

# ÁRVORE B+

Profa. Taiane C. Ramos  
Estruturas de Dados e Seus  
Algoritmos  
Turma de Verão 2023

# ÁRVORES B+

Similar a árvore B:

- Armazena dados somente nas folhas
- As folhas são encadeadas

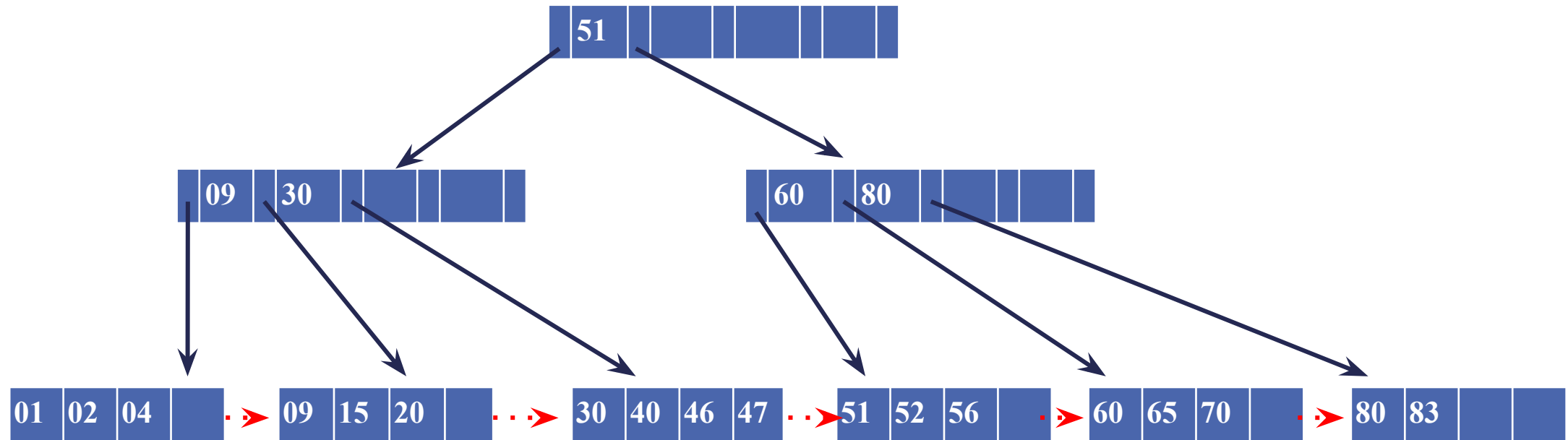
Índices e dados podem ser armazenados em arquivos diferentes

# ÁRVORE B+ NA PRÁTICA

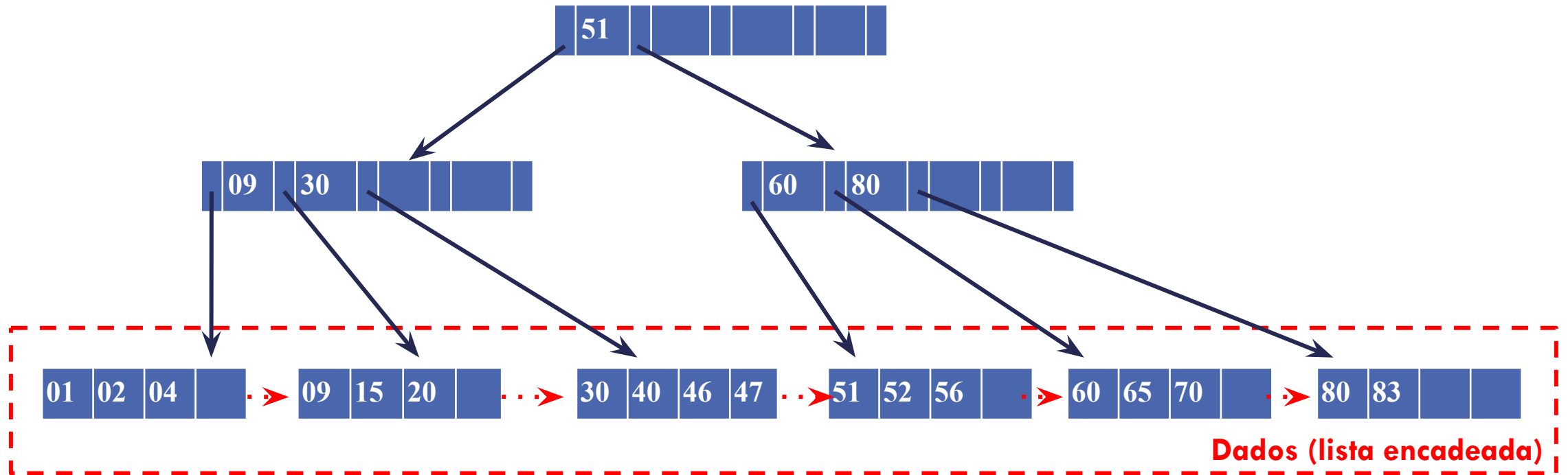
Muito usadas no mercado:

- ❑ Sistemas de arquivos
- ❑ Sistemas de Gerenciamento de Banco de Dados

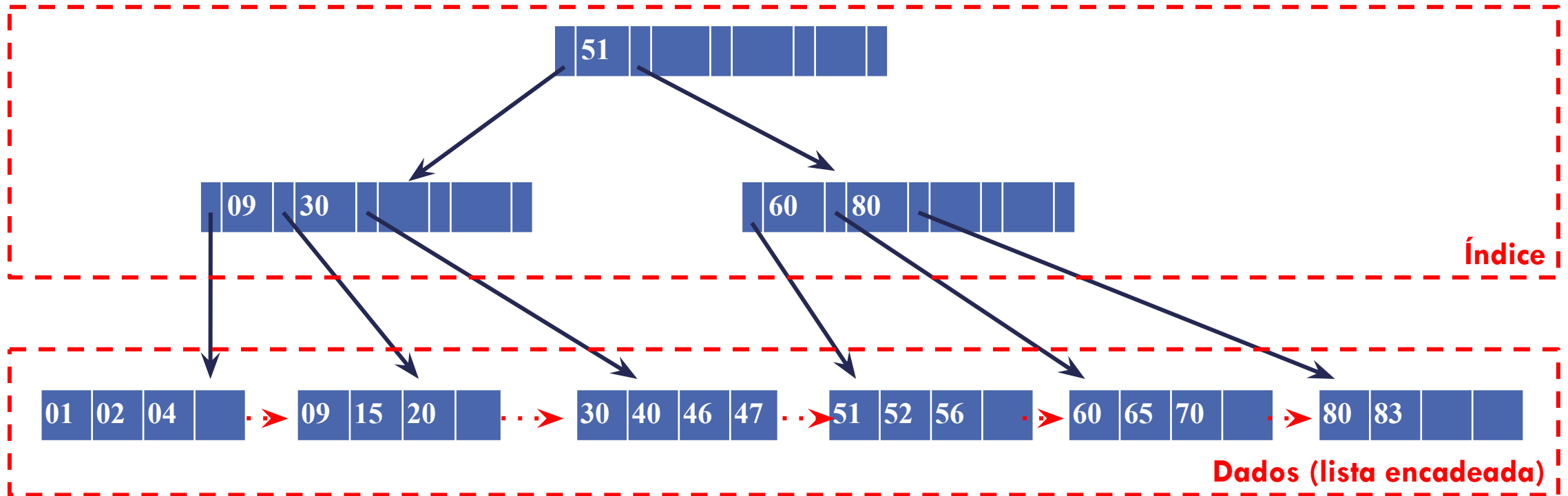
# EXEMPLO DE ÁRVORE B+ DE ORDEM D = 2



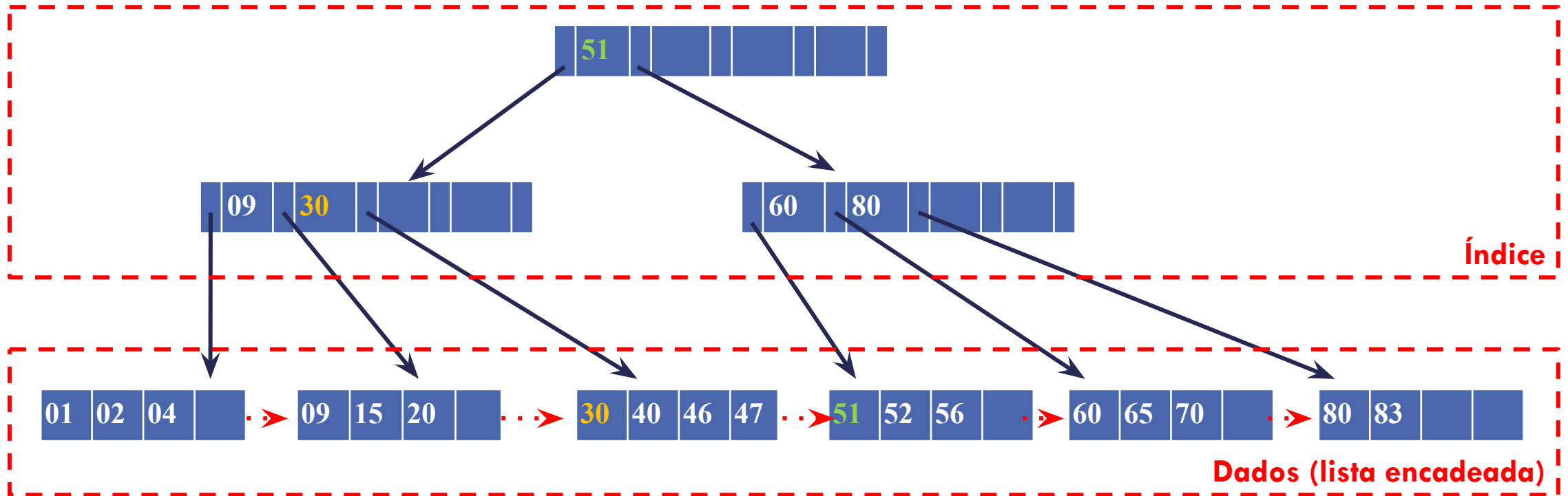
# EXEMPLO DE ÁRVORE B+ DE ORDEM $D = 2$



# EXEMPLO DE ÁRVORE B+ DE ORDEM $D = 2$



# EXEMPLO DE ÁRVORE B+ DE ORDEM D = 2



## IMPORTANTE:

- Índices **repetem valores** de chave que aparecem nas folhas (Podem existir índices com valores de chaves que não existem nos dados)

# BUSCA

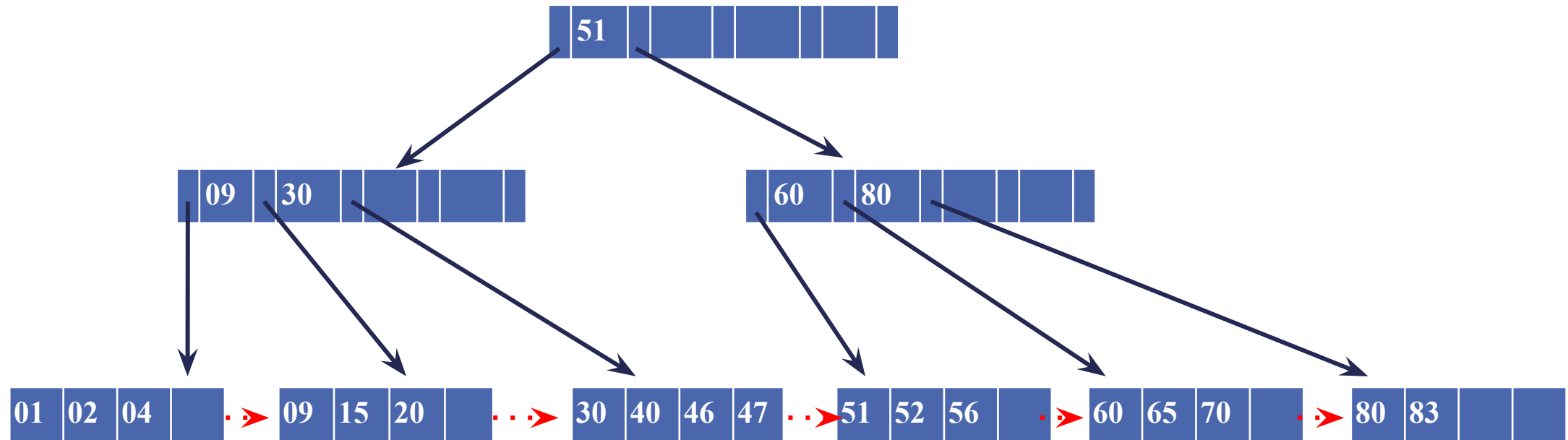
Só se pode ter certeza de que o registro foi encontrado quando se chega em uma folha

Notar que comparações agora devem considerar a igualdade também

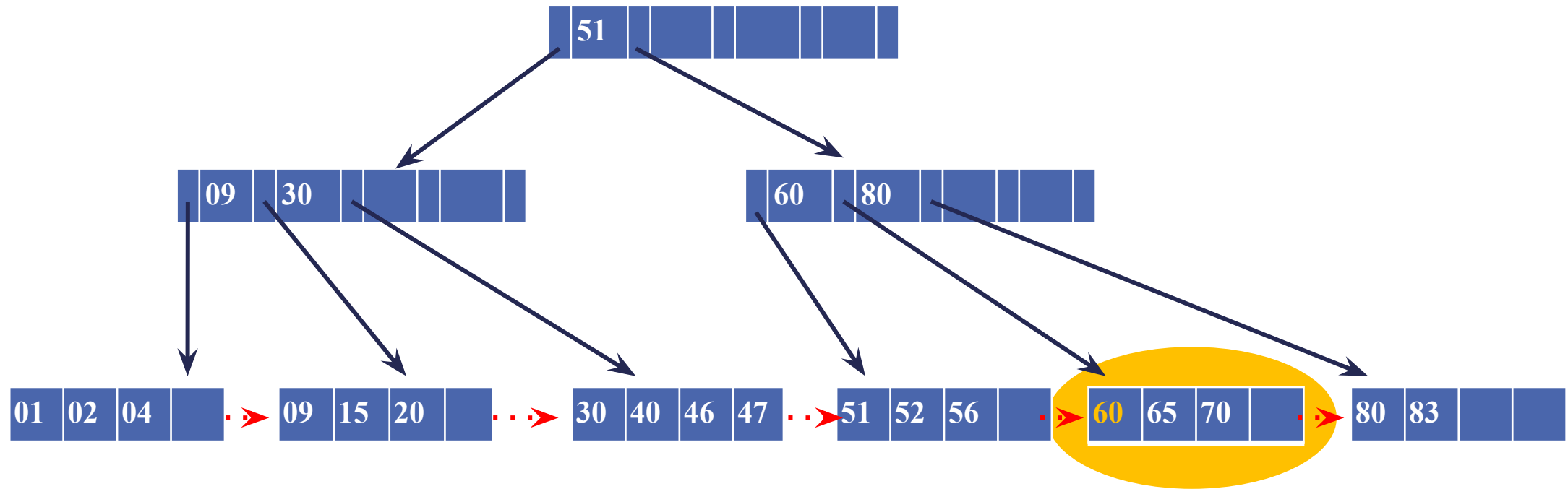
- Chave **maior** que a buscada, desce pela esquerda
- Chave **igual** à buscada ou chegou ao fim da lista, desce pela direita



# EXEMPLO: BUSCA DE 60



# EXEMPLO: BUSCA DE 60



# INSERÇÃO

Particionamento do nó folha:

- Copia a chave de  $d+1$  pro pai e mantém o registro  $d+1$  inteiro na folha.

Particionamento do nó interno:

- Igual árvore B

# EXEMPLO DE INSERÇÃO EM ÁRVORE

B+

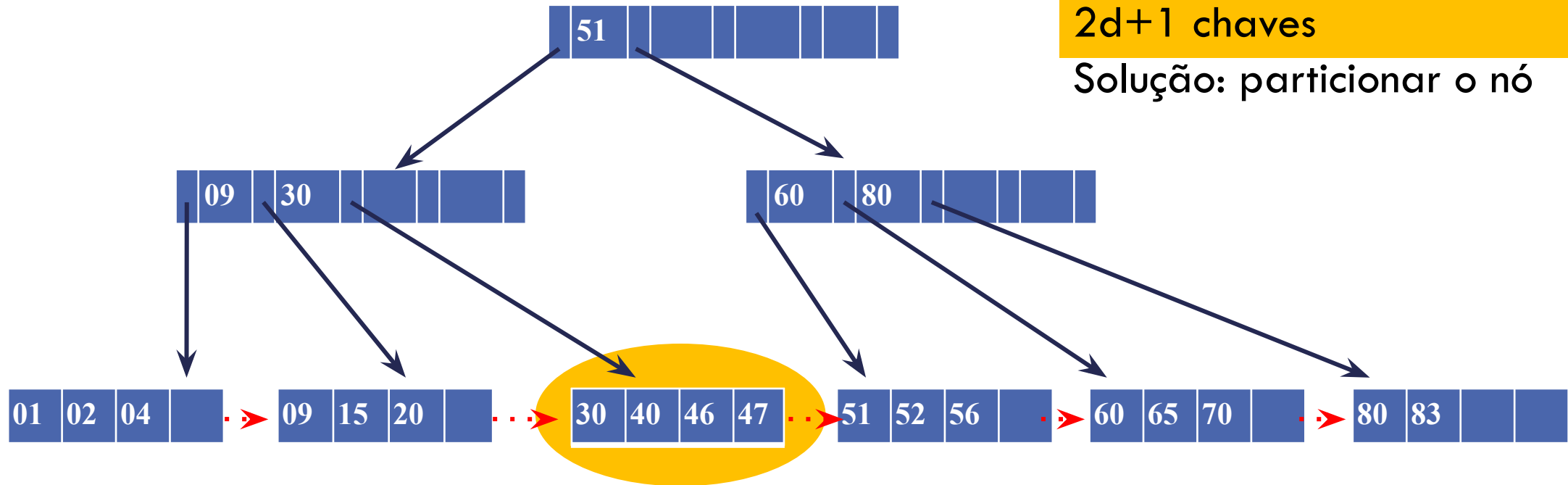
ordem  $d = 2$

## INSERIR CHAVE 32

Inserir chave 32

Inserção faria página ficar com  $2d+1$  chaves

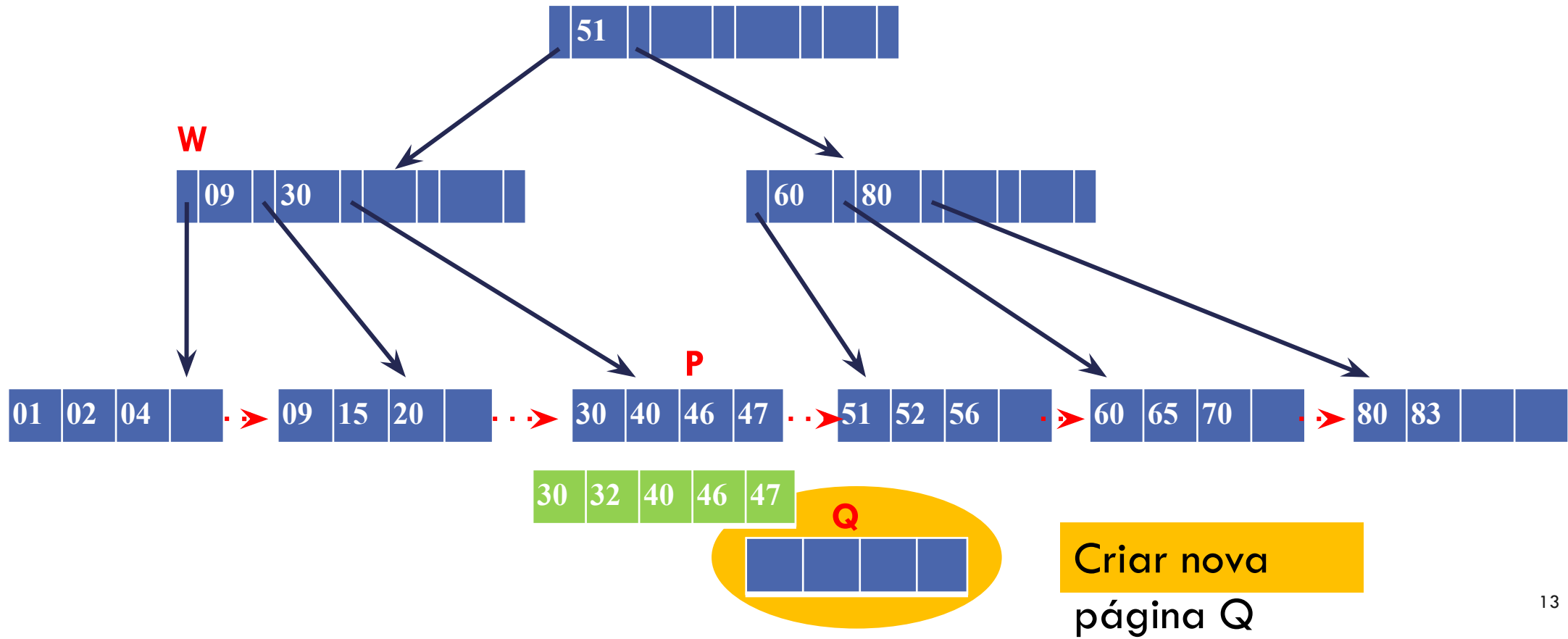
Solução: particionar o nó



# EXEMPLO DE INSERÇÃO EM ÁRVORE B+

## INSERIR CHAVE 32

ordem  $d = 2$



# EXEMPLO DE INSERÇÃO EM ÁRVORE

B+

## INSERIR CHAVE

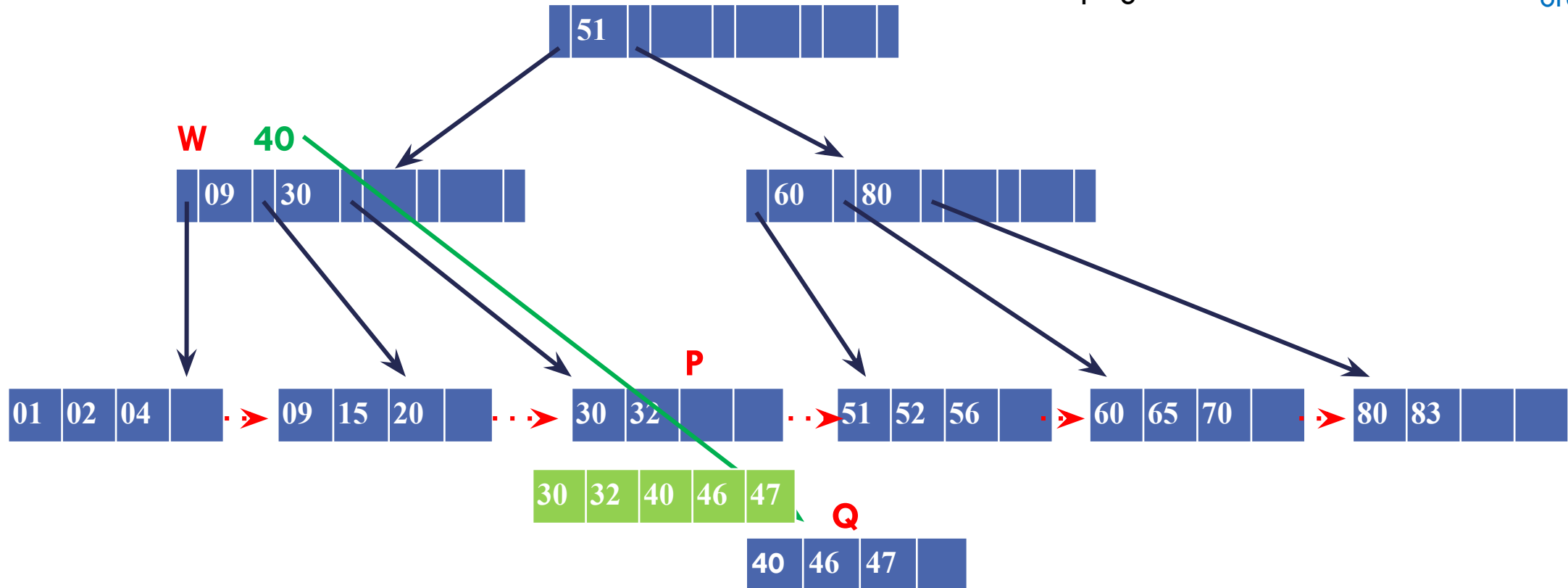
Dividir as chaves entre as duas páginas (30; 32; 40; 46; 47)

d chaves na página original P

chave d+1 sobe para nó pai W (**mas registro é mantido na nova página**)

d+1 chaves restantes na nova página Q

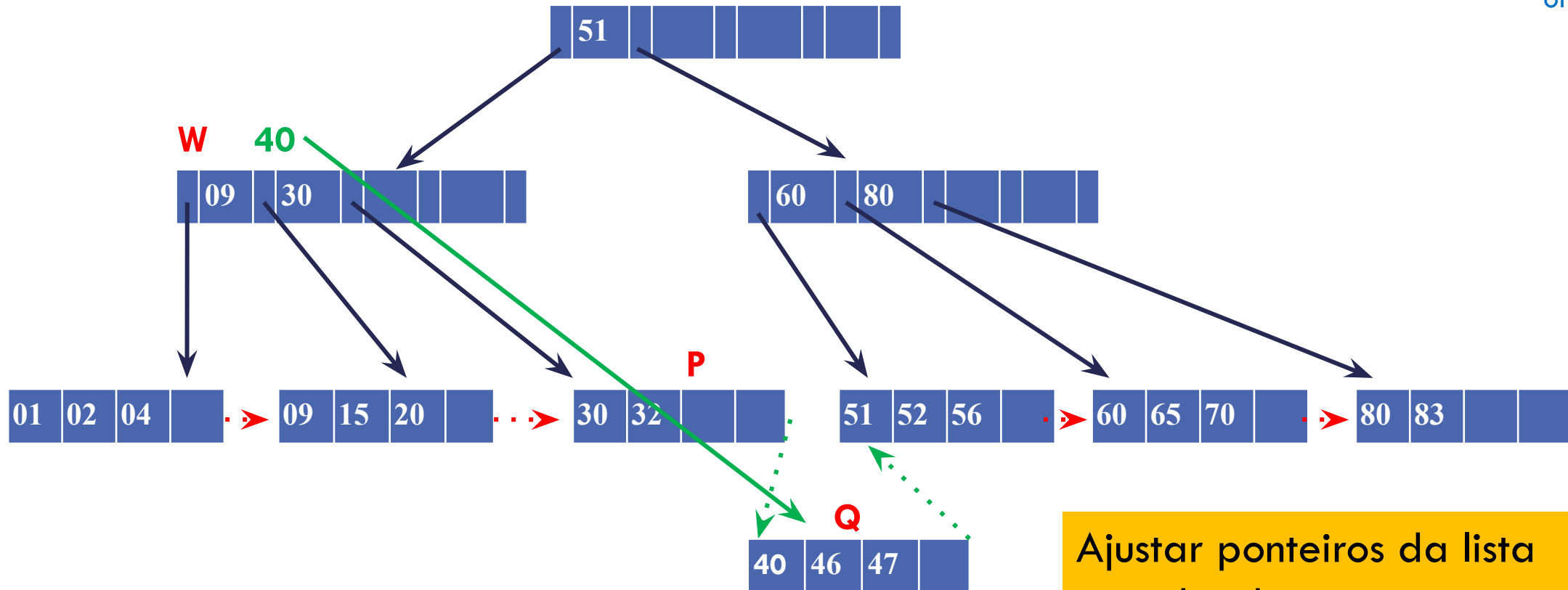
ordem  $d = 2$



# EXEMPLO DE INSERÇÃO EM ÁRVORE B+

## INSERIR CHAVE 32

ordem  $d = 2$



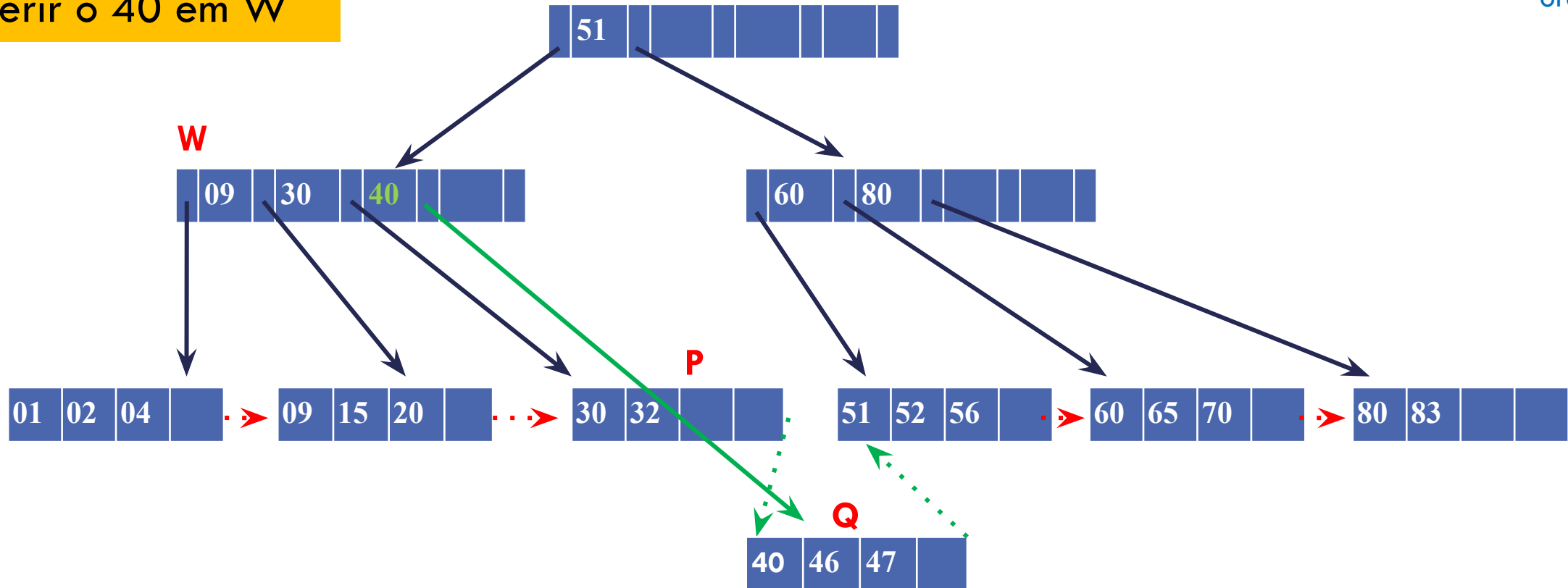
Ajustar ponteiros da lista encadeada

# EXEMPLO DE INSERÇÃO EM ÁRVORE B+

## INSERIR CHAVE 32

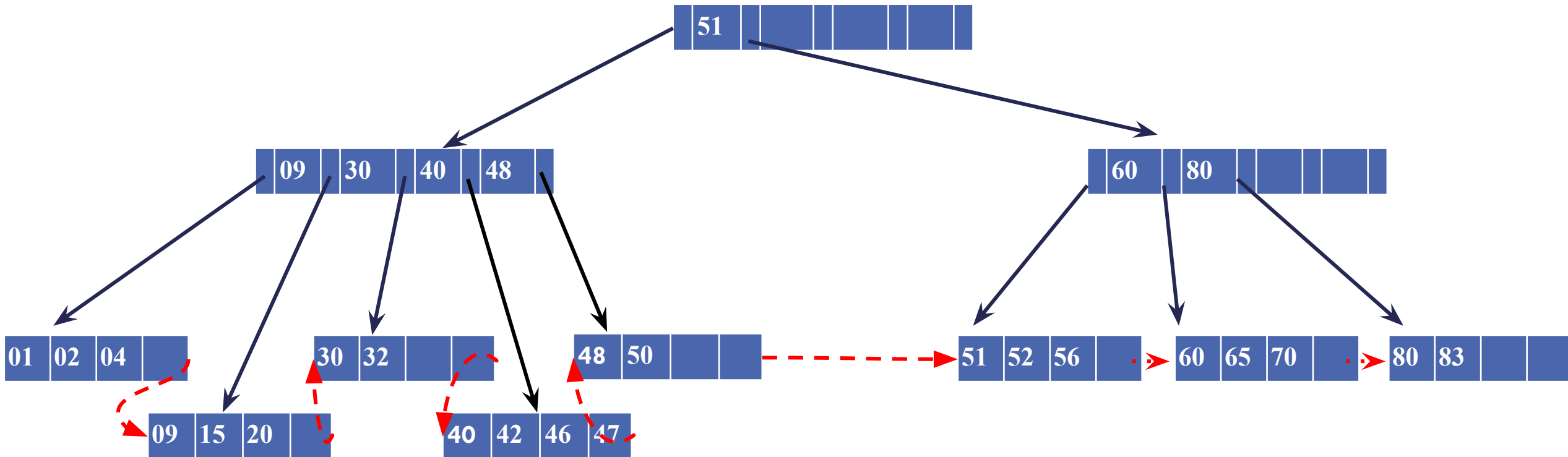
Inserir o 40 em W

ordem  $d = 2$





# EXEMPLO DE INSERÇÃO COM PARTICIONAMENTO DE NÓ INTERNO: INSERIR CHAVE 44

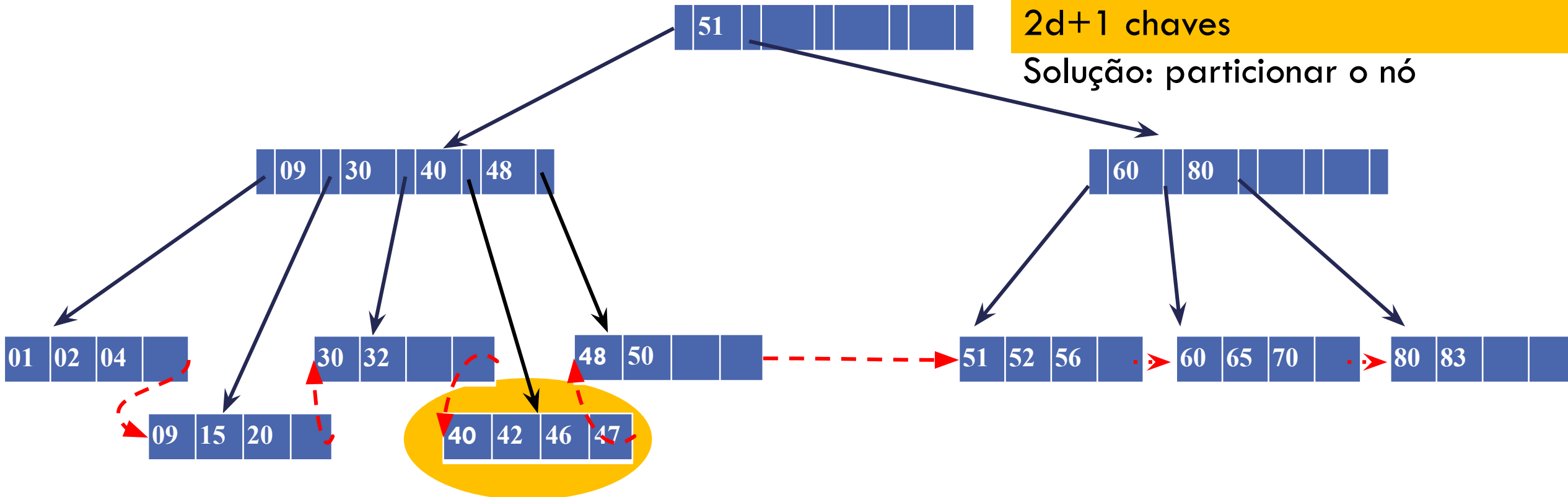


# EXEMPLO DE INSERÇÃO COM PARTICIONAMENTO DE NÓ INTERNO: INSERIR CHAVE 44

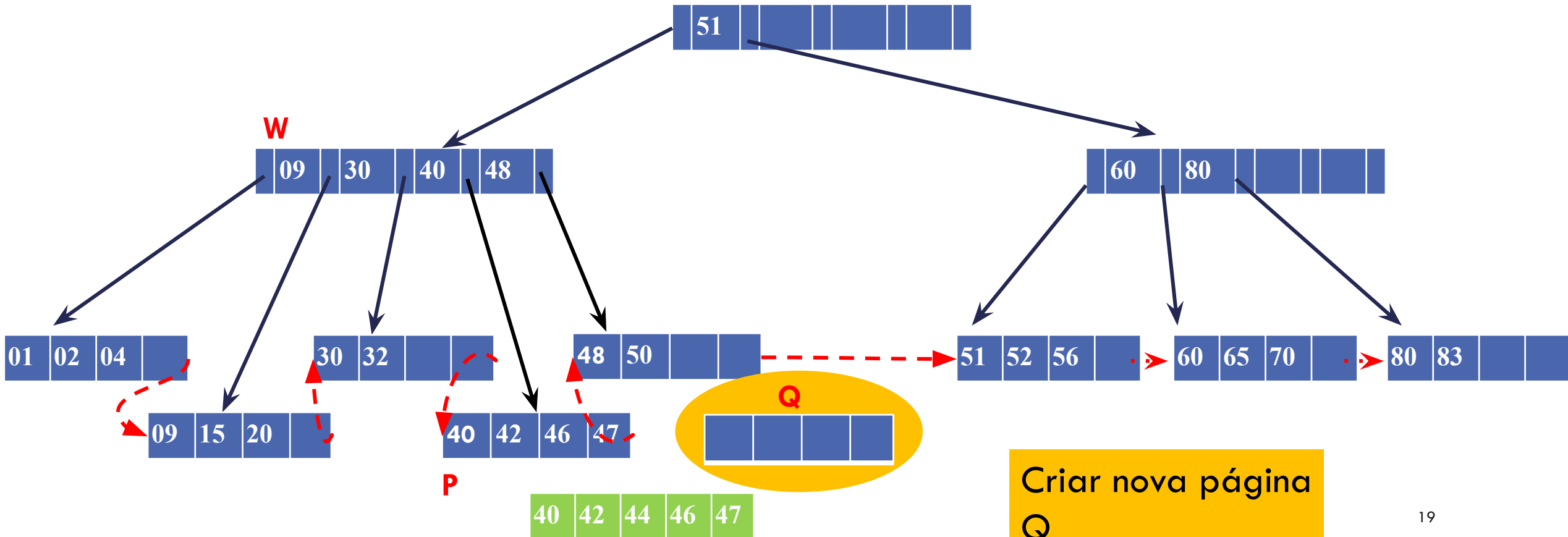
Inserir chave 44

Inserção faria página ficar com  $2d+1$  chaves

Solução: particionar o nó

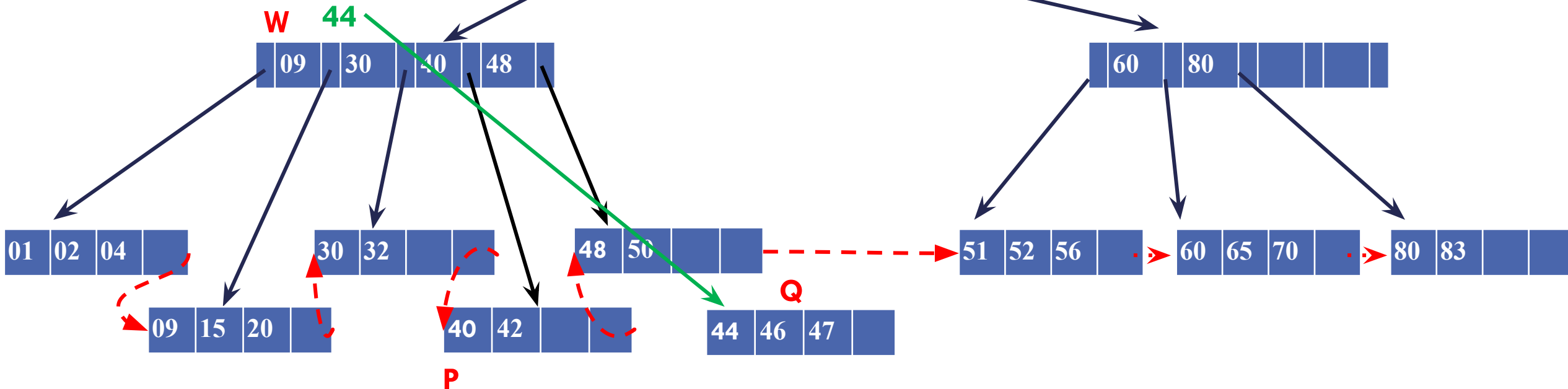


# EXEMPLO DE INSERÇÃO COM PARTICIONAMENTO DE NÓ INTERNO: INSERIR CHAVE 44

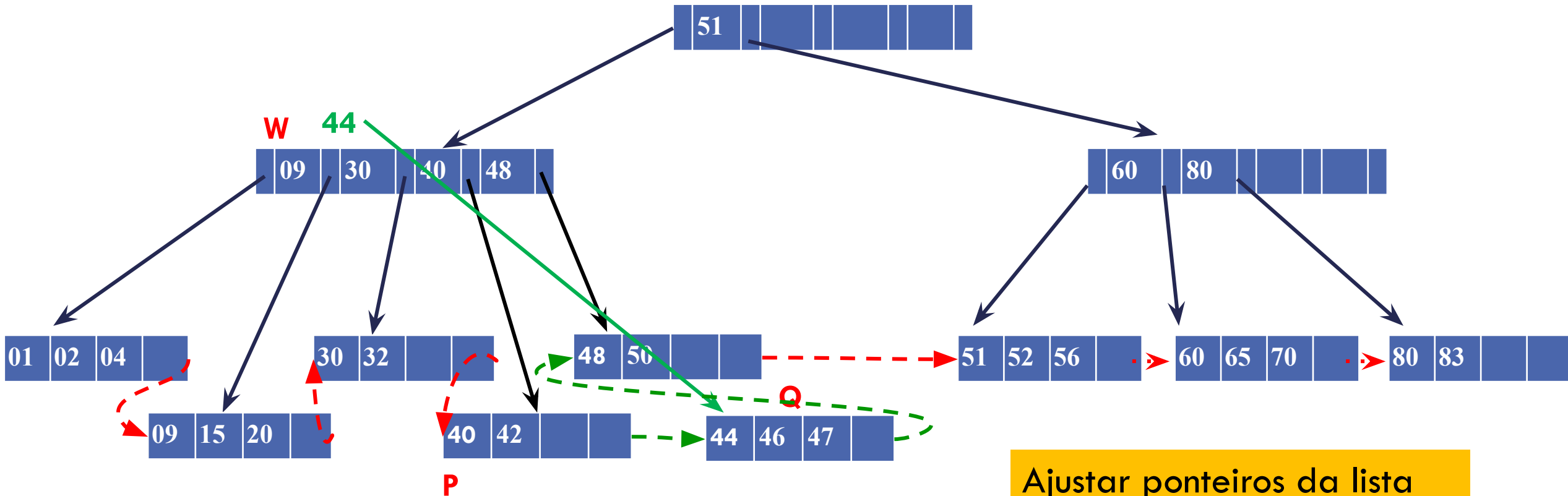


# EXEMPLO DE INSERÇÃO COM PARTICIONAMENTO DE NÓ INTERNO: INSERIR CHAVE 44

Dividir as chaves entre as duas páginas (40; 42; 44; 46; 47)  
 $d$  chaves na página original  $P$   
 chave  $d+1$  sobe para nó pai  $W$  (**mas registro é mantido na nova página**)  
 $d+1$  chaves restantes na nova página  $Q$



# EXEMPLO DE INSERÇÃO COM PARTICIONAMENTO DE NÓ INTERNO: INSERIR CHAVE 44

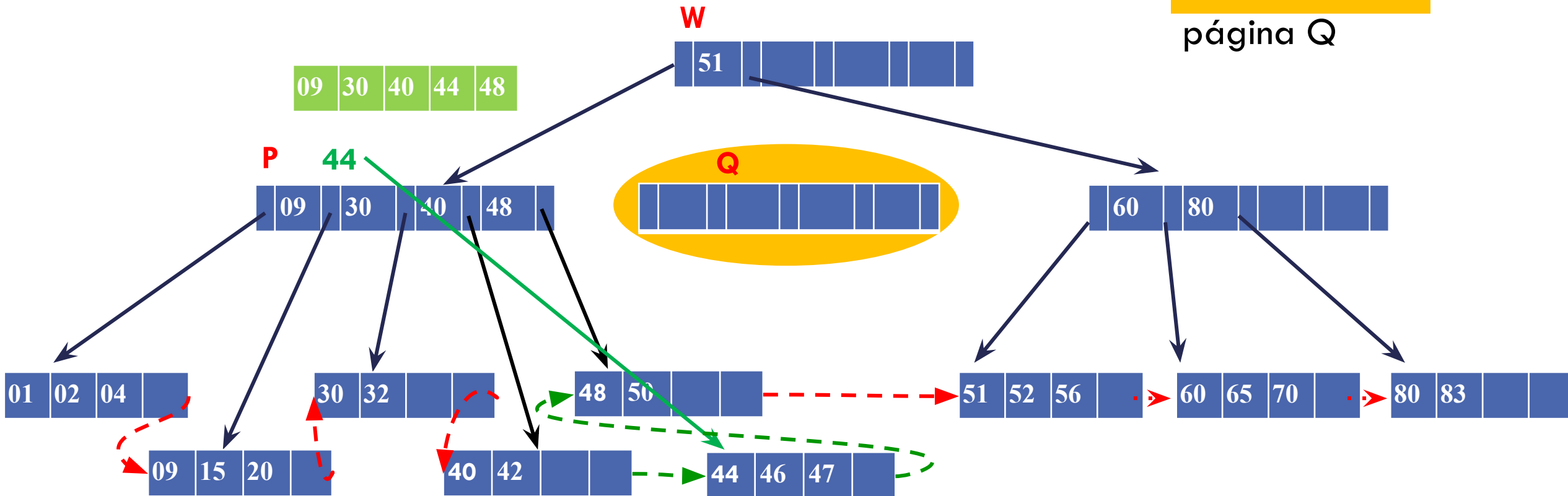


Ajustar ponteiros da lista  
encadeada



# EXEMPLO DE INSERÇÃO COM PARTICIONAMENTO DE NÓ INTERNO: INSERIR CHAVE 44

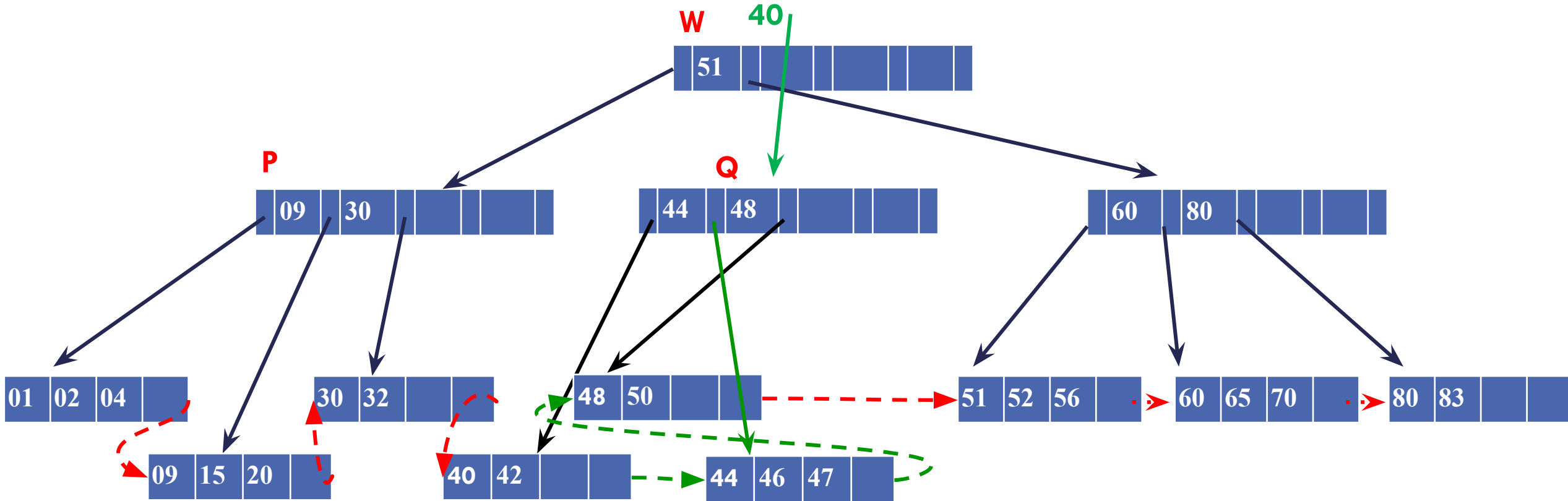
Criar nova  
página Q



Dividir as chaves entre as duas páginas (09; 30; 40; 44; 48)  
 $d$  chaves na página original P  
 chave  $d+1$  sobe para nó pai W  
 chaves  $d+2$  em diante na nova página Q

CAÇÃO COM  
 O DE NÓ

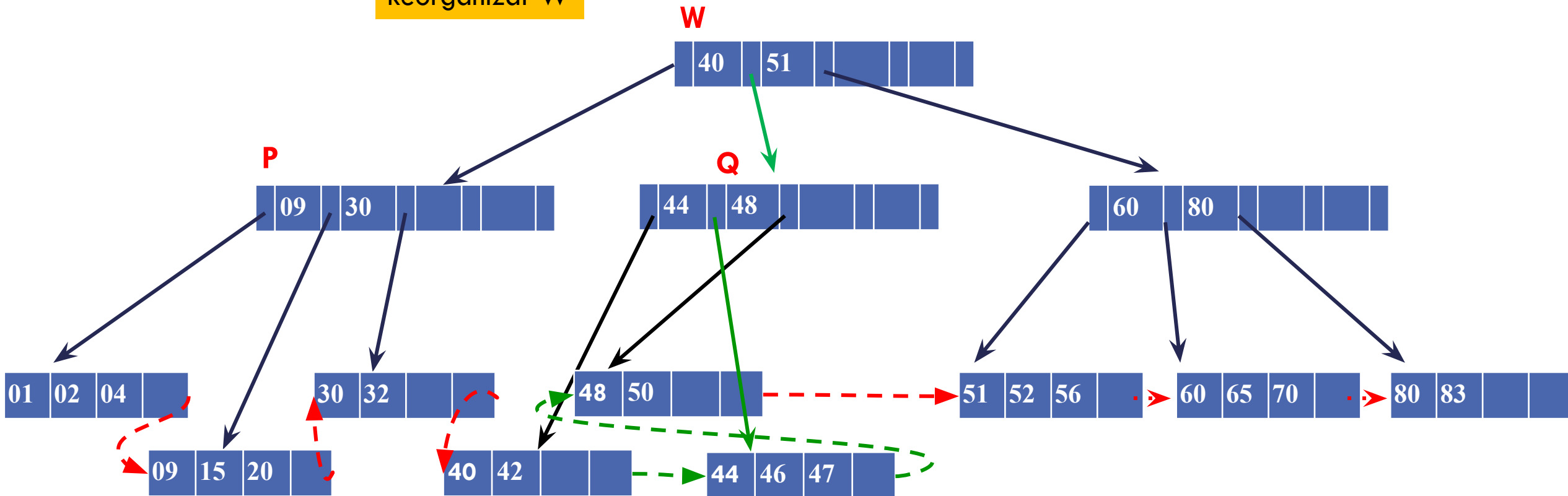
# INTERNO: INSERIR CHAVE 44





# EXEMPLO DE INSERÇÃO COM PARTICIONAMENTO DE NÓ INTERNO: INSERIR CHAVE 44

Reorganizar W



# EXCLUSÃO

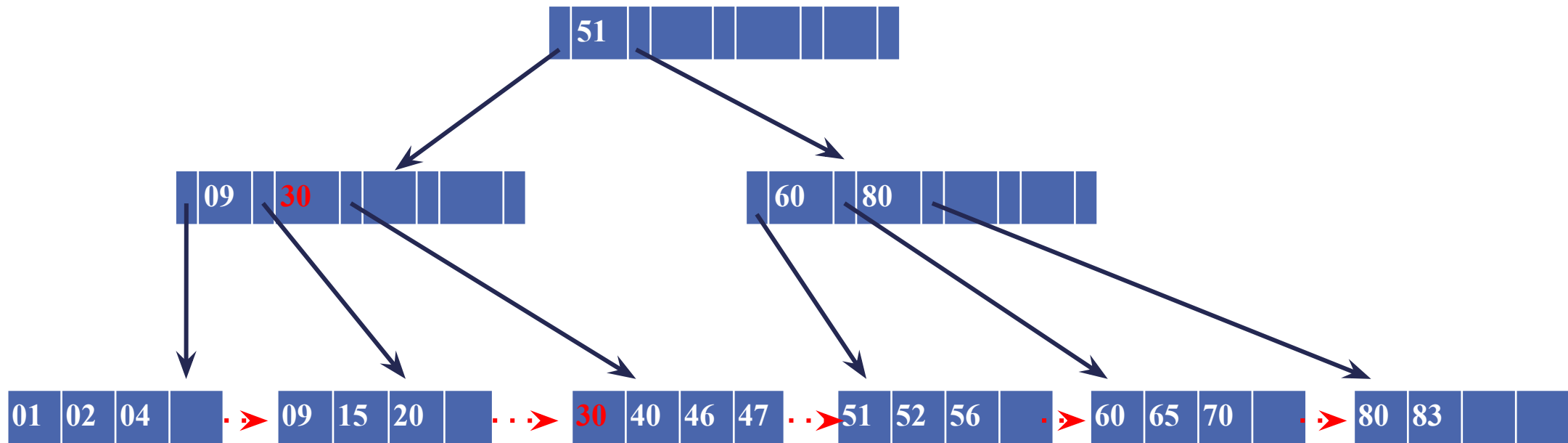
Excluir apenas no nó folha

Chaves excluídas continuam nos nós intermediários

# EXEMPLO DE EXCLUSÃO EM ÁRVORE B+

## EXCLUIR CHAVE 30

ordem  $d = 2$

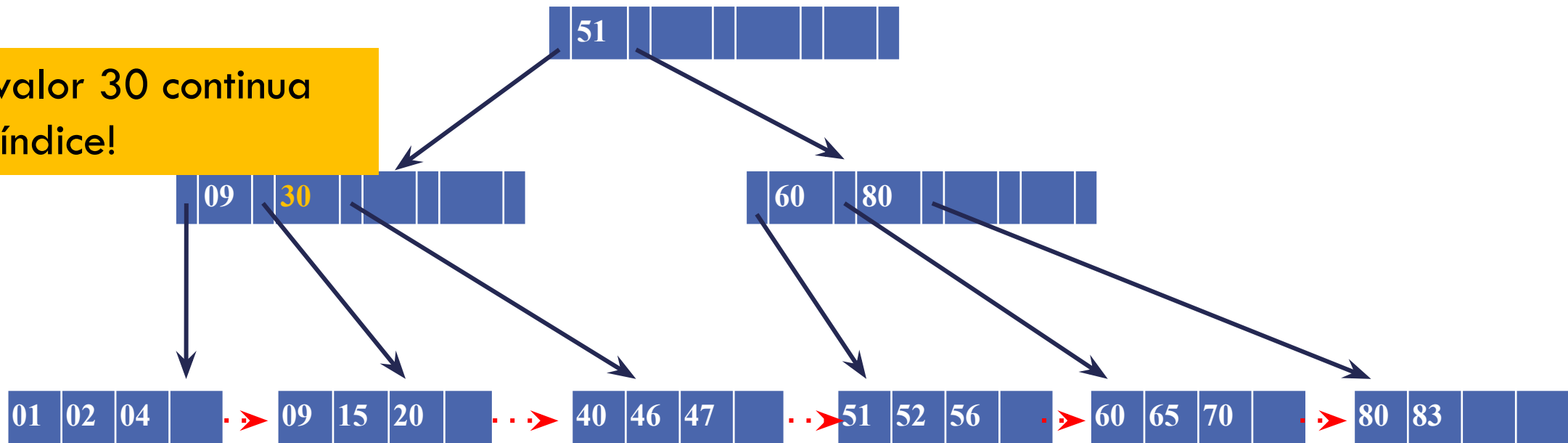


# EXEMPLO DE EXCLUSÃO EM ÁRVORE B+

## EXCLUIR CHAVE 30

ordem  $d = 2$

O valor 30 continua no índice!



# EXCLUSÃO QUE CAUSA CONCATENAÇÃO

Exclusões que causem concatenação de folhas podem se propagar para os nós internos da árvore

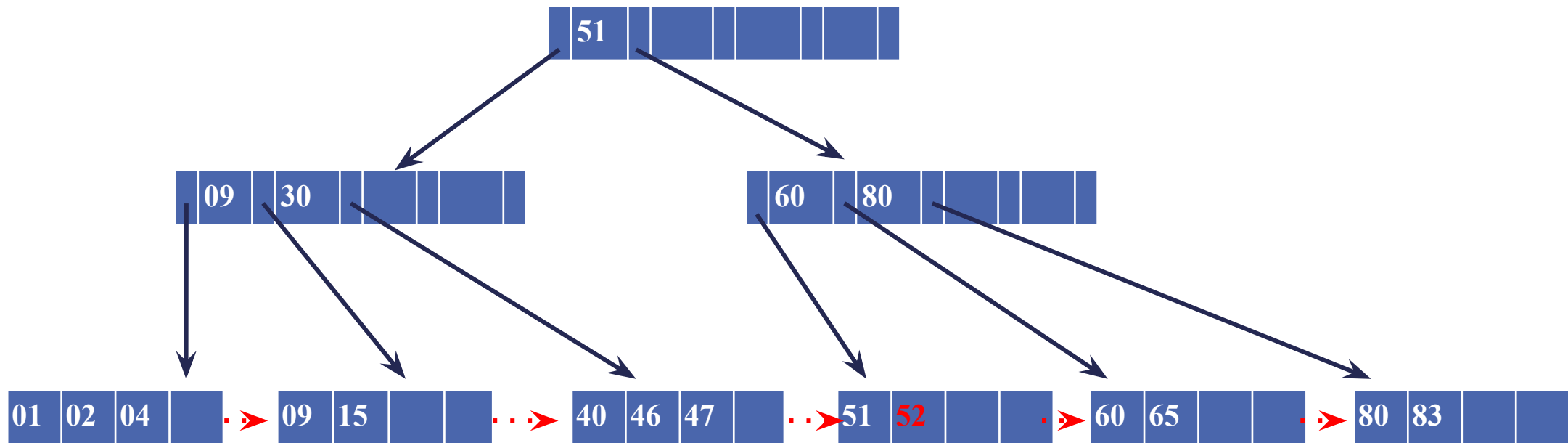
## **Importante:**

- Concatenação de nó folha: a chave do nó pai não desce para o nó concatenado.
- Concatenação de nó interno: igual a árvore B.

# EXEMPLO DE EXCLUSÃO EM ÁRVORE B+

## EXCLUIR CHAVE 52

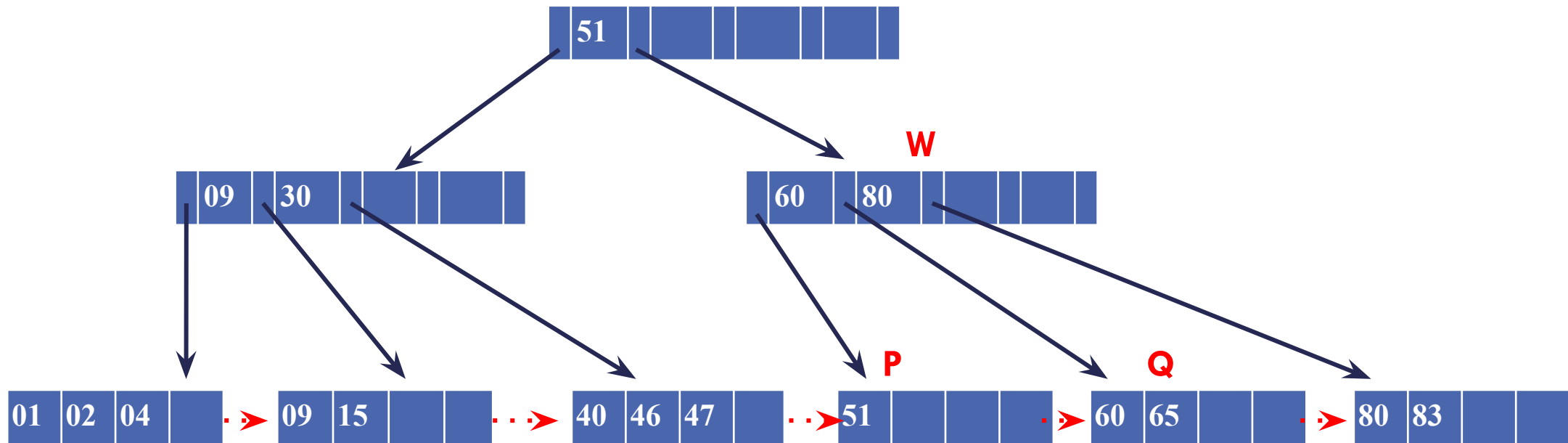
ordem  $d = 2$



# EXEMPLO DE EXCLUSÃO EM ÁRVORE B+

## EXCLUIR CHAVE 52

ordem  $d = 2$

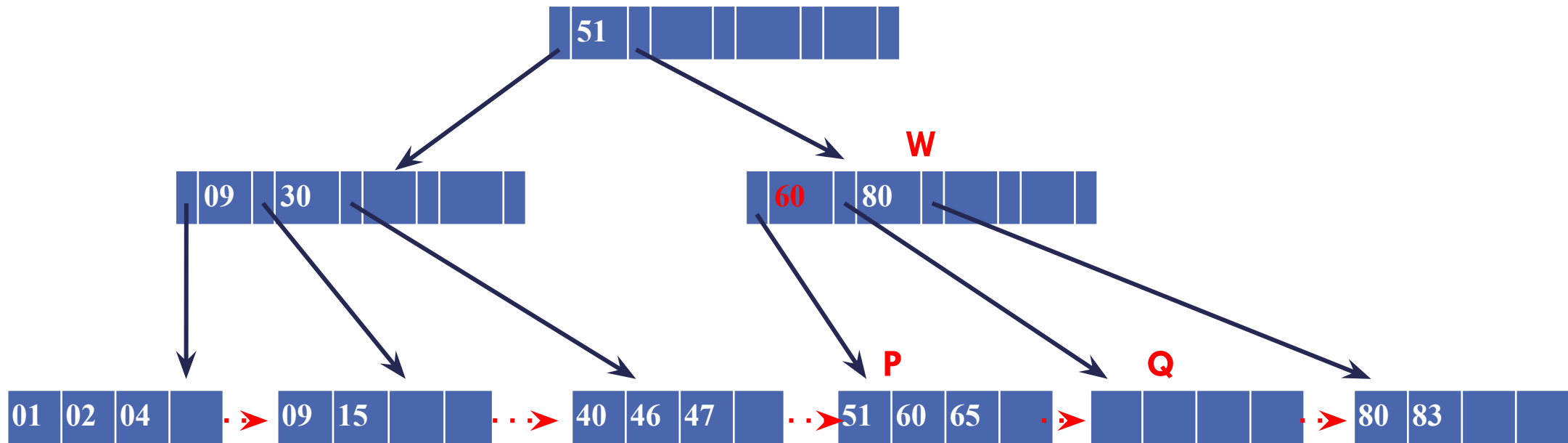


Nó ficou com menos de  $d$  entradas  
Soma dos registros de P e Q  $< 2d$

# EXEMPLO DE EXCLUSÃO EM ÁRVORE B+

## EXCLUIR CHAVE 52

ordem  $d = 2$



Concatenação:

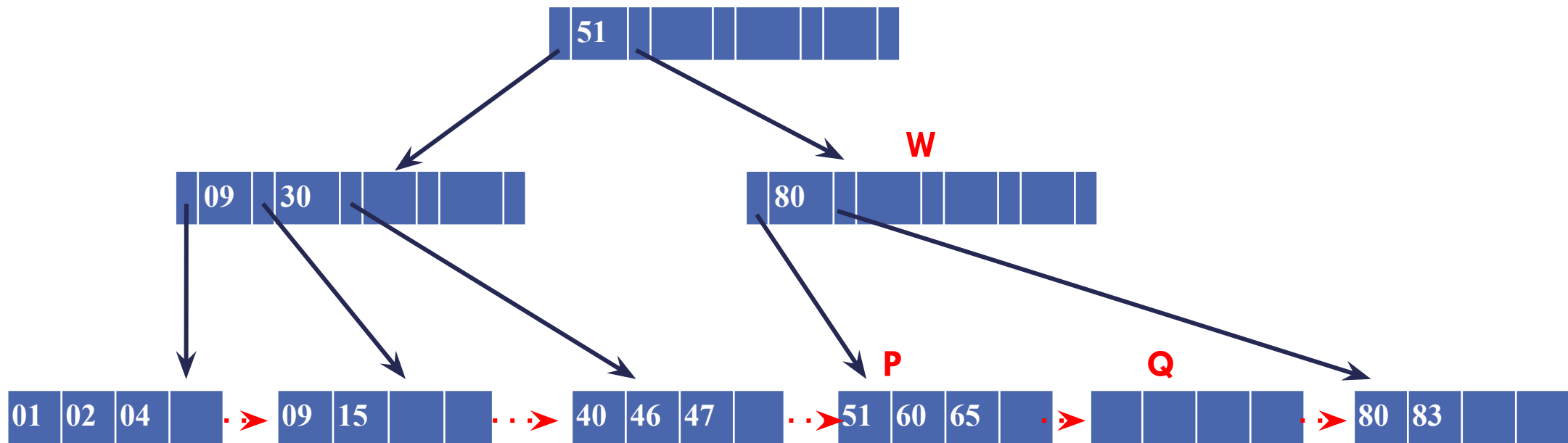
Passar os registros de Q para P



# EXEMPLO DE EXCLUSÃO EM ÁRVORE B+

## EXCLUIR CHAVE 52

ordem  $d = 2$



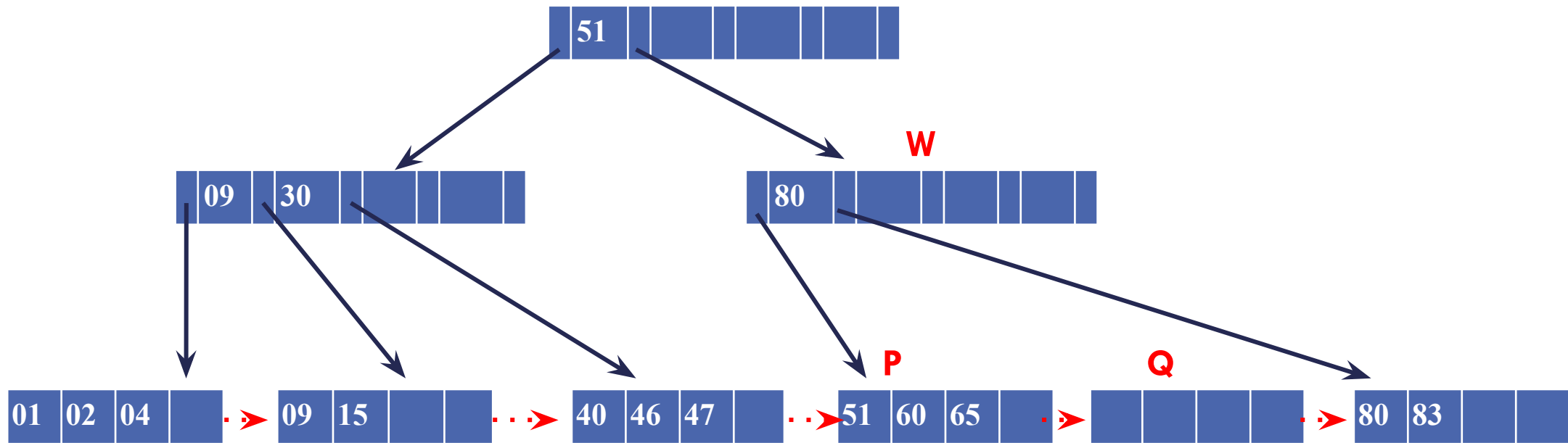
Concatenação:

Eliminar a chave em W que divide os ponteiros para as páginas P e Q

# EXEMPLO DE EXCLUSÃO EM ÁRVORE B+

## EXCLUIR CHAVE 52

ordem  $d = 2$

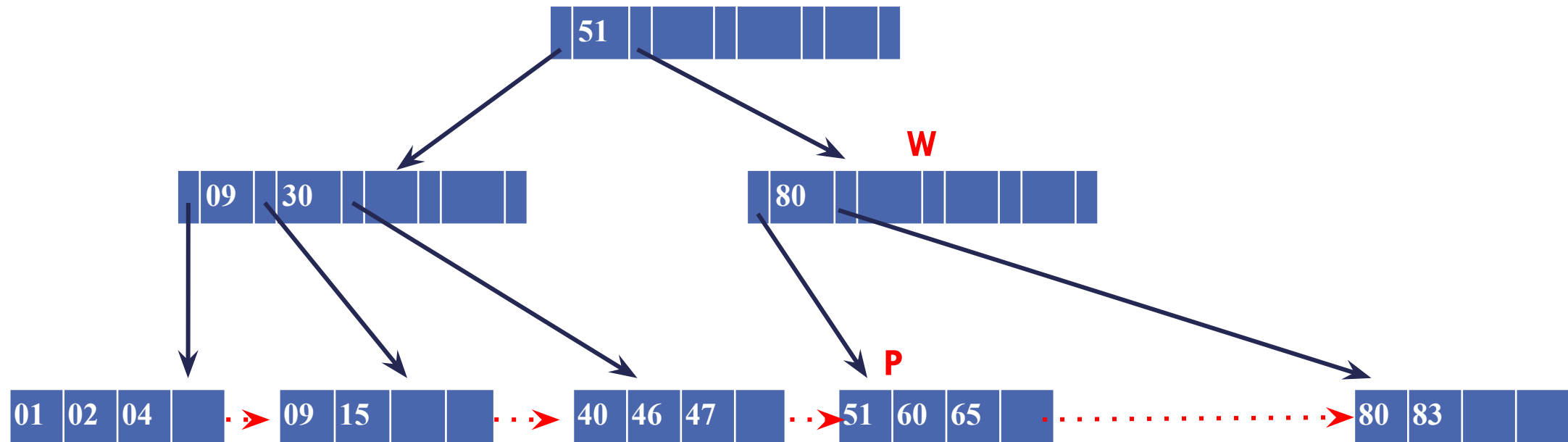


Eliminar nó Q

# EXEMPLO DE EXCLUSÃO EM ÁRVORE B+

## EXCLUIR CHAVE 52

ordem  $d = 2$

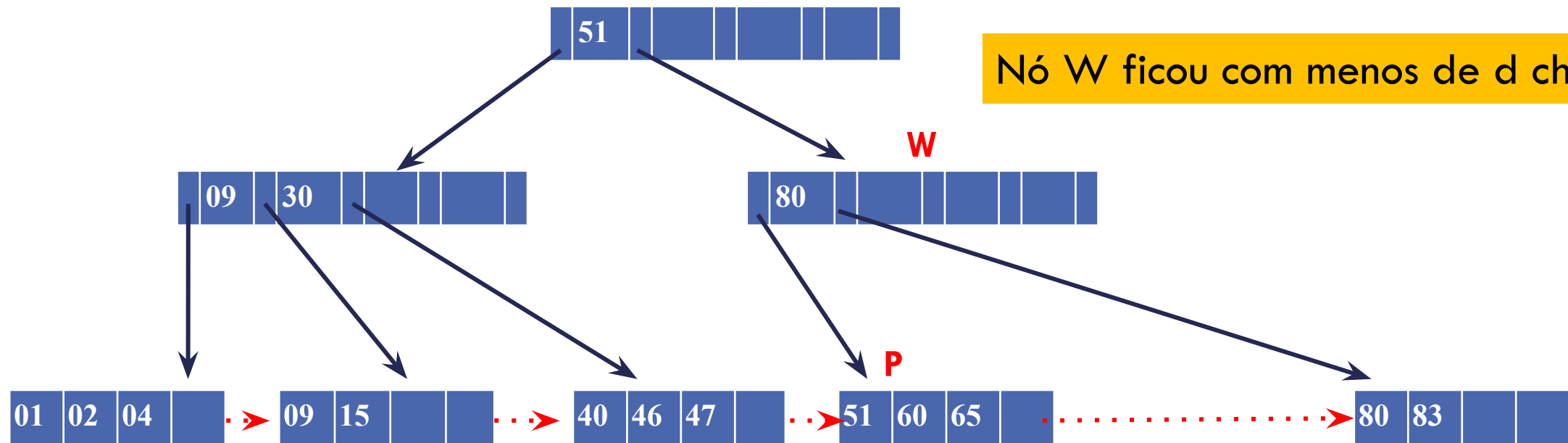


Eliminar nó Q

# EXEMPLO DE EXCLUSÃO EM ÁRVORE B+

## EXCLUIR CHAVE 52

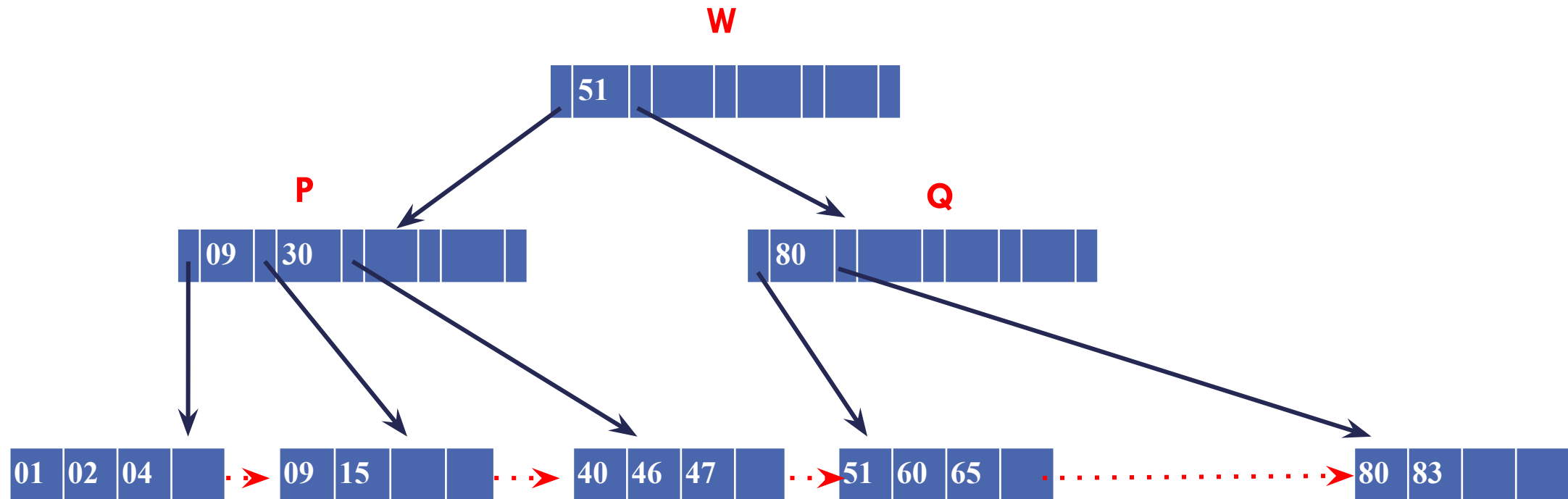
ordem  $d = 2$



# EXEMPLO DE EXCLUSÃO EM ÁRVORE B+

## EXCLUIR CHAVE 52

ordem  $d = 2$

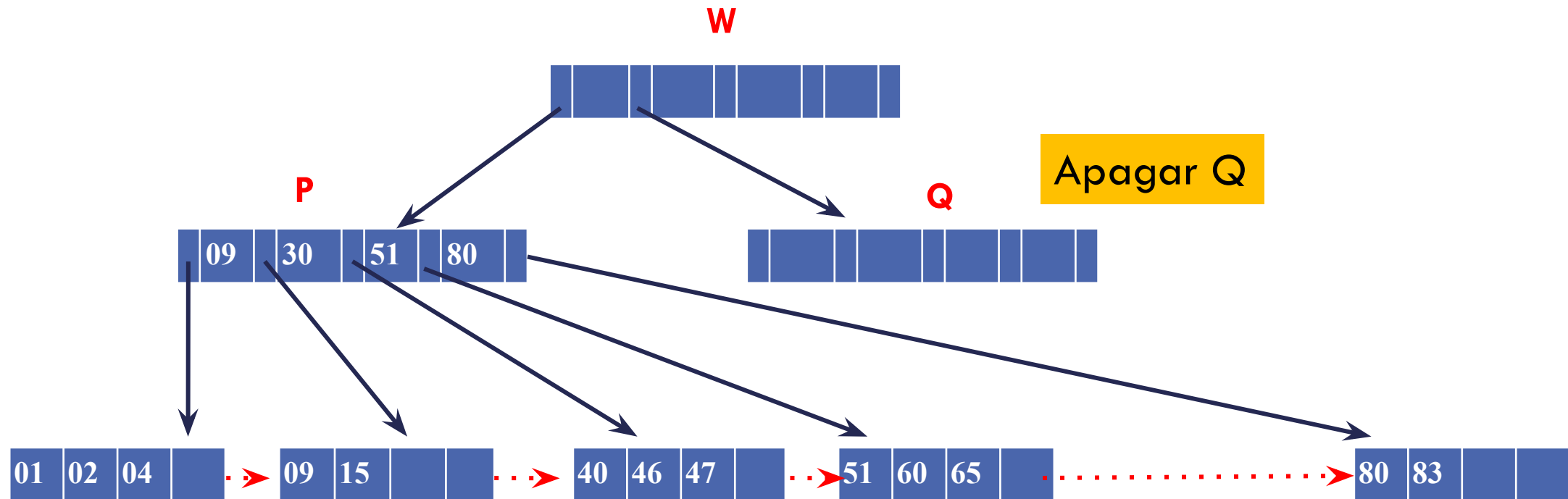


Soma de total de chaves de P e Q  $< 2d$   
Solução: concatenação de nó interno

# EXEMPLO DE EXCLUSÃO EM ÁRVORE B+

## EXCLUIR CHAVE 52

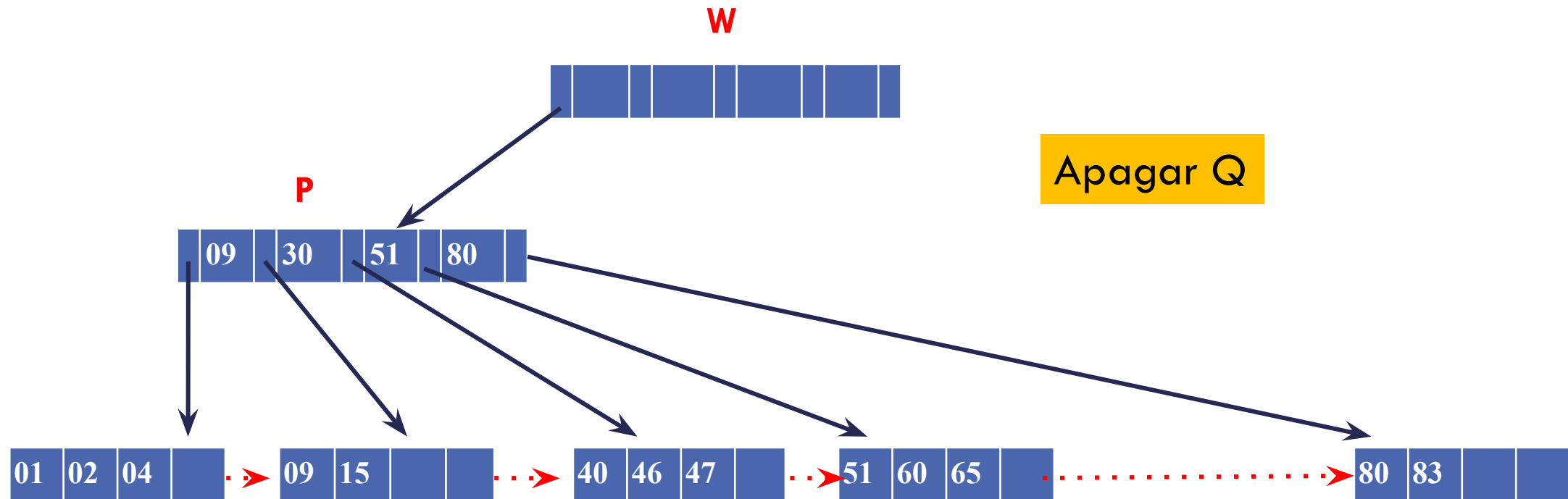
ordem  $d = 2$



# EXEMPLO DE EXCLUSÃO EM ÁRVORE B+

## EXCLUIR CHAVE 52

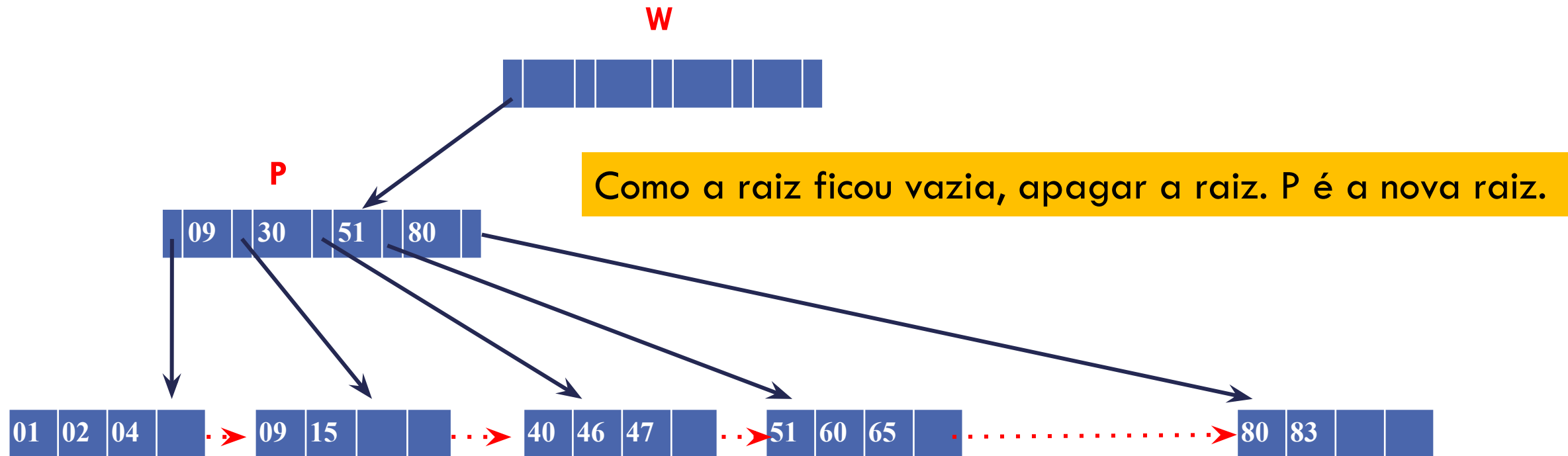
ordem  $d = 2$



# EXEMPLO DE EXCLUSÃO EM ÁRVORE B+

## EXCLUIR CHAVE 52

ordem  $d = 2$

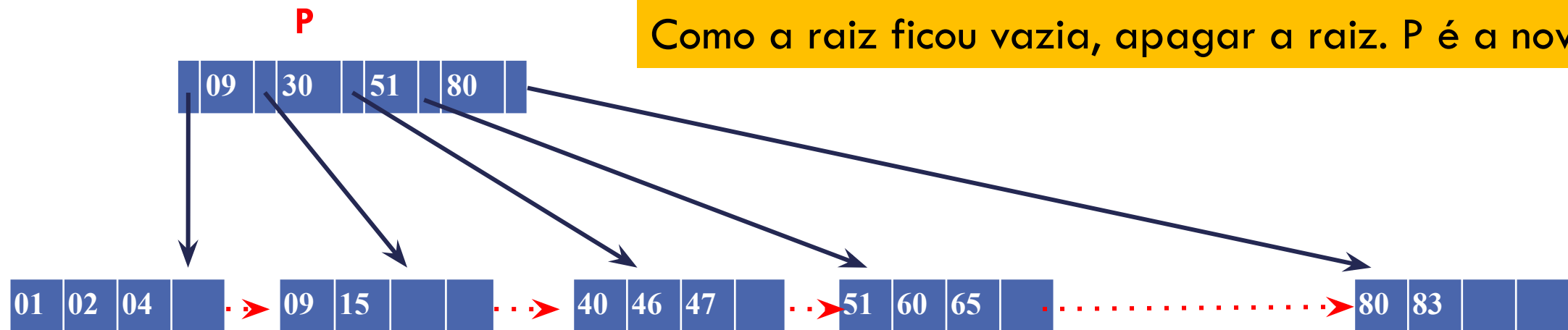




# EXEMPLO DE EXCLUSÃO EM ÁRVORE B+

## EXCLUIR CHAVE 52

ordem  $d = 2$



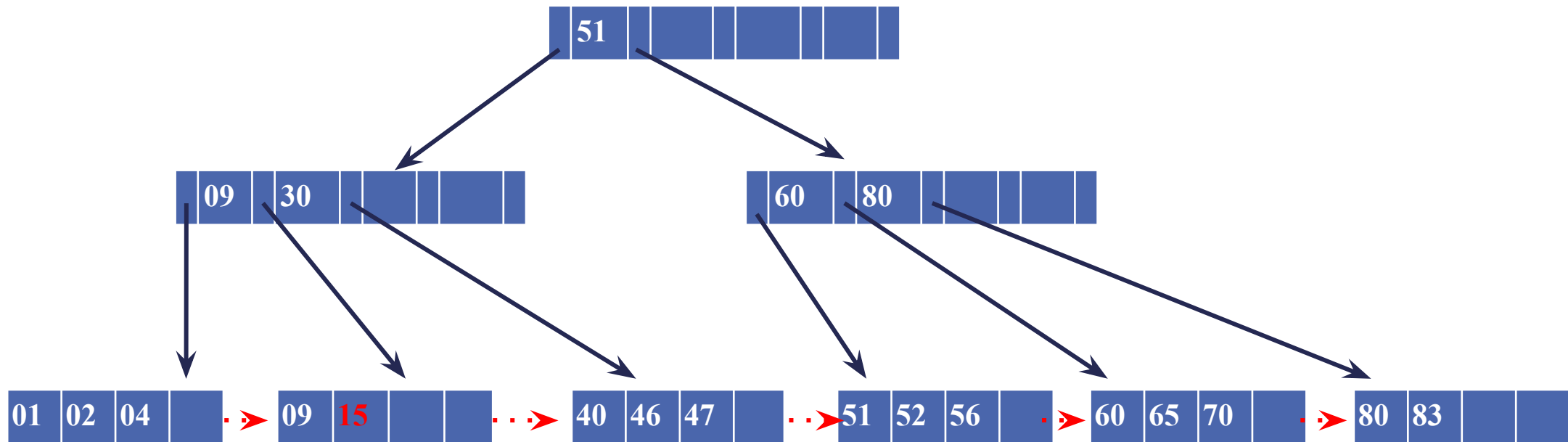
# EXCLUSÃO QUE CAUSA REDISTRIBUIÇÃO

Exclusões que causem redistribuição dos registros nas folhas provocam mudanças no conteúdo do índice, mas não se propagam

# EXEMPLO DE EXCLUSÃO EM ÁRVORE B+

## EXCLUIR CHAVE 15

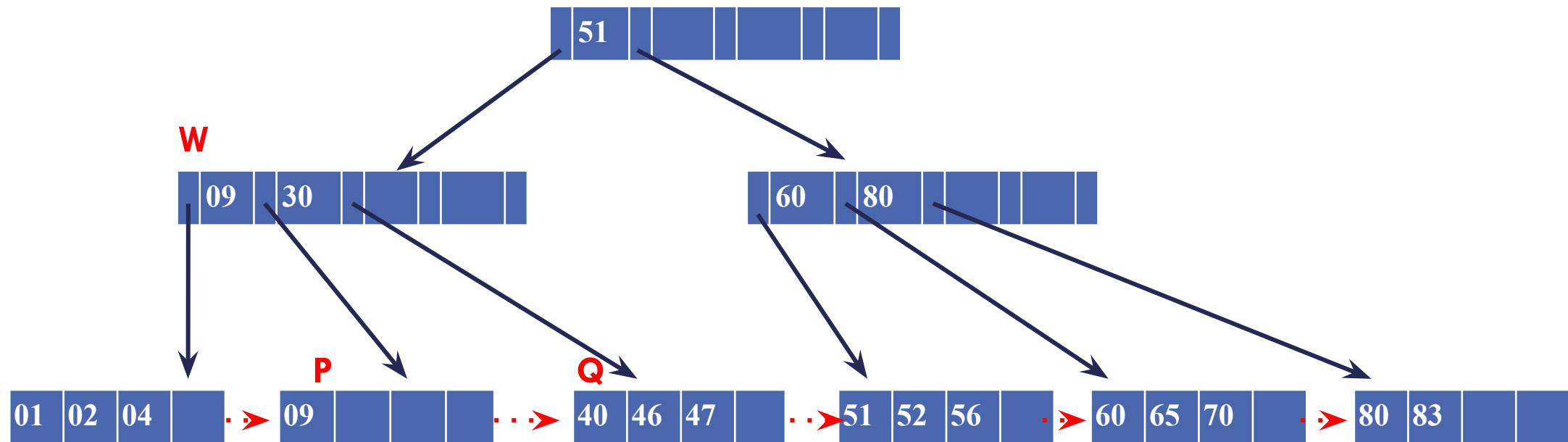
ordem  $d = 2$



# EXEMPLO DE EXCLUSÃO EM ÁRVORE B+

## EXCLUIR CHAVE 15

ordem  $d = 2$



Nó ficou com menos de  $d$  entradas

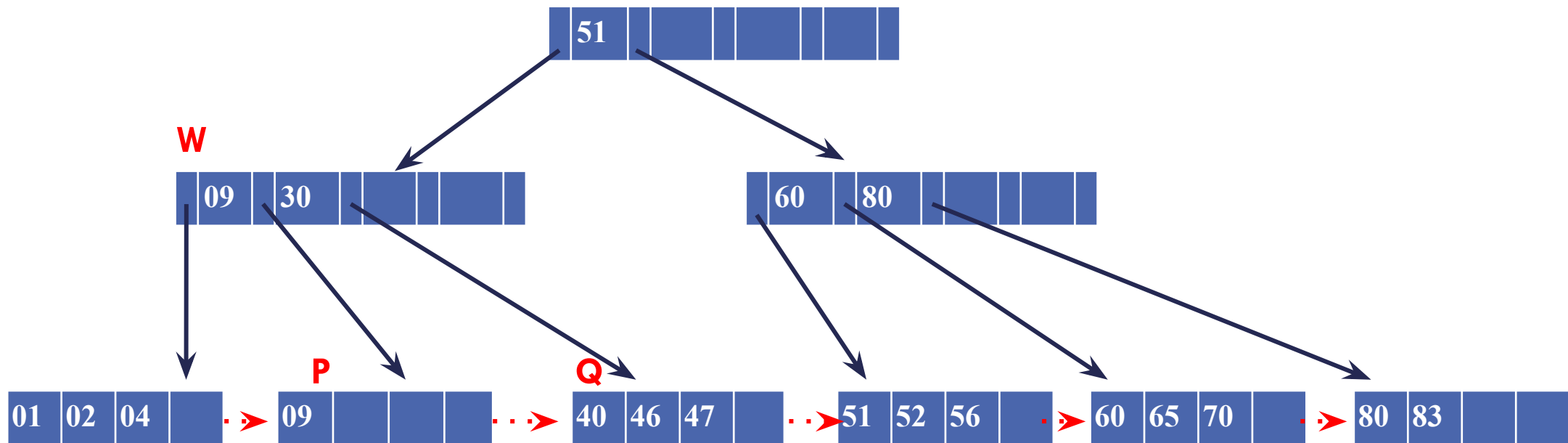
A soma dos registros dos irmãos adjacentes é  $\geq 2d$

Solução: **redistribuição**

# EXEMPLO DE EXCLUSÃO EM ÁRVORE B+

## EXCLUIR CHAVE 15

ordem  $d = 2$

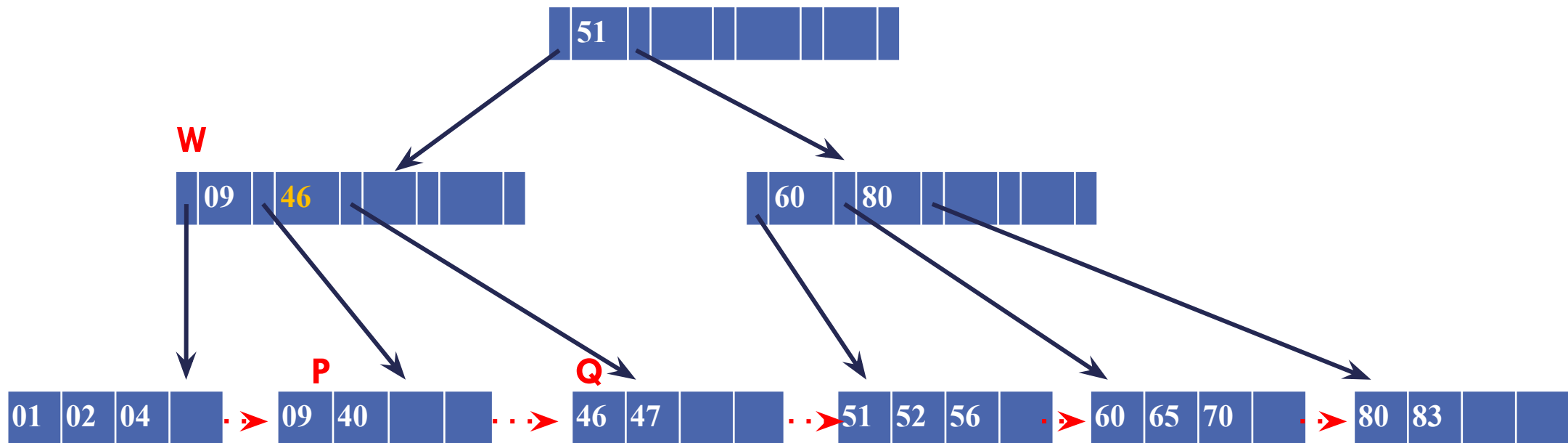


Poderíamos concatenar P e Q, mas o nó ficará cheio e vai causar concatenação na próxima inserção.  
É melhor fazer a redistribuição agora.

# EXEMPLO DE EXCLUSÃO EM ÁRVORE B+

## EXCLUIR CHAVE 15

ordem  $d = 2$



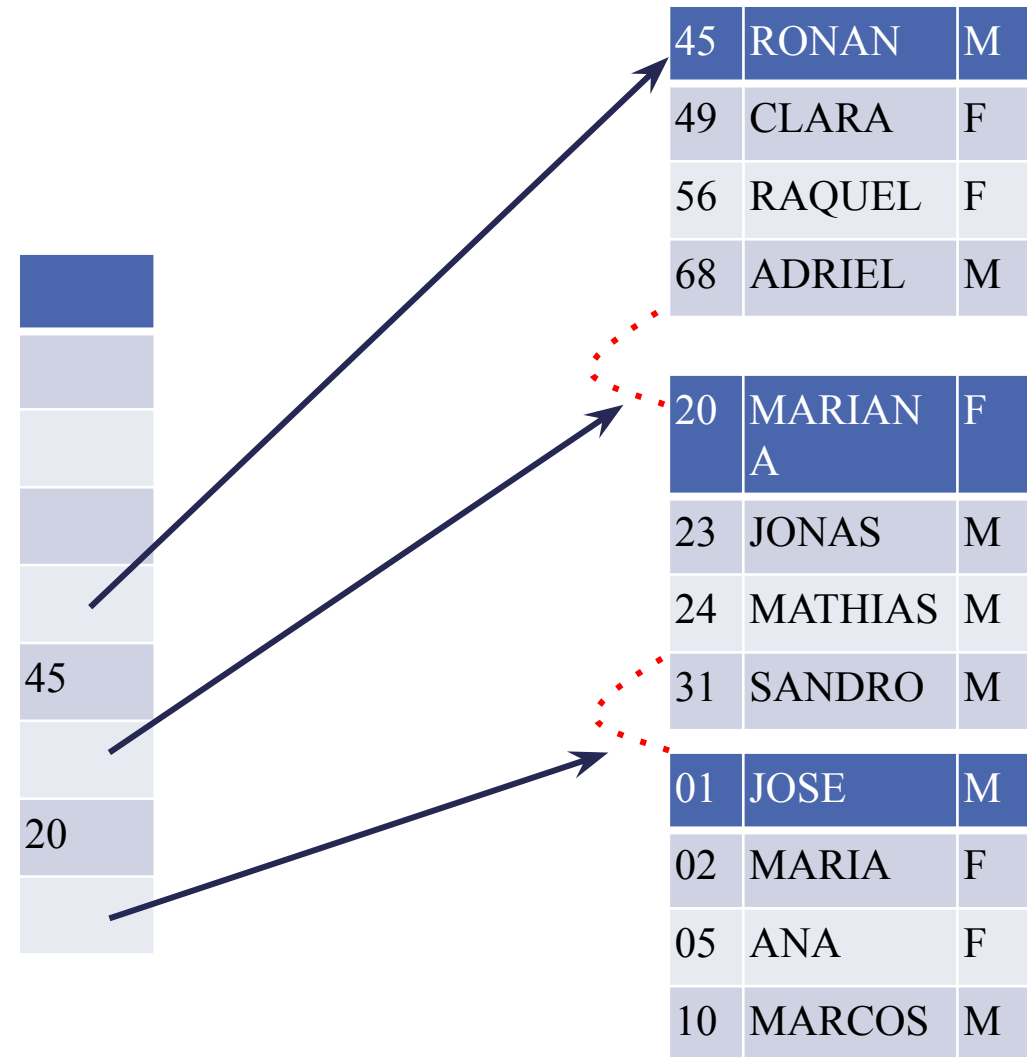
d primeiras chaves ficam em P  
d+1 até o fim ficam em Q  
chave d+1 é copiada para o pai

# EXEMPLO

(MOSTRANDO OS DADOS NAS FOLHAS)

Neste exemplo, a árvore B+ tem o  
nó raiz e 3 folhas

Ordem da árvore é  $d = 2$



# CONSIDERAÇÕES SOBRE IMPLEMENTAÇÃO EM DISCO

Utilizamos três arquivos:

- Metadados
  - Offset da raiz da árvore
  - Flag indicando se a raiz é folha (para saber em qual arquivo procurar)
- Arquivo de índices (nós internos da árvore)
- Arquivo de dados (folhas da árvore)



# ESTRUTURA DO ARQUIVO DE ÍNDICE

Arquivo de índice é estruturado em nós (blocos/páginas)

Cada nó possui

- Inteiro  $m$  representando o número de chaves do nó
- **Flag** que diz se página aponta para nó folha
- Ponteiro para o nó pai
- vetor  $p$  de “ponteiros” (offsets) para os próximos nós
- vetor  $s$  contendo as chaves

# ESTRUTURA DO ARQUIVO DE DADOS

Arquivo de dados é estruturado em nós (blocos/páginas)

Contém as **folhas** da árvore

Cada nó possui

- Inteiro  $m$  representando o número de registros armazenados no nó
- Ponteiro para o nó pai
- Ponteiro para a próxima página
- **$m$**  registros

# CONSIDERAÇÕES SOBRE IMPLEMENTAÇÃO

Se o sistema de armazenamento tem tamanho de bloco de  $B$  bytes, e as chaves a serem armazenadas têm tamanho  $k$  bytes, a árvore B+ mais eficiente é a de ordem  $d = (B / k) - 1$

Exemplo prático:

- Tamanho do bloco do disco  $B = 4\text{KB} = 4096$  bytes
- Tamanho da chave  $k = 4$  bytes
- $d = (4096/4) - 1 = 1023$
- Quantas chaves cada nó da árvore comportará no máximo, nessa situação?
- $2d = 2046$  chaves!

# EXERCÍCIO: ÁRVORE B+

- a) Desenhar uma árvore B+ de **ordem 2**, resultante da inserção de registros com as seguintes chaves: 35, 41, 1, 59, 2, 3, 43, 8, 51, 15, 36, 38, 45, 39
- b) Sobre o resultado do exercício (a), excluir os registros de chave: 3, 38, 1, 41
- c) Sobre o resultado do exercício (b), incluir os registros de chave: 5, 14, 52, 53, 54

# REFERÊNCIA

Szwarcfiter, J.; Markezon, L. Estruturas de Dados e seus Algoritmos, 3a. ed.  
LTC. Cap. 5

# AGRADECIMENTOS

Exemplo cedido por Renata Galante