CAPÍTULO 6

INTEGRALES CULVILÍNEAS

INTEGRALES CURVILÍNEAS

El concepto de Integral Curvilínea se puede obtener a partir de generalizar la Integral Simple reemplazando el intervalo de integración (definido sobre un eje) por una curva plana (en R^2) o por una curva alabeada (en R^3).

Sea un Campo Vectorial F definido a lo largo de una curva plana L indicada en la figura.

$$F(x,y) = P(x,y)i + Q(x,y)j$$

Para facilitar la comprensión del concepto de Integral Curvilínea la asociaremos al cálculo de trabajo. Consideremos que F es una fuerza aplicada sobre un punto $M(x,y)$ que se desplaza a lo largo de la curva L y que dicha fuerza varía en magnitud y dirección a medida que el punto M se desplaza, es decir:

$$F = F(M)$$

Calcularemos el trabajo T que realiza la fuerza F al desplazarse el punto M desde A hasta B.

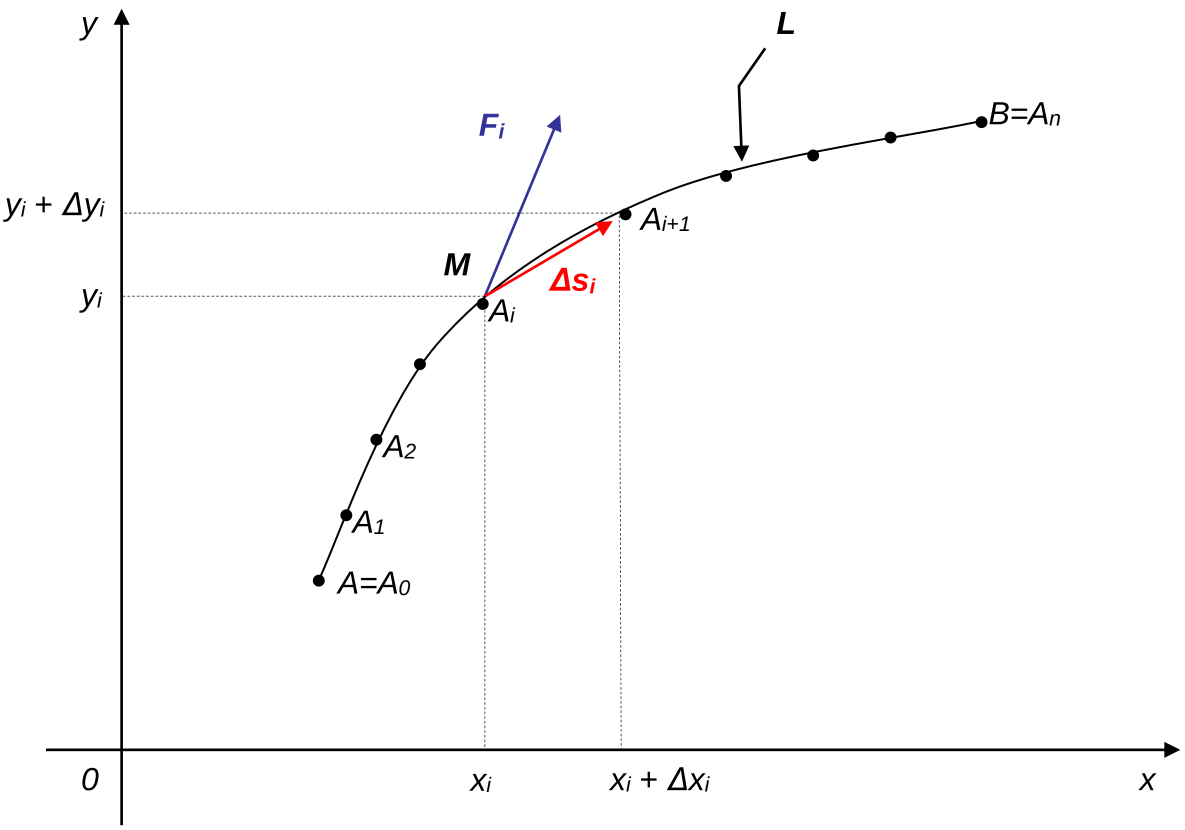


Figura 1

Dividamos a la curva L en “n” subarcos por los puntos $A_0 = A, A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots\ldots A_n = B$. Siendo la “$\text{máx}\Delta S$”la longitud del subarco más largo de la subdivisión..

El trabajo que realiza la fuerza F a lo largo del arco $\overset{\frown}{A_i A_{i+1}}$ es aproximadamente:

$$T_i \cong F_i \Delta s_i$$

Siendo F_i el valor de la fuerza F en el punto A_i, y Δs_i el vector $\overline{A_i A_{i+1}}$.

$$\Delta s_i = \Delta x_i i + \Delta y_i j$$
$$T_i \cong F_i \Delta s_i = P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i$$

Y el trabajo total T de la fuerza F a lo largo de la curva L es aproximadamente:

$$T \cong \sum_{i=1}^{n} F_i \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} \left[P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i \right]$$

El Trabajo T de la fuerza F a lo largo de la curva L entre los puntos A y B está dado por el límite de esta suma para cuando $n \to \infty$ es decir $\text{máx}\Delta S \to 0$

$$T = \lim_{\text{máx}\Delta S \to 0} \sum_{i=1}^{n} F_i \Delta s_i = \lim_{\text{máx}\Delta S \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i \right]$$

Si F es una función continua, este límite existe y recibe el nombre de Integral Curvilínea de F a lo largo de la curva L.

$$\int_L F ds = \lim_{\text{máx}\Delta S \to 0} \sum_{i=1}^{n} F_i \Delta s_i \qquad \text{ó}$$

$$\int_L \left[P(x,y)dx + Q(x,y)dy \right] = \lim_{\text{máx}\Delta S \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i \right]$$

También se la suele indicar:

$$\int_{(A)}^{(B)} \left[P(x,y)dx + Q(x,y)dy \right]$$

(A) y (B) son las coordenadas de los extremos de la curva L.

Para simplificar la escritura también se suelen obviar los corchetes expresándolas así:

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{(A)}^{(B)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

El ejemplo del Trabajo T de una fuerza es un caso particular de Integrales Curvilíneas. En general $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ se consideran como funciones de dos variables independientes definidas en un cierto dominio D que contiene a la curva L.

Propiedades

Definamos dos propiedades de las Integrales Curvilíneas:

1- Al cambiar el sentido de integración cambia el signo de la Integral Curvilínea. Pues al invertir el sentido de integración cambia el signo del vector Δs y por lo tanto cambia el signo de sus proyecciones Δx y Δy.

$$\int_{(A)}^{(B)} Pdx + Qdy = -\int_{(B)}^{(A)} Pdx + Qdy$$

2- Si dividimos a la curva L por algún punto intermedio C, entonces:

$$\int_{(A)}^{(B)} Pdx + Qdy = \int_{(A)}^{(C)} Pdx + Qdy + \int_{(C)}^{(B)} Pdx + Qdy$$

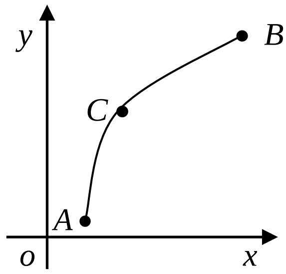


Figura 2

Esta propiedad es válida para un mayor número de divisiones.

Lo definido para la Integral Curvilínea es válido también cuando la curva L es cerrada, en estos casos se la suele indicar:

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad \text{ó} \qquad \oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

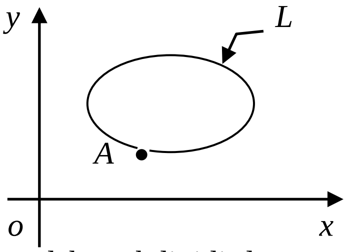


Figura 3

El origen y el extremo de la curva coinciden, por lo tanto para integrar se debe subdividir la curva y además se debe indicar el sentido de integración.

Llamaremos sentido positivo al sentido antihorario, y sentido negativo al sentido horario. Cuando no se indique el sentido consideraremos el antihorario.

<u>Cálculo de la Integral Curvilínea</u>

Es evidente que el valor de la Integral Curvilínea depende, en general, de la curva L. Si la ecuación de la curva es conocida y tiene la forma $y = f(x)$ o $x = g(y)$ o la forma paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$, entonces por sustitución se puede reducir la Integral Curvilínea a una Integral Definida de una sola variable.

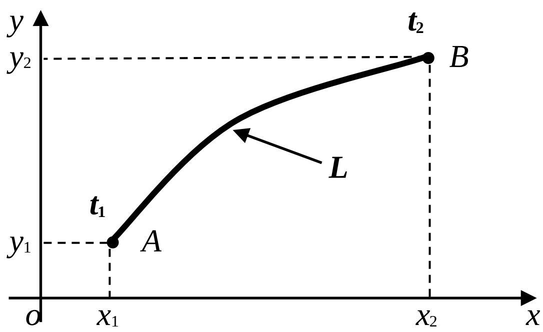


Figura 4

- Si la curva L está dada de la forma $y = f(x)$, por lo tanto $dy = f'(x).dx$, realizamos la sustitución:

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_1}^{x_2} \{P[x, f(x)] + Q[x, f(x)] f'(x)\} dx$$

- Si la curva L está dada de la forma $x = g(y)$, por lo tanto $dx = g'(y).dy$, realizamos la sustitución:

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{y_1}^{y_2} \{P[g(y), y] g'(y) + Q[g(y), y]\} dy$$

- Si la curva L está dada por la Función Vectorial $r(t)=\left[f(t),g(t)\right]=f(t)i+g(t)j$

o en su forma paramétrica $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$, por lo tanto $\begin{cases} dx = f'(t)dt \\ dy = g'(t)dt \end{cases}$, sustituimos

$$\int_{(A)}^{(B)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ P\left[f(t),g(t)\right] f'(t) + Q\left[f(t),g(t)\right] g'(t) \right\} dt$$

Ejemplo 1:
Calcular la integral curvilínea $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x+y^2)dx + 2xydy$ a lo largo de la parábola $y = x^2$.

La ecuación de la curva L es $y = x^2$, entonces resulta $dy = 2.x.dx$, sustituimos en la integral:

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x+y^2)dx + 2xydy = \int_0^1 (x+x^4)dx + 2xx^2\,2xdx = \int_0^1 (x+5x^4)dx = \left| \frac{x^2}{2} + x^5 \right|_0^1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

Ejemplo 2:
Calcular $\int_L \frac{1}{2} ydx + x^2 dy$ siendo L el segmento de recta de $(2,0)$ a $(3,6)$.

La recta que para por los dos puntos citados es $y - 0 = \dfrac{6-0}{3-2}(x-2) \quad \Rightarrow \quad y = 6.x - 12$

Por lo tanto resulta $dy = 6.dx$, sustituimos en la integral:

$$\int_L \tfrac{1}{2} ydx + x^2 dy = \int_2^3 \tfrac{1}{2}(6x-12)dx + x^2\,6dx = \int_2^3 (3x^2 + 6x - 6)dx = \left| x^3 + 3x^2 - 6x \right|_2^3 =$$
$$= (27+27-18) - (8+12-12) = 36 - 8 = 28$$

Ejemplo 3:
Calcular $\int_L ydx + xdy$ siendo L el arco de parábola $x = 9 - y^2$ desde $(0,3)$ a $(5,2)$.

La curva L está dada por la ecuación $x = 9 - y^2$ por lo tanto resulta $dx = -2y.dy$, sustituimos en la integral:

$$\int_L ydx + xdy = \int_3^2 y(-2)ydy + (9-y^2)dy = \int_3^2 (9-3y^2)dy = \left| 9y - y^3 \right|_3^2 = (18-8) - (27-27) = 10$$

Ejemplo 4:
Calcular $\int_L ydx + x^2 dy$ siendo L el segmento de recta $\begin{cases} x = t+2 \\ y = 6t \end{cases}$ para $0 \le t \le 1$.

Entonces resulta: $dx = dt$ y $dy = 6.dt$, sustituimos en la integral:

$$\int_L ydx + x^2 dy = \int_0^1 6ydt + (t+2)^2\,6dt = \int_0^1 (6t^2 + 30t + 24)dt = \left| 2t^3 + 15t^2 + 24t \right|_0^1 = 41$$

ÁREA DE UN DOMINIO LIMITADO POR UNA CURVA CERRADA

Consideremos el Dominio *D* limitado por la curva cerrada *L* indicado en la Figura 5

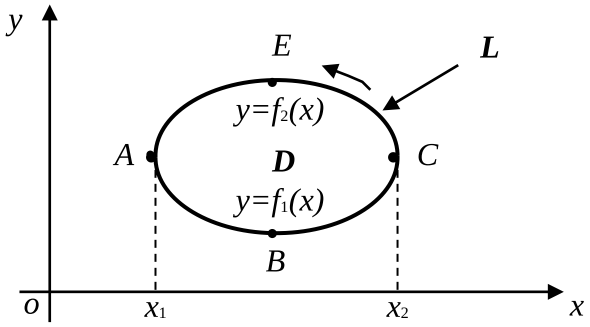


Figura 5

Recordemos que el área del Dominio *D* se calcula:

$$A = \iint_D dxdy = \int_{x_1}^{x_2} \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx = \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} f_2(x)dx}_{(a)} - \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} f_1(x)dx}_{(b)} \qquad (1)$$

(a) Esta integral se puede considerar como una Integral Curvilínea a lo largo del arco de curva $\overline{AEC}$ cuya ecuación es $y = f_2(x)$

$$\int_{x_1}^{x_2} f_2(x)dx = \int_{\overline{AEC}} ydx = -\int_{\overline{CEA}} ydx$$

Obtenemos esta última integral al invertir el sentido de integración.

(b) Esta integral se puede considerar como una Integral Curvilínea a lo largo del arco de curva $\overline{ABC}$ cuya ecuación es $y = f_1(x)$

$$\int_{x_1}^{x_2} f_1(x)dx = \int_{\overline{ABC}} ydx$$

Reemplazamos en la (1) lo obtenido en (a) y (b) y tenemos:

$$A = -\int_{\overline{CEA}} ydx - \int_{\overline{ABC}} ydx = -\left(\int_{\overline{CEA}} ydx + \int_{\overline{ABC}} ydx \right)$$

$$\boxed{A = -\int_L ydx} \qquad (2)$$

Nótese que se integró en el sentido contrario a las agujas del reloj (antihorario).

Procediendo de manera similar podemos demostrar que también el área de un dominio *D* se puede calcular:

$$\boxed{A = \int_L xdy} \qquad (3)$$

La fórmula más frecuentemente utilizada para el cálculo del área de un dominio limitado por una curva cerrada el la semisuma de las dos expresiones anteriores:

$$\boxed{A = \frac{1}{2} \int_L (-y)dx + xdy} \qquad (4)$$

Ejemplo 5:

Calcular el área de la figura comprendida entre las curvas $x^2 - 4y = 0$ y $4x - y^2 = 0$.

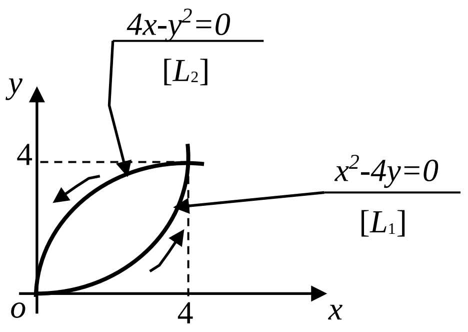


Figura 6

$$A = \frac{1}{2}\int_L (-y)dx + xdy = \frac{1}{2}\int_{L_1} (-y)dx + xdy + \frac{1}{2}\int_{L_2} (-y)dx + xdy$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^4 \left(-\frac{x^2}{4} + x \cdot \frac{x}{2} \right) dx + \frac{1}{2}\int_4^0 \left(-y \cdot \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} \right) dy$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{x^2}{4}\, dx + \frac{1}{2}\int_4^0 \left(-\frac{y^2}{4} \right) dy = \frac{1}{2}\left|\frac{x^3}{12}\right|_0^4 + \frac{1}{2}\left| -\frac{y^3}{12}\right|_4^0 = \frac{8}{3} + \frac{8}{3}$$

$$\boxed{A = \frac{16}{3}}$$

FÓRMULA DE GREEN

Esta fórmula establece la relación existente entre la Integral Doble extendida en un dominio D y la Integral Curvilínea a lo largo de la frontera L de dicho dominio.

Sea el dominio D indicado en la **Figura 5** y consideremos definidas en él a las funciones $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ continuas y sus Derivadas Parciales también continuas en este dominio.

Resolvamos la siguiente Integral Doble:

$$\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \left| P(x,y) \right|_{f_1(x)}^{f_2(x)}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \{ P[x, f_2(x)] - P[x, f_1(x)] \} dx$$

$$= \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} P[x, f_2(x)]dx}_{(a)} - \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} P[x, f_1(x)]dx}_{(b)} \qquad (5)$$

(a) Esta integral se puede considerar como una Integral Curvilínea a lo largo del arco de curva $\overline{AEC}$ cuya ecuación es $y = f_2(x)$

$$\int_{x_1}^{x_2} P[x, f_2(x)]dx = \int_{\overline{AEC}} P(x,y)dx = -\int_{\overline{CEA}} P(x,y)dx$$

Obtenemos esta última integral al invertir el sentido de integración.

(b) Esta integral se puede considerar como una Integral Curvilínea a lo largo del arco de curva $\overline{ABC}$ cuya ecuación es $y = f_1(x)$

$$\int_{x_1}^{x_2} P[x, f_1(x)]dx = \int_{\overline{ABC}} P(x,y)dx$$

Reemplazamos en la (1) lo obtenido en (a) y (b) y tenemos:

$$\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = -\int_{\overline{CEA}} P(x,y)dx - \int_{\overline{ABC}} P(x,y)dx = -\left[\int_{\overline{CEA}} P(x,y)dx + \int_{\overline{ABC}} P(x,y)dx \right]$$

$$\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = -\int_L P(x,y)dx \qquad \text{ó}$$

$$\boxed{-\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = \int_L P(x,y)dx} \qquad (6)$$

Si planteamos ahora la Integral Doble $\iint_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy$ y procedemos de forma similar, podemos demostrar que:

$$\boxed{\iint_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy = \int_L Q(x,y)dy} \qquad (7)$$

Sumando miembro a miembro las expresiones (6) y (7) obtendremos la Fórmula de Green:

$$\boxed{\iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy} \qquad (8)$$

o simplemente:

$$\boxed{\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_L Pdx + Qdy} \qquad \textbf{Fórmula de Green} \qquad (8)$$

Nótese que se integró en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Si se integra en el sentido horario, la Fórmula de Green resulta:

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dxdy = \int_L Pdx + Qdy \qquad \text{Fórmula de Green} \qquad (9)$$

(Integrando en el sentido horario)

Ejemplo 6:
Utilizando la Fórmula de Green calcular la Integral Curvilínea $\int_L x^2 ydx + ydy$ a lo largo de la curva cerrada L formada por $y^2 = x$ y $y = x$.

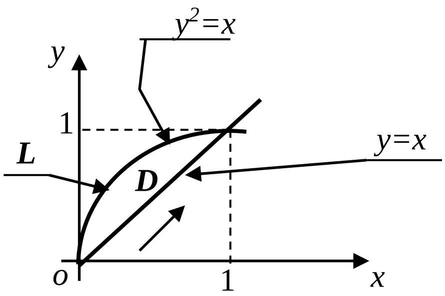


Figura 7

$P = x^2 y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = x^2$

$Q = y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$

$$\int_L x^2 ydx + ydy = \iint_D (-x^2)dxdy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y} (-x^2)dx = \int_0^1 dy \left| -\frac{x^3}{3} \right|_{y^2}^{y} = \int_0^1 \left(-\frac{y^3}{3} + \frac{y^6}{3} \right) dy =$$

$$= \left| -\frac{y^4}{12} + \frac{y^7}{21} \right| = -\frac{1}{12} + \frac{1}{21} = -\frac{3}{84}$$

$$\boxed{\int_L x^2 ydx + ydy = -\frac{1}{28}}$$

CONDICIÓN PARA QUE UNA INTEGRAL CURVILÍNEA NO DEPENDA DE LA TRAYECTORIA DE INTEGRACIÓN

Analicemos la Integral Curvilínea

$$\int_{(A)}^{(B)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (10)$$

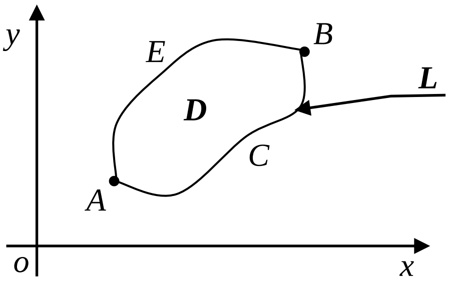


Figura 8

Y sean $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ funciones continuas y con derivadas también continuas en el dominio arbitrario *D*.
Si consideramos que la integral (10) no depende de la Trayectoria de Integración (sino que solo depende de los extremos de la trayectoria) entonces se cumple que:

$$\int_{\overline{ACB}} Pdx + Qdy = \int_{\overline{AEB}} Pdx + Qdy \qquad \text{ó}$$

$$\int_{\overline{ACB}} Pdx + Qdy - \int_{\overline{AEB}} Pdx + Qdy = 0$$

Cambiamos el sentido de integración de la segunda integral

$$\int_{\overline{ACB}} Pdx + Qdy + \int_{\overline{BEA}} Pdx + Qdy = 0$$

Entonces la Integral Curvilínea a lo largo de un contorno cerrado arbitrario *L* es igual a cero:

$$\int_L Pdx + Qdy = 0 \qquad (11)$$

Por lo tanto si la Integral Curvilínea es independiente de la Trayectoria de Integración, entonces esta Integral Curvilínea a lo largo de un contorno cerrado cualquiera es igual a cero.
El razonamiento recíproco también se cumple: si una Integral Curvilínea a lo largo de un contorno cerrado es nula entonces esta integral es independiente de la Trayectoria de Integración.

Veamos ahora que condiciones deben satisfacer las funciones $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ para que la Integral Curvilínea (11) sea nula. Para ello recordemos la Fórmula de Green correspondiente a la trayectoria dada:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_L Pdx + Qdy$$

Si la Integral Curvilínea del segundo miembro es nula, también lo será la Integral Doble del primero y para que ello ocurra se debe cumplir que:

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}} \qquad (12)$$

Esta es la condición necesaria y suficiente para que la Integral Curvilínea (10) sea independiente de la Trayectoria de Integración.

Ejemplo 7:

La Integral Curvilínea $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x+y^2)dx + 2xydy$ es Independiente de la Trayectoria de Integración, pues:

$$\left.\begin{array}{lll} P = x + y^2 & \therefore & \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y \\ & & \\ Q = 2xy & \therefore & \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2y \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Esta Integral Curvilínea ya fue resuelta en el Ejemplo 1 a lo largo de la trayectoria $y = x^2$ y el resultado fue:

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x+y^2)dx + 2xydy = \frac{3}{2}$$

Significa que cualquiera sea la Trayectoria de Integración que elijamos para integrar entre los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$, siempre obtendremos ese mismo resultado.

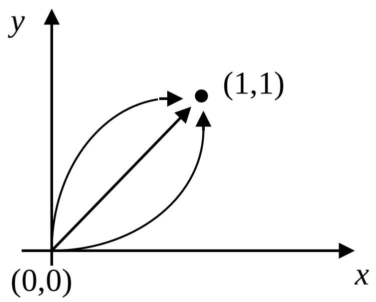


Figura 9

INTEGRAL CURVILÍNEA DE LA FUNCIÓN *f(x,y)*

Sea la función $f(x,y)$ definida a lo largo de la curva L.

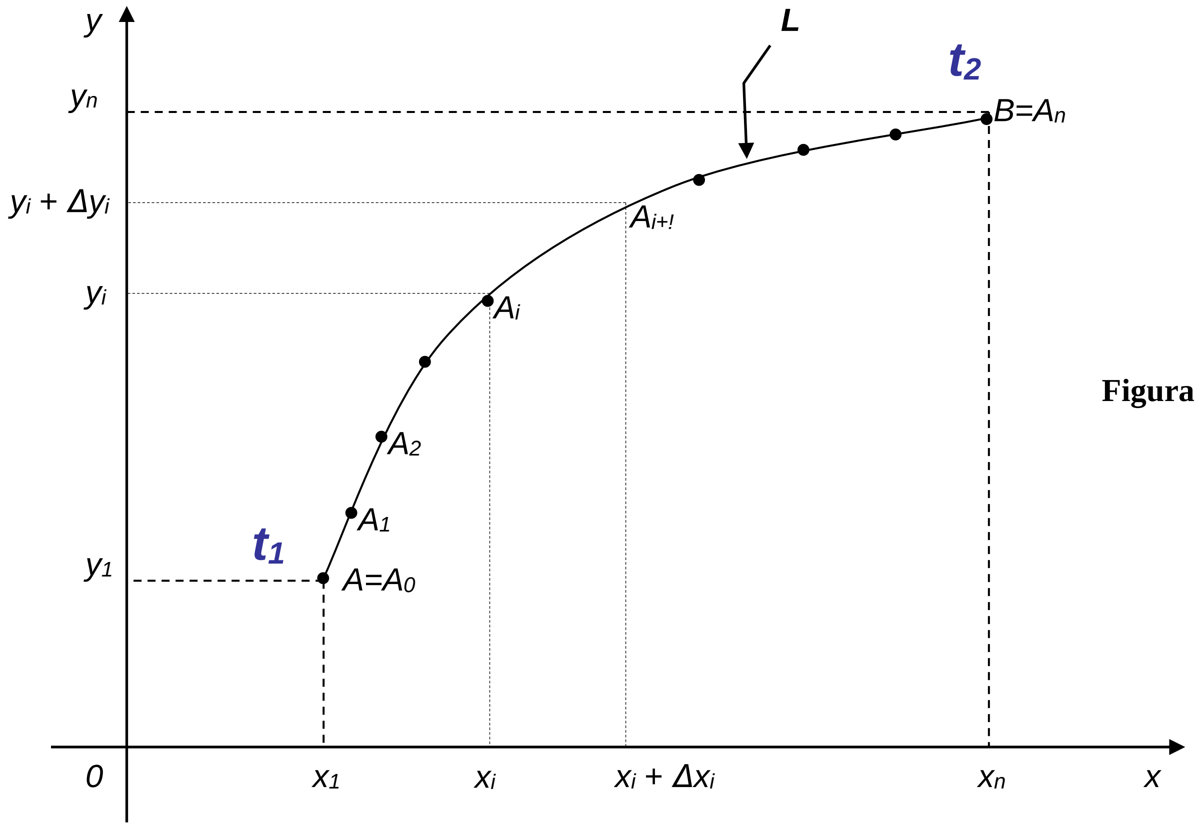


Figura 10

Definimos la Integral Curvilínea de la función $f(x,y)$ a lo largo de la curva L de la siguiente manera:

$$\int_L f(x,y)ds = \lim_{\text{máx}\Delta S\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i$$

Donde Δs_i es la longitud del subarco $\overset{\frown}{A_i A_{i+1}}$ y ds es un diferencial de arco.

Recordemos que si una curva está dada de forma Paramétrica $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ y éstas son funciones continuas y con derivadas también continuas entonces la longitud de un arco ds es:

$$ds = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,.dt$$

Y la Integral Curvilínea se calcula:

$$\boxed{\int_L f(x,y)ds = \int_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt}$$

Una interpretación gráfica de esta Integral Curvilínea es que nos da el área de la lámina perpendicular al plano $0xy$ cuya base es la curva L. Ver la **Figura 11**

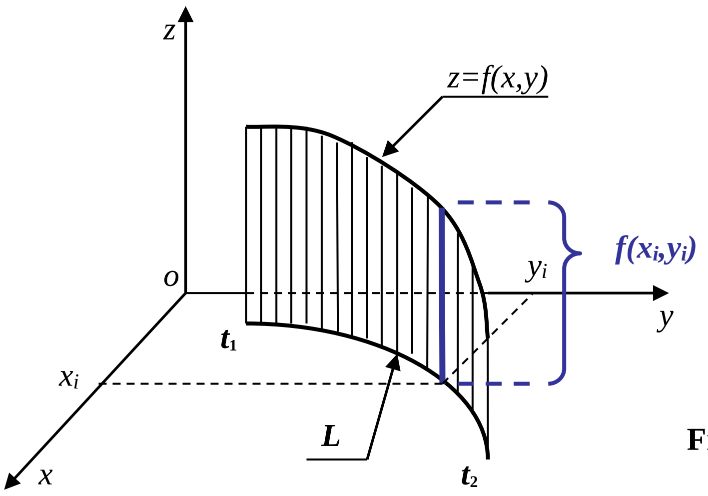


Figura 11

Si la curva L está dada de la forma $y = g(x)$ la longitud del diferencial de arco es:

$$ds = \sqrt{1+\left[g'(x)\right]^2}\ .dx$$

Y la Integral Curvilínea se calcula:

$$\int_L f(x,y)ds = \int_{x_1}^{x_n} f\left[x, g(x)\right]\sqrt{1+\left[g'(x)\right]^2}\ dx$$

También podemos considerar la Integral Curvilínea de la Función $f(x,y,z)$ a lo largo de la curva

alabeada L $\quad \begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$

$$\int_L f(x,y,z)ds = \int_{t_1}^{t_2} f\left[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)\right]\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2+\left[\psi'(t)\right]^2+\left[\omega'(t)\right]^2}\ dt$$

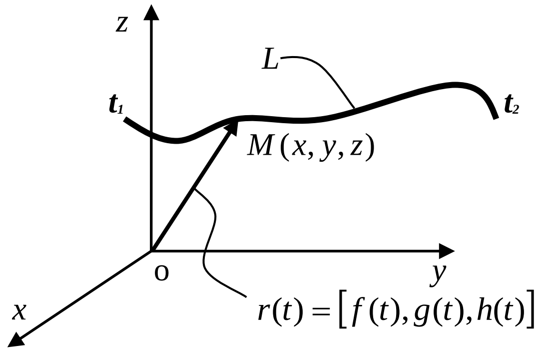
INTEGRAL CURVILÍNEA EN EL ESPACIO

Sea el Campo Vectorial $F(x,y,z) = P(x,y,z)i + Q(x,y,z)j + R(x,y,z)k$

y L una curva alabeada dada por la Función Vectorial $r(t) = [f(t), g(t), h(t)] = f(t)i + g(t)j + h(t)k$

o en su forma paramétrica $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$

continua en un intervalo $t_1 \leq t \geq t_2$



Entonces la Integral Curvilínea del Campo Vectorial $F(x,y,z)$ a lo largo de la curva alabeada L se resuelve así:

$$\int_L F(x,y,z)ds = \int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} \{P[f(t),g(t),h(t)]f'(t) + Q[f(t),g(t),h(t)]g'(t) + R[f(t),g(t),h(t)]h'(t)\}\,dt$$

Ejemplo 8:
Calcular la Integral del Campo Vectorial $F(x,y,z) = [xyz\,,\, 2x + y\,,\, 2yz^2]$, a lo largo de la recta dada por la Función Vectorial $r(t) = [4t\,,\, 2t-4\,,\, t]$, en el intervalo $1 \leq t \geq 2$.

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_L xyzdx + (2x+y)dy + 2yz^2\, dz$$

$$\begin{cases} f(t) = 4t & \rightarrow & f'(\mathrm{t}) = 4 \\ g(t) = 2t-4 & \rightarrow & g'(\mathrm{t}) = 2 \\ h(t) = t & \rightarrow & h'(\mathrm{t}) = 1 \end{cases}$$

$$\int_L xyzdx + (2x+y)dy + 2yz^2\, dz = \int_1^2 \{4t.(2t-4).t.4 + [8t + (2t-4)].2 + 2.(2t-4).t^2\}dt =$$
$$= \int_1^2 (36t^3 - 72t^2 + 20t - 8)dt = \left|9t^4 - 24t^3 + 10t^2 - 8t\right|_1^2 = -11$$

FUNCIÓN POTENCIAL Y CAMPO VECTORIAL CONSERVATIVO

Si un Campo Vectorial $F = P(x,y)\,i + Q(x,y)\,j$ es el Gradiente de alguna Función $u(x,y)$ entonces es un **Campo Vectorial Conservativo** y a la Función se le llama **Función Potencial** de F.
Es decir que dados:

$$\left.\begin{array}{l}\text{El Campo Vectorial } F \\ \\ \text{Función} \quad u(x,y)\end{array}\right\} \quad \text{si} \qquad F = \text{grad}\, u \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} F = \text{Campo Vectorial Conservativo} \\ \\ u = \text{Función Potencial}\end{array}\right.$$

De acuerdo a lo definido, si F es el Gradiente de una función $u(x,y)$ tenemos:

$$F = P(x,y)\,i + Q(x,y)\,j = \text{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j$$

Entonces:

$$P = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad\qquad Q = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Si derivamos la primera igualdad con respecto a “*y*” y a la segunda igualdad la derivamos con respecto a “*x*” obtenemos:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \qquad\qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

Si las derivadas segundas son continuas, se verifica que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Entonces podemos afirmar que si $F = P(x,y)\,i + Q(x,y)\,j$ es un **Campo Vectorial Conservativo** entonces se verifica que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

La inversa de esta afirmación se cumple solo si F es un Campo Vectorial Conservativo definido sobre una región simplemente conexa *D*.

Entonces finalmente podemos definir que si $F = P(x,y)\,i + Q(x,y)\,j$ es un Campo Vectorial definido en una Región Simplemente Conexa *D*, con $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ continuas y sus derivadas parciales también continuas, si se verifica que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ en toda la región entonces *F* es un **Campo Vectorial Conservativo.**

Desde el punto de vista físico podemos decir que un Campo Vectorial es Conservativo si el trabajo realizado a lo largo de una trayectoria cerrada es igual a cero.

Nota:
Si $F = P(x,y)\,i + Q(x,y)\,j$ es el gradiente de la función $u(x,y)$, también podemos comprobar que la expresión $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ es el Diferencial Total de la función $u(x,y)$.
Es decir :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Diferencia de Potencial

Si $u(x,y)$ es la Función Potencial del Campo Vectorial Conservativo $F = P(x,y)\,i + Q(x,y)\,j$ entonces la Integral Curvilínea $\int_{(A)}^{(B)} Pdx + Qdy$ mide la Diferencia de Potencial entre los puntos *A* y *B*.

Para demostrarlo recordemos que si $u(x,y)$ es la Función Potencial de *F* entonces $P = \frac{\partial u}{\partial x}$ y $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$, en cuyo caso la expresión $Pdx + Qdy$ es el Diferencial Total de la función $u(x,y)$, es decir:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = Pdx + Qdy$$

y la Integral Curvilínea planteada resulta:

$$\int_{(A)}^{(B)} Pdx + Qdy = \int_{(A)}^{(B)} du$$

Ahora escribamos la ecuación paramétrica de la trayectoria *L* que une los puntos *A* y *B* $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$

Entonces $u(x,y) = u\left[f(t), g(t)\right] = u(t)$ y su Diferencial Total es $du = u'dt = \frac{du}{dt}dt$

Y finalmente la Integral Curvilínea resulta:

$$\int_{(A)}^{(B)} Pdx + Qdy = \int_{(A)}^{(B)} du = \int_{(A)}^{(B)} \frac{du}{dt}dt = \left|u\right|_{(A)}^{(B)} = u(B) - u(A)$$

La Integral Curvilínea no depende de la Trayectoria de Integración *L*, solo depende de los extremos *A* y *B*.

<u>Obtención de la Función Potencial</u>

Dado un Campo Vectorial Conservativo $F = P(x,y)\,i + Q(x,y)\,j$ veamos cómo podemos obtener la Función Potencial correspondiente.
Como F es un Campo Vectorial Conservativo, se verifica que $\frac{\partial u}{\partial x} = P$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$.
Entonces podemos obtener $u(x,y)$ integrando a P con respecto a *x*, o integrando a Q con respecto a *y*, indistintamente. Hagámoslo integrando a P con respecto a *x*:

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y) \qquad (12)$$

Estamos integrando con respecto a *x* a una derivada parcial $\left(\frac{\partial u}{\partial x} = P\right)$, por lo tanto debemos expresar la constante de integración como una función de *y*.

$u(x,y)$ es la Función Potencial buscada, solo nos resta obtener el valor de $\varphi(y)$ y para ello derivamos la (12) respecto de *y*.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial\left(\int Pdx\right)}{\partial y} + \varphi'(y)$$

Pero sabemos que $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$

$$\frac{\partial\left(\int Pdx\right)}{\partial y} + \varphi'(y) = Q$$

Despejamos $\varphi'(y)$

$$\varphi'(y) = Q - \frac{\partial\left(\int Pdx\right)}{\partial y}$$

Finalmente integramos $\varphi'(y)$ y reemplazamos lo obtenido en la (12).

<u>Ejemplo</u>:
Sea $F(x,y) = (x + y^2)\,i + 2xy\,j$, primero verifiquemos que sea un gradiente:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$$

Entonces la expresión $(x + y^2)dx + 2xydy$ es el Diferencial Total de la función $u(x,y)$, es decir:

$$du = (x + y^2)dx + 2xydy$$

Obtengamos ahora la Función Potencial $u(x,y)$

$$u(x,y) = \int (x + y^2)dx + \varphi(y)$$

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy^2 + \varphi(y)$$

Derivamos respecto a *y* e igualamos a Q

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy + \varphi'(y) = Q = 2xy$$ Despejamos $\varphi'(y)$

$\varphi'(y) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(y) = C$ Finalmente obtenemos:

$$\boxed{u(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy^2 + C}$$

Veamos otra manera de obtener la Función Potencial (que nos será de utilidad para trabajar en R^3 más adelante):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) \qquad \Rightarrow \qquad u(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y) \qquad (12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) \qquad \Rightarrow \qquad u(x,y) = \int Q(x,y)dy + \psi(x) \qquad (13)$$

Las expresiones (12) y (13) deben ser iguales, entonces al compararlas obtenemos el valor de $u(x,y)$.

Resolvamos el mismo ejemplo anterior de esta forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x + y^2 \qquad \Rightarrow \qquad u(x,y) = \int (x + y^2)dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{2} + xy^2 + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy \qquad \Rightarrow \qquad u(x,y) = \int 2xydy + \psi(x) = xy^2 + \psi(x)$$

Para que ambas expresiones sean iguales debe ser:

$\varphi(y) = C$ y $\psi(x) = \dfrac{x^2}{2} + C$ entonces finalmente resulta:

$$\boxed{u(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy^2 + C}$$

Ya estudiamos el concepto de Campo Vectorial Conservativo en R^2, veámoslo ahora en R^3.

Un Campo Vectorial $F(x,y,z) = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\,j + R(x,y,z)\,k$ es un **Campo Vectorial Conservativo** si F es el **Gradiente** de algún Campo Escalar $u(x,y,z)$, y a éste se le llama **Función Potencial** de F:

Es decir que dados:

$$\left.\begin{array}{l}\text{El Campo Vectorial } F \\ \\ \text{El Campo Escalar } \quad u(x,y,z)\end{array}\right\} \text{si} \qquad F = \text{grad}\, u \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F = \text{Campo Vectorial Conservativo} \\ \\ u = \text{Función Potencial}\end{array}\right.$$

De acuerdo a lo definido, si F es el Gradiente de $u(x,y,z)$ tenemos:

$$F = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\,j + R(x,y,z)\,k = \text{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k$$

Entonces:

$$P = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad\qquad Q = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad\qquad R = \frac{\partial u}{\partial z}$$

Para que un Campo Vectorial sea Conservativo se debe verificar que:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \qquad\qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad\qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Estas condiciones serán demostradas en el Capítulo siguiente al estudiar Campo Vectorial Irrotacional.

Nota:
Si $F = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\,j + R(x,y,z)\,\mathrm{k}$ es el gradiente del Campo Escalar $u(x,y,z)$, también podemos comprobar que la expresión $P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ es el Diferencial Total de $u(x,y,z)$.
Es decir :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

Obtención de la Función Potencial

Dado un Campo Vectorial Conservativo $F = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\,j + R(x,y,z)\,k$ veamos cómo podemos obtener la Función Potencial correspondiente.
Como F es un Campo Vectorial Conservativo, se verifica que $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$ y $\frac{\partial u}{\partial z} = R$.

Entonces podemos obtener $u(x,y,z)$ integrando a P con respecto a *x*, integrando a Q con respecto a *y* e integrando a R respecto a *z*.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y,z) \qquad \Rightarrow \qquad u(x,y,z) = \int P(x,y,z)dx + \varphi(y,z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y,z) \qquad \Rightarrow \qquad u(x,y,z) = \int Q(x,y,z)dy + \psi(x,z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = R(x,y,z) \qquad \Rightarrow \qquad u(x,y,z) = \int R(x,y,z)dx + \phi(x,y)$$

Las tres expresiones deben ser iguales, entonces al compararlas obtenemos el valor de $u(x,y,z)$.

Ejemplo:
Sea $F(x,y,z) = (yz^2 + 3x^2 z)\, i + xz^2\, j + (2xyz + x^3)\, k$, primero verifiquemos que se cumplan las condiciones:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = 2xz \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 2yz + 3x^2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = z^2$$

Entonces la expresión $(yz^2 + 3x^2 z)dx + xz^2 dy + (2xyz + x^3)dz$ es el Diferencial Total de la función $u(x,y,z)$, es decir:

$$du = (yz^2 + 3x^2 z)\, dx + xz^2 dy + (2xyz + x^3)dz$$

Obtengamos ahora la Función Potencial $u(x,y,z)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz^2 + 3x^2 z \qquad \Rightarrow \qquad u(x,y,z) = \int (yz^2 + 3x^2 z)dx + \varphi(y,z) = xyz^2 + x^3 z + \varphi(y,z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xz^2 \qquad \Rightarrow \qquad u(x,y,z) = \int xz^2 dy + \psi(x,z) = xyz^2 + \psi(x,z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2xyz + x^3 \qquad \Rightarrow \qquad u(x,y,z) = \int (2xyz + x^3)dx + \phi(x,y) = xyz^2 + x^3 z + \phi(x,y)$$

Para que las tres expresiones sean iguales debe ser:

$\varphi(y,z) = C$, $\psi(x,z) = x^3 z + C$ y $\phi(x,y) = C$ entonces finalmente resulta:

$$u(x,y,z) = xyz^2 + x^3 z + C$$