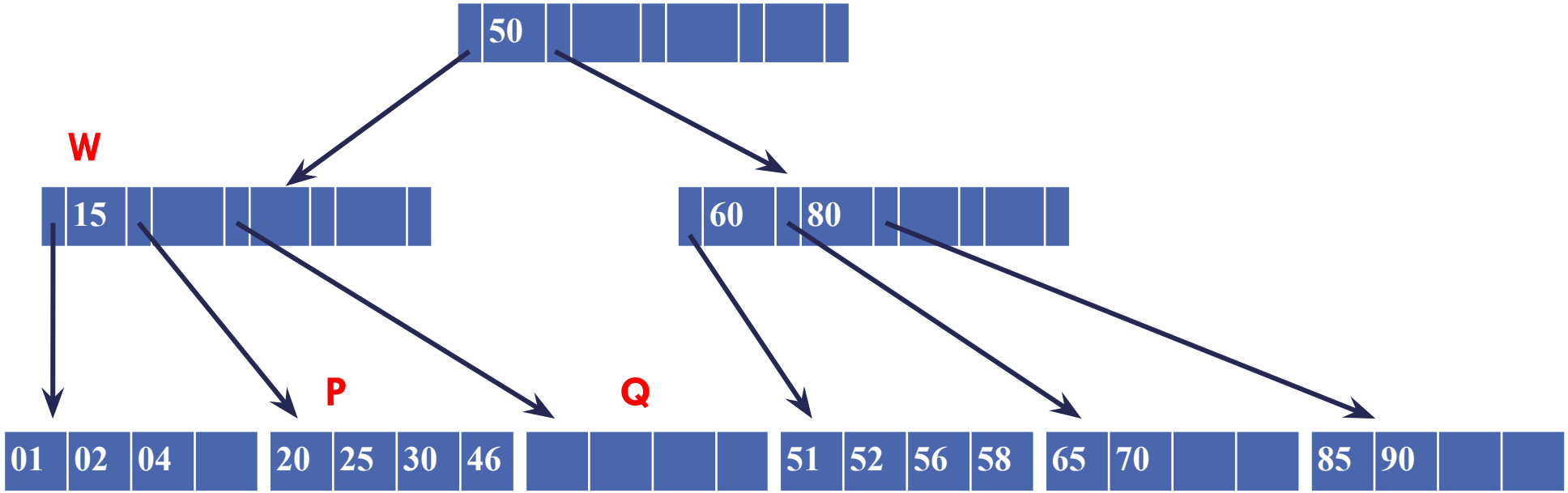
EXEMPLO: EXCLUSÃO DA CHAVE 40



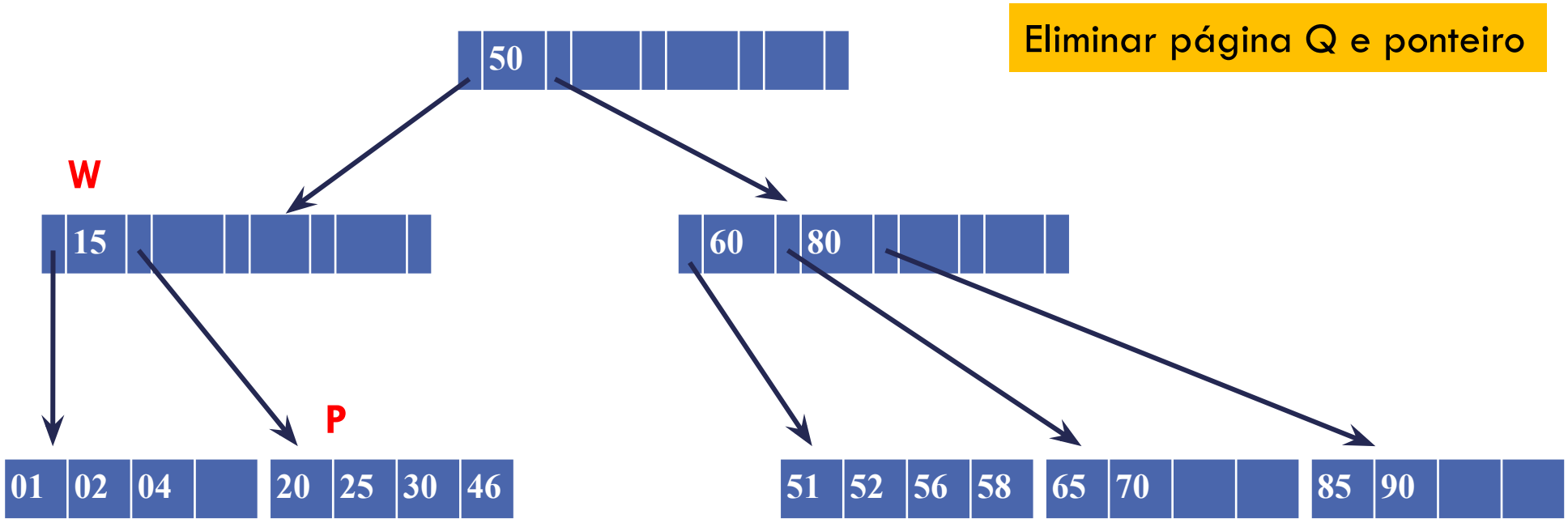
Transferir dados de Q para P

EXEMPLO: EXCLUSÃO DA CHAVE 40

Transferir chave que separa os ponteiros de P e Q em W para P

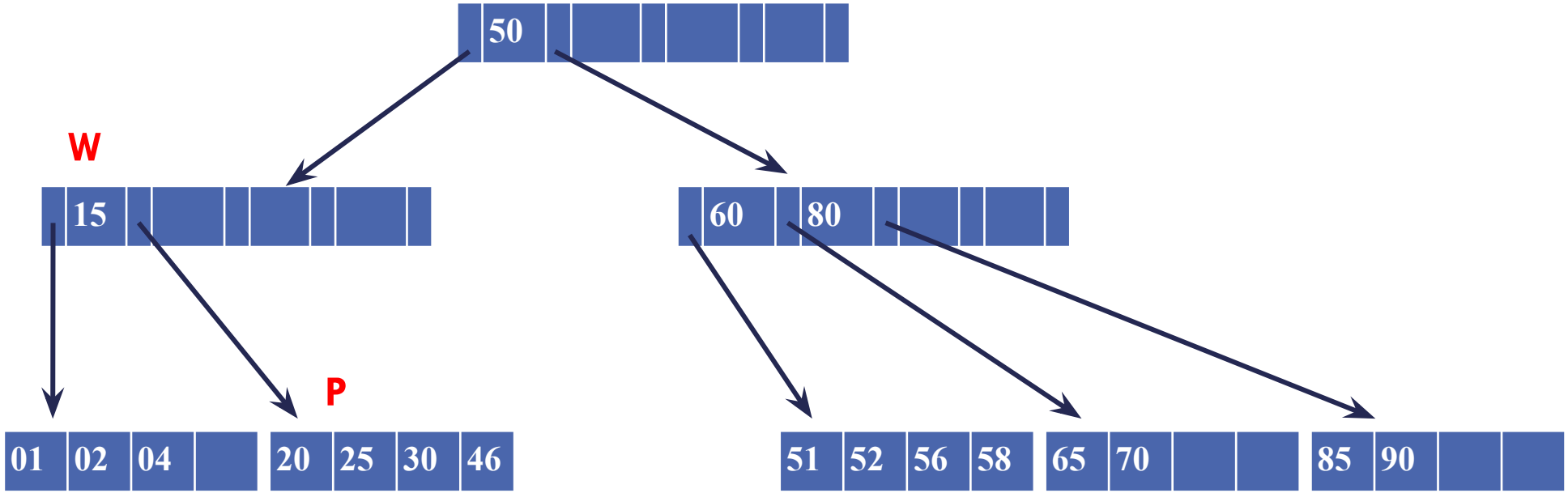


EXEMPLO: EXCLUSÃO DA CHAVE 40



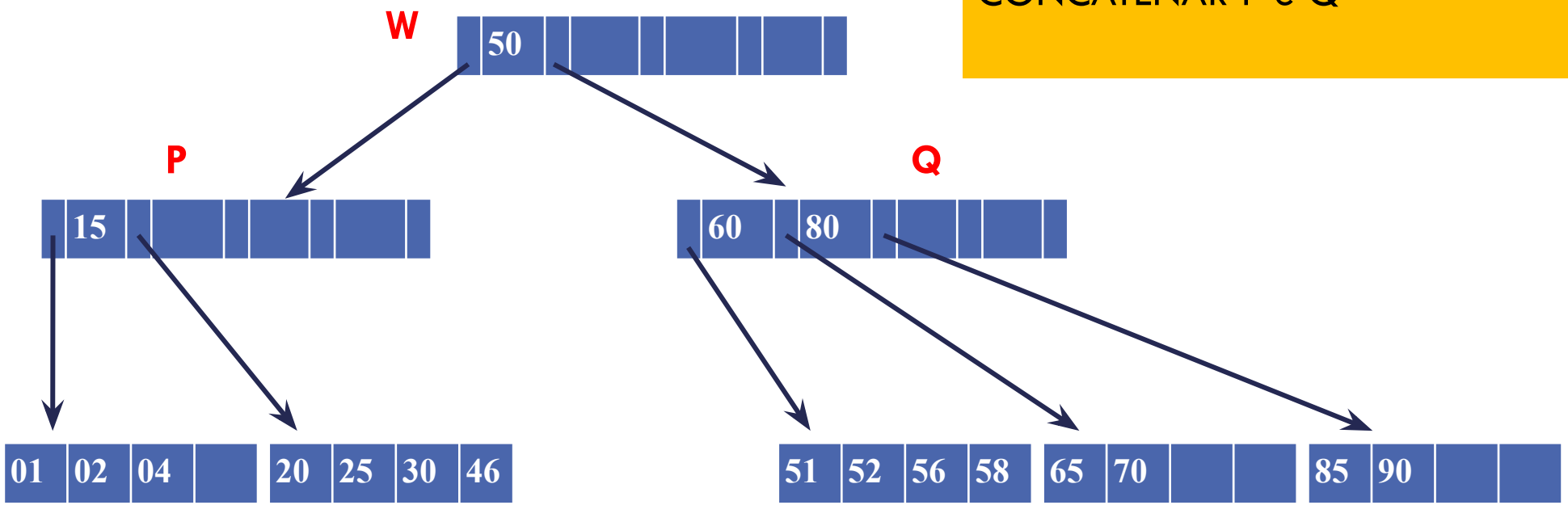
EXEMPLO: EXCLUSÃO DA CHAVE 40

Página W ficou com menos de d chaves
necessário propagar operação



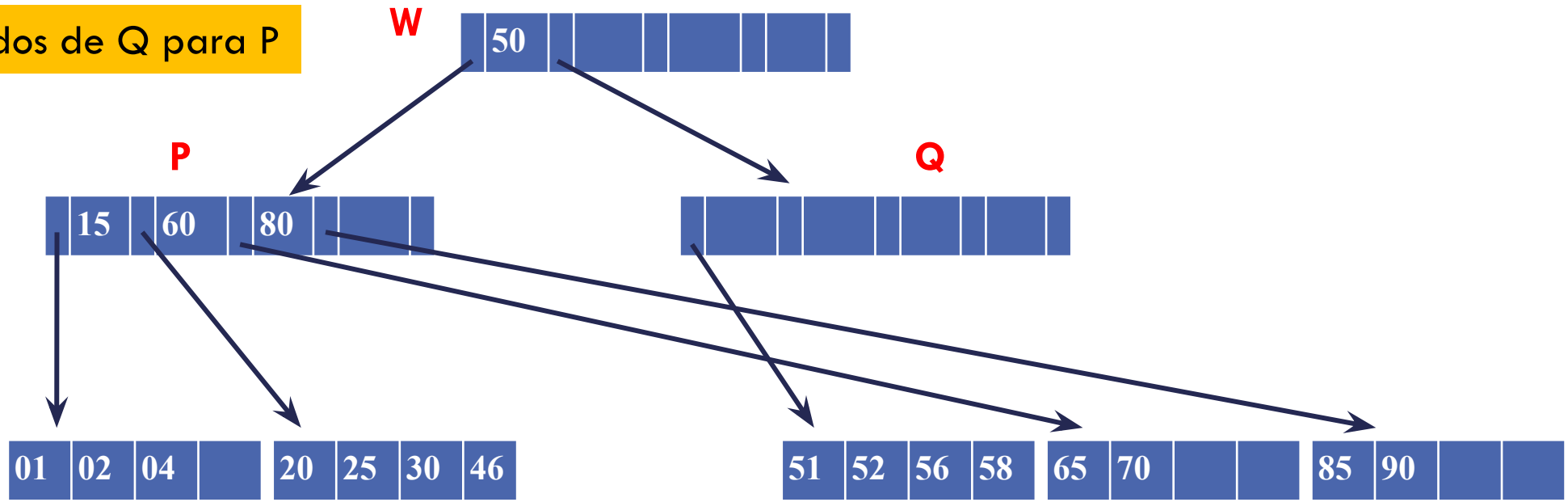
EXEMPLO: EXCLUSÃO DA CHAVE 40

Página P e Q são irmãs adjacentes
Soma de chaves de P e Q < 2d
CONCATENAR P e Q



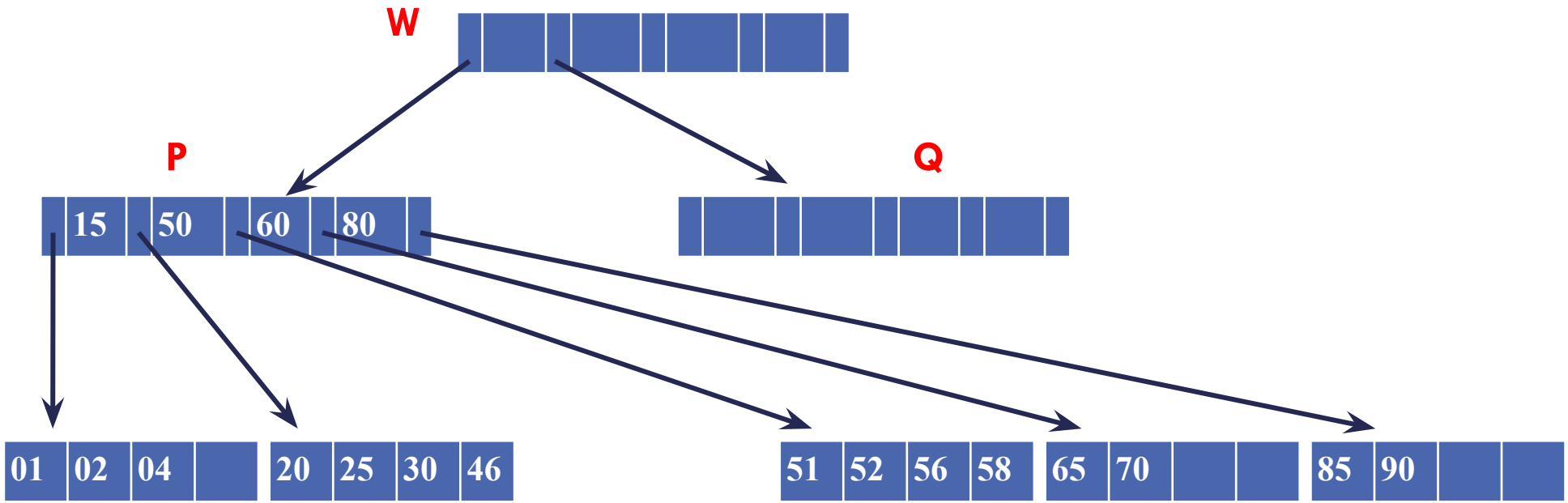
EXEMPLO: EXCLUSÃO DA CHAVE 40

Transferir dados de Q para P

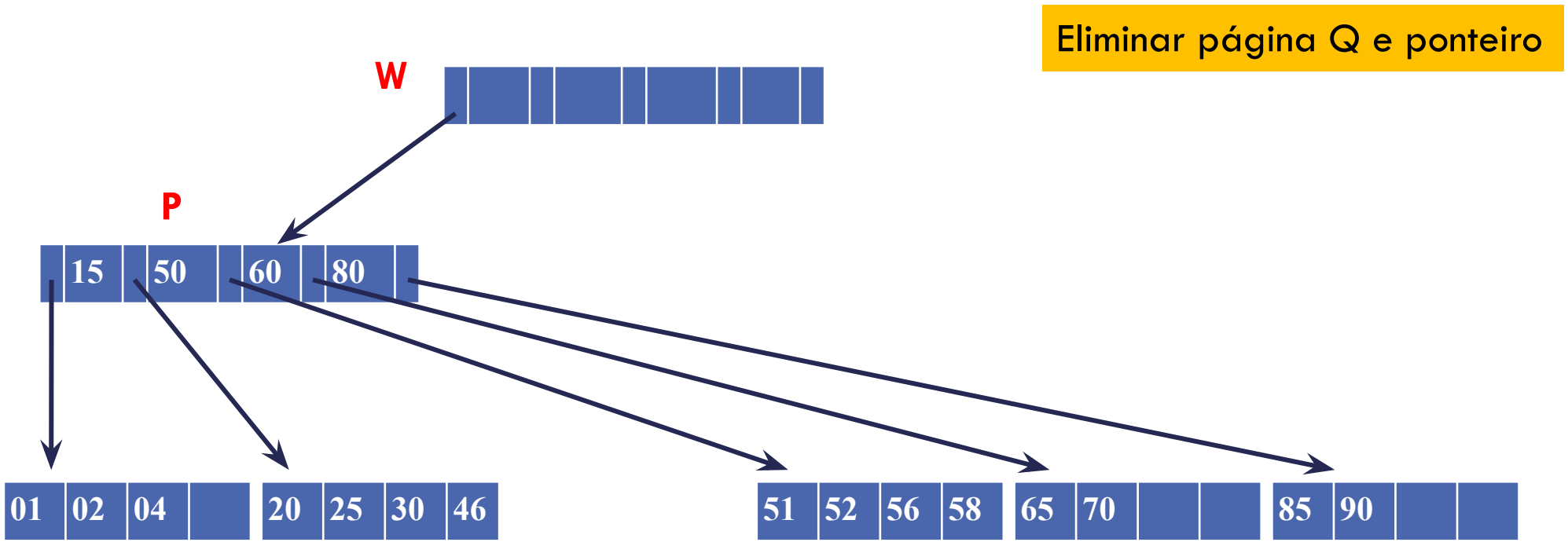


EXEMPLO: EXCLUSÃO DA CHAVE 40

Transferir chave que separa os ponteiros de P e Q em W para P

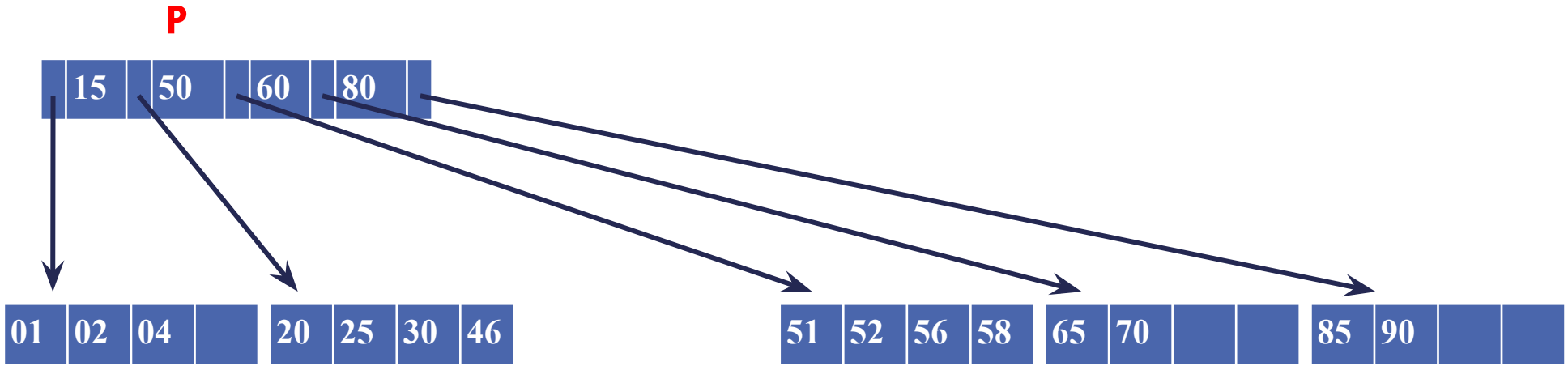


EXEMPLO: EXCLUSÃO DA CHAVE 40



EXEMPLO: EXCLUSÃO DA CHAVE 40

W ficou vazia e era a raiz: eliminá-la
P passa a ser a nova raiz



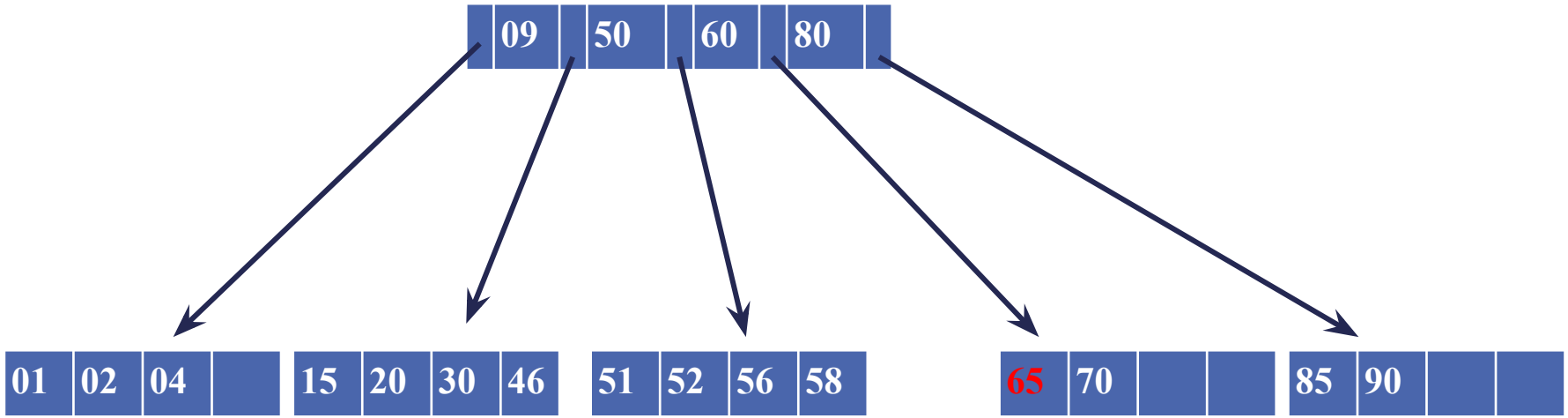
REDISTRIBUIÇÃO

Ocorre quando a soma das entradas de **P** e de seu irmão adjacente **Q** é maior ou igual a **2d**

Concatenar **P** e **Q**

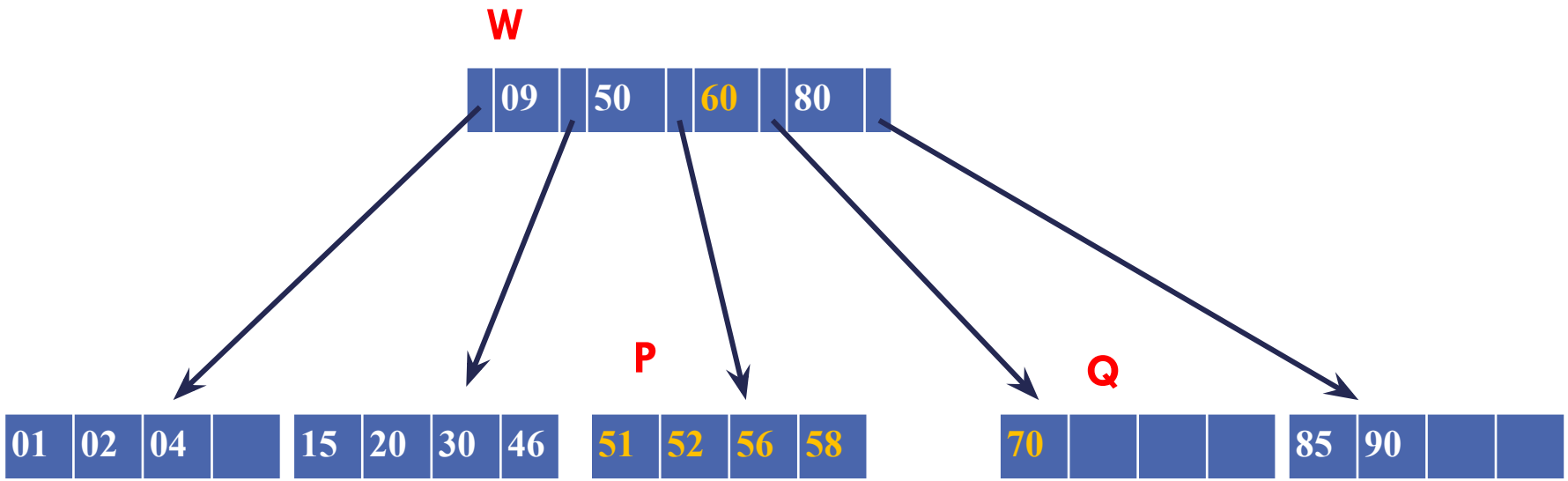
- Isso resulta em um nó **P** com mais de **2d** chaves, o que não é permitido
- Particionar o nó concatenado, usando **Q** como novo nó
- Essa operação não é propagável: o nó **W**, pai de **P** e **Q**, é alterado, mas seu número de chaves não é modificado

EXEMPLO: EXCLUSÃO DA CHAVE 65

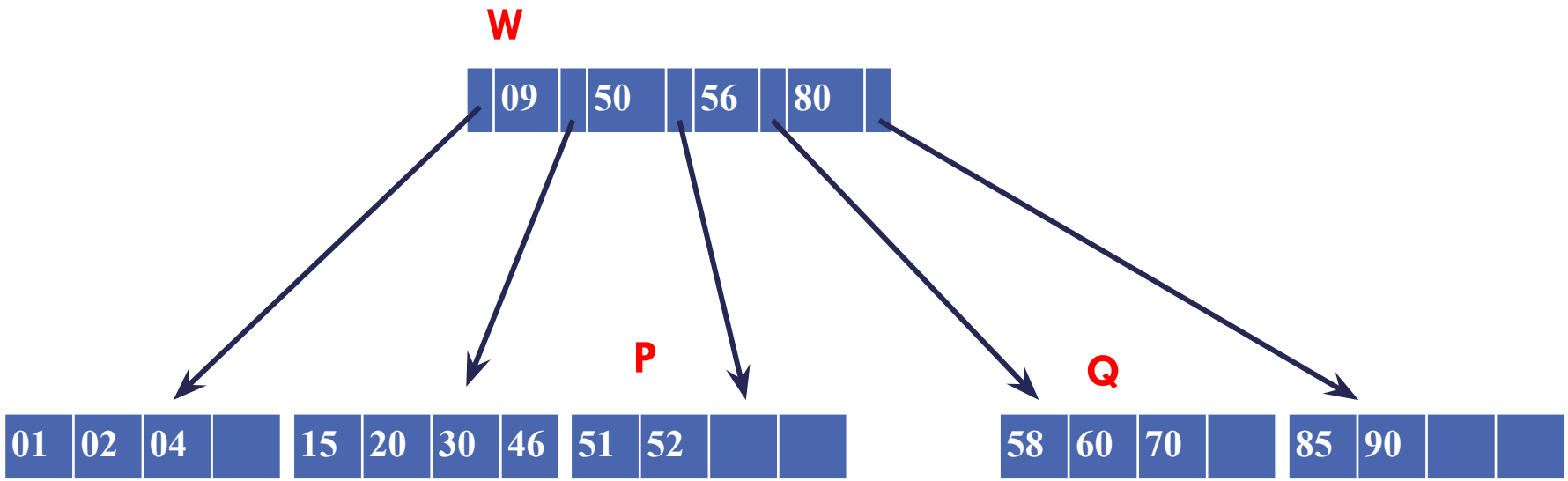


EXEMPLO: EXCLUSÃO DA CHAVE 65

Acomodar em P e Q as chaves:
51, 52, 56, 58, 60, 70
d chaves em P
chave **d+1** em W
Restante em Q



EXEMPLO: EXCLUSÃO DA CHAVE 65



E QUANDO AS DUAS ALTERNATIVAS SÃO POSSÍVEIS?

Quando for possível usar concatenação ou redistribuição (porque o nó possui 2 nós adjacentes, cada um levando a uma solução diferente), optar pela redistribuição

- Ela é menos custosa, pois não se propaga
- Ela evita que o nó fique cheio, deixando espaço para futuras inserções

EXERCÍCIO 2

Desenhar uma árvore B de ordem 3 que contenha as seguintes chaves: 8, 1, 6, 3, 14, 36, 32, 43, 39, 41, 38

Dica: começar com uma árvore B vazia e ir inserindo uma chave após a outra

Relembrando características de uma árvore B de ordem d

- A raiz é uma folha ou tem no mínimo 2 filhos
- Cada nó interno (não folha e não raiz) possui no mínimo d + 1 filhos
- Cada nó tem no máximo 2d + 1 filhos
- Todas as folhas estão no mesmo nível

EXERCÍCIO 3

Sobre a árvore resultante do exercício anterior, realizar as seguintes operações:

(a) Inserir as chaves 4, 5, 42, 2, 7

(b) Sobre o resultado do passo (a), excluir as chaves 14, 32

IMPLEMENTAÇÃO EM DISCO - BUSCA

1. Inicie lendo a raiz da árvore a partir do disco
2. Procure **x** dentro do nó lido (pode ser usada busca binária, pois as chaves estão ordenadas dentro do nó)
   a) Se encontrou, encerra a busca;
   b) Caso contrário, continue a busca, lendo o filho correspondente, a partir do disco
3. Continue a busca até que **x** tenha sido encontrado ou que a busca tenha sido feita em uma folha da árvore (retorna o último nó pesquisado – nó onde a chave está ou deveria estar)

IMPLEMENTAÇÃO ÁRVORE B EM DISCO

Um arquivo para guardar metadados, que contém

- A posição do nó raiz
- A posição do próximo nó livre do arquivo

Um arquivo para guardar os dados, estruturado em nós (ou páginas/blocos)

IMPLEMENTAÇÃO ÁRVORE B EM DISCO

No arquivo de dados, cada nó possui

- Inteiro representando o número de chaves (**m**) armazenadas no nó
- A posição do nó pai
- Array de m+1 ponteiros para os nós filho
- Array de m registros

CONSIDERAÇÕES SOBRE IMPLEMENTAÇÃO

No lugar dos ponteiros utilizamos **números inteiros** que representam a posição no arquivo em disco onde o nó começa

- usado para fazer **fseek**

A cada vez que for necessário manipular um nó:

- fazer fseek para o nó desejado
- ler o nó todo para a memória, e manipulá-lo em memória
- depois, gravar o nó todo de volta no disco (caso ele tenha sido alterado)

EXEMPLO

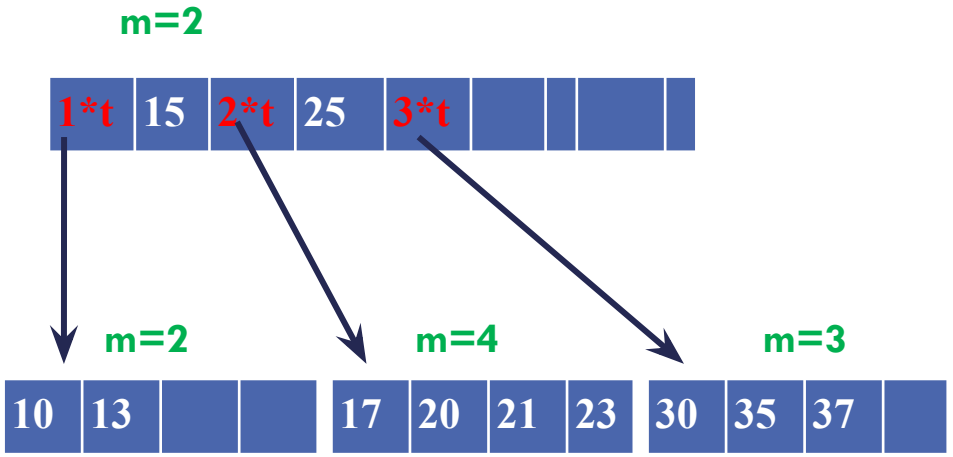
ordem d = 2

Valores em branco: chave do registro

Valores em vermelho: valor do ponteiro

t é o tamanho do nó no Arquivo de dados

Os demais dados do registro não estão representados na figura, para simplificar (apenas as chaves estão representadas)



REFERÊNCIA

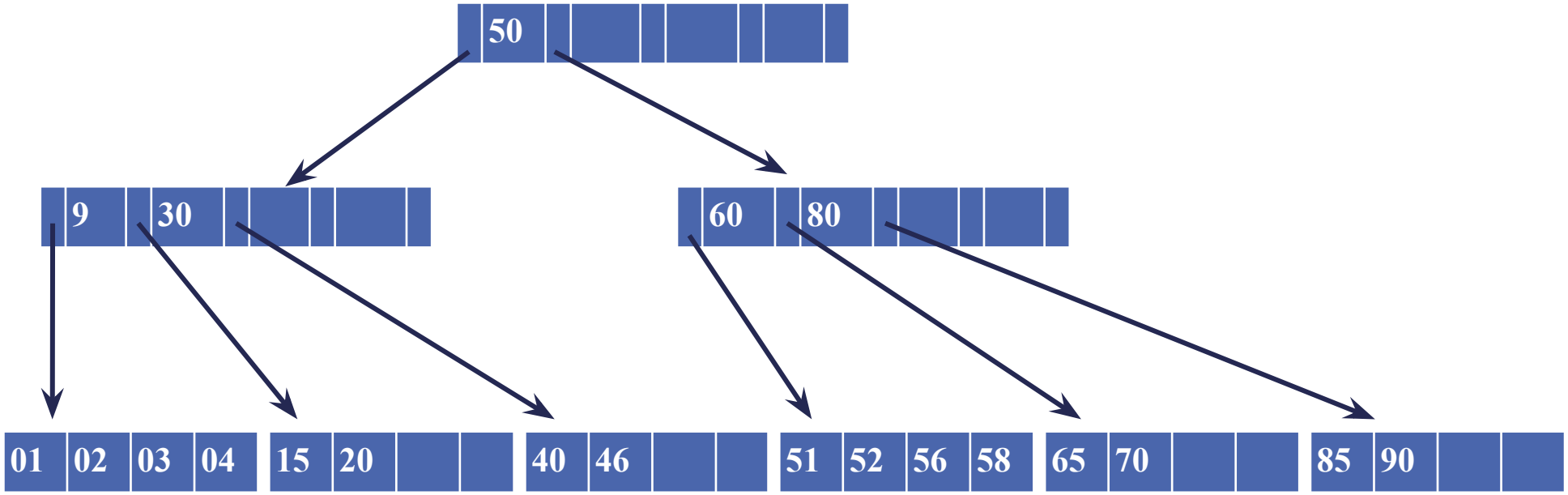
Szwarcfiter, J.; Markezon, L. Estruturas de Dados e seus Algoritmos, 3a. ed. LTC. Cap. 5

AGRADECIMENTOS

Exemplo cedido por Renata Galante

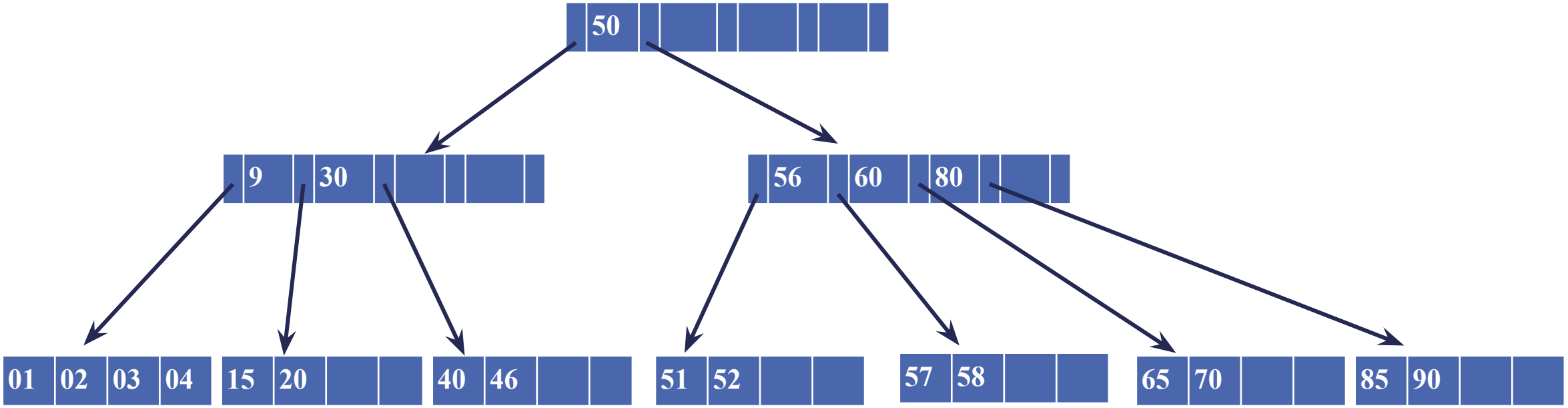
RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

EXERCÍCIO 1: INSERIR CHAVES 57, 71, 72, 73

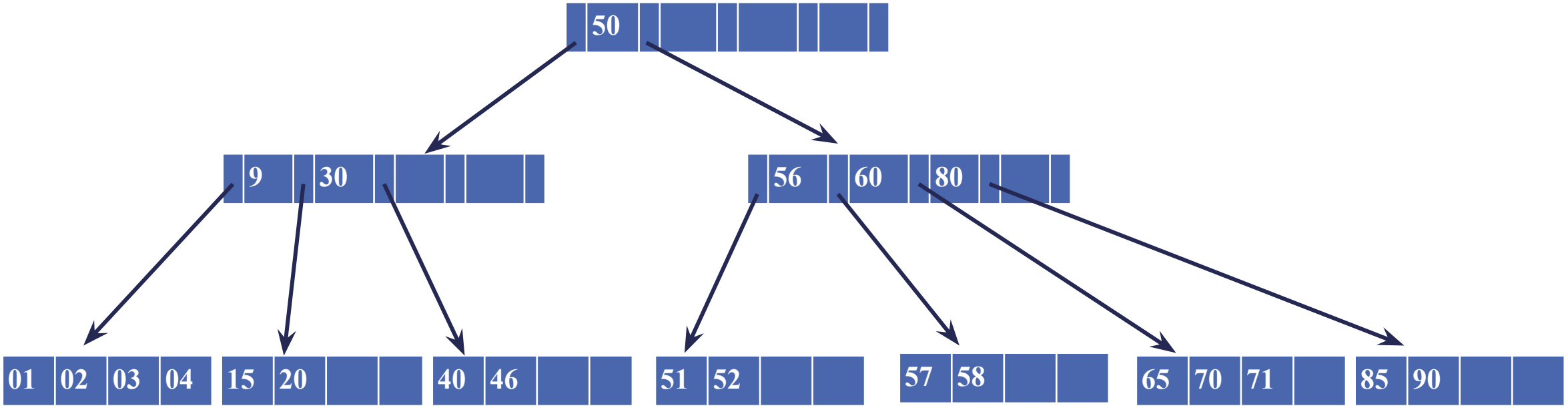


Atenção: os ponteiros dos nós folha foram omitidos por questões de legibilidade da figura.

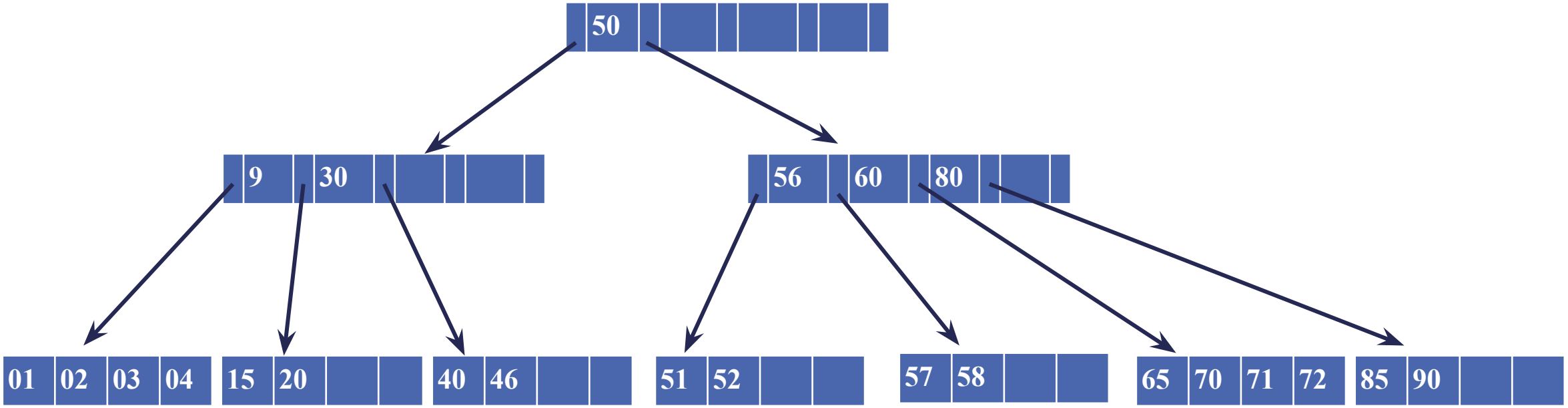
INSERÇÃO DE 57



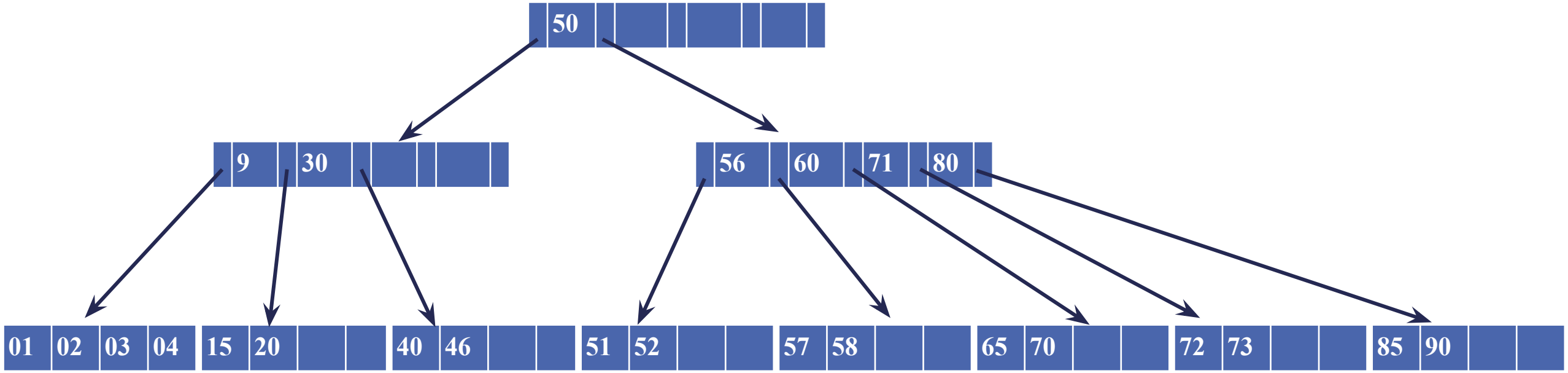
INSERÇÃO DE 71



INSERÇÃO DE 72



INSERÇÃO DE 73



EXERCÍCIO 2

Desenhar uma árvore B de ordem 3 que contenha as seguintes chaves: 8, 1, 6, 3, 14, 36, 32, 43, 39, 41, 38

Dica: começar com uma árvore B vazia e ir inserindo uma chave após a outra

Relembrando características de uma árvore B de ordem d

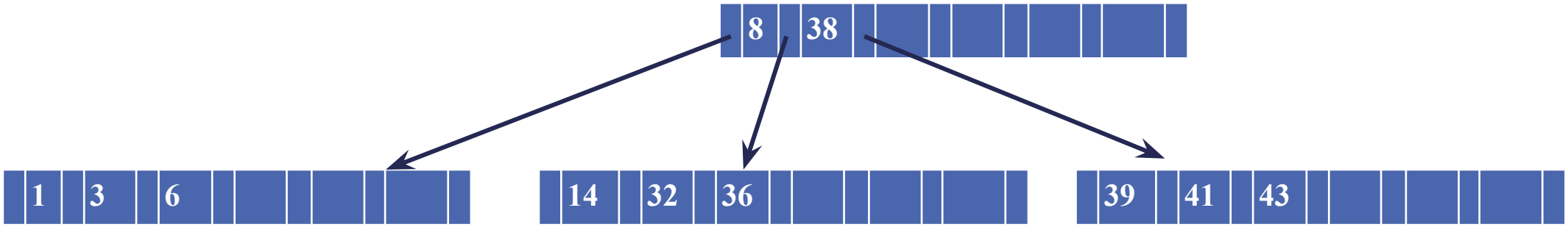
- A raiz é uma folha ou tem no mínimo 2 filhos
- Cada nó interno (não folha e não raiz) possui no mínimo d + 1 filhos
- Cada nó tem no máximo 2d + 1 filhos
- Todas as folhas estão no mesmo nível

RESPOSTA

Desenhar uma árvore B de ordem 3 que contenha as seguintes chaves: 1, 3, 6, 8, 14, 32, 36, 38, 39, 41, 43

Como d = 3:

- Cada nó tem no máximo 6 chaves
- Cada nó tem no máximo 7 filhos



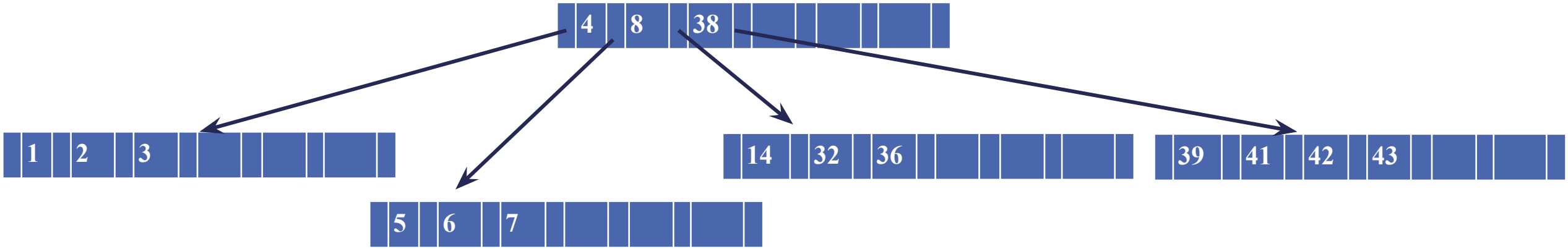
EXERCÍCIO 3

Sobre a árvore resultante do exercício anterior, realizar as seguintes operações:

(a) Inserir as chaves 4, 5, 42, 2, 7

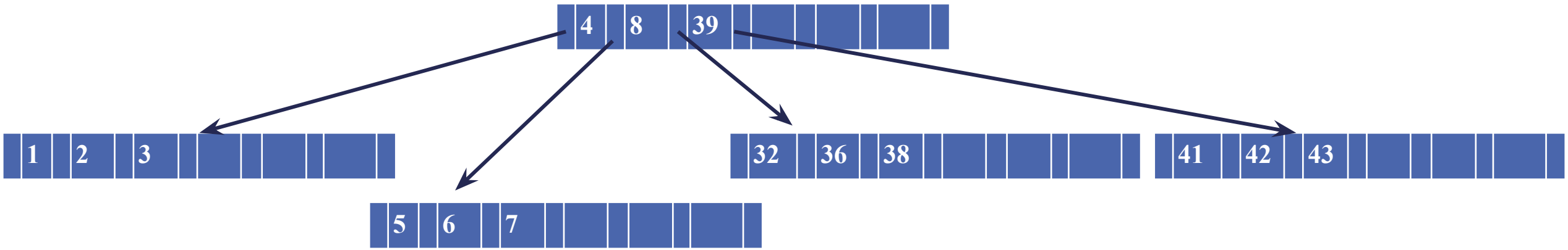
(b) Sobre o resultado do passo (a), excluir as chaves 14, 32

RESPOSTA (A) – INSERÇÃO DE 4, 5, 42, 2, 7



RESPOSTA (B) – EXCLUSÃO DE 14

É possível fazer redistribuição



RESPOSTA (B) – EXCLUSÃO DE 32

É necessário fazer concatenação