CAPÍTULO 9

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Recordemos que una Ecuación Diferencial de enésimo orden es de la forma:

$$F(x, y, y', y'', \ldots\ldots\ldots, y^{[n]}) = 0$$

La **Solución General** de estas ecuaciones es de la forma:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots C_n)$$

que depende de $"n"$ constantes arbitrarias.

Si se dan condiciones iniciales se puede obtener la **Solución Particular** correspondiente.

Veremos a continuación distintos métodos para resolver Ecuaciones Diferenciales Lineales de Orden Superior.

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ENÉSIMO ORDEN

Una Ecuación Diferencial es Lineal si es de 1º grado respecto a la función desconocida $"y"$ y sus derivadas (es decir que el exponente de $y^{[n]}, y^{[n-1]}, \ldots\ldots, y'', y', y$ es igual a uno):

$$a_0 y^{[n]} + a_1 y^{[n-1]} + \ldots\ldots\ldots + a_{n-2} y'' + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

Donde $a_0, a_1, \ldots\ldots\ldots, a_n, f(x)$ son funciones de $"x"$ o constantes y $a_0 \neq 0$.

$f(x)$ recibe el nombre de **segundo miembro** de la ecuación diferencial.

Para simplificar el desarrollo, consideraremos $a_0 = 1$, en caso de no serlo, dividiremos a ambos miembros por a_0.

Si $f(x) \neq 0$ la Ecuación Diferencial Lineal se llama **no Homogénea** ó con segundo miembro.

$$y^{[n]} + a_1 y^{[n-1]} + \ldots\ldots\ldots + a_{n-2} y'' + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \qquad (1)$$

Si $f(x) = 0$ la Ecuación Diferencial Lineal se llama **Homogénea** ó sin segundo miembro.

$$y^{[n]} + a_1 y^{[n-1]} + \ldots\ldots\ldots + a_{n-2} y'' + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (2)$$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGÉNEAS DE SEGUNDO ORDEN

Son de la forma:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (3)$$

Definamos algunas propiedades de la Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas, que utilizaremos como base para determinar su Solución General.

1- *"Si y_1 e y_2 son Soluciones Particulares de la Ecuación Diferencial Lineal Homogénea de 2º Orden (3), y C_1 y C_2 constantes, entonces $C_1 y_1 + C_2 y_2$ también lo será".*

Demostración:

Si y_1 es solución de la ecuación (3) entonces $y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0$

Si y_2 es solución de la ecuación (3) entonces $y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0$

Consideremos ahora $y_3 = C_1 y_1 + C_2 y_2$ entonces $y_3' = C_1 y_1' + C_2 y_2'$ e $y_3'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2''$

Para que y_3 sea solución de la ec. (3) debe ser $y_3'' + a_1 y_3' + a_2 y_3 = 0$

Reemplazamos $(C_1 y_1'' + C_2 y_2'') + a_1 (C_1 y_1' + C_2 y_2') + a_2 (C_1 y_1 + C_2 y_2) = 0$

Reordenamos términos $(C_1 y_1'' + a_1 C_1 y_1' + a_2 C_1 y_1) + (C_2 y_2'' + a_1 C_2 y_2' + a_2 C_2 y_2) = 0$

Sacamos factor común C_1 y C_2 $C_1 (y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + C_2 (y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) = 0$

Y como por definición y_1 e y_2 son dos Soluciones Particulares de la Ecuación Diferencial (3), ambos términos resultan igual a cero, con lo que queda demostrada la propiedad.

2- **Funciones Linealmente Independientes:**

- Dos funciones y_1 e y_2 son linealmente dependientes en un intervalo dado si su cociente es constante, es decir si $\frac{y_1}{y_2} = constante$.
- Dos funciones y_1 e y_2 son linealmente independientes si $\frac{y_1}{y_2} \neq constante$.
- Dos funciones no pueden ser linealmente independientes si una de ellas es nula.
- Aunque siempre podemos recurrir a esta definición para definir funciones linealmente independientes, también se puede establecer si dos funciones son linealmente independientes mediante el siguiente determinante:
- Definamos como Determinante de Wronski o simplemente Wronskiano de las funciones y_1 e y_2 al determinante:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

- Si las funciones y_1 e y_2 son linealmente dependientes en un intervalo dado, entonces su Wronskiano se anula en dicho intervalo.

  En efecto si y_1 e y_2 son linealmente dependientes, entonces
  $y_2 = Cy_1$ $\left[C = \text{constante}\right]$, por lo tanto $y_2' = Cy_1'$, resultando el Wronsquiano:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & Cy_1 \\ y'_1 & Cy_1' \end{vmatrix} = C.\begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix} = 0$$

$$W(y_1, y_2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y_1 \text{ e } y_2 \textit{ son Linealmente Dependientes}$$

- Se puede demostrar que *si dos funciones* y_1 e y_2 *son Soluciones Particulares Linealmente Independientes de la Ecuación Diferencial (3), entonces W no se anula en ningún punto, es decir:*

$$W(y_1, y_2) \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad y_1 \text{ e } y_2 \textit{ son Linealmente Independientes}$$

  Esto se verifica también para *"n"* funciones que son Soluciones Particulares Linealmente Independientes de una Ecuación Diferencial Lineal Homogénea de Orden *"n"*.

$$W(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{[n-1]} & y_2^{[n-1]} & \cdots & y_n^{[n-1]} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n \textit{ son Linealmente Independientes}$$

3- Y finalmente: ***"Si*** y_1 ***e*** y_2 ***son Soluciones Particulares Linealmente Independientes de la Ecuación Diferencial (3), entonces su <u>Solución General</u> será:***

$$\boxed{y = C_1 y_1 + C_2 y_2}$$

Siendo C_1 *y* C_2 *dos constantes arbitrarias".*

En generales no es fácil determinar las soluciones de las Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas de Segundo Orden cuando los coeficientes son variables, pero sí lo es cuando los coeficientes a_1 y a_2 son constantes y es lo que estudiaremos a continuación:

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGÉNEAS DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

Son de la forma:

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (4)$$

donde p y q son números constantes reales.

Para obtener la Solución General de estas Ecuaciones Diferenciales es suficiente con encontrar dos Soluciones Particulares Linealmente Independientes. Demos a una Solución Particular la forma:

$\boxed{y = e^{kx}}$ donde "k" es una constante. Entonces derivándola dos veces tendremos:

$$y' = ke^{kx} \qquad\qquad y'' = k^2 e^{kx}$$

Reemplazamos en la expresión de la Ecuación Diferencial (4):

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$$
$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$$

Como siempre es $e^{k.x} \neq 0$, entonces para que $y = e^{kx}$ sea solución de la Ecuación Diferencial (4) deberá ser:

$$\boxed{k^2 + pk + q = 0} \qquad (5)$$

Si "k" satisface a la ecuación (5) entonces $y = e^{kx}$ será solución de la Ecuación Diferencial (4).
La ecuación (5) recibe el nombre de **ECUACIÓN CARACTERÍSTICA**. Ésta es una ecuación de segundo grado que tiene dos raíces, que llamaremos k_1 y k_2:

$$k_{1-2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Pueden presentarse tres casos, que k_1 y k_2 sean dos Raíces Reales y Distintas, dos Raíces Reales e Iguales, ó dos Raíces Complejas Conjugadas. Analicemos cada uno de ellos:

1- **Dos Raíces Reales y Distintas** $(p^2 - 4q > 0)$

Es decir $k_1 \neq k_2$

En este caso tendremos dos Soluciones Particulares:

$$y_1 = e^{k_1 x} \qquad\qquad y_2 = e^{k_2 x}$$

Estas dos soluciones resultan ser Linealmente Independientes, pues:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = k_2 e^{k_1 x} e^{k_2 x} - k_1 e^{k_1 x} e^{k_2 x} = (k_2 - k_1) e^{k_1 x} e^{k_2 x} \neq 0$$

Por lo tanto en este caso la Solución General de la Ecuación Diferencial (4) será de la forma:

$$\boxed{y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}}$$

Ejemplo 1:
Resolvamos la siguiente Ecuación Diferencial $y'' - 4y' + 3y = 0$

Su Ecuación Característica es: $k^2 - 4k + 3 = 0$

Sus raíces son: $k_{1-2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.3}}{2} = \begin{cases} k_1 = 3 \\ k_2 = 1 \end{cases}$

Y como son dos raíces reales y distintas:

$$\boxed{y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{x}}$$ **Solución General**

Si se fijan condiciones iniciales, se puede determinar la Solución Particular correspondiente. Por ejemplo: $y_0 = 6$ e $y'_0 = 10$ para $x_0 = 0$

Trabajamos con la Solución General y su derivada:

$$\begin{cases} y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{x} \\ y' = 3C_1 e^{3x} + C_2 e^{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} 6 = C_1 + C_2 \\ 10 = 3C_1 + C_2 \end{cases}$$

De este sistema de dos Ecuaciones Lineales con dos incógnitas, obtenemos los valores de:

$C_1 = 2$ y $C_2 = 4$

Y finalmente la Solución Particular resulta ser:

$$\boxed{y = 2e^{3x} + 4e^{x}}$$ **Solución Particular**

2- **Dos Raíces Reales e Iguales** $(p^2 - 4q = 0)$

Es decir $k_1 = k_2 = k = -\dfrac{p}{2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{2k + p = 0}$

En el caso de ser Dos Raíces Reales e Iguales, además de $k^2 + pk + q = 0$ también $2k + p = 0$.

Al ser Dos Raíces Reales e Iguales tenemos una sola Solución Particular: $y_1 = e^{kx}$

Demostremos que en este caso también es solución de la Ec. Dif. (4) la expresión: $y_2 = xe^{kx}$

Derivemos dos veces a y_2:
$$\begin{cases} y'_2 = e^{kx} + kxe^{kx} \\ y''_2 = 2ke^{kx} + k^2 xe^{kx} \end{cases}$$

Para que y_2 sea solución de la Ecuación Diferencial (4) debe resultar:

$$y''_2 + py'_2 + qy_2 = 0$$

Reemplazamos en esta última los valores de y_2 y sus derivadas:

$$2ke^{kx} + k^2xe^{kx} + p(e^{kx} + kxe^{kx}) + qxe^{kx} = 0$$

Reordenamos los términos y obtenemos:

$$xe^{kx}(k^2 + pk + q) + e^{kx}(2k + p) = 0$$

Como vimos, cuando son Dos Raíces Reales e Iguales, los dos paréntesis de la última expresión resultan iguales a cero, por lo que queda demostrado que y_2 también es solución de la Ecuación Diferencial (4). Y como y_1 e y_2 resultan ser Linealmente Independientes:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{kx} & xe^{kx} \\ ke^{kx} & e^{kx} + kxe^{kx} \end{vmatrix} = e^{2kx} + kxe^{2kx} - kxe^{2kx} = e^{2kx} \neq 0$$

Entonces la Solución General será:

$$\boxed{y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx}} \qquad \text{ó} \qquad \boxed{y = (C_1 + C_2x)e^{kx}}$$

Ejemplo 2:
Sea la Ecuación Diferencial Lineal Homogénea de 2º Orden con coeficientes constantes:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Su Ecuación Característica es: $k^2 - 2k + 1 = 0$

Sus raíces son: $k_{1-2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1}}{2} = 1$

$$\boxed{k_1 = k_2 = k = 1}$$

Y como son Dos Raíces Reales e Iguales: $\boxed{y = (C_1 + C_2x)e^{x}}$ **Solución General**

Fijemos como condición inicial $y(0) = 2$ e $y'(0) = 5$, y obtengamos la Solución Particular correspondiente. Para ello trabajamos con la Solución General y su derivada:

$$\begin{cases} y = C_1.e^{x} + C_2xe^{x} \\ y = C_1e^{x} + C_2e^{x} + C_2xe^{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 = C_1 \\ 5 = C_1 + C_2 \end{cases}$$

De este sistema de dos Ecuaciones Lineales con dos incógnitas obtenemos los valores de :

$C_1 = 2$ y $C_2 = 3$

Y finalmente la Solución Particular resulta ser:

$\boxed{y = (2 + 3x)e^{x}}$ **Solución Particular**

3- **Dos Raíces Complejas Conjugadas** $(p^2 - 4q < 0)$

Es decir: $k_1 = \alpha + i\beta$ $k_2 = \alpha - i\beta$

Las dos Soluciones Particulares son: $y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}$ $y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$

Que son Linealmente Independientes, pues:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{(\alpha+i\beta)x} & e^{(\alpha-i\beta)x} \\ (\alpha+i\beta)e^{(\alpha+i\beta)x} & (\alpha-i\beta)e^{(\alpha-i\beta)x} \end{vmatrix} = (\alpha - i\beta)e^{2\alpha x} - (\alpha + i\beta)e^{2\alpha x} = -i2\beta\, e^{2\alpha x} \neq 0$$

Y la Solución General es: $y = c_1.e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2.e^{(\alpha-i\beta)x}$

En la práctica se prefiere trabajar con funciones reales y no con exponenciales complejas. Con este fin aplicamos la Fórmula de Euler:

$$e^{\pm i\beta x} = \cos\beta x \pm i\,\mathrm{sen}\beta x$$

Expresamos la Solución General así: $y = c_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + c_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x})$

Aplicamos la Fórmula de Euler: $y = e^{\alpha x}\left[c_1(\cos\beta x + i\,\mathrm{sen}\beta x) + c_2(\cos\beta x - i\,\mathrm{sen}\beta x)\right]$

Reordenamos términos: $y = e^{\alpha x}\left[(c_1 + c_2)\cos\beta x + i(c_1 - c_2)\mathrm{sen}\beta x\right]$

Y considerando: $C_1 = c_1 + c_2$ y $C_2 = i(c_1 - c_2)$

La Solución finalmente se expresa: $\boxed{y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \mathrm{sen}\beta x)}$ **Solución General**

Ésta nos proporciona las soluciones (reales o complejas) de la Ecuación Diferencial. Las soluciones son reales cuando C_1 y C_2 son reales.

Ejemplo 3: Determinemos la solución de la siguiente Ecuación Diferencial:

$$y'' - 2y' + 2.y = 0$$

La Ecuación Característica es: $k^2 - 2k + 2 = 0$

Sus raíces son: $k_{1-2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.2}}{2} = 1 \pm i$ $\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{array} \right.$

Su Solución General resulta: $\boxed{y = e^{x}(C_1 \cos x + C_2 \mathrm{sen} x)}$ **Solución General**

Fijemos como condición inicial $y_0 = 4$ e $y'_0 = 1$ para $x_0 = 0$, y obtengamos la Solución Particular correspondiente. Para ello trabajamos con la Solución General y su derivada:

$$\begin{cases} y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x) \\ y' = e^x (C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x) + e^x (-C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x) \end{cases} \qquad \begin{cases} 4 = C_1 \\ 1 = C_1 + C_2 \end{cases}$$

De este sistema de dos Ecuaciones Lineales con dos incógnitas obtenemos los valores de:

$C_1 = 4$ y $C_2 = -3$

Y finalmente la Solución Particular resulta ser:

$$\boxed{y = e^x (4 \cos x - 3 \operatorname{sen} x)}$$ **Solución Particular**

Ejercicios

Hallar las Soluciones Generales y Particulares de las siguientes Ecuaciones Diferenciales Homogéneas de Segundo Orden con Coeficientes Constantes:

1	$y'' - y = 0$	Condición inicial: $y_0 = 2$ e $y'_0 = 6$ para $x_0 = 0$
2	$4y'' - 5y' - 6y = 0$	Condición inicial: $y_0 = 5$ e $y'_0 = -1$ para $x_0 = 0$
3	$y'' - 2y' + 5y = 0$	Condición inicial: $y(0) = 0$ e $y'(0) = 6$
4	$y'' + y = 0$	Condición inicial: $y(\frac{\pi}{2}) = 3$ e $y'(\frac{\pi}{2}) = -2$
5	$y'' + 4y' + 4y = 0$	Condición inicial: $y(0) = 4$ e $y'(0) = 1$
6	$y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$	Condición inicial: $y_0 = 6$ e $y'_0 = 2$ para $x_0 = 0$

Soluciones:

Nº	Solución General	Solución Particular
1	$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$	$y = 4e^{x} - 2e^{-x}$
2	$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{3}{4}x}$	$y = e^{2.x} + 4e^{-\frac{3}{4}x}$
3	$y = e^{x}(C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x)$	$y = 3e^{x} \operatorname{sen} 2x$
4	$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$	$y = 2\cos x + 3\operatorname{sen} x$
5	$y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$	$y = (4 + 9x)e^{-2x}$
6	$y = (C_1 + C_2 x)e^{\frac{x}{2}}$	$y = (6 - x)e^{\frac{x}{2}}$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGÉNEAS DE ENÉSIMO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

Son de la forma:

$$y^{[n]} + a_1 y^{[n-1]} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + a_{n-2} y'' + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (6)$$

Donde $a_0, a_1, \dots\dots\dots\dots\dots\dots, a_n$ son constantes reales.

Todo lo estudiado para las Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas de Segundo Orden con Coeficientes Constantes puede ser ampliado a las Ecuaciones de Enésimo Orden:

"Si $y_1, y_2, \dots\dots\dots\dots\dots\dots, y_n$ son Soluciones Particulares de la Ecuación Diferencial (6), decimos que son Linealmente Independientes si ninguna de ellas puede ser representada como combinación lineal de las otras. Es decir si ***no*** *pueden ser representadas de la forma:*

$$y_n = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + A_{n-1} y_{n-1}$$

donde $A_1, A_2, \dots\dots\dots\dots\dots\dots, A_{n-1}$ son constantes, de las cuales por lo menos una no es igual a cero."

O también recurriendo al Wronsquiano, podemos definir que si $y_1, y_2, \dots\dots\dots\dots\dots\dots, y_n$ son Soluciones Particulares Linealmente Independientes se verifica que:

$$W(y_1, y_2, \dots\dots\dots\dots, y_n) \neq 0$$

Si $y_1, y_2, \dots\dots\dots\dots\dots\dots, y_n$ son Soluciones Particulares Linealmente Independientes de la Ecuación Diferencial (6), entonces su Solución General es de la forma:

$$\boxed{y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + C_n y_n} \qquad \textbf{Solución General}$$

donde $C_1, C_2, \dots\dots\dots\dots\dots\dots, C_n$ son constantes arbitrarias.

La Solución General se determina del mismo modo que en el caso de Ecuaciones de Segundo Orden:

1- Se forma la **Ecuación Característica** en base a la Ecuación Diferencial (6) planteada:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + a_{n-2} k^2 + a_{n-1} k + a_n = 0 \ \textbf{Ecuación Característica}$$

2- Se determinan las "**n**" raíces de la Ecuación Característica $k_1, k_2, \dots\dots\dots\dots\dots\dots, k_n$

3- Según el tipo de raíces será la forma de la Solución General, de acuerdo a las siguientes consideraciones:

a- A toda Raíz Real Simple "k" le corresponde una Solución Particular: $y = e^{k.x}$

b- A todo par de Raíces Complejas Conjugadas $k = \alpha \pm i\beta$
le corresponden dos Soluciones Particulares: $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ $\quad y_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$

c- A toda Raíz Real "k" de multiplicidad "m" le
corresponden "m" Soluciones Particulares: $e^{kx},\ xe^{kx},\ x^2e^{kx},\ldots\ldots\ldots\ldots,\ x^{m-1}e^{kx}$

d- A todo par de Raíces Complejas Conjugadas de
multiplicidad "u" le corresponden "2u"
Soluciones Particulares: $e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\cos\beta x,\ldots\ldots\ldots,\ x^{u-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$
$e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ldots\ldots\ldots,\ x^{u-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$

De lo expuesto podemos comprobar que resolver una Ecuación Diferencial Lineal Homogénea de Enésimo Orden con Coeficientes Constantes, consiste en resolver la Ecuación Característica correspondiente.

Ejemplos: Determinar la Solución General de las siguientes Ecuaciones Diferenciales

1- $y^{[6]} + 2y^{[5]} + y^{[4]} = 0$ la Ecuación Característica es
$k^6 + 2k^5 + k^4 = 0$ calculamos sus raíces
$k^4(k^2 + 2k + 1) = 0$ — $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$
$k_5 = k_6 = -1$

$$\boxed{y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5e^{-x} + C_6xe^{-x}}$$ **Solución General**

2- $y''' - 3y'' + 3y' = 0$ la Ecuación Característica es
$k^3 - 3k^2 + 3k = 0$ calculamos sus raíces
$k(k^2 - 3k + 3) = 0$ — $k_1 = 0$
$k_{2-3} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\boxed{y = C_1 + C_2e^{\frac{3}{2}x}\cos\tfrac{\sqrt{3}}{2}x + C_3e^{\frac{3}{2}x}\operatorname{sen}\tfrac{\sqrt{3}}{2}x}$$ ó $$\boxed{y = C_1 + e^{\frac{3}{2}x}(C_2\cos\tfrac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\operatorname{sen}\tfrac{\sqrt{3}}{2}x)}$$
Solución General

3- $y''' - 8y = 0$ la Ecuación Característica es
$k^3 - 8 = 0$ calculamos sus raíces
$k = \sqrt[3]{8} = 2 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 2$
$\dfrac{k^3 - 8}{k - 2} = k^2 + 2k + 4 \quad \Rightarrow \quad k^3 - 8 = (\mathrm{k}^2 + 2k + 4)(k - 2) = 0$
$k^2 + 2k + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{2-3} = -1 \pm \sqrt{3}.i$

$$\boxed{y = C_1.e^{2x} + C_2e^{-x}\cos\sqrt{3}x + C_3e^{-x}\operatorname{sen}\sqrt{3}x}$$ ó $$\boxed{y = C_1e^{2x} + e^{-x}(C_2\cos\sqrt{3}x + C_3\operatorname{sen}\sqrt{3}x)}$$
Solución General

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES NO HOMOGÉNEAS DE SEGUNDO ORDEN

Son de la forma:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \tag{7}$$

Su Solución General se puede expresar como:

$$y = y_h + y_p \tag{8}$$

Donde y_p es una Solución Particular cualquiera de la Ecuación Diferencial Lineal no Homogénea (7) e y_h es la Solución General de la Ecuación Diferencial Lineal Homogénea Auxiliar:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{9}$$

Para demostrarlo derivemos dos veces la (8) y luego la introducimos en la Ecuación no Homogénea (7):

$$y = y_h + y_p \qquad y' = y'_h + y'_p \qquad y'' = y''_h + y''_p$$

$$(y''_h + y''_p) + a_1(y'_h + y'_p) + a_2(y_h + y_p) = f(x)$$ reordenamos términos:

$$(y''_h + a_1 y'_h + a_2 y_h) + (y''_p + a_1 y'_p + a_2 y_p) = f(x)$$

Como y_p es Solución Particular de la Ecuación Diferencial (7), entonces el segundo paréntesis es igual a $f(x)$ y como y_h es Solución de la Ecuación Homogénea Auxiliar (9) el primer paréntesis es igual a cero, con lo que queda demostrado que $y = y_h + y_p$ es Solución de la Ecuación Diferencial Lineal no Homogénea (7).

Ya sabemos calcular la Solución y_h de la Ecuación Homogénea Auxiliar (9):

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Donde y_1 e y_2 son dos Soluciones Particulares Linealmente Independientes y C_1 y C_2 son dos constantes arbitrarias.

Por lo que la Solución General (8) de la Ecuación Diferencial Lineal no Homogénea (7) resulta:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p$$

Solo nos resta obtener la Solución Particular y_p.

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES NO HOMOGÉNEAS DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{10}$$

donde p y q son números reales. Su Solución General, como vimos, es de la forma:

$$y = y_h + y_p$$

Existen dos métodos para obtener la Solución Particular y_p:

- **El Método de los Coeficientes Indeterminados**: Es un método muy simple, pero es válido solo para un número restringido de funciones $f(x)$.
- **El Método de la Variación de los Parámetros** (ó de la Variación de las Constantes Arbitrarias): Es más difícil de aplicar en la práctica, pero válido para cualquier función $f(x)$.

Método de los Coeficientes Indeterminados

Sea la Ecuación Diferencial Lineal no Homogénea de Segundo Orden con Coeficientes Constantes:

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (10)$$

Este método se aplica cuando $f(x)$ tiene la forma de un polinomio, o una exponencial, o seno, o coseno, o una combinación de ellos.

Si $f(x)$ tiene una de estas formas, entonces es razonable pensar que existe una Solución Particular y_p de esa misma forma.

Por ejemplo si $f(x)$ es un polinomio, podemos considerar que y_p es igual a un polinomio del mismo grado y si lo sustituimos en la Ecuación Diferencial (10), obtendremos polinomios del mismo grado en ambos miembros de la igualdad. Solo restaría obtener los valores de los coeficientes de y_p .

Por lo tanto las consideraciones a realizar para obtener la Solución Particular y_p depende de la forma del segundo miembro $f(x)$:

1. **<u>El segundo miembro de la Ecuación Diferencial (10) es un polinomio de enésimo grado</u>** $f(x) = P_n(x)$

   Entonces la Solución Particular y_p buscada es un polinomio del mismo grado:

   $$y_p = U_n(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + A_{n-1}x + A_n$$

   Debiendo determinarse los coeficientes $A_0, A_1, \dots\dots\dots\dots\dots\dots A_n$.

   <u>Ejemplo</u>: Resolvamos la siguiente Ecuación Diferencial
   $y'' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = 2x$
   Su Solución General es de la forma: $y = y_h + y_p$

   Obtengamos primero la Solución General y_h de la Ecuación Diferencial Homogénea Auxiliar:

   $y'' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = 0$ su Ecuación Característica es:

   $k^2 - \frac{1}{2}k - \frac{1}{2} = 0$ calculamos sus raíces $k_{1-2} = \dfrac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 - 4(-\frac{1}{2})}}{2} =$ $k_1 = 1$, $k_2 = -\frac{1}{2}$

   La Solución y_h resulta: $\boxed{y_h = C_1e^x + C_2e^{-\frac{1}{2}x}}$

   Obtengamos ahora la Solución Particular y_p de la Ecuación Diferencial no Homogénea planteada:
   El segundo miembro es de la forma $f(x) = 2x$, es un polinomio de primer grado, entonces proponemos una Solución Particular de la misma forma:

$$y_p = Ax + B$$

Debemos calcular los coeficientes A y B. Para ello derivamos dos veces y_p, y la introducimos en la Ecuación Diferencial no Homogénea planteada:

$y_p = A.x + B$ $\qquad$ $y'_p = A$ $\qquad$ $y'' = 0$

$0 - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}(Ax + B) = 2x$ reordenamos términos:

$(-\frac{1}{2}A)x + (-\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) = 2x$ igualamos los coeficientes de las potencias de igual grado:

$-\frac{1}{2}A = 2 \quad \Rightarrow \quad A = -4$

$-\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}(-4) - \frac{1}{2}B = 0 \quad \Rightarrow$

$$\begin{cases} A = -4 \\ B = 4 \end{cases}$$

La Solución Particular y_p resultа: $\boxed{y_p = -4x + 4}$

Y finalmente la Solución General de la Ecuación Diferencial no Homogénea planteada es:

$\boxed{y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} - 4x + 4}$ **Solución General**

Determinemos una Solución Particular estableciendo como Condición Inicial:
$y(0) = 2$ e $y'(0) = 3$

Trabajamos con la Solución General y su derivada:

$$\begin{cases} y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} - 4x + 4 \\ y' = C_1 e^{x} - \frac{1}{2}C_2 e^{-\frac{1}{2}x} - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = C_1 e^{0} + C_2 e^{0} + 4 \\ 3 = C_1 e^{0} - \frac{1}{2}C_2 e^{0} - 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 + C_2 = -2 \\ C_1 - \frac{1}{2}C_2 = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 = 4 \\ C_2 = -6 \end{cases}$$

La Solución Particular es: $\boxed{y = 4e^{x} - 6e^{-\frac{1}{2}x} - 4x + 4}$ **Solución Particular**

2. **<u>El segundo miembro de la Ecuación Diferencial (10) es de la forma</u>:**
$f(x) = Ce^{\alpha x}$ $\qquad$ (C y α constantes)

Entonces la Solución Particular y_p buscada es de la misma forma (pues las derivadas de $e^{\alpha x}$ son múltiplos de $e^{\alpha x}$):
$y_p = Ae^{\alpha x}$ $\qquad$ Solo debemos determinar el coeficiente A.

<u>Ejemplo</u>: Resolvamos las siguiente Ecuación Diferencial
$y'' - y = 9e^{2x}$

Su Solución General es de la forma: $\qquad y = y_h + y_p$

Primero obtenemos la Solución General y_h de la Ecuación Diferencial Homogénea Auxiliar, para ello planteamos su Ecuación Característica y obtenemos las raíces correspondientes:

$y'' - y = 0$

$k^2 - 1 = 0$ sus raíces son $k_1 = 1$ y $k_2 = -1$ $\Rightarrow$ $\boxed{y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}}$

Para la Solución Particular y_p proponemos la forma:

$y_p = Ae^{2x}$ derivamos dos veces: $y'_p = 2Ae^{2x}$ $y''_p = 4Ae^{2x}$

Sustituimos en la Ecuación Diferencial planteada y calculamos el coeficiente A:

$$4Ae^{2x} - Ae^{2x} = 9e^{2x}$$
$$(4A - A)e^{2x} = 9e^{2x}$$
$$3A = 9 \quad \Rightarrow \quad A = 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_p = 3e^{2x}}$$

Y finalmente la **Solución General** de la Ecuación Diferencial planteada resulta:

$$\boxed{y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 3e^{2x}}$$

3. **<u>El segundo miembro de la Ecuación Diferencial (10) es de la forma</u>:**

$f(x) = C\cos\alpha x$ ó $f(x) = C\,\mathrm{sen}\,\alpha x$ ó $f(x) = C\cos\alpha x + D\,\mathrm{sen}\,\alpha x$

(C , D y α constantes)

En este caso proponemos una Solución Particular y_p de la forma:

$y_p = A\cos\alpha x + B\,\mathrm{sen}\,\alpha x$

Ello es debido a las reglas de derivación de las funciones seno y coseno.

Debemos determinar los coeficientes A y B.

<u>Ejemplo</u>: Obtengamos la Solución General de la siguiente Ecuación Diferencial

$y'' + 4y' + 4y = 5\,\mathrm{sen}\,x$ Su Solución General es de la forma: $y = y_h + y_p$

Calculamos primero y_h, planteamos la Ecuación Diferencial Homogénea Auxiliar:

$y'' + 4y' + 4y = 0$ su Ecuación Característica es:

$k^2 + 4k + 4 = 0$ sus raíces son $k_1 = k_2 = -2$ $\Rightarrow$ $\boxed{y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}}$

Proponemos ahora una Solución Particular de la forma:

$y_p = A\cos x + B\,\mathrm{sen}\,x$ derivamos dos veces: $y'_p = -A\,\mathrm{sen}\,x + B\cos x$

$y''_p = -A\cos x - B\,\mathrm{sen}\,x$

Sustituimos en la Ecuación Diferencial planteada:

$$(-A\cos x - B\,\mathrm{sen}\,x) + 4(-A\,\mathrm{sen}\,x + B\cos x) + 4(A\cos x + B\,\mathrm{sen}\,x) = 5\,\mathrm{sen}\,x$$
$$(3A + 4B)\cos x + (-4A + 3B)\,\mathrm{sen}\,x = 5\,\mathrm{sen}\,x$$

Por lo tanto: $\begin{cases} 3A+4B=0 \\ -4A+3B=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{4}{5} \\ B=\frac{3}{5} \end{cases}$

La Solución Particular resulta: $\boxed{y_p = -\frac{4}{5}\cos x + \frac{3}{5}\operatorname{sen} x}$

Y la **Solución General** de la Ecuación Diferencial planteada es:

$$\boxed{y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} - \frac{4}{5}\cos x + \frac{3}{5}\operatorname{sen} x}$$

4. **<u>El segundo miembro de la Ecuación Diferencial (10) es de la forma de un producto de funciones del tipo estudiado en los puntos anteriores</u>.**

Se propone una Solución Particular y_p con la forma de un producto de funciones del mismo tipo.

<u>Ejemplo 1</u>:
Si la Ecuación Diferencial a resolver es de la forma: $y'' + 4y' + 4y = 32xe^{2x}$
Se propone una Solución Particular: $y_p = (Ax+B)e^{2x}$

<u>Ejemplo 2</u>:
Si la Ecuación Diferencial a resolver es de la forma: $y'' - y = 2x\cos 5x$
Se propone una Solución Particular: $y_p = (Ax+B)\cos 5x + (Cx+D)\operatorname{sen} 5x$

<u>Ejemplo 3</u>:
Si la Ecuación Diferencial a resolver es de la forma: $y'' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = 4e^{3x}\operatorname{sen} 2x$
Se propone una Solución Particular: $y_p = Ae^{3x}\cos 2x + Be^{3x}\operatorname{sen} 2x$

5. **<u>El segundo miembro de la Ecuación Diferencial (10) es de la forma de una suma de funciones del tipo estudiado en los puntos anteriores</u>.**

Se propone una Solución Particular y_p con la forma de una suma de funciones del mismo tipo.

<u>Ejemplo 1</u>:
Si la Ecuación Diferencial a resolver es de la forma: $y'' + 4y' + 4y = 2e^{4x} - 5\operatorname{sen} 2x$
Se propone una Solución Particular: $y_p = Ae^{4x} + B\cos 2x + C\operatorname{sen} 2x$

<u>Ejemplo 2</u>:
Si la Ecuación Diferencial a resolver es de la forma: $y'' - y = 4x^2 - 2 + 6e^{-2x}$
Se propone una Solución Particular: $y_p = Ax^2 + Bx + C + De^{-2x}$

<u>Ejemplo 3</u>:
Si la Ecuación Diferencial a resolver es de la forma: $y'' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = 3x + 5 + 2\cos x$
Se propone una Solución Particular: $y_p = Ax + B + C\cos x + D\operatorname{sen} x$

6. **A veces la Solución Particular a proponer resulta ser una Solución de Ecuación Diferencial Homogénea Auxiliar y por lo tanto no puede ser Solución de la Ecuación Diferencial no Homogénea planteada.**

En estos casos se multiplica la Solución Particular y_p propuesta por "x" ó por "x^2" si es necesario.

Ejemplo 1: Obtengamos la Solución General de la siguiente Ecuación Diferencial:

$y'' + 7y' = e^{-7x}$

Su Solución General es de la forma: $y = y_h + y_p$

Primero obtenemos la Solución General y_h de la Ecuación Diferencial Homogénea Auxiliar, para ello planteamos su Ecuación Característica y obtenemos las raíces correspondientes:

$y'' + 7y' = 0$

$k^2 + 7k = 0$ sus raíces son $k_1 = 0$ y $k_2 = -7$ $\Rightarrow$ $\boxed{y_h = C_1 + C_2 e^{-7x}}$

Dado que el segundo miembro de la Ecuación Diferencial planteada es $f(x) = e^{-7x}$

Normalmente propondríamos una Solución Particular de la forma: $y_p = Ae^{-7x}$

Pero al observar y_h, se comprueba que es una de las Soluciones de la Ecuación Diferencial Homogénea Auxiliar ($C_2 e^{-7x}$), entonces debemos buscar una Solución Particular de la forma:

$$y_p = Axe^{-7x}$$

Debemos calcular el coeficiente A. Para ello derivamos dos veces y_p, y sustituimos esos valores en la Ecuación Diferencial planteada:

$y_p = Axe^{-7x}$ $\quad y'_p = Ae^{-7x} - 7Axe^{-7x}$ $\quad y''_p = -14Ae^{-7x} + 49Axe^{-7x}$

$$(-14Ae^{-7x} + 49Axe^{-7x}) + 7(Ae^{-7x} - 7Axe^{-7x}) = e^{-7x}$$

$$-7Ae^{-7x} = e^{-7x} \quad \Rightarrow \quad A = -\tfrac{1}{7}$$

La Solución Particular resulta: $\boxed{y_p = -\tfrac{1}{7} xe^{-7x}}$

Y finalmente la **Solución General** es: $\boxed{y = C_1 + C_2 e^{-7x} - \tfrac{1}{7} xe^{-7x}}$

Ejemplo 2: Resolvamos la siguiente Ecuación Diferencial:

$y'' - 10y' + 25y = e^{5x}$

Su Solución General es de la forma: $y = y_h + y_p$

Primero obtenemos la Solución General y_h de la Ecuación Diferencial Homogénea Auxiliar, para ello planteamos su Ecuación Característica y obtenemos las raíces correspondientes:

$y'' - 10y' + 25y = 0$

$k^2 - 10k + 25 = 0$ sus raíces son $k_1 = k_2 = 5$ $\Rightarrow$ $\boxed{y_h = C_1 e^{5x} + C_2 xe^{5x}}$

Dado que el segundo miembro de la Ecuación Diferencial planteada es $f(x) = e^{5x}$

Normalmente propondríamos una Solución Particular de la forma: $y_p = Ae^{5x}$

Pero al observar y_h, se comprueba que es una de las Soluciones de la Ecuación Diferencial Homogénea Auxiliar ($C_1 e^{5x}$), y si multiplicáramos por "x" sería $y_p = Axe^{5x}$ que también es una Solución de la Ecuación Diferencial Homogénea Auxiliar (C_2xe^{5x}), entonces debemos buscar una Solución Particular de la forma: $y_p = Ax^2e^{5x}$

Debemos calcular el coeficiente A. Para ello derivamos dos veces y_p, y sustituimos esos valores en la Ecuación Diferencial planteada:

$$y_p = Ax^2e^{5x}$$
$$y_p' = 2Ax.e^{5x} + 5Ax^2e^{5x}$$
$$y_p'' = 2Ae^{5x} + 20Axe^{5x} + 25Ax^2e^{5x}$$

$$(2Ae^{5x} + 20Axe^{5x} + 25Ax^2e^{5x}) - 10(2Axe^{5x} + 5Ax^2e^{5x}) + 25Ax^2e^{5x} = e^{5x}$$
$$2Ae^{5x} = e^{5x}$$
$$A = \tfrac{1}{2}$$

La Solución Particular resul $\boxed{y_p = \tfrac{1}{2}x^2e^{5x}}$

Y finalmente la **Solución General** es: $\boxed{y = C_1e^{5x} + C_2xe^{5x} + \tfrac{1}{2}x^2e^{5x}}$

Ejemplo 3: Obtengamos la Solución General de la siguiente Ecuación Diferencial:
$y'' + 2y' = 8$

Su Solución General es de la forma: $y = y_h + y_p$

Primero obtenemos la Solución General y_h de la Ecuación Diferencial Homogénea Auxiliar, para ello planteamos su Ecuación Característica y obtenemos las raíces correspondientes:
$y'' + 2y' = 0$

$k^2 + 2k = 0$ sus raíces son $k_1 = 0$ y $k_2 = -2$ $\Rightarrow$ $\boxed{y_h = C_1 + C_2e^{-2x}}$

Dado que el segundo miembro de la Ecuación Diferencial planteada es $f(x) = 8$
Normalmente propondríamos una Solución Particular de la forma: $y_p = A$
Pero al observar y_h, se comprueba que es una de las Soluciones de la Ecuación Diferencial Homogénea Auxiliar (C_1), entonces debemos buscar una Solución Particular de la forma:
$y_p = Ax$

Debemos calcular el coeficiente A. Para ello derivamos dos veces y_p, y sustituimos esos valores en la Ecuación Diferencial planteada:

$y_p = Ax$ $y_p' = A$ $y_p'' = 0$

$0 + 2A = 8$ $\Rightarrow$ $A = 4$

La Solución Particular resulta: $\boxed{y_p = 4x}$

Y finalmente la **Solución General** es: $\boxed{y = C_1 + C_2e^{-2x} + 4x}$

NOTA:
No se puede dar una regla que abarque todos los casos posibles. Pero recordemos que la Solución Particular a proponer tiene siempre la misma forma que el segundo miembro de la Ecuación Diferencial Lineal no Homogénea, excepto en el caso de superposición de raíces, en que se debe multiplicar por "*x*" o por "*x²*" según se produzcan una o dos soluciones repetidas.

Método de la Variación de los Parámetros

Sea la Ecuación Diferencial Lineal no Homogénea de Segundo Orden con Coeficientes Constantes:

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (10)$$

cuya Solución General sabemos que se puede expresar: $y = y_h + y_p$

y supongamos que ya hemos resuelto la Ecuación Diferencial Homogénea Auxiliar:

$$y'' + py' + qy = 0$$

y su Solución General es de la forma: $\boxed{y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2}$ (11)

donde y_1 e y_2 son dos Soluciones Particulares Linealmente Independientes de la Ecuación Diferencial Homogénea Auxiliar y C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

Este método consiste en buscar una Solución Particular y_p que tenga la forma de la Solución General y_h de la Ecuación Diferencial Auxiliar pero considerando las <u>constantes (ó parámetros)</u> C_1 y C_2 como funciones $u(x)$ y $v(x)$ respectivamente. Es decir buscamos una Solución Particular de la forma:

$$\boxed{y_p = u(x)y_1 + v(x)y_2} \qquad (12)$$

Nuestra tarea ahora es determinar las funciones $u(x)$ y $v(x)$, para ello derivamos y_p y reagrupamos términos:

$$y_p' = (u'y_1 + v'y_2) + (uy_1' + vy_2')$$

Dado que hemos introducido dos funciones arbitrarias $u(x)$ y $v(x)$, necesitamos dos ecuaciones para determinarlas. Las podemos establecer fijando dos condiciones:

1. ***Que y_p sea Solución de la Ecuación Lineal no Homogénea (10).***
2. ***Y fijemos la otra condición de manera que se nos simplifique el cálculo:*** $\boxed{u'y_1 + v'y_2 = 0}$

Entonces y_p' nos queda: $y_p' = uy_1' + vy_2'$

Derivamos nuevamente: $y_p'' = u'y_1' + v'y_2' + uy_1'' + vy_2''$

Dado que hemos establecido como condición que y_p sea Solución de la Ecuación Diferencial (10), sustituimos en ella los valores de y_p y sus derivadas:

$$(u'y_1' + v'y_2' + uy_1'' + vy_2'') + p(uy_1' + vy_2') + q(uy_1 + vy_2) = f(x)$$

Reordenamos términos sacando factor común u y v:

$$u(y_1'' + py_1' + qy_1) + v(y_2'' + py_2' + qy_2) + (u'y_1' + v'y_2') = f(x)$$

Como y_1 e y_2 son dos Soluciones Particulares Ecuación Diferencial Homogénea Auxiliar, los dos primeros paréntesis resultan iguales a cero. Entonces la última ecuación queda:

$$\boxed{u'y_1' + v'y_2' = f(x)}$$

Entre esta última y la segunda condición reunimos las dos ecuaciones que necesitamos, aunque sea para obtener las derivadas $u'(x)$ y $v'(x)$:

$$\begin{cases} u'y_1 + v'y_2 = 0 \\ u'y_1' + v'y_2' = f(x) \end{cases} \qquad (13)$$

Éste es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas u' y v':

$$u' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = -\frac{y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} \qquad (14)$$

$$v' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} \qquad (15)$$

Este sistema de ecuaciones admite solución única dado que su determinante principal no se anula dado que es el Wronsquiano de las funciones y_1 e y_2 que son linealmente independientes $[W(y_1, y_2) \neq 0]$.
Integramos los valores de $u'(x)$ y $v'(x)$ obtenidos:

$$u = \int u'(x)dx + k_1$$
$$v = \int v'(x)dx + k_2$$

Como solo necesitamos una Solución Particular y_p, consideramos $k_1 = k_2 = 0$.
Y finalmente reemplazando en la expresión (12) los valores de $u(x)$ y $v(x)$ obtenidos, tendremos la Solución Particular y_p buscada.

Resumen
Debido a que el desarrollo anterior es bastante extenso y complicado, para resolver una Ecuación Diferencial Lineal no Homogénea de Segundo Orden con Coeficientes Constantes, es aconsejable utilizar el sistema de ecuaciones (13) ó directamente las expresiones (14) y (15).

Por lo tanto para resolver la Ecuación Diferencial: $y'' + py' + qy = f(x)$ (10)
cuya Solución General sabemos que es de la forma: $y = y_h + y_p$

Primero obtenemos la Solución General de la Ecuación Diferencial Homogénea Auxiliar:

$$\boxed{y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2} \qquad (11)$$

Luego planteamos la Solución Particular: $y_p = u(x)y_1 + v(x)y_2$ (12)

Determinamos $u'(x)$ y $v'(x)$, resolviendo el sistema de ecuaciones (13):

$$\begin{cases} u'y_1 + v'y_2 = 0 \\ u'y_1' + v'y_2' = f(x) \end{cases} \qquad (13)$$

$$u' = -\frac{y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} \qquad (14)$$

$$v' = \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} \qquad (15)$$

y luego integramos los valores de $u'(x)$ y $v'(x)$ obtenidos y los reemplazamos en la (12).

Ejemplo:

Resolvamos la Ecuación Diferencial $y'' + 7y' = e^{7x}$ (10)

La Solución General es: $\boxed{y = y_h + y_p}$

1- Calculamos y_h. La Ecuación Diferencial Homogénea Auxiliar es: $y'' + 7y' = 0$

La Ecuación Característica es $k^2 + 7k = 0$ y sus raíces son: $k_1 = 0$ $k_2 = -7$

Entonces resulta: $y_1 = e^{0x} = 1$ y $y_2 = e^{-7x}$

Y la Solución General de la Ec. Dif. Homogénea Auxiliar es: $\boxed{y_h = C_1 + C_2 e^{-7x}}$ (11)

2- Calculamos ahora y_p: $y_p = u + v e^{-7x}$ (12)

Planteamos las ecuaciones (14) y (15) para determinar los valores de u' y v':

$$\begin{cases} y_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad y_1' = 0 \\ y_2 = e^{-7x} \quad \Rightarrow \quad y_2' = -7e^{-7x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u' = -\dfrac{y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} = -\dfrac{e^{-7x} e^{7x}}{\begin{vmatrix} 1 & e^{-7x} \\ 0 & -7e^{-7x} \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{7} e^{7x} & (14) \\ v' = \dfrac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} = -\dfrac{e^{7x}}{\begin{vmatrix} 1 & e^{-7x} \\ 0 & -7e^{-7x} \end{vmatrix}} = -\dfrac{1}{7} e^{14x} & (15) \end{cases}$$

Lo resolvemos y obtenemos:

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{7} e^{7x} \\ v' = -\frac{1}{7} e^{14x} \end{cases} \quad \text{integramos:} \quad \begin{cases} u = \int \frac{1}{7} e^{7x} dx + k_1 = \frac{1}{49} e^{7x} + k_1 \\ v = -\int \frac{1}{7} e^{14x} dx + k_2 = -\frac{1}{98} e^{14x} + k_2 \end{cases}$$

Consideramos $k_1 = k_2 = 0$ y resulta: $u = \frac{1}{49} e^{7x}$ y $v = -\frac{1}{98} e^{14x}$

Reemplazamos en la (12), obteniendo: $y_p = \frac{1}{49} e^{7x} - \frac{1}{98} e^{14x} e^{-7x} = \frac{1}{49} e^{7x} - \frac{1}{98} e^{7x}$

$$\boxed{y_p = \tfrac{1}{98} e^{7x}}$$

Y finalmente la Solución General $y = y_h + y_p$ resulta:

$$\boxed{y = C_1 + C_2 e^{-7x} + \tfrac{1}{98} e^{7x}}$$ **Solución General**

Fijemos como Condición Inicial $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$ y obtengamos la Solución Particular de la Ecuación Diferencial (10) planteada. Trabajamos con la Solución General y su derivada:

$$\begin{cases} y = C_1 + C_2 e^{-7x} + \frac{1}{98} e^{7x} \\ y' = -7C_2 e^{-7x} + \frac{1}{14} e^{7x} \end{cases}$$

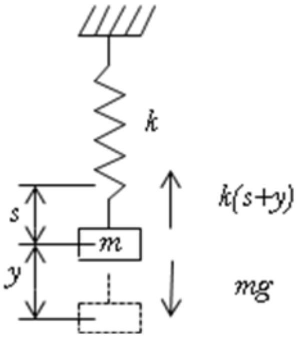
$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 + \frac{1}{98} \\ 2 = -7C_2 + \frac{1}{14} \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{97}{98} \\ -7C_2 = \frac{27}{14} \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 = \frac{62}{49} \\ C_2 = -\frac{27}{98} \end{cases}$$

$$\boxed{y = \tfrac{62}{49} - \tfrac{27}{98} e^{-7x} + \tfrac{1}{98} e^{7x}}$$ **Solución Particular**

APLICACIONES

Veamos algunos problemas prácticos de aplicación de las Ecuaciones Diferenciales Lineales de Segundo Orden con Coeficientes Constantes:

Ejemplo 1:
Movimiento libre no amortiguado.



Supongamos que se desea establecer la posición del extremo de un resorte en cada instante *t*, se acepta que el resorte oscila en el vacío de modo que no corresponde consideración acerca de amortiguamiento producido por resistencia del medio.
Si una masa *m* se aplica en el extremo del resorte produce una elongación *S*, que de acuerdo con la ley de Hooke, es proporcional a la fuerza de restitución del resorte $F = k.s$, siendo *k* la constante de proporcionalidad del resorte. Esta fuerza es opuesta a la dirección de alargamiento.
Al estar unida la masa *m* al resorte se produce una elongación *S* del mismo y se llega a una posición de equilibrio en la que su peso $P = m.g$ está equilibrado por la fuerza de restitución $F = k.s$.
Entonces:

$$m.g = k.s$$

Si en un instante posterior *t* se aplica una fuerza adicional se produce un alargamiento *"y"*, si después esa fuerza adicional se suprime el resorte retrocederá oscilando.
El problema consiste, entonces, en determinar la posición del extremo del resorte en cada instante siguiente *t*.
Las fuerzas que actúan sobre la masa *m* son la fuerza $P = m.g$ que obra hacia abajo, sentido que se toma como positivo al considerar el desplazamiento *"y"*, y la fuerza de restitución del resorte F_1 que actúa en sentido opuesto a la fuerza de gravedad. Por consiguiente según la segunda ley de Newton tenemos:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = m.g - F_1$$

Puesto que F_1 es la fuerza de restitución del resorte cuando la elongación es $s + y$, la ley de Hooke establece que $F_1 = k(s + y)$ es decir:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = m.g - k(s + y)$$

Pero $m.g = k.s$, por consiguiente la ecuación se convierte en:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0$$

Haciendo $\frac{k}{m} = a^2$ la ecuación se reduce a:

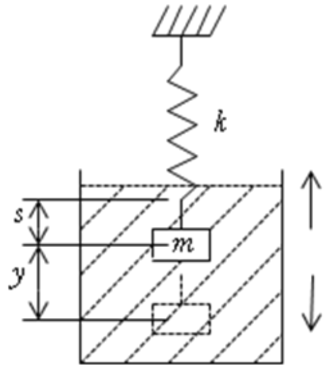
$$\frac{d^2y}{dt^2} + a^2y = 0$$

Es una Ecuación Diferencial Lineal Homogénea de Segundo Orden con Coeficientes Constantes cuya Solución General es:

$$\boxed{y = C_1 \cos at + C_2 \operatorname{sen} at}$$

La solución pone en evidencia que el resorte vibra con un movimiento armónico simple cuyo período es $T = \frac{2\pi}{a}$ y la frecuencia $f = \frac{1}{T} = \frac{a}{2\pi}$.
El período depende de la dureza del resorte, como podía esperarse, cuando más duro es el resorte, mayor es la frecuencia de vibración.

Ejemplo 2:
Movimiento libre amortiguado.



Supongamos ahora que el resorte del ejemplo mecánico anterior se halla colocado en un medio resistente en el cual la fuerza amortiguadora es proporcional a la velocidad.
Puesto que el medio resistente se opone al desplazamiento, la fuerza amortiguadora $\beta \frac{dy}{dt}$ actúa en sentido opuesto al del desplazamiento de la masa *m*.
La ecuación de las fuerzas resulta en tal caso:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = m.g - k(s + y) - \beta \frac{dy}{dt}$$

Pero $m.g = k.s$, por consiguiente la ecuación se convierte en:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky - \beta \frac{dy}{dt}$$

Reordenamos los términos obtenemos:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\beta}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{k}{m} y = 0$$

Haciendo $\frac{k}{m} = a^2$, y $\frac{\beta}{m} = 2b$ la ecuación se reduce a:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2b \frac{dy}{dt} + a^2 y = 0$$

Es una Ecuación Diferencial Lineal Homogénea de Segundo Orden con Coeficientes Constantes.
Resolvamos esta ecuación, para ello planteamos su Ecuación Característica:

$$k^2 + 2bk + a^2 = 0$$

Esta letra *k* es la que se utilizó en el desarrollo teórico para identificar la constante de la Ecuación Característica, no tiene nada que ver con la constante *k* del resorte.
Obtengamos sus raíces:

$$k_{1-2} = \frac{-2b \pm \sqrt{(2b)^2 - 4a^2}}{2} = -b \pm \sqrt{b^2 - a^2}$$

Analicemos las soluciones generales correspondientes a los tres casos que se pueden presentar:

Dos raíces reales y distintas $b^2 - a^2 > 0$ $\boxed{y = C_1 e^{-b+\sqrt{b^2-a^2}\,t} + C_2 e^{-b-\sqrt{b^2-a^2}\,t}}$

También la podemos expresar así: $\boxed{y = e^{-bt}\left(C_1 e^{\sqrt{b^2-a^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{b^2-a^2}\,t}\right)}$

Aquí el coeficiente de amortiguación β es grande en comparación con la constante del resorte y decimos que el sistema está **sobreamortiguado**. Resulta un movimiento suave y no oscilatorio.

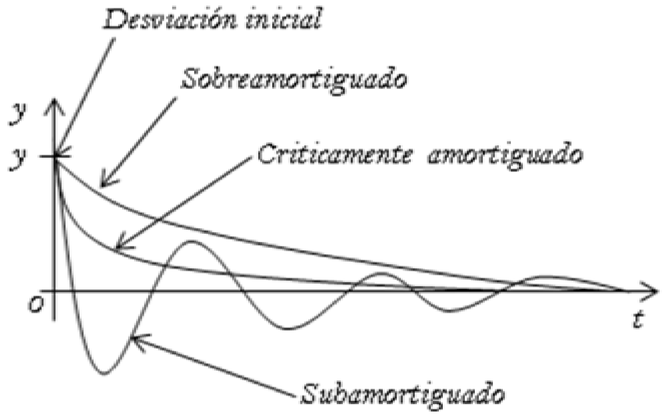
Dos raíces reales e iguales $b^2 - a^2 = 0$ $\boxed{y = e^{-bt}\left(C_1 + C_2 t\right)}$

El sistema es **críticamente amortiguado**. Una disminución pequeña de la fuerza de amortiguamiento originaría un movimiento oscilatorio.

Dos raíces complejas conjugadas $b^2 - a^2 < 0$ $\boxed{y = e^{-bt}\left(C_1 \cos\sqrt{b^2-a^2}\,t + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{b^2-a^2}\,t\right)}$

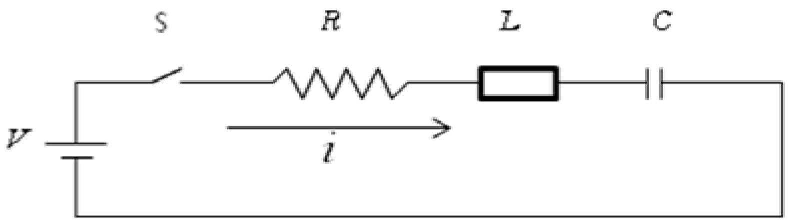
El sistema es **subamortiguado**. El coeficiente de amortiguamiento es pequeño en comparación con la constante del resorte.

Cada solución contiene el **factor de amortiguamiento** e^{-bt} $(b > 0)$, por lo que el desplazamiento de la masa se vuelve insignificante cuando el tiempo es grande.



Ejemplo 3:

En el siguiente circuito *RLC* con una fuente de corriente continua (*V* = constante) determinemos la corriente *i(t)* en el intervalo *t [0,∞]*. En el instante *t=0* se cierra el interruptor S.



De acuerdo con la ley de Kirchhoff de las tensiones, la tensión aplicada *V* es igual a la suma de las caídas de tensión v_R , v_L y v_C a través de la resistencia *R*, la inductancia *L* y el capacitor C respectivamente:

$$V = v_R + v_L + v_C$$

$$V = iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt$$

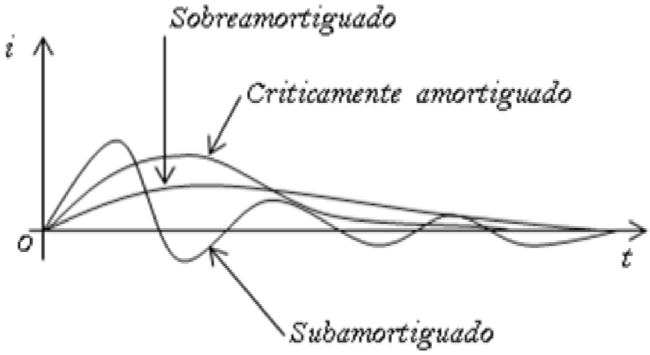
Para eliminar la integral, derivamos en ambos miembros de la igualdad con respecto a *t*, y reordenando los términos obtenemos la siguiente Ecuación Diferencial Lineal Homogénea de Segundo Orden con Coeficientes Constantes:

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{1}{LC}i=0$$

Haciendo $\frac{R}{L}=a^2$, y $\frac{1}{LC}=2b$ la ecuación se reduce a:

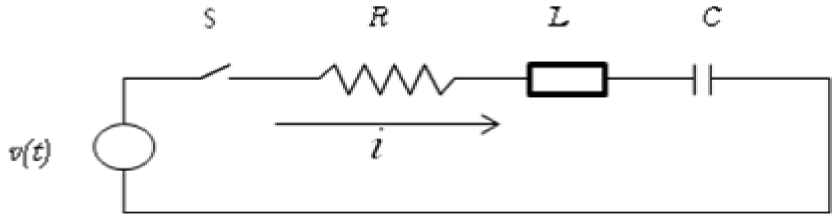
$$\frac{d^2y}{dt^2}+2b\frac{dy}{dt}+a^2y=0$$

Podemos comprobar que es la misma Ecuación Diferencial Lineal Homogénea de Segundo Orden con Coeficientes Constantes del Movimiento libre amortiguado estudiado en el ejemplo anterior.
Ambos sistemas tienen las mismas soluciones.
Al comparar ambos sistemas vemos que la masa correspondo a la inductancia *L*, *β* a la resistencia eléctrica *R* y la constante *k* del resorte corresponde a $\frac{1}{C}$.
El circuito puede resultar **sobreamotiguado, críticamente amortiguado o subamortiguado.**



Cuando *R=0*, se dice que el circuito es no amortiguado, y las vibraciones eléctricas no tienden a cero cuando aumenta el tiempo, la respuesta del circuito es **armónica simple**.

Ejemplo 4:
Consideremos ahora el siguiente circuito *RLC* donde la fuente de alimentación no es de corriente continua por ejemplo [$v(t)=V_{máx}\operatorname{sen}\omega t$].



De acuerdo con la ley de Kirchhoff de las tensiones, la tensión aplicada *v(t)* es igual a la suma de las caídas de tensión v_R , v_L y v_C a través de la resistencia *R*, la inductancia *L* y el capacitor C respectivamente:

$$v(t)=v_R+v_L+v_C$$

$$v(t)=iR+L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int idt$$

Para eliminar la integral, derivamos en ambos miembros de la igualdad con respecto a *t*, y reordenando los términos obtenemos la siguiente Ecuación Diferencial Lineal No Homogénea de Segundo Orden con Coeficientes Constantes:

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{LC}i=\frac{dv}{dt}$$

EJERCICIOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES NO HOMOGÉNEAS DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

Hallar las Soluciones Generales y Particulares de las siguientes Ecuaciones Diferenciales:

Nº	ECUACIÓN DIFERENCIAL	CONDICIONES INICIALES
1	$y'' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = 2xe^{2x}$	$y_0 = 2$ e $y'_0 = 1$ para $x_0 = 0$
2	$y'' - 2y' + 5y = 5\,\mathrm{sen}\,x$	$y_0 = 1$ e $y'_0 = 2$ para $x_0 = 0$
3	$y'' + 3y = 3$	$y_0 = 4$ e $y'_0 = -1$ para $x_0 = 0$
4	$y'' - 7y = (x-1)^2$	$y_0 = -\frac{9}{49}$ e $y'_0 = \frac{9}{7}$ para $x_0 = 0$
5	$y'' + 7y' = e^{7x}$	$y_0 = 3$ e $y'_0 = 1$ para $x_0 = 0$
6	$y'' + 7y' = e^{-7x}$	$y_0 = \frac{99}{98}$ e $y'_0 = \frac{97}{98}$ para $x_0 = 0$
7	$y'' - 10y' + 25y = e^{5x}$	
8	$y'' + 16y = \cos 5x$	
9	$y'' + 16y = \mathrm{sen}\,5x$	
10	$y'' + 3y = 3\cos 4x - 2\,\mathrm{sen}\,4x$	
11	$y'' - 4y' + 4y = 4e^{2x}$	
12	$y'' + 2y' = -2$	
13	$y'' + 25y = 7\cos 2x$	$y_0 = 1$ e $y'_0 = 10$ para $x_0 = 0$
14	$y'' + 4y' + 4y = 32xe^{2x}$	$y_0 = 1$ e $y'_0 = 2$ para $x_0 = 0$
15	$y'' - y = 4x^2 - 2 + 6e^{-2x}$	$y_0 = 1$ e $y'_0 = -1$ para $x_0 = 0$

Soluciones:

Nº	SOLUCIÓN GENERAL	SOLUCIÓN PARTICULAR
1	$y = C_1e^{x} + C_2e^{-\frac{x}{2}} + e^{2x}(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25})$	$y = \frac{8}{3}e^{x} + \frac{34}{75}e^{-\frac{x}{2}} + e^{2x}(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25})$
2	$y = C_1e^{2x}\cos 2x + C_2e^{2x}\,\mathrm{sen}\,2x + \frac{1}{2}\cos x + \mathrm{sen}\,x$	$y = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x + \frac{1}{4}e^{2x}\,\mathrm{sen}\,2x + \frac{1}{2}\cos x + \mathrm{sen}\,x$
3	$y = C_1\cos\sqrt{3}x + C_2\,\mathrm{sen}\sqrt{3}x + 1$	$y = 3\cos\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{sen}\sqrt{3}x + 1$
4	$y = C_1e^{\sqrt{7}x} + C_2e^{-\sqrt{7}x} - \frac{1}{7}x^2 + \frac{2}{7}x - \frac{9}{49}$	$y = \frac{\sqrt{7}}{14}e^{\sqrt{7}x} - \frac{\sqrt{7}}{14}e^{-\sqrt{7}x} - \frac{1}{7}x^2 + \frac{2}{7}x - \frac{9}{49}$
5	$y = C_1 + C_2e^{-7x} + \frac{1}{98}e^{7x}$	$y = e^{-7x} + \frac{1}{98}e^{7x}$
6	$y = C_1 + C_2e^{-7x} - \frac{1}{7}e^{7x}$	$y = -\frac{27}{49} - \frac{22}{49}e^{-7x} - \frac{1}{7}e^{7x}$
7	$y = C_1e^{5x} + C_2xe^{5x} + \frac{1}{2}x^2e^{5x}$	
8	$y = C_1\cos 4x + C_2\,\mathrm{sen}\,4x - \frac{1}{9}\cos 5x$	
9	$y = C_1\cos 4x + C_2\,\mathrm{sen}\,4x - \frac{1}{9}\mathrm{sen}\,5x$	
10	$y = C_1\cos\sqrt{3}x + C_2\,\mathrm{sen}\sqrt{3}x - \frac{3}{13}\cos 4x + \frac{2}{13}\mathrm{sen}\,4x$	
11	$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + 2x^2e^{2x}$	
12	$y = C_1 + C_2e^{-2x} - x$	
13	$y = C_1\cos 5x + C_2\,\mathrm{sen}\,5x + \frac{1}{3}\cos 2x$	$y = \frac{2}{3}\cos 5x + 2\,\mathrm{sen}\,5x + \frac{1}{3}\cos 2x$
14	$y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + e^{2x}(2x-1)$	$y = 2e^{-2x} + 6xe^{-2x} + e^{2x}(2x-1)$
15	$y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} - 4x^2 - 6 + 2e^{-2x}$	$y = 4e^{x} + e^{-x} - 4x^2 - 6 + 2e^{-2x}$