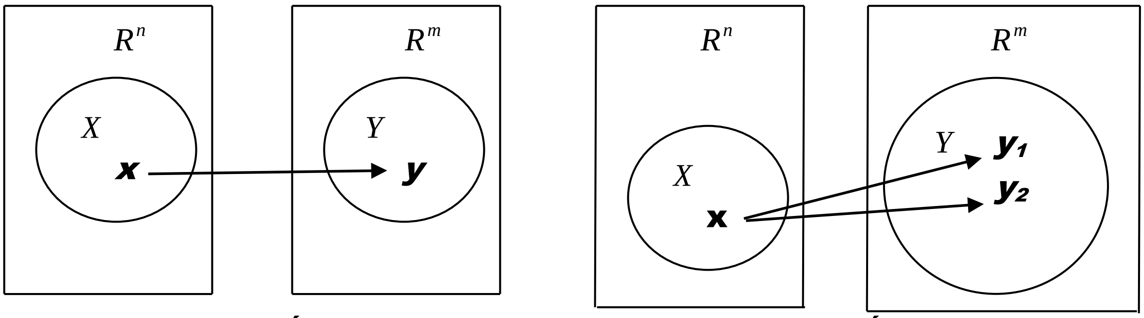
CAPÍTULO 1

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES INDEPENDIENTES

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Consideremos los Espacios R^n y R^m (n y m números naturales, excluido el cero).
Sean los conjuntos $X \subseteq R^n$ e $Y \subseteq R^m$.

Llamaremos función f a toda relación que hace corresponder a cada elemento
$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) \in X$ uno y solo un elemento $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots, y_m) \in Y$.



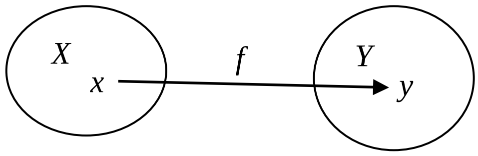
FUNCIÓN **RELACIÓN**

$R^n \xrightarrow{f} R^m$ y se lee f aplica R^n en R^m

Funciones Escalares

En Análisis Matemático I hemos trabajado con funciones de una sola variable independiente, de la forma:

$y = f(x)$ $\quad R \xrightarrow{f} R$



$X \subseteq R$ $\quad Y \subseteq R$

Estas funciones reciben el nombre de Funciones Escalares, o también Funciones Escalares de Variable Escalar.

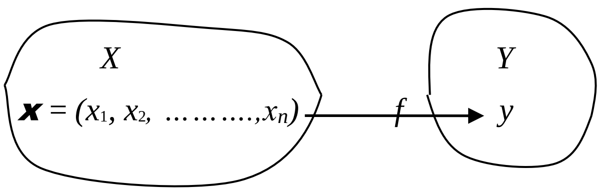
Pero al analizar distintos fenómenos nos lleva a la necesidad de estudiar funciones que contienen un mayor número de variables, es por ello que en Análisis Matemático II centraremos nuestra atención en este tipo de funciones.

Campos Escalares (ó Funciones de Varias Variables independientes)

Los Campos Escalares son Funciones de dos o más variables independientes a las que a un conjunto de *"n"* variables independientes le corresponden como imagen un número real o escalar.

$y = f(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n)$

$y = f(\boldsymbol{x})$



$R^n \xrightarrow{f} R$ $\quad X \subseteq R^n$ $\quad Y \subseteq R$

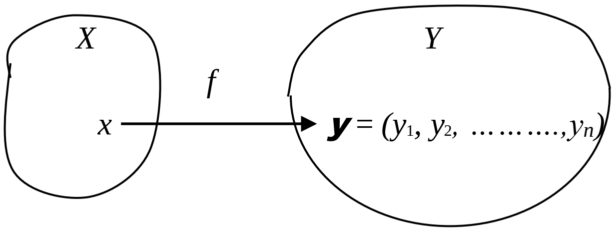
Las llamaremos Campos Escalares o simplemente Funciones de Varias Variables.
También se las conoce como Funciones Escalares de Variable Vectorial.

Un ejemplo de este tipo de funciones es la temperatura: a cada punto del espacio le corresponde un valor de la temperatura.

Funciones Vectoriales

La definición de Función Vectorial equivale a la definición de *"m"* funciones escalares:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x) \\ y_2 = f_2(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m = f_m(x) \end{cases}$$



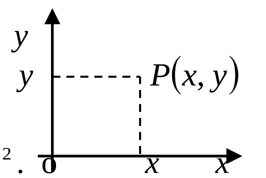
$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(x)$ $\quad R \xrightarrow{F} R^m$ $\quad X \subseteq R$ $\quad Y \subseteq R^m$

Las Funciones Vectoriales son funciones a las que a una variable independiente le corresponde un conjunto de *"m"* números reales o un vector de *"m"* componentes.

Nos interesan en especial las Funciones Vectoriales cuyas imágenes son vectores de dos o tres dimensiones. Se utilizan, por ejemplo para describir curvas, movimientos de partículas, etc..

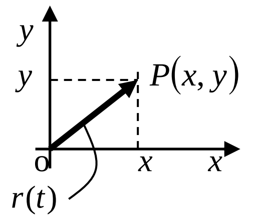
En R^2 una Función Vectorial, a cada número real, le asigna como imagen un vector de dos componentes o un par de números reales.

En forma paramétrica se la simboliza $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$



A cada valor de t le corresponde un par de valores de (x, y) es decir un punto en R^2.
A t se lo denomina parámetro.

O en forma vectorial $\quad r(t) = [f(t), g(t)] = f(t)i + g(t)j$

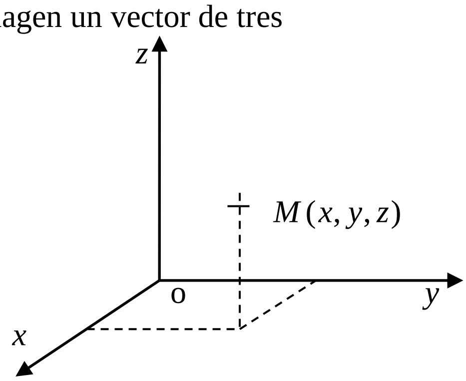


Para cada valor de t en el dominio de r existe un único vector denominado $r(t)$.

$f(t), g(t)$ son las funciones componentes del vector r.

En R^3 una Función Vectorial, a cada número real, le asigna como imagen un vector de tres componentes o una terna de números reales.

En forma paramétrica se la simboliza $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$

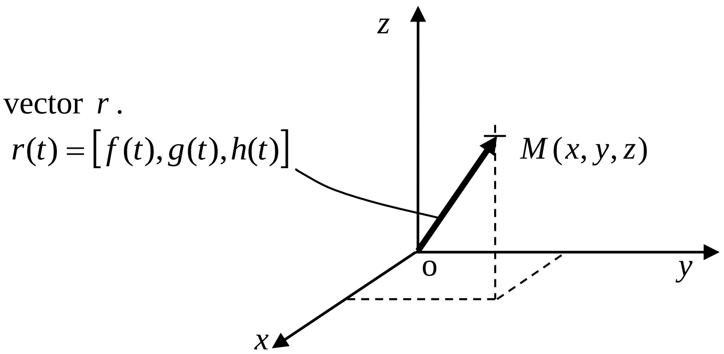


A cada valor de t le corresponde una terna de valores de (x, y, z) es decir un punto en R^3.

O en forma vectorial $\qquad r(t) = \left[f(t), g(t), h(t) \right] = f(t)i + g(t)j + h(t)k$

Para cada valor de t en el dominio de r existe un único vector denominado $r(t)$.

$f(t), g(t), h(t)$ son las funciones componentes del vector r.

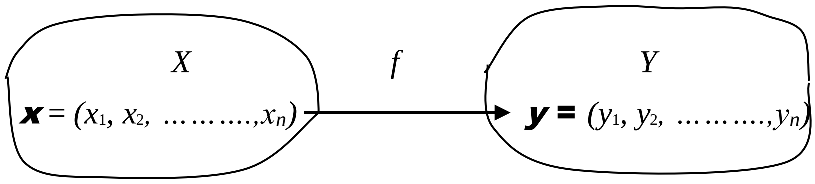


En general utilizamos la letra t como variable independiente pues el tiempo es la variable independiente en la mayoría de las aplicaciones de las Funciones Vectoriales.

Campos Vectoriales

Los Campos Vectoriales son funciones a las que a un conjunto de *"n"* variables independientes le corresponden como imagen un conjunto de *"m"* valores (es decir un vector).

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots\dots\dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots\dots\dots, x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \dots\dots\dots, x_n) \end{cases}$$

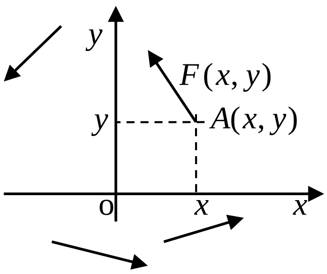


$X \subseteq R^n \qquad\qquad Y \subseteq R^m$

$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \qquad\qquad R^n \xrightarrow{F} R^m$

Como ejemplos de Campos Vectoriales podemos mencionar el Campo Eléctrico, Campo Magnético, Campo gravitacional, Campo de Velocidad de un fluido, etc.

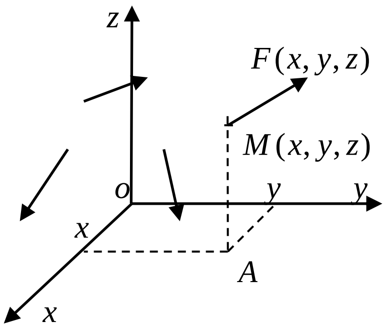
Estudiaremos en particular los Campos Vectoriales en R^2 o R^3.



Sea D una región plana R^2. **Un campo vectorial** en R^2 es una función F que asigna a cada punto $A(x, y)$ en D un vector bidimensional $F(x, y)$.

$F(x, y) = P(x, y)i + Q(x, y)j \qquad\qquad R^2 \longrightarrow R^2$

$F(x, y) = \left[P(x, y), Q(x, y) \right]$



Y en tres dimensiones podemos definir:
Sea E un subconjunto de R^3. **Un Campo Vectorial** en R^3 es una función F que asigna a cada punto $M(x,y,z)$ en E un vector tridimensional $F(x,y,z)$.

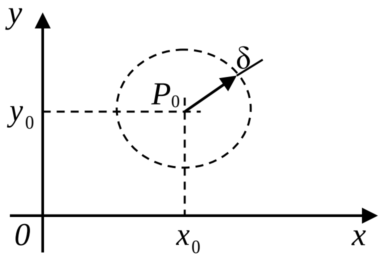
$$F(x,y,z) = P(x,y,z)i + Q(x,y,z)j + R(x,y,z)k$$

$$F(x,y,z) = [P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)] \qquad R^3 \longrightarrow R^3$$

Conjuntos, entornos, puntos

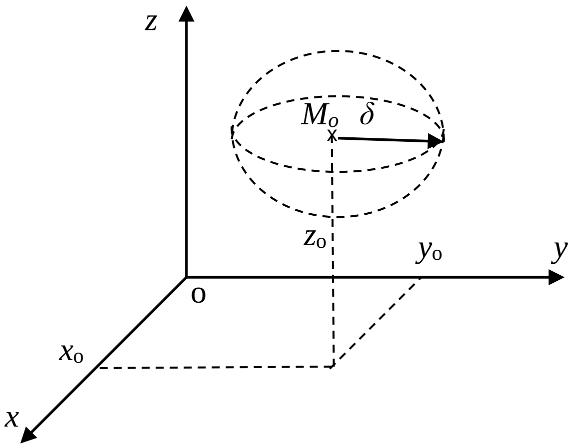
En R^2 el **entorno de un punto** $P_0(x_0, y_0)$ y de radio δ es el conjunto de puntos ubicados en el interior de un círculo de centro P_0 y radio δ.

$$\mathrm{E}(P_0,\delta) = \left\{(x,y)/\, 0 \le +\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\right\}.$$



De igual manera en R^3 el **entorno de un punto** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ y de radio δ es el conjunto de puntos ubicados en el interior de una esfera de centro M_0 y radio δ.

$$\mathrm{E}(M_0,\delta) = \left\{(x,y,z)/\, 0 \le +\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} < \delta\right\}$$



Para espacios de mayores dimensiones $[R^n$ para $n \ge 3]$ la definición es similar, pero en estos casos no admite representación gráfica.

Un **entorno de un punto es reducido** cuando se excluye su centro.

En R^2: $\mathrm{E}'(P_0,\delta) = \left\{(x,y)/\, 0 < +\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\right\}$ ó

$$\mathrm{E}'(P_0,\delta) = \mathrm{E}(P_0,\delta) - \{P_0\}$$

En R^3: $\qquad E'(M_0,\delta)=\left\{(x,y,z)/\,0<+\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta\right\}$ ó

$$E'(M_0,\delta)=E(M_0,\delta)-\{M_0\}$$

El punto perteneciente a un conjunto es un **punto interior** del mismo, si existe un entorno suyo cuyos puntos pertenecen todos a dicho conjunto.

Un punto no perteneciente a un conjunto es un **punto exterior** si existe un entorno suyo en donde ninguno de sus puntos pertenece a dicho conjunto.

Un punto perteneciente o no al conjunto es un **punto frontera** si no es interior ni exterior. Es decir que en un entorno suyo hay puntos que pertenecen al conjunto y otros que no pertenecen.

Un punto *P* perteneciente o no a un conjunto es un **punto de acumulación** si en todo entorno reducido suyo hay algún punto de dicho conjunto, distintos de *P*.

Un punto perteneciente a un conjunto es un **punto aislado** si en un entorno reducido suyo ninguno de sus puntos pertenecen a dicho conjunto.

La **frontera** de un conjunto está formada por la totalidad de los puntos frontera de dicho conjunto.

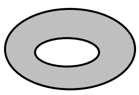
Conjunto abierto es el que está formado solo por los puntos interiores.

Conjunto cerrado es el que contiene también a la frontera.

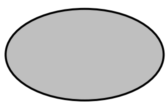
Un conjunto es **conexo** si dos de sus puntos pueden ser unidos por alguna poligonal íntegramente contenida en el conjunto.

Un conjunto es **simplemente conexo** cuando cualquier poligonal cerrada trazada en él, puede reducirse a un punto, por deformación continua sin salirse del conjunto.

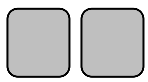
Conjunto conexo



Conjunto simplemente conexo



Conjunto no conexo



FUNCIONES DE DOS VARIABLES INDEPENDIENTES

*"Se dice que **z** es una Función de dos Variables Independientes (x, y) definida en un dominio **D** si a cada par de valores (x, y) tomados de ese dominio **D** le corresponde un solo valor de **z**".*

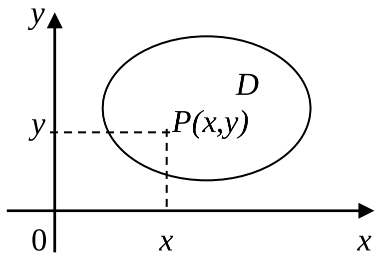
La simbolizamos así: $z = f(x, y)$ $R^2 \xrightarrow{f} R$

Puede suceder que la función *"z"* no esté definida para todos los valores arbitrarios de *x* e *y*.
Las variables *"x* e *y"* son la **variables independientes** y *"z"* es la **variable dependiente o función**.

Dominio

Definimos como Dominio de existencia de una función, al conjunto de pares de valores de (x, y) para los que está definida la función $z = f(x, y)$.

A cada par de valores de "*x* e *y*" le corresponde un punto en el plano *0xy*, el conjunto de estos puntos se denomina Dominio de la función.



$z = f(x, y)$ o $z = f(P)$

El Dominio es un subconjunto del producto cartesiano RxR, es decir $D_f \subseteq R^2$.

Frontera de un Dominio es la línea que limita al mismo. Y los puntos del Dominio que no pertenecen a la Frontera se denominan **puntos interiores** del Dominio.

Dominio abierto es el que está formado solo por puntos interiores.

Dominio cerrado es el que incluye también los puntos de la frontera.

Un dominio es **acotado** si existe una magnitud constante *C* tal que $|OP| < C$. Siendo *OP* la distancia entre el origen de coordenadas y todo punto *P* del dominio.

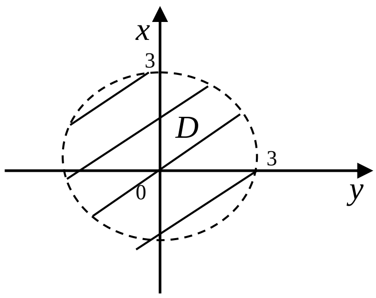
Imagen

Imagen o Rango de la función $z = f(x, y)$ es el conjunto de valores que toma *"z"* para todos los puntos que conforman el dominio. Es un subconjunto de los números reales, es decir $I_f \subseteq R$.

Ejemplo: determinemos el Dominio y la Imagen de la función $z = \dfrac{1}{+\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$.

Hay dos restricciones: el denominador debe ser $\sqrt{9 - x^2 - y^2} \neq 0$ y además el radicando debe ser $9 - x^2 - y^2 \geq 0$.

Por lo tanto el Dominio de la función resulta: $D_f = \{(x, y) \in R^2 / x^2 + y^2 < 9\}$



Es decir que el Dominio está formado por todos los puntos interiores del círculo de radio 3 y centro en el origen de coordenadas.

Y la Imagen de la función es: $I_f = \left\{ z \in R \,/\, z \geq \frac{1}{3} \right\}$

Funciones Explícitas

Una función está expresada en forma explícita cuando está dada de la forma: $z = f(x,y)$.

Por ejemplo: $z = 3x^2y - 2y^3$

Funciones Implícitas

Las funciones implícitas son las que están expresadas de la siguiente forma: $f(x,y,z) = 0$

Por ejemplo: $4x^3z - y + 5 = 0$

Funciones de más de dos variables

Lo definido para funciones de dos variables independientes puede extenderse a funciones con un número mayor de variables sin inconveniente:

Definimos: ***y*** *es una* ***función de "n" variables independientes*** $(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n)$ *si a cada conjunto de valores de las variables* $(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n)$ *le corresponde un solo valor de* ***y***.

$$y = f(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n)$$

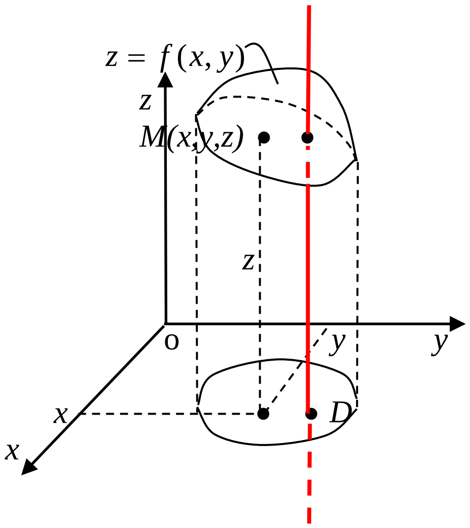
En una función de tres variables independientes de la forma $u = f(x,y,z)$, el dominio esta definido en el espacio de coordenadas *0xyz*. El dominio es un subconjunto del producto cartesiano $RxRxR$, es decir $D_f \subseteq R^3$.

En el caso de funciones de cuatro o más variables independientes es imposible determinar geométricamente el dominio correspondiente.

Representación gráfica de las funciones de dos variables independientes

Consideremos la función $z = f(x,y)$

Está definida en el dominio *D* del plano de coordenadas cartesianas *0xy*.
Y puede ser representada en el espacio de coordenadas cartesianas *0xyz.*



Si por cada punto (x,y) del dominio *D* trazamos una perpendicular al plano *0xy*, y tomamos un segmento de longitud igual a $f(x,y)$ obtendremos en el espacio un punto $M(x,y,z)$.

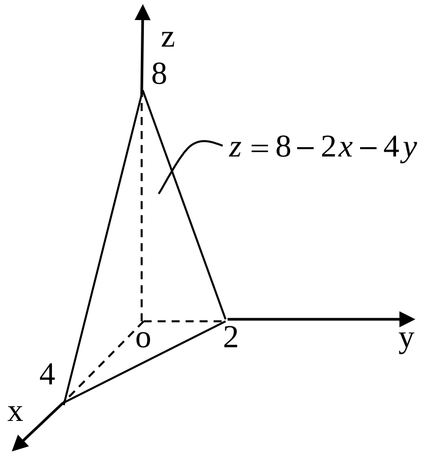
El lugar geométrico de todos los puntos *M* que satisfacen a La función $z = f(x,y)$ se llama gráfica de dicha función.

Una función de dos variables independientes nos define una <u>SUPERFICIE EN EL ESPACIO</u>.

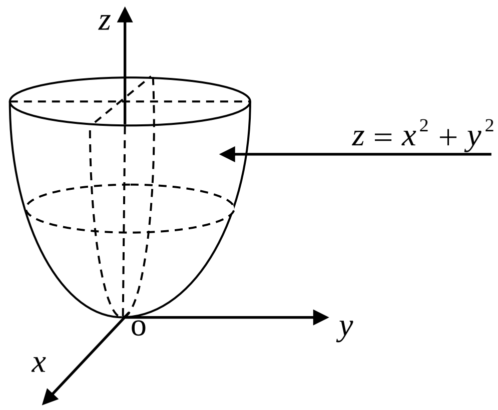
La proyección de dicha superficie sobre el plano *0xy* es el dominio de la función.

Cada recta perpendicular al plano *0xy* que pasa por un punto del dominio corta a la superficie $z = f(x,y)$ en un solo punto.

Ejemplos: Grafiquemos la función $z = 8 - 2x - 4y$.
Es un plano en el espacio de coordenada *0xy*.
Su dominio es todo el plano *0xy*. Es decir $D_f = R^2$ y su Imagen $I_f = R$.
Dibujemos la porción de este plano en el primer octante:



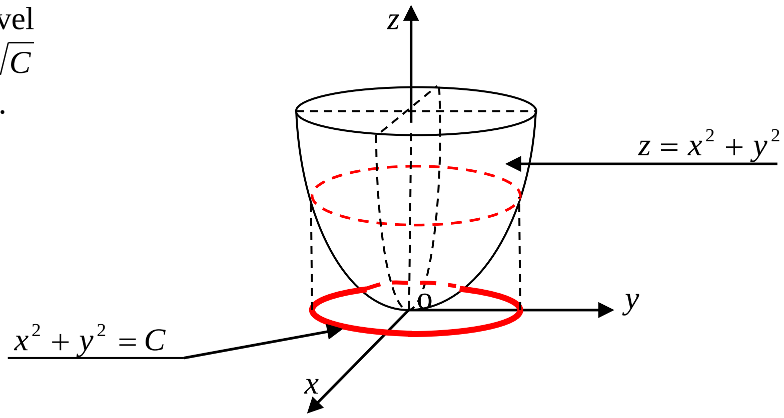
Grafiquemos ahora la función $z = x^2 + y^2$.Su gráfica es un paraboloide en revolución.
Su dominio es $D_f = R^2$ y su Imagen $I_f = \{z \in R / z \geq 0\}$



Nota:
No se pueden representar gráficamente funciones de tres o más variables independientes.

Líneas de Nivel

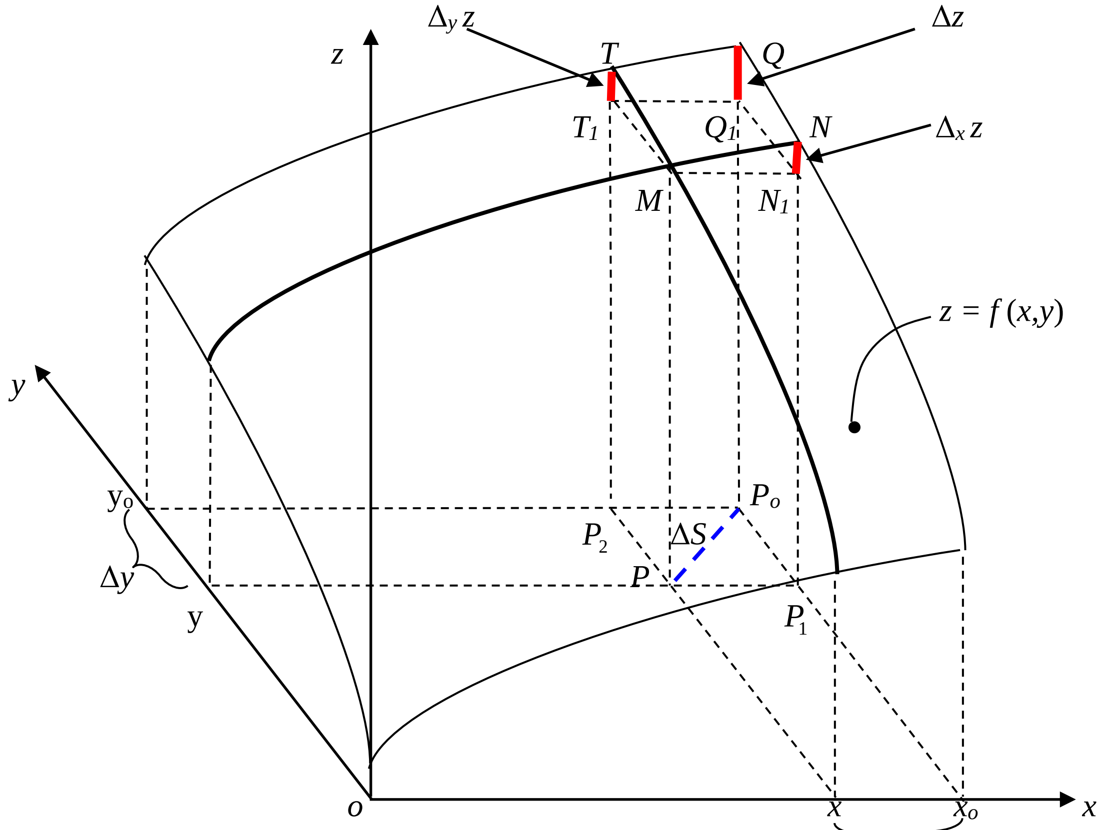
Líneas o Curvas de Nivel de una superficie $z = f(x, y)$*, es el conjunto de todos los puntos* (x, y) *en los que la función toma el mismo valor.*
Es decir que es la proyección, sobre el plano *0xy*, de la intersección entre la superficie y un plano paralelo al *0xy*.
Ejemplo:
Dada la función $z = x^2 + y^2$. Las Líneas de Nivel de esta superficie están representadas por la ecuación: $\boxed{x^2 + y^2 = C}$, siendo C una constante.
En este ejemplo, las Líneas de Nivel son circunferencias de radio $R = \sqrt{C}$ y centro en el origen de coordenas.



Superficies de Nivel

En el caso de una función de tres variables independientes podemos definir:
Superficies de Nivel de una función $u = f(x, y, z)$, *es el conjunto de todos los puntos* (x, y, z) *en los que la función toma el mismo valor.*
Cada una de estas superficies está dada por la ecuación $f(x, y, z) = C$.
Si por ejemplo $u = f(x, y, z)$ nos representa la temperatura en cada punto del dominio, $f(x, y, z) = C$ indicará un conjunto de puntos en los que la temperatura tiene el mismo valor y que forman una superficie en el espacio de coordenadas *0xyz*.

INCREMENTO TOTAL Y PARCIAL DE UNA FUNCIÓN



$\Delta S = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ $\qquad$ $\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

Si analizamos la curva ***MN*** formada por la intersección de la superficie $z = f(x, y)$ y el plano $y = cte.$ vemos que al desplazarnos a lo largo de la misma, **z** variará solo en función de **x**.
Si incrementamos a la variable independiente **x** en $\Delta x = \overline{PP_1} = \overline{MN_1}$ obtendremos el
Incremento Parcial de *z* respecto de *x* (es el segmento $\overline{NN_1}$ de la figura):

$$\boxed{\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}$$

De igual manera, considerando a $x = cte.$ y dando a **y** un incremento $\Delta y = \overline{PP_2} = \overline{MT_1}$ obtendremos el
Incremento Parcial de *z* respecto de *y* (que es el segmento $\overline{TT_1}$ de la figura):

$$\boxed{\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}$$

Si incrementamos simultáneamente a **x** en **Δx** y a **y** en **Δy** obtendremos el
Incremento Total de la función (segmento $\overline{QQ_1}$ de la figura):

$$\boxed{\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}$$

De forma similar se pueden determinar los incrementos de funciones con un mayor número de variables.

LÍMITES DOBLES O SIMULTÁNEOS

Dada la función $z = f(x, y)$ definida en un dominio *D*, podemos definir límite de esta función cuando en punto $P(x, y)$ se aproxima al punto $P_0(x_0, y_0)$ de la siguiente manera:
"$\lim f(x, y)$ *es igual a L si para cualquier número* $\varepsilon > 0$ *existe un número* $\delta > 0$ *tal que* $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ *para* $0 < \Delta S < \delta$*",* es decir:

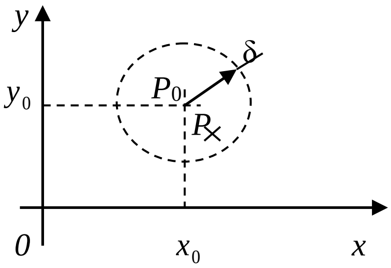
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L \quad \Leftrightarrow \quad |f(x, y) - L| < \varepsilon \quad \text{para} \quad 0 < \Delta S < \delta$$

Siendo P_0 un punto de acumulación del dominio D de dicha función y ΔS la distancia entre los puntos P y P_0:

$$\Delta S = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \qquad \text{o} \qquad \Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

También suele indicarse:

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y) = L$$

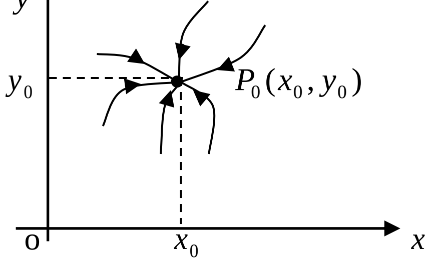


Esta definición implica que por más pequeño que sea ε [diferencia entre $f(x, y)$ y *L*] siempre existe un entorno reducido $\mathrm{E}'(P_0, \delta)$ dentro del cual están los puntos $P(x, y)$.
Se ha considerado un entorno reducido de $P_0(x_0, y_0)$, pues no interesa lo que sucede en el punto, donde la función puede no estar definida o tener un valor distinto a *L*.
$P_0(x_0, y_0)$ debe ser un punto de acumulación pues a su alrededor debe haber puntos $P(x, y)$ que pertenezcan al dominio de la función.
El radio δ depende de ε, pues cuanto menores sean los valores de ε, los puntos $P(x, y)$ se encontrarán más cerca de $P_0(x_0, y_0)$ y menor resultará δ.

El concepto de Límite Doble para una función de dos variables independientes es el mismo que el de Límite Simple de una función de una sola variable independiente. Existe sin embargo una diferencia sustancial entre uno y otro caso:

En el segundo existen únicamente dos trayectorias posibles para $x \to x_0$ (por izquierda y por derecha), en consecuencia basta calcular los límites izquierdo y derecho, y si en estas condiciones los límites son iguales decimos que la función tiene límite para $x \to x_0$.

Pero en el caso de la función $z = f(x, y)$, el punto $P(x, y)$ es un punto en el plano *0xy*, y existen infinitas formas en que $P(x, y)$ puede aproximarse a $P_0(x_0, y_0)$.



Una forma de asegurar la existencia de límite es calcularlo aplicando la definición. Pero veamos un ejemplo para demostrar que ésta no es una tarea sencilla.

Ejemplo 1:

Demostremos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2} = 0$ aplicando la definición de límite.

Para ello debemos demostrar que para cualquier número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon \qquad \text{para} \qquad 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$

Es decir:

$$\left|\frac{2xy^2}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon \qquad \text{para} \qquad 0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta \qquad \text{o sea}$$

$$\left|\frac{2xy^2}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon \qquad \text{para} \qquad 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

Vemos que:

$$\left|\frac{2xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq 2|x| \qquad \text{(a)}$$

Y por otro lado:

$$|x| \leq \sqrt{x^2+y^2} \qquad |x| < \delta \qquad 2.|x| < 2\delta \qquad \text{(b)}$$

Eligiendo $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ y analizando (a) y (b) tendremos:

$$\left|\frac{2xy^2}{x^2+y^2} - 0\right| \leq 2\sqrt{x^2+y^2} < 2\delta = \varepsilon$$

Por lo tanto debido a la definición de límites dobles queda demostrado que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^2-y^2} = 0$$

Como vemos no es práctico calcular límites aplicando la definición.
Veamos otro camino para determinar si una función tiene Límites Dobles ó Simultáneos.

Cálculo de Límites Dobles ó Simultáneos

Si deseamos calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ primero reemplazamos los valores de *x* e *y* por las coordenadas del punto $P_0(x_0, y_0)$ y analizamos lo obtenido.

Ejemplo 2: $\lim\limits_{(x,y)\to(3,1)} \left(xy - y^2\right) = 2$

Por cualquier camino que nos aproximemos al punto $P_0(3,1)$ los valores de la función tenderán a 2.
Este límite se denomina Límite Doble ó Simultáneo, porque ambas variables *x* e *y* tienden simultáneamente a 3 y 1 respectivamente.
En este caso decimos que la función tiene Límite Doble ó Simultáneo y es $L = 2$.

Ejemplo 3: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}3xy}{x} = \dfrac{0}{0}$ salvamos la indeterminación:

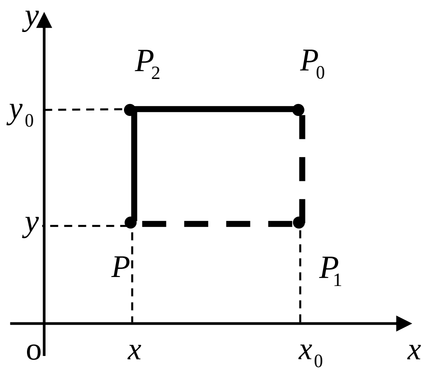
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}3xy}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3y\operatorname{sen}3xy}{3xy} = \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} 3y\right) \times \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}3xy}{3xy}\right) = 0 \times 1 = 0$$

La función tiene Límite Doble ó Simultáneo y es $L = 0$.

Ejemplo 4: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2+y}{x^2-y} = \dfrac{0}{0}$

Obtenemos una indeterminación que no puede ser salvada. En estos casos debemos calcular límite por algunos de los infinitos caminos por los que nos podemos aproximar al punto, que por ser infinitos no podremos recorrerlos a todos.
En consecuencia resulta prácticamente imposible confirmar la existencia del límite como resultado de la igualdad de los mismos calculados por las infinitas trayectorias posibles. Pero si puede resultar sencillo afirmar cuando no existe límite, ya que si los límites calculados por dos trayectorias son diferentes, no existe límite.
A veces se utilizan métodos que comparan los Límites Dobles con los Límites Simples. Veamos al respecto los Límites Sucesivos y los Límites Radiales.

Límites Sucesivos (o Reiterados o Iterados)
Frecuentemente suelen calcularse los límites de una función por trayectorias muy particulares, denominadas **Trayectorias Escalonadas**, constituidas por paralelas a los ejes cartesianos y que consiste en pasar primero del punto P al P_1 (haciendo variar a x, manteniendo a y constante) y luego pasar de P_1 a P_0 (haciendo variar a y, manteniendo a x constante). Y luego repetir el cálculo pero pasando de P a P_2 y luego de P_2 a P_0, y comparar los resultados.



$\lim\limits_{y\to y_0}\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right]$ Trayectoria de línea de puntos.

$\lim\limits_{x\to x_0}\left[\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right]$ Trayectoria de trazo continuo.

Ejemplo 5:

Sea la función $z = \dfrac{2x^2+y^3}{3x^2-y^3}$, y calculemos sus Límites Sucesivos en el punto $P_0(0,0)$:

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+y^3}{3x^2-y^3}\right] = -1$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{2x^2+y^3}{3x^2-y^3}\right] = \frac{2}{3}$$

Los Límites Sucesivos son distintos, ello prueba que la función no tiene límite $P_0(0,0)$.

Ejemplo 6:

Sea la función $z = \dfrac{2xy}{3x^2 - y^2}$, y calculemos sus Límites Sucesivos en el punto $P_0(0,0)$:

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{2xy}{3x^2 - y^2}\right] = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{2xy}{3x^2 - y^2}\right] = 0$$

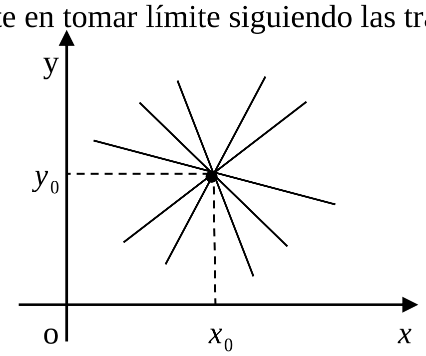
Los Límites Sucesivos son iguales, pero esto no garantiza que la función tenga límite en $P_0(0,0)$. Pues probemos una trayectoria que no sea paralela a los ejes coordenados, por ejemplo la trayectoria $y = 2x$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{3x^2 - y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x.2x}{3x^2 - (2x)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{-x^2} = -4$$

Por lo tanto ello prueba que la función no tiene límite en el punto $P_0(0,0)$.

Límites Radiales

Consiste en tomar límite siguiendo las trayectorias del haz de rectas que pasan por el punto $P_0(x_0, y_0)$:



$$y - y_0 = m.(x - x_0)$$

Si el límite así calculado da un resultado que es función de m significa que tendrá un límite distinto para cada trayectoria, por lo tanto la función, en este caso, no tiene límite.
Resolvamos el ejemplo anterior por este método:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{3x^2 - y^2} \qquad \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad \text{la trayectoria es:} \quad y = mx$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{3x^2 - y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x.mx}{3x^2 - (mx)^2} = \frac{2m}{3 - m^2}$$

El resultado es función de m, tendrá un valor distinto para cada trayectoria, por lo tanto la función no tiene límite en $(0,0)$. Por ejemplo:

Para $m = 1$ el límite es $f(x, y) = 1$

Para $m = 2$ el límite es $f(x, y) = -4$ etc.

Ejemplo 7:

Calculemos ahora el límite de la función $z = \dfrac{2x^2y}{x^4 + 3y^2}$ para $(x, y) \to (0,0)$.

Obtengamos primero los Límites Sucesivos:

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{2x^2y}{x^4 + 3y^2}\right] = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{2x^2y}{x^4+3y^2}\right]=0$$

Calculemos los Límites Radiales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2y}{x^4+3y^2} \qquad \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \qquad \text{la trayectoria es:} \qquad y = mx$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2y}{x^4+3y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2.mx}{x^4+3.(mx)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2mx}{x^2+3.m^2} = 0$$

Hemos obtenido el mismo valor de límite a lo largo de cualquier trayectoria paralela a los ejes coordenados y de cualquier recta que pasa por el origen. Pero esto no demuestra que el límite de la función sea 0, pues si seguimos la trayectoria de la parábola $y = x^2$, tendremos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2y}{x^4+3y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2.x^2}{x^4+3.(x^2)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^4}{x^4+3.x^4} = \frac{1}{2}$$

Obtenemos un valor distinto de límite, por lo tanto esta función no tiene límite cuando $(x, y) \to (0,0)$.
Como podemos comprobar, estos métodos son útiles para demostrar cuando la función NO tiene límite, pero no para determinar cuando SI tiene límite.

Tal como ocurre con los límites de funciones de una sola variable, en el caso de funciones de varias variables el cálculo se puede simplificar utilizando las propiedades de límites y también por la aplicación del concepto de continuidad.
Las propiedades de límites demostradas para las funciones de una sola variable independiente, son válidas también para las funciones de dos o mas variables independientes.”El límite de la suma de funciones es igual a la suma de los límites”, “el límite de la diferencia de funciones es igual a la diferencia de los límites”, etc..
El cálculo de límites dobles en forma directa se puede llegar a realizar basándose en estas propiedades y además en el hecho de que la gran mayoría de las funciones que se estudian, normalmente son continuas.
En los casos en que los límites resulten indeterminados, se debe recurrir a simplificaciones o a otros artificios matemáticos.
Todo lo demostrado para funciones de dos variables independientes, puede ser ampliado a funciones de tres o más variables independientes.

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES

Sea la función $z = f(x, y)$ definida en un dominio D y $P_0(x_0, y_0)$ es un punto de acumulación del dominio, decimos que dicha función **es continua** en ese punto $P_0(x_0, y_0)$ si se verifica que:

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)}$$

Lo que incluye tres condiciones básicas:

1- Que el límite existe para $P(x, y) \to P_0(x_0, y_0)$
2- Que la función está definida en $P_0(x_0, y_0)$
3- Que el límite de la función es igual al valor de la función en $P_0(x_0, y_0)$.

Ejemplo 8:

La función $z = 2x + y$ es continua en el punto $P(2,3)$ pues:

1- Pues el límite existe y es igual a: $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}}(2x + y) = 7$

2- La función está definida en $P(2,3)$, dado que $f(2,3) = 7$

3- Y el valor del límite de la función es igual al valor de la función en $P(2,3)$:

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}} f(x, y) = f(2,3)}$$

A una función que es continua en cada punto de un dominio, se le llama **continua en este dominio**.
El significado práctico de continuidad es que si el punto $P(x, y)$ se desplaza una distancia suficientemente pequeña, el valor de la función variará también en una magnitud pequeña. En una función continua, su gráfica, es una superficie sin agujeros ni grietas.

Si la igualdad no se cumple en algún punto, a éste se le llama **punto de discontinuidad de la función**.

De igual forma se define continuidad de funciones de más de dos variables independientes.

Si no existe el límite la discontinuidad se denomina **esencial**.

Si existe el límite doble pero la función no es continua entonces la discontinuidad es **evitable**.

Discontinuidad Evitable

Se presenta cuando existe el límite doble en un punto pero la función no es continua.
Desde el punto de vista gráfico la función presenta un agujero en el punto de discontinuidad evitable.
Esta discontinuidad se puede **evitar** y transformar en continua a la función redefiniéndola, dándole a la función el valor del límite en el punto.

Ejemplo 9:

Analicemos la continuidad de la función $z = \dfrac{\operatorname{sen} 3xy}{x}$ en el origen de coordenadas:

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen} 3xy}{x} = 0$ Este límite ya fue calculado en el ejemplo nº 3.

- La función no está definida en $P_0(0,0)$.
- La función tiene límite doble en el origen, pero no está definida en ese punto. Es una discontinuidad evitable.
- La redefiniremos para transformarla en función continua:

$$z \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} 3xy}{x} & \text{para} \quad (x, y) \neq (0,0) \\[2ex] 0 & \text{para} \quad (x, y) = (0,0) \end{cases}$$