

ÁRVORES BINÁRIAS DE BUSCA BALANCEADAS

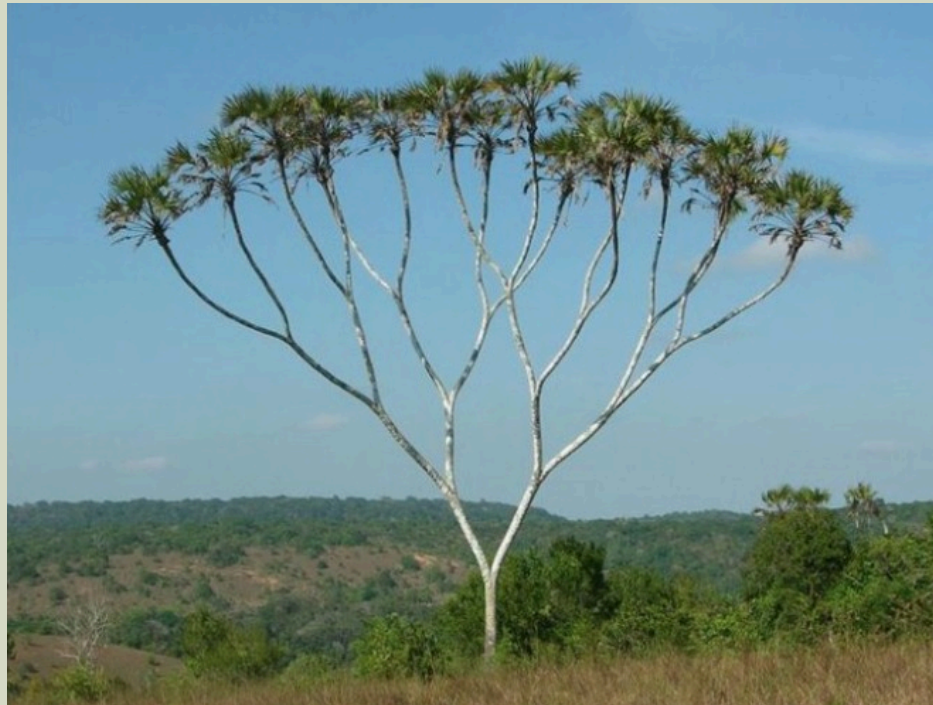
PUC MINAS

ALGORITMOS E ESTRUTURAS DE DADOS II

ABBs BALANCEADAS

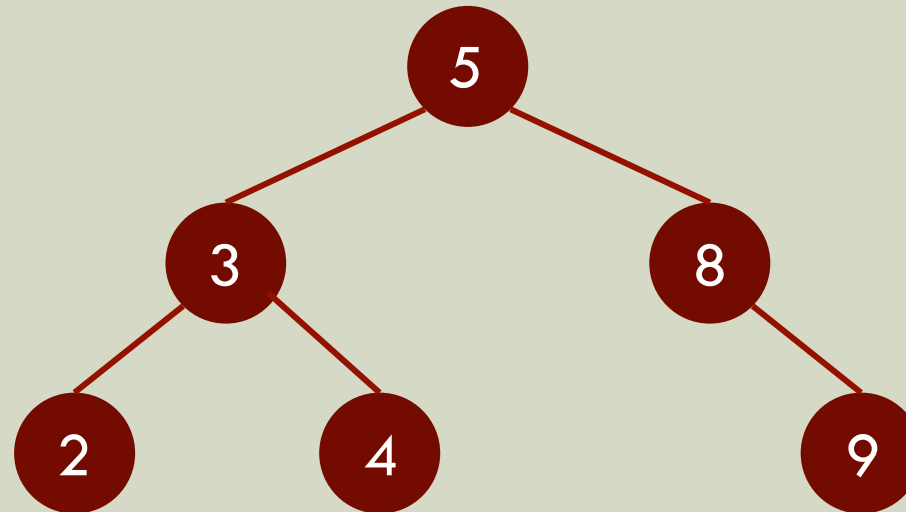
- ABBs cujos níveis das folhas;
 - diferem em, no máximo, uma unidade.
- Uma ABB balanceada com n nós;
 - tem altura próxima de $\log n$.

ABBs BALANCEADAS

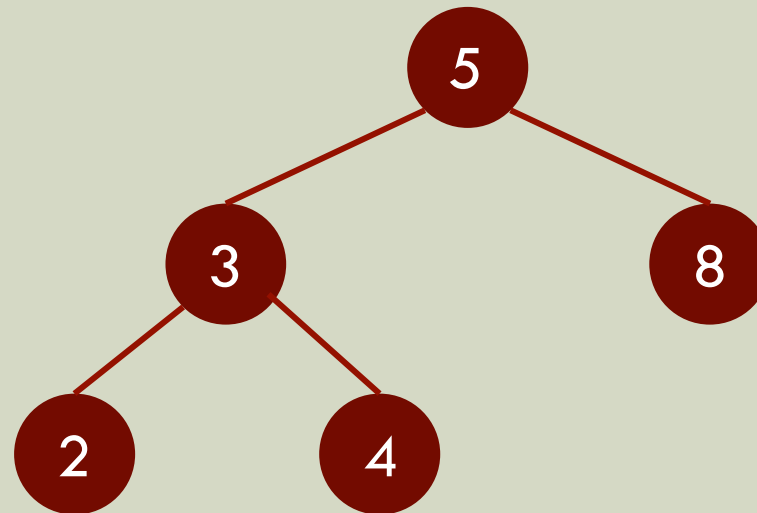


PUC Minas – Engenharia de Software – Algoritmos e Estruturas de Dados II - Prof.^a Eveline Alonso Veloso

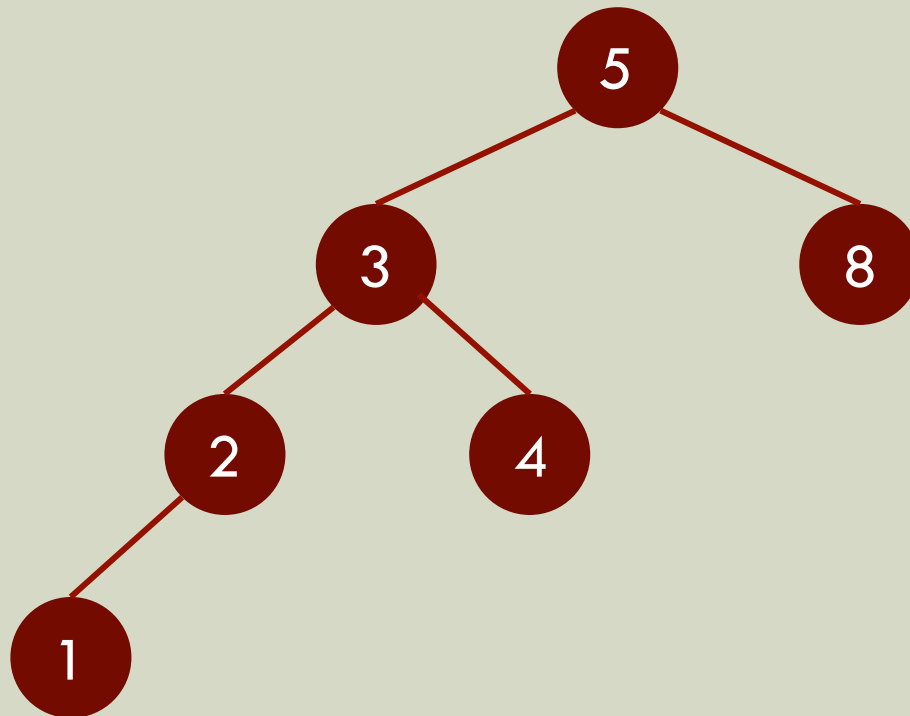
ABBs BALANCEADAS



ABBs BALANCEADAS

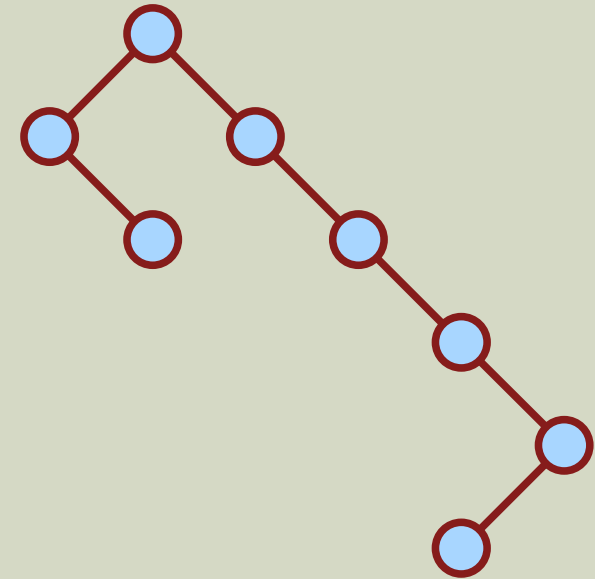


ABBs DESBALANCEADAS



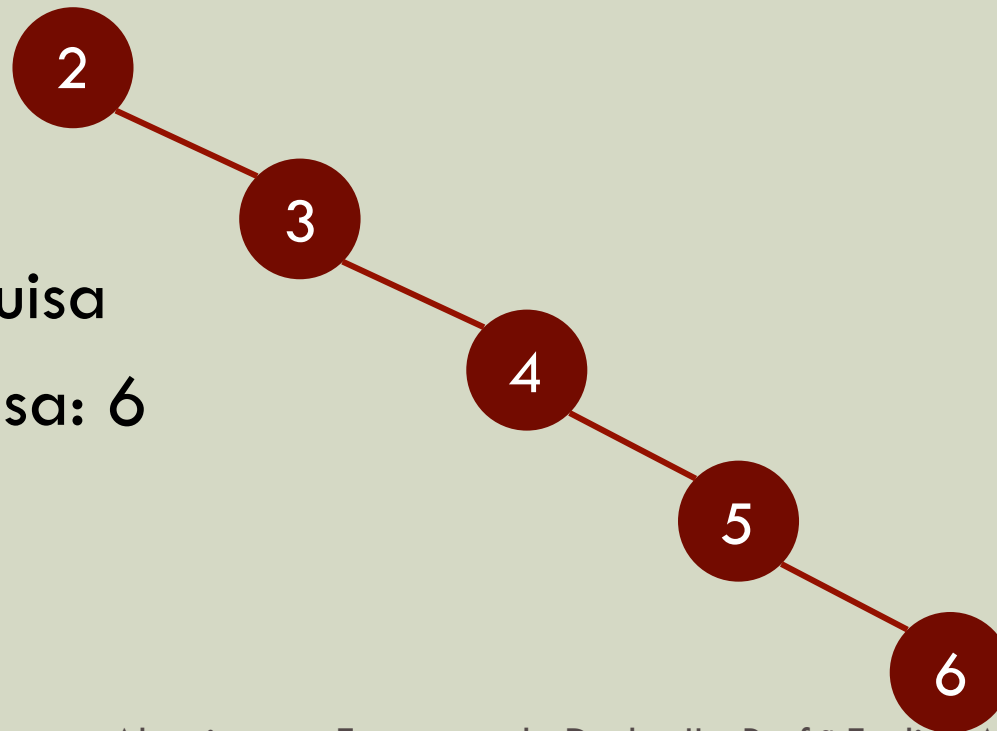
ABBs DESBALANCEADAS

- Árvores binárias de busca **podem tornar-se estruturas de dados ineficientes;**
- se suas **subárvores estiverem desbalanceadas.**



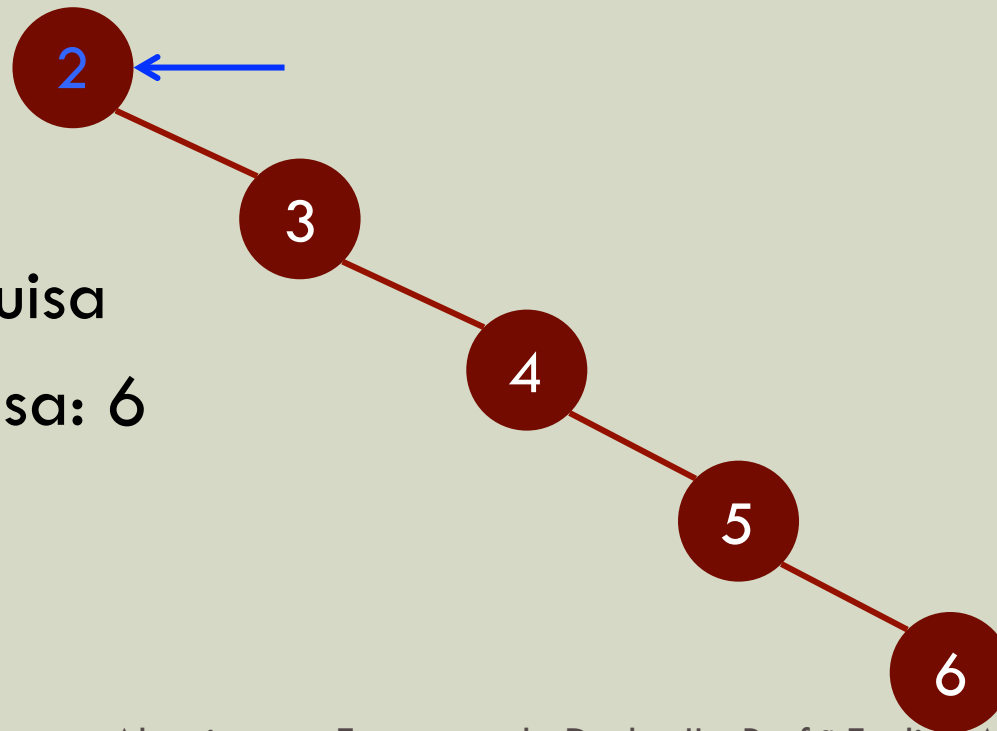
ABBs DESBALANCEADAS

Operação: pesquisa
Chave de pesquisa: 6



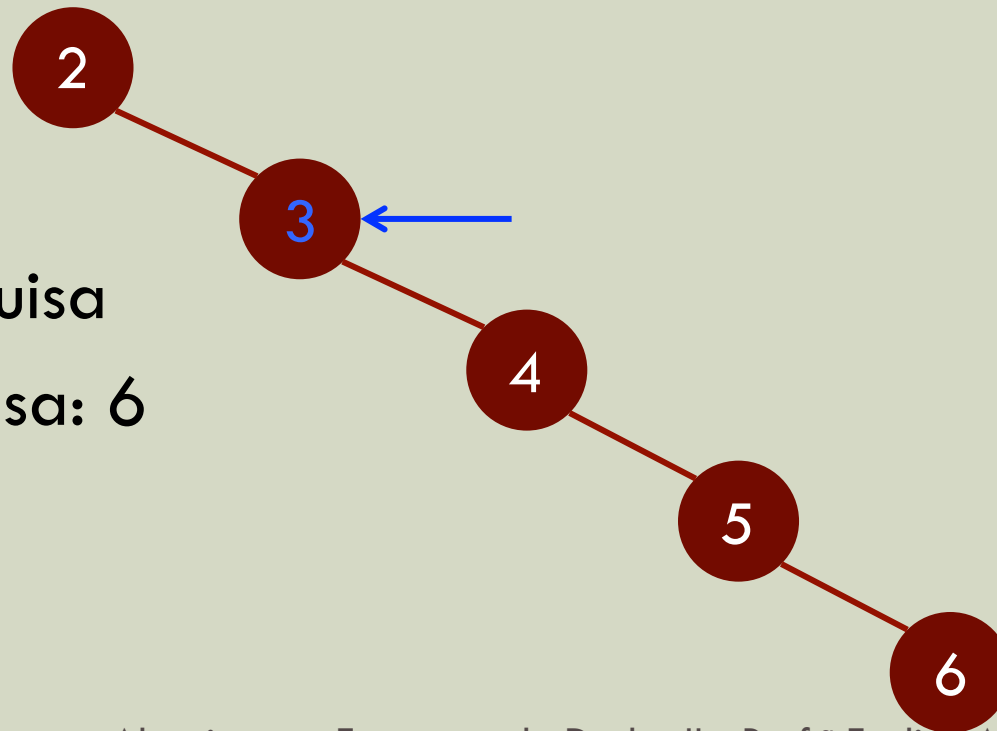
ABBs DESBALANCEADAS

Operação: pesquisa
Chave de pesquisa: 6



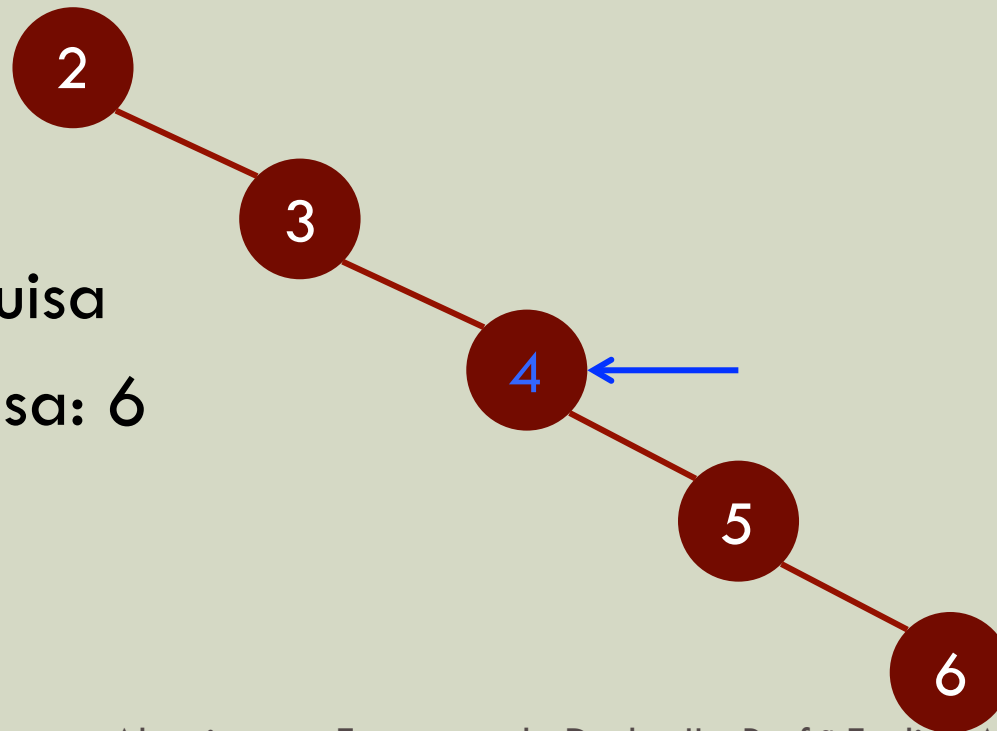
ABBs DESBALANCEADAS

Operação: pesquisa
Chave de pesquisa: 6



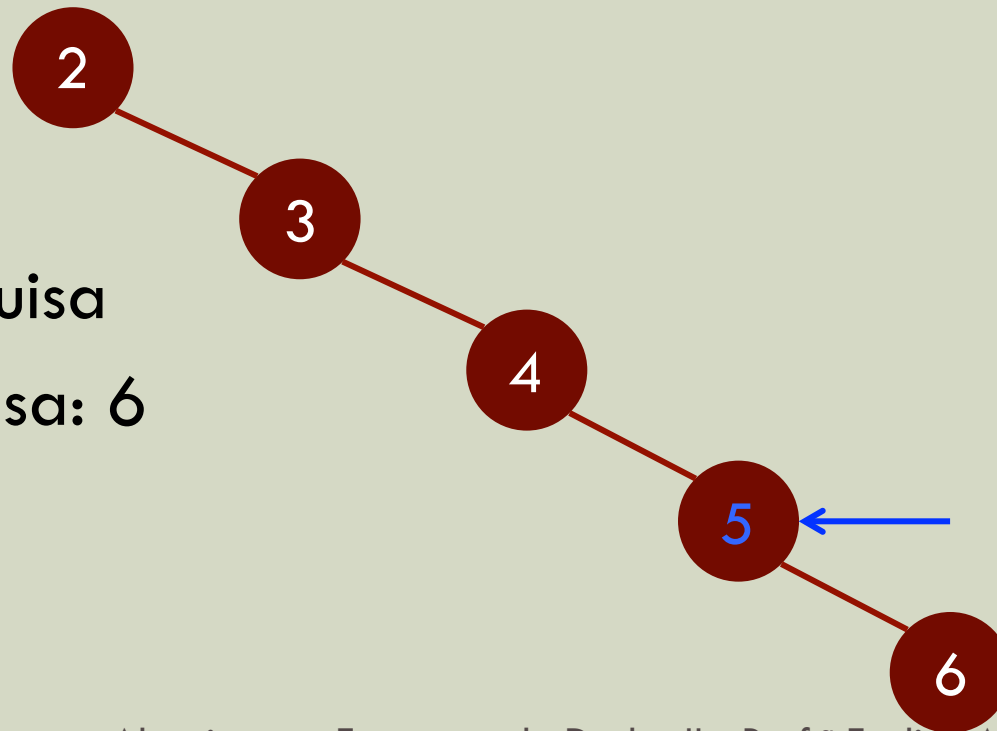
ABBs DESBALANCEADAS

Operação: pesquisa
Chave de pesquisa: 6



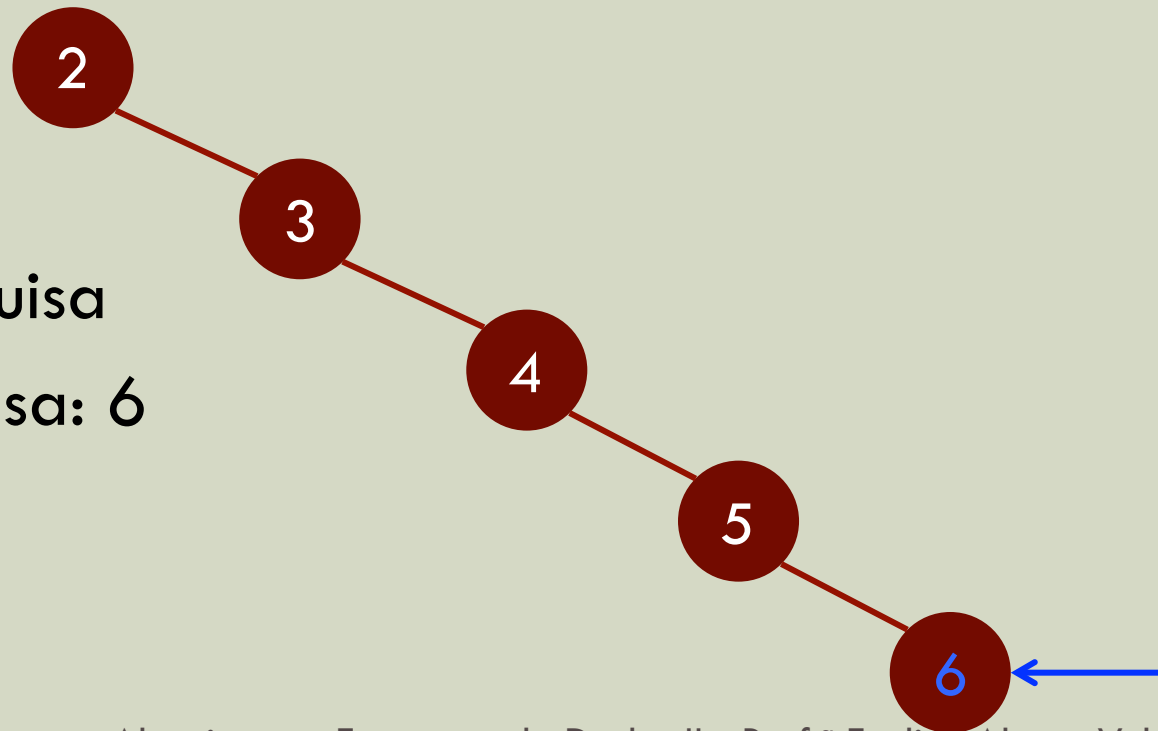
ABBs DESBALANCEADAS

Operação: pesquisa
Chave de pesquisa: 6



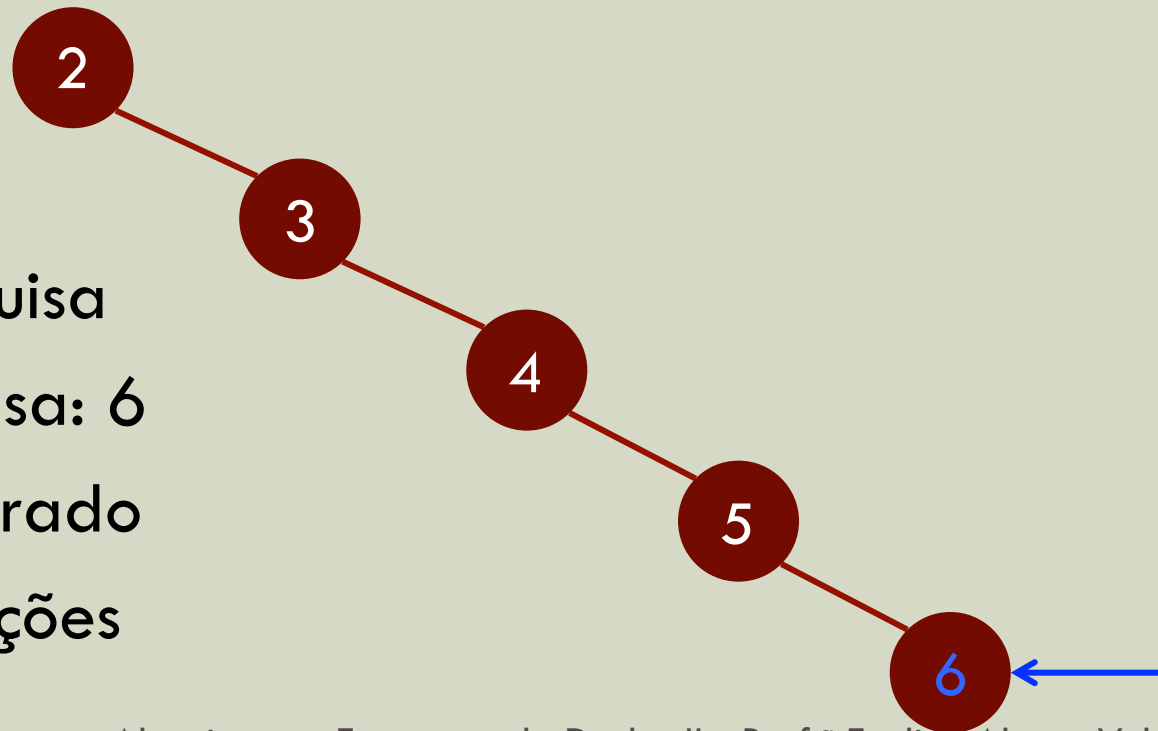
ABBs DESBALANCEADAS

Operação: pesquisa
Chave de pesquisa: 6



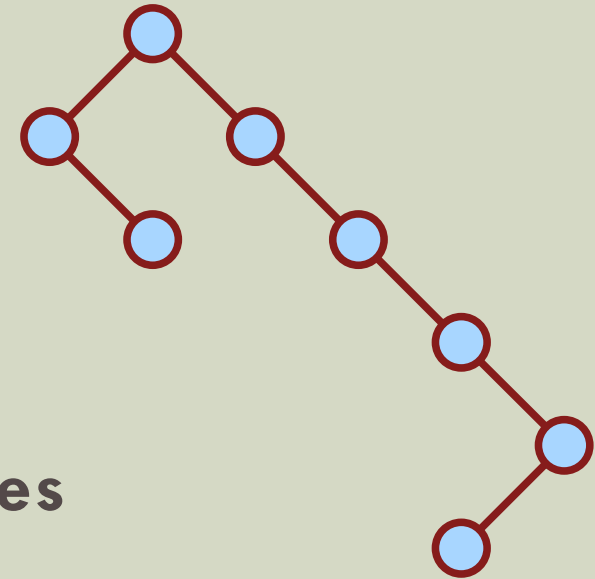
ABBs DESBALANCEADAS

Operação: pesquisa
Chave de pesquisa: 6
Resultado encontrado
após 5 comparações



ABBs DESBALANCEADAS

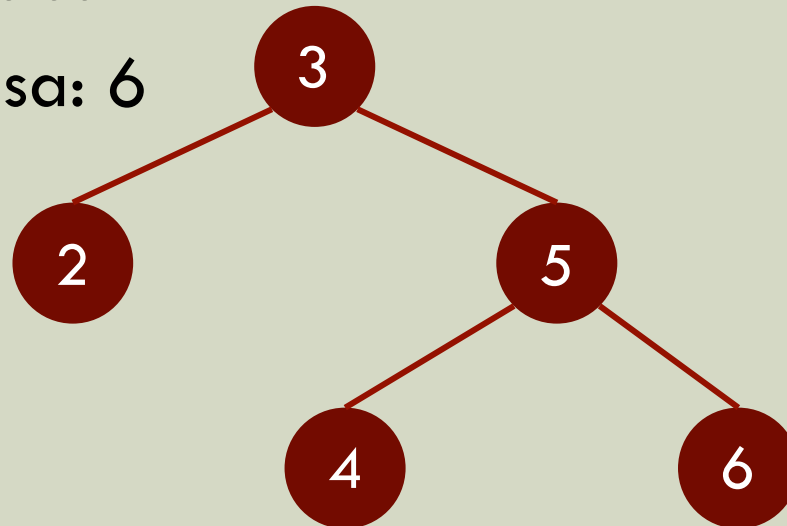
- **Operações** em árvores binárias de busca desbalanceadas;
- podem ter **custos computacionais semelhantes** aos de **listas lineares**.



ABBs BALANCEADAS

Operação: pesquisa

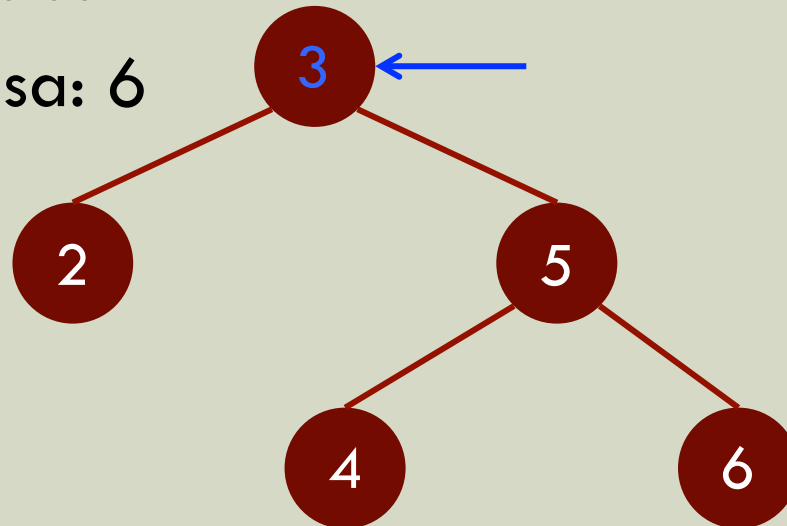
Chave de pesquisa: 6



ABBs BALANCEADAS

Operação: pesquisa

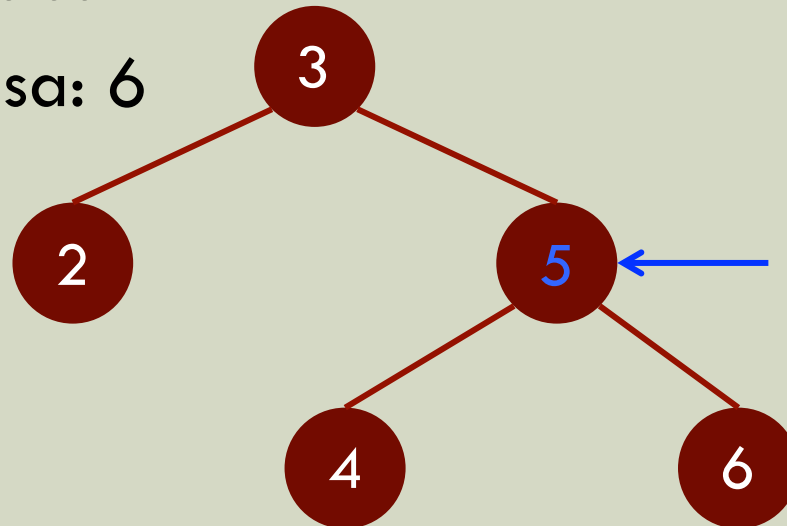
Chave de pesquisa: 6



ABBs BALANCEADAS

Operação: pesquisa

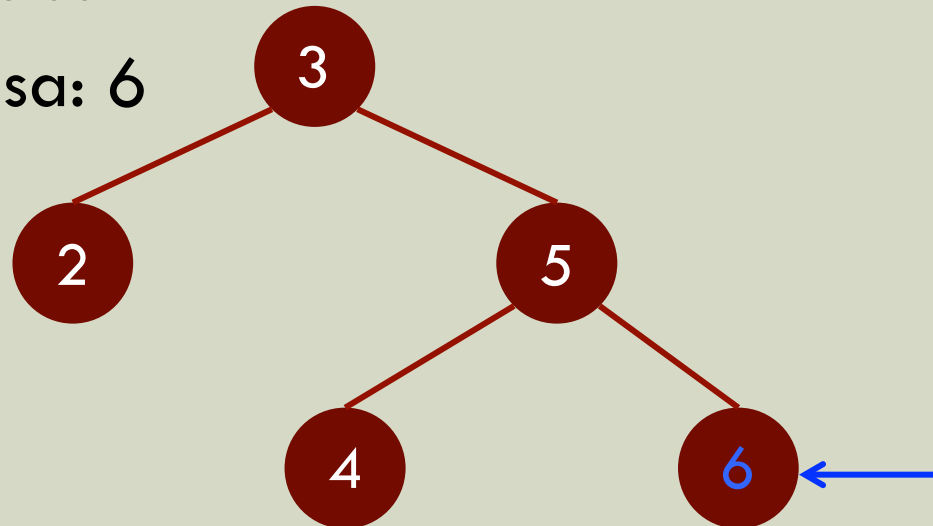
Chave de pesquisa: 6



ABBs BALANCEADAS

Operação: pesquisa

Chave de pesquisa: 6

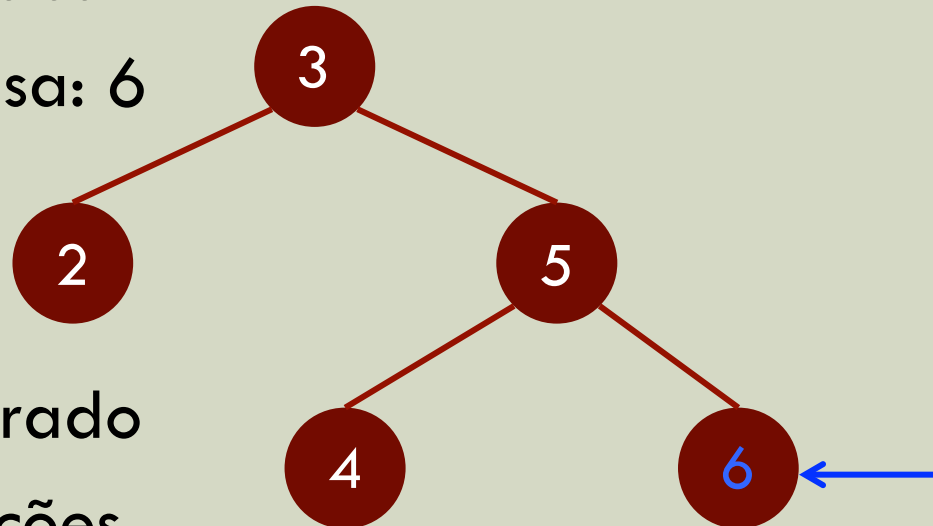


ABBs BALANCEADAS

Operação: pesquisa

Chave de pesquisa: 6

Resultado encontrado
após 3 comparações



ABBs BALANCEADAS

- **Minimizam tempo médio de pesquisa;**
 - para uma distribuição uniforme das chaves;
 - cada chave é igualmente provável de ser usada em uma pesquisa.
- **Contudo, custo para manter a árvore balanceada após cada operação de inserção ou remoção;**
 - **pode ser alto.**

ABBs BALANCEADAS

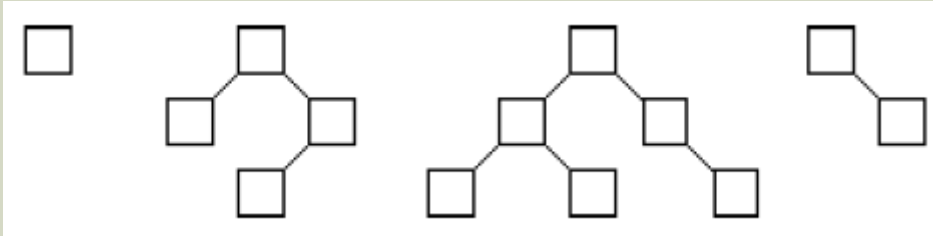
- Em uma árvore binária de busca balanceada tenta-se manter;
 - para **cada um de seus nós**;
 - as **alturas** de suas duas **subárvores equilibradas**.

ÁRVORES AVL

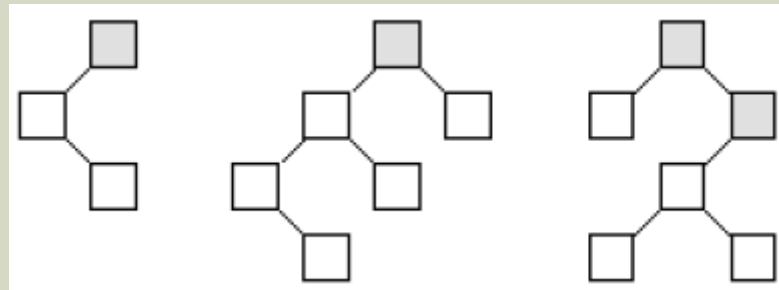
- Criadas por Adelson, Valeskii e Landis.
- Para **cada um de seus nós;**
 - **as alturas de suas subárvores esquerda e direita diferem em, no máximo, uma unidade.**

ÁRVORES AVL

- Árvores AVL:



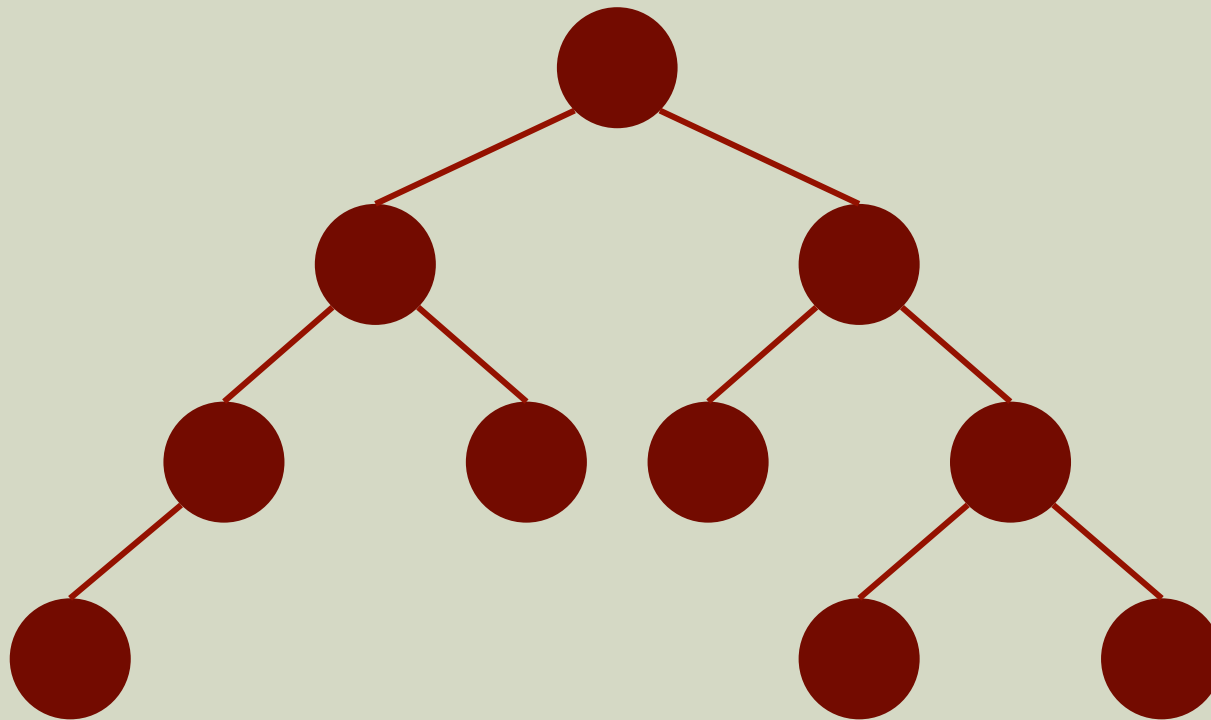
- Árvores não AVL:



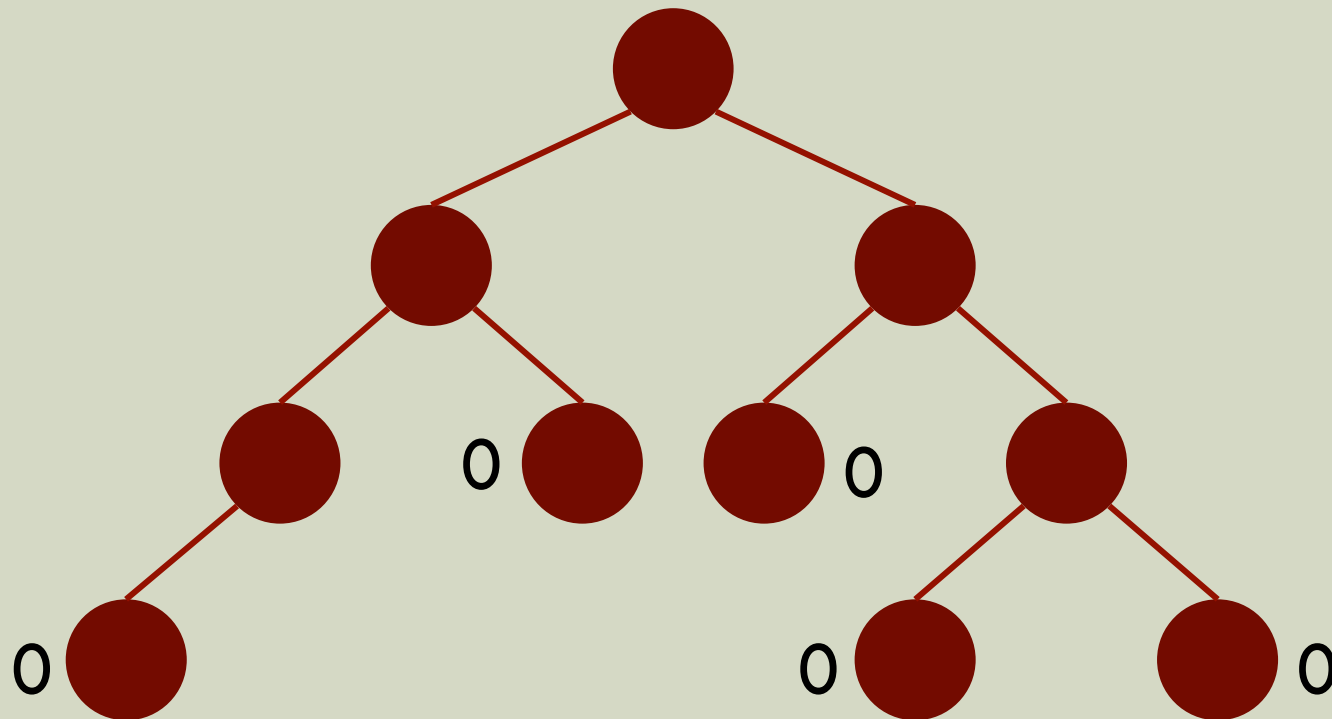
FATOR DE BALANCEAMENTO

- **Diferença entre as alturas das subárvores esquerda e direita;**
- **nessa ordem.**

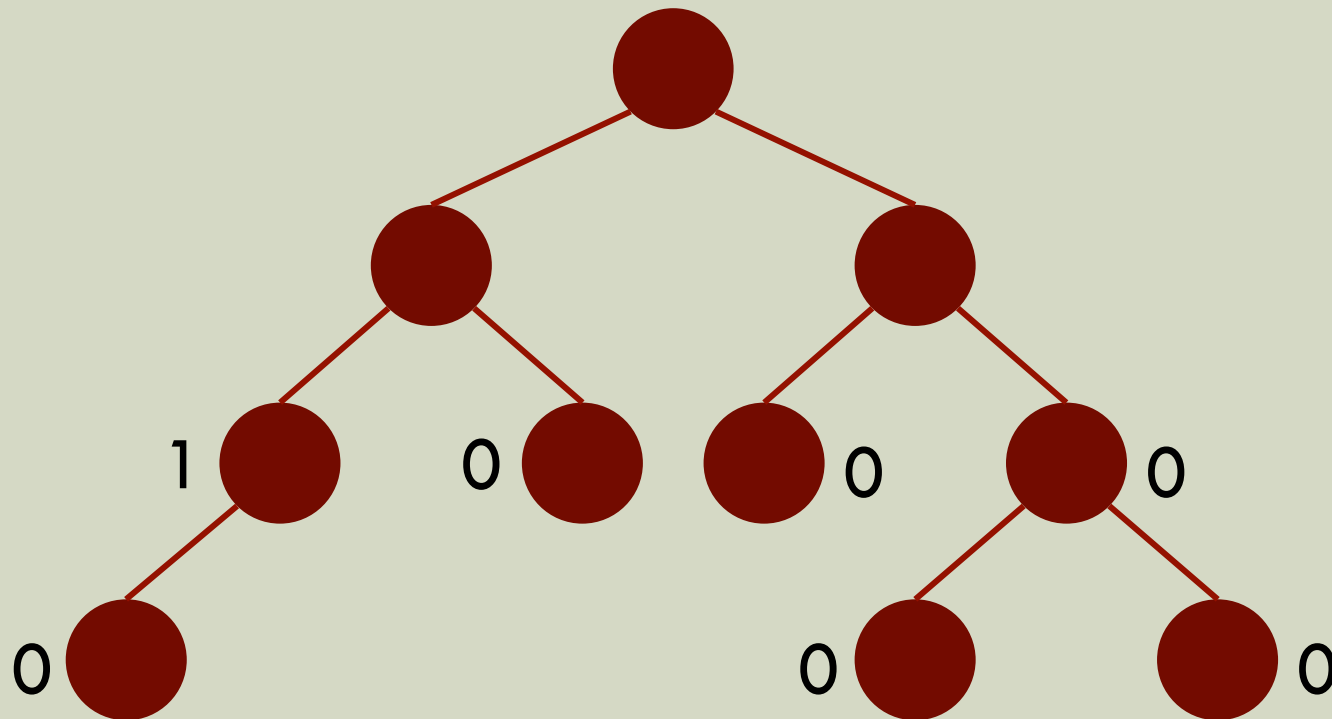
FATOR DE BALANCEAMENTO



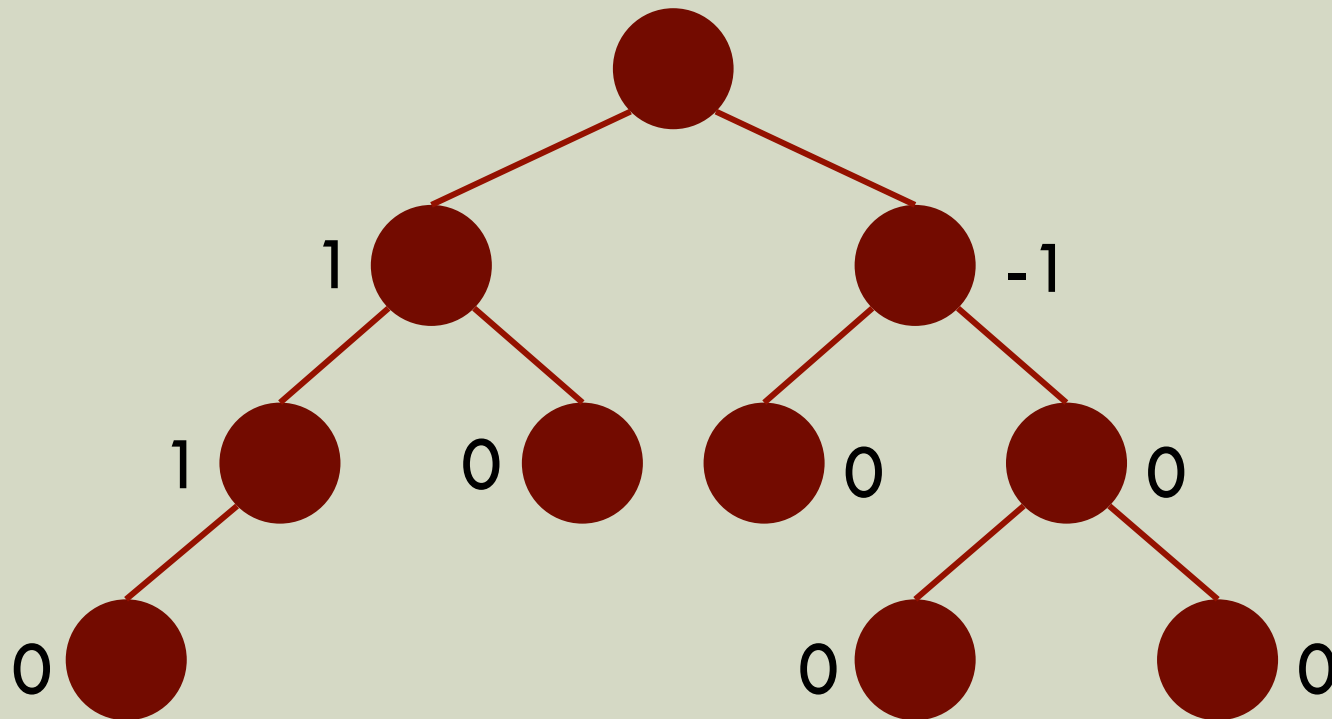
FATOR DE BALANCEAMENTO



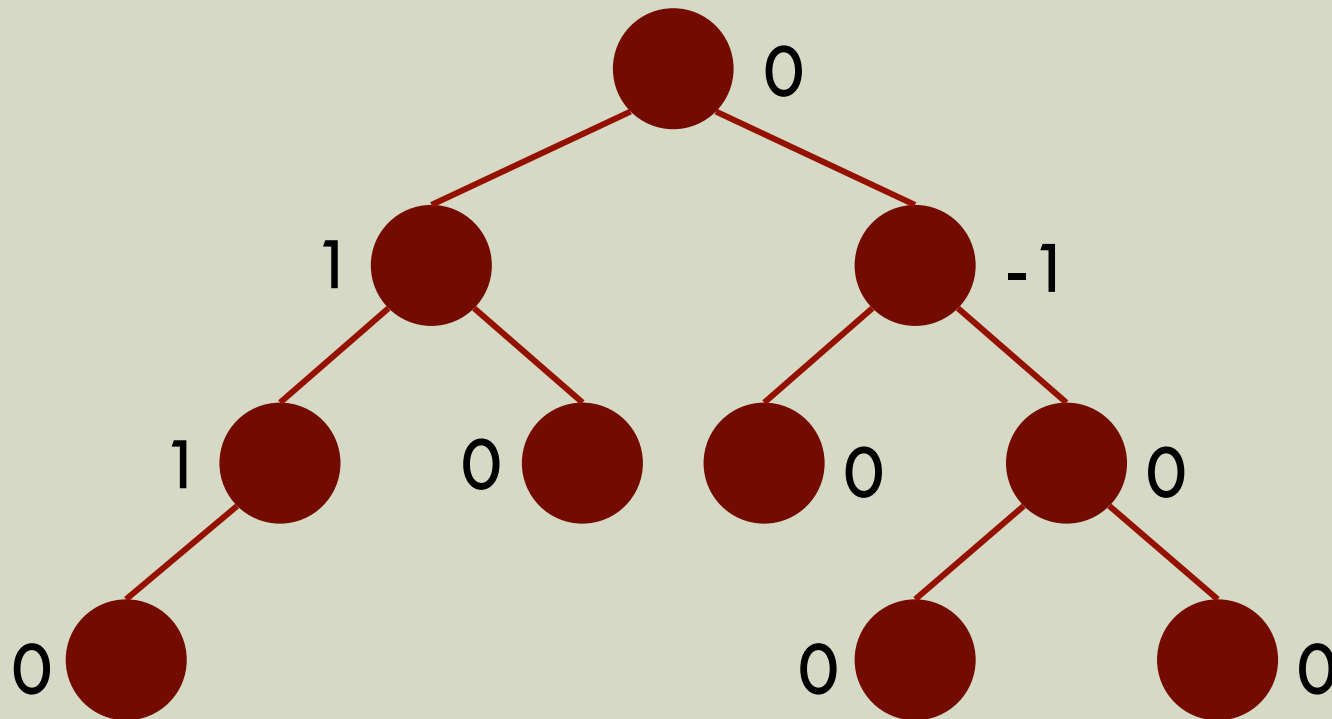
FATOR DE BALANCEAMENTO



FATOR DE BALANCEAMENTO



FATOR DE BALANCEAMENTO



ÁRVORES AVL – BALANCEAMENTO

- Árvores AVL se **auto-balanceiam**, se necessário;
 - **após cada operação de inserção ou remoção.**
- **Balanceamento** ocorre por meio de **trocas envolvendo apenas nodos localizados no caminho de pesquisa;**
 - apenas nós que estão no caminho de pesquisa são afetados.

ÁRVORES AVL – BALANCEAMENTO

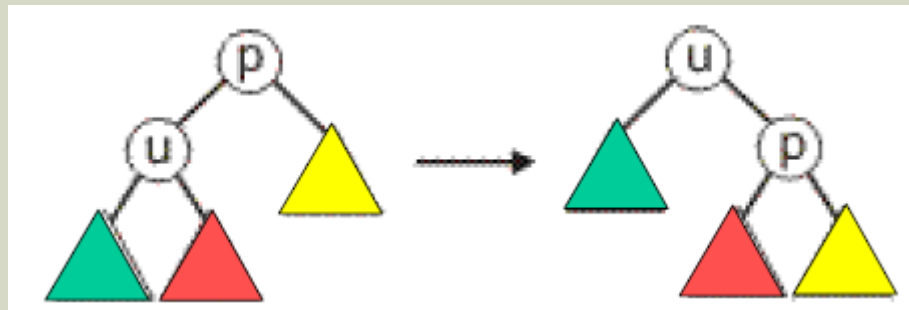
- **Necessita-se de balanceamento quando;**
 - **o fator de balanceamento de algum nodo da árvore torna-se 2 ou -2.**
- **Balanceamento é realizado rotacionando-se subárvores.**

ÁRVORES AVL – BALANCEAMENTO

Fator	Fator do filho	Ação
2	Esq: -1	Rotação dupla: filho à esquerda, pai à direita
	Esq: 0	Rotação à direita
	Esq: 1	Rotação à direita
-2	Dir: -1	Rotação à esquerda
	Dir: 0	Rotação à esquerda
	Dir: 1	Rotação dupla: filho à direita, pai à esquerda

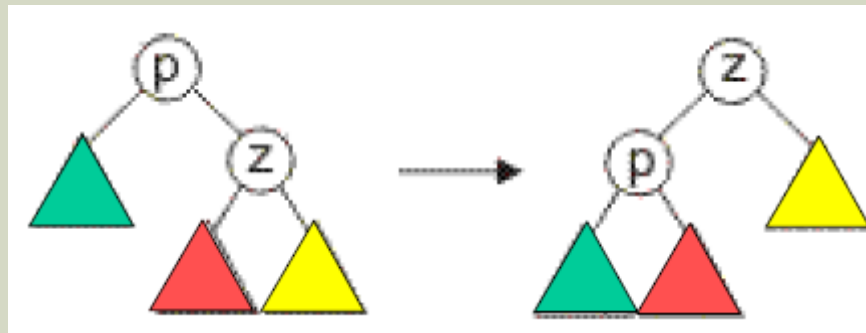
ÁRVORES AVL – BALANCEAMENTO

- **Nó desbalanceado à esquerda:**
 - **rotação simples para a direita;**
 - p torna-se o filho à direita de u ;
 - o antigo filho à direita de u ;
 - torna-se o novo filho à esquerda de p .



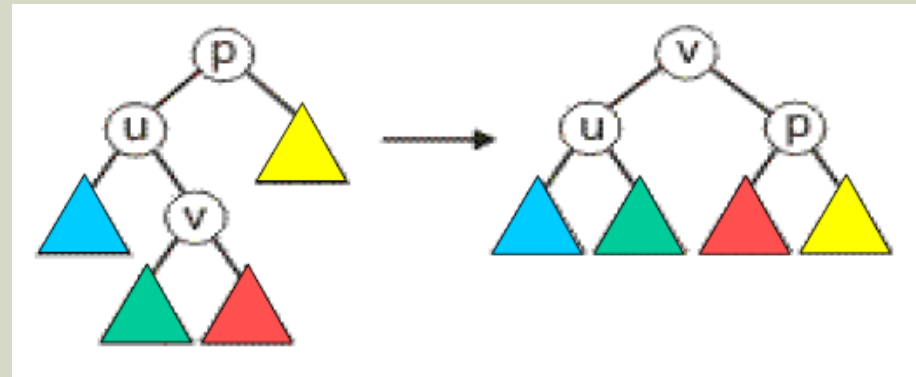
ÁRVORES AVL – BALANCEAMENTO

- **Nó desbalanceado à direita:**
 - **rotação simples para a esquerda;**
 - p torna-se o filho à esquerda de z ;
 - o antigo filho à esquerda de z ;
 - torna-se o novo filho à direita de p .



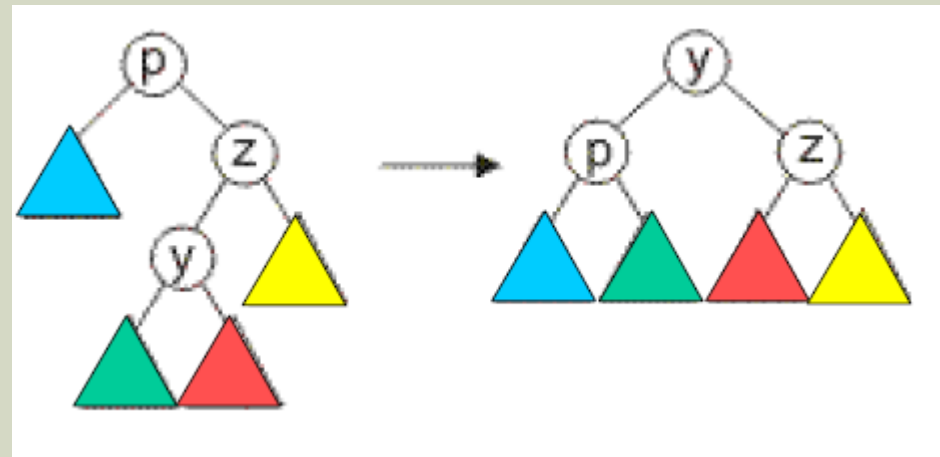
ÁRVORES AVL – BALANCEAMENTO

- **Nó desbalanceado à esquerda e seu filho à esquerda inclinado no sentido inverso ao do pai:**
 - **rotação dupla;**
 - rotação simples do filho para a esquerda e;
 - rotação simples do pai para a direita.

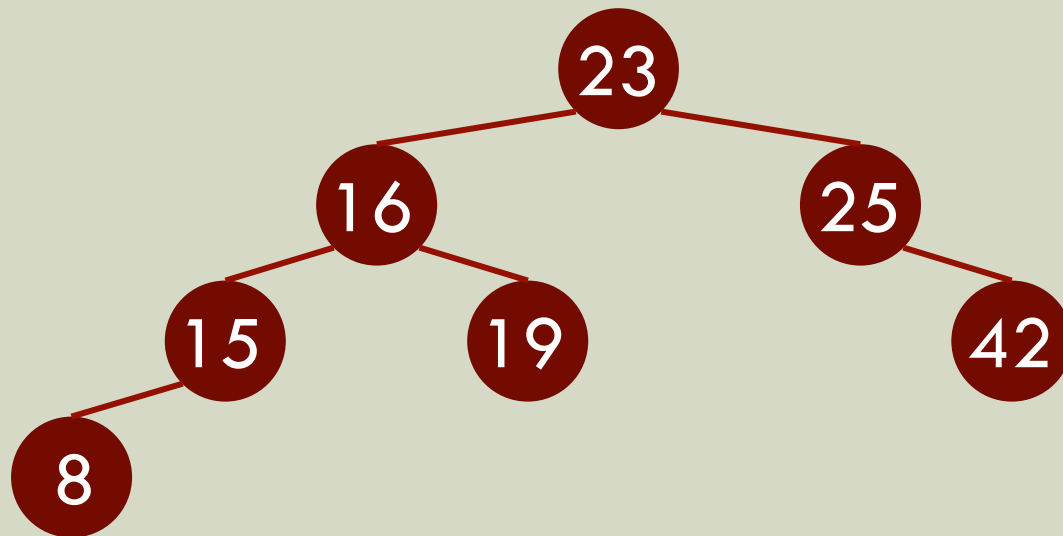


ÁRVORES AVL – BALANCEAMENTO

- **Nó desbalanceado à direita e seu filho à direita inclinado no sentido inverso ao do pai:**
 - **rotação dupla;**
 - rotação simples do filho para a direita e;
 - rotação simples do pai para a esquerda.

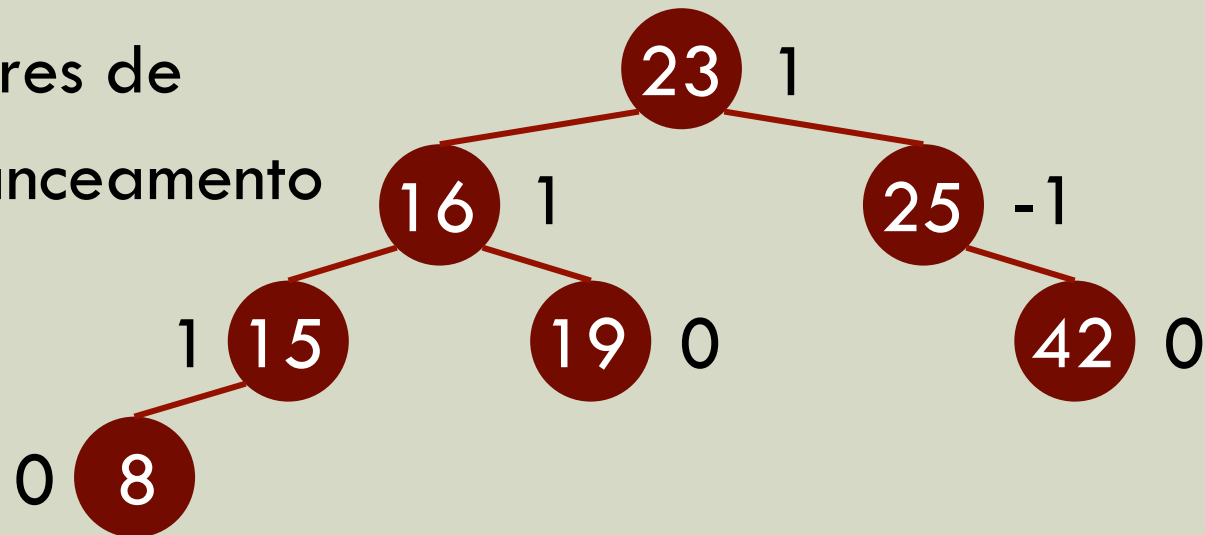


ÁRVORE AVL



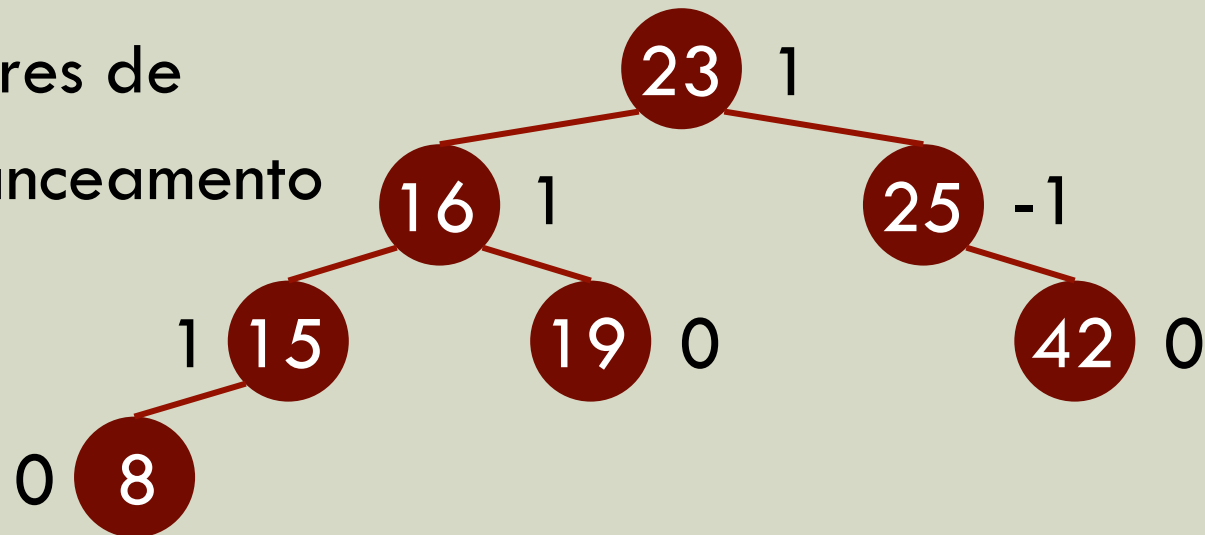
ÁRVORE AVL

Fatores de
balanceamento



ÁRVORE AVL

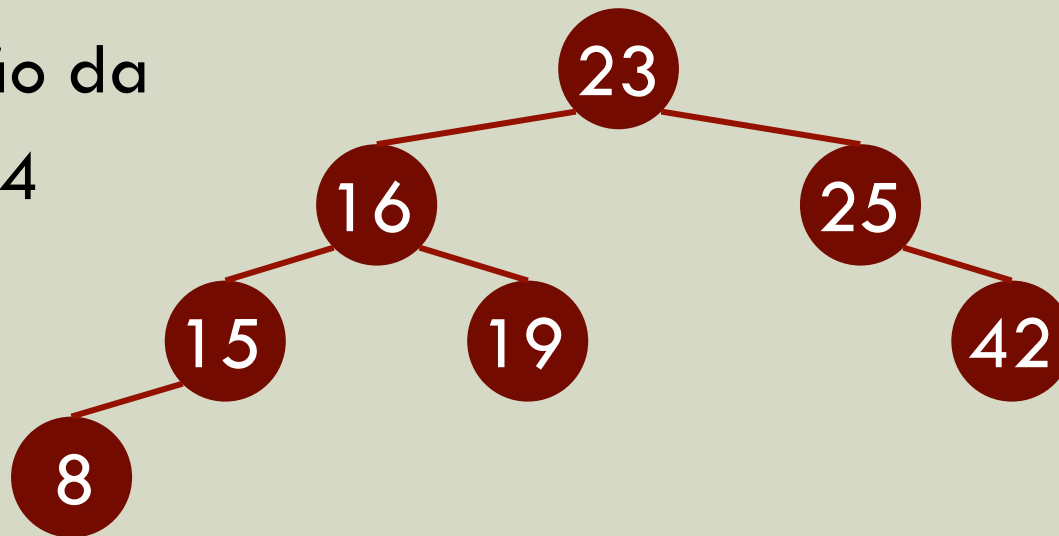
Fatores de
balanceamento



Árvore balanceada

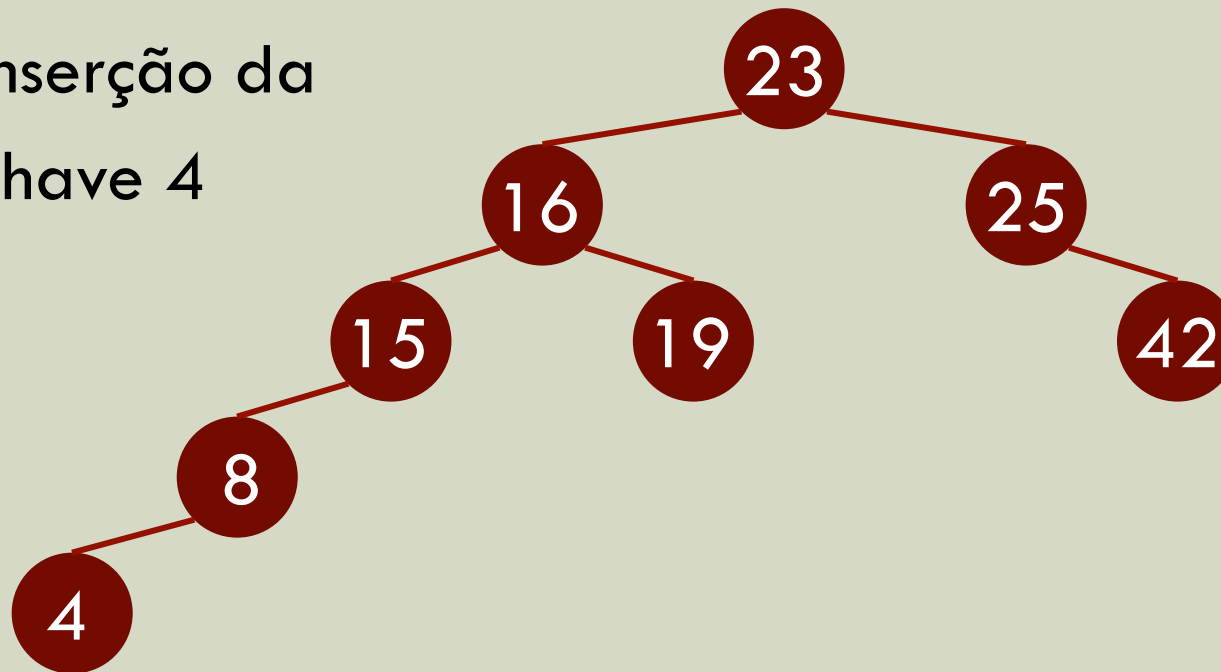
ÁRVORE AVL

Inserção da
chave 4



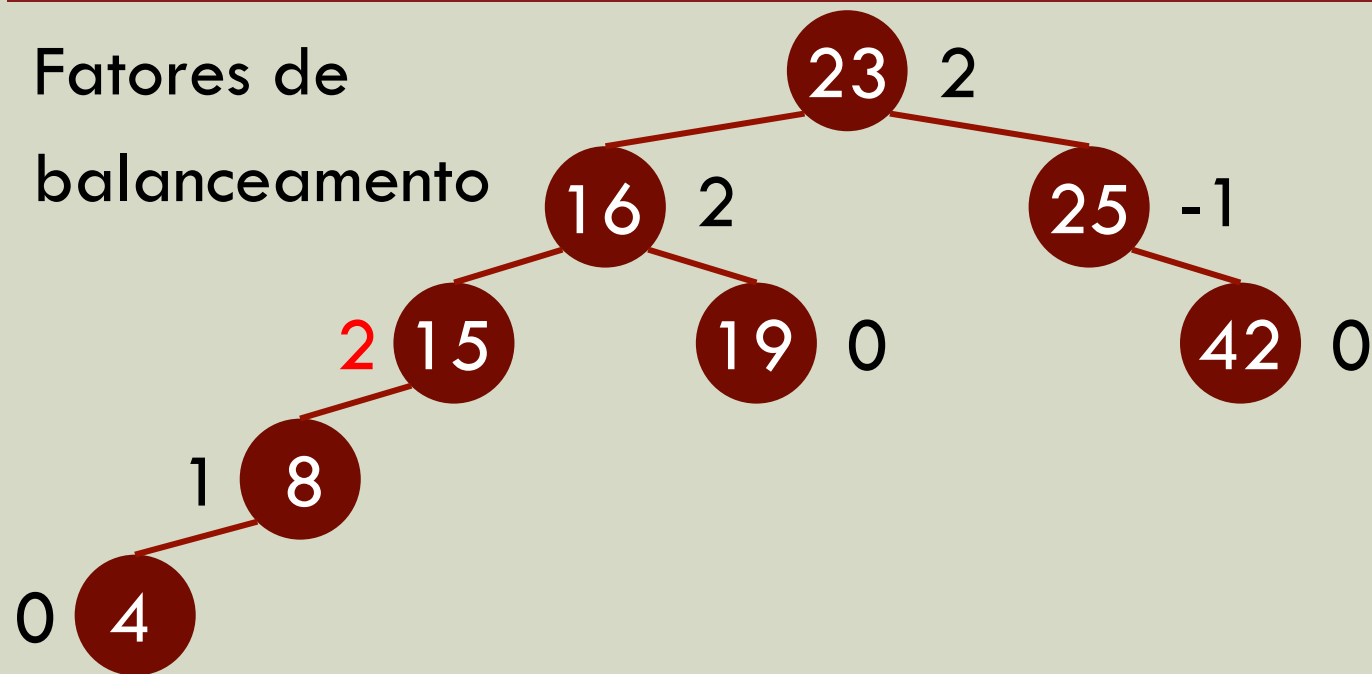
ÁRVORE AVL

Inserção da
chave 4



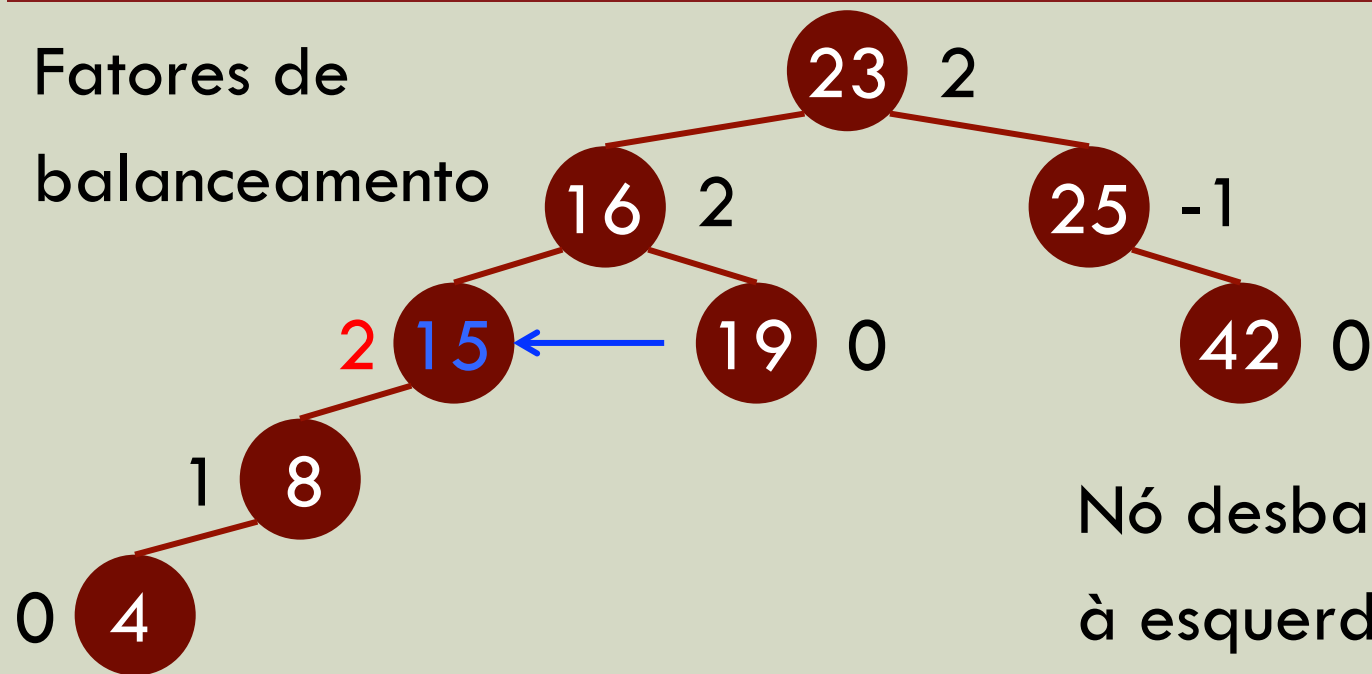
ÁRVORE AVL

Fatores de
balanceamento



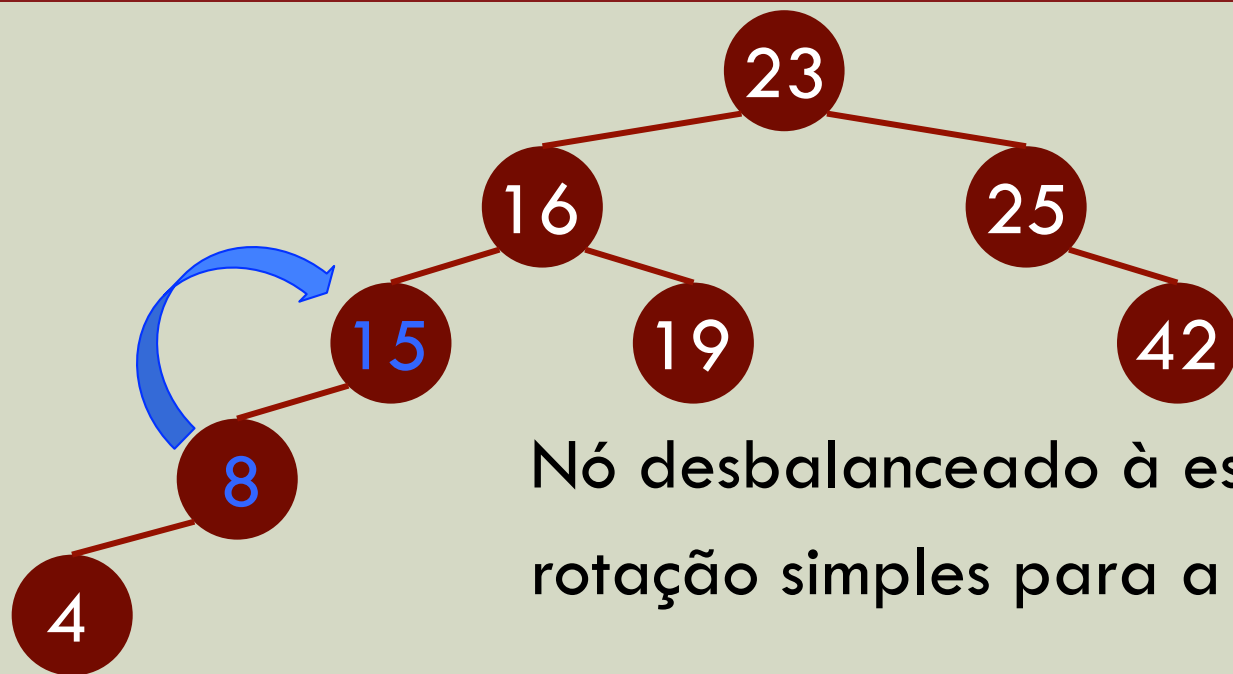
ÁRVORE AVL

Fatores de
balanceamento



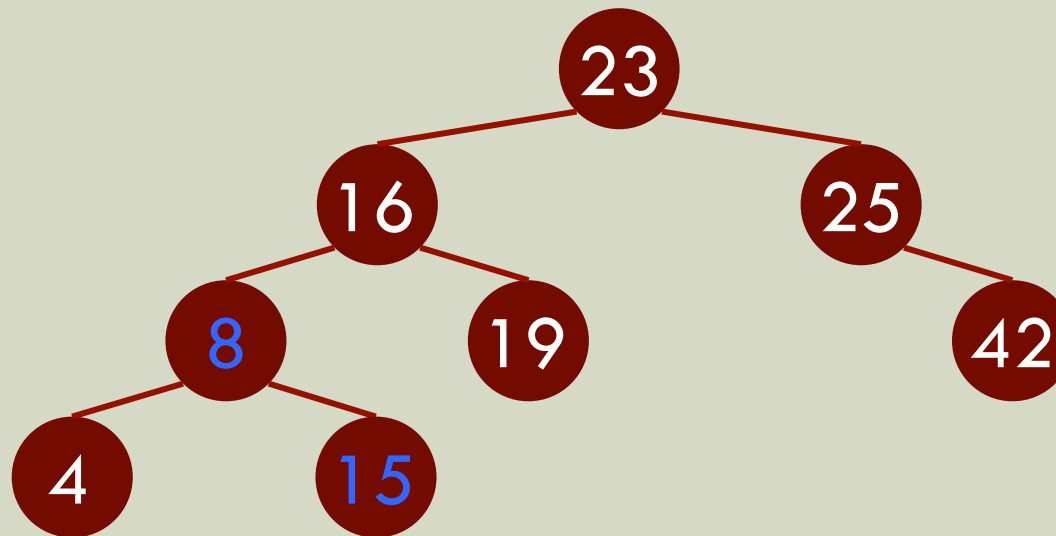
Nó desbalanceado
à esquerda

ÁRVORE AVL



Nó desbalanceado à esquerda:
rotação simples para a direita

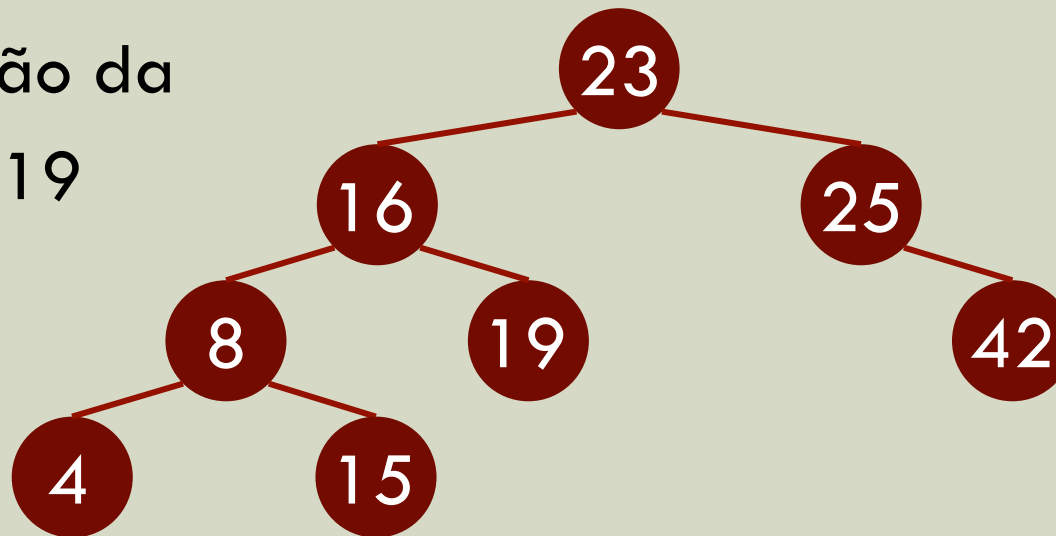
ÁRVORE AVL



15 torna-se o filho à direita de 8

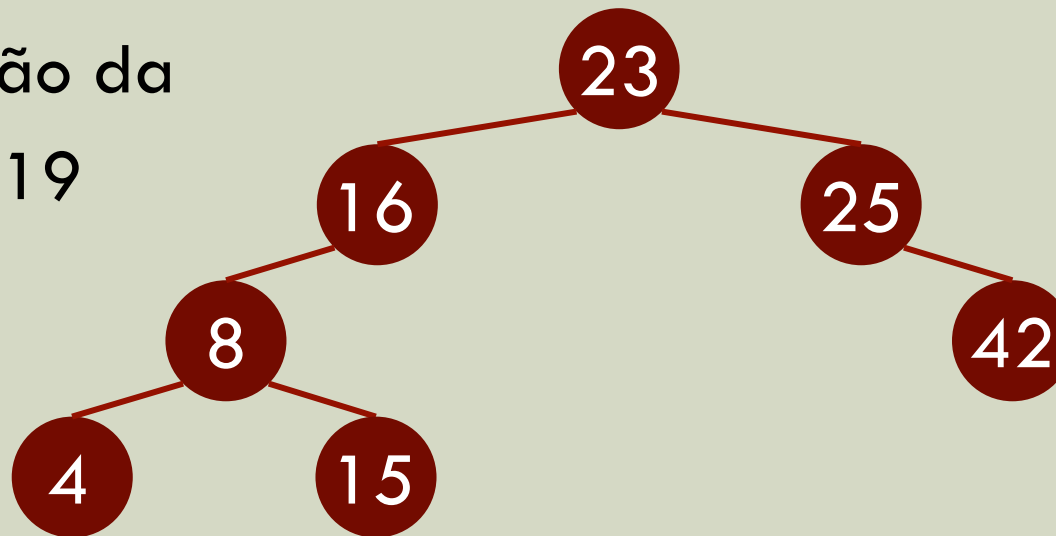
ÁRVORE AVL

Remoção da
chave 19



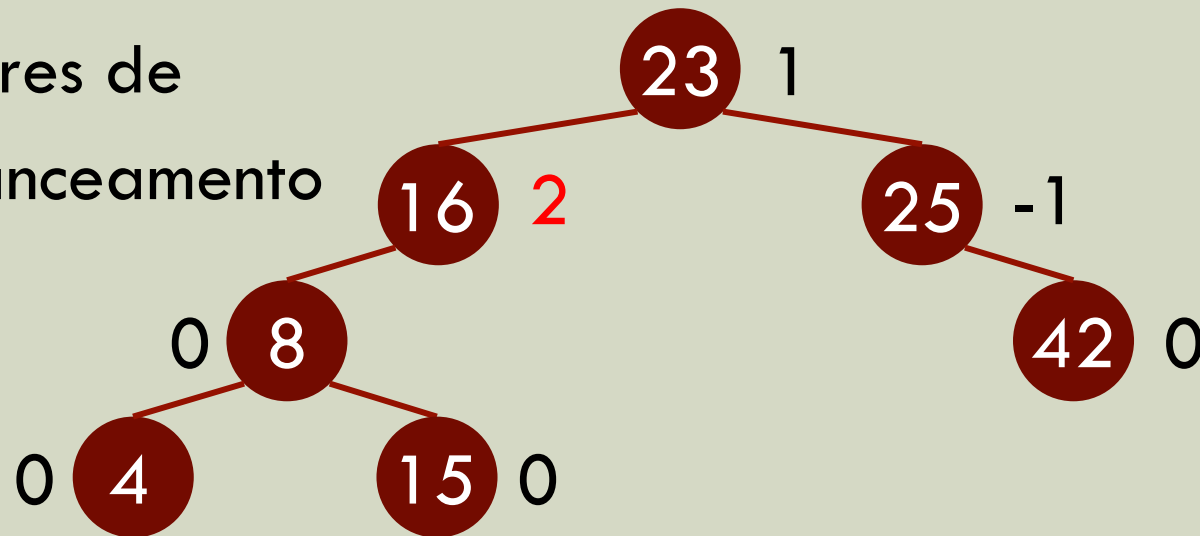
ÁRVORE AVL

Remoção da
chave 19



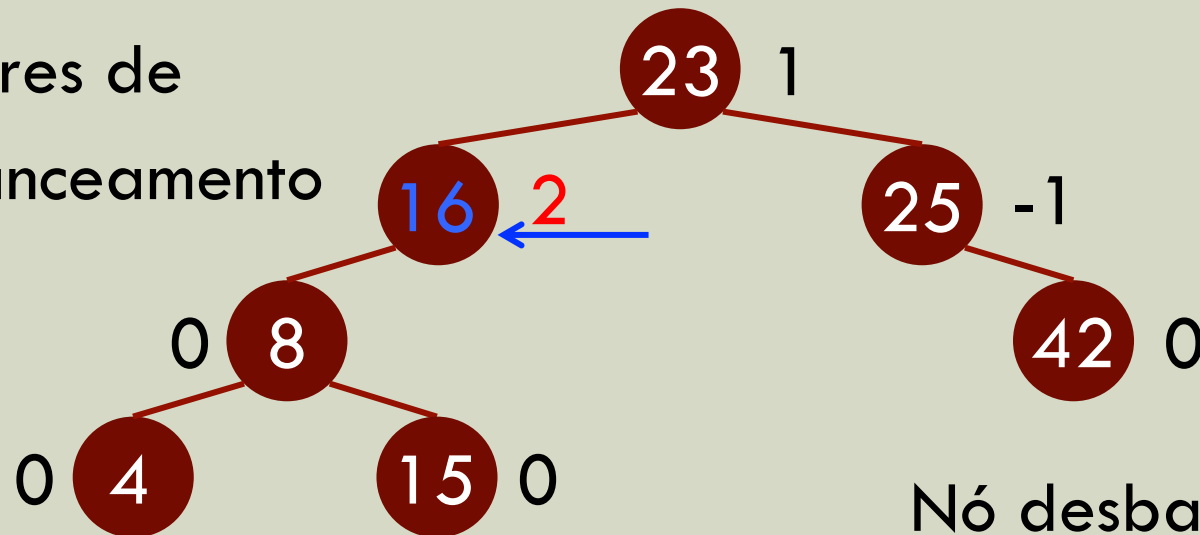
ÁRVORE AVL

Fatores de
balanceamento



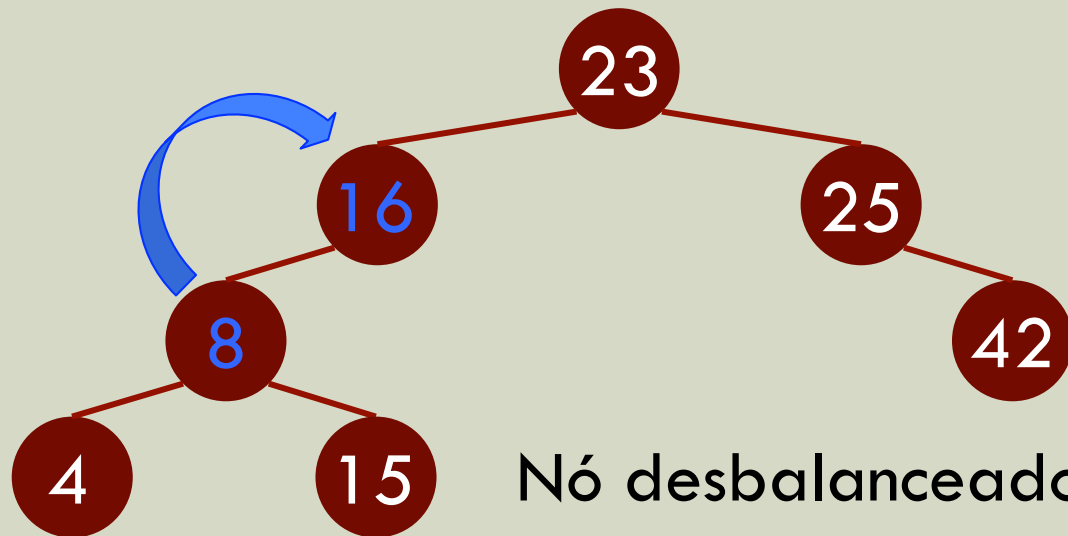
ÁRVORE AVL

Fatores de
balanceamento



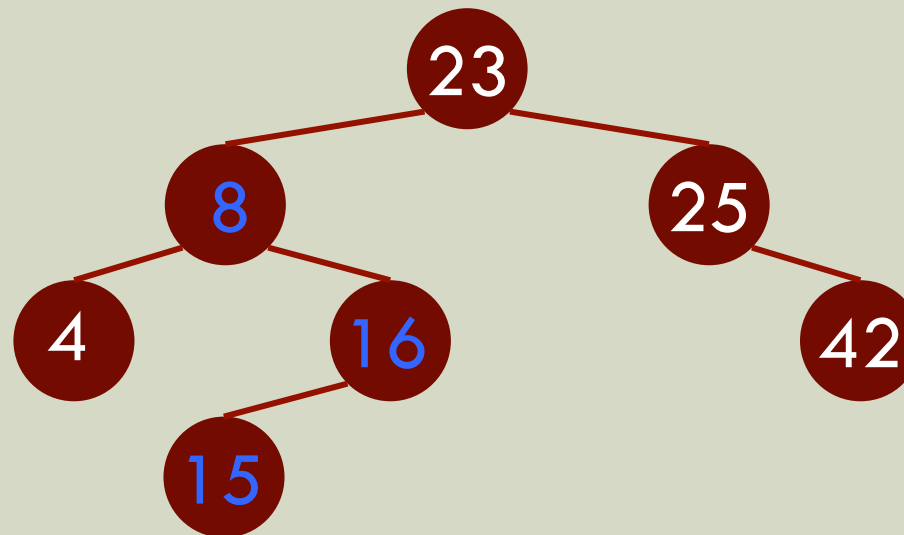
Nó desbalanceado
à esquerda

ÁRVORE AVL



Nó desbalanceado à esquerda:
rotação simples para a direita

ÁRVORE AVL

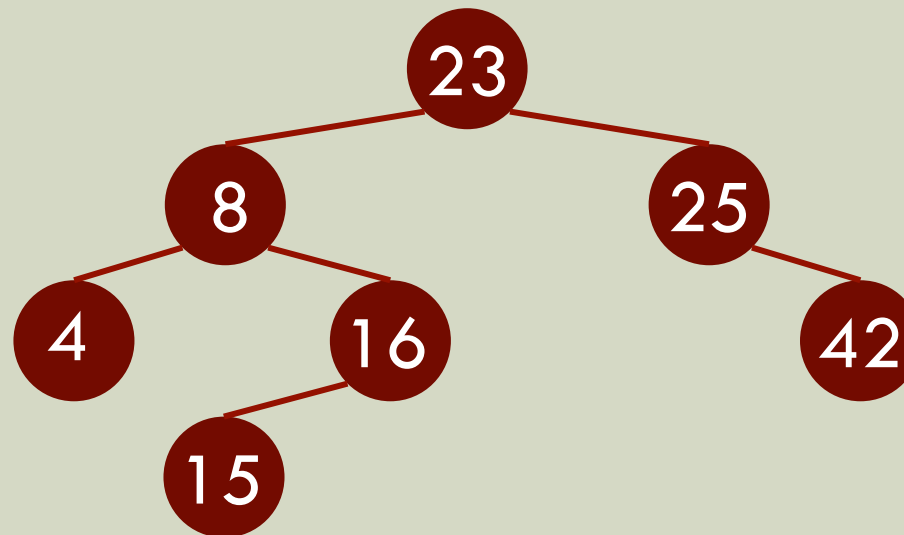


16 torna-se o filho à direita de 8

15 torna-se o filho à esquerda de 16

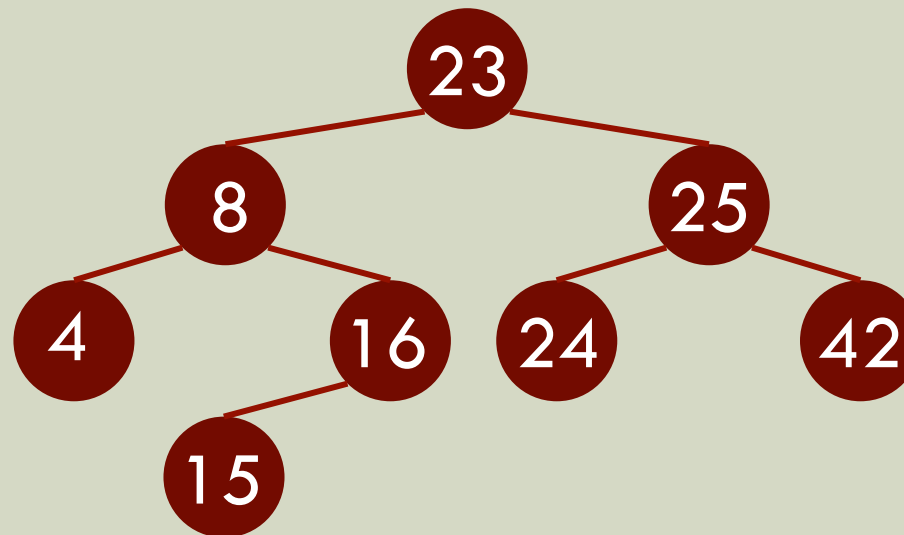
ÁRVORE AVL

Inserção da
chave 24



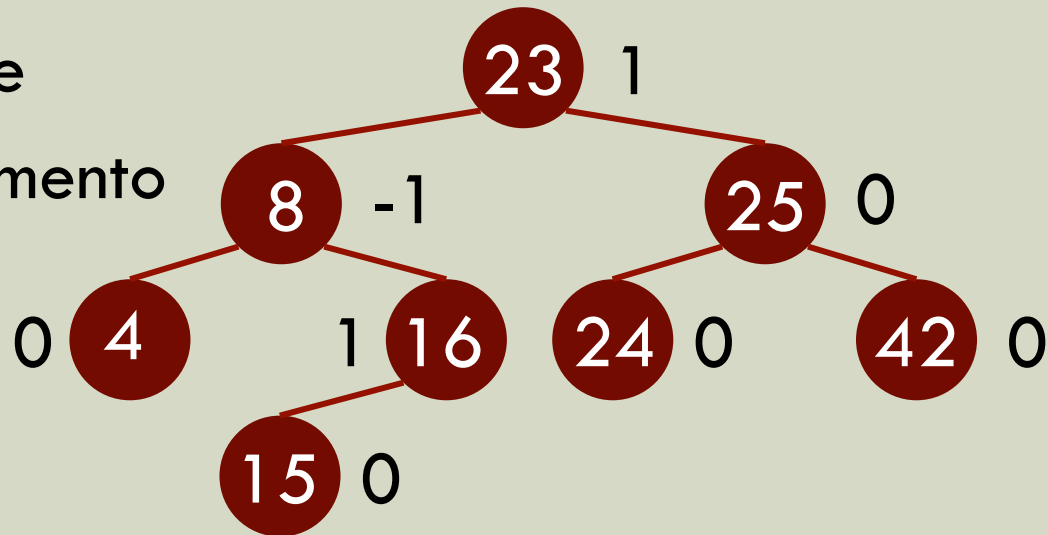
ÁRVORE AVL

Inserção da
chave 24



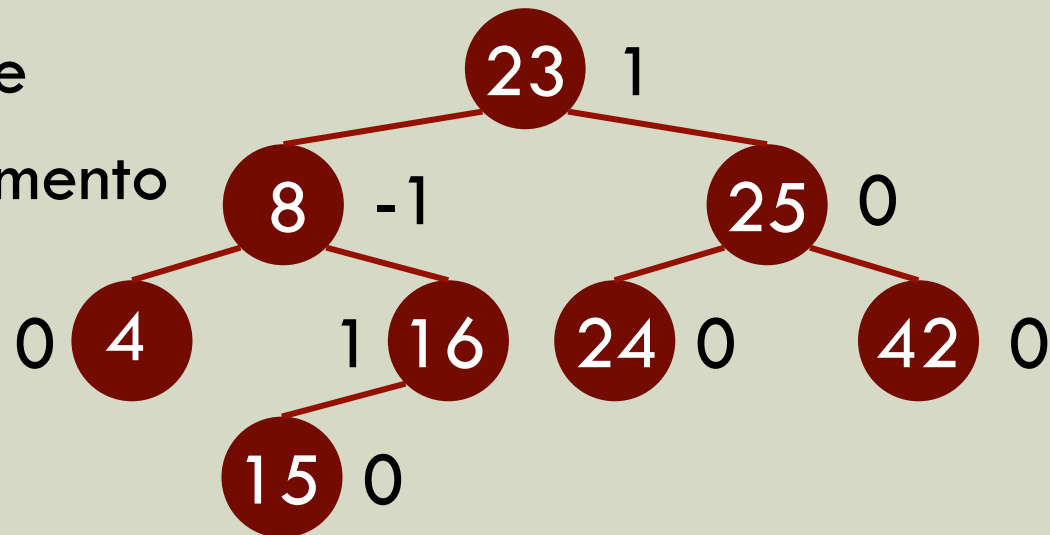
ÁRVORE AVL

Fatores de balanceamento



ÁRVORE AVL

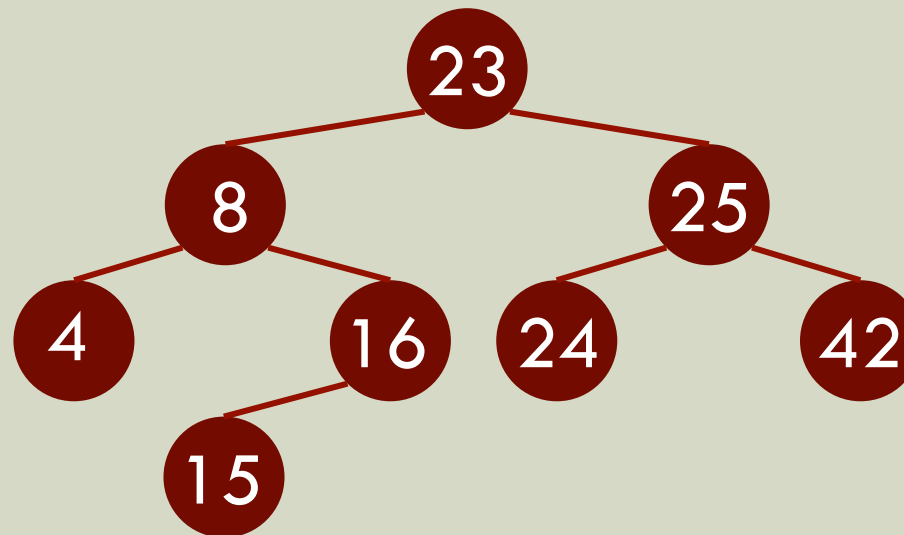
Fatores de
balanceamento



Árvore balanceada

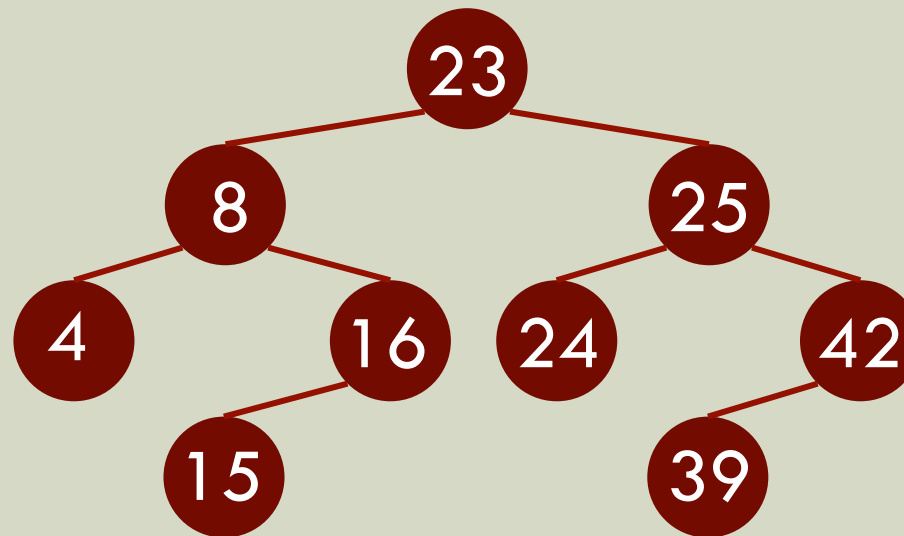
ÁRVORE AVL

Inserção da
chave 39



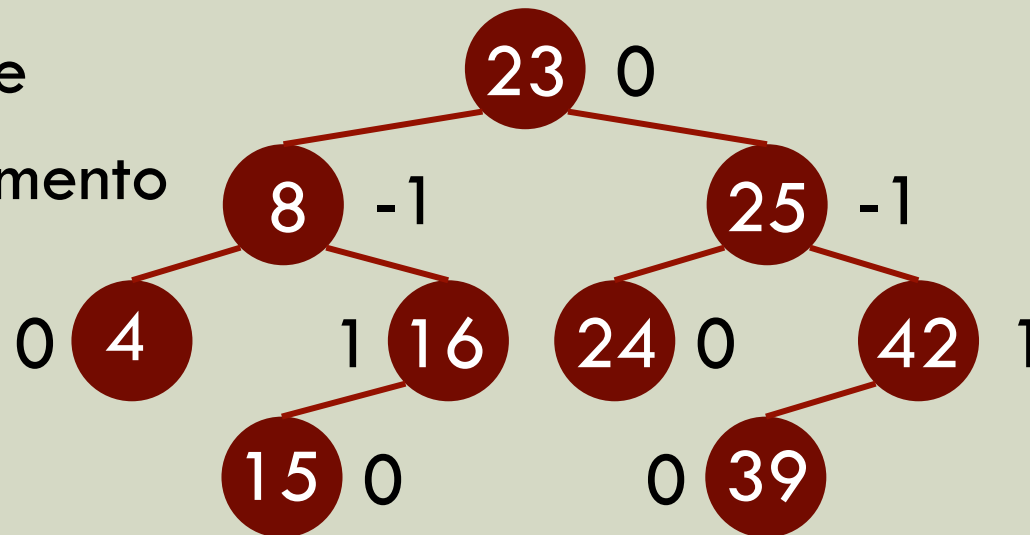
ÁRVORE AVL

Inserção da
chave 39



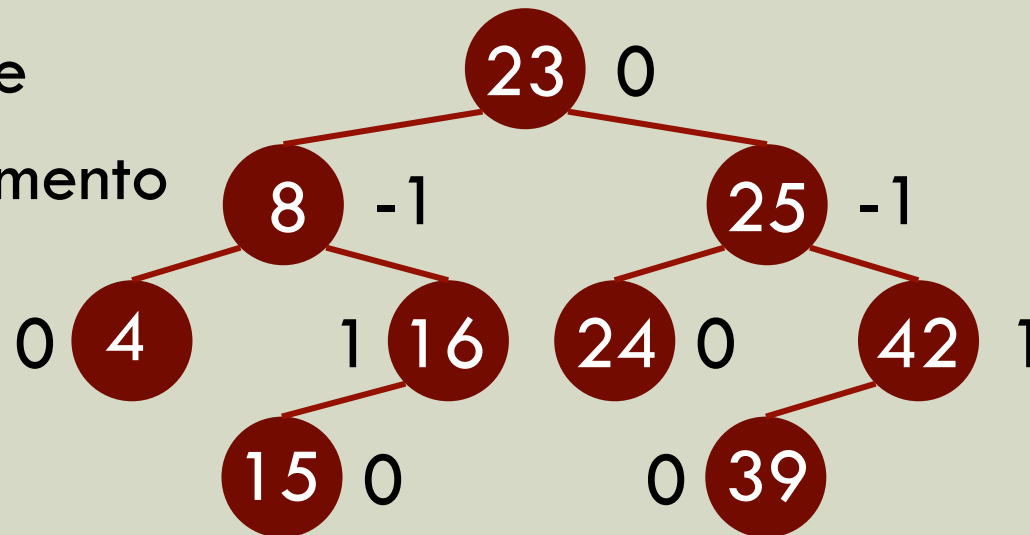
ÁRVORE AVL

Fatores de
balanceamento



ÁRVORE AVL

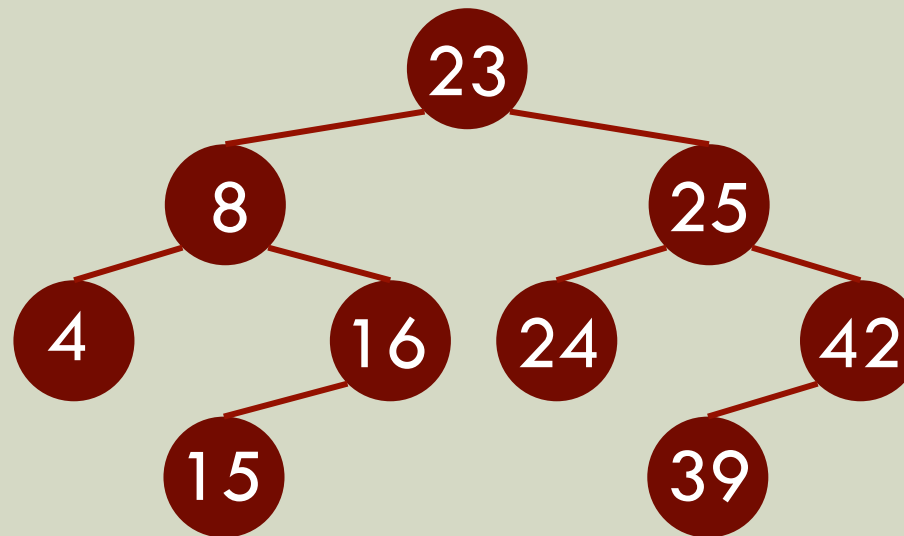
Fatores de
balanceamento



Árvore balanceada

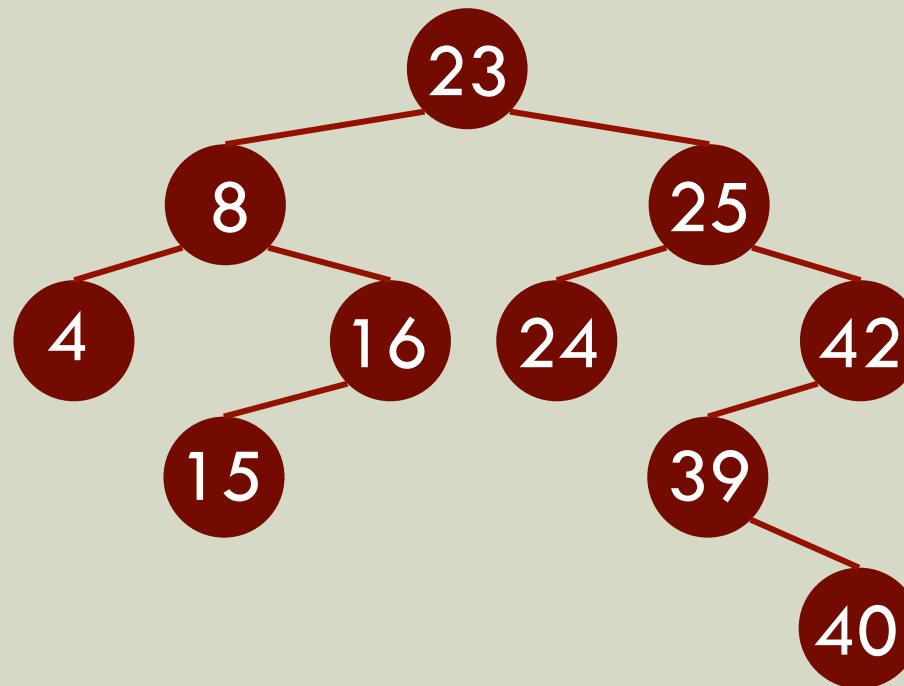
ÁRVORE AVL

Inserção da
chave 40



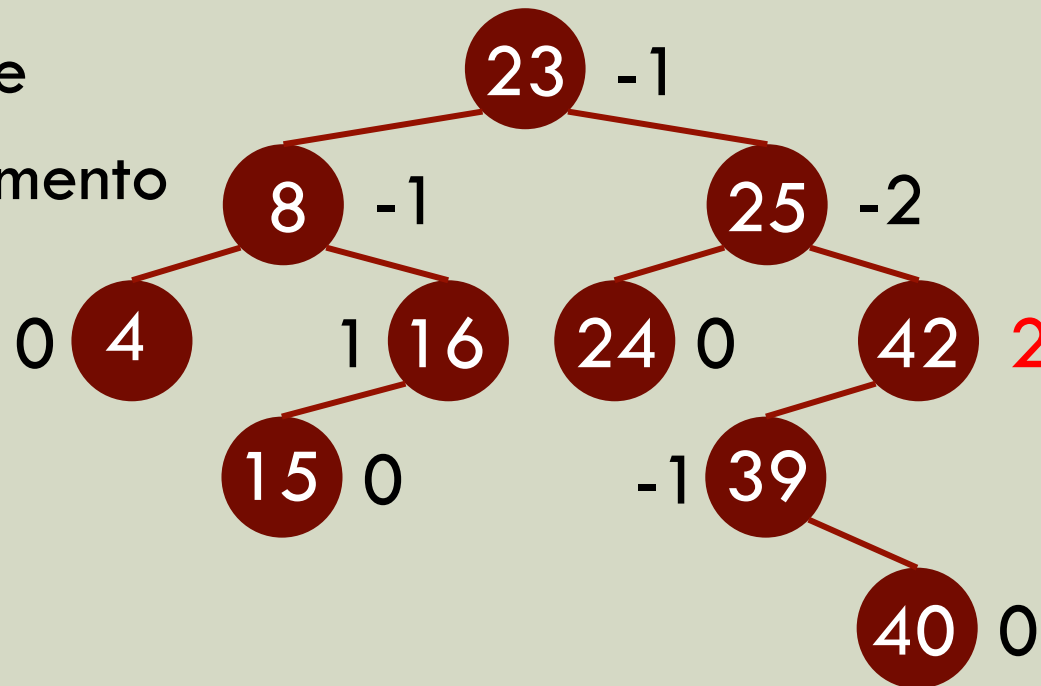
ÁRVORE AVL

Inserção da
chave 40



ÁRVORE AVL

Fatores de
balanceamento



ÁRVORE AVL

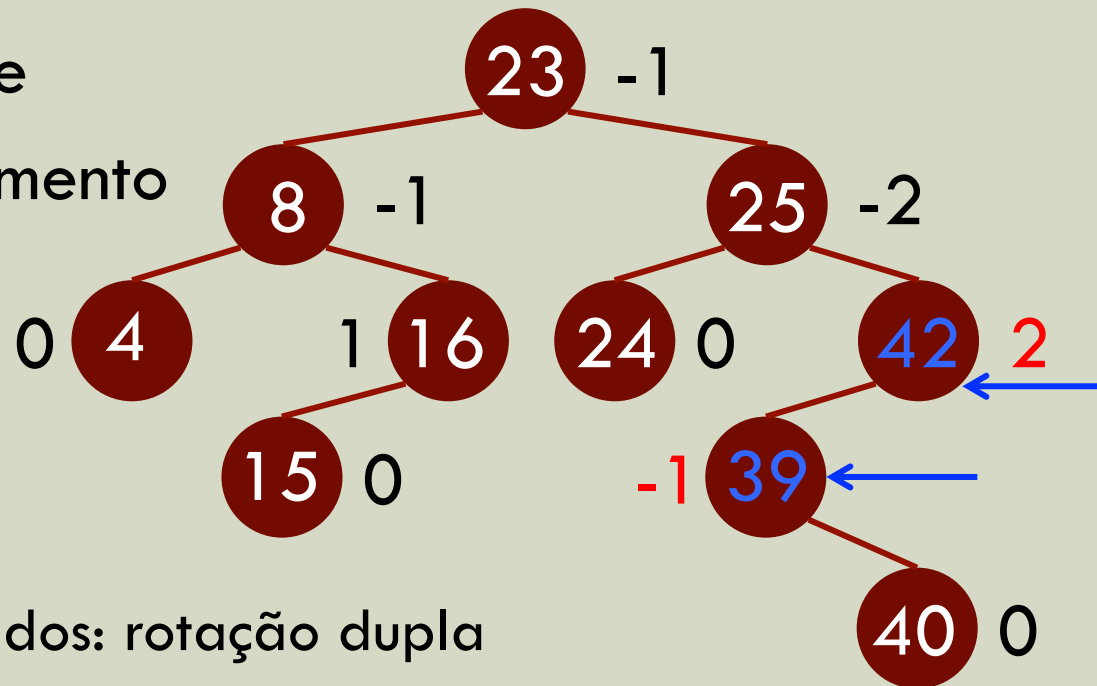
Fatores de
balanceamento



Nó desbalanceado à esquerda e seu filho
à esquerda inclinado para a direita

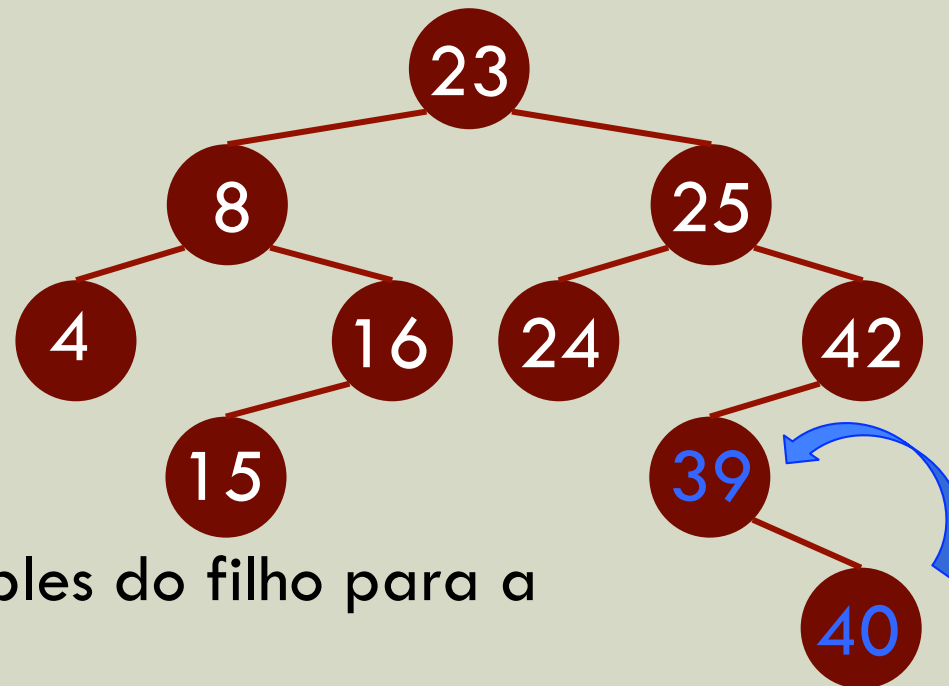
ÁRVORE AVL

Fatores de
balanceamento



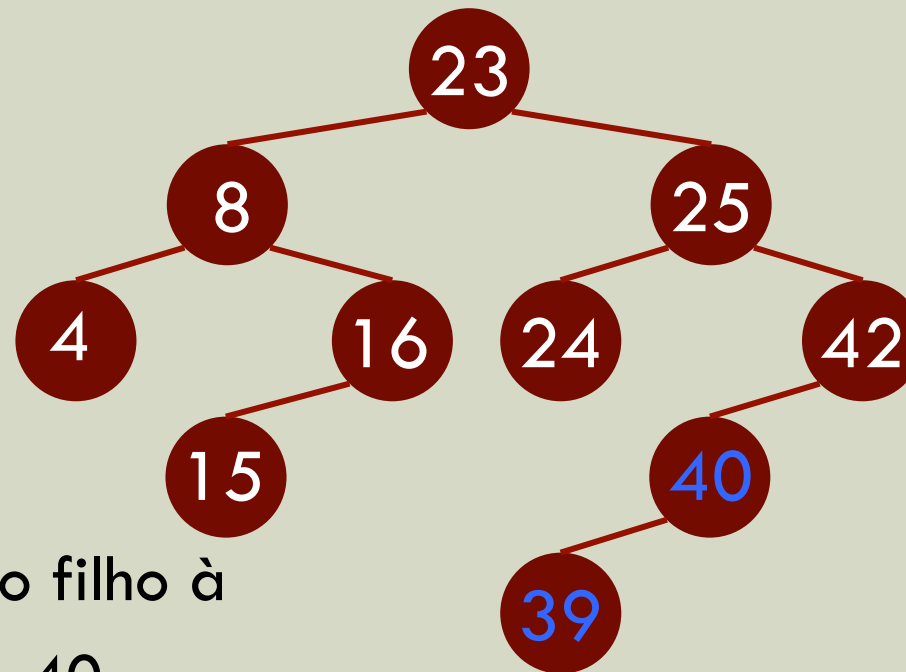
Sinais trocados: rotação dupla

ÁRVORE AVL



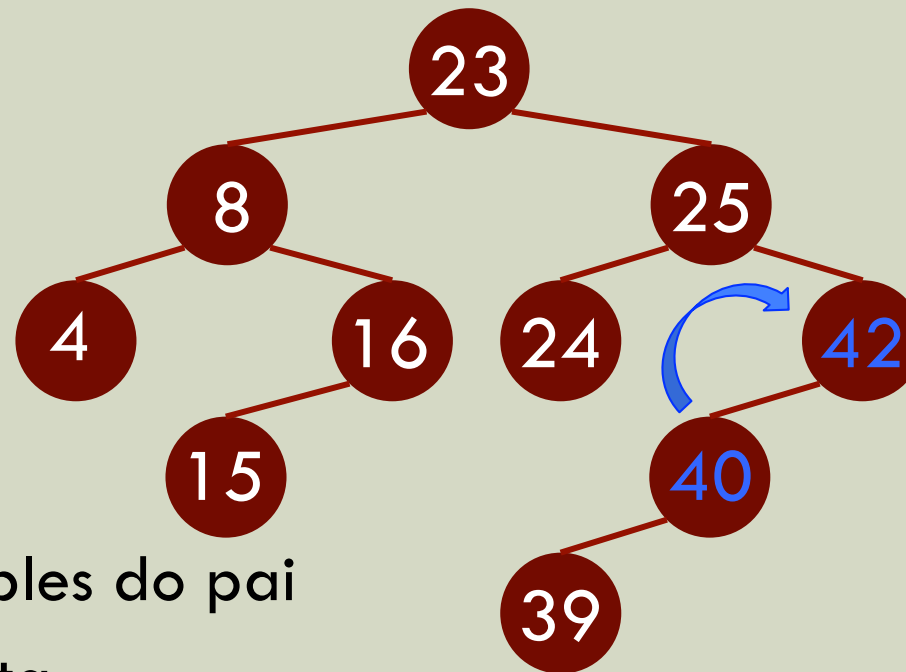
Rotação simples do filho para a
esquerda

ÁRVORE AVL



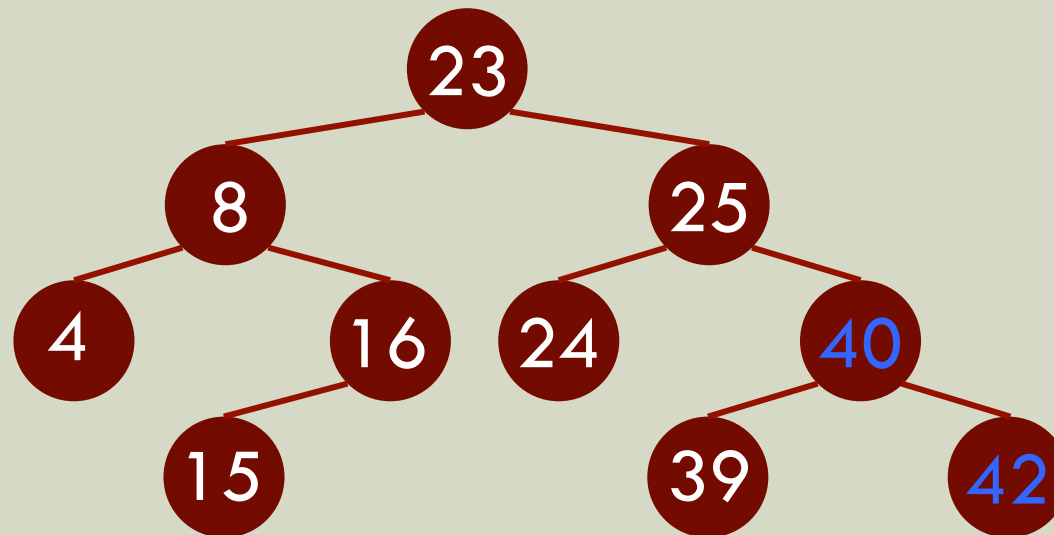
39 torna-se o filho à
esquerda de 40

ÁRVORE AVL



Rotação simples do pai
para a direita

ÁRVORE AVL



42 torna-se o filho à
direita de 40