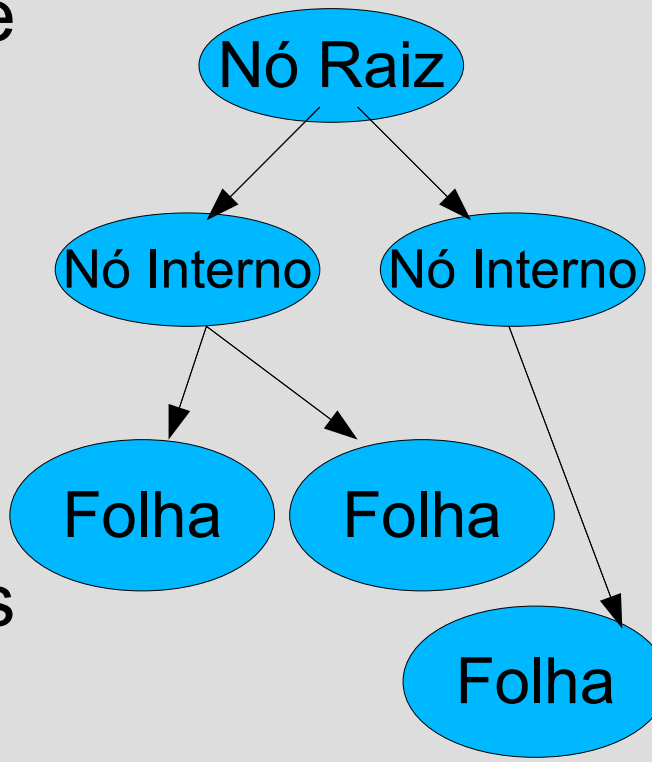
Estruturas de Dados

Árvores

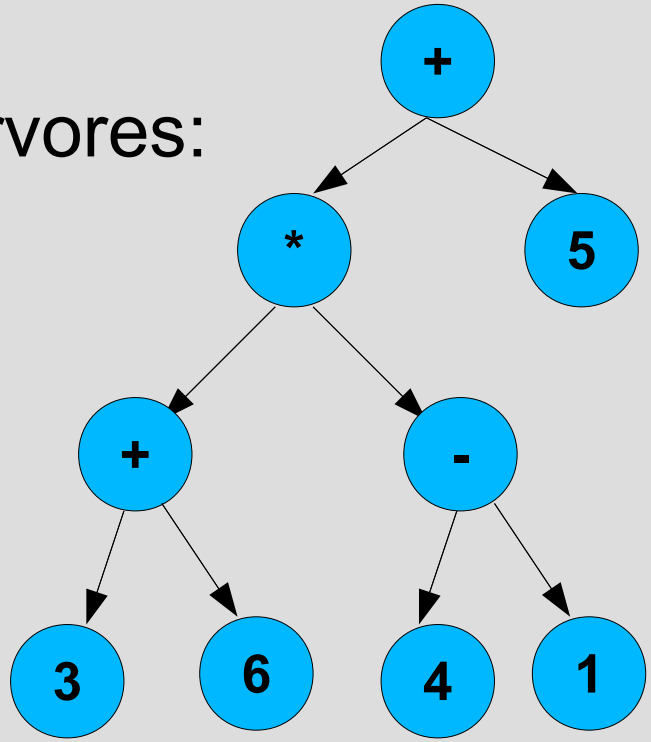
Árvore

- Em diversas aplicações, precisamos de estruturas não-lineares. Em especial, quando precisamos de estruturas hierárquicas;
- Uma Árvore é constituída por um **conjunto de nós** tal que:
  - Exite um nó r, denominado de **raiz**, com zero ou mais sub-árvores, cujas raízes estão ligadas a r. Os nós raízes destas sub-árvores são os **filhos** de r;
  - Os **nós internos** são nós com filhos;
  - Os **nós externos ou folhas** são os nós sem filhos.



Árvore Binária

- Árvore em que cada nó tem no máximo 2 filhos
- Uma árvore binária é
  - Uma árvore vazia
  - Um nó Raiz com duas sub-árvores:
    - Sub-árvore da esquerda.
    - Sub-árvore da direita.
- Em geral, utiliza-se algoritmos recursivos
- Exemplo: ((3+6)*(4-1))+5



Tipo Abstrato de Dado Árvore Binária

Podemos criar um TAD Árvore Binária de caracteres. Para tanto, devemos criar o arquivo arvore.h com o nome do tipo e os protótipos.

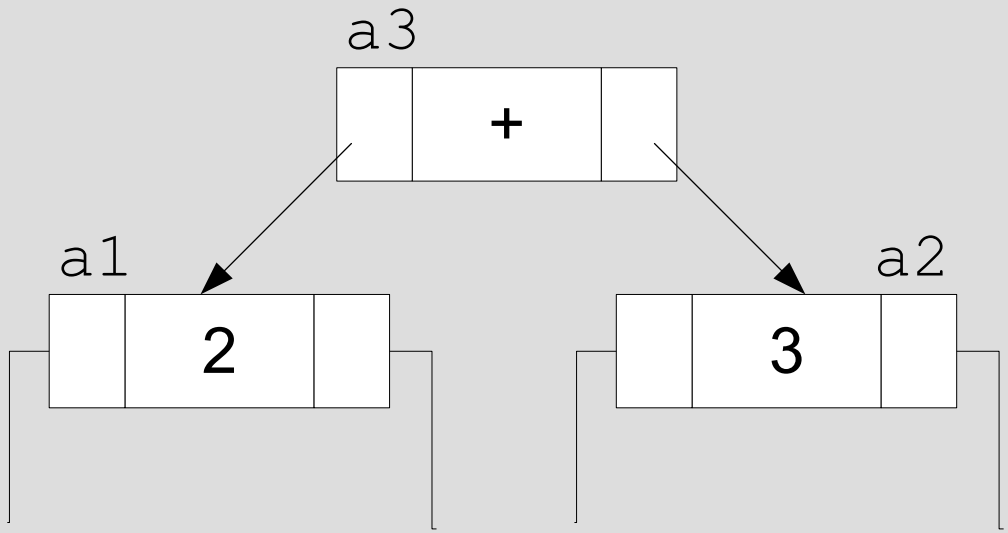
```
typedef struct arv Arv;

/*Função que cria uma Árvore Binária Vazia.*/
Arv* arv_cria_vazia(void);
/*Função que cria um nó em uma Árvore Binária.*/
Arv* arv_cria_no(char c, Arv *sae, Arv *sad);
/*Testa se uma Árvore Binária é vazia.*/
int arv_vazia(Arv *a);
/*Função que imprime os elementos de uma Árvore Binária.*/
void arv_imprime(Arv *a);
/*Função que determina se um caractere pertence à Árvore.*/
int arv_pertence(Arv *a,char c);
/*Libera o espaço alocado para uma Árvore Binária.*/
void arv_libera(Arv *a);
```

Estrutura de Árvore Binária

- A estrutura que representa o tipo árvore binária deve ser composta pela informação a ser armazenada e a sub-árvore da esquerda e da direita

```
struct arv{
   char info;
   Arv *esq;
   Arv *dir;
};
```

```
Arv a1; a1.info='2'; a1.esq=NULL; a1.dir = NULL;
Arv a2; a2.info='3'; a2.esq=NULL; a2.dir = NULL;
Arv a3; a3.info='+'; a3.esq=&a1;  a3.dir = &a2;
```

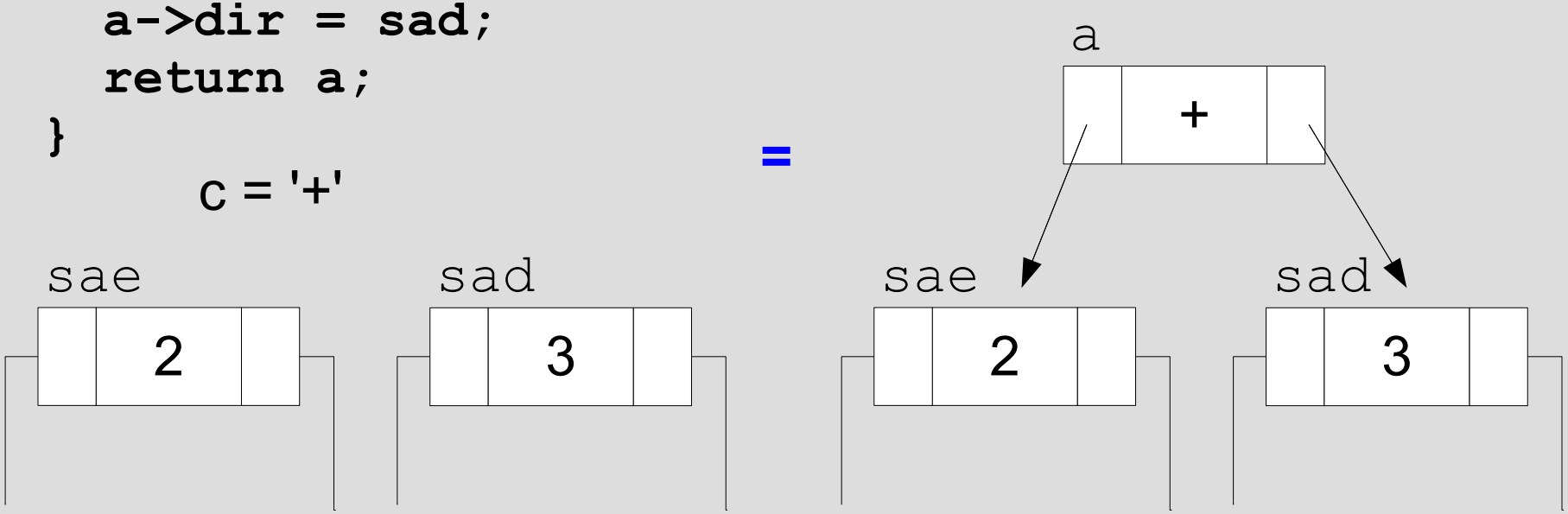


Árvore Binária
Funções Cria Árvore Vazia e Nó

```
Arv* arv_cria_vazia(void){
  return NULL;
}

Arv* arv_cria_no(char c, Arv *sae, Arv *sad){
  Arv* a = (Arv*)malloc(sizeof(Arv));
  a->info = c;
  a->esq = sae;
  a->dir = sad;
  return a;
}
```

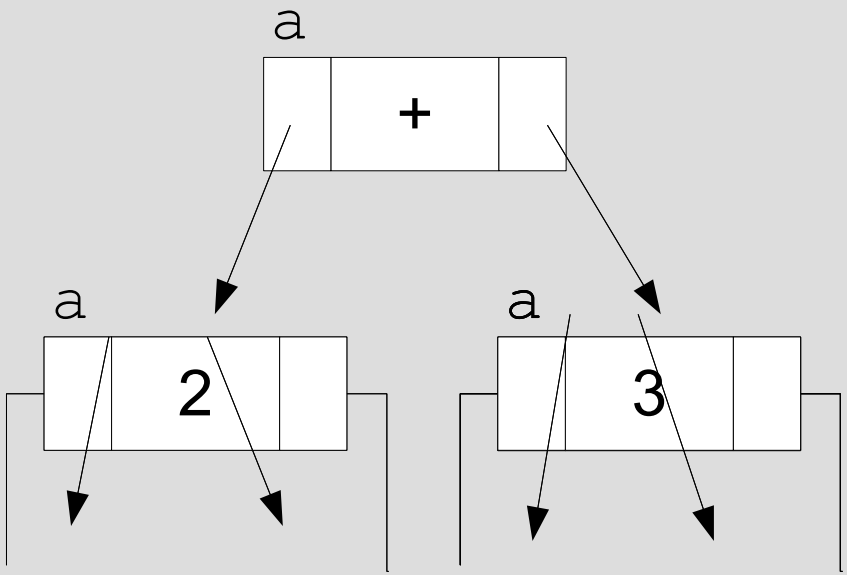
c = '+'

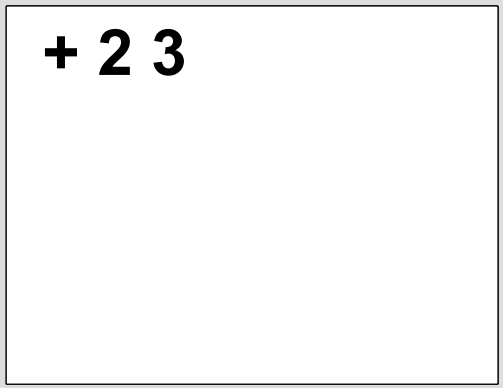
=



Árvore Binária
Funções Árvore Vazia e Imprime

```
int arv_vazia(Arv *a){
  return a==NULL;
}

void arv_imprime(Arv *a){
   if(!arv_vazia(a)){
     printf("%c ",a->info);
     arv_imprime(a->esq);
     arv_imprime(a->dir);
   }
}
```



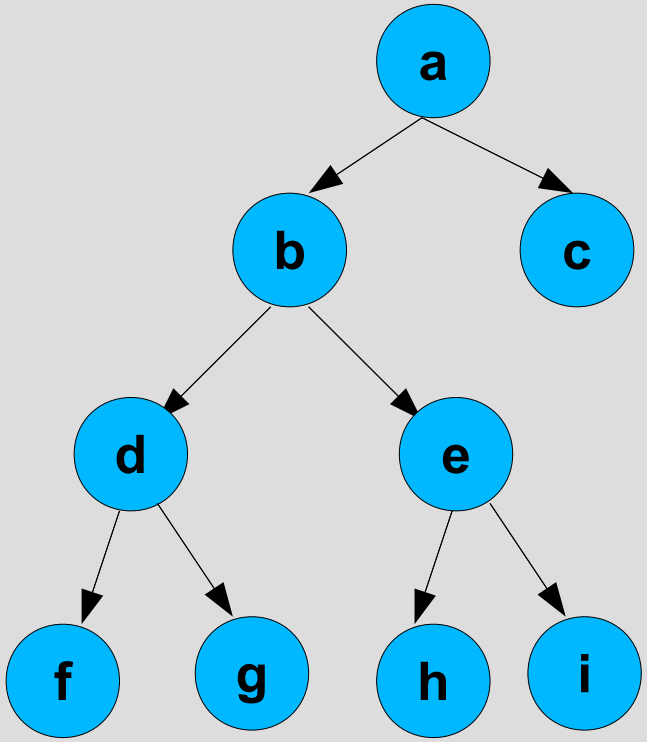


Árvore Binária
Funções Libera e Pertence

```
int arv_pertence(Arv *a,char c){
  if(arv_vazia(a))
    return 0;
  else
     return a->info ==c || arv_pertence(a->esq,c)
                        || arv_pertence(a->dir,c);

}

void arv_libera(Arv *a){
  if(!arv_vazia(a)){
    arv_libera(a->esq);
    arv_libera(a->dir);
    free(a);
  }
}
```

Ordens de Percurso em Árvores Binárias

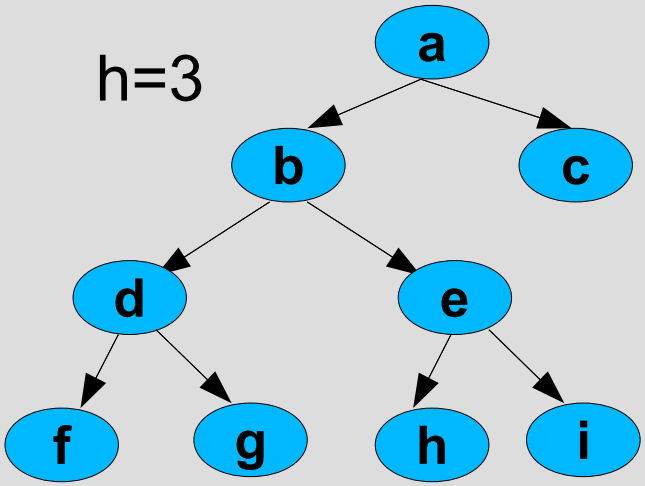
- Pré-Ordem:
  - Trata a raiz, percorre sae e percorre sad
  - Exemplo: Função Imprime
- Ordem Simétrica:
  - Percorre sae, trata a raiz, e percorre sad
  - Exemplo: Função de Busca
- Ordem Pós-Ordem:
  - Percorre sae, percorre sad e trata a raiz
  - Exemplo: Função Libera

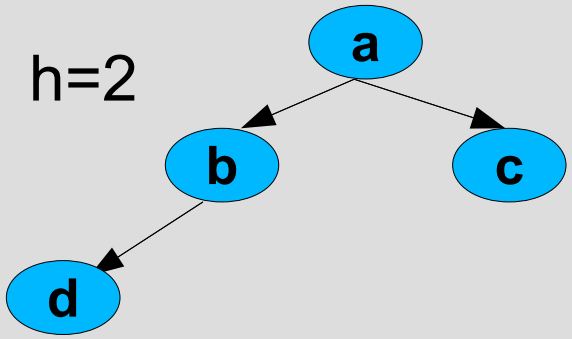



```
Pré-ordem: a b d f g e h i c
Simétrica: f d g b h e i a c
Pós-ordem: f g d h i e b c a
```

Árvores Binárias - Altura

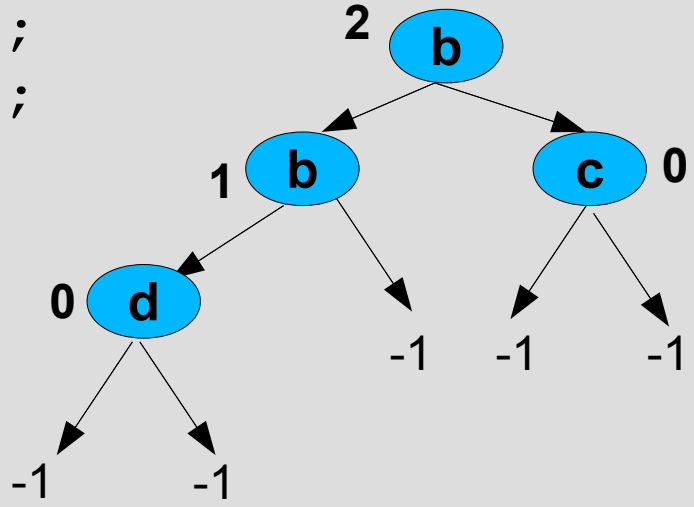
- Propriedade Fundamental de Árvores:
  - Só existe um caminho da raiz para qualquer nó
- Altura de uma árvore
  - Comprimento do caminho mais longo da raiz até uma das folhas
    - A altura de uma árvore vazia é -1
    - A altura de uma árvore com um único nó raiz é 0





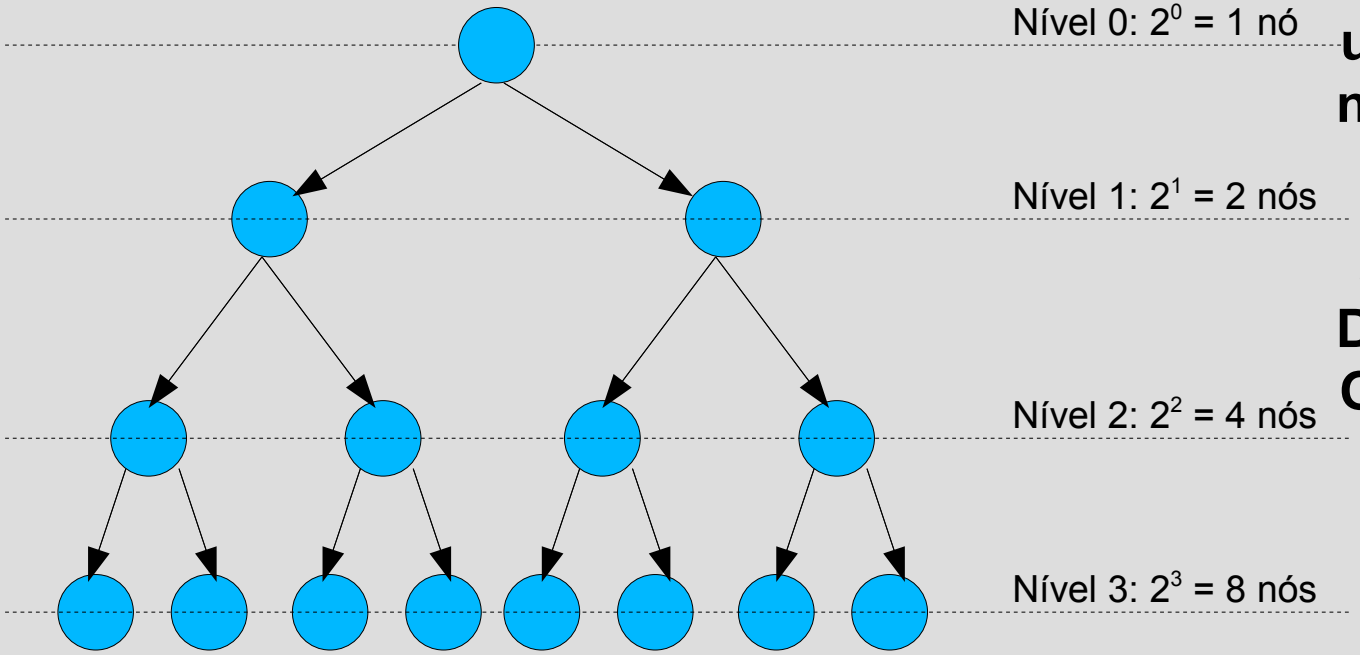
Árvore Binária - Altura

```
int arv_altura(Arv *a){
  if(arv_vazia(a))
    return -1;
  else{
    int hSAE = arv_altura(a->esq);
    int hSAD = arv_altura(a->dir);
    if(hSAE > hSAD)
      return 1+hSAE;
    else
      return 1+hSAD;
  }
}
```



Árvore Binária Completa

- Um Árvore Binária é dita **completa** (ou cheia) se todos os nós internos têm exatamente 2 filhos



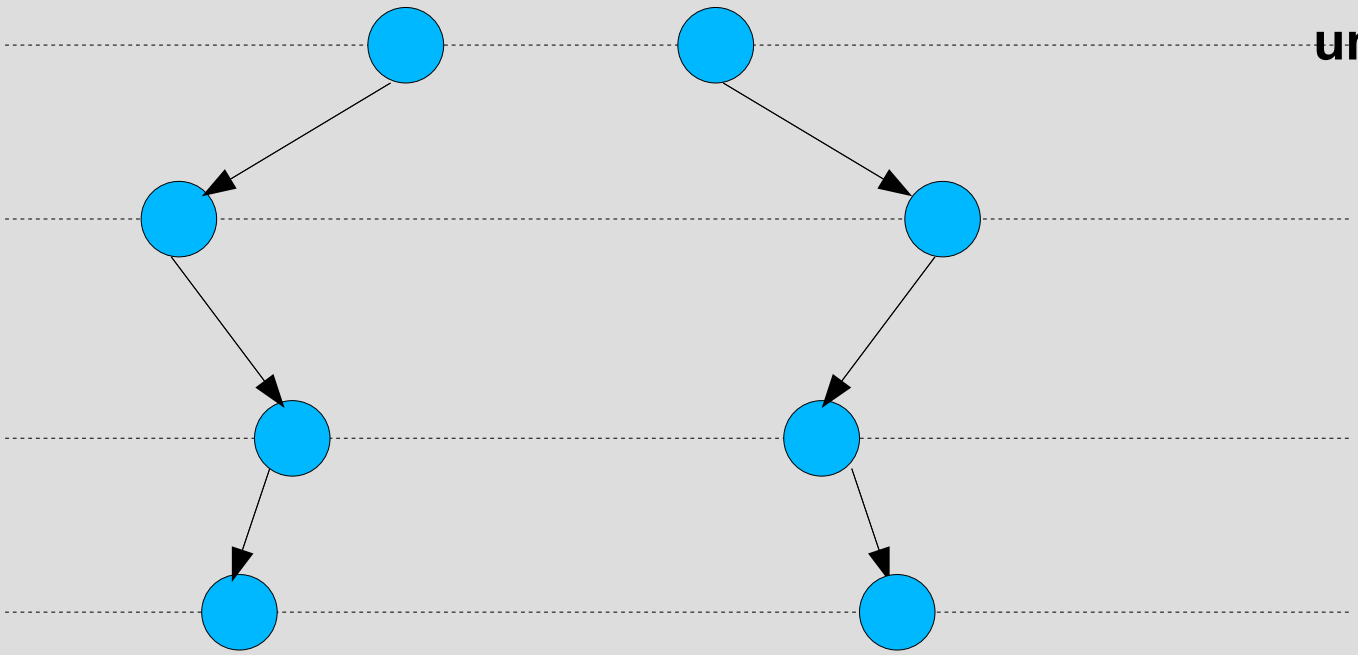
O número n de nós de uma árvore de altura h é $n = 2^0+2^1+2^2+...+2^h = 2^{h+1}-1$

Seja h a altura de uma árvore binária completa. Dizemos que a árvore tem $O(2^h)$ nós e, para alcançar qualquer nó da árvore, temos complexidade de O(log n)

O número de nós $n = 2^0+2^1+2^2+2^3 = 15$

Árvore Binária Degenerada

- Um Árvore Binária é dita **degenerada** se todos os nós internos têm uma única sub-árvore



O número n de nós de uma árvore de altura h é n = h+1

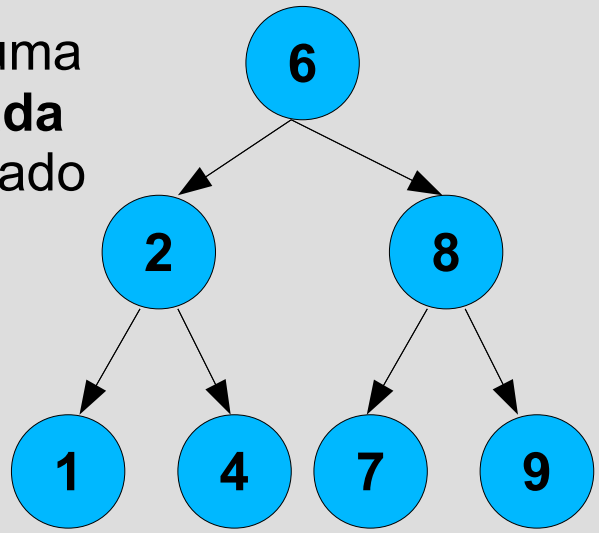
Seja h a altura de uma árvore binária degenerada. Dizemos que a árvore tem O(h) nós e, para alcançar qualquer nó da árvore, temos complexidade de O(n)

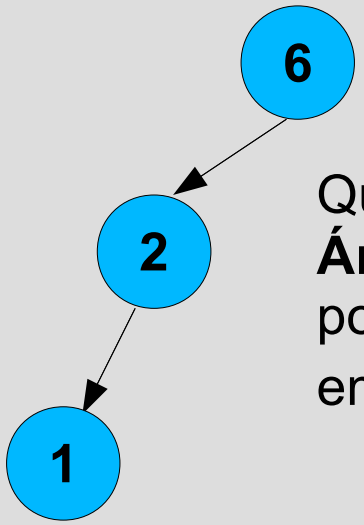
O número de nós $n = 2^0+2^1+2^2+2^3 = 15$

Árvore Binária de Busca

- Podemos utilizar uma árvore binária para realizarmos busca de forma eficiente desde que a árvore tenha a seguinte propriedade:
  - O valor associado a **raiz** é sempre **maior** do que qualquer valor da **sub-árvore da esquerda**;
  - O valor associado a **raiz** é sempre **menor** do que qualquer valor da **sub-árvore da direita**;

Qualquer nó em uma **Árvore Balanceada** pode ser encontrado em **O(log n)**





Qualquer nó em uma **Árvore Degenerada** pode ser encontrado em **O(n)**

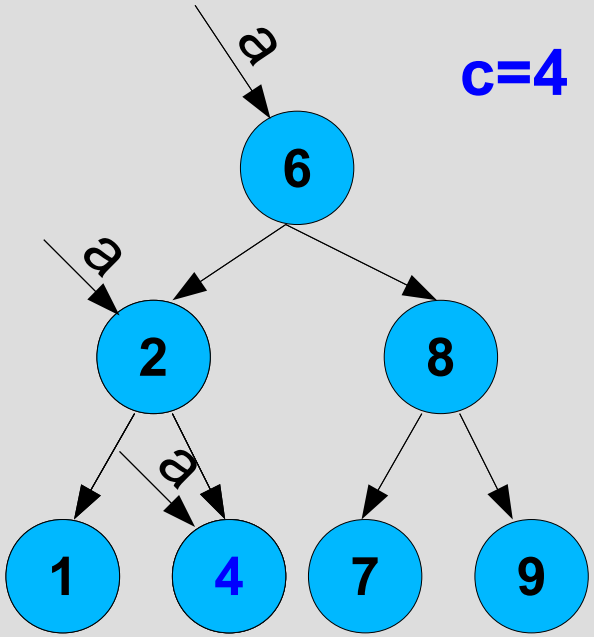
Tipo Abstrato de Dado
Árvore Binária de Busca

Podemos criar um TAD Árvore Binária Busca de inteiros. Para tanto, devemos criar o arquivo arvb.h com o nome do tipo e os protótipos.

```
typedef struct arvb ArvB;

/*Função que cria uma Árvore Binária de Busca Vazia.*/
ArvB* arvb_cria_vazia(void);
/*Testa se uma Árvore Binária é vazia.*/
int arvb_vazia(ArvB *a);
/*Função que busca a sub-árvore que contém um inteiro.*/
ArvB* arvb_busca(ArvB *a,int c);
/*Função que imprime os elementos de uma Árvore.*/
void arvb_imprime(ArvB *a);
/*Função que insere um inteiro em uma Árvore.*/
ArvB* arvb_insere(ArvB *a, int c);
/*Função que remove um inteiro em uma Árvore.*/
ArvB* arvb_remove(ArvB *a, int c);
/*Libera o espaço alocado para uma Árvore.*/
void arvb_libera(ArvB *a);
```

Árvore Binária de Busca
Função Busca

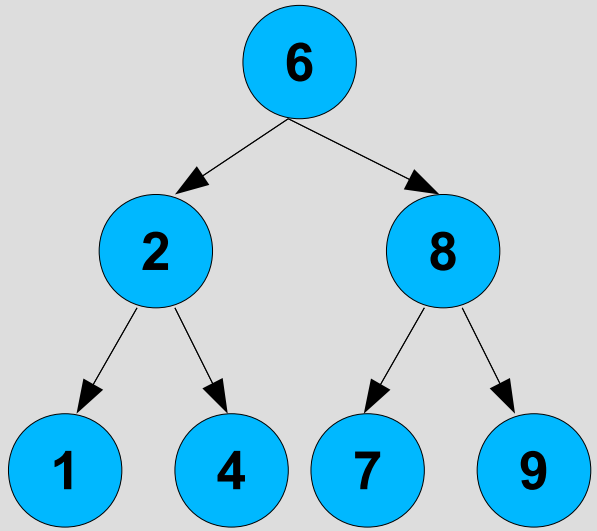
```
ArvB* arvb_busca(ArvB *a, int c){
    if(arvb_vazia(a))
      return NULL;
    else if(a->info < c)
      return arvb_busca(a->dir,c);
    else if(a->info > c)
      return arvb_busca(a->esq,c);
    else //(a->info == c)
      return a;
}
```



Árvore Binária de Busca
Função Imprime

- Basta utilizar a impressão na ordem simétrica (sae, raiz e sad)

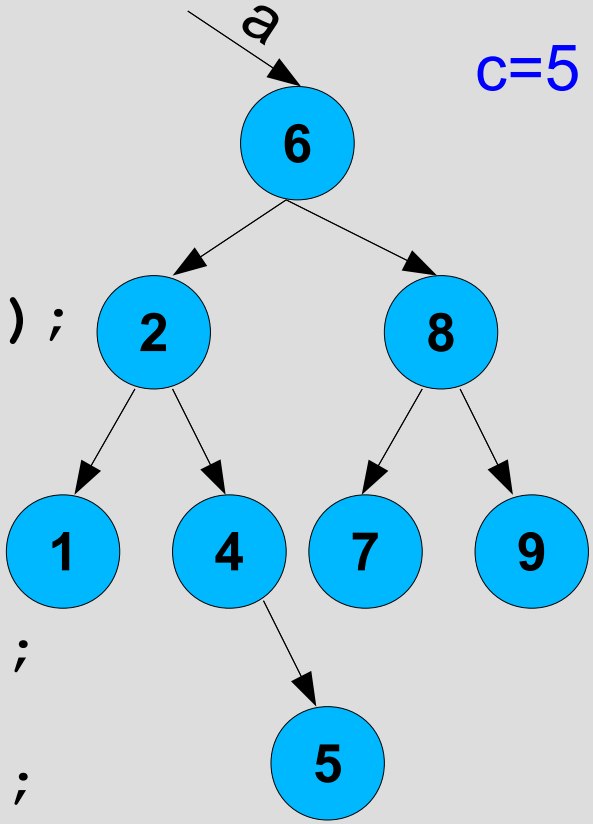
```
void arvb_imprime(ArvB *a){
    if(!arvb_vazia(a)){
      arvb_imprime(a->esq);
      printf("%d ",a->info);
      arvb_imprime(a->dir);
    }
}
```



1 2 4 6 7 8 9

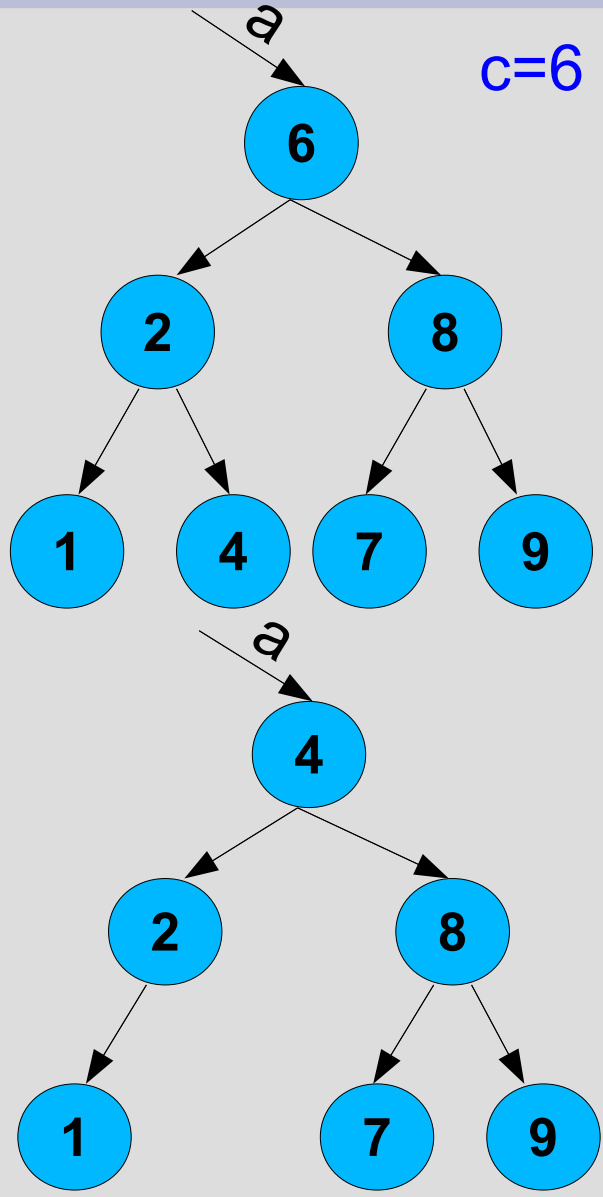
Árvore Binária de Busca
Função Insere

```
ArvB* arvb_insere(ArvB *a, int c){
    if(arvb_vazia(a)){
      a = (ArvB*)malloc(sizeof(ArvB));
      a->info = c;
      a->esq = NULL;
      a->dir = NULL;
    }else if(a->info > c)
      a->esq = arvb_insere(a->esq,c);
     else if (a->info < c)
      a->dir = arvb_insere(a->dir,c);
     else
      printf("\nElemento Ja Pertence a Arvore");
    return a;
}
```



Árvore Binária de Busca
Função Remove

```
ArvB* arvb_remove(ArvB *a, int c){
 if(!arvb_vazia(a)){
    if(a->info > c)
     a->esq = arvb_remove(a->esq,c);
    else if (a->info < c)
     a->dir = arvb_remove(a->dir,c);
    else{
     ArvB* t;
     if (a->esq == NULL){
       t = a;  a = a->dir;
       free(t);
     }else if (a->dir == NULL){
       t = a;  a = a->esq;
       free(t);
     }else{
      t = a->esq;
      while(t->dir!=NULL)
         t = t->dir;
      a->info = t->info;  t->info = c;
      a->esq = arvb_remove(a->esq,c);
     }
    }
 }
 return a;
}
```



Árvore Binária de Busca
Função Remove

```
ArvB* arvb_remove(ArvB *a, int c){
 if(!arvb_vazia(a)){
    if(a->info > c)
     a->esq = arvb_remove(a->esq,c);
    else if (a->info < c)
     a->dir = arvb_remove(a->dir,c);
    else{
     ArvB* t;
     if (a->esq == NULL){
       t = a;  a = a->dir;
       free(t);
     }else if (a->dir == NULL){
       t = a;  a = a->esq;
       free(t);
     }else{
      t = a->esq;
      while(t->dir!=NULL)
         t = t->dir;
      a->info = t->info;  t->info = c;
      a->esq = arvb_remove(a->esq,c);
     }
    }
 }
 return a;
}
```