Somatórios (∑)

PUC Minas

Instituto de Ciências Exatas e Informática

Agenda

- Motivação
- Notação
- Manipulação de Somas

Agenda

- **Motivação** ∑
- Notação
- Manipulação de Somas

Principal Motivação

- Levantamento de custo (como tempo de execução e consumo de memória) de algoritmos

- O custo de um algoritmo é a soma dos custos de suas operações

Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos n primeiros números inteiros

Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos n primeiros números inteiros

Programação

```
int somatorio(int n){
    int soma = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        soma += i;
    }
    return soma;
}
```

Matemática

$$\sum_{i=1}^{i \le n} i$$

Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos n primeiros números inteiros

início

Programação

```
int somatorio(int n){
    int soma = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        soma += i;
    }
    return soma;
}
```

Matemática

$$\sum_{i = 1}^{i \leq n} i$$

Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos n primeiros números inteiros

Programação

```
int somatorio(int n){
    int soma = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        soma += i;
    }
    return soma;
}
```

Matemática

$$\sum_{i=1}^{i \leq n} i$$

condição de parada

Exercício Resolvido (1)

- Mostre o somatório dos n primeiros números inteiros

✓

Programação

```
int somatorio(int n){
    int soma = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        soma += i;
    }
    return soma;
}
```

termo

Matemática

$$\sum_{i = 1}^{i \leq n} i$$

Exercício Resolvido (2)

- O Algoritmo de Ordenação por Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Quantas comparações entre registros ele realiza?

```
for (int i = 0; i < (n - 1); i++) {
    int menor = i;
    for (int j = (i + 1); j < n; j++){
        if (array[menor] > array[j]){
            menor = j;
        }
    }
    swap(menor, i);
}
```

Exercício Resolvido (2)

- O Algoritmo de Ordenação por Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Quantas comparações entre registros ele realiza? ✓

```
for (int i = 0; i < (n - 1); i++) {
        int menor = i;
        for (int j = (i + 1); j < n; j++){
                if (array[menor] > array[j]){
                        menor = j;
                }
        }
        swap(menor, i);
}
```

i	0	1	2	3	...	n-2
c(i) = (n - (i+1))	n-1	n-2	n-3	n-4	...	1

$$\sum_{i=0}^{n-2} (n - i - 1)$$

Agenda

- Motivação
- **Notação** Σ
- Manipulação de Somas

Notação Sigma

- Forma abreviada de escrever a soma de um conjunto de termos que obedecem algum padrão que pode ser representado matematicamente

$$\sum_{\underline{\textbf{limite inferior}}}^{\underline{\textbf{limite superior}}} \underline{\textbf{somando}}$$

Notação Sigma

- Forma abreviada de escrever a soma de um conjunto de termos que obedecem algum padrão que pode ser representado matematicamente

$$\sum_{\text{limite inferior}}^{\text{limite superior}} \text{somando}$$

Exemplo:

$$\sum_{i=0}^{n-2} (n - i - 1)$$

Notação Sigma

- Forma abreviada de escrever a soma de um conjunto de termos que obedecem algum padrão que pode ser representado matematicamente

$$\sum_{\text{\underline{os dois limites}}} \text{\underline{somando}}$$

Notação Sigma

- Forma abreviada de escrever a soma de um conjunto de termos que obedecem algum padrão que pode ser representado matematicamente

$$\sum_{\text{os dois limites}} \text{somando}$$

Exemplo:

$$\sum_{0 \le i \le n-2} (n - i - 1)$$

Notação Sigma

$$\sum_{P(i)} a_i$$

Propriedade P(i)

Notação Sigma

Exemplo:

$$\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ i \text{ é ímpar}}} a_i = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \ldots + a_n, \text{ se } n \text{ é ímpar}$$

$$\sum_{P(i)} a_i$$

$P(i)$ → Propriedade $P(i)$

Variações da Notação Sigma

$$\sum_{i=1}^{i \leq n} a_i = \sum_{1}^{n} a_i = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i = \sum^{\substack{i \leq n \\ i = 1}} a_i$$

Exercício Resolvido (3)

$$\sum_{n=1}^{4} n^2 = ?$$

Khan Academy

Escolha 1 resposta:

- $1 + 2 + 3 + 4$
- $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$
- $(1 + 2 + 3 + 4)^2$
- $1^2 + 4^2$

Exercício Resolvido (3)

$$\sum_{n=1}^{4} n^2 = ?$$

Khan Academy

Escolha 1 resposta:

- ○ $1 + 2 + 3 + 4$
- ✓ $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$
- ○ $(1 + 2 + 3 + 4)^2$
- ○ $1^2 + 4^2$

Exercício Resolvido (4)

$$\sum_{1}^{4} 3i = ?$$

Exercício Resolvido (4)

$$\sum_{1}^{4} 3i = ?$$

Neste material, a menos que dito o contrário, a notação $\sum$ incrementa o índice i. Para evitar ambiguidade, podemos usar a notação $\sum_{i=1}^{n}$

Exercício Resolvido (4)

$$\sum_{1}^{4} 3i = (3 \,.\, 1) + (3 \,.\, 2) + (3 \,.\, 3) + (3 \,.\, 4) = 30$$

Exercício Resolvido (4)

✓

$$\sum_{1}^{4} 3i = 3 . \sum_{1}^{4} i = 3 . (1 + 2 + 3 + 4) = 30$$

Exercício Resolvido (5)

$$\sum_{1}^{4} (3 - 2i) = ?$$

Exercício Resolvido (5)

$$\sum_{1}^{4} (3 - 2i) = (3 - (2 \,.\, 1)) + (3 - (2 \,.\, 2)) + (3 - (2 \,.\, 3)) + (3 - (2 \,.\, 4)) = -8$$

Exercício Resolvido (5)

$$\sum_{1}^{4} (3 - 2i) = \sum_{1}^{4} 3 - 2\sum_{1}^{4} i = (3+3+3+3) - 2(1+2+3+4) = -8$$

Exercício Resolvido (6)

$$\sum_{0}^{5} i \,.\, (i-1) \,.\, (5-i) = ?$$

Exercício Resolvido (6)

$$
\begin{aligned}
\sum_{0}^{5} i \, . \, (i-1) \, . \, (5-i) = \; & 0 \, . \, (-1) \, . \, 5 \; + \\
& 1 \, . \, 0 \, . \, 4 \; + \\
& 2 \, . \, 1 \, . \, 3 \; + \\
& 3 \, . \, 2 \, . \, 2 \; + \\
& 4 \, . \, 3 \, . \, 1 \; + \\
& 5 \, . \, 4 \, . \, 0 \; = 0 + 0 + 6 + 12 + 12 + 0 = 30
\end{aligned}
$$

Exercício Resolvido (7)

Podemos afirmar que $\sum_{0}^{5} i \,.\, (i-1) \,.\, (5-i) \;=\; \sum_{2}^{4} i \,.\, (i-1) \,.\, (5-i)$?

Exercício Resolvido (7)

Podemos afirmar que $\sum_{0}^{5} i \,.\, (i-1) \,.\, (5-i) = \sum_{2}^{4} i \,.\, (i-1) \,.\, (5-i)$? ✓

Sim, pois como os termos a_0, a_1 e a_5 são iguais a zero, o resultado dos dois somatórios é igual a: $(a_2 + a_3 + a_4)$

Exercício Resolvido (8)

$$\sum_{m=1}^{4} 8k - 6m = ?$$

Khan Academy

Escolha 1 resposta:

- $8k - 6 + 8k - 12 + 8k - 18 + 8k - 24$
- $2 + 4 + 6 + 8$
- $8 - 6m + 16 - 6m + 24 - 6m + 32 - 6m$
- $0 + 2 + 4 + 6$

Exercício Resolvido (8)

$$\sum_{m=1}^{4} 8k - 6m = ?$$

Escolha 1 resposta:

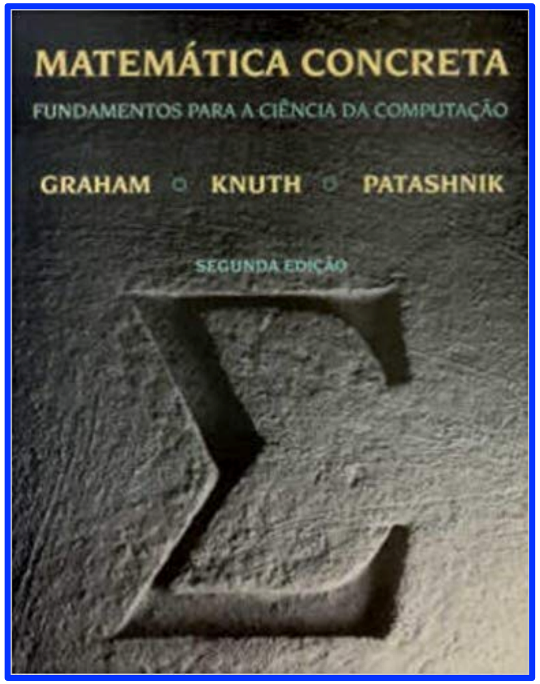
- [x] 8k - 6 + 8k - 12 + 8k - 18 + 8k - 24
- [ ] $2 + 4 + 6 + 8$
- [ ] $8 - 6m + 16 - 6m + 24 - 6m + 32 - 6m$
- [ ] $0 + 2 + 4 + 6$

Agenda

- Motivação
- Notação
- **Manipulação de Somas** ∑

Frase de [GRAHAM, 95]

A chave do sucesso na manipulação de somas está na habilidade de transformar uma soma em outra mais simples ou mais perto de algum objetivo



Agenda

- Motivação
- Notação
- **Manipulação de Somas** ∑

  - **Regras básicas de transformação**

Regras Básicas de Transformação

- Distributividade
- Associatividade
- Comutatividade

Regras Básicas de Transformação

- **Distributividade**: permite mover constantes para dentro ou para fora de um somatório

$$\sum_{i \in I} c \, . \, a_i = c \, . \sum_{i \in I} a_i$$

Por exemplo, por distributividade, $c.a_{-1} + c.a_0 + c.a_1 = c.(a_{-1} + a_0 + a_1)$

Regras Básicas de Transformação

- **Distributividade**: permite mover constantes para dentro ou para fora de um somatório

$$\sum_{i \in I} c \,.\, a_i = c \,.\, \sum_{i \in I} a_i$$

Também se aplica à divisão

$$\sum_{i \in I} \frac{a_i}{c} = \frac{1}{c} \,.\, \sum_{i \in I} a_i$$

Regras Básicas de Transformação

- **Associatividade**: permite decompor um somatório em duas ou mais partes; ou combinar dois ou mais somatórios em apenas um

$$\boxed{\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i}$$

Por exemplo, por associatividade, $(a_{-1} + b_{-1}) + (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) = (a_{-1} + a_0 + a_1) + (b_{-1} + b_0 + b_1)$

Regras Básicas de Transformação

- **Associatividade**: permite decompor um somatório em duas ou mais partes; ou combinar dois ou mais somatórios em apenas um

$$\sum_{i \in I}(a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$$

Também se aplica à subtração

$$\sum_{i \in I}(a_i - b_i) = \sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \in I} b_i$$

Exercício Resolvido (9)

- Aplique associatividade para unificar os dois somatórios abaixo:

$$\sum_{3}^{n} a_i + \sum_{1}^{n} b_i$$

Exercício Resolvido (9)

- Aplique associatividade para unificar os dois somatórios abaixo:

$$\sum_{3}^{n} a_i + \sum_{1}^{n} b_i$$

$$= (a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n)$$

$$= b_1 + b_2 + \sum_{3}^{n} (a_i + b_i)$$

$$= -a_1 - a_2 + \sum_{1}^{n} (a_i + b_i)$$

Regras Básicas de Transformação

- **Comutatividade**: permite colocar os termos do somatório em qualquer ordem

$$\boxed{\sum_{i \in I} a_i = \sum_{p(i) \in I} a_{p(i)}}$$

Por exemplo, por comutatividade, $a_{-1} + a_0 + a_1 = a_1 + a_{-1} + a_0$

Exemplo de Aplicação da Comutatividade

- Os programas abaixo apresentam o mesmo resultado devido à regra de comutatividade

```
for(int i = 0; i < n; i++)
    for(int j = 0; j < n; j++)
        soma += mat[i][j];
```

```
for(int j = 0; j < n; j++)
    for(int i = 0; i < n; i++)
        soma += mat[i][j];
```

```
for(int i = n-1; i >= 0; i--)
    for(int j = n-1; j >= 0; j--)
        soma += mat[i][j];
```

Regras Básicas de Transformação

- **Distributividade**

$$\sum_{i \in I} c \,.\, a_i = c \,.\, \sum_{i \in I} a_i$$

- **Associatividade**

$$\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$$

- **Comutatividade**

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{p(i) \in I} a_{p(i)}$$

Exercício Resolvido (10)

- Mostre (e justifique) se cada expressão abaixo é verdadeira ou falsa:

$$a)\ (\quad)\ \sum_{k=0}^{200} k^3 = \sum_{k=1}^{200} k^3;$$

$$b)\ (\quad)\ \sum_{p=0}^{1000} (3+p) = 3 + \sum_{p=0}^{1000} p;$$

$$c)\ (\quad)\ \sum_{\ell=1}^{n} (3\ell) = 3 \sum_{\ell=1}^{n} \ell;$$

Exercício Resolvido (10)

- Mostre (e justifique) se cada expressão abaixo é verdadeira ou falsa:

$$a)\ (\checkmark)\ \sum_{k=0}^{200} k^3 = \sum_{k=1}^{200} k^3;$$

$$b)\ (\times)\ \sum_{p=0}^{1000} (3+p) = 3 + \sum_{p=0}^{1000} p;$$

$$c)\ (\checkmark)\ \sum_{\ell=1}^{n} (3\ell) = 3 \sum_{\ell=1}^{n} \ell;$$

Exercício Resolvido (11)

- Prove que os somatórios abaixo são iguais. Em sua resposta, use a propriedade comutativa

$$\sum_{0 \leq i \leq 4}(3 + 2.i) = \sum_{0 \leq i \leq 4}(3 + 2.(4-i))$$

Exercício Resolvido (11)

- Prove que os somatórios abaixo são iguais. Em sua resposta use a propriedade comutativa

$$\sum_{0 \le i \le 4} (3 + 2.i) = \sum_{0 \le i \le 4} (3 + 2.(4-i))$$

No primeiro somatório temos (3 + 2.0) + (3 + 2.1) + (3 + 2.2) + (3 + 2.3) + (3 + 2.4); e no segundo, (3 + 2.[4-0]) + (3 + 2.[4-1]) + (3 + 2.[4-2]) + (3 + 2.[4-3]) + (3 + 2.[4-4]), ou seja, (3 + 2.[4]) + (3 + 2.[3]) + (3 + 2.[2]) + (3 + 2.[1]) + (3 + 2.[0]). Logo, por comutatividade, temos o mesmo somatório alterando apenas a ordem dos elementos.

Observação

- Dado o exercício anterior, podemos afirmar que:

$$\sum_{0 \leq i \leq n} (3 + 2.i) = \sum_{0 \leq i \leq n} (3 + 2.[n-i])$$

- Nesse caso, no primeiro somatório, temos: (3 + 2.0) + (3 + 2.1) + (3 + 2.2) + (3 + 2.3) + … + (3 + 2.n); e no segundo, (3 + 2.[n-0]) + (3 + 2.[n-1]) + (3 + 2.[n-2]) + … + (3 + 2.[n-n]). Logo, por comutatividade, temos o mesmo somatório, alterando apenas a ordem dos elementos

- **Note que o (n - i) “simula” um decremento no valor de i**

Lembrete

- Uma PA (Progressão Aritmética) é uma sequência cuja diferença (razão) entre dois termos consecutivos é constante
    - O termo inicial é o ***a***
    - A razão é o ***b***
- Por exemplo, na sequência: 5, 7, 9, 11, 13, … , os valores ***a*** e ***b*** são 5 e 2, respectivamente. Logo, temos: (5 + 2.0), (5 + 2.1), (5 + 2.2), (5 + 2.3), (5 + 2.4), ...

Exercício Resolvido (12)

- Mostre os valores de ***a*** e ***b*** para a sequência 1, 4, 7, 10, 13, …

Exercício Resolvido (12)

- **Mostre** os valores de ***a*** e ***b*** para a sequência 1, 4, 7, 10, 13, …

Os valores ***a*** e ***b*** são 1 e 3, respectivamente, logo, temos:

$$1 + 3 . 0 = 1$$
$$1 + 3 . 1 = 4$$
$$1 + 3 . 2 = 7$$
$$1 + 3 . 3 = 10$$
$$1 + 3 . 4 = 13$$
$$\ldots$$

Exercício Resolvido (13)

- Aplique as regras de transformação para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PA

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a + b.i$$

Exercício Resolvido (13)

- Aplique as regras de transformação para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PA

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a + b.i$$

- **Aplicando a comutatividade**, podemos somar do maior para o menor, trocando ***i*** por (***n - i***):

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.(n - i)] = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.n - b.i]$$

Exercício Resolvido (13)

- Como $S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.i] = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.n - b.i]$, podemos afirmar que:

$$\boxed{2S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.i] + \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.n - b.i]}$$

Exercício Resolvido (13)

- Como $S_n = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.i] = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.n - b.i]$, podemos afirmar que:

$$2S_n = \sum_{0 \le i \le n}[a + b.i] + \sum_{0 \le i \le n}[a + b.n - b.i]$$

- **Aplicando associatividade**, podemos combinar os dois somatórios:

$$2S_n = \sum_{0 \le i \le n}[a + b.i + a + b.n - b.i]$$

Exercício Resolvido (13)

- Como $S = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.i] = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.n - b.i]$, podemos afirmar que:

$$2S_n = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.i] + \sum_{0 \le i \le n} [a + b.n - b.i]$$

- Aplicando associatividade, podemos combinar os dois somatórios:

$$2S_n = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.i + a + b.n - b.i] = \sum_{0 \le i \le n} [2.a + b.n]$$

- **Simplificando**, temos

Exercício Resolvido (13)

- **Usando distributividade**, temos:

$$2S_n = \sum_{0 \le i \le n} [2.a + b.n] = (2.a + b.n) \,.\sum_{0 \le i \le n} 1$$

Lembre que [2.a + b.n] não depende de i. Logo, pode “sair” do somatório

Exercício Resolvido (13)

- Substituindo o somatório:

$$2S_n = \sum_{0 \le i \le n} [2.a + b.n] = (2.a + b.n) . \sum_{0 \le i \le n} 1$$

$$(n+1)$$

Exercício Resolvido (13)

- Substituindo o somatório:

$$2S_n = (2.a + b.n)(n+1)$$

Exercício Resolvido (13)

- Substituindo o somatório:

$$2S_n = (2.a + b.n)(n+1)$$

- **Dividindo por dois**, temos:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b.i] = \frac{(2a + b.n)(n+1)}{2}$$

Exercício Resolvido (14)

- Sabendo a fórmula da soma de uma progressão aritmética qualquer, mostre a fórmula para o somatório de $0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{0 \leq i \leq n} i$

Exercício Resolvido (14)

- Sabendo a fórmula da soma de uma progressão aritmética qualquer, mostre a fórmula para o somatório de $0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{0 \le i \le n} i$

Resposta: Nesse caso, temos uma progressão aritmética cujos valores ***a*** e ***b*** são zero e um, respectivamente

$$\boxed{S_n = \sum_{0 \le i \le n} [0 + 1.i] = \frac{(2 \,.\, 0 + 1 \,.\, n) \,.\, (n + 1)}{2} = \frac{n \,.\, (n + 1)}{2}}$$

✓

Exercício Resolvido (15)

- Dada a fórmula fechada do somatório dos ***n*** primeiros números inteiros, mostre um algoritmo mais eficiente que o apresentado abaixo:

```
int somatorio(int n){
    int soma = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        soma += i;
    }
    return soma;
}
```

Exercício Resolvido (15)

- Dada a fórmula fechada do somatório dos ***n*** primeiros números inteiros, mostre um algoritmo mais eficiente que o apresentado abaixo:

```
int somatorio(int n){
    int soma = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        soma += i;
    }
    return soma;
}
```

```
int somatorio(int n){
    return ((n * (n+1))/2);
}
```

Exercício Resolvido (16)

- O Algoritmo de Ordenação por Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

Exercício Resolvido (16)

- O Algoritmo de Ordenação por Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- Aplicando associatividade, temos:

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) = \sum_{0 \leq i \leq n-2} n - \sum_{0 \leq i \leq n-2} i - \sum_{0 \leq i \leq n-2} 1$$

Exercício Resolvido (16)

- O Algoritmo de Ordenação por Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \le i \le n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- Aplicando associatividade, temos:

$$\sum_{0 \le i \le n-2} (n - i - 1) = \sum_{0 \le i \le n-2} n \quad - \quad \sum_{0 \le i \le n-2} i \quad - \quad \sum_{0 \le i \le n-2} 1$$

$$\sum_{0 \le i \le n-2} n \rightarrow \boxed{n \,.\, (n-1)} \qquad \sum_{0 \le i \le n-2} 1 \rightarrow \boxed{1 \,.\, (n-1)}$$

Exercício Resolvido (16)

- O Algoritmo de Ordenação por Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- Simplificando, temos:

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) = n(n-1) - \sum_{0 \leq i \leq n-2} i - (n-1)$$

✓

Exercício Resolvido (16)

- O Algoritmo de Ordenação por Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \le i \le n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- Sabendo que:

$$\sum_{0 \le i \le n} i = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \sum_{0 \le i \le n-2} i = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

Exercício Resolvido (16)

- O Algoritmo de Ordenação por Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \le i \le n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- Assim, temos:

$$\sum_{0 \le i \le n-2} (n - i - 1) = n(n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} - (n-1)$$

Exercício Resolvido (16)

- O Algoritmo de Ordenação por Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- Assim, temos:

$$\sum_{0 \leq i \leq n-2} (n - i - 1) = n(n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} - (n-1)$$

$$= \frac{2n(n-1) - (n-2)(n-1) - 2(n-1)}{2}$$

Exercício Resolvido (16)

- O Algoritmo de Ordenação por Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \le i \le n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório
- Assim, temos:

$$\sum_{0 \le i \le n-2} (n - i - 1) = n(n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} - (n-1)$$

$$= \frac{2n(n-1) - (n-2)(n-1) - 2(n-1)}{2}$$

$$= \frac{2n^2 - 2n - (n^2 - n - 2n + 2) - (2n - 2)}{2}$$

Exercício Resolvido (16)

- O Algoritmo de Ordenação por Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \le i \le n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

- Assim, temos:

$$\sum_{0 \le i \le n-2} (n - i - 1) = n(n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} - (n-1)$$

$$= \frac{2n(n-1) - (n-2)(n-1) - 2(n-1)}{2}$$

$$= \frac{\mathbf{2n^2 - 2n - (n^2 - n - 2n + 2) - (2n - 2)}}{2}$$

$$= \frac{2n^2 - 2n - n^2 + 3n - 2 - 2n + 2}{2}$$

Exercício Resolvido (16)

- O Algoritmo de Ordenação por Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \le i \le n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório
- Assim, temos:

$$\sum_{0 \le i \le n-2} (n - i - 1) = n(n - 1) - \frac{(n - 2)(n - 1)}{2} - (n - 1)$$

$$= \frac{2n(n-1) - (n-2)(n-1) - 2(n-1)}{2}$$

$$= \frac{2n^2 - 2n - n^2 + 3n - 2 - 2n + 2}{2}$$

$$= \frac{n^2 - n}{2}$$

Exercício Resolvido (16)

- O Algoritmo de Ordenação por Seleção é uma solução conhecida para a ordenação interna. Anteriormente, vimos que ele realiza $\sum_{0 \le i \le n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório
- Assim, temos:

$$\sum_{0 \le i \le n-2} (n - i - 1) = n(n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} - (n-1)$$

$$= \frac{2n(n-1) - (n-2)(n-1) - 2(n-1)}{2}$$

$$= \frac{2n^2 - 2n - n^2 + 3n - 2 - 2n + 2}{2}$$

$$= \frac{n^2 - n}{2} = O(n^2)$$

Exercício Resolvido (17)

- Justifique a igualdade:

$$\sum_{1}^{n} i = \sum_{0}^{n} i$$

Exercício Resolvido (17)

- Justifique a igualdade:

$$\boxed{\sum_{1}^{n} i = \sum_{0}^{n} i}$$

Resposta: Os dois somatórios são iguais, entretanto, o segundo faz uma soma a mais que é com seu primeiro termo cujo valor é zero.

Exercício Resolvido (18)

- Justifique a diferença:

$$\boxed{\sum_{1}^{n} a_i \neq \sum_{0}^{n} a_i}$$

Exercício Resolvido (18)

- Justifique a diferença:

$$\boxed{\sum_{1}^{n} a_i \neq \sum_{0}^{n} a_i}$$

Resposta: Os somatórios são diferentes porque, não necessariamente, o primeiro termo (a_0) do segundo somatório é igual a zero

Exercício Resolvido (19)

- Justifique a igualdade:

$$\boxed{\sum_{1}^{n} a_i = \sum_{0}^{n-1} a_{i+1}}$$

Exercício Resolvido (19)

- Justifique a igualdade:

$$\sum_{1}^{n} a_i = \sum_{0}^{n-1} a_{i+1}$$

Resposta: O resultado dos dois somatórios é $(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)$

Exercício Resolvido (20)

- Por que a primeira fórmula é mais adequada? (Dica: mostre os termos quando i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... , n-1 e n)

$$\sum_{i=2}^{n-1} i \,.\, (i-1) \,.\, (n-i) = \sum_{i=0}^{n} i \,.\, (i-1) \,.\, (n-i)$$

Exercício Resolvido (20)

- Por que a primeira fórmula é mais adequada? (Dica: mostre os termos quando i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, … , n-1 e n)

$$\sum_{i=2}^{n-1} i \cdot (i-1) \cdot (n-i) = \sum_{i=0}^{n} i \cdot (i-1) \cdot (n-i)$$

Resposta: O primeiro somatório desconsidera os termos a_0, a_1 e a_n, cujos valores são zero

$2 \cdot 1 \cdot (n-2)$	$\cancel{0 \cdot (-1) \cdot n}$
$3 \cdot 2 \cdot (n-3)$	$\cancel{1 \cdot 0 \cdot (n-1)}$
$4 \cdot 3 \cdot (n-4)$	$2 \cdot 1 \cdot (n-2)$
$5 \cdot 4 \cdot (n-5)$	$3 \cdot 2 \cdot (n-3)$
…	…
$(n-1) \cdot (n-2) \cdot 1$	$(n-1) \cdot (n-2) \cdot 1$
	$\cancel{n \cdot (n-1) \cdot 0}$