CAPÍTULO 3

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

FORMULA DE TAYLOR

Antes de comenzar con la Fórmula de Taylor para una función de dos variables independientes, recordemos la Fórmula de Taylor para la función de una sola variable independiente $y = f(x)$.

La Fórmula de Taylor permite sustituir a la función $y = f(x)$ por el polinomio $y = P_n(x)$ suficientemente próximo a dicha función.

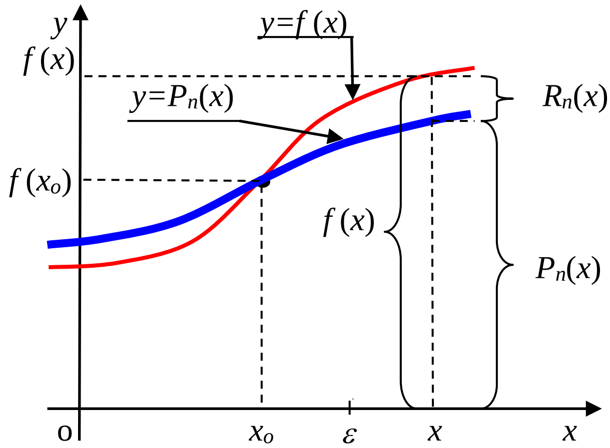
En cualquier punto próximo a x_o resultará:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

$P_n(x)$: Polinomio de Taylor.

$R_n(x)$: Término Complementario o Resto.

La Fórmula de Taylor para la función $y = f(x)$ **es:**



$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n(x)}$$

Y teniendo en cuenta que 0!=1 y que $f^{(0)} = f$ también se la suele expresar así:

$$\boxed{f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x - x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0) + R_n(x)}$$

En el punto $x = x_0$ el polinomio y sus derivadas son iguales al valor de la función y sus derivadas.

El último término es el **Término Complementario**:

$$\boxed{R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\varepsilon)} \qquad \text{donde} \qquad \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

siendo ε un punto comprendido entre x_0 y x:

$\varepsilon = x_0 + \theta(x - x_0)$ para $0 < \theta < 1$

Y recordemos también que la **Serie de Taylor** tiene la forma:

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)}$$

Muy frecuentemente se trabaja con la Fórmula de Taylor para x_o=0, en este caso recibe el nombre de **Fórmula de Maclaurin** y tiene la forma:

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(x_0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n(x)} \qquad \text{o}$$

$$\boxed{f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\,f^{(i)}(0)+R_n(x)}$$

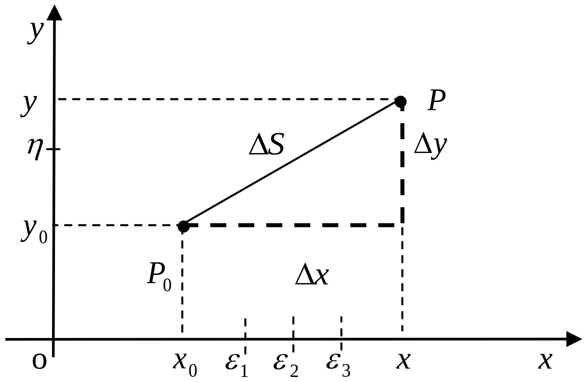
Y el **Término Complementario**:

$$\boxed{R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\theta x)} \qquad \text{para} \qquad 0<\theta<1$$

Comencemos ahora con nuestro tema:

FÓRMULA DE TAYLOR PARA UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES INDEPENDIENTES

Sea $z=f(x,y)$ una función definida en un dominio *D*, con derivadas parciales continuas de hasta enésimo orden y $P_0(x_0,y_0)$ sea un punto interior de este dominio. Si $P(x,y)$ es un punto que pertenece a un entorno del punto P_0, la Fórmula de Taylor permite obtener un valor aproximado de $f(x,y)$, conociendo los valores de la función y sus derivadas parciales sucesivas en el punto $P_0(x_0,y_0)$.



Consideremos a $z=f(x,y)$ como una función de una sola variable independiente "*y*" ($x=$ constante) y apliquemos la Fórmula de Taylor hasta los términos de segundo orden ($n=2$):

$$f(x,y)=f(x,y_0)+\frac{y-y_0}{1!}\,f'_y(x,y_0)+\frac{(y-y_0)^2}{2!}\,f''_{yy}(x,y_0)+\frac{(y-y_0)^3}{3!}\,f'''_{yyy}(x,\eta) \qquad (1)$$

Siendo η un punto comprendido entre y_0 e *y*: $\eta=y_0+\theta_1(y-y_0)$ para $0<\theta_1<1$

En la expresión (1) consideramos a $f(x,y_0)$, $f'_y(x,y_0)$, $f''_{yy}(x,y_0)$ y $f'''_{yyy}(x,\eta)$ como funciones de una sola variable "*x*" y aplicamos la Fórmula de Taylor hasta las derivadas parciales mixtas de tercer orden:

$$f(x,y_0)=f(x_0,y_0)+\frac{x-x_0}{1!}\,f'_x(x_0,y_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}\,f''_{xx}(x_0,y_0)+\frac{(x-x_0)^3}{3!}\,f'''_{xxx}(\varepsilon_1,y_0) \qquad (2)$$

Siendo ε_1 un punto comprendido entre x_0 y *x*: $\varepsilon_1=x_0+\theta_2(x-x_0)$ para $0<\theta_2<1$

$$f'_y(x,y_0)=f'_y(x_0,y_0)+\frac{x-x_0}{1!}\,f''_{yx}(x_0,y_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}\,f'''_{yxx}(\varepsilon_2,y_0) \qquad (3)$$

Siendo ε_2 un punto comprendido entre *x0* y *x*: $\varepsilon_2 = x_0 + \theta_3(x - x_0)$ para $0 < \theta_3 < 1$

$$f''_{yy}(x, y_0) = f''_{yy}(x_0, y_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'''_{yyx}(\varepsilon_3, y_0) \qquad (4)$$

Siendo ε_3 un punto comprendido entre *x0* y *x*: $\varepsilon_3 = x_0 + \theta_4(x - x_0)$ para $0 < \theta_4 < 1$

Introduciendo las expresiones (2), (3) y (4) en la fórmula (1) y reordenando los términos según las potencias crecientes de $(x - x_0)$ e $(y - y_0)$ obtendremos la **Fórmula de Taylor** de la función $z = f(x, y)$ para $n = 2$:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x, y) = {} & f(x_0, y_0) + (x - x_0) f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0) f'_y(x_0, y_0) + \\ & + \frac{1}{2!}\left[(x - x_0)^2 f''_{xx}(x_0, y_0) + 2(x - x_0)(y - y_0) f''_{xy}(x_0, y_0) + (y - y_0)^2 f''_{yy}(x_0, y_0)\right] + R_2 \end{aligned}}$$

Siendo R_2 el Término Complementario o Resto de la fórmula y es igual a:

$$R_2 = \frac{1}{3!}\left[(x - x_0)^3 f'''_{xxx}(\varepsilon_1, y_0) + 3(x - x_0)^2 (y - y_0) f'''_{xxy}(\varepsilon_2, y_0) + 3(x - x_0)(y - y_0)^2 f'''_{xyy}(\varepsilon_3, y_0) + (y - y_0)^3 f'''_{yyy}(x_0, \eta)\right]$$

Demostremos que $R_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Para ello consideremos:

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 &= \Delta x \\ y - y_0 &= \Delta y \end{aligned}\right\} \qquad \Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Realicemos en R_2 este reemplazo y además multipliquemos y dividamos por ΔS^3:

$$R_2 = \frac{1}{3!}\left[\frac{\Delta x^3}{\Delta S^3} f'''_{xxx}(\varepsilon_1, y_0) + 3\frac{\Delta x^2 \Delta y}{\Delta S^3} f'''_{xxy}(\varepsilon_2, y_0) + 3\frac{\Delta x \Delta y^2}{\Delta S^3} f'''_{xyy}(\varepsilon_3, y_0) + \frac{\Delta y^3}{\Delta S^3} f'''_{yyy}(x_0, \eta)\right] \cdot \Delta S^3$$

Pero como $|\Delta x| < \Delta S$ y $|\Delta y| < \Delta S$ y las derivadas parciales de tercer orden son continuas, por lo tanto tienen un valor acotado, entonces el coeficiente de ΔS^3 resulta acotado en el dominio examinado; si lo designamos por "**c**", tendremos:

$R_2 = c.\Delta S^3$ en general se verifica que:

$R_n = c.\Delta S^{n+1}$ y podemos comprobar que $c.\Delta S^{n+1} \to 0$ es decir $R_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

De esta manera la **Fórmula de Taylor** para $n = 2$ también se puede expresar:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x, y) = {} & f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \\ & + \frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(x_0, y_0)\Delta x^2 + 2 f''_{xy}(x_0, y_0)\Delta x \Delta y + f''_{yy}(x_0, y_0)\Delta y^2\right] + R_2 \end{aligned}}$$

Para cualquier valor de "*n*" la Fórmula de Taylor tiene una forma similar a ésta.

También podemos representar a la Fórmula de Taylor así:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y +$$
$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y\partial x}\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2\right] + R_2$$

Y tal como lo hicimos en Diferenciales de Orden Superior, también podemos expresar a la Fórmula de Taylor mediante la siguiente forma simbólica:

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\left[\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y\right]^{[i]} + R_n$$

El exponente simbólico $[i]$ indica orden de derivación para las derivadas parciales y exponente para los incrementos Δx y Δy; y teniendo en cuenta que $\left[\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0+y_0)}{\partial y}\Delta y\right]^{[0]} = f(x_0,y_0)$ y que $0! = 1$.

Haciendo $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ la Fórmula de Taylor, que en este caso recibe también el nombre de **Fórmula de Maclaurin** se escribe así:

$$f(x,y) = f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y + \frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(0,0)x^2 + 2f''_{xy}(0,0)xy + f''_{yy}(0,0)y^2\right] + R_2$$

Ejemplo

Desarrollar por la Fórmula de Taylor en un entorno del punto $P(3,1)$ hasta los términos de 2º orden inclusive a la función $f(x,y) = y^x$.

$$f(x,y) \cong f(3,1) + f'_x(3,1)(x-3) + f'_y(3,1)(y-1) +$$
$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(3,1)(x-3)^2 + 2f''_{xy}(3,1)(x-3)(y-1) + f''_{yy}(3,1)(y-1)^2\right]$$

$f(x,y) = y^x$	$f(3,1) = 1$
$f'_x(x,y) = y^x \ln y$	$f'_x(3,1) = 0$
$f'_y(x,y) = xy^{x-1}$	$f'_y(3,1) = 3$
$f''_{xx}(x,y) = y^x(\ln y)^2$	$f''_{xx}(3,1) = 0$
$f''_{xy}(x,y) = xy^{x-1}\ln y + y^x\frac{1}{y}$	$f''_{xy}(3,1) = 1$
$f''_{yy}(x,y) = x(x-1)y^{x-2}$	$f''_{yy}(3,1) = 6$

$$f(x,y) \cong 1 + 0 + 3(y-1) + \frac{1}{2}\left[0 + 2(x-3)(y-1) + 6(y-1)^2\right]$$

$$f(x,y) \cong 3y - 2 + \frac{1}{2}\left[2(x-3)(y-1) + 6(y-1)^2\right]$$

Esta expresión nos permite calcular en forma aproximada los valores de la función $f(x,y)=y^x$ en las proximidades del punto $P(3,1)$. Por ejemplo si deseamos calcular $f(2{,}9;1{,}1)=1{,}1^{2,9}$ tendremos:

$$f(2{,}9;1{,}1)\cong 3{,}3-2+\frac{1}{2}\left[2(-0{,}1)(0{,}1)+6(0{,}1)^2\right]=1{,}32 \qquad \therefore \qquad \boxed{1{,}1^{2,9}\cong 1{,}32}$$

Si realizamos el cálculo exacto $\boxed{1{,}1^{2,9}=1{,}318745}$ vemos que el error resulta $e<1\%$.

MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES INDEPENDIENTES

Dada la función $z=f(x,y)$ podemos definir sus máximos y mínimos de la siguiente forma:

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

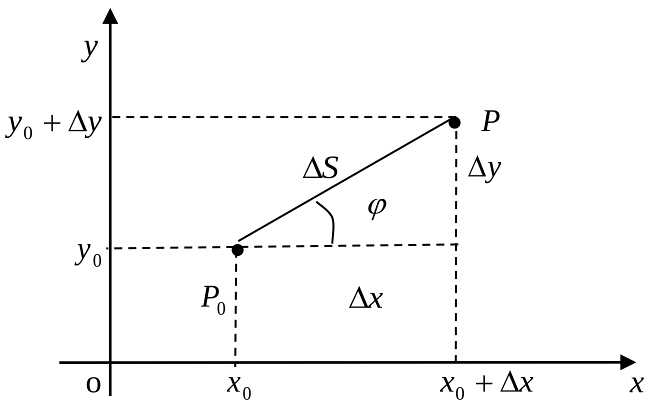
Si para todo incremento suficientemente pequeño de las variables independientes resulta $\Delta f<0$, la función tiene un **Máximo Relativo (o Local)** en el punto $P_0(x_0,y_0)$.

Y si para todo incremento suficientemente pequeño de las variables independientes resulta $\Delta f>0$, la función tiene un **Mínimo Relativo (o Local)** en el punto $P_0(x_0,y_0)$.

Estos Máximos y Mínimos reciben el nombre de **Extremos Relativos o Locales** de la función.

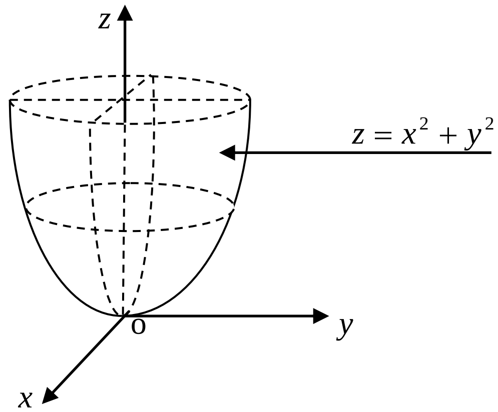
De todos lo Máximos Relativos, aquel en el que la función toma el mayor valor se denomina **Máximo absoluto.** Y de igual manera de todos lo Mínimos Relativos, aquel en el que la función toma el menor valor se denomina **Mínimo absoluto.**

De forma similar de pueden definir los Extremos de funciones con más de dos variables independientes.



Por ejemplo la función $z=x^2+y^2$ tiene un Mínimo en el punto $P(0,0)$, pues como x^2 e y^2 son siempre positivos para $x\neq 0$ e $y\neq 0$ y además $f(0,0)=0$ entonces:

$x^2+y^2>0$ es decir $f(x,y)>f(0,0)$ para $x\neq 0$ e $y\neq 0$



Condición Necesaria para la Existencia de Extremo

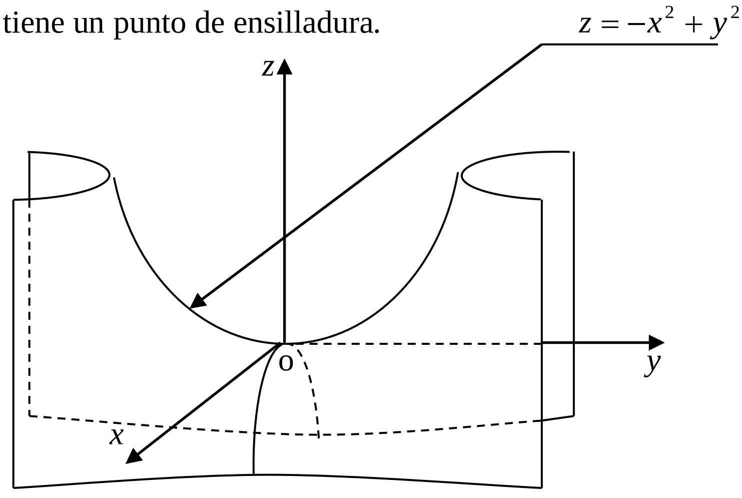
Si la función $z = f(x,y)$ *tiene un extremo en el punto* $P_0(x_0, y_0)$*, entonces sus derivadas parciales de primer orden, si existen, se anulan en este punto. Es decir* $\boxed{\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0}$

Para demostrarlo consideremos la función $g(x) = f(x, y_0)$ de una sola variable "*x*". Si por hipótesis *f* tiene un extremo relativo en (x_0, y_0) entonces *g* tiene un extremo relativo en (x_0), en este caso es $g'(x_0) = 0$, y como $g'(x_0) = \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$ entonces finalmente resulta: $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = 0$

De forma similar se puede demostrar que también se cumple que: $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0$

Esta condición si bien es necesaria, no es suficiente para demostrar la existencia de extremos de la función, pues hay funciones en las cuales en algunos puntos se anulan sus derivadas parciales y sin embargo no son extremos; son los llamados **Puntos de Ensilladura o Puntos Silla.**

Así por ejemplo la función $z = -x^2 + y^2$ tiene sus derivadas parciales $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -2x$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y$, podemos comprobar que éstas se anulan en el punto $P(0,0)$, y sin embargo la función **no** tiene un extremo en este punto, sino que tiene un punto de ensilladura.



Los puntos donde las derivadas parciales se anulan, se llaman **Puntos Críticos** o Puntos Estacionarios de la función. Si la función tiene algún extremo, este solo puede estar en un Punto Crítico.

Condición Suficiente para la Existencia de Extremo

Sea $z = f(x, y)$ una función continua y con derivadas parciales también continuas en un dominio que comprende al punto $P_0(x_0, y_0)$ y consideremos que éste es un Punto Crítico, es decir: $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$. La función tendrá o no un Extremo Relativo en dicho punto según se cumpla lo siguiente:

$$H(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x}\right]^2$$

Si $H(x_0, y_0) > 0$ y $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0$ entonces la función tiene un MÁXIMO RELATIVO en $P_0(x_0, y_0)$

Si $H(x_0, y_0) > 0$ y $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} > 0$ entonces la función tiene un MÍNIMO RELATIVO en $P_0(x_0, y_0)$

Si $H(x_0, y_0) < 0$ entonces la función tiene un PUNTO DE ENSILLADURA en $P_0(x_0, y_0)$

Si $H(x_0, y_0) = 0$ puede existir o no extremo, para determinarlo es necesario realizar un estudio más detallado

Nota:
Para facilitar su memorización a $H(x_0, y_0)$ se lo suele escribir en forma de determinante y recibe el nombre de **Hessiano**:

$$H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

Demostración

La Fórmula de Taylor para $n = 2$ de la función $z = f(x, y)$ en este caso se expresa:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2\right] + R_2$$

Por hipótesis las derivadas parciales de primer orden se anulan por ser P_0 un Punto Crítico. Entonces el incremento Δf de la función resulta:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

$$\Delta f = \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2\right] + R_2$$

Debemos analizar el signo de Δf para todo incremento suficientemente pequeño de las variables independientes, para ello vamos a trabajar sobre la última expresión, multiplicando y dividiendo por ΔS^2 al primer término de su segundo miembro:

$$\Delta f = \frac{\Delta S^2}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\frac{\Delta x^2}{\Delta S^2} + 2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x}\frac{\Delta x.\Delta y}{\Delta S^2} + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\frac{\Delta y^2}{\Delta S^2}\right] + R_2$$

Analizando el gráfico comprobamos que:

$$\frac{\Delta x}{\Delta S} = \cos\varphi \qquad \text{y} \qquad \frac{\Delta y}{\Delta S} = \operatorname{sen}\varphi$$

Reemplazando y expresando las derivadas parciales en forma resumida tendremos:

$$\boxed{\Delta f = \frac{\Delta S^2}{2!}\left(f_{xx}\cos^2\varphi + 2 f_{xy}\cos\varphi\cdot\operatorname{sen}\varphi + f_{yy}\operatorname{sen}^2\varphi\right) + R_2} \qquad \textbf{(1)}$$

Completemos el cuadrado de un binomio con los dos primeros términos dentro del paréntesis, para ello considerando $f_{xx} \neq 0$, multiplicamos y dividimos por f_{xx} dentro del corchete y luego sumamos y restamos $f_{xy}^2\operatorname{sen}^2\varphi$:

$$\Delta f = \frac{\Delta S^2}{2!}\left[\frac{f_{xx}^2\cos^2\varphi + 2 f_{xx} f_{xy}\cos\varphi\cdot\operatorname{sen}\varphi + f_{xy}^2\operatorname{sen}^2\varphi + f_{xx} f_{yy}\operatorname{sen}^2\varphi - f_{xy}^2\operatorname{sen}^2\varphi}{f_{xx}}\right] + R_2$$

$$\boxed{\Delta f = \frac{\Delta S^2}{2!}\left\{\frac{\left(f_{xx}\cos\varphi + f_{xy}\operatorname{sen}\varphi\right)^2 + \left(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2\right)\operatorname{sen}^2\varphi}{f_{xx}}\right\} + R_2} \qquad \textbf{(2)}$$

Si analizamos esta última expresión vemos que el signo de Δf depende del signo de:

$\left(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2\right)$ y de f_{xx} del denominador

Examinemos todas las posibilidades que se pueden presentar:

1. $\boxed{\left(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2\right) > 0 \qquad f_{xx} < 0}$

   Entonces en el numerador de la fracción de la expresión **(2)** tendremos la suma de dos magnitudes positivas que no se anulan simultáneamente. Pues la segunda se anula cuando incrementamos en la dirección en que resulta $\varphi = 0$, pero en este caso no se anula la primera que se anula cuando incrementamos en la dirección en que resulta $\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{f_{xx}}{f_{xy}}\right)$. *(Ver aclaración de esta última afirmación en "<u>Demostración 1</u>" al final de este capítulo).*
   Y como $R_2 \to 0$ cuando $\Delta S \to 0$, para todo incremento ΔS suficientemente pequeño tendremos que:
   $\boxed{\Delta f < 0}$ ó $\boxed{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) < f(x_0,y_0)}$

para todos los puntos $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ suficientemente próximos al punto $f(x_0, y_0)$.

Es decir que en este caso:
La función tiene un MÁXIMO RELATIVO en el punto considerado.

2. $\boxed{\left(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2\right) > 0 \qquad f_{xx} > 0}$

Razonando de forma similar que en el caso anterior, podemos determinar que ahora resulta siempre:

$\boxed{\Delta f > 0}$ ó $\boxed{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) > f(x_0, y_0)}$

para todos los puntos $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ suficientemente próximos al punto $f(x_0, y_0)$.
Es decir que en este caso:

La función tiene un MÍNIMO RELATIVO en el punto considerado.

3. $\boxed{\left(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2\right) < 0 \qquad f_{xx} > 0}$

En este caso la función no tiene ni Máximo ni Mínimo pues Δf cambia de signo al incrementar en una u otra dirección. Es decir que a partir del punto P_0 la función crece cuando tomamos incremento en una dirección y decrece cuando incrementamos en otra dirección.

En efecto, si incrementamos en la dirección $\varphi = 0$ el incremento resulta:

$$\Delta f = \frac{\Delta S^2}{2!} f_{xx} + R_2 > 0$$ La función crece.

Y si incrementamos en la dirección en que resulta $\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{f_{xx}}{f_{xy}}\right)$ el incremento será:

$$\Delta f = \frac{\Delta S^2}{2!}\left\{\frac{\left(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2\right)\operatorname{sen}^2\varphi}{f_{xx}}\right\} + R_2 < 0$$ La función decrece.

La función tiene un PUNTO DE ENSILLADURA en el punto considerado.

4. $\boxed{\left(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2\right) < 0 \qquad f_{xx} < 0}$

En este caso la función tampoco tiene extremo en el punto considerado. El estudio se realiza de modo similar al caso anterior.

5. $\boxed{\left(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2\right) < 0 \qquad f_{xx} = 0}$

Por lo tanto $f_{xy} \neq 0$, en este caso analizamos el signo de Δf por intermedio de la expresión **(1)** que al ser por hipótesis $f_{xx} = 0$ resulta:

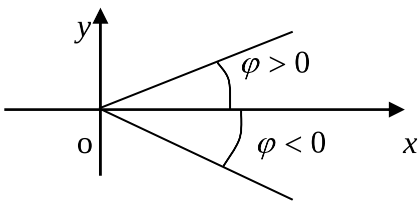
$$\Delta f = \frac{\Delta S^2}{2!}\left(2 f_{xy} \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi + f_{yy} \operatorname{sen}^2\varphi\right) + R_2$$

Sacamos factor común $\operatorname{sen}\varphi$ entro del paréntesis:

$$\Delta f = \frac{\Delta S^2}{2!} \operatorname{sen}\varphi \cdot \left(2 f_{xy} \cos\varphi + f_{yy} \operatorname{sen}\varphi\right) + R_2$$

Para valores suficientemente pequeños de φ la expresión $\left(2 f_{xy} \cos\varphi + f_{yy}\operatorname{sen}\varphi\right)$ conserva su signo, y su valor es próximo a $2 f_{xy}$ (ya que el valor de $\operatorname{sen}\varphi$ es muy pequeño y el valor de $\cos\varphi$ es próximo a 1).

En cambio el coeficiente $\operatorname{sen}\varphi$ del paréntesis cambia de signo al tomar φ mayor o menor que cero:



Tomando ΔS suficientemente pequeño para que $R_2 = c.\Delta S^3$ no influya en el resultado, el signo de Δf va a depender del signo de φ (es decir de los valores de Δx y Δy), por lo tanto en este caso la función tampoco tiene extremo.

6. $\boxed{\left(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2\right) = 0 \qquad \text{así por ejemplo} \qquad f_{xx} \neq 0}$

Analizando a expresión **(2)**, ésta resulta:

$$\Delta f = \frac{\Delta S^2}{2!}\left[\frac{\left(f_{xx}\cos\varphi + f_{xy}\operatorname{sen}\varphi\right)^2}{f_{xx}}\right] + R_2$$

Cuando incrementemos en la dirección en que resulte $\varphi = arctg\left(-\frac{f_{xx}}{f_{xy}}\right)$ resultará:

$$\Delta f = R_2$$

Que es el Término complementario de la Fórmula de Taylor cuyo valor y signo desconocemos, lo que nos impide determinar si hay o no extremo, por lo tanto será necesaria una investigación especial.

Resumen

Para determinar los Extremos Relativos de la función $z = f(x, y)$ procedemos así:

1- **Se determinan los puntos Críticos (Condición Necesaria)**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \text{Se determinan las raíces} \quad \begin{cases} (x_1, y_1) \\ \text{“} \\ \text{“} \\ (x_n, y_n) \end{cases} \quad \text{Puntos Críticos}$$

2- **Se analiza el signo del Hessiano para cada uno de los Puntos Críticos**

$$H(x_i, y_i) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{cases} > 0 \text{ hay un Extremo} \\[2ex] < 0 \text{ no hay extremo (hay Punto de Ensilladura)} \\[2ex] = 0 \text{ nada puede asegurarse} \end{cases}$$

3- **En los puntos (x_i, y_i) donde resulta $H_i > 0$ se determina el tipo de Extremo analizando el signo de: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ o $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (cuando hay Extremo ambas tienen el mismo signo)**

$$\frac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial x^2} \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial y^2} \begin{cases} < 0 \text{ hay un Máximo} \\[2ex] > 0 \text{ hay un Mínimo} \end{cases}$$

4- **Si se desea conocer la coordenada z_i del Extremo obtenido, obtenemos el valor de la función en el punto (x_i, y_i) correspondiente.**

Ejemplo 1:

Determinar los Extremos Relativos de la función $z=-x^3-\frac{3}{2}y^2+3xy+\frac{5}{2}$.

1- Determinamos los puntos Críticos

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-3x^2+3y=0\\[2ex]\dfrac{\partial z}{\partial y}=-3y+3x=0\end{cases}\qquad \textbf{Puntos Críticos}\quad\begin{cases}P_1(0,0)\\[2ex]P_2(1,1)\end{cases}$$

2- Analizamos el signo del Hessiano en cada uno de los Puntos Críticos:

$$H(x_i,y_i)=\begin{vmatrix}-6x & 3\\ 3 & -3\end{vmatrix}=18x-9\ \begin{cases}H_1=-9<0 & \text{No hay extremo en } P_1(0,0)\ \textbf{(Es un punto de Ensilladura)}\\[2ex] H_2=9>0 & \textbf{Si hay Extremo en } P_2(1,1)\end{cases}$$

3- Determinamos el tipo de Extremo Relativo en el punto $P_2(1,1)$

$$\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial y^2}=-3<0$$ **Hay un MÁXIMO RELATIVO EN EL PUNTO** $\boxed{P_2(1,1)}$.

4- Determinamos z_2

$$z_2=-1^3-\frac{3}{2}\cdot 1^2+3.1.1+\frac{5}{2}=3$$

Finalmente resulta: $\boxed{M_2(1;1;3)\quad \text{MÁXIMO RELATIVO}}$

Ejemplo 2:

Determinar los Extremos Relativos de la función $z=x^3+3x^2-4xy+y^2$.

Rta.: $\boxed{M_2(\frac{2}{3};\frac{4}{3};-\frac{4}{27})\quad \text{MÍNIMO RELATIVO}}$

MÁXIMOS Y MÍNIMOS CONDICIONADOS

Consiste en determinar los extremos de una función de varias variables que no son todas independientes, sino que están relacionadas entre sí mediante ciertas condiciones adicionales.

Ejemplo:
Se debe construir un recipiente cilíndrico de chapa con tapa con una capacidad de 2 litros. ¿Qué dimensiones debe tener si se desea emplear la menor cantidad posible de material en su construcción?
La cantidad de material necesario en cm^2 es:

$$f(D,H) = \frac{\pi D^2}{2} + \pi DH \qquad (1)$$

La condición es que el recipiente tenga una capacidad de 2 litros (2000 cm^3):

$$\varphi(D,H) = \frac{\pi D^2 H}{4} - 2000 = 0 \qquad (2)$$

Debemos hallar el mínimo de la función (1) que cumpla con la condición (2). Al existir esta condición (2), entonces la función (1) es de una sola variable independiente.

Estudiaremos en principio el caso de Extremos Condicionados de una función de dos variables, relacionadas por una sola condición. Es decir hallaremos los Extremos de la función:

$$z = f(x,y) \qquad (1)$$

Estando ***x*** e ***y*** relacionadas por la condición:

$$\varphi(x,y) = 0 \qquad (2)$$

Al existir la condición (2) solo una de las variables será independiente (por ejemplo ***x***), pues la otra (por ejemplo ***y***) pasa a depender de ella por intermedio de la condición..
Veremos dos métodos para hallar Máximos y Mínimos Condicionados:

Método Práctico

Sea tener que determinar los Extremos de la función:

$$z = f(x,y) \qquad (1)$$

Que cumplan con la condición:

$$\varphi(x,y) = 0 \qquad (2)$$

Si de la condición despejamos una de las variables (por ejemplo ***y***) y se sustituye ese valor de ***y*** en la función (1), obtendremos la función:

$$z = F(x)$$

Los Extremos relativos de esta función son los Extremos de la función (1) que cumplen con la condición (2).
Si bien a primera vista este método aparenta ser de muy fácil aplicación, en realidad presenta dificultades que pueden resultar insuperables. Por un lado estamos limitados por la cantidad de variables, pues solo sabemos calcular Máximos y Mínimos Relativos de funciones de hasta dos variables independientes. Y por otro lado no siempre resulta posible explicitar una de las variables de la condición (2), y suele resultar más simple aplicar el método que veremos seguidamente.

Método del Multiplicador de Lagrange
Sea tener que determinar los Extremos de la función:

$$z = f(x, y) \qquad (1)$$

Que cumplan con la condición:

$$\varphi(x, y) = 0 \qquad (2)$$

Partamos de la hipótesis que la (2) no es explicitable respecto a ninguna de sus variables, entonces procedemos así:
Vimos que al existir la condición (2) solo una da las variables es independiente (por ejemplo ***x***); es decir que la (1) es una función de una sola variable ***x***. Derivemos a la (1) como función compuesta:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

La condición necesaria para la existencia de extremo es que la derivada de esta función (1) se anule, es decir $\frac{dz}{dx} = 0$, es decir:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (3)$$

Derivemos también a la condición (2) con respecto a ***x*** como función compuesta:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (4)$$

De ambas expresiones despejamos $\frac{dy}{dx}$ e igualamos lo obtenido:

$$-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}$$

que también podemos expresar:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} \qquad (5)$$

La expresión (5) se cumple para todos los puntos donde hay un posible extremo.
Igualamos la (5) al Multiplicador de Lagrange:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = -\lambda$$

y podemos obtener

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Estas expresiones nos permiten obtener una relación entre ***x*** e ***y***. Uniéndolas a la Ecuación de Condición (2) se pueden obtener los posibles extremos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

De este Sistema de Tres Ecuaciones determinamos los valores de x, y, λ que son las incógnitas; λ desempeñó un papel auxiliar y ya no es necesaria.
Las ecuaciones (6) son condición necesaria (pero no suficiente) para la existencia de extremo, por lo tanto este método no nos determina la naturaleza del Punto Crítico (si es extremo o no). Para ello hace falta realizar un análisis adicional. Solucionando problemas concretos, se logra en general determinar la naturaleza del Punto Crítico en base al carácter del mismo problema.
Tratar de llegar a la condición suficiente recurriendo a las derivadas parciales sucesivas, como lo hicimos con los Máximos y Mínimos Relativos puede resultar muy complicado.

Para facilitar la memorización de este método, observemos que las ecuaciones (6) son las derivadas parciales con respecto a x, y, λ de la función (llamada Función Auxiliar de Lagrange):

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) \qquad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= \varphi(x, y) \end{aligned}$$

Resumen

Para determinar los posibles extremos de la función:

$$z = f(x, y) \qquad (1)$$

Que cumplan con la condición:

$$\varphi(x, y) = 0 \qquad (2)$$

Se plantea la **Función Auxiliar de Lagrange**:

$$\boxed{F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda.\varphi(x, y)} \qquad (7)$$

Luego se igualan a cero sus derivadas parciales con respecto a x, y, λ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

Finalmente se resuelve este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Este método puede ser aplicado en el estudio de Extremos condicionados de una función de "***n***" variables relacionadas mediante "***m***" ecuaciones de condición. Debiendo ser ***m<n***.

Sea en general calcular los Extremos de la función:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n) \qquad (1')$$

Que cumpla con las condiciones:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n) = 0 \\ \quad ” \\ \quad ” \\ \quad ” \\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n) = 0 \end{cases} \qquad (2')$$

Se plantea la **Función Auxiliar de Lagrange**:

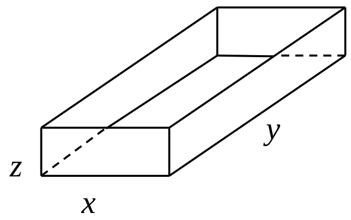
$$\boxed{F(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) + \lambda_1\varphi_1(x_1, \ldots\ldots x_n) + \lambda_2\varphi_2(x_1, \ldots\ldots x_n) + \ldots\ldots + \lambda_m\varphi_m(x_1, \ldots\ldots x_n)} \quad (7')$$

Derivamos la (7') con respecto a cada una de sus variables:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \\ \quad ” \\ \quad ” \\ \quad ” \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_n} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = \varphi_1(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = \varphi_2(x, y) = 0 \\ \quad ” \\ \quad ” \\ \quad ” \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_m} = \varphi_m(x, y) = 0 \end{cases} \qquad (8')$$

Determinando de este sistema los valores de $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ buscados, como así también las incógnitas auxiliares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_m$.

Ejemplo 1:
Se debe construir una caja de cartón con forma de paralelepípedo rectangular sin tapa, con una capacidad de 32 cm^3. Determinar sus dimensiones de manera que la superficie total de sus caras sea mínima.



Debemos calcular los Extremos de la función:

$$f(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz \qquad (1)$$

Que cumplan con la condición:

$$\varphi(x,y,z) = xyz - 32 = 0 \qquad (2)$$

Planteamos la **Función Auxiliar de Lagrange**:

$$F(x,y,z,\lambda) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - 32) \qquad (7)$$

Igualamos a cero sus derivadas parciales con respecto a x, y, z, λ:

$$\begin{cases} y + 2z + \lambda yz = 0 \\ x + 2z + \lambda xz = 0 \\ 2x + 2y + \lambda xy = 0 \\ xyz - 32 = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

No hay reglas establecidas para resolver estos sistemas, de acuerdo a las características que tenga se elige la forma que se considere en ese momento más apropiada.
Una forma puede ser despejar λ de las tres primeras ecuaciones:

$$\lambda = -\frac{y+2z}{yz}, \qquad \lambda = -\frac{x+2z}{xz}, \qquad \lambda = -\frac{2x+2y}{xy}$$

$$-\frac{y+2z}{yz} = -\frac{x+2z}{xz} \quad \Rightarrow \quad xyz + 2xz^2 = xyz + 2yz^2 \quad \Rightarrow \quad x = y$$

$$-\frac{x+2z}{xz} = -\frac{2x+2y}{xy} \quad \Rightarrow \quad x^2y + 2xyz = 2x^2z + 2xyz \quad \Rightarrow \quad y = 2z$$

$$\left.\begin{array}{l} x = y \\ y = 2z \end{array}\right\} \quad x = y = 2z$$

Y de la cuarta ecuación (es decir la Condición) obtenemos las dimensiones de la caja:

$$xyz - 32 = 2z.2z.z - 32 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = 2 \end{cases}$$

Ejemplo 2:

Determinar tres números positivos, tales que su producto sea 27 y su suma sea mínima.

Debemos calcular los Extremos de la función: $f(x, y, z) = x + y + z$
Que cumplan con la condición: $\varphi(x, y, z) = xyz - 27 = 0$

Rta.: Los tres números positivos son iguales a 3.

Ejemplo 3:

Dividir "**a**" en tres partes de tal manera que su producto sea máximo.

Debemos calcular los Extremos de la función: $f(x, y, z) = xyz$
Que cumplan con la condición: $\varphi(x, y, z) = x + y + z - a = 0$

Rta.: Se debe dividir a "**a**" en tres partes iguales.

Demostración 1:

Para que se anule la expresión $\left(f_{xx}\cos\varphi + f_{xy}\operatorname{sen}\varphi\right)^2$

Se debe cumplir que $f_{xx}\cos\varphi + f_{xy}\operatorname{sen}\varphi = 0$

$$f_{xy}\operatorname{sen}\varphi = -f_{xx}\cos\varphi$$

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{f_{xx}}{f_{xy}}$$

$$tg\varphi = -\frac{f_{xx}}{f_{xy}}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{f_{xx}}{f_{xy}}\right)$$