CAPÍTULO 7

INTEGRALES DE SUPERFICIE

OPERADOR DE HAMILTON

El Operador de Hamilton u **Operador Nabla** es un vector simbólico que no representa por si mismo ninguna cantidad vectorial, sino que indica operaciones de derivación que se deben efectuar con la función que se escribe a continuación del símbolo.

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \qquad \nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x} ; \frac{\partial}{\partial y} ; \frac{\partial}{\partial z} \right]$$

GRADIENTE

Ya estudiamos Gradiente de una función en el Capítulo nº 2, recordemos algunos de sus conceptos.

Sea el Campo Escalar $u = f(x, y, z)$ definido en cierta región del espacio. El conjunto de puntos que satisfacen la ecuación $f(x, y, z) = C$ es una **superficie de nivel**, puesto que en cada uno de sus puntos, la función u tiene el mismo valor constante C.

Recordemos que en cada punto donde está definido un Campo Escalar $u = f(x, y, z)$ se determina un vector llamado **Gradiente** que está dirigido según la normal a la **superficie de nivel** e indica la dirección en la cual la Derivada Direccional es máxima:

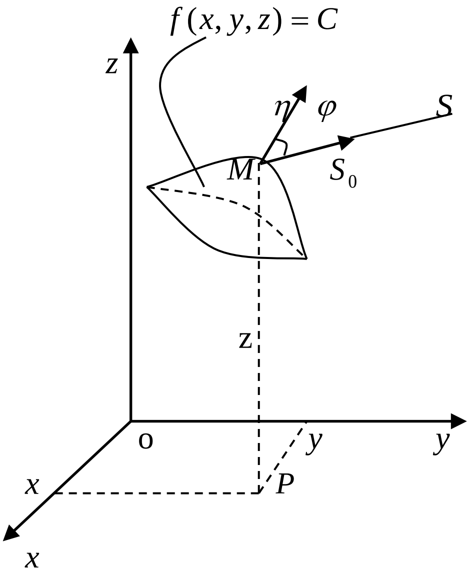
$$\text{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k \qquad \text{grad}u = \left[\frac{\partial u}{\partial x} ; \frac{\partial u}{\partial y} ; \frac{\partial u}{\partial z} \right]$$

Al multiplicar el Operador Nabla por una función escalar obtenemos su gradiente.

$$\nabla.u = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right).u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k$$

Es decir que también podemos expresar el Gradiente de una función de la siguiente manera:

$$\boxed{\text{grad } u = \nabla.u}$$



Recordemos que la derivada de $u = f(x, y, z)$ en el punto $M(x, y, z)$ en la dirección S es:

$$\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma$$

α, β, γ son los ángulos directores de la dirección S.

$$\frac{\partial u}{\partial S} = \nabla u.S_0$$

S_0 es el vector unitario en la dirección S.

El máximo valor de esta derivada es en la dirección de la normal a la superficie de nivel en este punto. Si llamamos η al versor que señala esa dirección resultará:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u.\eta = |\nabla u|.|\eta|\cos\varphi = |\nabla u|$$

Siendo: $|\eta| = 1$, $\varphi = 0$ y $\cos\varphi = 1$

Por lo tanto el valor máximo de la derivada de la función $u = f(x,y,z)$ en el punto $M(x,y,z)$ en la dirección de η es igual a:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = |\nabla u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

Ejemplo:

Dada la función $u = 3xy + z^2$. ¿Cuál es la mayor rapidez de crecimiento de esta función en el punto $M(2,0,4)$? (es decir ¿cuál es el valor máximo de la derivada en ese punto?).

Calculamos su gradiente:

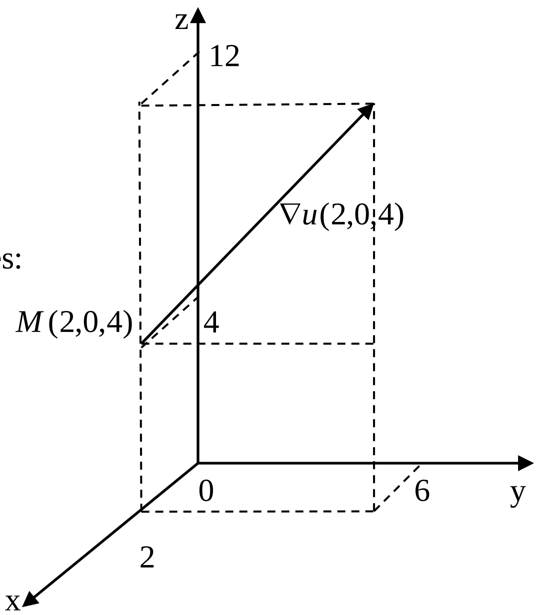
$$\nabla u = 3yi + 3xj + 2zk$$

Determinamos el gradiente en el punto $M(2,0,4)$:

$$\nabla u(2,0,4) = 6j + 8k$$

El valor máxima de la derivada en el punto $M(2,0,4)$ es:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = |\nabla u(2,0,4)| = \sqrt{0^2 + 6^2 + 8^2} = 10$$



Respuesta:
En el punto $M(2,0,4)$ la derivada de la función $u = 3xy + z^2$ tiene su valor máximo $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 10$ y es en la dirección del vector $\nabla u(2,0,4) = 6j + 8k$

DIVERGENCIA

Dado el Campo Vectorial $F = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\,j + R(x,y,z)\,k$ su **Divergencia** es una magnitud escalar igual a:

$$\boxed{\text{div}F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}}$$

Es decir que la $divF$ es un Campo Escalar que también podemos expresar como el producto escalar entre el vector simbólico ∇ y el vector F :

$$\nabla.F = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right).(Pi + Qj + Rk)$$

$$\nabla.F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\text{div}F = \nabla.F$$

Si bien esta definición puede aparentar ser rebuscada desde el punto de vista matemático, surge del estudio de la Física.
Si algún ente físico se genera en el interior de cierta región del campo o es absorbido por esa región, la $\text{div}F$ nos da la proporción por unidad de volumen en que el ente físico circula por un punto.
Si F representa la velocidad de un fluido, la $\text{div}F$ en un punto indica la proporción en que el fluido es introducido o sustraído del punto y por lo tanto mide la potencia de la fuente o sumidero existente en ese punto.
Si F representa la corriente de calor y $\text{div}F$ es positiva en un punto, entonces existe una fuente de calor localizada en ese punto o cierta cantidad de calor debe salir del punto haciendo que la temperatura en el punto decrezca.

Ejemplo:
Calculemos la divergencia de $F = x^3yzi + 3y^2j + 5yz^2k$ en el punto $M(2,1,3)$

$P = x^3yz$ $\qquad$ $Q = 3y^2$ $\qquad$ $R = 5yz^2$

$\frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2yz$ $\qquad$ $\frac{\partial Q}{\partial y} = 6y$ $\qquad$ $\frac{\partial R}{\partial z} = 10yz$

$$\text{div}F = 3x^2yz + 6y + 10yz$$

y en el punto $M(2,1,3)$ resulta:

$$\text{div}F = 36 + 6 + 30$$

$$\text{div}F = 72$$

ROTOR

Dado el Campo Vectorial $F = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\,j + R(x,y,z)\,k$ su **Rotor** es un vector igual a:

$$\boxed{\mathrm{rot}F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) k}$$

Es decir que $rotF$ es un Campo Vectorial que también podemos expresar como el producto vectorial entre el vector simbólico ∇ y el vector F:

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right) \times (Pi + Qj + Rk) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) k$$

$$\mathrm{rot}F = \nabla \times F$$

El $\mathrm{rot}F$, al igual que $\mathrm{div}F$, surge en forma natural en el estudio de problemas físicos.

El Rotor de un vector da la medida de la velocidad angular en cada punto del Campo Vectorial.

Si F representa la velocidad en cada punto de un fluido incompresible y considerando en un instante dado una pequeña esfera del fluido cuyo centro es el punto M; en un instante posterior la esfera pudo haberse trasladado a otra posición, pudo haber sufrido deformaciones o **pudo haber girado** alrededor de un determinado eje, el $\mathrm{rot}F$ da la medida de este último tipo de movimiento.

Ejemplo:
Calculemos el rotor de $F = x^3yzi + 3y^2 j + 5yz^2k$ en el punto $M(2,1,3)$

$P = x^3yz$ $\qquad$ $Q = 3y^2$ $\qquad$ $R = 5yz^2$

$\frac{\partial P}{\partial y} = x^3 z$ $\qquad$ $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ $\qquad$ $\frac{\partial R}{\partial x} = 0$

$\frac{\partial P}{\partial z} = x^3 y$ $\qquad$ $\frac{\partial Q}{\partial z} = 0$ $\qquad$ $\frac{\partial R}{\partial y} = 5z^2$

$$\mathrm{rot}F = (5z^2 - 0)i + (x^3y - 0)\,j + (0 - x^3z)k$$

$$\mathrm{rot}F = 5z^2 i + x^3yj - x^3zk$$

y en el punto $M(2,1,3)$:

$$\boxed{\mathrm{rot}F = 45i + 8j - 24k}$$

CAMPO VECTORIAL IRROTACIONAL, CAMPO VECTORIAL SOLENOIDAL Y ECUACIÓN DE LAPLACE

Examinemos algunas fórmulas que son de importancia en la Hidrodinámica, en la Teoría de la Elasticidad y en la Electrodinámica:

Campo Vectorial Irrotacional

Sea el Campo Vectorial $F(x,y,z) = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\,j + R(x,y,z)\,k$ cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales de segundo orden continuas, si su rotor es el vector nulo, el Campo Vectorial se llama Irrotacional.

$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = 0 \quad \Rightarrow \quad F$ es un **Campo Vectorial Irrotacional**

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) k = 0$$

Para ello se deben verificar las igualdades:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Demostremos que ello ocurre cuando el Campo Vectorial F es el gradiente de un Campo Escalar $u(x,y,z)$, es decir, cuando el Campo Vectorial F es Conservativo.

En efecto, si F es un Campo Vectorial Conservativo, entonces:

$$F(x,y,z) = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\,j + R(x,y,z)\,k = \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k$$

$$\operatorname{rot} F = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = \nabla \times \nabla . u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}\right) i + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right) j + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right) k$$

Y por la igualdad de las derivadas mixtas de segundo orden continuas obtenemos:

$$\operatorname{rot} F = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = \nabla \times \nabla . u = 0$$

(es lógico, pues el producto vectorial de un vector por si mismo es nulo).

En resumen si $\operatorname{rot} F = 0$ **el Campo Vectorial** F **se llama IRROTACIONAL.** **Y todo Campo Vectorial Conservativo es irrotacional.**

Campo Vectorial Solenoidal

Sea el Campo Vectorial $F(x,y,z) = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\,j + R(x,y,z)$ cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales de segundo orden continuas, si su divergencia es nula, el Campo Vectorial se llama Solenoidal.

$$\text{div}F = \nabla.F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F \text{ es un } \textbf{Campo Vectorial Solenoidal}$$

Demostremos que esto ocurre cuando el Campo Vectorial F es el rotor de algún vector (que llamaremos A).

$$A(x,y,z) = A_1(x,y,z)\,i + A_2(x,y,z)\,j + A_3(x,y,z)\,k$$

$$F = \text{rot}A = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)k$$

$$\text{div}F = div(\text{rot}A) = \left(\frac{\partial^2 A_3}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x\partial z}\right) + \left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 A_2}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z\partial y}\right)$$

Y por la igualdad de las derivadas mixtas de segundo orden continuas obtenemos:

$$\text{div}F = \text{div}(\text{rot}A) = \nabla.(\nabla \times A) = 0$$

(También podemos deducirlo analizando que el vector $\nabla \times A$ es un vector normal a ∇ y el producto escalar entre dos vectores perpendiculares es igual a cero).

En resumen si $\text{div}F = 0$ el Campo Vectorial F se llama SOLENOIDAL.

Y esto ocurre cuando F es el rotor de algún vector.

Ecuación de Laplace

Dado el Campo Escalar $u(x,y,z)$ su Gradiente es:

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k \qquad \text{y}$$

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad \text{ó}$$

$$\nabla.\nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Esta expresión es muy común y se la expresa:

$$\nabla.\nabla u = \nabla^2 u = \Delta u$$

Y al operador correspondiente se lo denomina **Operador de Laplace:**

$$\boxed{\nabla.\nabla = \nabla^2 = \Delta}$$

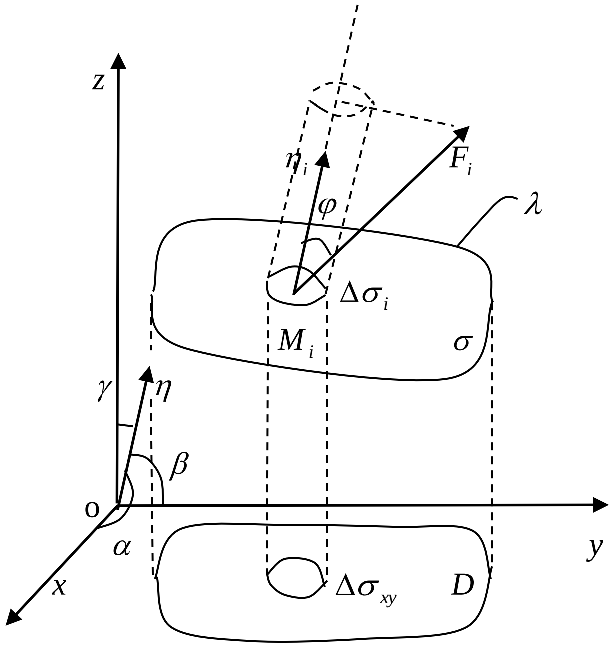
$$\boxed{\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$ **Operador de Laplace.**

Y cuando resulta

$$\nabla^2 u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$ se la denomina **Ecuación de Laplace.**

La función $u(x,y,z)$ que satisface esta ecuación se llama **Función Armónica.**

INTEGRAL DE SUPERFICIE



Consideremos en el espacio la superficie σ limitada por la curva cerrada λ. Supongamos que en el punto M la dirección positiva de la normal a la superficie está dada por el versor $\eta(M)$ y que en cada punto está definido el vector:

$$F = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\,j + R(x,y,z)\,k$$

$$\eta = \cos\alpha.i + \cos\beta.j + \cos\gamma.k$$

Dividimos a la superficie en áreas elementales $\Delta\sigma_i$ y tomamos la suma:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[F(M_i).\eta(M_i)\right]\Delta\sigma_i$$

Donde $F(M_i)$ es el valor del vector en el punto M_i y $\eta(M_i)$ es la normal a la superficie en ese punto.
El límite de esta suma cuando $n \to \infty$ es decir cuando $\text{máx}\Delta\sigma_i \to 0$ se llama **Integral de Superficie**:

$$\iint_\sigma F.\eta.d\sigma = \lim_{\text{máx}\Delta\sigma\to 0}\sum_{i=1}^{n} F_i.\eta_i.\Delta\sigma_i$$

Siendo "$\text{máx}\Delta\sigma$" el área de la mayor de todas las áreas elementales en que está dividida la superficie "σ".
$F.\eta$ es el producto escalar entre dos vectores, por lo tanto

$$F_i.\eta_i.\Delta\sigma_i = |F_i|.\Delta\sigma_i.\cos\varphi$$

Este producto es igual al volumen del cilindro de base $\Delta\sigma_i$ y altura $|F_i|.\cos\varphi$
Si F es la velocidad de un líquido, este producto es la cantidad de líquido que pasa por $\Delta\sigma_i$ en la unidad de tiempo, en la dirección η_i. Y la Integral de Superficie da la cantidad total de líquido que pasa por la superficie en la dirección positiva de η en la unidad de tiempo.

$$\boxed{\iint_\sigma F.\eta.d\sigma = \iint_\sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma}$$

El cálculo de la Integral de Superficie se reduce al cálculo de una integral doble en un dominio plano.
Supongamos que σ está dada por la ecuación $z = f(x,y)$ y es tal que toda paralela al eje $0z$ la corta en un solo punto (en caso contrario se debe subdividir la superficie y calcular la integral de cada parte por separado). Los cosenos directores de la normal son:

$$\cos\alpha = \frac{-\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

$$\cos\beta = \frac{-\dfrac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

$$\Delta\sigma.\cos\gamma = \Delta\sigma_{xy}$$

$$d\sigma.\cos\gamma = d\sigma_{xy} = dx.dy$$

$$d\sigma = \frac{dxdy}{\cos\gamma}$$

$$\iint_\sigma F.\eta.d\sigma = \iint_\sigma \left[P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right] d\sigma$$

$$= \iint_D \{P[x,y,f(x,y)]\cos\alpha + Q[x,y,f(x,y)]\cos\beta + R[x,y,f(x,y)]\cos\gamma\}\frac{dxdy}{\cos\gamma}$$

$$= \iint_D \left\{-\frac{\partial z}{\partial x}P[x,y,f(x,y)] - \frac{\partial z}{\partial y}Q[x,y,f(x,y)] + R[x,y,f(x,y)]\right\} dxdy$$

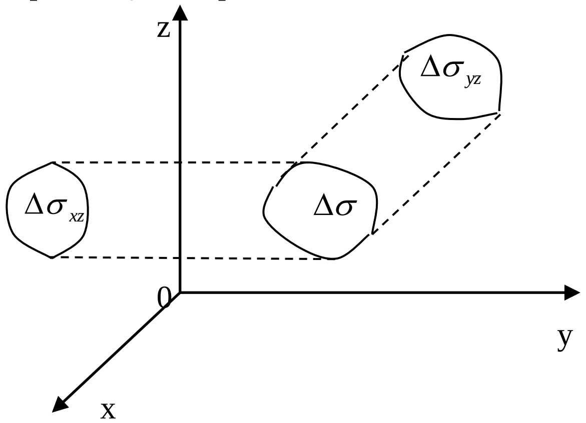
Es decir:

$\boxed{\iint_\sigma F.\eta.d\sigma = \iint_D \left(-\frac{\partial z}{\partial x}P - \frac{\partial z}{\partial y}Q + R\right)dxdy}$ donde P, Q y R están evaluados en $[x, y, f(x,y)]$

De manera similar se puede proceder si la superficie σ está dada de la forma $x = g(y,z)$ o $y = h(x,z)$, proyectando sobre el plano $0xz$ o el plano $0yz$ respectivamente:

$$\Delta\sigma.\cos\alpha = \Delta\sigma_{yz}$$

$$\Delta\sigma.\cos\beta = \Delta\sigma_{xz}$$

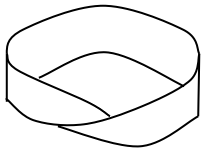


Aclaración sobre una superficie orientada

En cada punto de una superficie cerrada se pueden determinar dos versores normales a la misma:

- Uno exterior, positivo o hacia afuera y
- Otro interior, negativo o hacia adentro.

Entonces podemos establecer que por ejemplo la cara exterior de una esfera es positiva y la interior negativa, es decir que la normal positiva de una superficie determina la cara positiva de la misma.
En superficies abiertas no es tan fácil de definirlo. Un ejemplo de superficie **no** orientable es la cinta de Möbius



Una superficie es orientable si es posible elegir un versor normal η en cada punto de manera que η varíe de manera continua sobre σ. La elección dada de η le da a σ una orientación. Existen dos orientaciones posibles para cualquier superficie orientable.
Es importante que antes de calcular una integral de superficie, se establezca previamente cual es la cara exterior o positiva de la superficie y cual la interior o negativa.

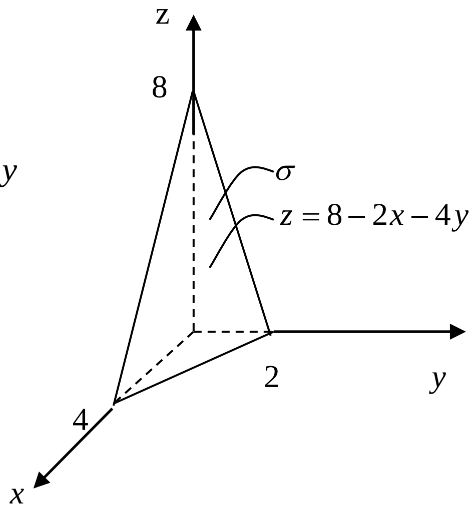
Ejemplo:

Calcular el flujo del vector $F = 6z.i + 3.j + 3y.k$ a través del plano $2x + 4y + z = 8$ ubicado en el primer octante.

La superficie σ es: $\quad z = 8 - 2x - 4y \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -2 \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -4 \end{cases}$

Y el vector F es:

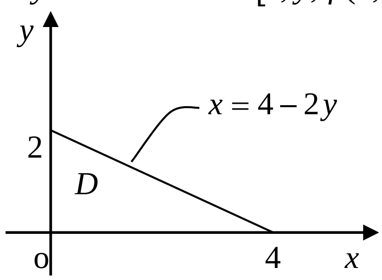
$F = P(x, y, z)\, i + Q(x, y, z)\, j + R(x, y, z)\, k = 6zi + 3j + 3yk$



$P(x, y, z) = 6z \quad \Rightarrow \quad P[x, y, f(x, y)] = 48 - 12x - 24y$

$Q(x, y, z) = 3 \quad \Rightarrow \quad Q[x, y, f(x, y)] = 3$

$R(x, y, z) = 3y \quad \Rightarrow \quad R[x, y, f(x, y)] = 3y$



$$\iint_\sigma F.\eta.d\sigma = \iint_D \left\{ -\frac{\partial z}{\partial x} P[x, y, f(x, y)] - \frac{\partial z}{\partial y} Q[x, y, f(x, y)] + R[x, y, f(x, y)] \right\} dxdy$$

$$\iint_\sigma F.\eta.d\sigma = \iint_D \left[-(-2)(48 - 12x - 24y) - (-4).3 + 3y \right] dxdy$$

$$= \iint_D \left(96 - 24x - 48y + 12 + 3y \right) dxdy$$

$$= \int_0^2 dy \int_0^{4-2y} (108 - 24x - 45y)\, dx = \int_0^2 dy \left| 108x - \frac{24x^2}{2} - 45yx \right|_0^{4-2y} =$$

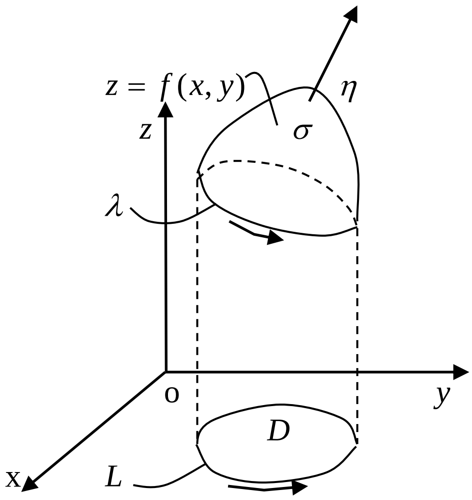
$$= \int_0^2 \left[108(4 - 2y) - 12(4 - 2y)^2 - 45y(4 - 2y) \right] dy =$$

$$= \int_0^2 \left(432 - 216y - 192 + 192y - 48y^2 - 180y + 90y^2 \right) dy =$$

$$= \int_0^2 \left(240 - 204y + 42y^2 \right) dy = \left| 240y - \frac{204y^2}{2} + \frac{42y^3}{3} \right|_0^2 =$$

$$= 240 \times 2 - \frac{204 \times 2}{2} + \frac{42 \times 2^3}{3} = 480 - 408 + 112 = 184$$

$$\boxed{\iint_\sigma F.\eta.d\sigma = 184}$$



TEOREMA DE STOKE

Consideremos que σ es una superficie orientada que está limitada por la curva λ y que F es un campo vectorial que tiene derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a σ.
Este teorema establece la relación entre la Integral Curvilínea a lo largo de la curva λ y la Integral de Superficie sobre la superficie σ cuya frontera es la curva λ, de la siguiente manera:

$$\boxed{\iint_\sigma \text{rot}F.\eta.d\sigma = \int_\lambda F.ds} \qquad \text{ó}$$

$$\boxed{\iint_\sigma \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] d\sigma = \int_\lambda P\,dx + Q\,dy + R\,dz}$$

El **Teorema de Stoke** puede considerarse como una versión en el espacio del **Teorema de Green**.
Para establecer las orientaciones de la superficie y de la curva, consideramos que:

La dirección positiva del versor normal η forma con el eje $0z$ un ángulo agudo y que el sentido de recorrido de λ es tal que si un observador mira desde el extremo de η, ve el recorrido a lo largo de λ en el sentido antihorario.

Demostración

Supongamos que σ está dada por la ecuación $z = f(x,y)$ y es tal que toda recta paralela al eje $0z$ que la atraviesa, la corta en un solo punto. Y la proyección de esta superficie sobre el plano $0xy$ es el dominio D.

Consideremos que $z = f(x,y)$ es continua y tiene derivadas de hasta segundo orden también continuas.

Resolveremos las integrales del teorema por separado.

Recordemos que:

$$F = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\,j + R(x,y,z)\,k$$

$$\text{rot}F = \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)k$$

$$\iint_\sigma F.\eta.d\sigma = \iint_D \left(-\frac{\partial z}{\partial x}P - \frac{\partial z}{\partial y}Q + R\right)dxdy$$ donde P, Q y R están evaluados en $\left[x, y, f(x,y)\right]$

Comencemos resolviendo la **Integral de Superficie**:

$$\iint_{\sigma} \operatorname{rot} F.\eta.d\sigma = \iint_{D} \left[-\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] dxdy \qquad \mathbf{(1)}$$

donde P, Q y R están evaluados en $\left[x, y, f(x, y)\right]$

Ahora resolvamos la **Integral Curvilínea**:

$$\int_{\lambda} F.ds = \int_{\lambda} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$$

La curva λ está dada por la función $z = f(x, y)$, donde *x* e *y* son las coordenadas de los puntos de la curva *L* que es la proyección de λ sobre el plano *0xy*. Por lo tanto tendremos que:

$$z = f(x, y) \qquad \Rightarrow \qquad dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$\int_{\lambda} F.ds = \int_{L} P\left[x, y, f(x, y)\right]dx + Q\left[x, y, f(x, y)\right]dy + R\left[x, y, f(x, y)\right]\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)$$

Reordenando términos y sacando factor común *dx* y *dy* obtendremos:

$$\int_{\lambda} F.ds = \int_{L} \left(P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy$$

El segundo miembro es una Integral Curvilínea a lo largo de la curva *L* y las funciones P, Q y R están evaluados en $\left[x, y, f(x, y)\right]$.

Si al segundo miembro la aplicamos el Teorema de Green, obtendremos:

$$\int_{\lambda} F.ds = \iint_{D} \left[\frac{\partial\left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}\right] dxdy \qquad \mathbf{(2)}$$

Calculamos estas derivadas parciales como funciones compuestas, teniendo en cuenta que P, Q y R son funciones de x, y, z y que $z = f(x, y)$:

$$\frac{\partial\left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}\overbrace{\frac{dx}{dx}}^{=1} + \frac{\partial Q}{\partial y}\overbrace{\frac{dy}{dx}}^{=0} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\overbrace{\frac{dx}{dx}}^{=1} + \frac{\partial R}{\partial y}\overbrace{\frac{dy}{dx}}^{=0} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial y} + R\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + R\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial\left(P + R\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}\overbrace{\frac{dx}{dy}}^{=0} + \frac{\partial P}{\partial y}\overbrace{\frac{dy}{dy}}^{=1} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\overbrace{\frac{dx}{dy}}^{=0} + \frac{\partial R}{\partial y}\overbrace{\frac{dy}{dy}}^{=1} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + R\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

$$= \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + R\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

Al restar estas derivadas en la expresión **(2)** se anulan los dos últimos términos de cada una de ellas y queda:

$$\int_\lambda F.ds = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}\right)dxdy$$

Reordenamos los términos:

$$\int_\lambda F.ds = \iint_D \left[-\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]dxdy \qquad \textbf{(3)}$$

Si comparamos las expresiones **(1)** y **(3)** queda demostrado que:

$$\boxed{\iint_\sigma \text{rot}F.\eta.d\sigma = \int_\lambda F.ds}$$

----------o----------

Si la superficie σ es un plano paralelo al plano $0xy$ resultará $\Delta z = 0$ y obtendremos la **Fórmula de Green** como caso particular de la **Fórmula de Stoke**.

----------o----------

Tal como lo demostramos para el plano, ahora en el espacio, si se cumple que:

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

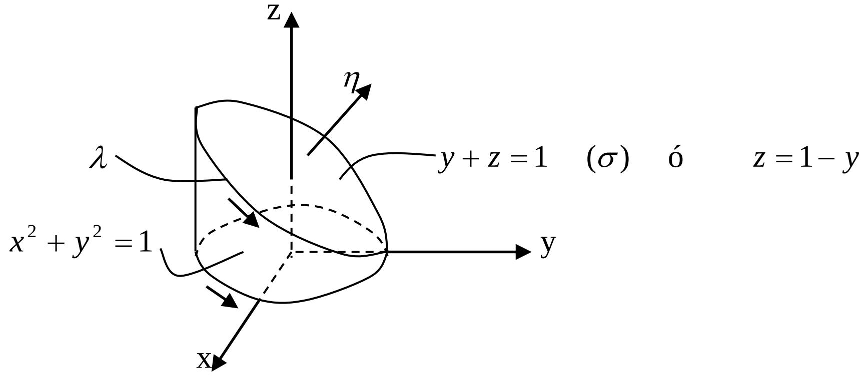
entonces resulta:

$$\int_\lambda F.ds = \int_\lambda P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$

y en este caso la **Integral Curvilínea** no depende de la forma de la curva de integración.

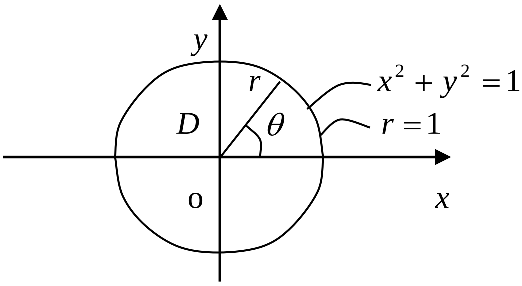
Ejemplo:

Calcular $\int_{\lambda} F.ds$ siendo $F(x,y,z)=(3-y).i+(x^2+1).j+2z^3.k$ y λ es la curva dada por la intersección del plano $y+z=1$ con el cilindro $x^2+y^2=1$.



La superficie σ está dada por $y+z=1$ y la orientamos hacia arriba, entonces λ tiene orientación positiva.
La proyección de σ sobre el plano $0xy$ es el círculo $x^2+y^2\le 1$ (dominio D).
La curva λ es una elipse y resultaría difícil calcular la integral curvilínea, pero apliquemos la **Fórmula de Stoke**:

$$\int_{\lambda} F.ds=\iint_{\sigma}\text{rot}F.\eta.d\sigma$$



$$\text{rot}F=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (3-y) & (x^2+1) & 2z^3 \end{vmatrix}=(2x+1).k$$

$$\int_{\lambda} F.ds=\iint_{\sigma}\text{rot}F.\eta.d\sigma=\iint_{D}\left[-\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)-\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right].dx.dy$$

$$\int_{\lambda} F.ds=\iint_{\sigma}\text{rot}F.\eta.d\sigma=\iint_{D}(2x+1)\cdot dx.dy=\iint_{D}(2r\cos\theta+1).r.dr.d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(2r^2\cos\theta+r).dr=$$

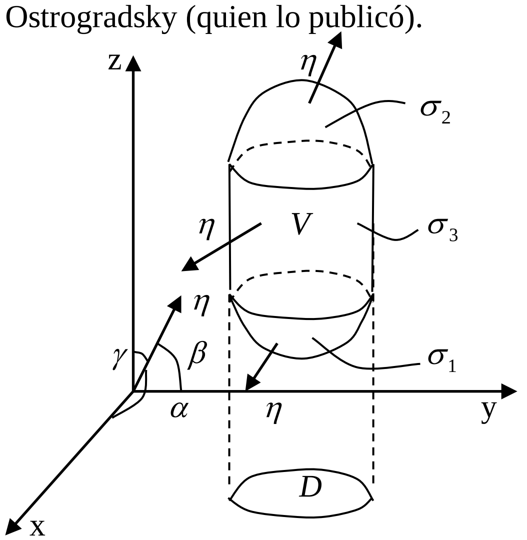
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\left|\frac{2r^3}{3}\cdot\cos\theta+\frac{r^2}{2}\right|_0^1=\int_0^{2\pi}\left(\frac{2}{3}\cdot\cos\theta\frac{1}{2}\right).d\theta=\left|\frac{2}{3}\cdot sen\theta+\frac{\theta}{2}\right|_0^{2\pi}=$$

$$=\left(\frac{2}{3}\cdot sen2\pi+\frac{2\pi}{2}\right)-\left(\frac{2}{3}\cdot sen0+0\right)=\pi$$

$$\boxed{\int_{\lambda} F.ds=\pi}$$

TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

También conocido como Teorema de Riemann (quien descubrió este teorema) o como Teorema de Ostrogradsky (quien lo publicó).



Sea V un volumen definido en R^3, limitado por una superficie cerrada σ, que puede ser proyectada sobre los tres planos coordenados. Y sea F un campo vectorial continuo y con derivadas también continuas en una región que contiene a V.

Entonces:

$$\boxed{\iiint_V \operatorname{div} F.dv = \iint_\sigma F.\eta.d\sigma}$$

Es decir que la Integral Triple extendida en el dominio V de la Divergencia del campo vectorial F es igual al flujo de F a través de la superficie cerrada σ que limita a este dominio.

Demostración

Recordemos que:

$$F = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\,j + R(x,y,z)\,k$$

$$\eta = \cos\alpha.i + \cos\beta.j + \cos\gamma.k$$

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Por lo tanto resulta:

$$\boxed{\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv = \iint_\sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma}$$

Podemos demostrar separadamente las tres expresiones:

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}\, dv = \iint_\sigma P\cos\alpha\, d\sigma \qquad \textbf{(1)}$$

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}\, dv = \iint_\sigma Q\cos\beta\, d\sigma \qquad \textbf{(2)}$$

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dv = \iint_\sigma R\cos\gamma\, d\sigma \qquad \textbf{(3)}$$

Demostremos la igualdad **(3)**:

V está limitada por la superficie σ y sea su proyección sobre el plano $0xy$ el dominio D.
Consideremos que se puede dividir σ en σ_1, σ_2 y σ_3.
σ_1 está dado por $z = f_1(x,y)$, σ_2 por $z = f_2(x,y)$, y σ_3 es una superficie cilíndrica de generatrices paralelas al eje $0z$.
Resolvamos la integral del primer miembro de la igualdad **(3)**:

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dv = \iint_D \left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\, dz \right] dxdy = \iint_D \{ R[x, y, f_2(x,y)] - R[x, y, f_1(x,y)] \}\, dxdy$$

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dv = \iint_D R[x, y, f_2(x,y)]\, dxdy - \iint_D R[x, y, f_1(x,y)]\, dxdy \qquad \textbf{(4)}$$

Resolvamos ahora la integral del segundo miembro de la igualdad **(3)**:

$$\iint_\sigma R\cos\gamma\, d\sigma = \iint_{\sigma_1} R(x,y,z)\cos\gamma\, d\sigma + \iint_{\sigma_2} R(x,y,z)\cos\gamma\, d\sigma + \iint_{\sigma_3} R(x,y,z)\cos\gamma\, d\sigma$$

Si consideramos las normales exteriores a la superficie σ resulta:

$\cos\gamma < 0$ en σ_1
$\cos\gamma > 0$ en σ_2
$\cos\gamma = 0$ en σ_3

Recordemos que:

$\cos\gamma . \Delta\sigma = \Delta\sigma_{xy}$ ó
$\cos\gamma . d\sigma = dx\, dy$

$$\iint_\sigma R\cos\gamma\, d\sigma = -\iint_D R[x, y, f_1(x,y)]\, dxdy + \iint_D R[x, y, f_2(x,y)]\, dxdy + 0$$

$$\iint_\sigma R\cos\gamma\, d\sigma = \iint_D R[x, y, f_2(x,y)]\, dxdy - \iint_D R[x, y, f_1(x,y)]\, dxdy \qquad \textbf{(5)}$$

Si comparamos las expresiones **(4)** y **(5)** podemos comprobar que queda demostrada la igualdad **(3)**.
De modo similar se pueden demostrar las igualdades **(1)** y **(2)**, con lo que finalmente queda demostrado el **Teorema de la Divergencia.**

----------o----------

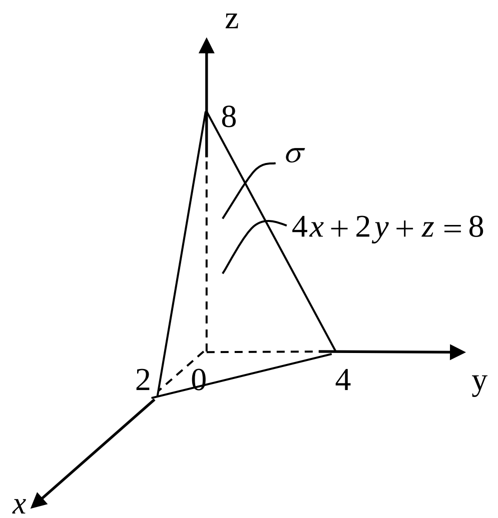
Si F representa la velocidad de un líquido que corre a través del dominio V, la Integral da la cantidad de líquido que sale de V a través de σ en la unidad de tiempo (o que entra si la Integral es negativa).
Si $\text{div}F \equiv 0$, la Integral también será nula o sea que la cantidad de líquido que sale (o entra) a través de σ es igual a cero. O más precisamente la cantidad de líquido que sale es igual a la que entra en el dominio.

----------o----------

Ejemplo:

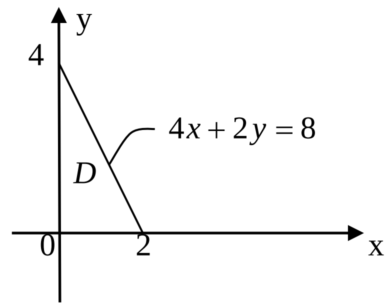
Aplicando el Teorema de la Divergencia calcular el flujo de $F = 2xi + yj + 3zk$ a través del volumen V definido en el 1º octante y limitado por el plano $4x + 2y + z = 8$.

$$\iiint_V \text{div}F.dv = \iint_\sigma F.\eta.d\sigma$$



$$\text{div}F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\text{div}F = 2 + 1 + 3 = 6$$



$$\iint_\sigma F.\eta.d\sigma = \iiint_V \text{div}F.dv = \iiint_V 6dv = 6\int_0^2 dx\int_0^{4-2x} dy\int_0^{8-4x-2y} dz =$$

$$= 6\int_0^2 dx\int_0^{4-2x} dy\left|z\right|_0^{8-4x-2y} = 6\int_0^2 dx\int_0^{4-2x} (8 - 4x - 2y)dy =$$

$$= 6\int_0^2 dx\left|8y - 4xy - y^2\right|_0^{4-2x} = 6\int_0^2 \left[8(4-2x) - 4x(4-2x) - (4-2x)^2\right]dx =$$

$$= 6\int_0^2 \left(32 - 16x - 16x + 8x^2 - 16 + 16x - 4x^2\right)dx =$$

$$= 6\int_0^2 \left(16 - 16x + 4x^2\right)dx = 6\left|16x - \frac{16x^2}{2} + \frac{4x^3}{3}\right|_0^2 =$$

$$= 6\left(32 - 32 + \frac{32}{3}\right) = 6 \cdot \frac{32}{3} = 64$$

$$\boxed{\iint_\sigma F.\eta.d\sigma = 64}$$