Teoría de Circuitos

Tema 2

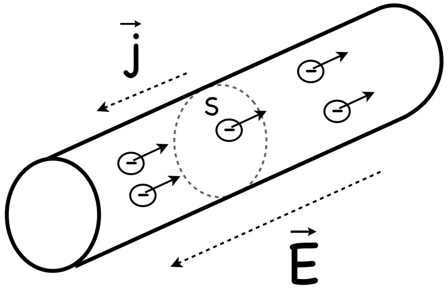
Contenidos

- Introducción
- Análisis de circuitos
- Circuitos RC: carga y descarga de un condensador
- Corriente alterna y señales eléctricas
- Potencia y energía en un circuito eléctrico

Circuito eléctrico: conjunto de elementos o dispositivos eléctricos o electrónicos interconectados con el objetivo de transportar energía o información

Corriente Eléctrica: flujo de partículas cargadas que circulan por el interior de un material conductor

Densidad de corriente ($\vec{j}$): magnitud vectorial que expresa la dirección, sentido y cantidad de cargas que atraviesan un conductor por unidad de área y tiempo



$$\vec{j}=\sigma\vec{E}$$

$\sigma \equiv$ Conductividad eléctrica

$\rho=1/\sigma \equiv$ Resistividad eléctrica

Intensidad de corriente: flujo de corriente a través de un conductor por unidad de tiempo

$I=\int_S \vec{j}d\vec{s}$ → Corriente distribuida uniformemente por la sección del conductor → $I=jS$

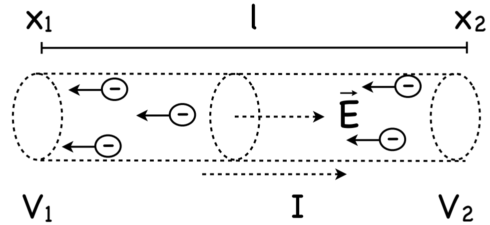
Ley de Ohm

La relación entre la diferencia de potencial entre dos puntos de un conductor y la intensidad que circula por él es constante (George Simon Ohm, 1827)

$$\frac{V_1 - V_2}{I} = R \qquad (R \rightarrow \text{constante})$$

Considerando un conductor uniforme y rectilíneo

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = \frac{\vec{E}}{\rho} \qquad I = jS \qquad E = -\frac{dV}{dx}$$

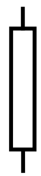
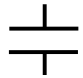
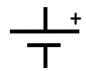
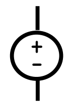
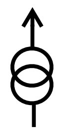


$$V_1 - V_2 = \int_{x_1}^{x_2} \vec{E}\, d\vec{l} = \int_{x_1}^{x_2} \rho \vec{j}\, d\vec{l} = \rho \int_{x_1}^{x_2} \frac{I}{S} dl = \rho \frac{I}{S} l = IR$$

Por lo tanto: $$R = \rho \frac{l}{S}$$ Resistencia

Elementos de un circuito

Elementos que modelan el comportamiento de un circuito. Cualquier circuito real se puede modelar en base a estos elementos.

	Elemento	Magnitud	Unidades	Relación VI	Símbolo
Elementos pasivos	Resistencia	Resistencia	Ohmios (Ω)	$V=I \cdot R$	 
	Condensador	Capacidad	Faradios (F)	$I=C(dV/dt)$	
	Bobina	Inductancia	Henrios (H)	$V=L(dI/dt)$	
Elementos activos	Generador de tensión	Diferencia de tensión	Voltios (V)	$V=cte$	 
	Generador de corriente	Intensidad de corriente	Amperios (A)	$I=cte$	
Elemento no lineal	Conmutador	N/A	N/A	ON $\rightarrow$ $V=0$ OFF $\rightarrow$ $I=0$	

Conceptos básicos de topología de circuitos

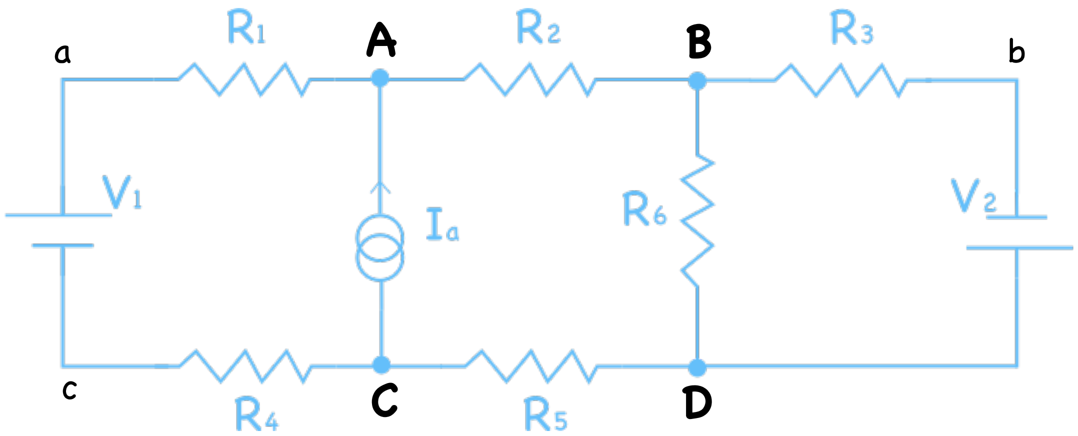
Red: Sistema de conductores eléctricos que forman un circuito cerrado

Nudo: Terminal en el que confluyen 3 o más elementos

Rama: Conjunto de elementos entre dos nudos

Lazo: Conjunto de ramas que forman un camino cerrado

Malla: Lazo que no contiene ningún otro lazo en su interior



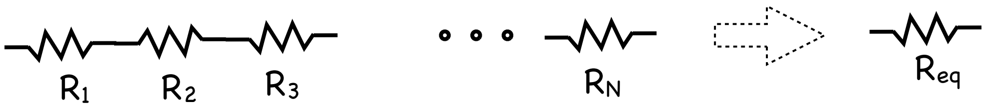
Nudos: A, B, C y D

Ramas:	Lazos:	Mallas:
AacC	AacCA	AacCA
AC	ACDBA	ACDBA
AB	BbDB	BbDB
BD	AacCDBA	
BbD	ACDbBA	
CD	AacCDbBA	

Asociación de resistencias

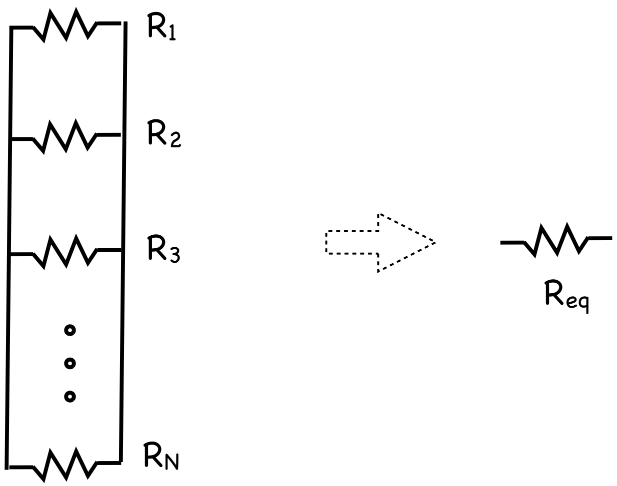
Símbolo:

Asociación en serie:



$$R_{eq}=R_1+R_2+R_3+\ldots+R_N$$

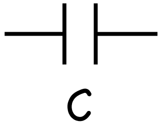
Asociación en paralelo:



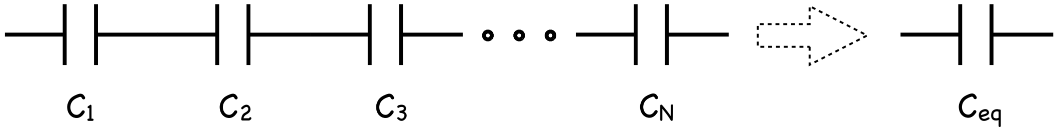
$$\frac{1}{R_{eq}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\ldots+\frac{1}{R_N}$$

Asociación de condensadores

Símbolo:

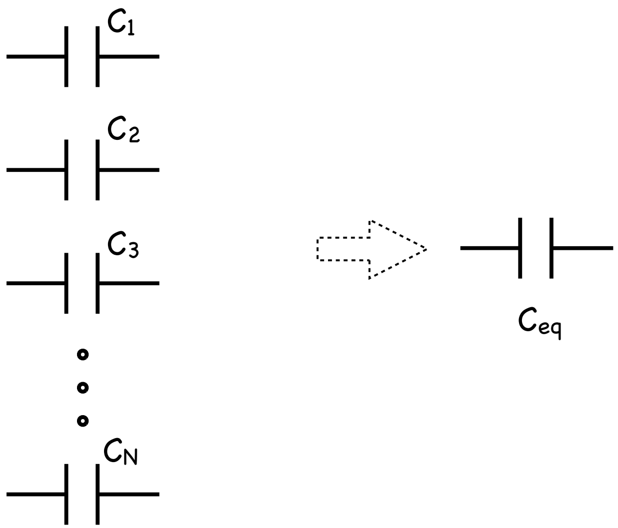


Asociación en serie:



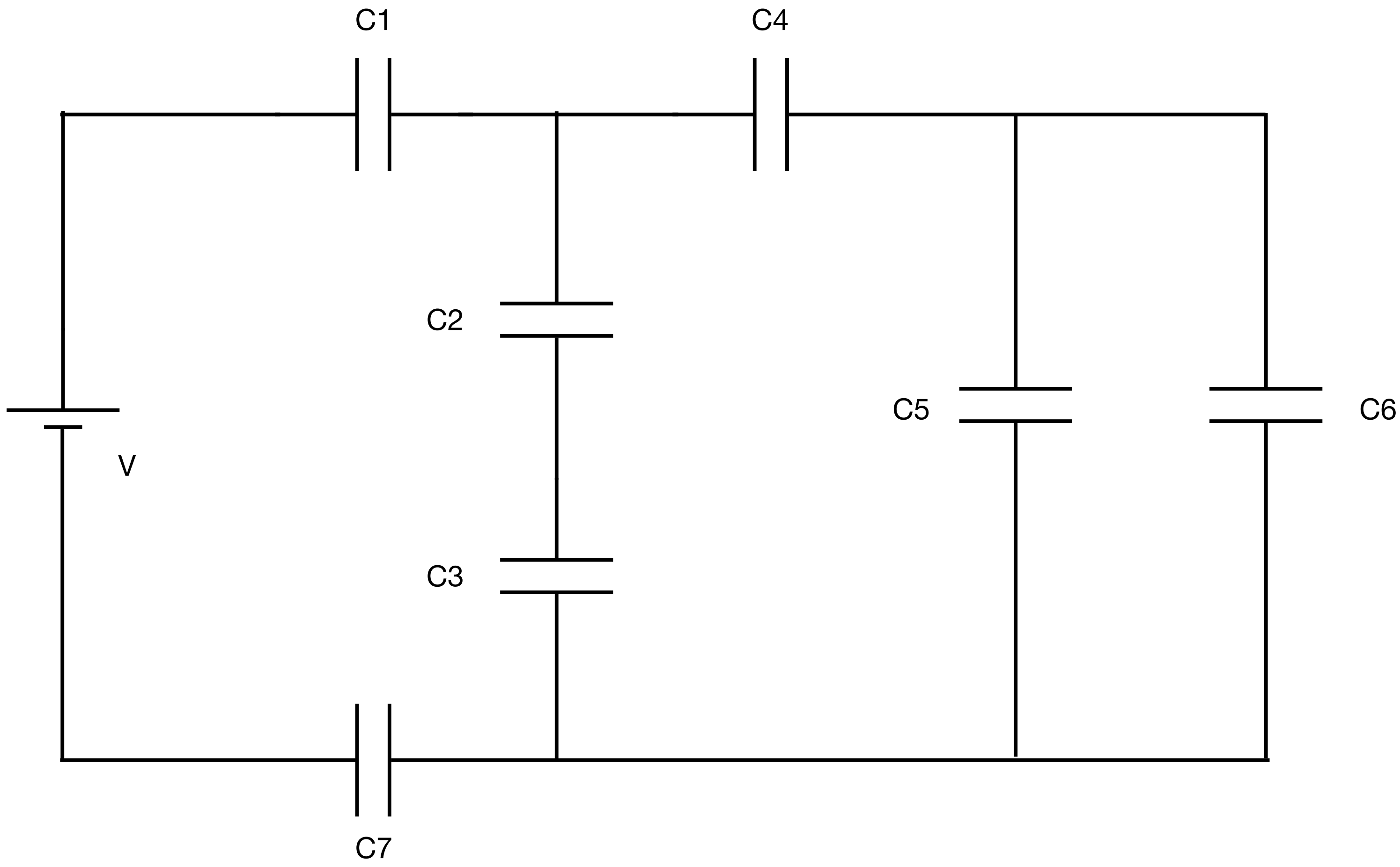
$$\frac{1}{C_{eq}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}+\ldots+\frac{1}{C_N}$$

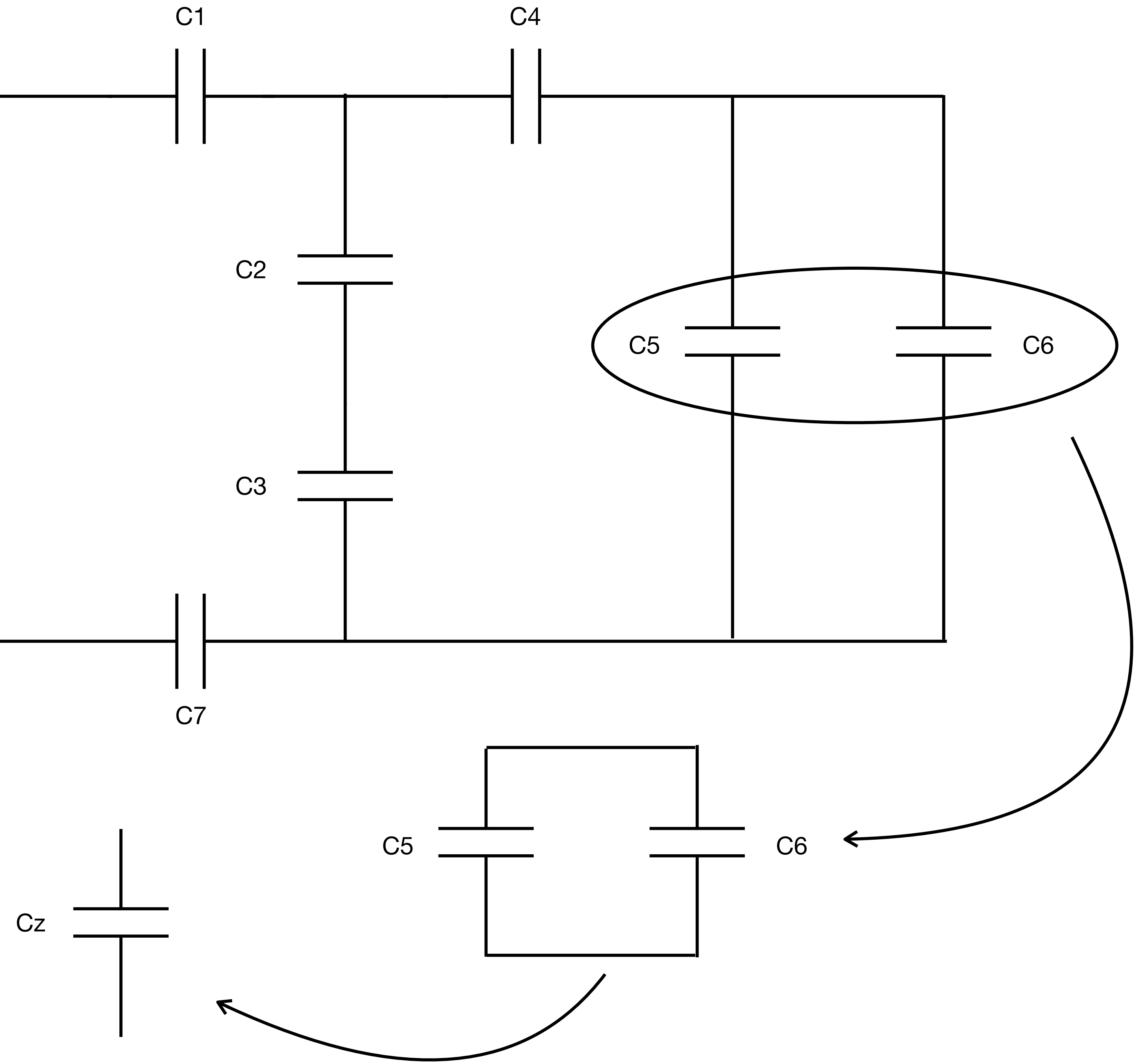
Asociación en paralelo:



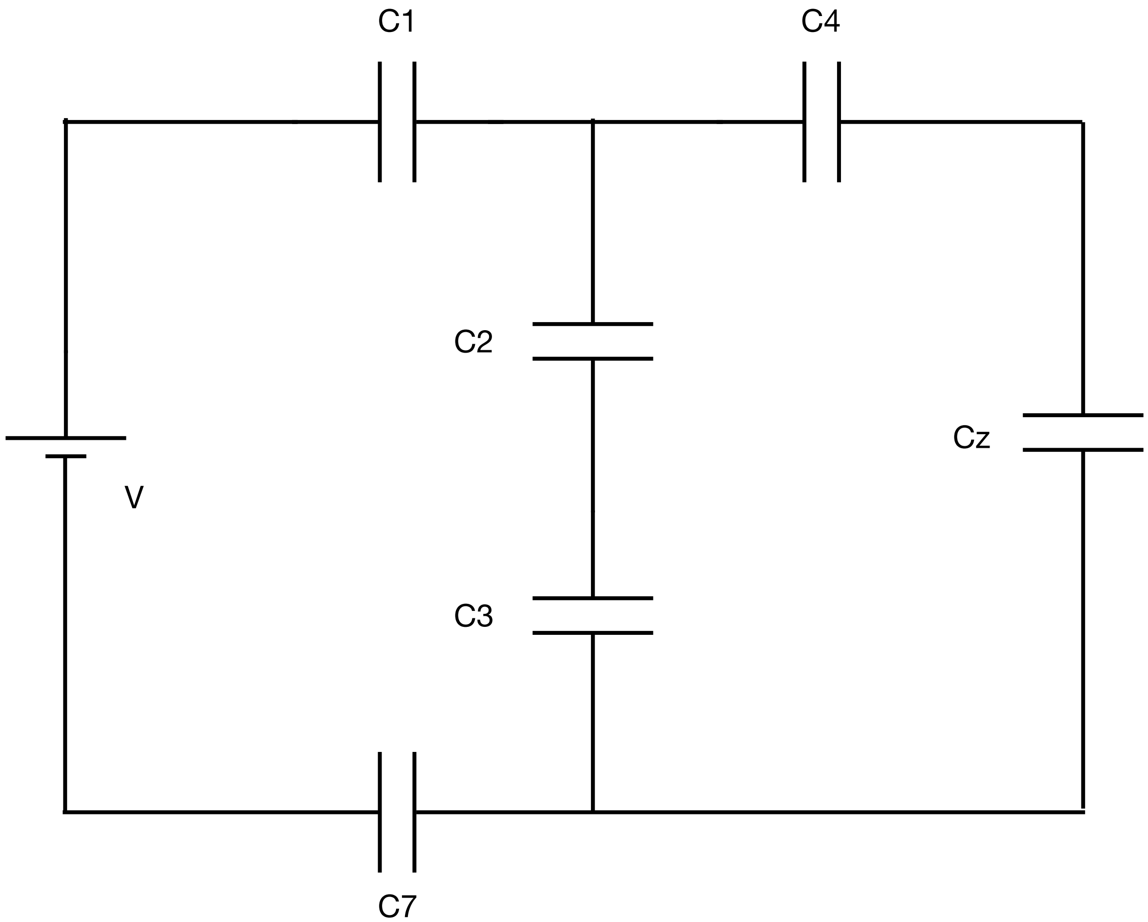
$$C_{eq}=C_1+C_2+C_3+\ldots+C_N$$

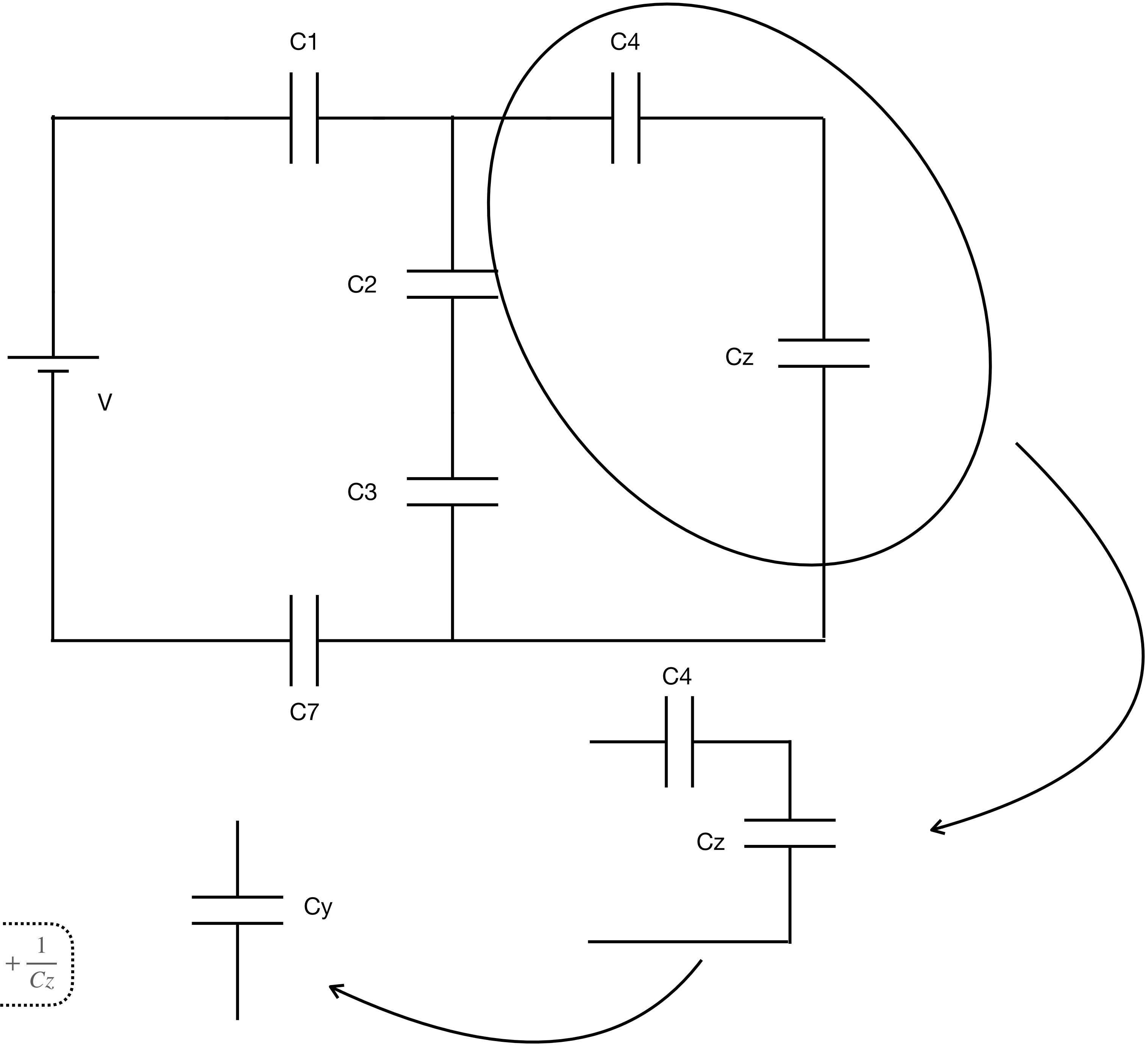
Ejercicio: Dado el circuito siguiente reducirlo a otro formado por la fuente V y un único condensador.



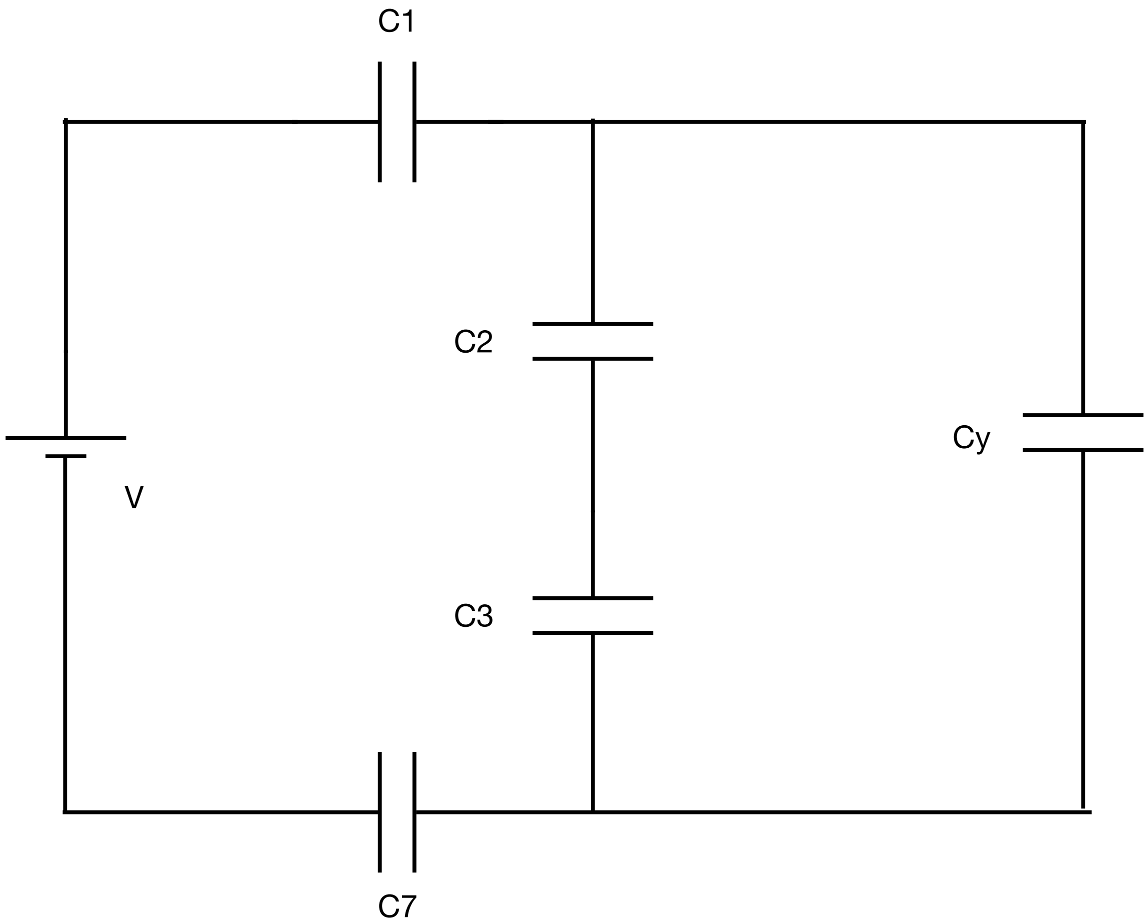


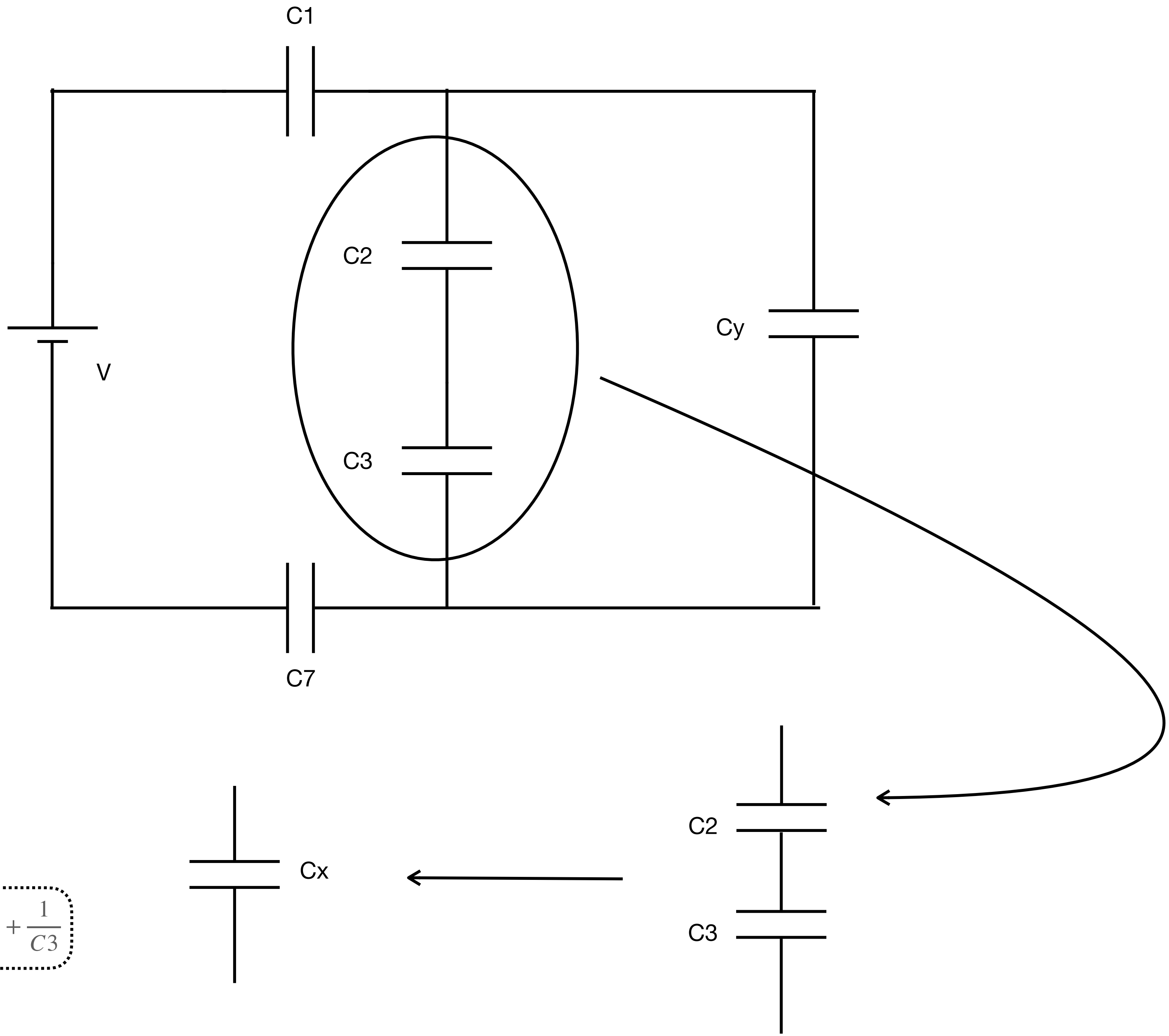
$$\boxed{Cz = C5 + C6}$$


C1
C4
C2
Cz
V
C3
C7

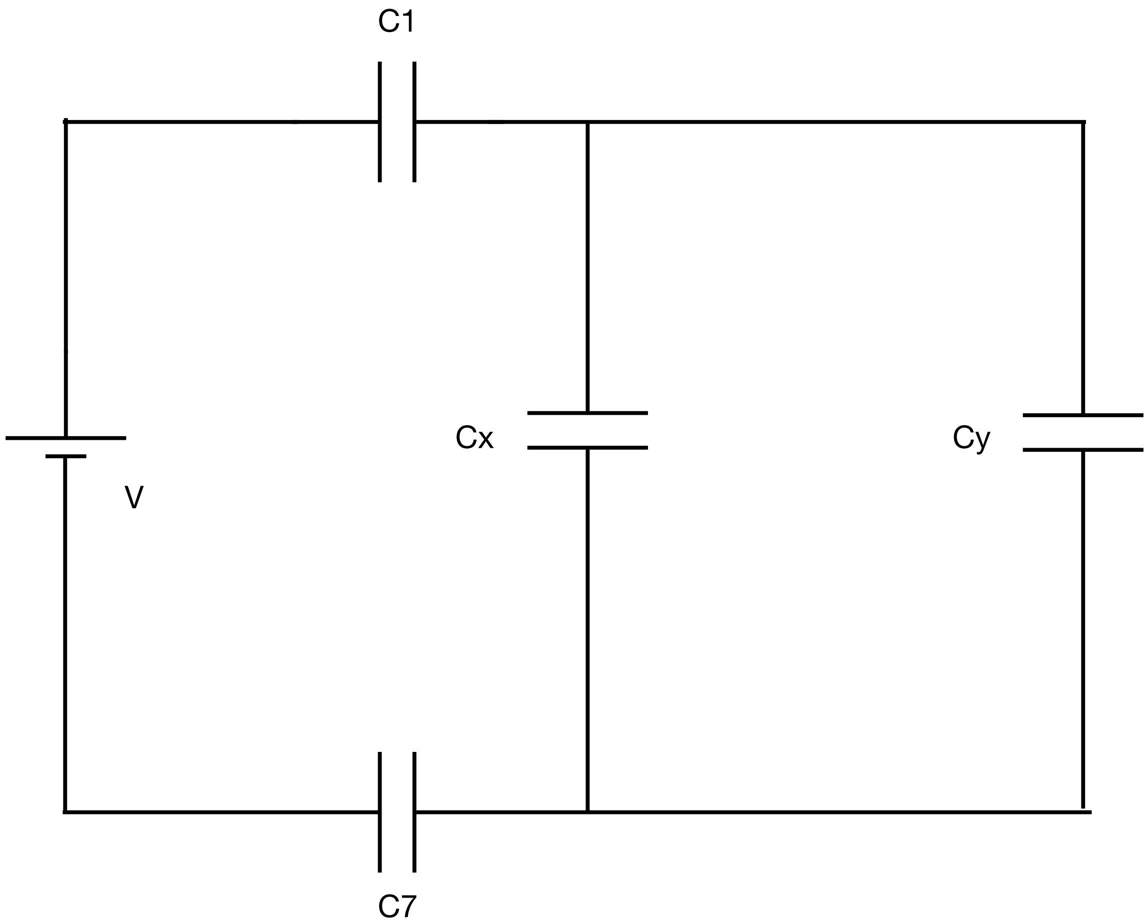


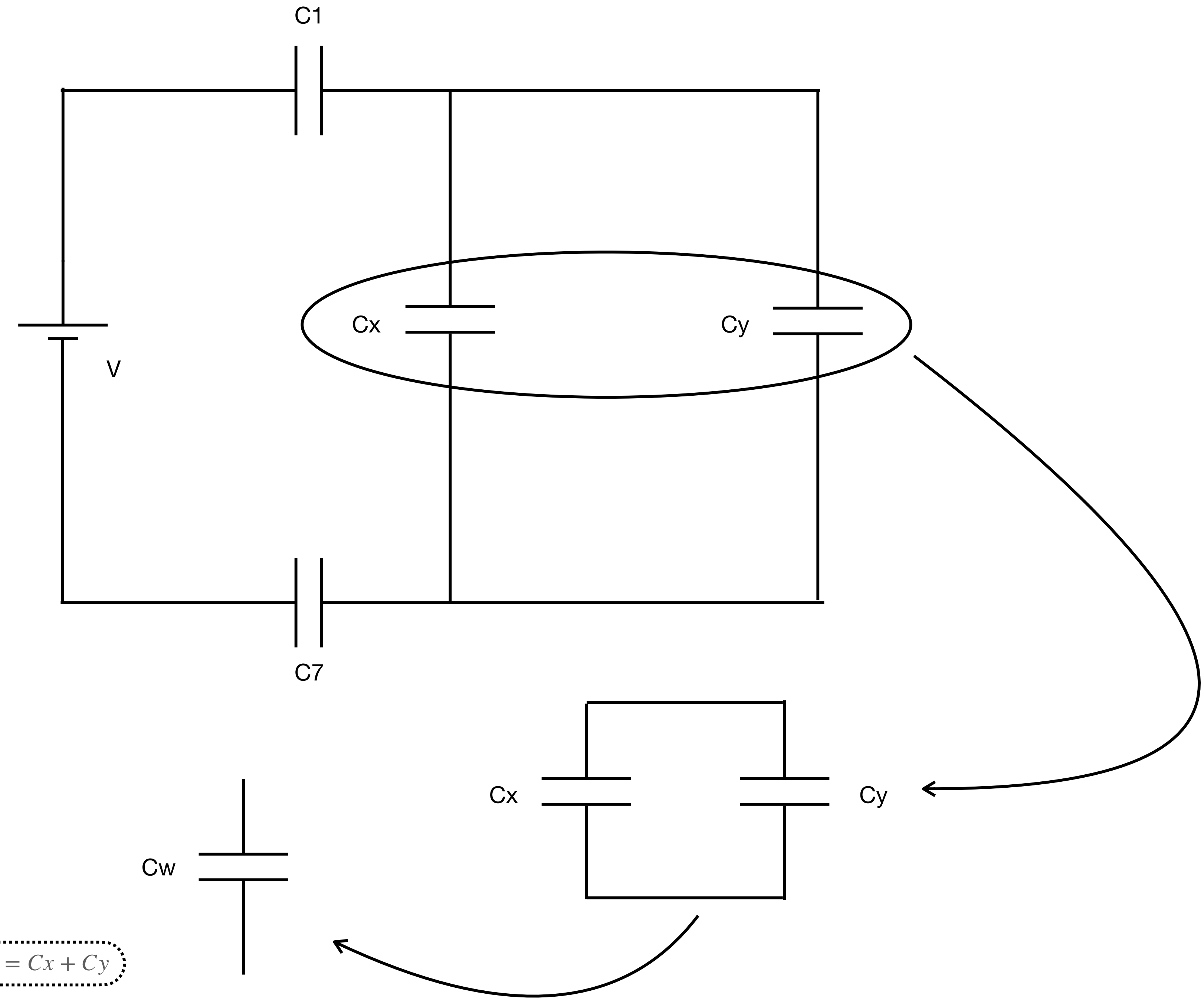
$$\frac{1}{Cy} = \frac{1}{C4} + \frac{1}{Cz}$$


C1
C2
C3
Cy
V
C7

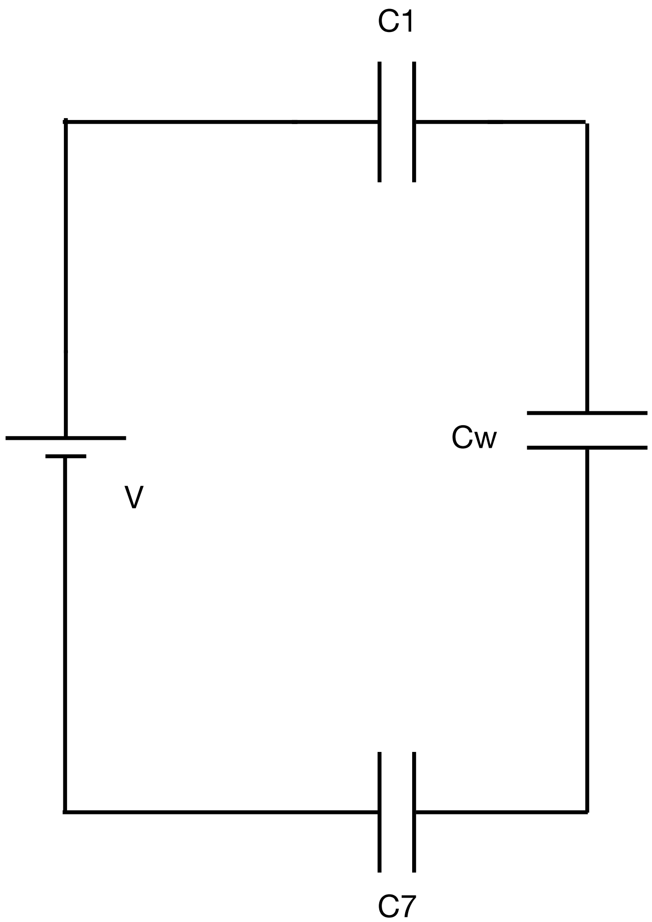


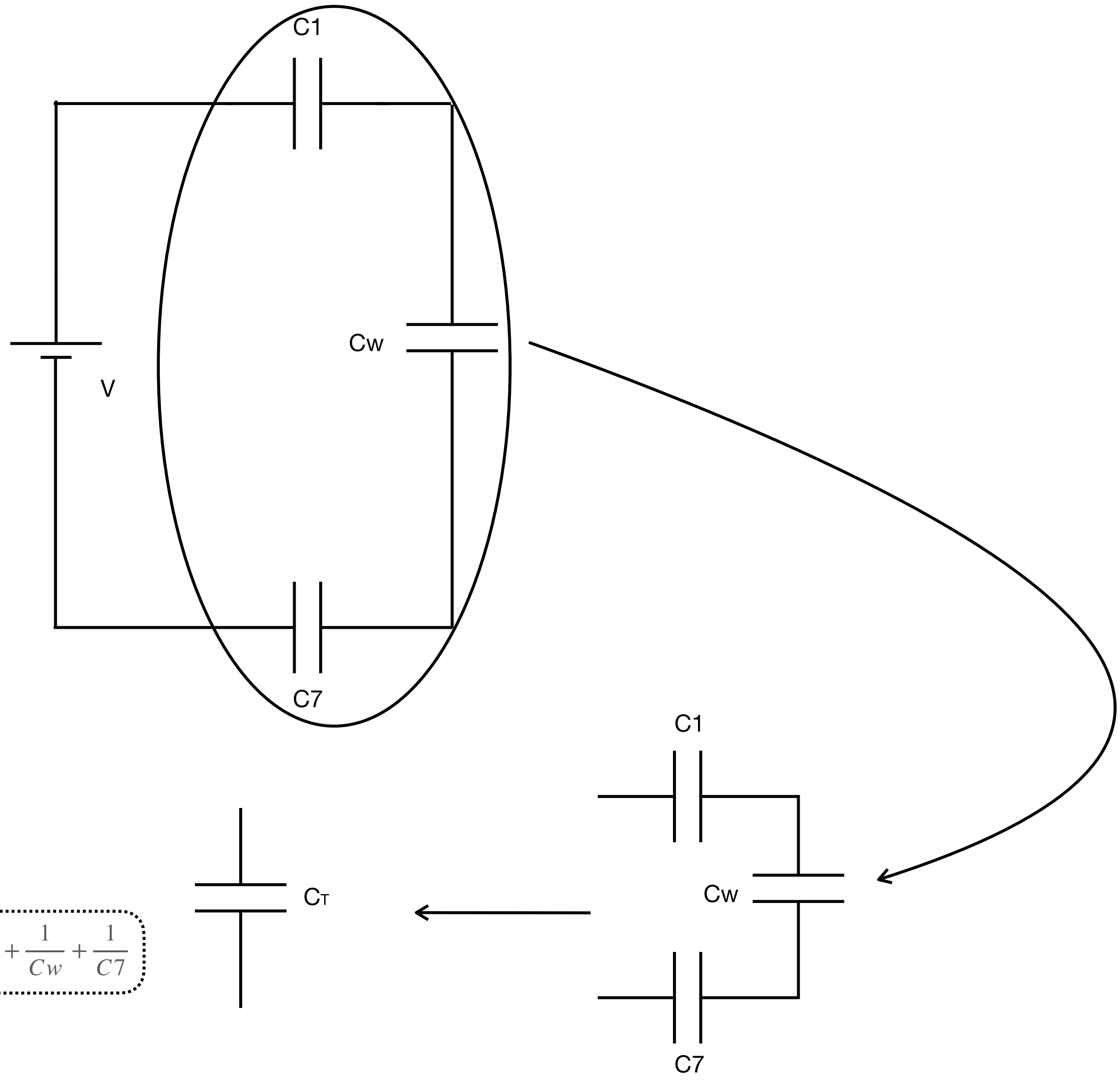
$$\frac{1}{Cx} = \frac{1}{C2} + \frac{1}{C3}$$


C1
Cx
Cy
V
C7

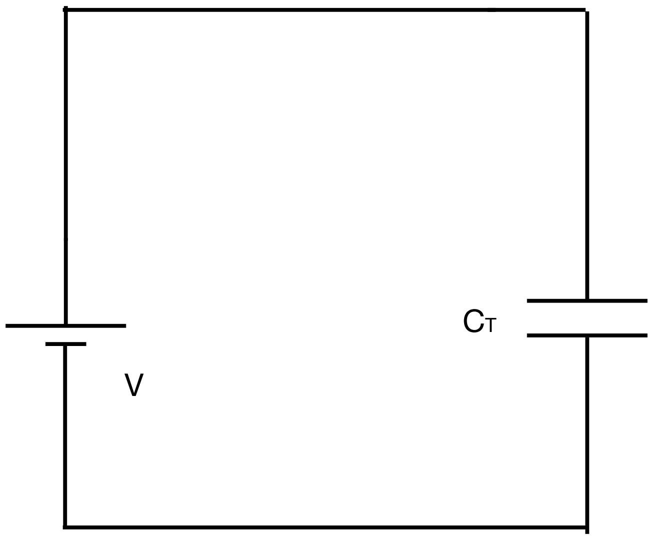


$Cw = Cx + Cy$


C1
Cw
V
C7



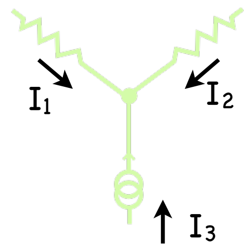
$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C1} + \frac{1}{Cw} + \frac{1}{C7}$$



C_T
V

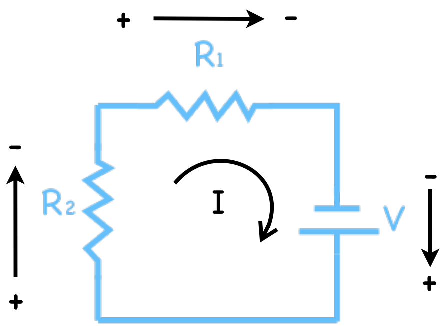
Leyes de Kirchhoff

Ley de los Nudos: En todo instante de tiempo, la suma de las corrientes que concurren a un nudo es igual a cero



$$I_1+I_2+I_3=0$$

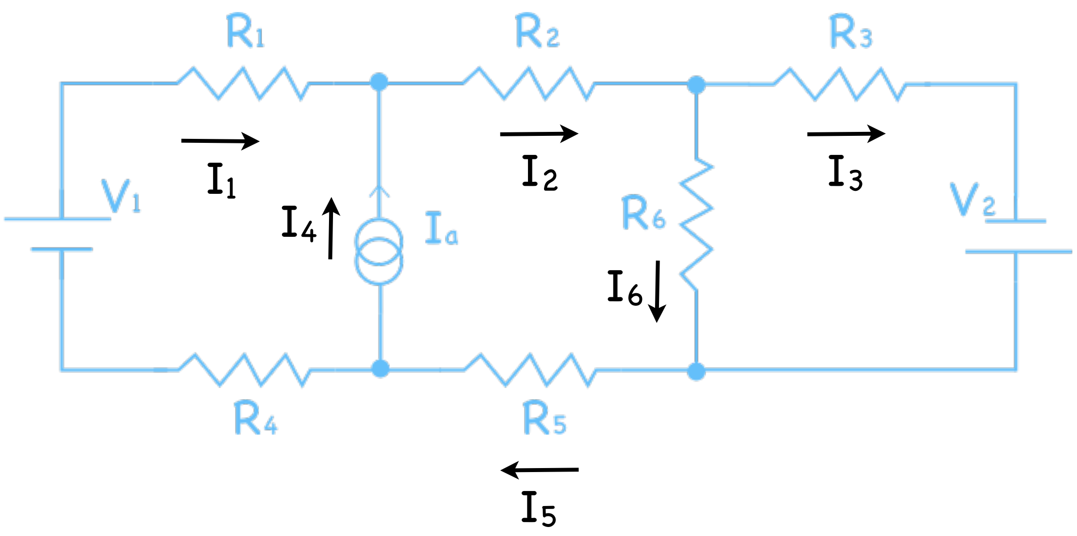
Ley de las mallas: En todo instante de tiempo, la suma de subidas y caídas de tensión a lo largo de un lazo es igual a cero



$$V-V(R_1)-V(R_2)=0$$

(c) David López Vilariño, USC

Aplicando las Leyes de Kirchhoff sobre el circuito anterior:



Las tensiones y corrientes de las fuentes son siempre datos conocidos (en este caso V_1, V_2, I_a)

Incógnitas:

Tensiones: $V(R_1)$, $V(R_2)$, $V(R_3)$, $V(R_4)$, $V(R_5)$, $V(R_6)$, $V(I_a)$

Corrientes: I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6

13 incógnitas

Ley de Ohm:

$V(R_1)= I_1 \cdot R_1$ $\quad$ $V(R_4)= I_1 \cdot R_4$

$V(R_2)= I_2 \cdot R_2$ $\quad$ $V(R_5)= I_5 \cdot R_5$

$V(R_3)= I_3 \cdot R_3$ $\quad$ $V(R_6)= I_6 \cdot R_6$

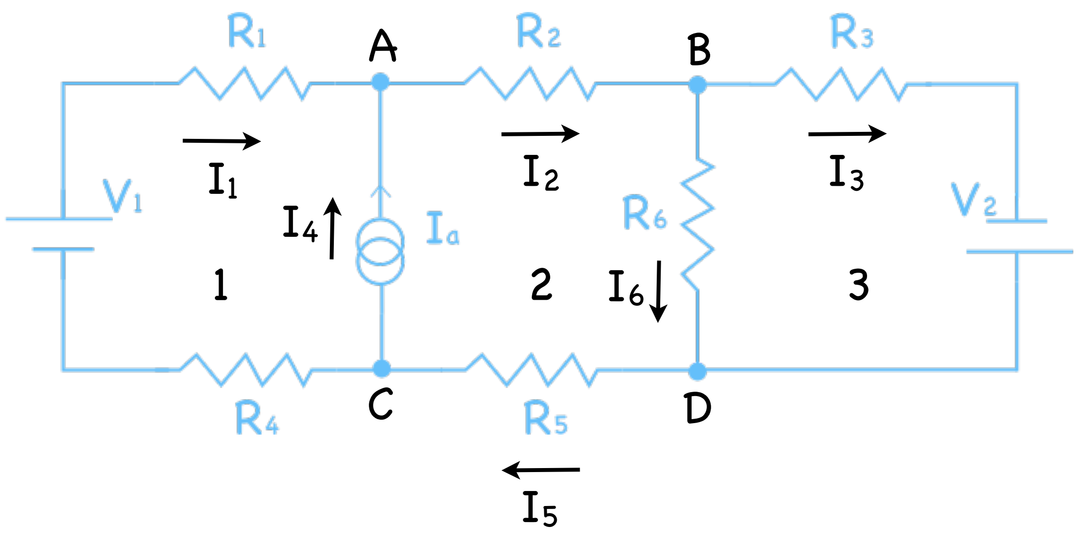
Otras consideraciones:

$I_4= I_a$

7 ecuaciones

Nos hacen falta 6 ecuaciones más $\Rightarrow$ Kirchhoff

Aplicando las Leyes de Kirchhoff sobre el circuito anterior:



De la ley de Nudos:

Nudo A: $I_1+I_4-I_2=0$

Nudo B: $I_2-I_3-I_6=0$

Nudo C: $-I_1-I_4+I_5=0$

Nudo D: $I_6-I_5+I_3=0$

4 ecuaciones pero sólo 3 son independientes (N-1, con N=Número de nudos)

De la ley de mallas

Malla 1: $V_1-V(R_1)-V(I_a)-V(R_4)=0$

Malla 2: $-V(R_2)-V(R_6)-V(R_5)+V(I_a)=0$

Malla 3: $-V(R_3)+V_2+V(R_6)=0$

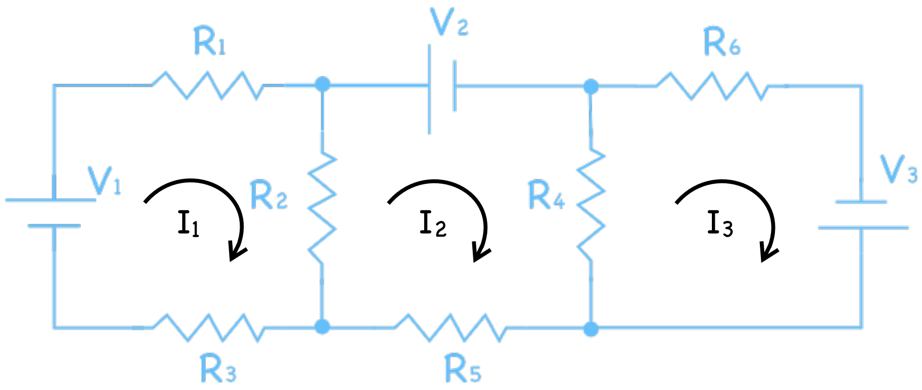
3 ecuaciones

Podríamos haber elegido 3 lazos, siempre que den lugar a tres ecuaciones independientes

Las Leyes de Kirchhoff suelen llevar a un número de ecuaciones elevado

Solución → Métodos de reducción

Método de las mallas



$$V_1 - I_1 \cdot R_1 - (I_1 - I_2) \cdot R_2 - I_1 \cdot R_3 = 0$$

$$-V_2 - (I_2 - I_3) \cdot R_4 - I_2 R_5 - (I_2 - I_1) \cdot R_2 = 0$$

$$-I_3 \cdot R_6 + V_3 - (I_3 - I_2) \cdot R_4 = 0$$

Paso 1 (incógnitas): Se asigna a cada malla una corriente cuyo sentido se escoge arbitrariamente

Paso 2 (ecuaciones): Se aplica la Segunda Ley de Kirchhoff (Ley de Mallas) en base a las corrientes definidas

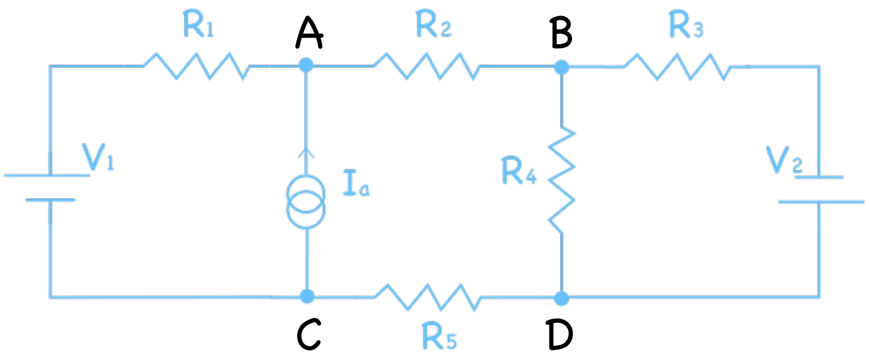
- Si una resistencia (impedancia, en general) pertenece a dos mallas se asume que la atraviesa una corriente resultante de combinar las corrientes de cada malla

Por ejemplo, para R_2 tendríamos I_1-I_2 (visto desde la malla 1)

Método de los nudos

En este caso, las incognitas son las tensiones entre nudos

Circuito con N nudos ⇒ N-1 ecuaciones



4 nudos ⇒ 3 ecuaciones

Paso 1 (incógnitas):
- Se propone un nudo de referencia
- Al resto de los nudos se les asigna una tensión con respecto al nudo de referencia

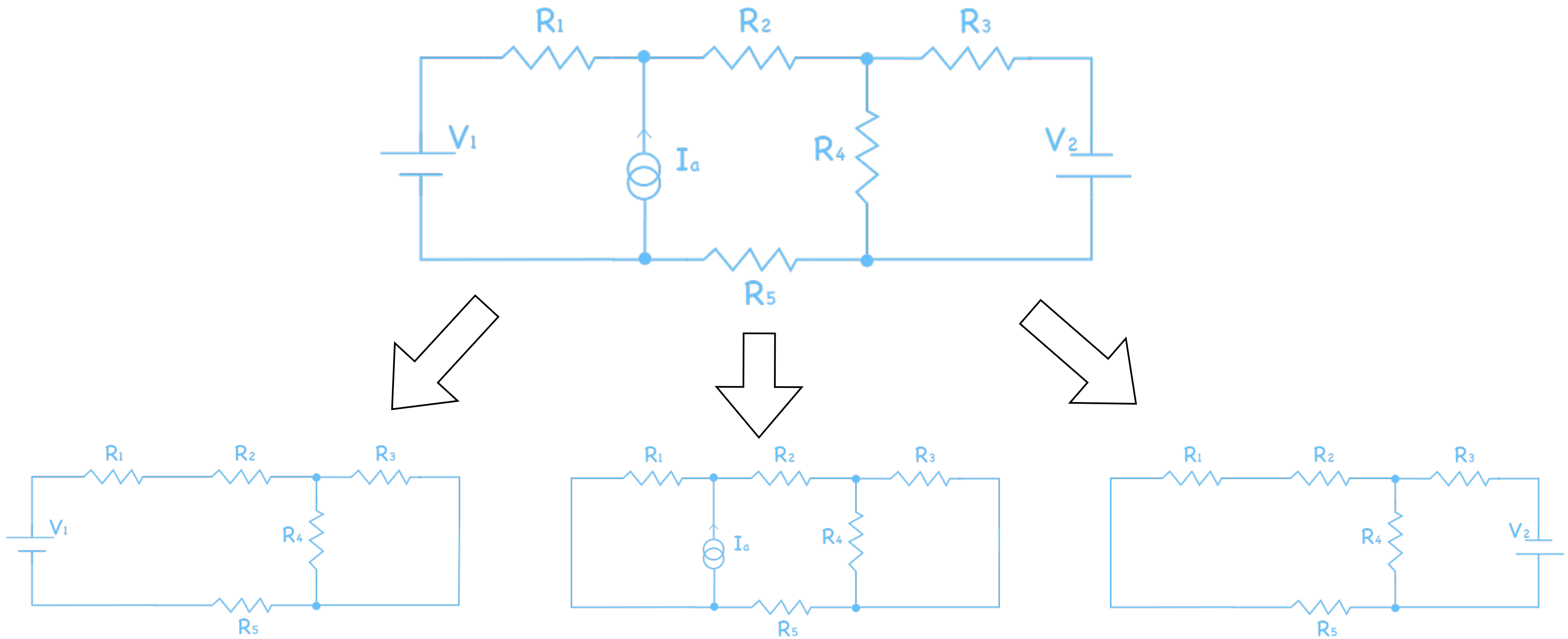
Paso 2 (ecuaciones): Se aplica la Primera Ley de Kirchhoff (Ley de Nudos) en base a las tensiones definidas

Por ejemplo, si escogemos a D como referencia (V_D=0) :

$$\frac{V_C+V_1-V_A}{R_1}+\frac{V_B-V_A}{R_2}+I_a=0 \qquad \frac{V_A-V_B}{R_2}+\frac{-V_B}{R_4}+\frac{-V_2-V_B}{R_3}=0 \qquad \frac{V_A-(V_C+V_1)}{R_1}+\frac{-V_C}{R_5}-I_a=0$$

Principio de superposición:

Dado un circuito lineal que contenga múltiples fuentes independientes, la corriente y tensión en cualquier punto del circuito se corresponde con la suma de las contribuciones de cada fuente por separado

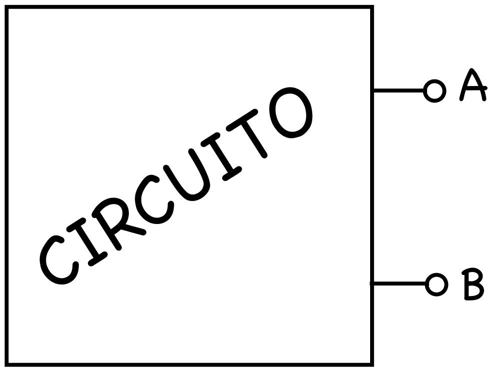


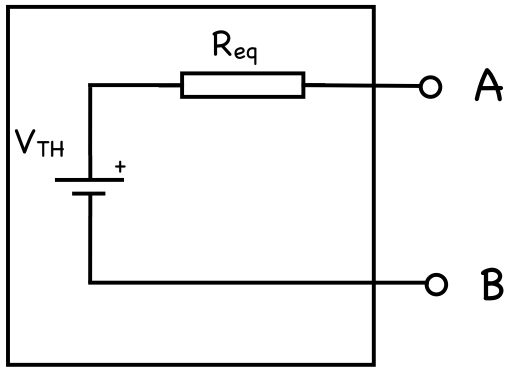
Fuentes de tensión a cero ⇒ cortocircuito

Fuentes de corriente a cero ⇒ circuito abierto

Teorema de Thévenin

Toda red formada por generadores y resistencias que tengan dos terminales de salida A y B, puede sustituirse por la combinación en serie de un generador de tensión V_{TH} y una resistencia R_{eq}





(1) La tensión equivalente de Thévenin es igual a la diferencia de tensión que se mide en circuito abierto entre los terminales de salida (A y B)

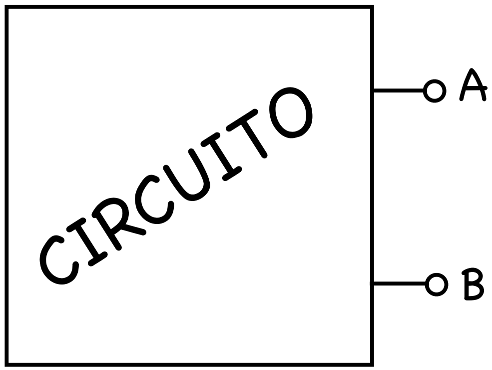
(2) La resistencia equivalente es la que se "ve" hacia el circuito desde los terminales de salida, con los generadores independientes a cero

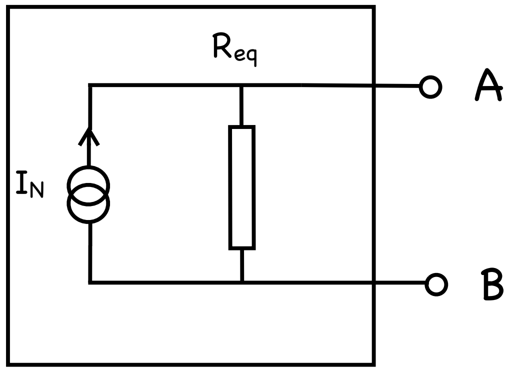
Fuentes de tensión a cero ⇒ cortocircuito

Fuentes de corriente a cero ⇒ circuito abierto

Teorema de Norton

Toda red formada por generadores y resistencias que tengan dos terminales de salida A y B, puede sustituirse por la combinación en paralelo de un generador de corriente I_N y una resistencia R_{eq}



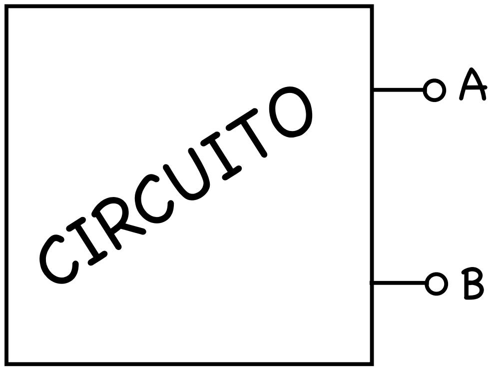


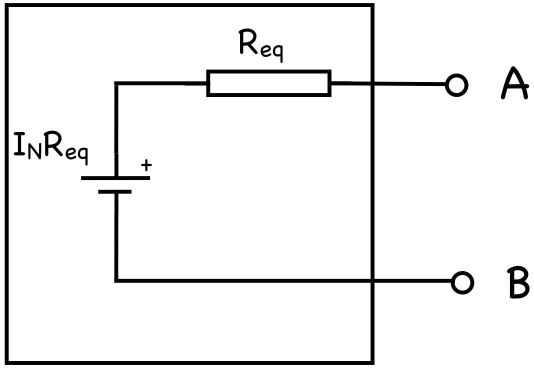
(1) La corriente equivalente de Norton es igual a la que pasa entre los terminales de salida (A y B) cuando éstos se cortocircuitan

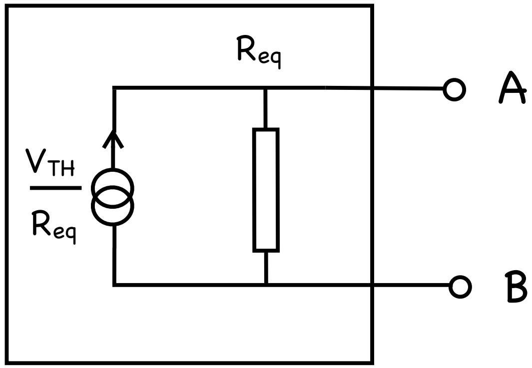
(2) La resistencia equivalente es la que se "ve" hacia el circuito desde los terminales de salida, con los generadores independientes a cero (la misma que en el caso del Teorema de Thévenin)

Equivalencia de los circuitos de Thevenin y Norton

$$V_{TH} = I_N \times R_{eq}$$

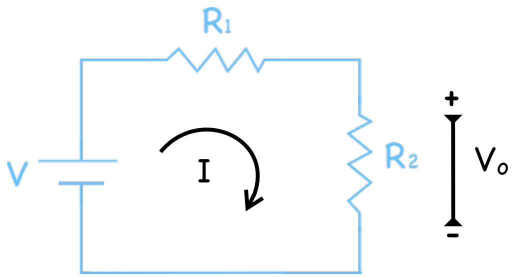






Caso particular: partidores

Partidor de tensión:

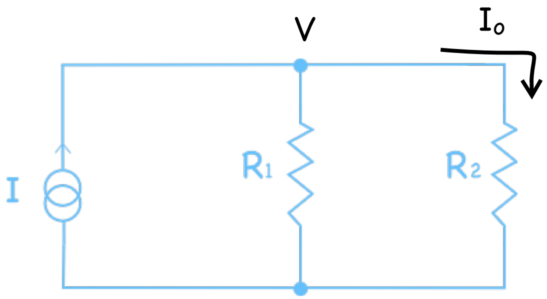


1 malla

$$V = I\cdot(R_1+R_2)$$
$$V_o = I\cdot R_2$$

$$\Rightarrow V_o = V\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

Partidor de corriente:



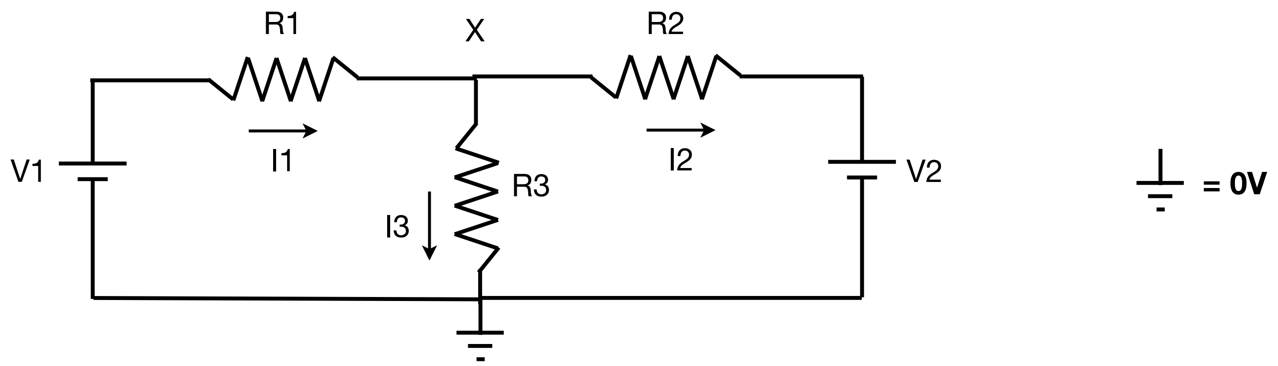
1 nudo

$$I = \frac{V}{R_1}+\frac{V}{R_2}$$
$$I_o = \frac{V}{R_2}$$

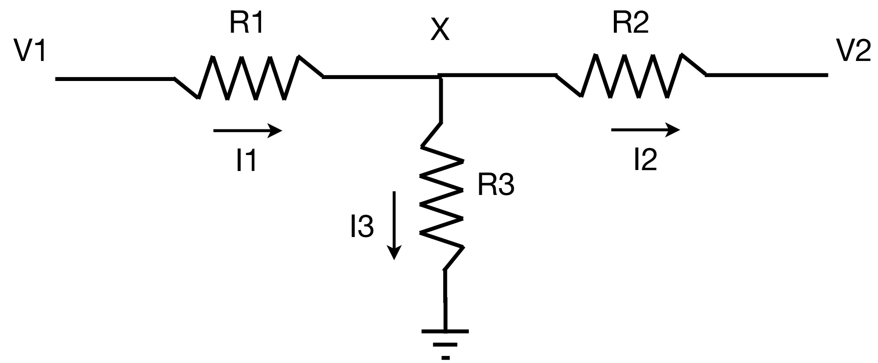
$$\Rightarrow I_o = I\frac{R_1}{R_1+R_2}$$

Representación de circuitos alternativa

Representación convencional



Representación reducida



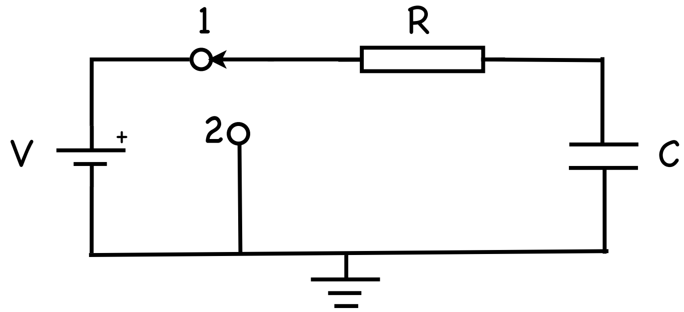
$$I1 = \frac{V1 - V_X}{R1}$$

$$I2 = \frac{V_X - V2}{R2}$$

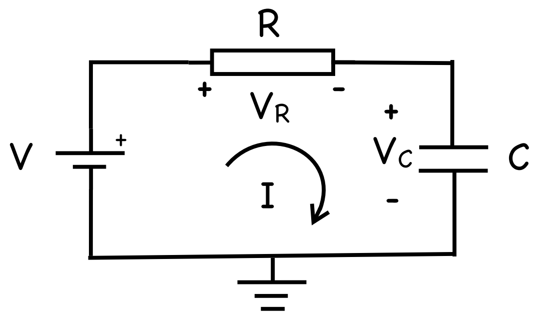
$$I3 = \frac{V_X}{R3}$$

$I1$-$I2$-$I3$=0

Carga y descarga de un condensador



Proceso de carga: El conmutador se sitúa en la posición 1 en el instante t_1



Inicialmente el condensador está descargado: $V_C(t_1)=0$

En cualquier instante posterior ($t>t_1$): $V=V_R(t)+V_C(t)$

Por otra parte:

$$V_R(t)=I(t)\cdot R$$

$$I(t)=C\frac{dV_C}{dt} \Rightarrow V_C(t)-\underbrace{V_C(t_1)}_{0}=\frac{1}{C}\int_{t_1}^{t} I(t)\,dt$$

Por lo tanto: $V=I(t)\cdot R+\frac{1}{C}\int_{t_1}^{t} I(t)\,dt$

Si ahora derivamos ambos miembros de la ecuación (Recuérdese que V=cte)

$$\frac{dV}{dt}=0=R\cdot\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I(t)$$

Reorganizamos $\quad \frac{dI}{I}=-\frac{1}{RC}dt$

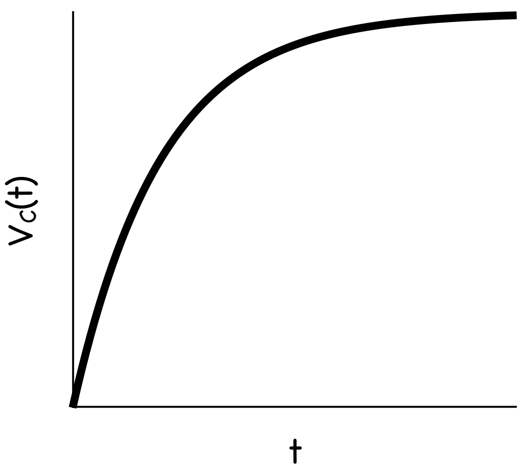
Integramos

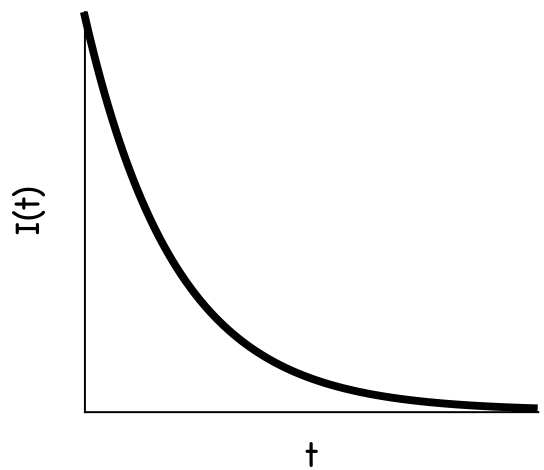
$$\int_{I_1}^{I}\frac{dI}{I}=-\frac{1}{RC}\int_{t_1}^{t}dt \quad \Rightarrow \ln\left(\frac{I(t)}{I_1}\right)=-\frac{1}{RC}(t-t_1) \quad \Rightarrow \quad I(t)=I_1e^{-\frac{1}{RC}(t-t_1)}=\frac{V}{R}e^{-\frac{1}{RC}(t-t_1)}$$

$$I_1=\frac{V}{R}$$

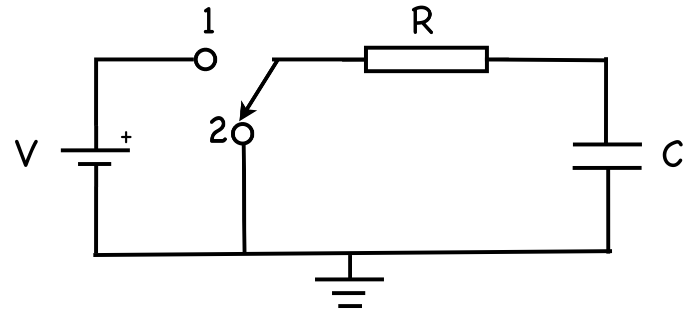
Diferencia de tensión entre los terminales del condensador:

$$V_C(t)=\frac{1}{C}\int_{t_1}^{t}I(t)\,dt=\frac{V}{RC}\int_{t_1}^{t}e^{-\frac{1}{RC}(t-t_1)}dt=-Ve^{-\frac{1}{RC}(t-t_1)}\Big|_{t_1}^{t}=-V\cdot\left(e^{-\frac{1}{RC}(t-t_1)}-1\right)$$

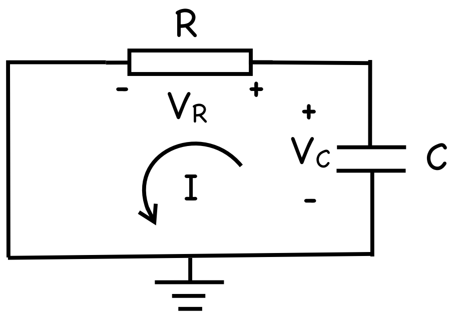




Carga y descarga de un condensador



Proceso de descarga: El conmutador se sitúa en la posición 2 en el instante t_2



Inicialmente el condensador está cargado: $V_C(t_2)=V$

En cualquier instante posterior ($t>t_2$): $0=-V_R(t)+V_C(t)$

Por otra parte:

$$V_R(t)=I(t)\cdot R$$

$$I(t)=-C\frac{dV_c}{dt} \Rightarrow V_c - V_c(t_2) = -\frac{1}{C}\int_{t_2}^{t} I(t)dt$$

Por lo tanto: $-V=-I(t)\cdot R-\frac{1}{C}\int_{t2}^{t} I(t)dt$

Derivamos $$0=-R\cdot\frac{dI}{dt}-\frac{1}{C}I(t)$$

Reorganizamos $$\frac{dI}{I}=-\frac{1}{RC}dt$$

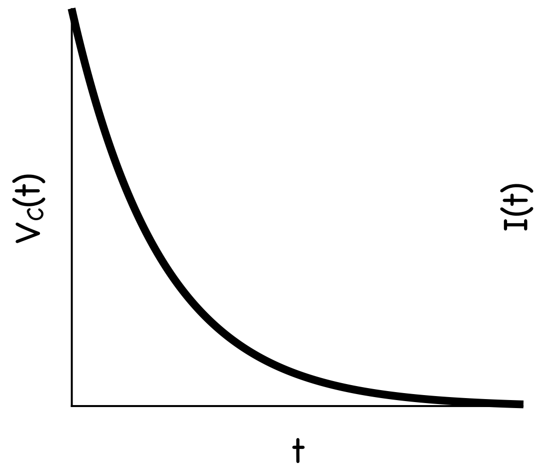
Integramos

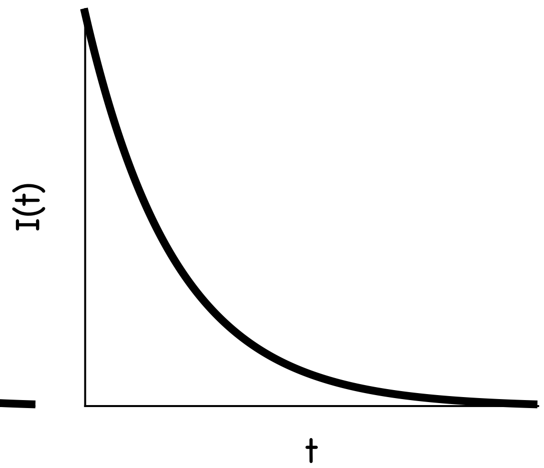
$$\int_{I_2}^{I}\frac{dI}{I}=-\frac{1}{RC}\int_{t_2}^{t}dt \quad\Rightarrow \ln\left(\frac{I(t)}{I_2}\right)=-\frac{1}{RC}(t-t_2) \quad\Rightarrow\quad I(t)=I_2 e^{-\frac{1}{RC}(t-t_2)}=\frac{V}{R}e^{-\frac{1}{RC}(t-t_2)}$$

$$I_2=\frac{V}{R}$$

Diferencia de tensión entre los terminales del condensador:

$$V_C(t)=V-\frac{1}{C}\int_{t_2}^{t}I(t)\,dt=V-\frac{V}{RC}\int_{t_2}^{t}e^{-\frac{1}{RC}(t-t_2)}dt=V-Ve^{-\frac{1}{RC}(t-t_2)}\Big|_{t_2}^{t}=V-V\cdot\left(1-e^{-\frac{1}{RC}(t-t_2)}\right)=V\cdot e^{-\frac{1}{RC}(t-t_2)}$$





Funciones sinusoidales

- Es el modo en el que se transporta la corriente desde las centrales hasta los terminales de usuario. Permite un transporte eficaz y seguro

  Cuando hablamos de 'corriente alterna' nos referimos generalmente a señales eléctricas sinusoidales

Expresión general:

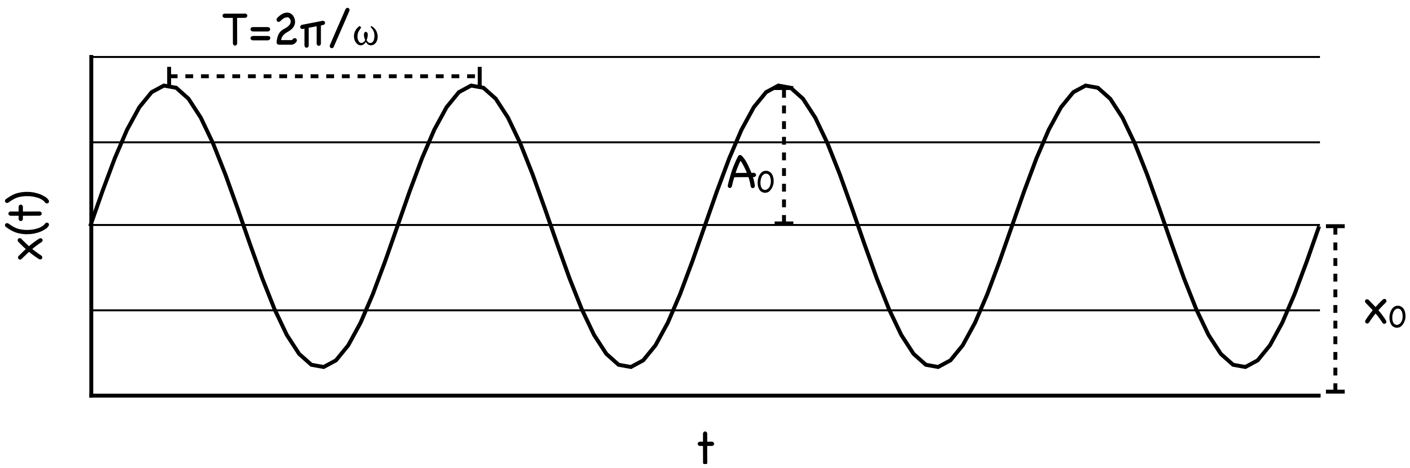
$$x(t)=x_0+A_0 \mathrm{sen}(\omega t+\varphi)$$

x_0: Componente de continua

A_0: Amplitud

ω: Frecuencia angular (rad/s) ($\omega=2\pi f$)

φ: Fase (rad)



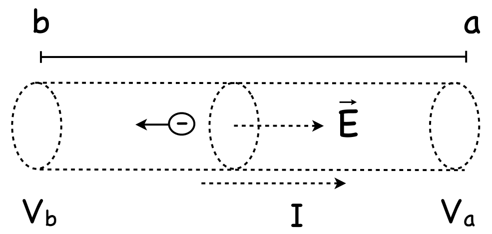
(c) David López Vilariño, USC

Potencia y energía

Corriente eléctrica: Carga eléctrica fluyendo por un conductor

Supongamos un electrón (-q) que se desplaza entre dos puntos (a y b) en presencia de un campo eléctrico:

Trabajo realizado:



$$W_a^b=-q\int_a^b E\,dl=q(V_a-V_b)$$

Ley de Joule

Energía consumida por unidad de tiempo:

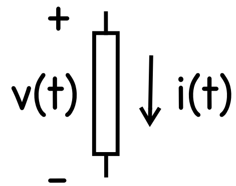
$$p(t)=\frac{dW}{dt}=\frac{dq}{dt}(V_a-V_b)=i(t)v(t)$$

Cuando fluye una corriente en el interior de un conductor se producen pérdidas de energía en forma de calor debido a las colisiones de los electrones contra los átomos del material conductor (James Prescott Joule, 1840)

$1KW\cdot hora=3{,}6x10^6J$ $\quad$ $1J=0{,}24cal$

Nociones de potencia

Potencia instantanea



$$p(t)=i(t)\cdot v(t)\ \left|\ \begin{array}{l} p(t)>0 \Rightarrow \text{Absorción de potencia} \\ p(t)<0 \Rightarrow \text{Entrega de potencia} \end{array}\right.$$

En una resistencia: $v(t)=i(t)\cdot R \Rightarrow p(t)=i^2(t)\cdot R=v^2(t)/R$

De un modo general (resistencia, condensador, bobina o cualquier combinación de estos elementos:

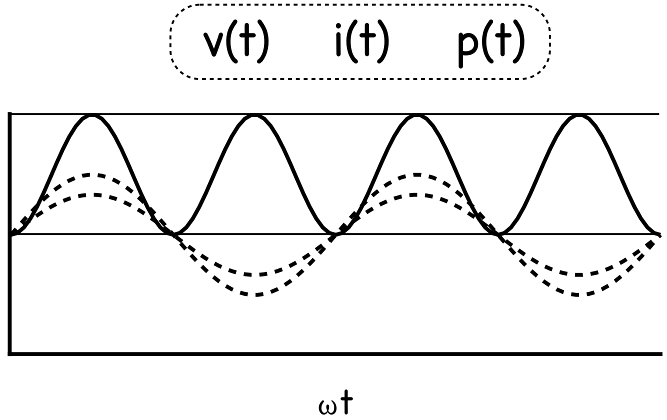
$$\left.\begin{array}{l} v(t)=V_m sen(\omega t) \\ i(t)=I_m sen(\omega t+\varphi) \end{array}\right| \quad p(t)=i(t)\cdot v(t)=V_m I_m sen(\omega t)sen(\omega t+\varphi)$$

Teniendo en cuenta $\quad sen(x)\cdot sen(y)=\dfrac{cos(x-y)-cos(x+y)}{2}$

$$p(t)=V_m I_m \frac{cos(-\varphi)-cos(2\omega t+\varphi)}{2}=\frac{V_m I_m}{2}cos(\varphi)-\frac{V_m I_m}{2}cos(2\omega t+\varphi)$$

En una resistencia ($\varphi=0$):

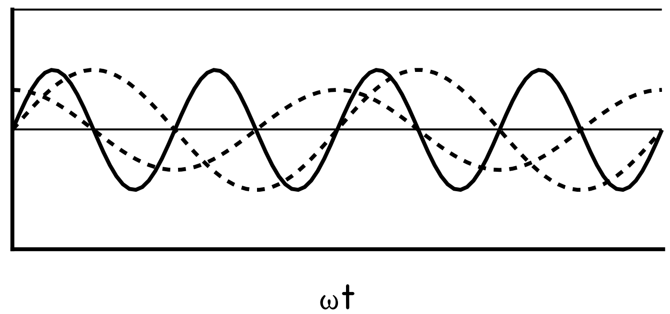
$$p(t)=\frac{V_m I_m}{2}-\frac{V_m I_m}{2}\cos(2\omega t)$$



Siempre consume

En un condensador ($\varphi=\pi/2$):

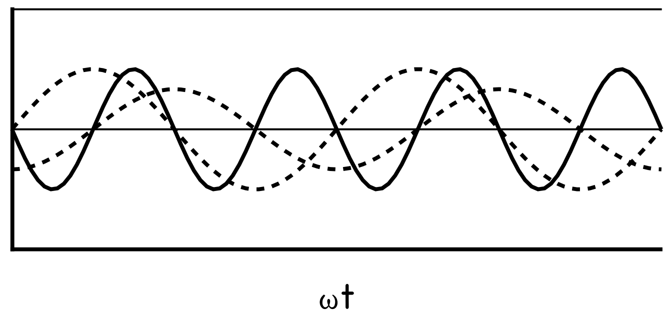
$$p(t)=-\frac{V_m I_m}{2}\cos(2\omega t+\frac{\pi}{2})$$



Absorbe y entrega

En una bobina ($\varphi=-\pi/2$):

$$p(t)=-\frac{V_m I_m}{2}\cos(2\omega t-\frac{\pi}{2})$$



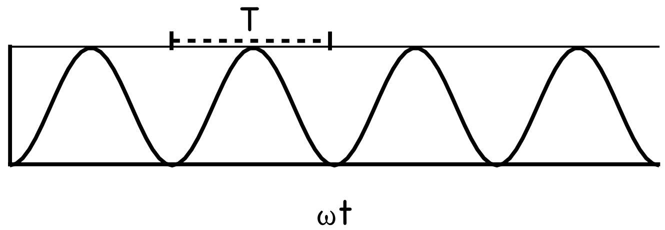
Absorbe y entrega

Energía consumida en un ciclo:

$$W=\int_0^T p(t)dt$$

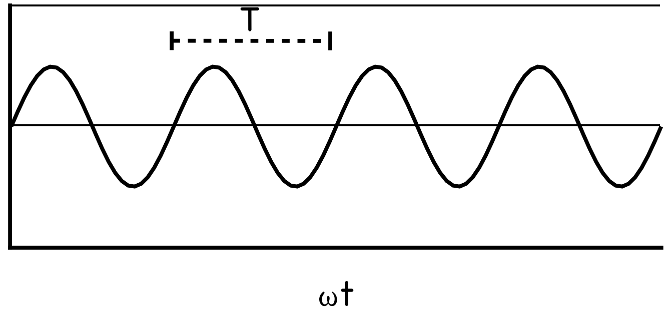
Área de la curva de potencia en un ciclo

Resistencia



$$W=\frac{V_m I_m T}{2}$$

Condensador o bobina



$W=0$

Potencia media: potencia media consumida en un ciclo

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt$$

Resistencia $P=\frac{V_m I_m}{2}$

Condensador o bobina $P=0$