Análisis Matemático 2

Funciones escalares y vectoriales

Concepto y gráficos

Preliminares

- **En Análisis Matemático 1**:
  - **Funciones Escalares**: $y = f(x)$

    Funciones de una sola variable independiente x.

    Es decir: $f: x \to y$ donde $x \in A \subseteq \mathbb{R} \to \dim(A) = 1$

    $y \in B \subseteq \mathbb{R} \to \dim(B) = 1$

- **En Análisis Matemático 2**:
  - **Campos Escalares**: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

    Es decir: $f: (x_1, x_2, \dots, x_n) \to y$ donde $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A \subseteq \mathbb{R}^n \to \dim(A) = n$

    $y \in B \subseteq \mathbb{R} \to \dim(B) = 1$
  - **Funciones Vectoriales**: $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{f}(t)$

    Es decir: $\vec{f}: t \to (x_1, x_2, \dots, x_n)$ donde t $\in A \subseteq \mathbb{R} \to \dim(A) = 1$

    $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B \subseteq \mathbb{R}^n \to \dim(B) = n$
  - **Campos Vectoriales**: $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{f}(y_1, y_2, \dots, y_m)$

    Es decir: $\vec{f}: (y_1, y_2, \dots, y_m) \to (x_1, x_2, \dots, x_n)$ donde$(y_1, y_2, \dots, y_m) \in A \subseteq \mathbb{R}^m \to \dim(A) = m$

    $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B \subseteq \mathbb{R}^n \to \dim(B) = n$

Preliminares

- **En Análisis Matemático 1**:
  - **Funciones Escalares**: $y = f(x)$
    Es decir: $f: x \to y$ donde $x \in A \subseteq \mathbb{R} \to \dim(A) = 1$
    $y \in B \subseteq \mathbb{R} \to \dim(B) = 1$
- **En Análisis Matemático 2**:
  - **Campos Escalares**: $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
    Es decir: $f: (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to y$ donde $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A \subseteq \mathbb{R}^n \to \dim(A) = n$
    $y \in B \subseteq \mathbb{R} \to \dim(B) = 1$
  - **Funciones Vectoriales**: $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \vec{f}(t)$
    Es decir: $\vec{f}: t \to (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ donde t $\in A \subseteq \mathbb{R} \to \dim(A) = 1$
    $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B \subseteq \mathbb{R}^n \to \dim(B) = n$
  - **Campos Vectoriales**: $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \vec{f}(y_1, y_2, \ldots, y_m)$
    Es decir: $\vec{f}: (y_1, y_2, \ldots, y_m) \to (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ donde$(y_1, y_2, \ldots, y_m) \in A \subseteq \mathbb{R}^m \to \dim(A) = m$
    $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B \subseteq \mathbb{R}^n \to \dim(B) = n$

Funciones de dos o más variables independientes $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Un ejemplo de estas funciones es la temperatura (T) en cada punto del espacio (x, y, z).

Preliminares

- **En Análisis Matemático 1**:
  - **Funciones Escalares**: $y = f(x)$

    Es decir: $f: x \to y$ donde $x \in A \subseteq \mathbb{R} \ \to \dim(A) = 1$

    $y \in B \subseteq \mathbb{R} \ \to \dim(B) = 1$

- **En Análisis Matemático 2**:
  - **Campos Escalares**: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

    Es decir: $f: (x_1, x_2, \dots, x_n) \to y$ donde $(x_1, x_2, \dots,$

  - **Funciones Vectoriales**: $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{f}(t)$

    Es decir: $\vec{f}: t \to (x_1, x_2, \dots, x_n)$ donde t $\in A \subseteq \mathbb{R} \ \to \ \dim(A) = 1$

    $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B \subseteq \mathbb{R}^n \to \dim(B) = n$

  - **Campos Vectoriales**: $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{f}(y_1, y_2, \dots, y_m)$

    Es decir: $\vec{f}: (y_1, y_2, \dots, y_m) \to (x_1, x_2, \dots, x_n)$ donde$(y_1, y_2, \dots, y_m) \in A \subseteq \mathbb{R}^m \to \ \dim(A) = m$

    $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B \subseteq \mathbb{R}^n \ \to \ \dim(B) = n$

Funciones a las que a una variable independiente le corresponde un conjunto $x_1, x_2, \dots x_n$ de números reales, o un vector de n componentes.

Este tipo de funciones se utilizan, por ejemplo, para describir curvas en forma paramétrica, el movimiento de partículas en física, etc.

Preliminares

- **En Análisis Matemático 1**:
  - **Funciones Escalares**: $y = f(x)$

    Es decir: $f: x \to y$ donde $x \in A \subseteq \mathbb{R} \;\to \dim(A) = 1$

    $y \in B \subseteq \mathbb{R} \;\to \dim(B) = 1$

- **En Análisis Matemático 2**:
  - **Campos Escalares**: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

    Es decir: $f: (x_1, x_2, \dots, x_n) \to y$ donde $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A \subseteq \mathbb{R}^n \;\to \dim(A) = n$

    $y \in B \subseteq \mathbb{R} \;\to \dim(B) = 1$

  - **Funciones Vectoriales**: $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{f}(t)$

    Es decir: $\vec{f}: t \to (x_1, x_2, \dots, x_n)$ donde t $\in A \subseteq \mathbb{R} \;\to$ dim(

    $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B \subseteq \mathbb{R}^n \to$ dim(

  - **Campos Vectoriales**: $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{f}(y_1, y_2, \dots, y_m)$

    Es decir: $\vec{f}: (y_1, y_2, \dots, y_m) \to (x_1, x_2, \dots, x_n)$ donde$(y_1, y_2, \dots, y_m) \in A \subseteq \mathbb{R}^m \to \dim(A) = m$

    $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B \subseteq \mathbb{R}^n \to \dim(B) = n$

Ejemplos de este tipo de funciones, es el campo eléctrico, campo magnético, campo gravitacional, etc.

Funciones a las que a un conjunto de n de variables independientes le corresponde, como imagen, un conjunto de m de números reales.

Ejemplos

Empecemos con un campo escalar:

$\mathcal{D}(f) = \{(x, y)/(x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge \exists\, un \text{ ú}nico\; z \in \mathbb{R}, z = f(x, y)\}$

$\mathcal{Im}(f) = \{z \in \mathbb{R}/\exists(x, y) \in \mathbb{R}^2, z = f(x, y)\}$

Un caso particular para dos variables independientes es

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \rightarrow \mathcal{D}(f) = \{(x, y)/(x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$\mathcal{Im}(f) = \{z/z \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq z \leq 2\}$$

En este caso es factible construir la gráfica de la función ya que se trata de una superficie curva en un espacio tridimensional.

Si se tratara de un campo escalar de más de dos variables independientes ya no sería posible construir su gráfica cartesiana

Ejemplos

Para conocer el comportamiento de **z** calculo las intersecciones con los planos cartesianos y construyo las curvas de nivel que se obtienen como intersecciones de la superficie **z** con planos paralelos al plano xy (es decir z=constante).

- Con el plano xy → $z = 0$ (figura 1)

  $4 = x^2 + y^2$ → circunferencia con centro en (0, 0) y R = 2

- Con el plano yz → $x = 0$ (figura 2)

  $z = \sqrt{4 - y^2}$ → semicircunferencia positiva de centro (0, 0) y R = 2

- Con el plano xz → $y = 0$ (figura 3)

  $z = \sqrt{4 - x^2}$ → semicircunferencia positiva de centro en (0, 0) y R = 2

Ejemplos

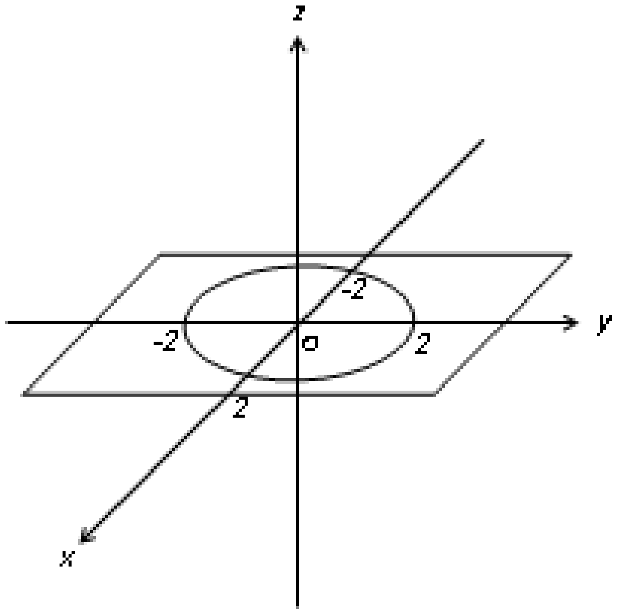


Figura 1

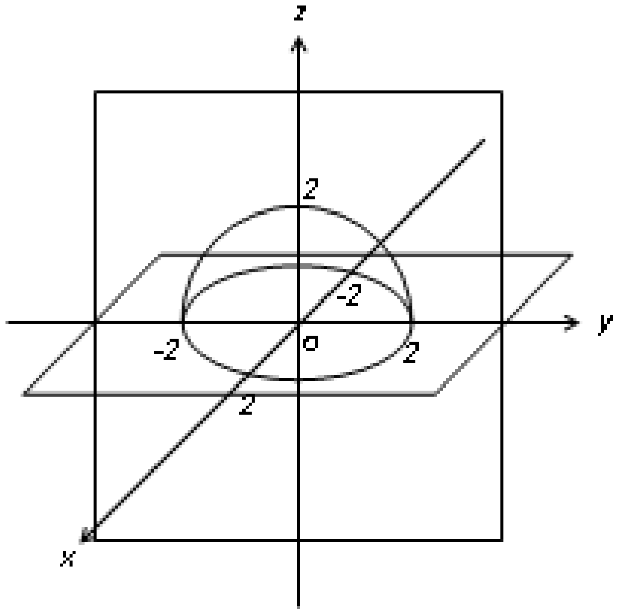


Figura 2

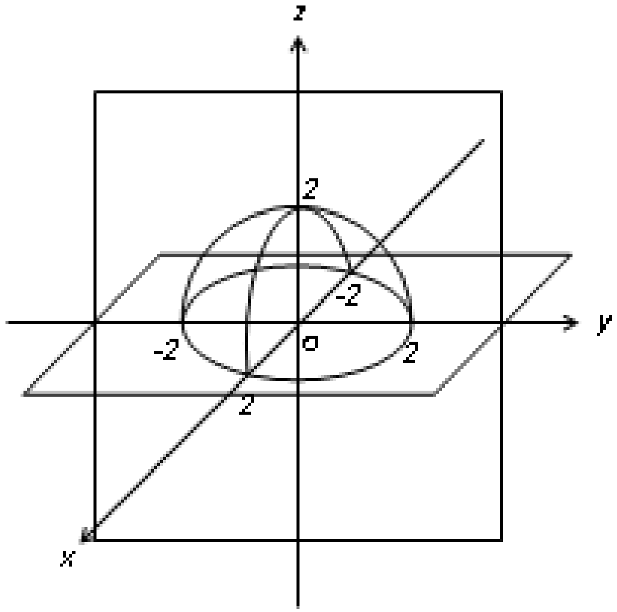


Figura 3

Ejemplos

Curvas de nivel

- $\boldsymbol{z = 0} \rightarrow 0 = 4 - x^2 - y^2$

  $4 = x^2 + y^2 \rightarrow$ circunferencia de centro (0, 0, 0) y R = 2
- $\boldsymbol{z = 1} \rightarrow 1 = 4 - x^2 - y^2$

  $3 = x^2 + y^2 \rightarrow$ circunferencia de centro (0, 0, 1) y R = $\sqrt{3}$
- $\boldsymbol{z = 2} \rightarrow 4 = 4 - x^2 - y^2$

  $0 = x^2 + y^2 \rightarrow$ circunferencia de centro (0, 0, 2) y R = 0 (es un punto)

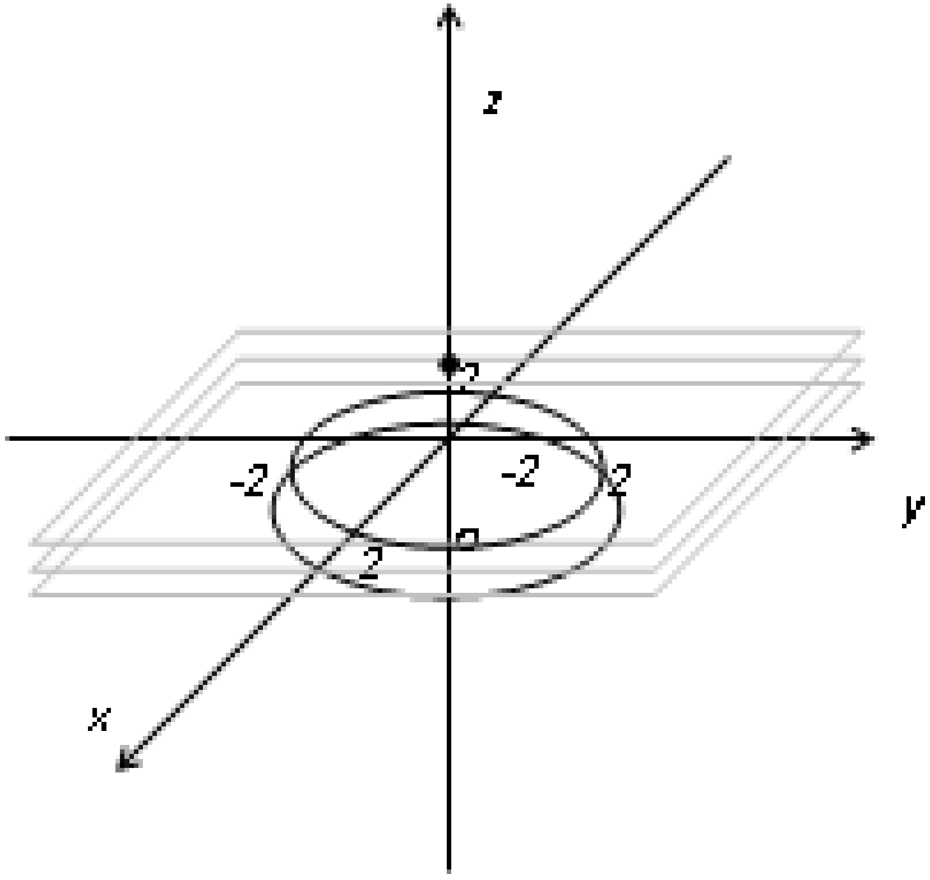


Figura 4

Ejemplos

- Otro caso (ver figura 5)

$z = x^2 + y^2 \rightarrow \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$

$$\mathcal{Im}(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

- Con el plano xy → $z = 0$

$0 = x^2 + y^2 \rightarrow$ circunferencia con centro en (0, 0) y R = 0 (punto origen del sistema)

- Con el plano yz → $x = 0$

$z = y^2 \rightarrow$ parábola de ramas verticales con vértice en (0, 0)

- Con el plano xz → $y = 0$

$z = x^2 \rightarrow$ parábola de ramas verticales con vértice en (0, 0)

Ejemplos

Curvas de nivel (ver figura 6)

- $\boldsymbol{z = 0} \rightarrow (0,0,0)$
- $\boldsymbol{z > 0} \rightarrow$ circunferencias concéntricas

$$z = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 1 \rightarrow \text{R} = 1$$

$$z = 4 \rightarrow x^2 + y^2 = 4 \rightarrow \text{R} = 2$$

$$z = 7 \rightarrow x^2 + y^2 = 7 \rightarrow \text{R} = \sqrt{7}$$

- $\boldsymbol{z < 0} \rightarrow \notin \mathbb{R}$

Ejemplos

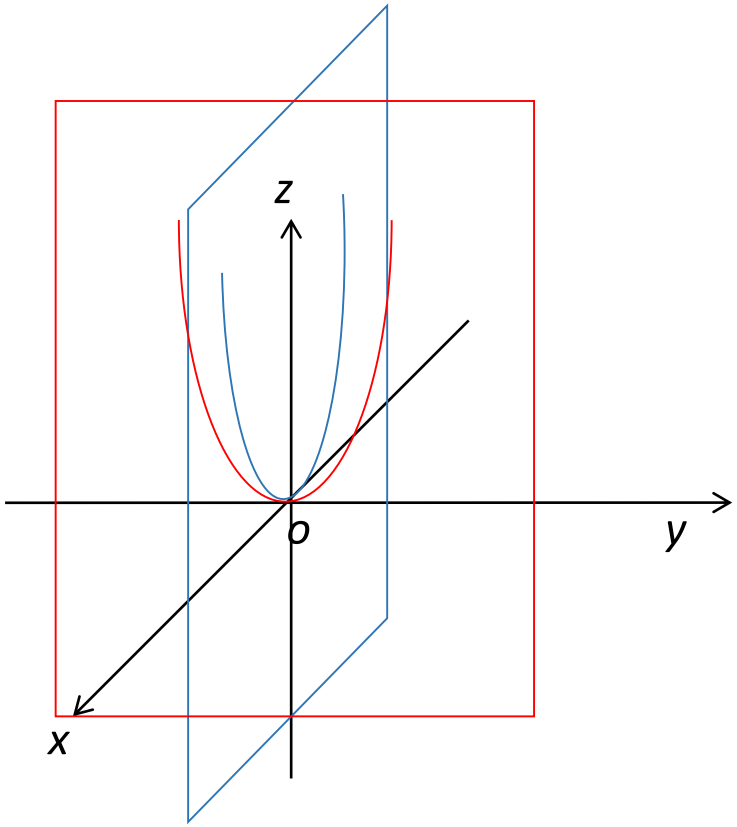


Figura 5

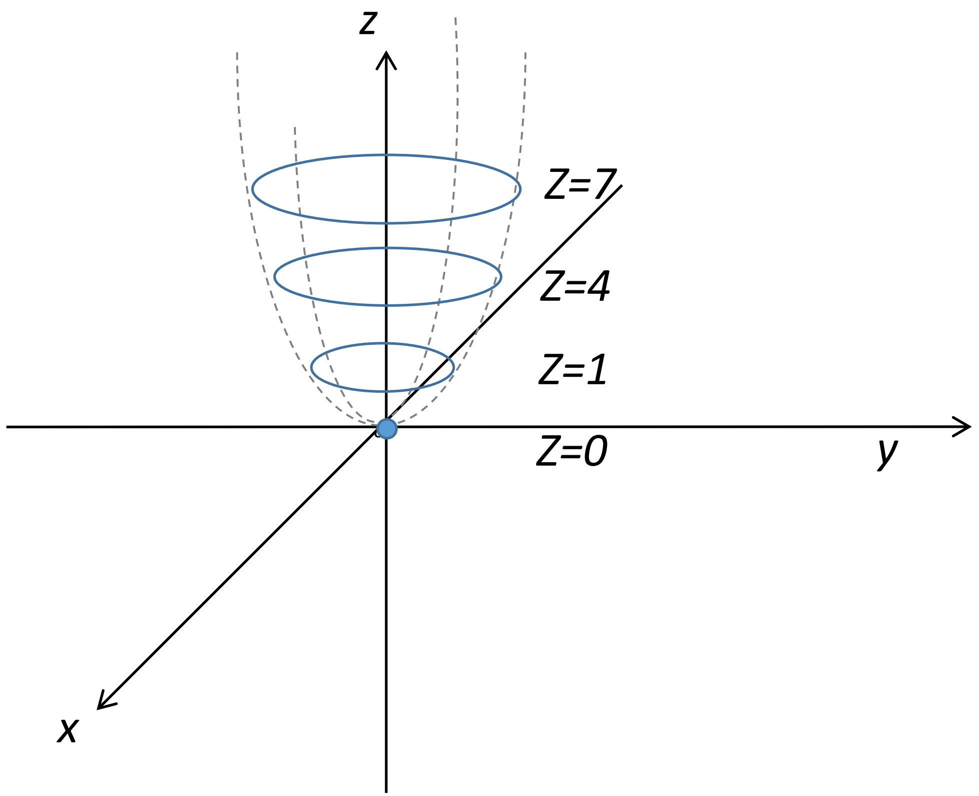


Figura 6

Dominio de un Campo Escalar (restricciones)

Entre la infinita variedad de casos que se pueden presentar, existen cuatro situaciones especialmente interesantes:

- $y = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow g(x) \neq 0$
- $y = \ln f(x) \rightarrow f(x) > 0$
- $y = \sqrt[n]{f(x)}$ con n par $\rightarrow f(x) \geq 0$
- $\left| \begin{array}{l} y = arcsen\, f(x) \\ y = arccos\, f(x) \end{array} \right. \rightarrow -1 \leq f(x) \leq 1$

Ejemplo

Determinar analítica y gráficamente el dominio de $\boldsymbol{z = ln\frac{(x+1)^2+(y-2)^2-4}{4x^2+y^2-16}}$

$\boldsymbol{\frac{(x+1)^2+(y-2)^2-4}{4x^2+y^2-16} > 0} \rightarrow$ restricción de la función logarítmica

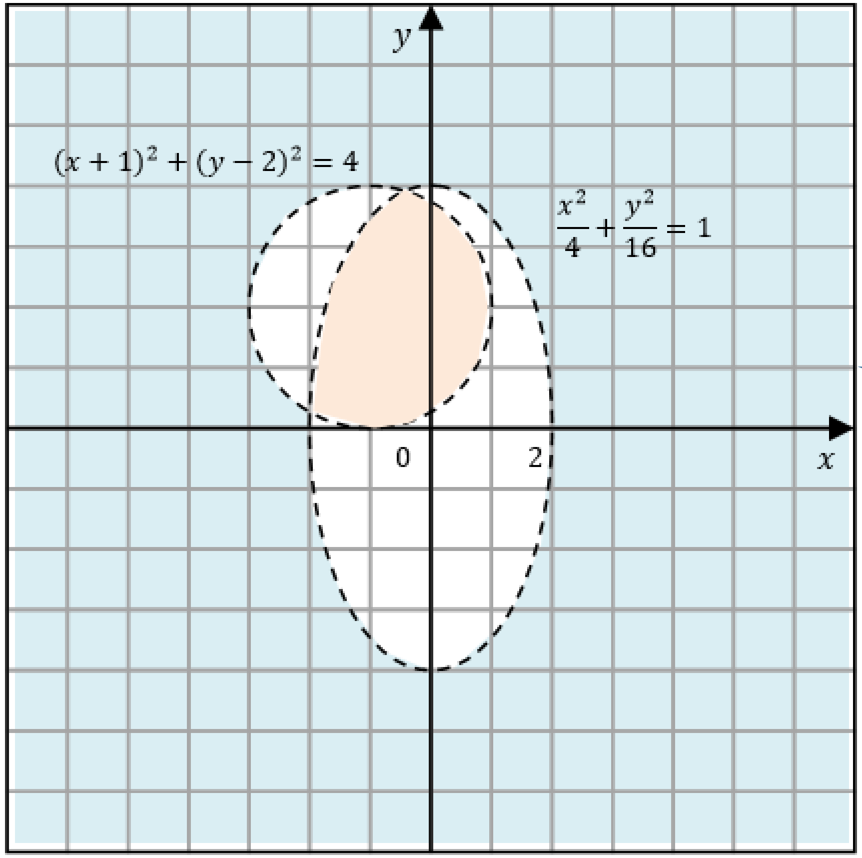
Para que el cociente resulte positivo numerador y denominador deben ser de igual signo:

$$\begin{cases}(x+1)^2+(y-2)^2-4>0\\ 4x^2+y^2-16>0\end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases}(x+1)^2+(y-2)^2-4<0\\ 4x^2+y^2-16<0\end{cases}$$

Despejando

$$\begin{cases}(x+1)^2+(y-2)^2>4\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}>1\end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases}(x+1)^2+(y-2)^2<4\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}<1\end{cases}$$

Ejemplo



Representamos gráficamente **ambas** situaciones que corresponden a todos los pares ordenados de números reales que pertenecen al dominio de z, es decir todos los puntos del plano xy que constituyen el dominio de z.

El área sombreada *fuera* de la circunferencia y *fuera* de la elipse (en color celeste), corresponde a la primera rama de análisis.
El área sombreada *dentro* de la circunferencia y *dentro* de la elipse (en color rosa), corresponde a la segunda rama de análisis.

Finalmente en forma analítica: $\mathcal{D}(f)=\left\{(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2 \wedge \frac{(x+1)^2+(y-2)^2-4}{4x^2+y^2-16}>0\right\}$

Análisis Matemático II

Funciones de varias variables independientes

Límite y Continuidad

Funciones de varias variables

- En funciones de una variable (Análisis Matemático I)

Llamamos **entorno** de centro a y radio δ, al conjunto de todos los puntos de la recta que pertenecen al intervalo $(a-\delta, a+\delta)$.

En símbolos: $E(a,\delta) = \{x \,/\, x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq |x-a| < \delta\}$

- En funciones de dos variables independientes (Análisis Matemático II)

Llamamos **entorno** de centro (a,b) y radio δ, al conjunto de todos los puntos del plano que pertenecen a un círculo de centro (a,b) y radio menor que δ. En símbolos:

$$E[(a,b),\delta] = \left\{(x,y) \,/\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge 0 \leq \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta\right\}$$

Funciones de varias variables

- De manera análoga, en funciones de una variable (Análisis Matemático I)

Llamamos **entorno reducido** de centro a y radio δ, al conjunto de todos los puntos de la recta que pertenecen al intervalo $(a-\delta, a+\delta)$, excepto a.

En símbolos: $E'(a,\delta) = \{x \;/\; x \in \mathbb{R} \wedge 0 < |x-a| < \delta\}$

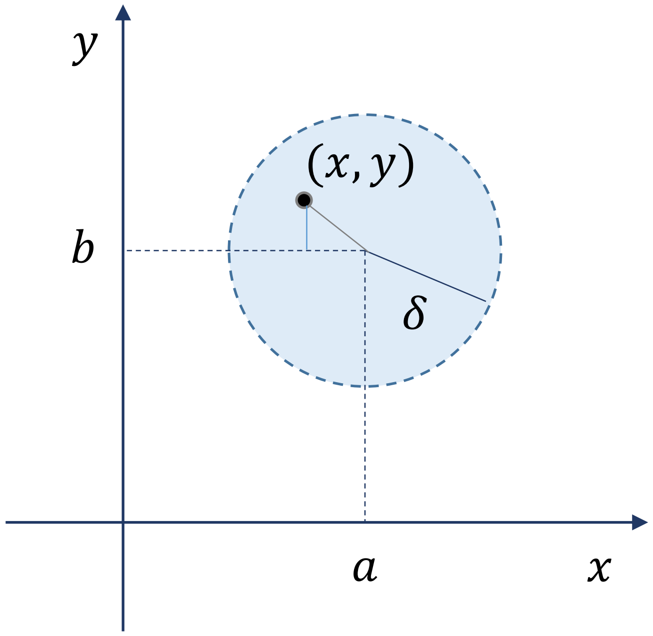
- En funciones de dos variables independientes (Análisis Matemático II)

Llamamos **entorno reducido** de centro (a,b) y radio δ, al conjunto de todos los puntos del plano que pertenecen a un círculo de centro (a,b) y radio menor que δ, excepto el punto (a,b). En símbolos:

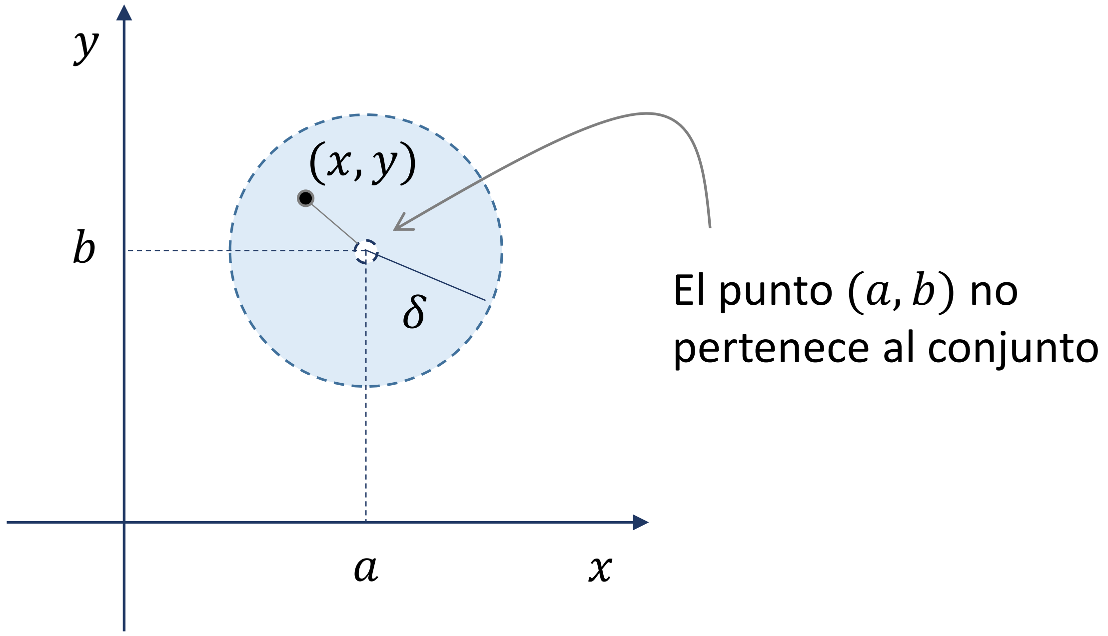
$$E'[(a,b),\delta] = \left\{(x,y) \;/\; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta\right\}$$

Funciones de varias variables

Entorno de centro (a, b) y radio δ



Entorno reducido de centro (a, b) y radio δ



El punto (a, b) se denomina **punto de acumulación**.

Funciones de varias variables

Límite doble o simultáneo

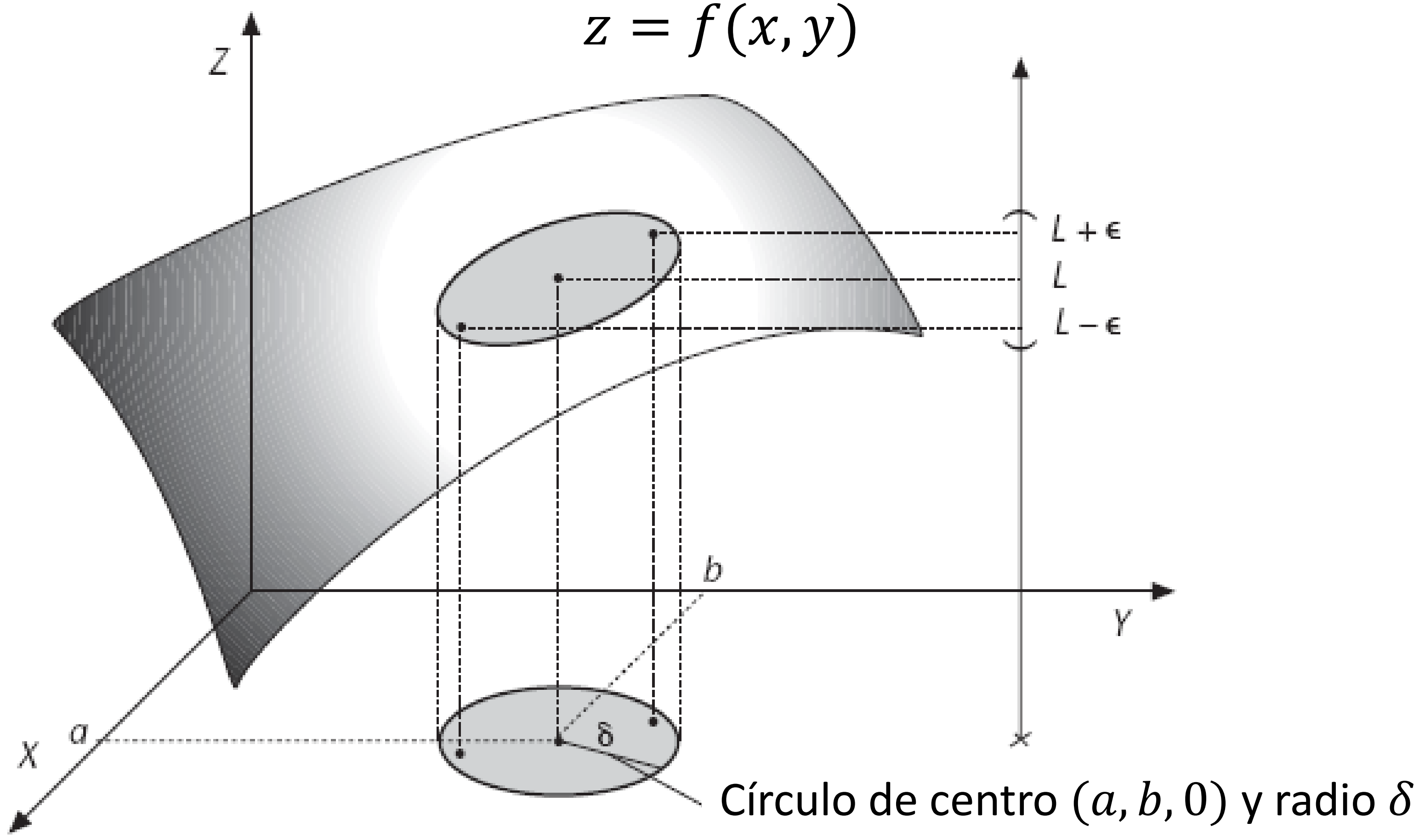
Dada una función $z = f(x, y)$ definida en un dominio D, un número real L es el límite de la función f en el punto de acumulación (a, b) de su dominio, si y sólo si, para todo número positivo ε, fijado de antemano, existe otro número positivo δ tal que, para cualquier punto (x, y), que pertenece al dominio de la función f, y pertenece al entorno reducido de centro (a, b) y radio δ, el valor de la función f se acerca al límite L una distancia menor que ε.

En símbolos:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L \iff$$

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \,/\, si\, \forall(x, y) \in D_f, 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \;\Rightarrow\; |f(x, y) - L| < \varepsilon$$

Funciones de varias variables



Funciones de varias variables

Límite doble o simultáneo

Se puede demostrar que:

a) El límite doble goza de todas las propiedades de los límites finitos para funciones de una variable y está sometido a las mismas reglas para operar.

b) Si el límite doble existe, es **único**.

c) Si al aplicar al cálculo del límite doble las propiedades de los límites finitos obtenemos como resultado ∞ , diremos que **el límite doble no existe** ya que la función no está acotada.

Funciones de varias variables

Límite doble o simultáneo

d) Si al aplicar al cálculo del límite doble las propiedades de los límites finitos, obtenemos como resultado una indeterminación, y esta indeterminación se puede levantar usando métodos algebraicos, podremos concluir lo expuesto en **b)** o **c)**

e) Si al aplicar al cálculo del límite doble las propiedades de los límites finitos obtenemos como resultado una indeterminación, y esta indeterminación ***no*** se puede levantar usando métodos algebraicos, deberíamos calcular el límite para los infinitos caminos por los cuales $(x, y) \to (a, b)$ aplicando la definición de límite.

Funciones de varias variables

Límite doble o simultáneo

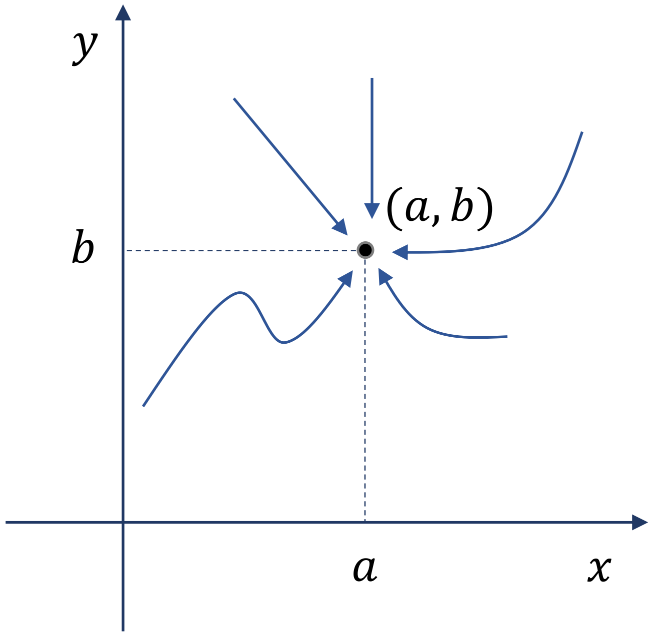
El concepto de Límite Doble para una función de dos variables independientes es el mismo que el de Límite Simple de una función de una sola variable independiente. Existe, sin embargo, una diferencia sustancial entre uno y otro:

En el Límite Simple existen únicamente dos trayectorias posibles para $x \to a$ (por izquierda y por derecha), en consecuencia basta calcular los límites izquierdo y derecho y, si en estas condiciones los límites son iguales, decimos que la función tiene límite para $x \to a$.

Pero en el caso de la función $z = f(x, y)$, el punto (a, b) es un punto del plano XY y existen infinitas formas en que (x, y) puede aproximarse a (a, b).

Funciones de varias variables

Límite doble o simultáneo



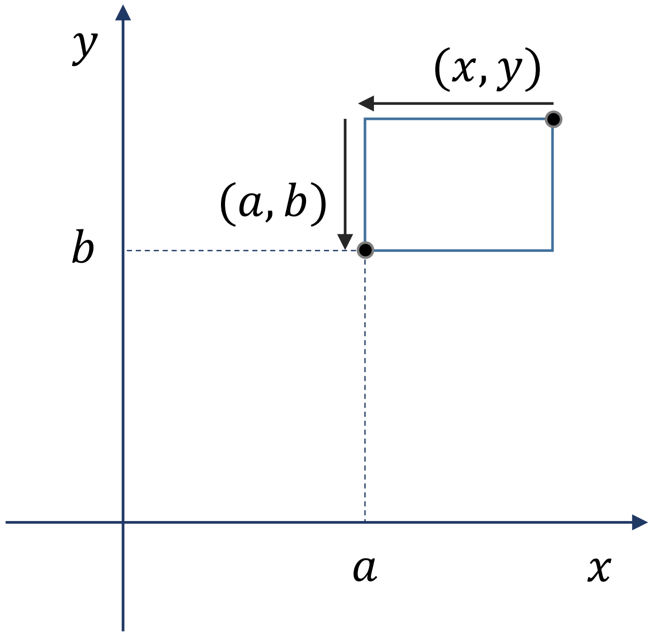
Para asegurar la existencia del límite doble hay 2 métodos:

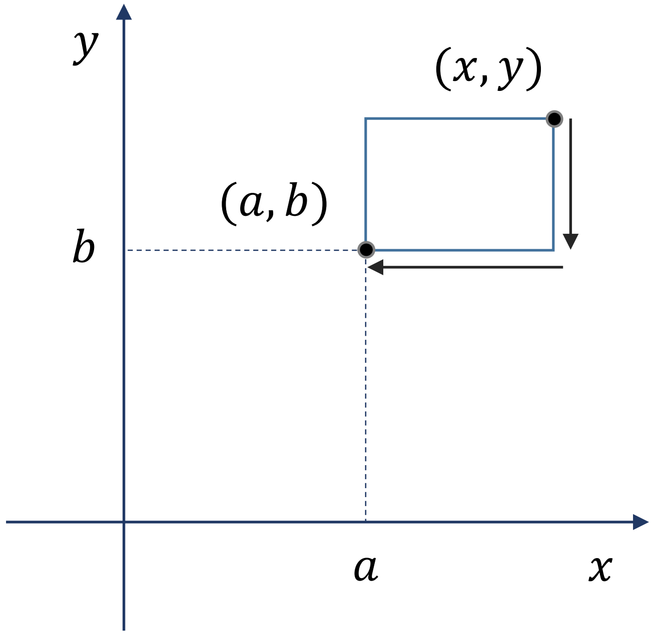
a) calcularlo aplicando la definición. (Esta es una tarea bastante compleja que no vamos a comprometernos a emprender) o aplicando las propiedades de los límites finitos.

b) En el caso de resultar imposible (porque se obtuvo una indeterminación que no pudo levantarse por métodos algebraicos), sólo calcularemos el límite ***por algunos de los infinitos caminos*** (límites sucesivos, límites radiales y límite a lo largo de una curva). Por esto es que, en este caso, sólo podremos concluir que el límite doble **no existe** o que el límite doble **puede existir**.

Funciones de varias variables

Cálculo de Límites Dobles: Límites Sucesivos





Si $L_1 \neq L_2 \;\Rightarrow$ el límite doble L **no existe**.

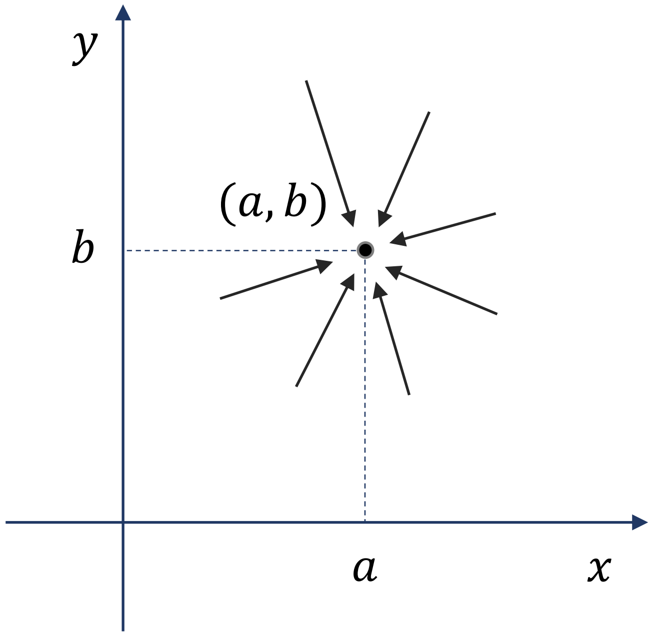
Si $L_1 = L_2 \;\Rightarrow$ el límite doble L **puede existir** y si existe $L = L_1 = L_2$.

$$L_1 = \lim_{y \to b} \underbrace{\left(\lim_{x \to a} f(x, y)\right)}_{\varphi(y) \text{ es sólo función de } y}$$

$$L_2 = \lim_{x \to a} \underbrace{\left(\lim_{y \to b} f(x, y)\right)}_{\varphi(x) \text{ es sólo función de } x}$$

Funciones de varias variables

Cálculo de Límites Dobles: Límites Radiales



Se trata de calcular el límite cuando nos acercamos al punto de acumulación en forma radial.

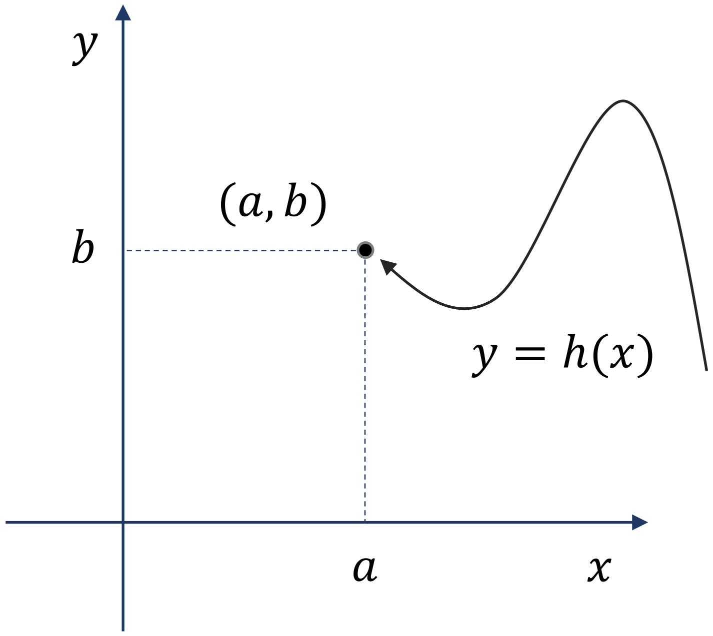
Este límite corresponde a las rectas que pasan por el punto de acumulación, es decir, las rectas de la ecuación: $y = m(x - a) + b$

$$L_r = \lim_{x \to a} \underbrace{f(x, m(x-a) + b)}_{\text{Es sólo función de } x}$$

- Si $L_r = g(m) \Rightarrow$ el límite doble L **no existe**.
- Si $L_r = cte \neq L_1 \neq L_2 \Rightarrow$ el límite doble L **no existe**.
- Si $L_r = cte = L_1 = L_2 \Rightarrow$ el límite doble L **puede existir** y si existe $L = L_r = L_1 = L_2$.

Funciones de varias variables

Cálculo de Límites Dobles: Límite a lo largo de una curva



$$L_c = \lim_{x \to a} \underbrace{f\big(x, h(x)\big)}_{\text{Es sólo función de } x}$$

Se trata de calcular el límite cuando nos acercamos al punto de acumulación a través de una curva de ecuación $y = h(x)$.

- Si $L_c \neq L_r \neq L_1 \neq L_2 \Rightarrow$ el límite doble L **no existe**.
- Si $L_c = L_r = L_1 = L_2 \Rightarrow$ el límite doble L **puede existir** y si existe $L = L_c = L_r = L_1 = L_2$.

Si en alguno cualquiera de los casos anteriores resultara que el límite calculado, da por resultado ∞, entonces el límite doble **no existe**.

Funciones de varias variables

Límite doble o simultáneo: EJEMPLO 1

Sea la función:

$$z = \frac{x^2 - y^2}{x - y} \quad \text{para } (x, y) \to (0,0)$$

Si queremos calcular el límite doble, aplicando las propiedades de los límites finitos, obtendremos una indeterminación. Sin embargo, en este caso, podemos levantar la indeterminación por métodos algebraicos:

Usamos el quinto caso de factoreo

$$\lim_{(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x - y} = \lim_{(0,0)} \frac{\cancel{(x - y)}(x + y)}{\cancel{x - y}} = \lim_{(0,0)} x + y = 0$$

Como pudimos calcular el límite doble aplicando las propiedades de los límites finitos, el límite doble existe y vale 0.

Funciones de varias variables

Límite doble o simultáneo: EJEMPLO 2

Sea la función:

$$z = \frac{x - y}{x^2 - y^2} \quad \text{para } (x, y) \to (0,0)$$

Si queremos calcular el límite doble, aplicando las propiedades de los límites finitos, obtendremos una indeterminación. Sin embargo, en este caso, podemos levantar la indeterminación por métodos algebraicos:

$$\lim_{(0,0)} \frac{x - y}{x^2 - y^2} = \lim_{(0,0)} \frac{\cancel{x - y}}{\cancel{(x - y)}(x + y)} = \lim_{(0,0)} \frac{1}{x + y} = \infty$$

Usamos el quinto caso de factoreo

Como pudimos calcular el límite doble aplicando las propiedades de los límites finitos, y resultó ∞ , la función no está acotada. Luego, el límite doble no existe

Funciones de varias variables

Límite doble o simultáneo: EJEMPLO 3

Sea la función:

$$z = \frac{2x^2y}{x^4 + 3y^2} \quad \text{para } (x, y) \to (0,0)$$

Si queremos calcular el límite doble, aplicando las propiedades de los límites finitos, obtendremos una indeterminación. Ya que no podemos levantar la indeterminación por métodos algebraicos, intentaremos demostrar, entonces, que el límite doble no existe.

Recordar que la Regla de L'Hopital es válida sólo para funciones de 1 variable NO se puede aplicar a funciones de dos variables.

Calculemos primero, los límites sucesivos:

$$L_1 = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2x^2y}{x^4+3y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{2.0^2\,y}{0^4+3y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{3y^2}\right) = \lim_{y\to 0}(0) = 0$$

$$L_2 = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{2x^2y}{x^4+3y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x^2.0}{x^4+3\,.\,0^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x^4}\right) = \lim_{x\to 0}(0) = 0$$

Como $L_1 = L_2$, el límite doble **puede existir** y si existe vale 0.

Funciones de varias variables

Límite doble o simultáneo: EJEMPLO 3 (cont.)

Calculemos ahora, los límites radiales:

$$y = m(x-a) + b \;\Rightarrow y = mx$$

$$L_r = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2\, mx}{x^4 + 3(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3\, m}{x^4 + 3x^2m^2} = \lim_{x\to 0} \frac{6x^2 m}{4x^3 + 6xm^2} = \lim_{x\to 0} \frac{12xm}{12x^2 + 6m^2} = \frac{12.0\,.m}{12\,.0^2 + 6m^2} = 0$$

Aplicamos L´Hopital

Porque se trata de una función de una variable.

Como $L_r = L_1 = L_2$, el límite doble **puede existir** y si existe vale 0.

Calculemos ahora, al límite a lo largo de la curva $y = x^2$:

$$L_c = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2\, x^2}{x^4 + 3x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2\, x^4}{x^4(1+3)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Como $L_c \neq L_r, L_c \neq L_1, L_c \neq L_2$, el límite doble **no existe**.

Funciones de varias variables

Continuidad

Una función $f(x,y)$ es continua en un punto (a,b) de su dominio, si se cumple:

1) $\exists\, f(a,b)$

2) $\exists \lim\limits_{(a,b)} f(x,y)$

3) $\lim\limits_{(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

Si alguna de estas condiciones no se cumple, entonces $f(x,y)$ **es discontinua en el punto** (a,b).

Funciones de varias variables

Continuidad

Clasificación de las discontinuidades:

ESENCIAL (no evitable)	Si no se cumple (2)
APARENTE (evitable)	Si se cumple (2) pero no se cumple (1) Si se cumple (1) y (2) pero no se cumple (3) En estos casos se puede definir la función: $G(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & si\ (x,y) \neq (a,b) \\ \lim\limits_{(a,b)} f(x,y) & si\ (x,y) = (a,b) \end{cases}$

Funciones de varias variables

Continuidad: EJEMPLO

Veamos la misma función del ejemplo anterior: $z = \dfrac{2x^2y}{x^4+3y^2}$ y analicemos si es continua en $(x,y) \to (0,0)$

Analicemos las condiciones de continuidad:

1) ¿Existe $f(a,b)$? No. Luego, la función es discontinua en $(0,0)$.

Para determinar el tipo de discontinuidad, sigamos analizando las condiciones:

2) ¿Existe $\lim\limits_{(a,b)} f(x,y)$? Acá se presenta una situación interesante:

a) Como $L_c \neq L_r, L_c \neq L_1, L_c \neq L_2$, el límite doble **no existe**. Luego la función presenta una discontinuidad del tipo **esencial** (no evitable) en $(0,0)$

b) Si no se conociera el límite a lo largo de la curva, como $L_r = L_1 = L_2$, el límite doble **puede existir** y si existe vale 0. Entonces, en este caso, se puede concluir que la discontinuidad **puede ser aparente** (evitable) y para evitar dicha discontinuidad podríamos definir:

$$G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4+3y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Análisis Matemático II

Derivadas Parciales
Derivadas Parciales Sucesivas

Derivadas Parciales

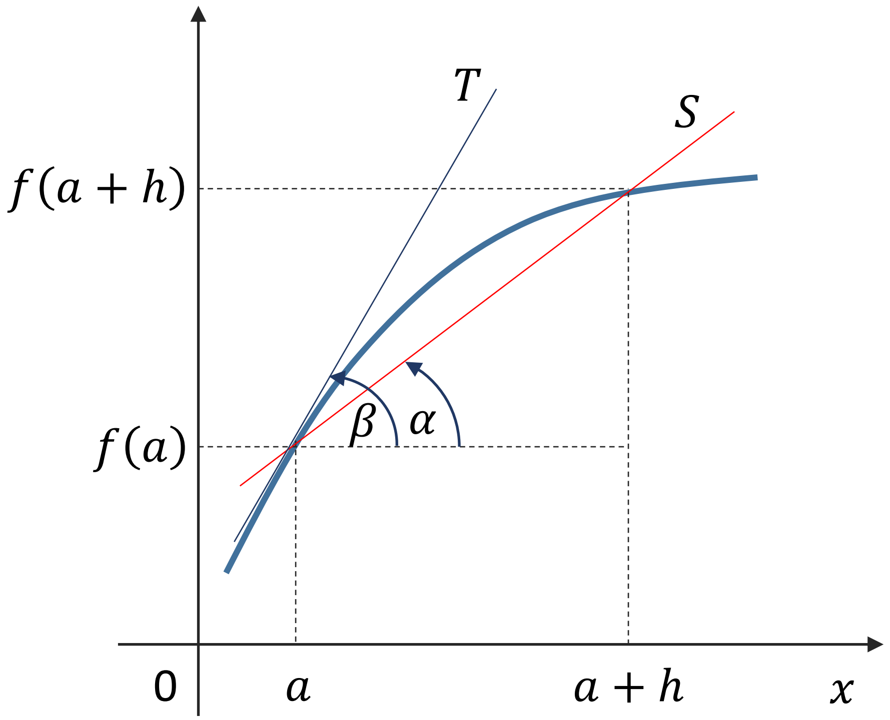
Introducción

La derivada es uno de los conceptos fundamentales del análisis matemático. Tiene importantes aplicaciones en la Física, Química, Biología y Ciencias Sociales, donde es necesario medir la rapidez con la que se produce el cambio de una magnitud.

Recordemos que la derivada de una función es la razón de cambio instantáneo con el que el valor de dicha función matemática varía, según se modifique el valor de su variable independiente. La derivada de una función es un concepto local, es decir, se calcula como el límite de la rapidez de cambio media de la función en cierto intervalo, cuando el intervalo considerado para la variable independiente se torna cada vez más pequeño. Por eso se habla del valor de la derivada de una función en un punto.

Derivadas Parciales

Repasemos lo estudiado en Análisis Matemático I para funciones de una variable:



Sea $y = f(x)$ una función de variable independiente x y a un punto interior al dominio D_f. Consideremos un incremento h de la variable x tal, que el cociente incremental:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = tg\,\alpha$$

corresponde a la pendiente de la recta secante S.

Cuando $h \to 0$, $S \to T$ y $\alpha \to \beta$, luego:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) = tg\,\beta$$

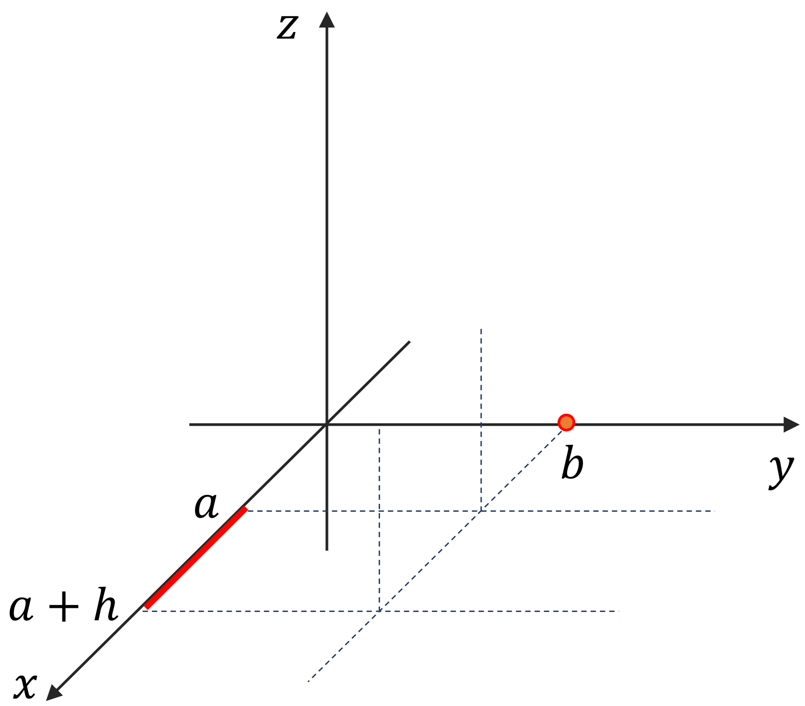
es la derivada de la función f en el punto a.

Y coincide con la pendiente de la recta tangente T.

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales: Definición

Al trabajar con campos escalares de dos variables independientes $z = f(x, y)$, se puede incrementar una u otra y esto da origen a las **derivadas parciales.**

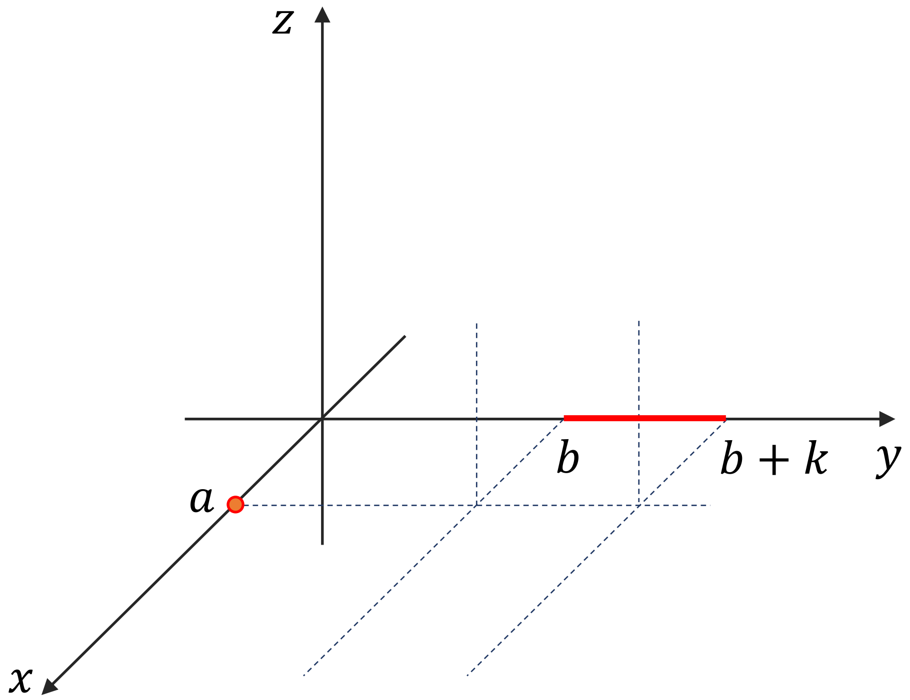


Supongamos que se mantiene y constante, haciendo variar solamente x, entonces, f se comporta como una función de una variable independiente en x. Si, bajo esta condición, derivamos a $f(x, y)$ en el punto (a, b), obtendremos «*la derivada parcial de f con respecto a x*» en (a, b):

$$f'_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

Derivadas Parciales

De manera análoga, si se mantiene x constante haciendo variar solamente y, ahora f se comporta como una función de una variable independiente en y. Si derivamos a $f(x, y)$ en el punto (a, b), obtendremos «*la derivada parcial de f con respecto a y*» en (a, b):



$$f'_y(a,b) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a, b+k) - f(a,b)}{k}$$

De forma similar se pueden definir las derivadas parciales de funciones de más de dos variables independientes.

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales: Función derivada parcial

Si las derivadas parciales respecto de x e y existen en todos los puntos de un conjunto A, es decir que a cada punto se le puede asignar el valor de su derivada parcial en dicho punto, queda definida la **función derivada parcial** respecto a x o respecto a y.

La funciones derivas parciales se denotan:

$$f'_x(x,y) = z'_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) \quad \text{o} \quad f'_y(x,y) = z'_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)$$

El símbolo ∂ denota derivada parcial y se debe al matemático C. G. Jacobi. Se la conoce también como «d de Jacobi».

Derivadas Parciales

De lo definido anteriormente, podemos deducir que las reglas para calcular las derivadas parciales son las mismas que se utilizan para calcular la derivada de las funciones de una sola variable independiente; sólo es preciso tener en cuenta con respecto a qué variable se desea derivar y mantener la otra constante.

Ejemplo:

Sea $z = xy^3 - 2x^2y + 3y$, obtengamos las derivadas parciales en el punto $(2,1)$.

Calculemos las funciones derivadas respecto de x e y respectivamente:

$z'_x = y^3 - 4xy$ Se obtuvo derivando respecto a x haciendo y constante

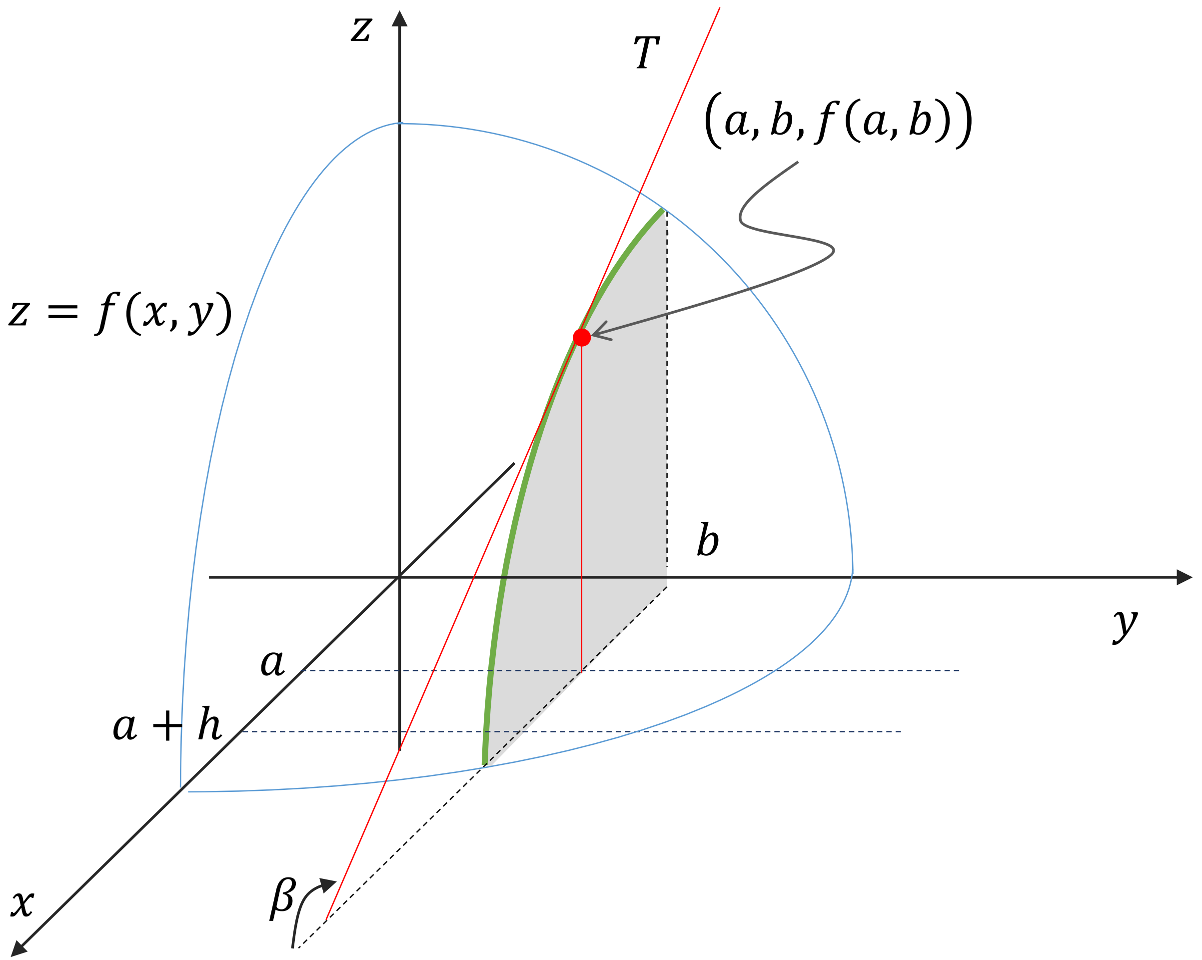
$z'_y = 3xy^2 - 2x^2 + 3$ Se obtuvo derivando respecto a y haciendo x constante

Ahora calculemos las derivadas en el punto $(2,1)$

$z'_x(2,1) = -7, \qquad z'_y(2,1) = 1$ ¿Qué podemos concluir de estos resultados?

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales: Interpretación Geométrica



Si trazamos el plano $y = b$, la intersección de éste con la superficie $z = f(x, y)$ determinará una curva (graficada en color verde).

Incrementemos la variable x en h.

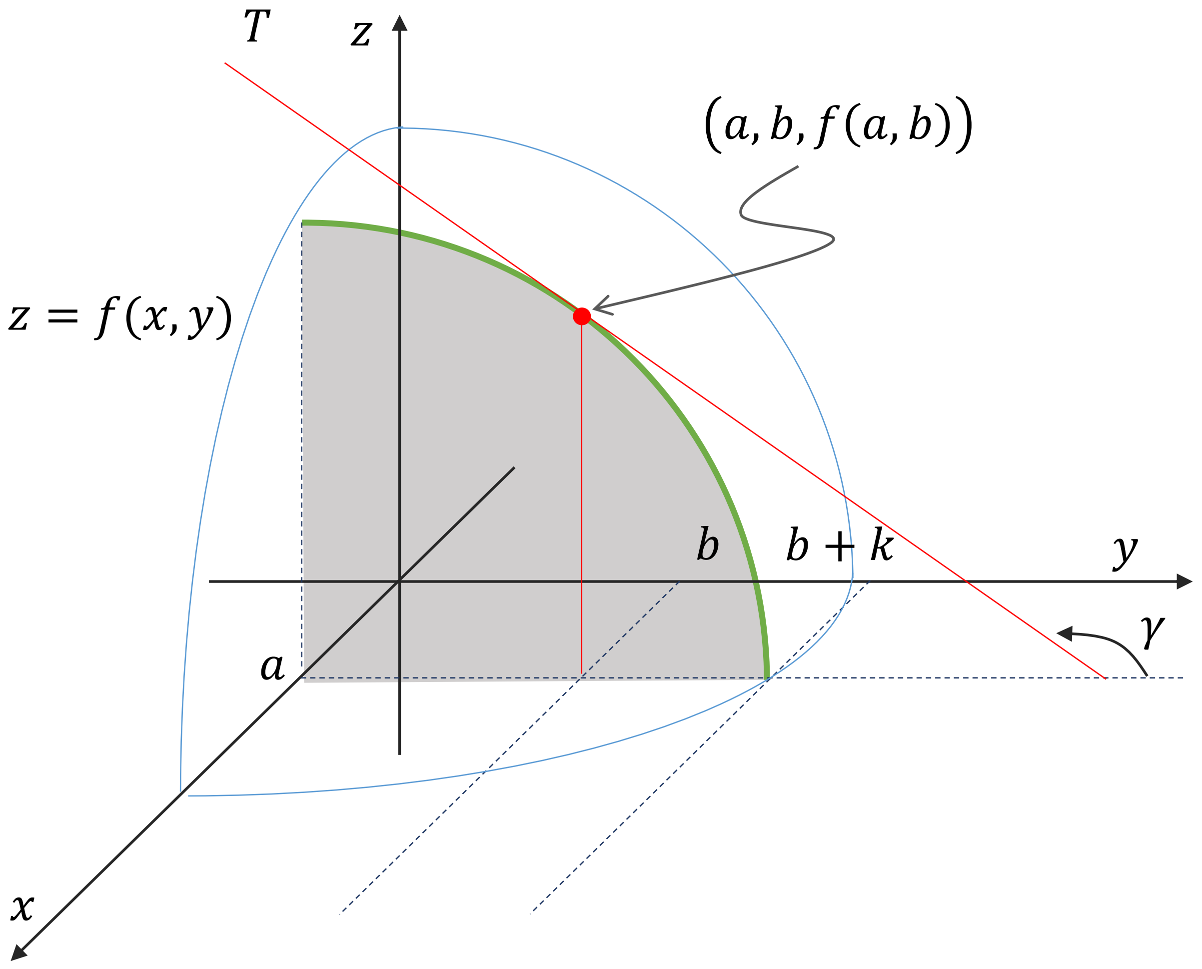
Si procedemos de manera análoga a lo estudiado para funciones de una variable independiente:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} = tg\,\beta = f'_x(a, b)$$

Es decir que, la derivada parcial de $f(x, y)$ respecto de x, en el punto (a, b), es igual al valor de la pendiente de la recta tangente T a la superficie $z = f(x, y)$ en $(a, b, f(a, b))$, en la dirección de x.

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales: Interpretación Geométrica



Si trazamos ahora el plano $x = a$, la intersección de éste con la superficie $z = f(x, y)$ determinará una curva (graficada en color verde).

Incrementemos la variable y en k.

Si procedemos de manera análoga a lo estudiado para funciones de una variable independiente:

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k} = tg\,\gamma = f'_y(a, b)$$

Es decir que, la derivada parcial de $f(x, y)$ respecto de y, en el punto (a, b), es igual al valor de la pendiente de la recta tangente T a la superficie $z = f(x, y)$ en $(a, b, f(a, b))$, en la dirección de y.

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales: Derivadas de orden superior

Como vimos, a partir de una función de dos o más variables independientes, se pueden definir las funciones derivadas parciales primeras. Estas funciones pueden, a su vez, admitir nuevas derivadas parciales. Cada función derivada, se puede volver a derivar respecto de una u otra variables de manera sucesiva:

$$
\begin{tikzcd}
 & & f''_{xx} \\
 & f'_x \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & f''_{xy} \\
z = f(x,y) \arrow[uur] \arrow[ddr] & & & \text{y así sucesivamente} \\
 & & f''_{yx} \\
 & f'_y \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & f''_{yy}
\end{tikzcd}
$$

Si las funciones derivadas segundas, se vuelven a derivar, se obtendrán 8 funciones derivadas parciales de 3° orden. Es fácil darse cuenta que, para funciones de dos variables independientes, obtendremos 2^n funciones derivadas de orden n.

Derivadas Parciales

Teorema de Schwartz

Si las derivadas parciales f'_x, f'_y y f''_{xy} de una función $z = f(x, y)$ existen en un entorno del punto $(a, b) \in D_f$ y además f''_{xy} es continua en dicho punto, entonces existe también $f''_{yx}(a, b)$ y se verifica que:

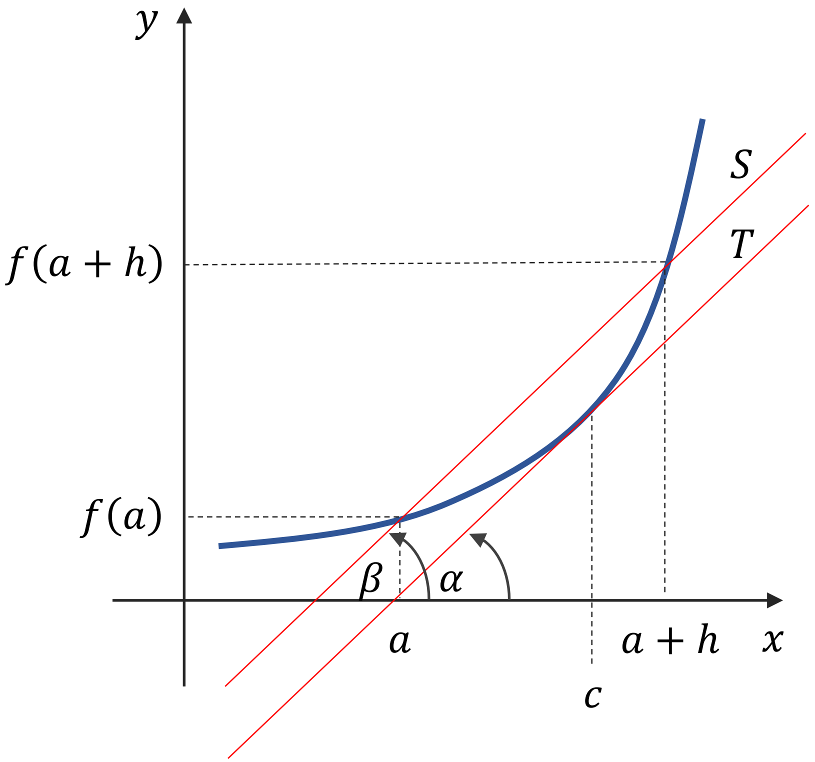
$$\boxed{f''_{yx}(a, b) = f''_{xy}(a, b)}$$

A este teorema se lo conoce también como el teorema de las derivadas cruzadas y establece la igualdad de las mismas en todos los puntos donde sean continuas, $f''_{yx}(x, y) = f''_{xy}(x, y)$. Si las derivadas cruzadas no son continuas, la igualdad no tiene por qué verificarse.

Derivadas Parciales

Preliminares

El Teorema de Schwartz se demostrará como consecuencia del Teorema del Valor Medio para funciones de una variable, recordemos su enunciado:



Si $y = f(x)$ es continua en $[a, a+h]$ y derivable en $(a, a+h)$, existe $c \in (a, a+h)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad (1)$$

$$tg\,\alpha = tg\,\beta \;\Rightarrow\; \alpha = \beta \text{ y } T \,||\, S$$

La ecuación (1) se puede expresar también:

$$f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta h)\,h \quad \text{con} \quad 0 < \theta < 1$$

Derivadas Parciales

Demostración del Teorema de Schwartz

Sea $z = f(x, y)$ y sea una función auxiliar en un entorno de $(a, b) \in D_f$, $(a + h, b + k) \in D_f$:

$g(x) = f(x, b + k) - f(x, b)$ con $a < x < a + h$, tal que: $g'(x) = f'(x, b + k) - f'(x, b)$

Aplicando el teorema del valor medio para una variable:

$g(a + h) - g(a) = g'(a + \theta h)\, h$ con $0 < \theta < 1$

Reemplazando a g y g':

$$f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - [f(a, b + k) - f(a, b)] = [f'_x(a + \theta h, b + k) - f'_x(a + \theta h, b)]\, h$$

Dividiendo ambos miembros por k:

$$\frac{f(a + h, b + k) - f(a + h, b)}{k} - \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k} = \frac{[f'_x(a + \theta h, b + k) - f'_x(a + \theta h, b)]}{k}\, h$$

Y tomando el límite para $k \to 0$:

Derivadas Parciales

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(a+h,b+k)-f(a+h,b)}{k}-\lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{[f'_x(a+\theta h,b+k)-f'_x(a+\theta h,b)]}{k}h$$

$$f'_y(a+h,b)\ -f'_y(a,b)=f''_{xy}(a+\theta h,b)\ h$$

Dividiendo ambos miembros por h:

$$\frac{f'_y(a+h,b)\ -f'_y(a,b)}{h}=f''_{xy}(a+\theta h,b)$$

Tomando el límite para $h\to 0$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'_y(a+h,b)\ -f'_y(a,b)}{h}=\lim_{h\to 0}f''_{xy}(a+\theta h,b)$$

$$\boxed{f''_{yx}(a,b)=f''_{xy}(a,b)}$$

Nota: En general es: $f''_{yx}(x,y)=f''_{xy}(x,y)$

Derivadas Parciales

Ejemplo:

Calcular las derivadas parciales sucesivas hasta el segundo orden de la función:

$$f(x, y) = y.e^{2x} + 2x.e^{y}$$

Calculamos las derivadas parciales de 1er orden:

$$f'_x = 2y.e^{2x} + 2\,e^{y}$$

$$f'_y = e^{2x} + 2x.e^{y}$$

Calculamos las derivadas parciales de 2do orden:

$$f''_{xx} = 4y.e^{2x}$$

$$f''_{yy} = 2x.e^{y}$$

$$f''_{xy} = 2\,e^{2x} + 2\,e^{y}$$

$$f''_{yx} = 2\,e^{2x} + 2\,e^{y}$$

$$\boxed{f''_{yx}(x, y) = f''_{xy}(x, y)}$$

Derivadas Parciales

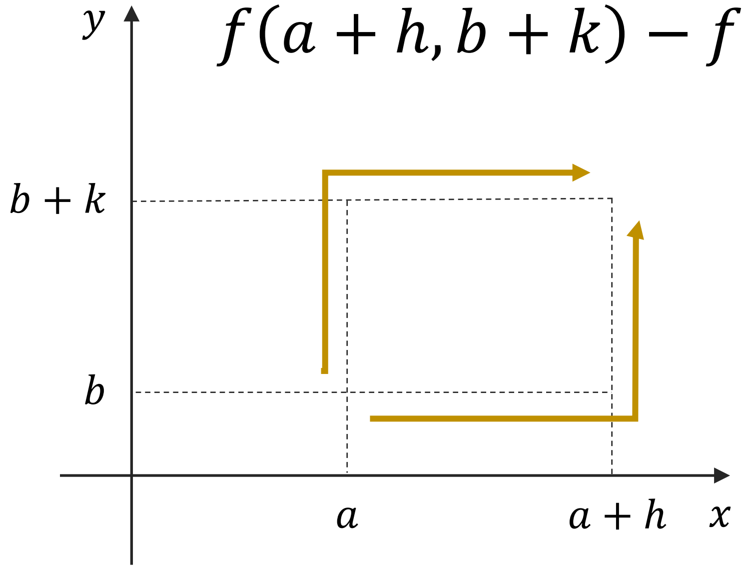
Teorema del Valor Medio para campos escalares de dos variables independientes

Sea $z = f(x, y)$ una función continua y derivable parcialmente en el entorno de un punto $(a, b) \in D_f$ y $(a + h, b + k)$ un punto que pertenece a dicho entorno. Entonces:

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = h\, f'_x(a + \theta_1 h, b) + k\, f'_y(a + h, b + \theta_2 k) \quad (1)$$

O bien:

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = k\, f'_y(a, b + \theta_2 k) + h\, f'_x(a + \theta_1 h, b + k) \quad (2)$$



Con $0 < \theta_1 < 1$ y $0 < \theta_2 < 1$

Según se incremente primero en x o en y dejando constante la otra variable.

Derivadas Parciales

Demostración del Teorema del Valor Medio

1) Incrementamos x dejando y constante ($y = b$)

$f(x, b) = g(x)$ es continua y derivable, por hipótesis, en $(a, a + h)$. Podemos luego aplicar el TVM para una variable a $g(x)$:

$$g(a + h) - g(a) = h\, g'(a + \theta_1 h) \quad \text{con} \quad 0 < \theta_1 < 1$$

Es decir:

$$f(a + h, b) - f(a, b) = h\, f'_x(a + \theta_1 h, b) \qquad (I)$$

2) Incrementamos y dejando x constante ($x = a + h$)

$f(a + h, y) = u(y)$ es continua y derivable, por hipótesis, en $(b, b + k)$. Podemos luego aplicar el TVM para una variable a $u(y)$:

$$u(b + k) - u(b) = k\, u'(b + \theta_2 k) \quad \text{con} \quad 0 < \theta_2 < 1$$

Es decir:

$$f(a + h, b + k) - f(a + h, b) = k\, f'_y(a + h, b + \theta_2 k) \qquad (II)$$

Derivadas Parciales

Sumamos (I) y (II):

$$f(a+h,b)-f(a,b)+f(a+h,b+k)-f(a+h,b)=h\,f'_x(a+\theta_1 h,b)+k\,f'_y(a+h,b+\theta_2 k)$$

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=h\,f'_x(a+\theta_1 h,b)+k\,f'_y(a+h,b+\theta_2 k)$$

Y la expresión (1) queda demostrada.

Podemos ahora demostrar la expresión (2) mediante un procedimiento análogo, incrementando primero y:

1) Incrementamos y dejando x constante ($x=a$)

$f(a,y)=g(y)$ es continua y derivable, por hipótesis, en $(b,b+k)$. Podemos luego aplicar el TVM para una variable a $g(y)$:

$$g(b+k)-g(b)=k\,g'(b+\theta_2 k) \quad \text{con} \quad 0<\theta_2<1$$

Es decir:

$$f(a,b+k)-f(a,b)=k\,f'_y(a,b+\theta_2 k) \quad (III)$$

Derivadas Parciales

2) Incrementamos x dejando y constante ($y = b + k$)

$f(x, b + k) = u(x)$ es continua y derivable, por hipótesis, en $(a, a + h)$. Podemos luego aplicar el TVM para una variable a $u(x)$:

$$u(a + h) - u(a) = h\, u'(a + \theta_1 h) \quad \text{con} \quad 0 < \theta_1 < 1$$

Es decir:

$$f(a + h, b + k) - f(a, b + k) = h\, f'_x(a + \theta_1 h, b + k) \qquad (IV)$$

Sumamos (III) y (IV):

$$f(a, b + k) - f(a, b) + f(a + h, b + k) - f(a, b + k) = k\, f'_y(a, b + \theta_2 k) + h\, f'_x(a + \theta_1 h, b + k)$$

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = k\, f'_y(a, b + \theta_2 k) + h\, f'_x(a + \theta_1 h, b + k)$$

Y la expresión (2) queda demostrada.

Análisis Matemático II

Derivada Direccional

Derivada Direccional

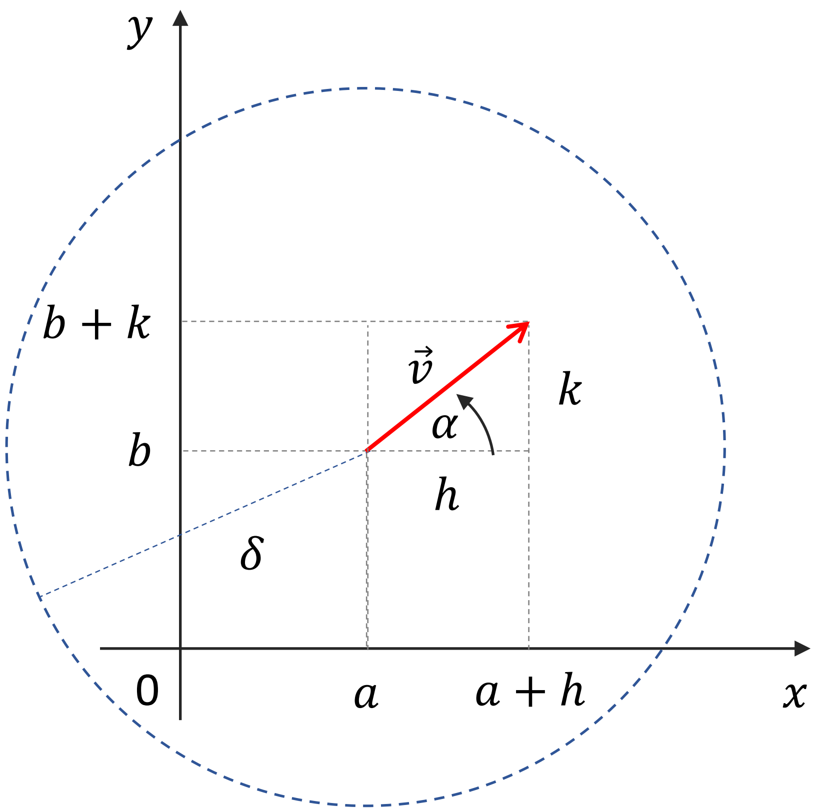
Introducción

Hemos estudiado que, dada una función $z = f(x, y)$, las derivadas parciales con respecto a x y a y nos dan la razón de cambio de f a medida que nos movemos en la dirección de x o y respectivamente. La pregunta que podemos hacernos en este momento es, ¿qué pasa si nos movemos en una dirección que no sea paralela al eje x o al eje y?

En campos escalares de dos o más variables independientes, de acuerdo a los incrementos de dichas variables, se pueden obtener infinitas derivadas. Estas infinitas derivadas se denominan **derivadas direccionales** y, como veremos más adelante, las derivadas parciales son un caso particular de ellas.

Derivada Direccional

Sea $z = f(x, y)$ una función derivable parcialmente en un entorno $E[(a, b), \delta]$ y un punto $(a + h, b + k)$ perteneciente a dicho entorno.



Las variables x e y se incrementan en una cantidad h y k, que pueden considerarse como las componentes de un vector $\vec{v}$ que, a su vez, indica la dirección y sentido en el que se incrementa el punto (a, b).

El vector $\vec{v}$ forma, con el semieje positivo de las x, un ángulo α que indica la dirección y sentido en el cual vamos a calcular la derivada direccional.

$$tg\,\alpha = \frac{k}{h} \Rightarrow \alpha = arctg\,\frac{k}{h}$$

Derivada Direccional

Definición

Al movernos de (a,b) a $(a+h,b+k)$ la función f se incrementa un valor Δz:

$$\Delta z = f(a+h,b+k) - f(a,b)$$

Por otro lado, el incremento entre (a,b) y $(a+h,b+k)$ es su distancia, es decir:

$$|\vec{v}| = \sqrt{h^2+k^2}$$

Diremos que, la derivada direccional de f en la dirección del vector $\vec{v}$, en el punto (a,b), será el límite del cociente incremental cuando el módulo de $\vec{v}$ tiende a 0:

$$f'_{\vec{v}}(a,b) = \lim_{|\vec{v}|\to 0} \frac{\Delta z}{|\vec{v}|} \Rightarrow \boxed{f'_{\alpha}(a,b) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}}}$$

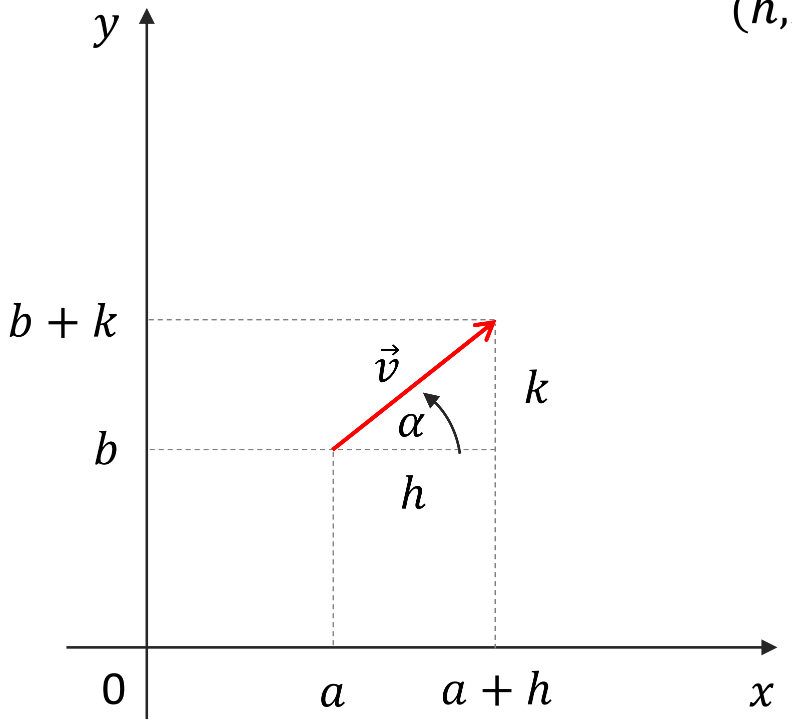
Se puede expresar también según el ángulo de dirección del vector $\vec{v}$

Cuando $|\vec{v}| \to 0$, $\sqrt{h^2+k^2} \to 0$, es decir, $(h,k) \to (0,0)$

Derivada Direccional

Podemos entonces definir la derivada direccional, usando la expresión:

$$f'_\alpha(a,b) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} \qquad (1)$$



h y k varían simultáneamente y vimos que:

$$tg\ \alpha = \frac{k}{h} \ \Rightarrow \ k = h \cdot tg\ \alpha$$

Reemplazando en (1), obtendremos una expresión con una sola variable, ya que α es conocida y por lo tanto $tg\ \alpha$ también lo es. Luego calcularíamos el límite para $h \to 0$.

No obstante, en lugar de aplicar la definición, deduciremos una fórmula para el cálculo de la derivada direccional.

Derivada Direccional

Fórmula para el cálculo de la Derivada Direccional

Aplicaremos el teorema del valor medio para funciones de dos variables en el numerador de la expresión (1):

$$f'_\alpha(a,b) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h \cdot f'_x(a+\theta_1 h, b) + k \cdot f'_y(a+h, b+\theta_2 k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} 0 < \theta_1 < 1 \\ 0 < \theta_2 < 1 \end{matrix}$$

$$f'_\alpha(a,b) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left[f'_x(a+\theta_1 h, b) \cdot \underbrace{\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\cos\alpha} + f'_y(a+h, b+\theta_2 k) \cdot \underbrace{\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{sen\,\alpha} \right]$$

$$\boxed{f'_\alpha(a,b) = f'_x(a,b) \cdot \cos\alpha + f'_y(a,b) \cdot sen\,\alpha}$$

Para $\alpha = 0°$ $\Rightarrow f'_\alpha(a,b) = f'_x(a,b)$

Para $\alpha = 90°$ $\Rightarrow f'_\alpha(a,b) = f'_y(a,b)$

Las derivadas parciales son un caso particular de la derivada direccional.

Derivada Direccional

Ejemplo:

Calcular la derivada de $z = f(x,y) = 2x + y^2$ en el punto $(2,1)$ en la dirección $\alpha = 45°$

Usaremos la fórmula:

$$f'_\alpha(a,b) = f'_x(a,b) \cdot cos\ \alpha + f'_y(a,b) \cdot sen\ \alpha$$

Calculemos, primero, las derivadas parciales de primer orden en $(2,1)$:

$$f'_x(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 2 \qquad \Rightarrow f'_x(2,1) = 2$$

$$f'_y(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 2\mathrm{y} \qquad \Rightarrow f'_y(2,1) = 2$$

Sabiendo que $cos\ 45° = sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

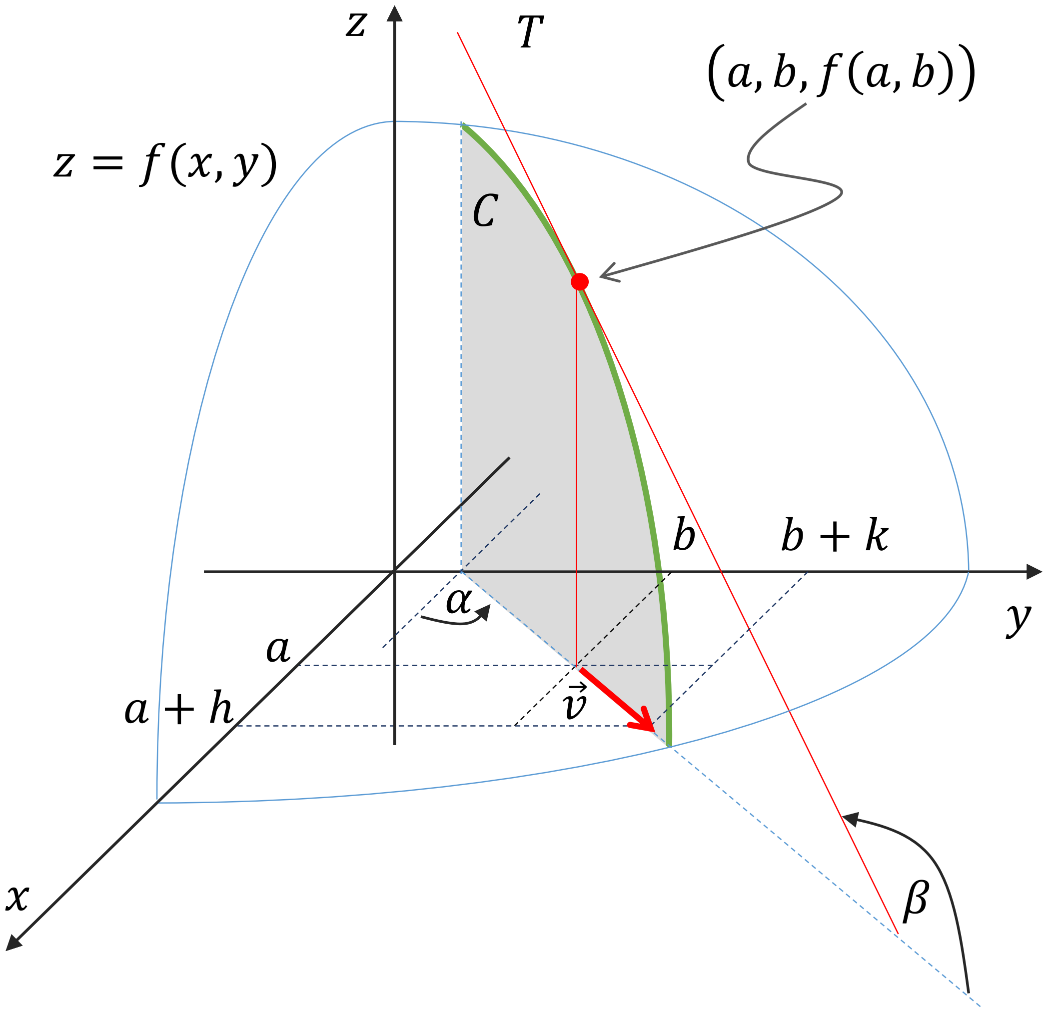
Entonces tendremos:

$$f'_{45°}(2,1) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

¿Y qué significa esto?

Derivada Direccional

Interpretación geométrica de la Derivada Direccional



Si trazamos un plano perpendicular al plano xy, que contiene al vector $\vec{v}$, la intersección de éste con la superficie $z = f(x,y)$ determinará la curva C.

Definimos la derivada de la función f en la dirección del vector $\vec{v}$ que forma un ángulo α con el semieje positivo de las x como:

$$f'_{\vec{v}}(a,b) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} = tg\,\beta$$

Es decir que, la derivada direccional de $f(x,y)$ en la dirección de $\vec{v}$, en el punto (a,b), es igual al valor de la pendiente de la recta tangente T a la superficie $z = f(x,y)$ en $(a, b, f(a,b))$, en la dirección de $\vec{v}$.

Derivada Direccional

Variación de la Derivada Direccional

Sabemos que:

$$f'_\alpha(a,b) = f'_x(a,b) \cdot cos\ \alpha + f'_y(a,b) \cdot sen\ \alpha$$

Conocidas la derivadas parciales de la función en (a,b), la derivada direccional resulta ser una función de una única variable α:

$$g(\alpha) = \underbrace{f'_x(a,b)} \cdot cos\ \alpha + \underbrace{f'_y(a,b)} \cdot sen\ \alpha$$

$constantes\ respecto\ a\ \alpha$

Puedo ahora calcular sus puntos críticos:

$$g'(\alpha) = -f'_x(a,b) \cdot sen\ \alpha + f'_y(a,b) \cdot cos\ \alpha = 0$$

$$f'_x(a,b) \cdot sen\ \alpha = f'_y(a,b) \cdot cos\ \alpha$$

$$tg\ \alpha = \frac{f'_y(a,b)}{f'_x(a,b)} \quad \Rightarrow \quad \alpha = arctg\ \frac{f'_y(a,b)}{f'_x(a,b)} \qquad (2)$$

La expresión (2) permite obtener dos valores distintos para α que corresponden a las direcciones de **mínima** y de **máxima** derivadas direccionales. Estos dos valores siempre indican sentidos opuestos de una misma recta. Valuando la derivada segunda, según su signo, se conoce si se trata de un máximo o un mínimo.

Derivada Direccional

Recordando el concepto de producto escalar de dos vectores, que se expresa como **suma de los productos de las componentes análogas**, se puede aplicar a la derivada direccional y expresarla como producto escalar de dos vectores:

$$f'_\alpha(a,b) = \left[f'_x(a,b); f'_y(a,b)\right] \cdot (cos\ \alpha; sen\ \alpha)$$

A este vector le llamaremos **Gradiente** de la función f en el punto (a,b) y es independiente de α.
Lo denotaremos $\overrightarrow{grad}\ f(a,b)$

Este será un **versor** (un vector unitario) en la dirección del vector $\vec{v}$ y, claramente, depende de α.
Lo denotaremos $\hat{v}$

Finalmente:

$$\boxed{f'_\alpha(a,b) = \overrightarrow{grad}\ f(a,b) \cdot \hat{v}}$$

Derivada Direccional

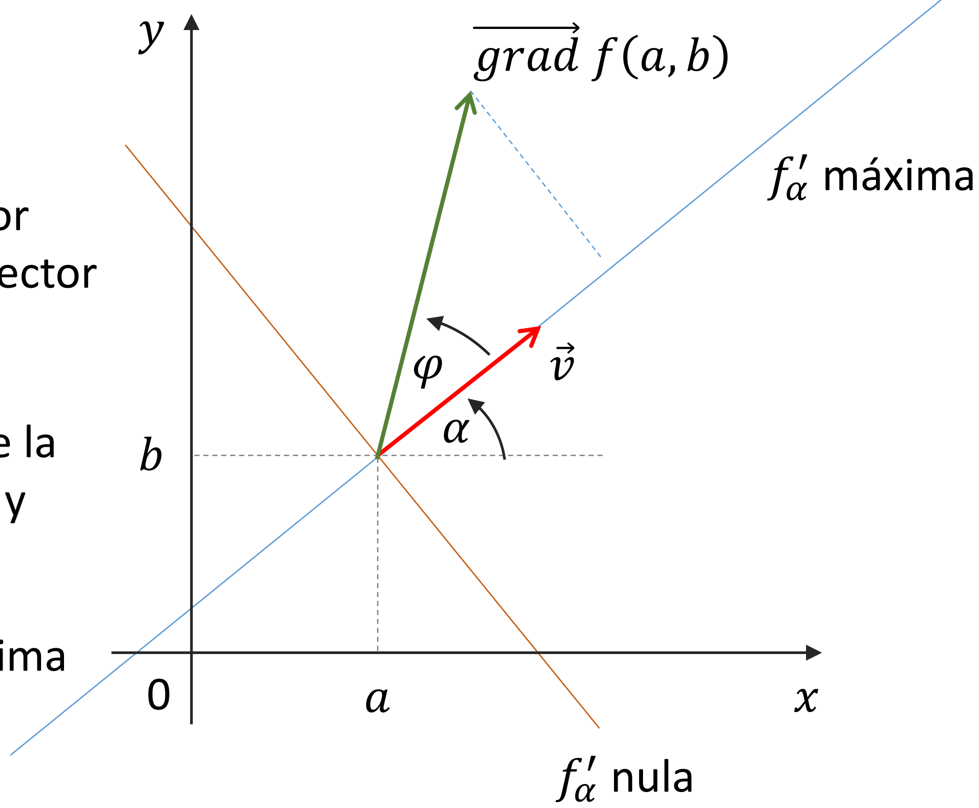
Supongamos que el vector gradiente forma un ángulo φ con el versor $\hat{v}$.

Podemos expresar el producto escalar como:

$$f'_\alpha(a,b) = \left|\overrightarrow{grad}\, f(a,b)\right| \cdot |\hat{v}| \cdot cos\ \varphi$$

Proyección del vector gradiente sobre el vector unitario.

$$f'_\alpha(a,b) = \underbrace{\left|\overrightarrow{grad}\, f(a,b)\right|}_{constantes} \cdot 1 \cdot cos\ \varphi$$



Luego $f'_\alpha(a,b)$ varía como $cos\ \varphi$

Cuando $\varphi = 0°, cos\ \varphi = 1$, luego:

$$f'_\alpha(a,b) = \left|\overrightarrow{grad}\, f(a,b)\right|$$

Máximo crecimiento de la función en la dirección y sentido del gradiente.

Cuando $\varphi = 180°, cos\ \varphi = -1$, luego:

$$f'_\alpha(a,b) = -\left|\overrightarrow{grad}\, f(a,b)\right|$$

Mínimo crecimiento de la función en la dirección del gradiente per en sentido opuesto.

Derivada Direccional

Propiedades del Gradiente de una función

Lo antes dicho puede resumirse en la siguiente propiedad:

1. La derivada de la función $z = f(x, y)$ en el punto (a, b), según una dirección α, es igual al producto escalar del vector gradiente de f en (a, b), por un vector unitario $\hat{v}$ en la dirección de α. Es decir, es igual a la proyección del vector gradiente sobre el vector unitario $\hat{v}$.

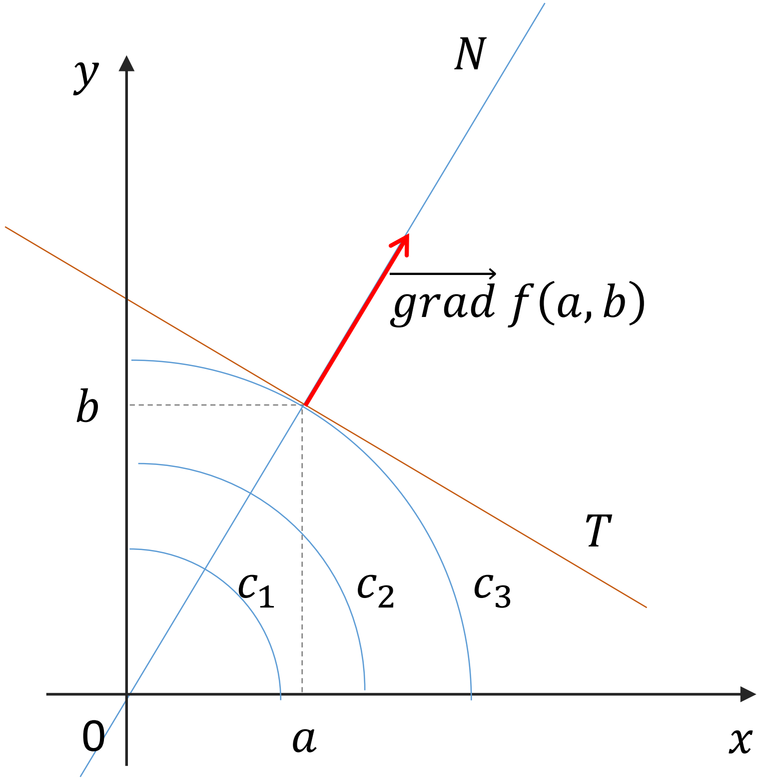
Podemos decir también que:

2. Dada $z = f(x, y)$, en cada punto (a, b) del dominio de f, el vector gradiente está dirigido según la normal, en ese punto, a la curva de nivel de la superficie.
3. Dada $z = f(x, y)$, la derivada de la función, en el punto (a, b), en la dirección de la recta tangente a la curva de nivel en dicho punto es igual a cero.

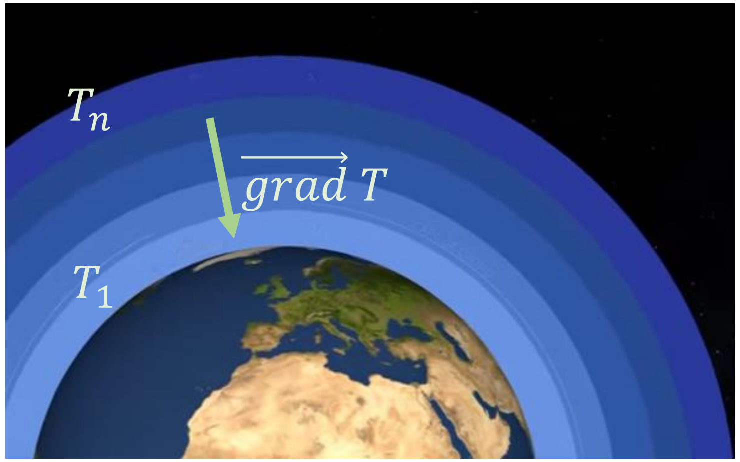
Derivada Direccional

Veamos esto gráficamente, el vector gradiente es perpendicular a la curva de nivel c_3, en el punto de coordenadas (a, b), suponiendo $c_1 < c_2 < c_3$.

En la dirección de T, la derivada direccional es nula.



Un ejemplo de aplicación del gradiente es el análisis de la variación de temperatura en las distintas capas de la atmósfera **T1 >... > Tn**



Derivada Direccional

Ejemplo:

Calcule las derivadas direccionales máxima y mínima de la función $z = f(x,y) = x^2 + xy + y$ en el punto $(3,2)$ y represente gráficamente.

Resolveremos de dos formas:

a) Calculando máximos y mínimos de la función derivada direccional.

Calculemos la derivada direccional de la función en el punto $(3,2)$:

Las derivadas parciales de primer orden orden en $(3,2)$:

$$\left.\begin{array}{ll} f'_x(x,y) = 2x + y & \Rightarrow f'_x(3,2) = 8 \\ f'_y(x,y) = x + 1 & \Rightarrow f'_y(3,2) = 4 \end{array}\right| \quad \boxed{f'_\alpha(3,2) = f'_x(3,2).\,cos\alpha + f'_y(3,2)sen\alpha}$$

Luego, la derivada direccional de la función en el punto (3,2) es una función que depende de una única variable α.

$$g(\alpha) = 8.\,cos\alpha + 4.\,sen\alpha$$

Calculemos los puntos críticos:

$$g'(\alpha) = -8.\,sen\alpha + 4.\,cos\alpha = 0$$

$$\alpha = arctg\,\frac{4}{8}$$

$$\alpha = arctg\;0{,}5 \rightarrow \boxed{\alpha \cong 0{,}46 \rightarrow 26{,}6°}$$

Derivada Direccional

Calculamos la derivada segunda y la valuamos en el punto crítico para saber si corresponde a un máximo o un mínimo:

$g''(\alpha) = -8.\,cos\alpha - 4.\,sen\alpha$

$g''(26{,}6°) \cong -8.9 < 0 \;\rightarrow$ Hay máxima derivada direccional en $\alpha \cong 0{,}46 \rightarrow 26{,}6°$

Finalmente, sumando un ángulo de π radianes $= 180°$

Hay mínima derivada direccional en $\alpha \cong 3{,}61 \rightarrow 206{,}6°$

b) Aplicando las propiedades del vector gradiente.

$$\overrightarrow{grad}\, f(3,2) = \left[f'_x(3,2); f'_y(3,2)\right]$$

Las derivadas parciales de primer orden orden en $(3,2)$:

$$f'_x(x,y) = 2x + y \qquad \Rightarrow f'_x(3,2) = 8 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{grad}\, f(3,2) = (8,4)} \quad \therefore \quad \alpha = arctg\,\frac{4}{8}$$

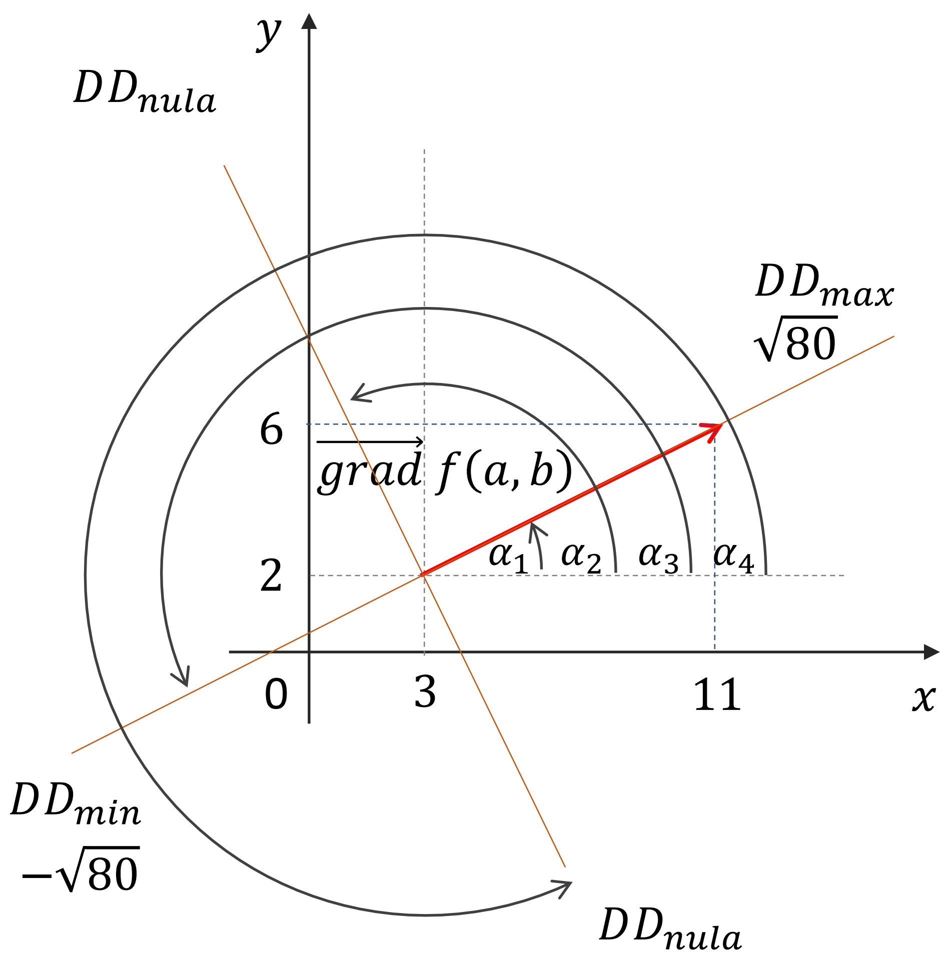
$$f'_y(x,y) = x + 1 \qquad \Rightarrow f'_y(3,2) = 4$$

$$\alpha_{c1} \cong 0{,}46 \rightarrow 26{,}6°$$

$$\left|\overrightarrow{grad}\, f(3,2)\right| = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80}$$

$$\alpha_{c2} \cong 3{,}61 \rightarrow 206{,}6°$$

Derivada Direccional



El gradiente apunta al primer cuadrante, α_{c1} es un ángulo del primer cuadrante, por lo tanto la derivada direccional máxima vale $\sqrt{80}$ cuando $\alpha_1 \cong 26{,}6°$ y vale $-\sqrt{80}$ cuando $\alpha_3 \cong 206{,}6°$.

En la dirección perpendicular a la dirección de máximo o mínimo, se obtienen las derivadas direccionales nulas, es decir, que la derivada direccional vale 0 cuando $\alpha_2 \cong 116{,}6°$ o también $\alpha_4 \cong 296{,}6°$.

Esta situación puede verse reflejada en el gráfico de la izquierda.

Análisis Matemático II

Diferencial

Diferencial

Infinitésimos

$y = f(x)$ es un infinitésimo para $x \to a$, si y sólo si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Por lo tanto, un infinitésimo **no** es un número, es una **variable** que tiende a cero.

Comparación entre infinitésimos

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos infinitésimos para $x = a$, entonces si:

1. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \;\Rightarrow$ $f(x)$ es un infinitésimo de orden superior a $g(x)$ o bien $g(x)$ es un infinitésimo de orden inferior. Esto significa que $f(x) \to 0$ más rápidamente que $g(x)$.

   $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty \;\Rightarrow$ $g(x)$ es un infinitésimo de orden superior a $f(x)$.

Diferencial

2. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = cte \neq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos del mismo orden.

3. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos equivalentes del mismo orden.

Ejemplo:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, x}{x} = 1 \;\Rightarrow\quad sen\, x$ y x son infinitésimos equivalentes para $x = 0$.

Observe que este límite es un límite notable.

Una función es un infinitésimo en las proximidades del punto a. Suele decirse, sencillamente, que es un infinitésimo en $x = a$.

Diferencial

Operaciones entre infinitésimos

1. Si $f(x)$ es un infinitésimo para $x = a$, entonces $k \cdot f(x)$ es otro infinitésimo del mismo orden para $x = a$.
2. Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos infinitésimos para $x = a$, entonces $f(x) \cdot g(x)$ es otro infinitésimo de mayor orden que $f(x)$ y $g(x)$ para $x = a$.
3. Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos infinitésimos para $x = a$ y $f(x)$ es de menor orden que $g(x)$, $f(x) \pm g(x)$ es otro infinitésimo para $x = a$ del mismo orden que $f(x)$. Además, el infinitésimo que es suma de dos o más infinitésimos, se llama **infinitésimo compuesto.** El que fija el orden del infinitésimo compuesto, es el infinitésimo de menor orden y por eso se llama **parte principal** del infinitésimo compuesto.

   En este caso: $\underbrace{f(x)}_{\text{Parte Principal}} + \underbrace{g(x)}_{\text{Término despreciable frente a la Parte Principal (por ser de mayor orden)}}$

Diferencial

Diferencial Total para campos escalares de dos variables

Dada $z = f(x, y)$, el incremento total Δz en un punto (a, b) es:

$$\Delta z = f(a + h, b + k) - f(a, b)$$

Por el Teorema del Valor Medio para funciones de dos variables:

$$\Delta z = f'_x(a + \theta_1 h, b) \cdot h + f'_y\,(a + h, b + \theta_2 k) \cdot k \qquad (1)$$

Calculemos los siguientes límites:

$$\lim_{h\to 0} f'_x(a + \theta_1 h, b) = f'_x(a, b) \;\Leftrightarrow\; f'_x(a + \theta_1 h, b) = f'_x(a, b) + \varepsilon_1$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f'_y\,(a + h, b + \theta_2 k) = f'_y(a, b) \;\Leftrightarrow\; f'_y\,(a + h, b + \theta_2 k) = f'_y(a, b) + \varepsilon_2$$

$\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando
$h \to 0$ y $k \to 0$

Reemplazando en (1):

Diferencial

$$\Delta z = [f'_x(a,b) + \varepsilon_1] \cdot h + [f'_y(a,b) + \varepsilon_2] \cdot k$$

Aplicando propiedad distributiva:

$$\Delta z = \underbrace{f'_x(a,b) \cdot h + f'_y(a,b) \cdot k}_{\text{Esta es la Parte Principal del incremento } \Delta z.} + \overbrace{\varepsilon_1 \cdot h + \varepsilon_2 \cdot k}^{\text{Este es un infinitésimo para } (0,0) \text{ de orden superior a } h \text{ y } k.} \qquad (2)$$

Este es un infinitésimo para $(0,0)$ de orden superior a h y k.

Esta es la Parte Principal del incremento Δz.

$\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $h \to 0$ y $k \to 0$

Se llama **diferencial total** de una función z a la parte principal de infinitésimo Δz (es decir, la parte principal del incremento de la función). Y la denotamos por dz.

Si consideramos un punto genérico y recordamos que $h = \Delta x$ y $k = \Delta y$ obtenemos la expresión analítica de la función diferencial:

$$\boxed{dz = f'_x(x,y) \cdot \Delta x + f'_y(x,y) \cdot \Delta y} \neq \Delta z \qquad (3)$$

Diferencial

Propiedades de la Función Diferencial

1. La condición SUFICIENTE para que una función sea diferenciable en un punto es que tenga derivadas parciales continuas en el punto.
2. Si una función es diferenciable en un punto, entonces:
    a. Es derivable parcialmente en el punto.
    b. Tiene derivadas direccionales en todas las direcciones en el punto.
    c. Es continua en el punto.

Nota: observe que una posible aplicación del diferencial de una función es determinar la continuidad de una función en un punto, sin tener que calcular el límite doble usando la propiedad *2.c*

Diferencial

Sea $z = f(x, y)$ diferenciable en (a, b). Se puede demostrar que $\Delta x = dx$ y $\Delta y = dy$.

En efecto, según la expresión (3):

- Si $z = x$

$$dz = dx \rightarrow \quad dx = f'_x(x, y) \cdot \Delta x + f'_y(x, y) \cdot \Delta y \quad \Rightarrow \boxed{dx = \Delta x}$$

Es diferenciable con

$f'_x(x, y) = 1$

$f'_y(x, y) = 0$

- Si $z = y$

$$dz = dy \rightarrow \quad dy = f'_x(x, y) \cdot \Delta x + f'_y(x, y) \cdot \Delta y \quad \Rightarrow \boxed{dy = \Delta y}$$

Es diferenciable con

$f'_x(x, y) = 0$

$f'_y(x, y) = 1$

Reemplazando en (3):

Diferenciales parciales de la función respecto de x e y

Diferencial Total de la función

$$\boxed{dz = \overbrace{f'_x(x, y) \cdot dx}^{dz_x} + \overbrace{f'_y(x, y) \cdot dy}^{dz_y}}$$

Esta es otra expresión para el diferencial de una función

Diferencial

Podemos extender este resultado a funciones con un mayor número de variables independientes:

Sea $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un campo escalar con n variables independientes:

$$dy = f'_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot dx_1 + f'_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot dx_2 + \cdots + f'_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot dx_n$$

Ejemplo: Calculemos el diferencial de la función $z = 3xy - x^2$ en el punto $(1, 2)$:

$dz = z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy$

$dz = (3y - 2x) \cdot dx + 3x \cdot dy$

En el punto $(1, 2)$ tendremos:

$dz(1, 2) = 4 \cdot dx + 3 \cdot dy$

Supongamos que $dx = 0.01$ y que $dy = 0.02$, entonces:

$dz(1, 2) = 4 \cdot 0.01 + 3 \cdot 0.02 = 0.1$

$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$

$\Delta z = 3(a + \Delta x)(b + \Delta y) - (a + \Delta x)^2 - (3ab - a^2)$

$\Delta z = 3(1 + 0.01)(2 + 0.02) - (1 + 0.01)^2 - 3 \cdot 1 \cdot 2 + 1^2$

$\Delta z = 0.1005$

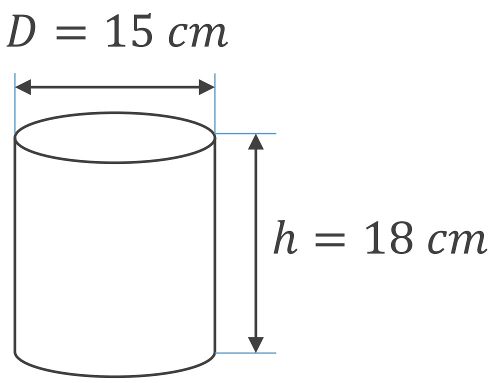
Podemos comparar el resultado obtenido al calcular el diferencial, con el incremento Δz.

*dz representa el incremento **aproximado** de la función z en el punto $(1,2)$ para los dx y dy dados.*

Diferencial

Aplicación del Diferencial Total de una función

***Evaluar el error de cálculo*:**



Se desea construir un objeto cilíndrico de madera, con las dimensiones dadas. Estimar el error máximo que puede cometerse en el volumen si el error máximo aceptado en cada medición es de $0.1\ cm$.

$$V = \frac{\pi}{4} D^2 h = 3180{,}9\ cm^3$$

$$e_{max} \cong dV = \left|\frac{\pi}{2} Dh\right| \cdot dD + \left|\frac{\pi}{4} D^2\right| \cdot dh$$

$$e_{max} \cong dV = \left|\frac{\pi}{2} 15 \cdot 18\right| \cdot 0.1 + \left|\frac{\pi}{4} 15^2\right| \cdot 0.1$$

$$e_{max} \cong dV = 42.4 + 17.7$$

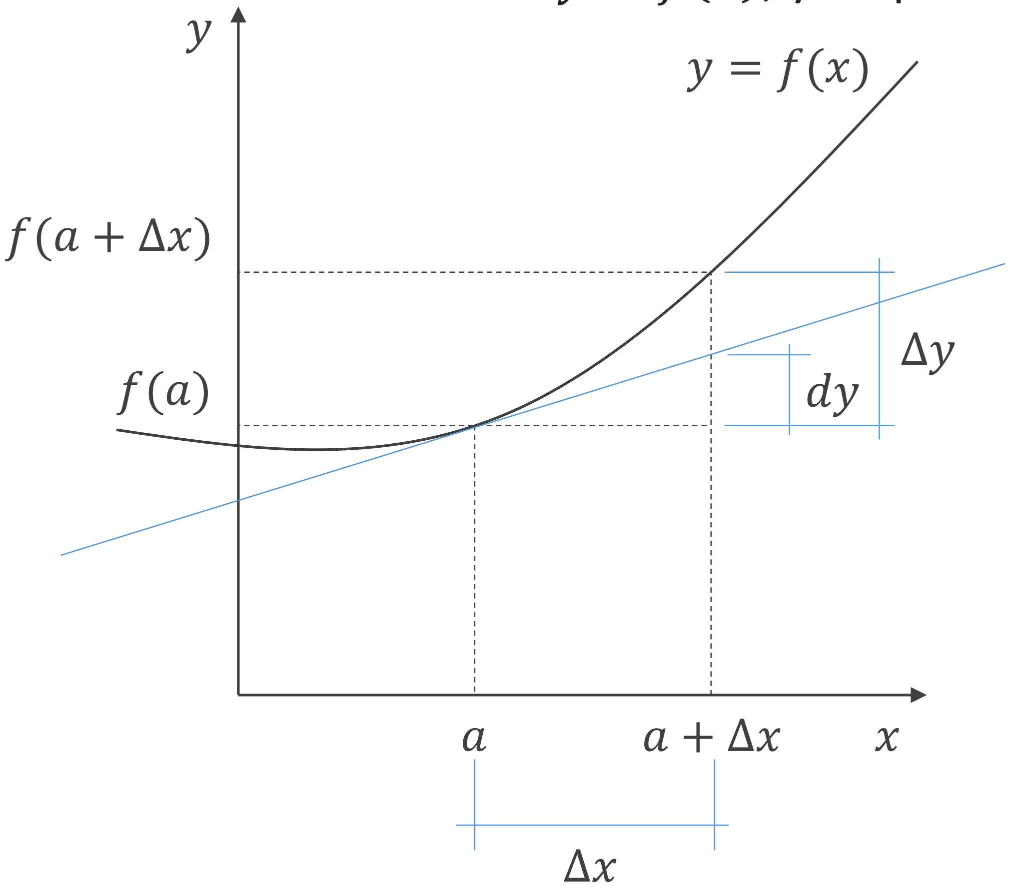
$$e_{max} \cong dV = 60.1\ cm^3$$

Estaríamos equivocándonos en poco menos del 2%

Diferencial

Interpretación gráfica del Diferencial (para una variable independiente)

Dada una función escalar $y = f(x)$, y un punto $a \in D_f$,



El $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$, implica que $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a) + \varepsilon$,

con $\varepsilon \to 0$, cuando $\Delta x \to 0$, luego:

$$\Delta y = \underbrace{f'(a) \cdot \Delta x}_{} + \overbrace{\varepsilon \cdot \Delta x}^{}$$

Es despreciable frente a la parte principal

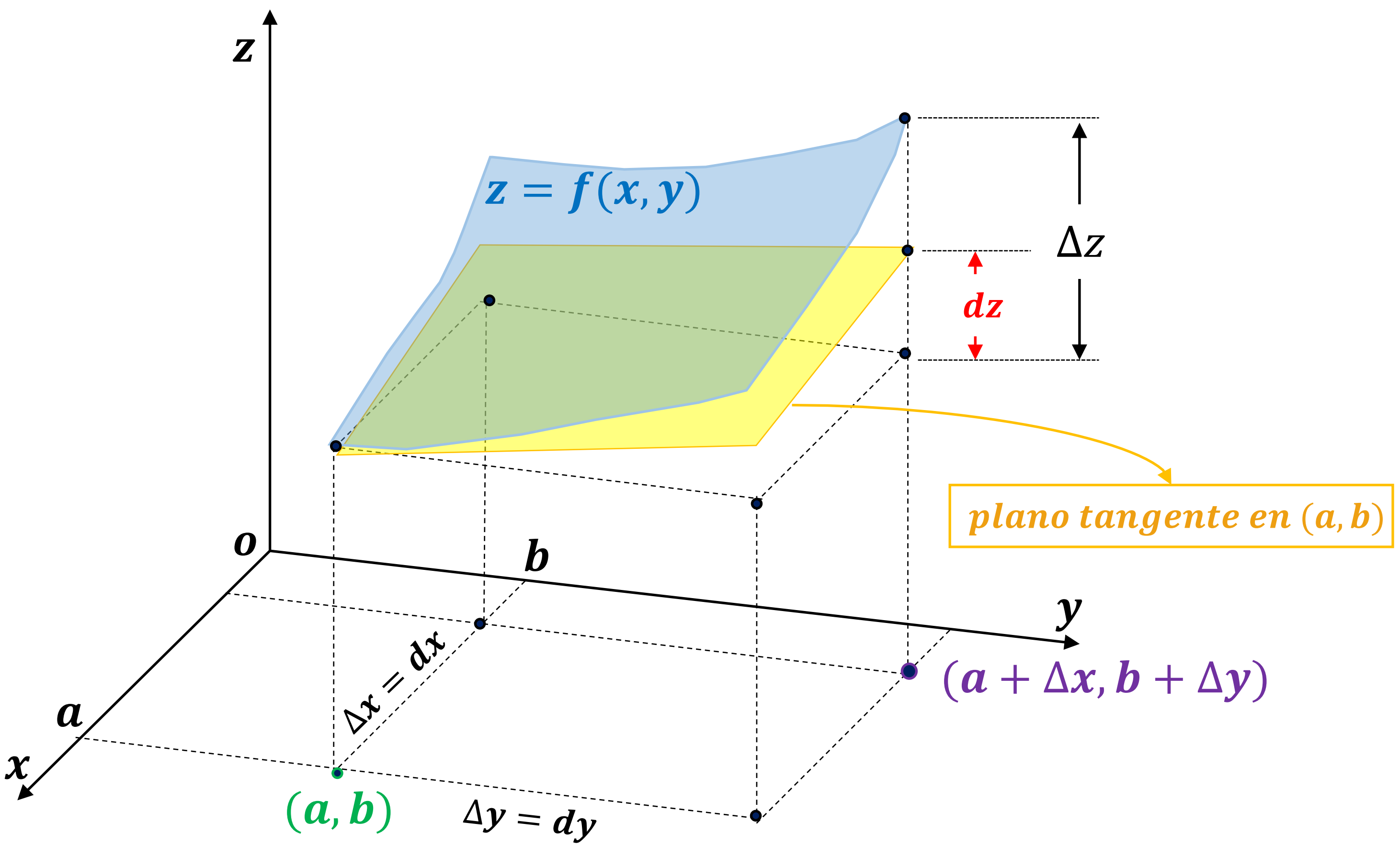
Este es el diferencial de la función f en a y lo denotamos por dy y es la parte principal del infinitésimo compuesto.

$\Delta y = dy + \varepsilon \cdot \Delta x$, con $\varepsilon \cdot \Delta x \to 0$, cuando $\Delta x \to 0$, es decir, para incrementos pequeños de x, $\Delta y \cong dy$.

Como puede verse en el gráfico, el diferencial mide la variación de la recta tangente al pasar del punto a al punto $a + \Delta x$. En a coinciden dy y Δy.

Diferencial

Interpretación gráfica del Diferencial (para dos variables independientes)



En forma análoga, como puede verse en el gráfico, el diferencial del campo escalar mide la variación del plano tangente al pasar del punto (a, b) al punto $(a + \Delta x, b + \Delta y)$.

Diferencial

Plano Tangente

Dada la función $z = f(x, y)$, consideremos el punto (x_0, y_0) y $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in E[(x_0, y_0), \delta]$. Si z es diferenciable en (x_0, y_0), podemos expresar el incremento de la función al pasar de (x_0, y_0) a $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ como dz en (x_0, y_0). Ya vimos que si $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$, $\Delta z \cong dz$. Entonces:

$\Delta z = z - z_0 \cong f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$, despejando z:

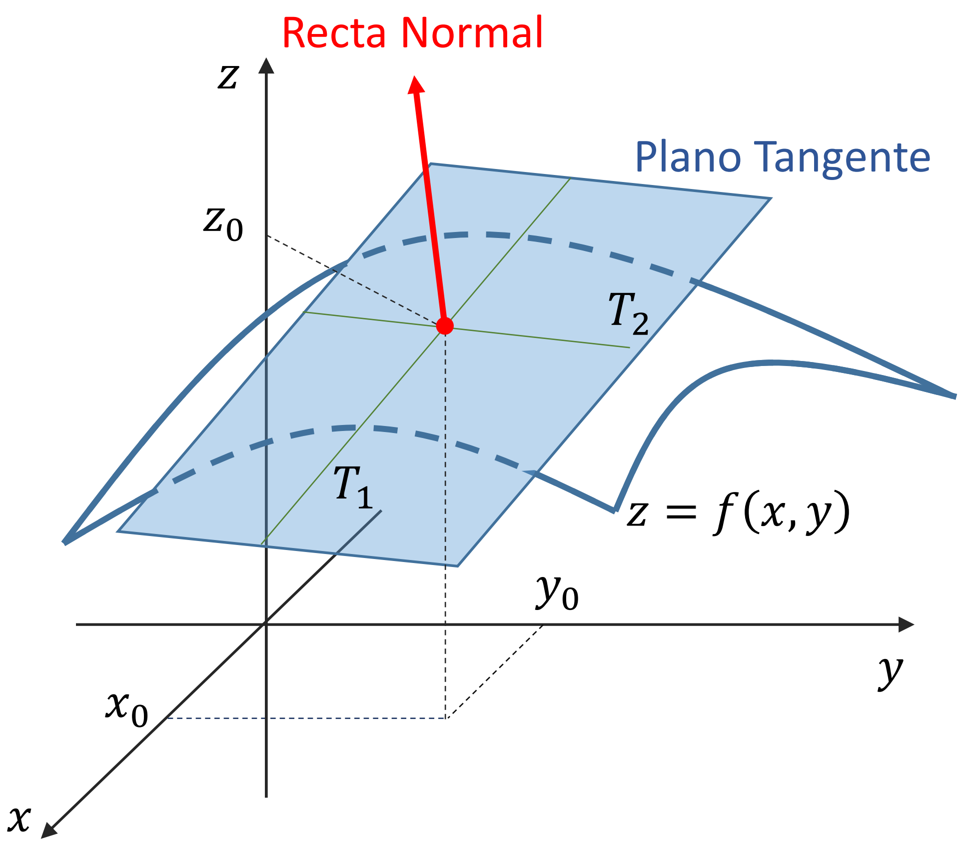
$$z \cong \underbrace{f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + z_0}$$

Esta es la ecuación de un plano que recibe el nombre de **plano tangente** a la superficie en (x_0, y_0, z_0)

En el punto (x_0, y_0) coinciden la imagen de la función z y del plano tangente.

El plano tangente contiene a todas las rectas tangentes a las curvas que pasan por el punto.

Diferencial



T_1: Recta tangente en la dirección de x

T_2: Recta tangente en la dirección de y

Cuando se sustituye el incremento Δz por el diferencial dz para aproximar una función, geométricamente se sustituye la superficie por el plano tangente. En realidad, se calcula la imagen del plano tangente y no de la superficie. Eso se denomina *aproximación lineal.*

La **recta normal** en un punto (x_0, y_0, z_0) es la recta perpendicular al plano tangente en dicho punto. Como los denominadores (número directores) de la ecuación de la recta perpendicular a un plano son los coeficientes de la ecuación del plano, tenemos:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Diferencial

Ejemplo:

Determinar la ecuación del plano tangente y la recta normal a la superficie $z = 9 - x^2 - y^2$ en el punto $(1, 2, 4)$

La ecuación del plano tangente es:

$$z = f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + \mathrm{z}_0$$

$$z = (-2) \cdot (x - 1) + (-4) \cdot (y - 2) + 4$$

$$z = -2x + 2 - 4y + 8 + 4$$

$$z = -2x - 4y + 14$$

$$f'_x(x, y) = -2x \;\Rightarrow\; f'_x(1, 2) = -2$$

$$f'_y(x, y) = -2y \;\Rightarrow\; f'_y(1, 2) = -4$$

La ecuación de la recta normal es:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{4} = z - 4$$

Diferencial

Diferenciales de orden superior

Sea $z = f(x, y)$ una función continua, con derivadas parciales también continuas, cuyo diferencial total es:

$$dz = z'_x\, dx + z'_y\, dy \quad \text{podemos expresarlo también:} \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy$$

Supondremos que x e y son independientes, que dx y dy son constantes y que las derivadas parciales de segundo orden son continuas. Diferenciemos este diferencial para obtener el **diferencial de segundo orden**:

$$d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy\right)$$

$$d^2 z = d_x\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy\right) + d_y\left(\frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)$$

Diferencial

$$d_x\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right)=\left(\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)}{\partial x}\right)dx=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,dy\right)dx$$

$$d_y\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)=\left(\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)}{\partial y}\right)dy=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\,dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy\right)dy$$

$$d^2z=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,dy\right)dx+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\,dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy\right)dy$$

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,dydx+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\,dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2$$

Diferencial de Segundo Orden:

$$\boxed{d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2+2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2}$$

Diferencial

El diferencial de segundo orden puede expresarse también mediante la siguiente fórmula simbólica:

$$d^2z = \left[\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right]^{[2]}$$

En general, podemos expresar el diferencial de orden n como:

$$d^nz = \left[\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right]^{[n]}$$

Para obtener el diferencial de orden n podemos diferenciar sucesivamente n veces y operar tal como se hizo para obtener el Diferencial de Segundo Orden, sin embargo, usando el concepto del Binomio de Newton, podemos hacer un cálculo más ágil y sencillo.

> *Ejemplo:* Obtener la fórmula del Diferencial de Tercer Orden:
>
> $$d^3z = \left[\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right]^{[3]} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\,dx^3 + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}\,dx^2dy + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}\,dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3$$

Se obtuvo siguiendo el método para el *cubo de un binomio*.

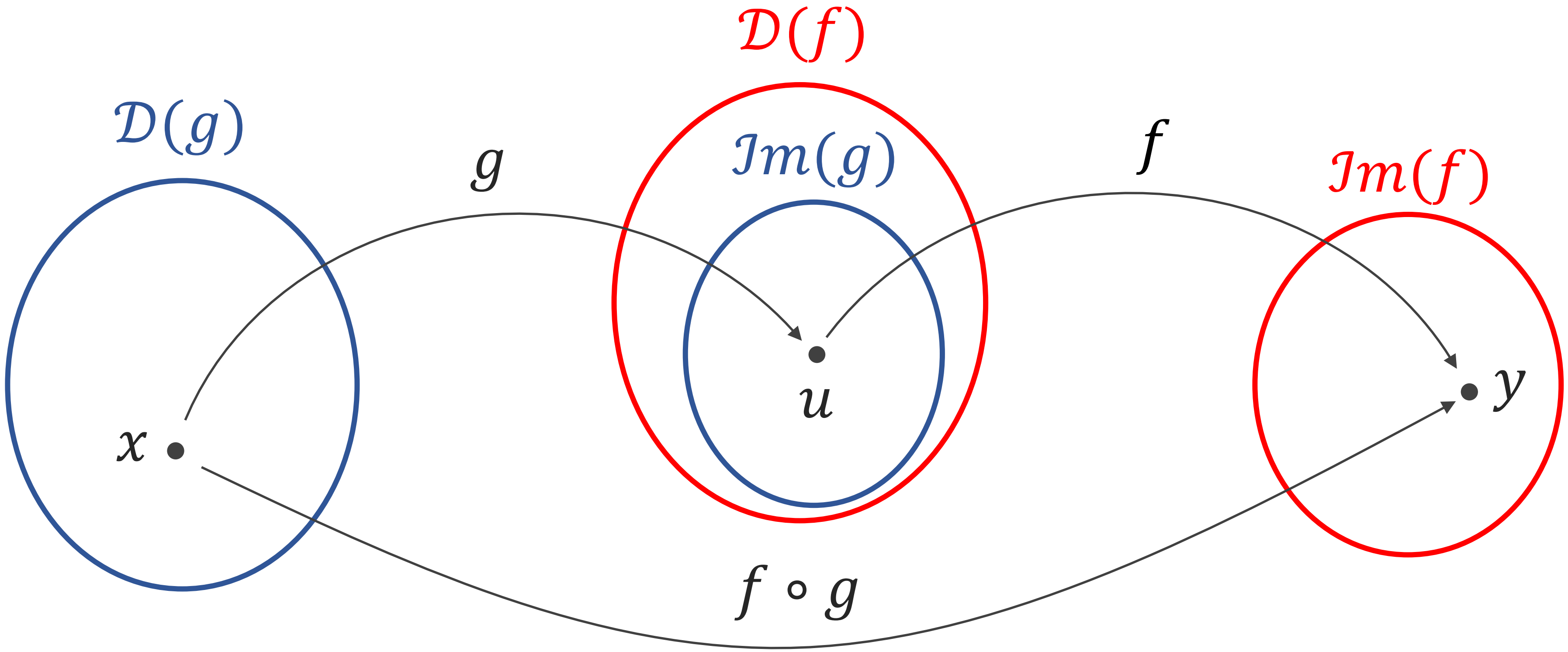
Análisis Matemático II

Derivada de la Función Compuesta
Derivada de la Función Implícita

Derivada de la Función Compuesta

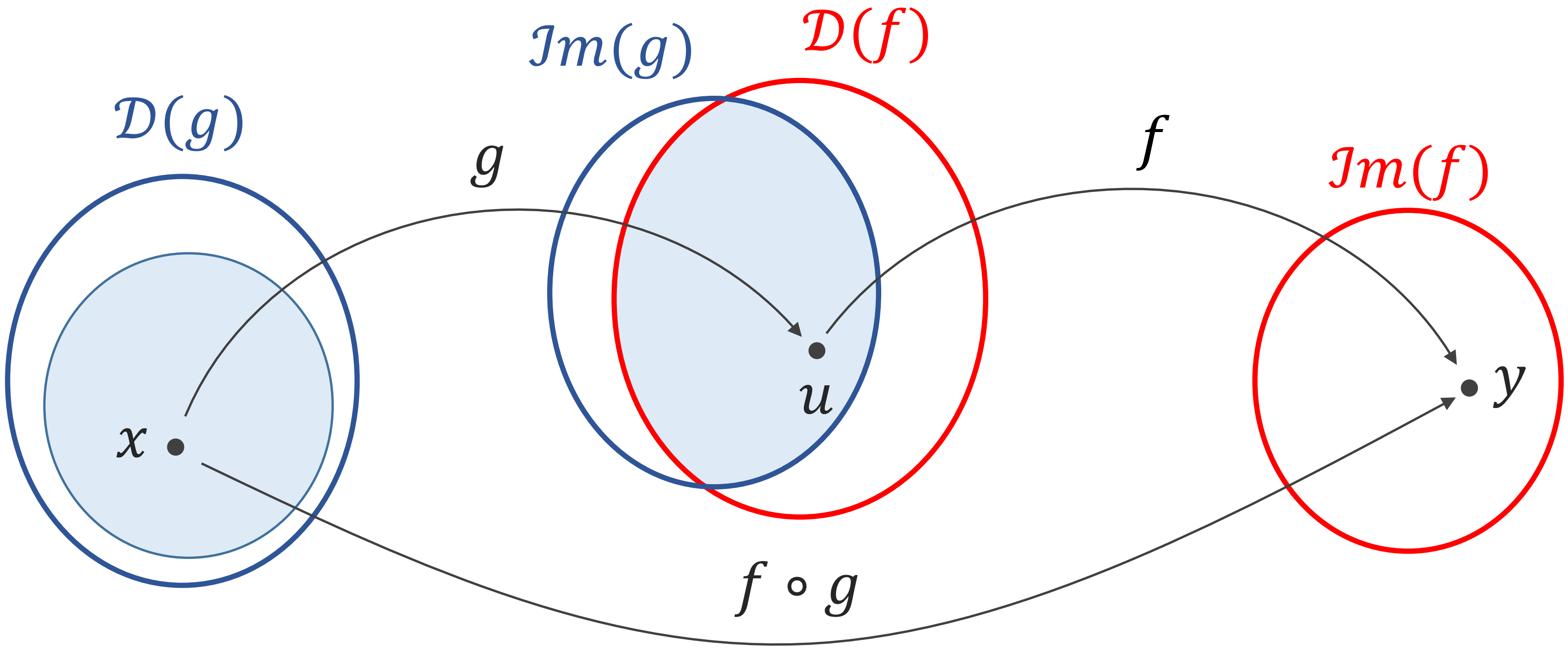
Para funciones de una variable (funciones escalares)

Dadas dos funciones escalares $y = f(u)$ y $u = g(x)$ se dice que y es una función compuesta de f y g y se expresa $y = (f \circ g)(x)$ o bien $y = f\big(g(x)\big)$.



Derivada de la Función Compuesta

Si no se cumple que $\mathcal{Im}(g) \subseteq \mathcal{D}(f)$ será necesario restringir el $\mathcal{D}(g)$ usando sólo aquellos elementos del $\mathcal{D}(g)$ cuya imagen pertenezca al $\mathcal{D}(f)$.



Derivada de la Función Compuesta

Para calcular la derivada de y aplicaremos la regla de la cadena.

Si $y = f(u)$ es una función derivable en u y si además $u = g(x)$ es una función derivable en x, entonces $y = f\big(g(x)\big)$ es una función derivable en x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[f\big(g(x)\big)\right] = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

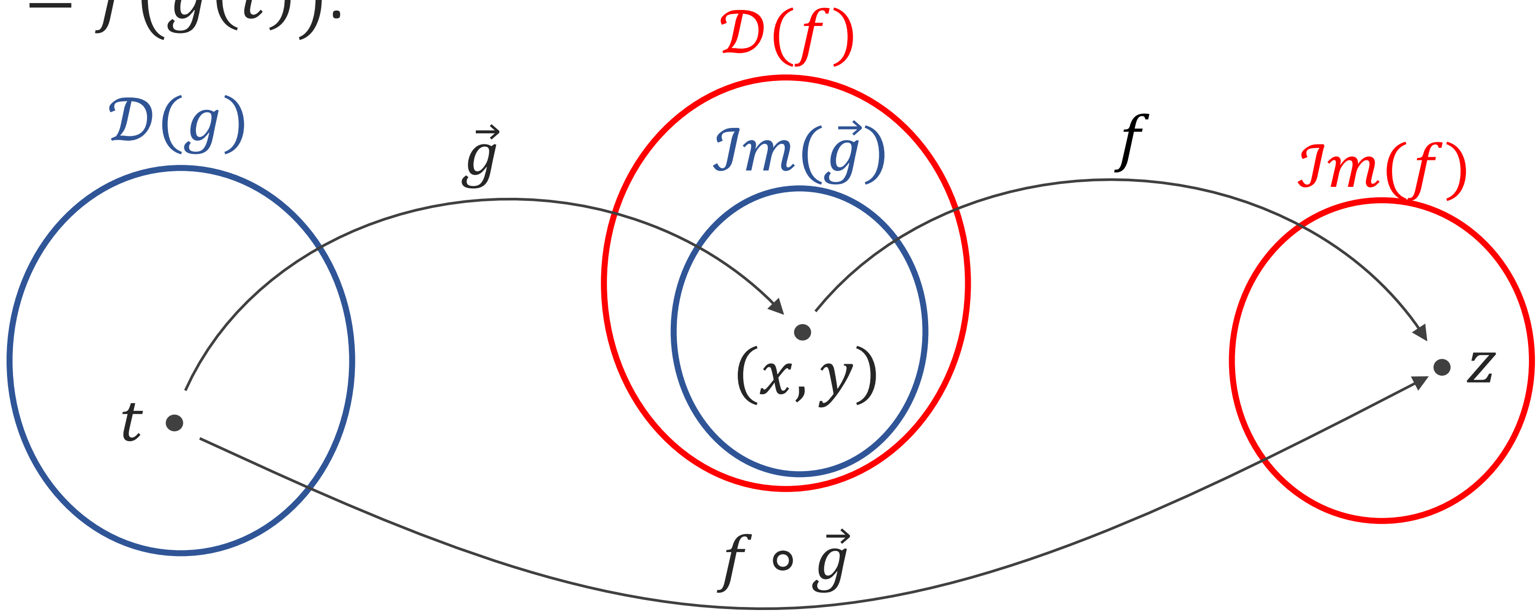
Alternativamente, en la notación de Leibniz, la regla de la cadena se expresa:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

Derivada de la Función Compuesta

Para funciones de dos variables (campos escalares)

Sea el campo escalar $z = f(x, y)$ y la función vectorial $\vec{g}(t) = [x(t), y(t)]$, donde x e y son funciones escalares de variable t. Si $\mathcal{I}m(\vec{g}) \subseteq \mathcal{D}(f)$ entonces existe una **única** función que es la compuesta de f y $\vec{g}$ denotada por $z = (f \circ \vec{g})(t)$ o bien $z = f\left(\vec{g}(t)\right)$.



Observemos la dependencia de z:

t: es una variable **independiente.**

z: es la variable **dependiente**.

x e y: son variables **intermedias**.

Derivada de la Función Compuesta

Usando la Regla de la Cadena, vamos a calcular:

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

Fijaremos las siguientes hipótesis:

1. f es continua y parcialmente derivable (para poder aplicar el TVM).
2. $\vec{g}$ es continua (para que $\Delta t \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0, \Delta y \to 0$).
3. $\vec{g}$ es derivable (para que existan $\dfrac{dx}{dt}$ y $\dfrac{dy}{dt}$).

Desarrollo:

Partimos escribiendo el incremento de la función z:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Derivada de la Función Compuesta

Aplicando el Teorema del Valor Medio:

$$\Delta z = f'_x(x+\theta_1\Delta x, y)\cdot\Delta x + f'_y(x+\Delta x, y+\theta_2\Delta y)\cdot\Delta y \quad \text{con} \quad \left[\begin{array}{l} 0<\theta_1<1 \\ 0<\theta_2<1 \end{array}\right.$$

Dividiendo ambos miembros por Δt:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = f'_x(x+\theta_1\Delta x, y)\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x+\Delta x, y+\theta_2\Delta y)\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Tomando el límite para $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} f'_x(x+\theta_1\Delta x, y)\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0} f'_y(x+\Delta x, y+\theta_2\Delta y)\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

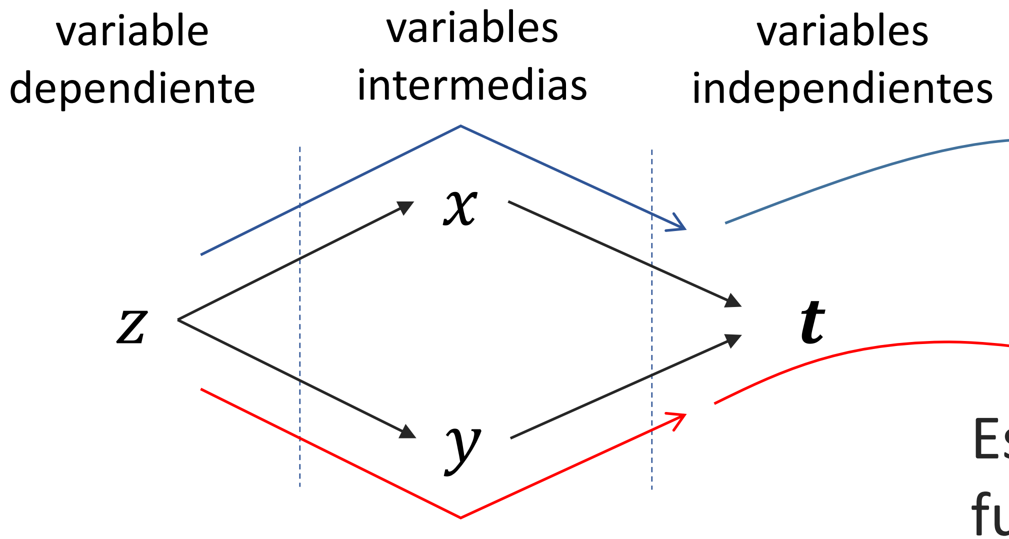
$$\frac{dz}{dt} = f'_x(x,y)\cdot\frac{dx}{dt} + f'_y(x,y)\cdot\frac{dy}{dt} \quad \text{o bien} \quad \boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}}$$

Derivada de la Función Compuesta

El resultado anterior se puede extender a funciones compuestas de varias variables intermedias y varias variables independientes.

Conviene construir un diagrama de dependencias:

1. Según el caso que acabamos de estudiar, $z = f(x, y)$ con $x = \varphi_1(t)$ e $y = \varphi_2(t)$



$$\frac{dz}{d\boldsymbol{t}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{d\boldsymbol{t}} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{d\boldsymbol{t}}$$

Es importante distinguir si se trata de derivadas de funciones de una única variable independiente o derivadas parciales.

Derivada de la Función Compuesta

Ejemplo:

Sea $z = x^2 + sen\, y$ con $\begin{cases} x = ln\, t \\ y = e^t \end{cases}$

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr] & \\ z \arrow[ur] \arrow[dr] & & t \\ & y \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \qquad (1)$$

Derivamos por separado:

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = cos\ y$

(c) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{t}$

(d) $\dfrac{dy}{dt} = e^t$

Reemplazaremos (a), (b), (c) y (d) en (1) y a las variables intermedias x e y por sus equivalencias:

$$\frac{dz}{dt} = 2x \cdot \frac{1}{t} + cos\, y \cdot e^t$$

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = 2 \cdot ln\, t \cdot \frac{1}{t} + cos(e^t) \cdot e^t}$$

Derivada de la Función Compuesta

2. Sea $z = f(x, y)$ con $x = \varphi_1(u, v)$ e $y = \varphi_2(u, v)$

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[r] \arrow[ddr] & u \\
z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & y \arrow[r] \arrow[uur] & v
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned}}$$

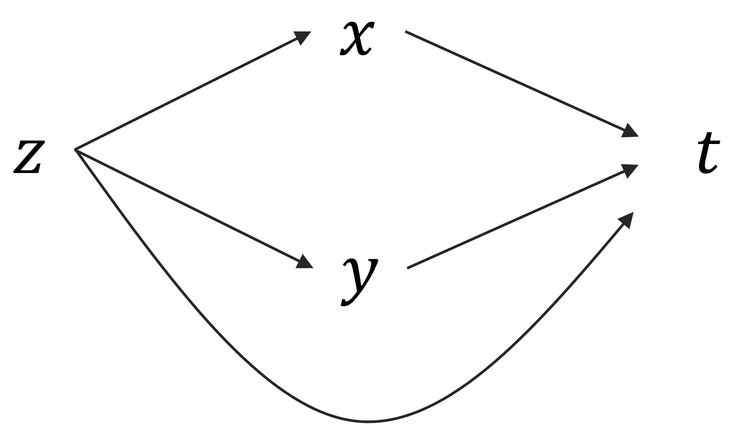
Se han agregado ahora, al diagrama de dependencias, dos variables independientes: u y v. Esto implica que z depende, por la composición de funciones, de esas dos variables independientes, por lo tanto, precisaremos calcular dos derivadas:

$$\frac{\partial z}{\partial u} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial v}$$

Además, todas las variables, tanto de z como de las variables intermedias x e y dependen de más de una variable. *Note que sólo aparecen derivadas parciales en las fórmulas*.

Derivada de la Función Compuesta

3. Sea $z = f(x, y, t)$ con $x = \varphi_1(t)$ e $y = \varphi_2(t)$



$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \overset{=1}{\cancel{\frac{dt}{dt}}}$$

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}}$$

Ejemplo:

Sea $z = x^2 + yt$ con $\begin{cases} x = t^2 \\ y = tg\ t \end{cases}$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\frac{dz}{dt} = 2x \cdot 2t + t \cdot sec^2\, t + y$$

$$\frac{dz}{dt} = 4t^3 + t \cdot sec^2\, t + tg\ t$$

Derivada de la Función Implícita

Para funciones de una variable

Según el Teorema de Cauchy-Dini (sin demostración), dada una ecuación $f(x, y) = 0$ si se cumple:

1. $\exists\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 / f(a, b) = 0$

   Es decir que existe al menos una solución de la ecuación.

2. $\exists\ f'_x(x, y)\ \wedge\ f'_y(x, y)$ en $E[(a, b), \delta]$

   Para poder calcular el diferencial.

3. $f'_y(a, b) \neq 0$

   Para que no se anule el denominador.

$$\Rightarrow \exists\ y = g(x) \ / \ f\big(x, g(x)\big) = 0, \quad \forall\ (x, y) \in E[(a, b), \delta]$$

Y además $y = g(x)$, que es la función definida en forma explícita por la ecuación $f(x, y) = 0$, es **única**, **continua** y **derivable**.

Derivada de la Función Implícita

Calcularemos $\dfrac{dy}{dx}$ sin pasar por la forma explícita:

Sea $z = f(x,y) \Rightarrow dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$

Como $f(x,y) = 0 \Rightarrow dz = 0 \Rightarrow 0 = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$, despejando:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}}$$

Ejemplo:

Sea $sen(x+y) = xy$

$f(x,y) = sen(x+y) - xy = 0$

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= cos(x+y) - y \\ f'_y(x,y) &= cos(x+y) - x \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{dy}{dx} = -\frac{cos(x+y) - y}{cos(x+y) - x}}$$

Derivada de la Función Implícita

Para funciones de dos variables

Según el Teorema de Cauchy-Dini, dada una función $f(x, y, z) = 0$ si se cumple:

1. $\exists\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / f(a, b, c) = 0$

   Es decir que existe al menos una solución de la ecuación.

2. $\exists\ f'_x(x, y, z), f'_y(x, y, z) \wedge\ f'_z(x, y, z)$ en $E[(a, b, c), \delta]$

   Para poder calcular el diferencial.

3. $f'_z(a, b, c) \neq 0$

   Para que no se anulen los denominadores.

$$\Rightarrow \exists\ z = g(x, y)\ /\ f\big(x, y, g(x, y)\big) = 0,$$

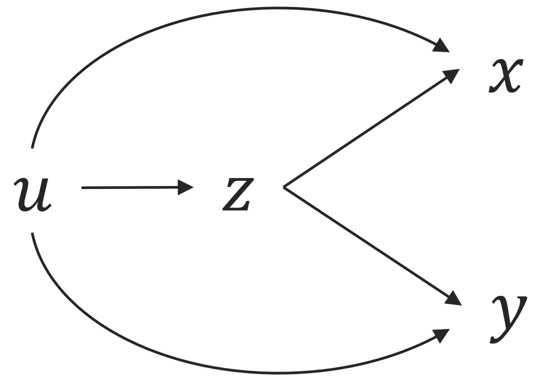
$$\forall\ (x, y, z) \in E[(a, b, c), \delta]$$

Y además $z = g(x, y)$, que es la función definida en forma explícita por la ecuación $f(x, y, z) = 0$, es **única**, **continua** y **derivable**.

Derivada de la Función Implícita

Calcularemos las derivadas parciales de $z = g(x, y)$, es decir de $f(x, y, z) = 0$, sin pasar por la forma explícita:

Sea $u = f(x, y, z)$ con $z = g(x, y)$



Entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

Pero $f(x, y, z) = 0$ entonces los primeros miembros resultan nulos.

Derivada de la Función Implícita

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}}$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}}$$

Esto se puede extender a campos escalares de n variables.

Atención:
- Todos los segundos miembros llevan un signo menos.
- Todos los denominadores son iguales.

Derivada de la Función Implícita

Ejemplo:

Dada $f(x,y,z) = z^{x-2} - x^2y - tg^2\frac{y}{z} = 0$. Calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\frac{\partial z}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \quad (I) \qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \quad (II)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z^{x-2}.Ln\, z - 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 - 2.\frac{1}{z}\,.tg\frac{y}{z}\,.sec^2\frac{y}{z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = (x-2).z^{x-3} + 2\,.\frac{y}{z^2}\,.tg\frac{y}{z}\,.sec^2\frac{y}{z}$$

Reeplazando en (I) y (II)

$$\boldsymbol{\frac{\partial z}{dx} = \frac{2xy - z^{x-2}.Ln\, z}{(x-2).z^{x-3} + \frac{2y}{z^2}\,.tg\frac{y}{z}\,.sec^2\frac{y}{z}}} \qquad\qquad \boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2 + \frac{2}{z}\,.tg\frac{y}{z}\,.sec^2\frac{y}{z}}{(x-2).z^{x-3} + \frac{2y}{z^2}\,.tg\frac{y}{z}\,.sec^2\frac{y}{z}}}$$

Derivada de la Función Implícita

Para sistemas de funciones implícitas (hay dos casos):

a. Única variable independiente

$$\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

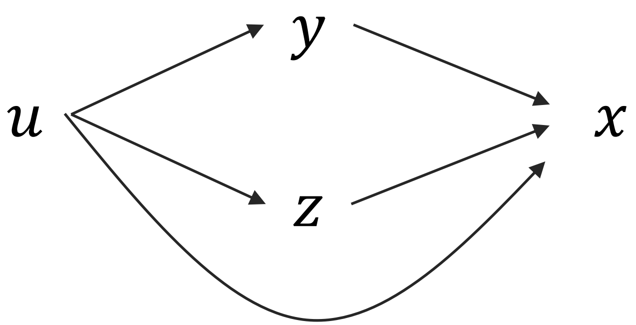
x es la variable independiente, y y z las variables dependientes.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x \\ y = \varphi_1(x) \\ z = \varphi_2(x) \end{cases}$$

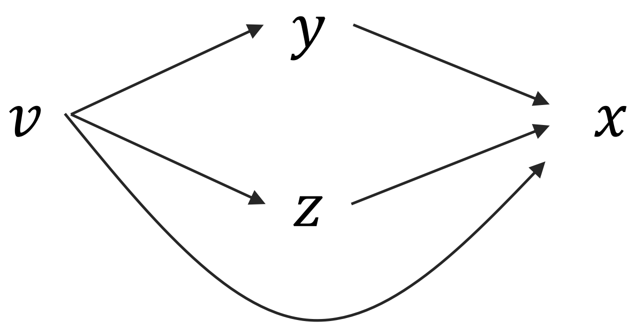
Derivando como función compuesta:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{dz}{dx} = \overset{=0}{\cancel{\dfrac{du}{dx}}} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial g}{\partial z}\dfrac{dz}{dx} = \overset{=0}{\cancel{\dfrac{dv}{dx}}} \end{cases}$$

Siendo $u = f(x,y,z)$



Siendo $v = g(x,y,z)$



Derivada de la Función Implícita

Resolvemos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{bmatrix}} \qquad \frac{dz}{dx} = -\frac{\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial x} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{bmatrix}}$$

Determinante Jacobiano

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathcal{J}\left(\frac{f,g}{y,z}\right) = f'_y \cdot g'_z - g'_y \cdot f'_z$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\mathcal{J}\left(\frac{f,g}{x,z}\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{f,g}{y,z}\right)} \qquad \frac{dz}{dx} = -\frac{\mathcal{J}\left(\frac{f,g}{y,x}\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{f,g}{y,z}\right)}}$$

El determinante de los denominadores está formado por los coeficientes de las incógnitas y recibe el nombre de **Determinante Jacobiano** de las funciones f y g respecto de las variables y y z. En las filas se encuentran las funciones que se derivan parcialmente y en las columnas, las variables con respecto a las que se derivan estas funciones.

Derivada de la Función Implícita

Ejemplo:

Calcular $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{dz}{dx}$ si $\begin{cases} f(x,y,z) = 4x^2z^3 - 3y^2 + 2 = 0 \\ g(x,y,z) = 5xy - z^2 + 1 = 0 \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\mathcal{J}\left(\dfrac{f,g}{x,z}\right)}{\mathcal{J}\left(\dfrac{f,g}{y,z}\right)} = -\frac{f'_x \cdot g'_z - g'_x \cdot f'_z}{f'_y \cdot g'_z - g'_y \cdot f'_z} = -\frac{-16xz^4 - 60yx^2z^2}{12yz - 60x^3z^2} = \frac{4xz^3 + 15yx^2z}{3y - 15x^3z}$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\mathcal{J}\left(\dfrac{f,g}{y,x}\right)}{\mathcal{J}\left(\dfrac{f,g}{y,z}\right)} = -\frac{f'_y \cdot g'_x - g'_y \cdot f'_x}{f'_y \cdot g'_z - g'_y \cdot f'_z} = -\frac{-30y^2 - 40x^2z^3}{12yz - 60x^3z^2} = \frac{15y^2 + 20x^2z^3}{6yz - 30x^3z^2}$$

Derivada de la Función Implícita

b. Varias variables independientes

$$\begin{cases} f(u, v, x, y) = 0 \\ g(u, v, x, y) = 0 \end{cases}$$

Siendo u y v las variables independientes,
x e y las variables dependientes

$$\Rightarrow \begin{cases} u = u \\ v = v \\ x = \varphi_1(u, v) \\ y = \varphi_2(u, v) \end{cases}$$

Sea desea calcular: $\dfrac{\partial x}{\partial u} \quad \dfrac{\partial y}{\partial u} \quad \dfrac{\partial x}{\partial v} \quad \dfrac{\partial y}{\partial v}$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{\mathcal{J}\left(\frac{f, g}{u, y}\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{f, g}{x, y}\right)} \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\mathcal{J}\left(\frac{f, g}{x, u}\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{f, g}{x, y}\right)} \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\mathcal{J}\left(\frac{f, g}{v, y}\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{f, g}{x, y}\right)} \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{\mathcal{J}\left(\frac{f, g}{x, v}\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{f, g}{x, y}\right)}$$

Derivada de la Función Implícita

Ejemplo: Calcular $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}$ si $\begin{cases} f(u,v,x,y) = uv - xy = 0 \\ g(u,v,x,y) = ux + vy = 0 \end{cases}$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{\mathcal{J}\left(\frac{f,g}{u,y}\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{f,g}{x,y}\right)} = -\frac{f'_u \cdot g'_y - g'_u \cdot f'_y}{f'_x \cdot g'_y - g'_x \cdot f'_y} = -\frac{v^2 + x^2}{-yv + ux} = \boldsymbol{\frac{v^2 + x^2}{yv - ux}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\mathcal{J}\left(\frac{f,g}{x,u}\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{f,g}{x,y}\right)} = -\frac{f'_x \cdot g'_u - g'_x \cdot f'_u}{f'_x \cdot g'_y - g'_x \cdot f'_y} = -\frac{-yx - uv}{-yv + ux} = \boldsymbol{\frac{xy + uv}{-yv + ux}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\mathcal{J}\left(\frac{f,g}{v,y}\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{f,g}{x,y}\right)} = -\frac{f'_v \cdot g'_y - g'_v \cdot f'_y}{f'_x \cdot g'_y - g'_x \cdot f'_y} = -\frac{uv + yx}{-yv + ux} = \boldsymbol{\frac{uv + xy}{yv - ux}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{\mathcal{J}\left(\frac{f,g}{x,v}\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{f,g}{x,y}\right)} = -\frac{f'_x \cdot g'_v - g'_x \cdot f'_v}{f'_x \cdot g'_y - g'_x \cdot f'_y} = -\frac{-y^2 - u^2}{-yv + ux} = \boldsymbol{\frac{u^2 + y^2}{-yv + ux}}$$

Análisis Matemático II

Máximos y Mínimos: Fórmula de Taylor

Fórmula de Taylor

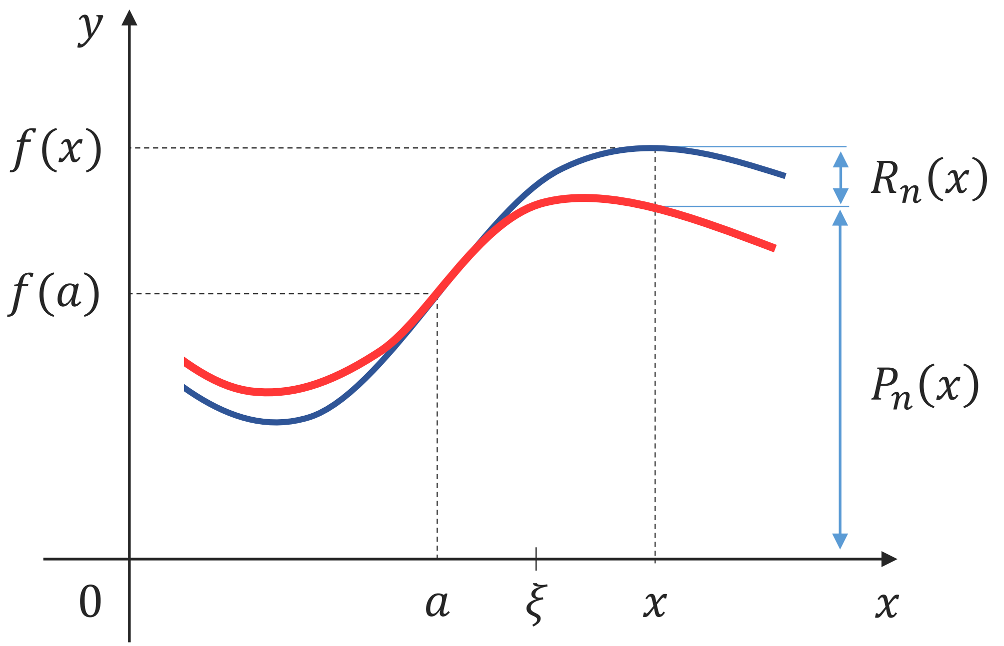
Fórmula de Taylor para una función de una variable independiente

Antes de plantear la Fórmula de Taylor para una función de dos variables independientes, recordaremos la Fórmula de Taylor para una función de una sola variable $y = f(x)$.

La Fórmula de Taylor permite aproximar la función $y = f(x)$ por un polinomio $y = P_n(x)$.

En cualquier punto próximo a a resultará:

$$f(x) = P_n(x) + R(x)$$



donde:

$P_n(x)$ es el Polinomio de Taylor.

$R_n(x)$ es un término complementario o Resto

Fórmula de Taylor

La Fórmula de Taylor para la función $y = f(x)$ es:

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + R_n(x)$$

Y teniendo en cuenta que $0! = 1$ y que $f^0 = f$ también se suele expresar:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i + R_n(x)$$

El término complementario o residuo $R_n(x)$ viene dado por la fórmula:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} \qquad \text{donde} \qquad \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

siendo ξ un punto comprendido en (a, x), es decir: $\xi = a + \theta(x-a)$ con $0 < \theta < 1$

Fórmula de Taylor

Para entender la Fórmula de Taylor, agreguemos uno a uno algunos términos:

Aproximación de orden cero:

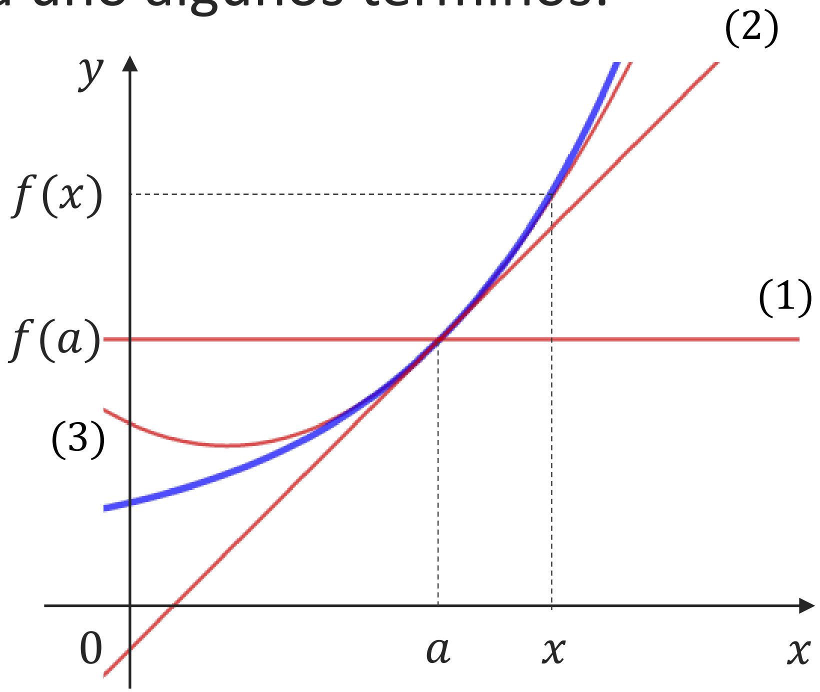
$$f(x) \cong f(a) \quad (1)$$

Aproximación de primer orden:

$$f(x) \cong f(a) + f'(a)(x-a) \quad (2)$$

Aproximación de segundo orden:

$$f(x) \cong f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \quad (3)$$



Si $a = 0$, la Fórmula de Taylor recibe el nombre de Fórmula de McLaurin y tiene la forma:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + R_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i + R_n(x)$$

Fórmula de Taylor

Fórmula de Taylor para una función de dos variables independientes

Teorema de Taylor

Dada una función $z = f(x, y)$ y un punto (a, b) interior al dominio de f, si:

a) $f(x, y)$ es continua y derivable parcialmente hasta orden 3 en (a, b).

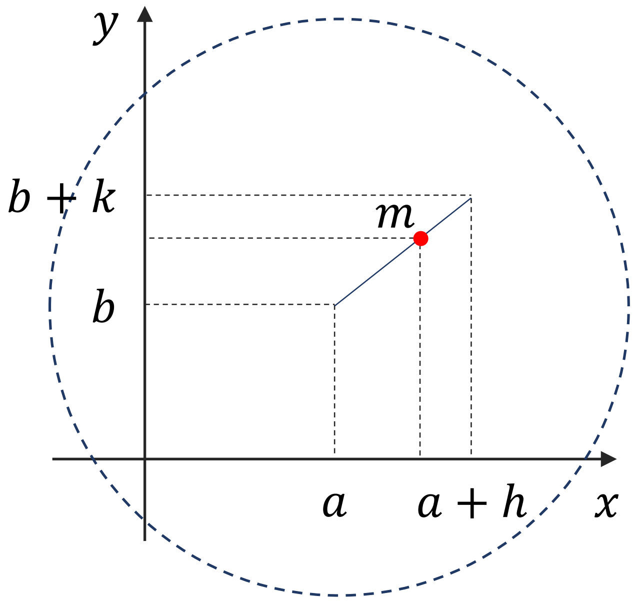
b) $f(x, y)$ es continua en $E[(a, b), \delta]$

entonces existe otro punto $(a + h, b + k) \in E[(a, b), \delta]$, para el cual se cumple:

$$\boxed{\begin{aligned} &f(a+h, b+k) = f(a,b) + f'_x(a,b)\cdot(x-a) + f'_y(a,b)\cdot(y-b) + \\ &+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(a,b)\cdot(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a,b)\cdot(x-a)(y-b) + f''_{yy}(a,b)\cdot(y-b)^2\right] + R_2 \end{aligned}}$$

Fórmula de Taylor

Demostración:



Consideremos un punto $m \in \mathcal{D}(f)$ y $m \in E[(a,b),\delta]$, siendo $m = (a+th; b+tk)$ con $0 \leq t \leq 1$.

Entonces, en el punto m:

$$f(x,y) = f(a+th, b+tk) \quad \text{con} \begin{cases} a,b,h,k & \text{constantes} \\ t & \text{variable} \end{cases}$$

Luego: $f(a+th, b+tk) = g(t) \qquad (I)$

$$f(x,y) = \underbrace{g(t)}$$

Es continua y derivable por hipótesis en $[0,1]$ porque f es continua y derivable entre (a,b) y $(a+h, b+k)$

Fórmula de Taylor

Aplicamos a $g(t)$ la Fórmula de McLaurin para funciones de una variable:

$$g(t) = g(0) + g'(0)\cdot t + \frac{1}{2!}g''(0)\cdot t^2 + \underbrace{R_2}$$

Es el resto del polinomio de infinitos términos, que sigue al término de segundo orden.

Para $t = 1$:

$$g(1) = g(0) + g'(0)\cdot 1 + \frac{1}{2!}g''(0)\cdot 1^2 + R_2$$

Además, según la expresión (I):

$$g(1) = f(a+h, b+k)$$

$$f(a+h, b+k) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2!}g''(0) + R_2 \qquad (II)$$

Fórmula de Taylor

Para $t = 0$:

Según la expresión (I): $g(0) = f(a, b)$ $\quad (*)$

Por otra parte vamos a calcular las derivadas del segundo miembro:

$$g'(t) = f'_x(x, y) \cdot \frac{dx}{dt} + f'_y(x, y) \cdot \frac{dy}{dt}$$

porque

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr] & \\ f \arrow[ur] \arrow[dr] & & t \\ & y \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$g'(0) = f'_x(a, b) \cdot \underbrace{h} + f'_y(a, b) \cdot \underbrace{k} \quad (**)$$

Porque según (I):
$x = a + th$
$y = b + tk$

Fórmula de Taylor

$$g''(t) = \left[f''_{xx}(x,y)\cdot\frac{dx}{dt} + f''_{xy}(x,y)\cdot\frac{dy}{dt}\right]\cdot\frac{dx}{dt} + \left[f''_{yx}(x,y)\cdot\frac{dx}{dt} + f''_{yy}(x,y)\cdot\frac{dy}{dt}\right]\cdot\frac{dy}{dt}$$

porque
$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr] & \\ f'_x \arrow[ur] \arrow[dr] & & t \\ & y \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & x \arrow[dr] & \\ f'_y \arrow[ur] \arrow[dr] & & t \\ & y \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$g''(t) = \left[f''_{xx}(x,y)\cdot h + f''_{xy}(x,y)\cdot k\right]\cdot h + \left[f''_{yx}(x,y)\cdot h + f''_{yy}(x,y)\cdot k\right]\cdot k$$

$$g''(t) = f''_{xx}(x,y)\cdot h^2 + \underbrace{f''_{xy}(x,y)}\cdot kh + \underbrace{f''_{yx}(x,y)}\cdot hk + f''_{yy}(x,y)\cdot k^2$$

Son iguales por el Teorema de Schwartz

$$g''(t) = f''_{xx}(x,y)\cdot h^2 + 2f''_{xy}(x,y)\cdot hk + f''_{yy}(x,y)\cdot k^2$$

$$g''(0) = f''_{xx}(a,b)\cdot h^2 + 2f''_{xy}(a,b)\cdot hk + f''_{yy}(a,b)\cdot k^2 \qquad (***)$$

Fórmula de Taylor

Reemplazando en (II) según $(*)$, $(**)$ y $(***)$:

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+f'_x(a,b)\cdot h+f'_y(a,b)\cdot k+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(a,b)\cdot h^2+2f''_{xy}(a,b)\cdot hk+f''_{yy}(a,b)\cdot k^2\right]+R_2$$

Pero $x=a+h\Rightarrow h=x-a$ y $y=b+k\Rightarrow k=y-b$

Reemplazando:

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+f'_x(a,b)\cdot(x-a)+f'_y(a,b)\cdot(y-b)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(a,b)\cdot(x-a)^2+2f''_{xy}(a,b)\cdot(x-a)(y-b)+f''_{yy}(a,b)\cdot(y-b)^2\right]+R_2$$

Fórmula de Taylor para dos variables independientes

Fórmula de Taylor

Se suele expresar:

$$f(x,y) = f(a,b) + f'_x(a,b)\cdot(x-a) + f'_y(a,b)\cdot(y-b) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(a,b)\cdot(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a,b)\cdot(x-a)(y-b) + f''_{yy}(a,b)\cdot(y-b)^2\right] + R_2$$

Si $(a,b) = (0,0)$ es decir, en un entorno del punto origen:

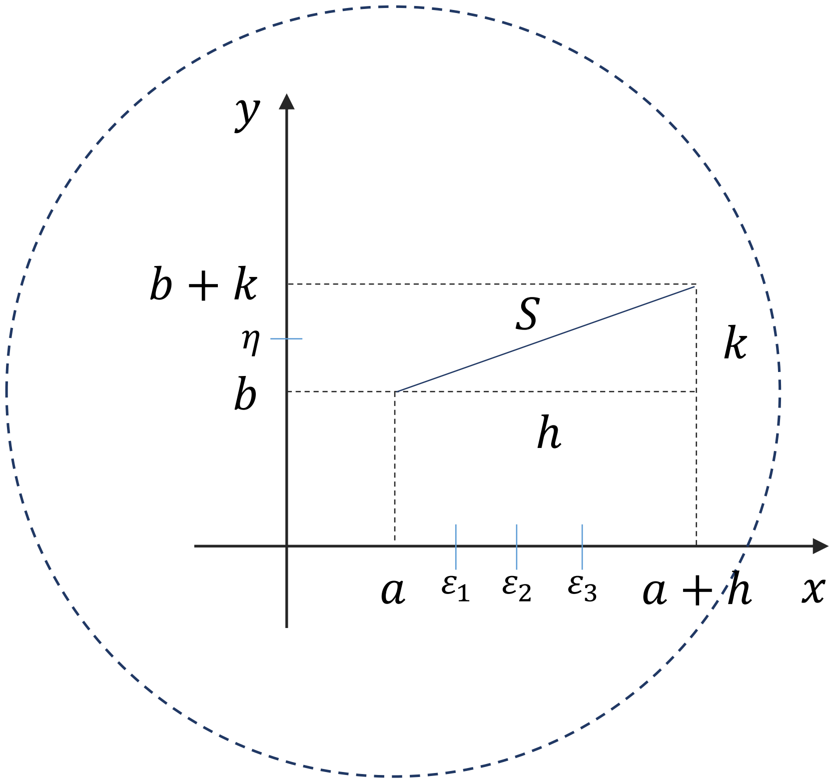
$$f(x,y) = f(0,0) + f'_x(0,0)\cdot x + f'_y(0,0)\cdot y +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(0,0)\cdot x^2 + 2f''_{xy}(0,0)\cdot xy + f''_{yy}(0,0)\cdot y^2\right] + R_2$$

Fórmula de McLaurin para dos variables independientes

Fórmula de Taylor

Daremos a continuación una demostración alternativa del Teorema de Taylor:



Dada una función $z = f(x, y)$, de dos variables independientes, definida en un dominio D, con derivadas parciales continuas hasta enésimo orden y (a, b) un punto interior del dominio de f. Si $(a + h, b + k)$ es un punto que pertenece a un entorno del punto (a, b), la fórmula de Taylor permite obtener un valor aproximado de $f(x, y)$ conociendo el valor de la función y sus derivadas parciales sucesivas en el punto (a, b).

Fórmula de Taylor

Consideremos a $z = f(x, y)$ como una función de una sola variable independiente "y" y apliquemos la Fórmula de Taylor hasta el término de tercer orden:

$$f(x,y) = f(x,b) + f'_y(x,b)(y-b) + \frac{1}{2!} f''_{yy}(x,b)(y-b)^2 + \frac{1}{3!} f'''_{yyy}(x,\eta)(y-b)^3 \quad \boldsymbol{b < \eta < b + k} \quad (1)$$

En la expresión (1) consideraremos a $f(x,b), f'_y(x,b), f''_{yy}(x,b)$ y $f'''_{yyy}(x,b)$ como funciones de una sola variable "x" y aplicaremos la Fórmula de Taylor hasta las derivadas parciales mixtas de tercer orden:

$$f(x,b) = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + \frac{1}{2!} f''_{xx}(a,b)(x-a)^2 + \frac{1}{3!} f'''_{xxx}(\varepsilon_1,b)(x-a)^3 \quad \boldsymbol{a < \varepsilon_1 < a + h} \quad (2)$$

$$f'_y(x,b) = f'_y(a,b) + f''_{yx}(a,b)(x-a) + \frac{1}{2!} f'''_{yxx}(\varepsilon_2,b)(x-a)^2 \qquad \boldsymbol{a < \varepsilon_2 < a + h} \quad (3)$$

$$f''_{yy}(x,b) = f''_{yy}(a,b) + f'''_{yyx}(\varepsilon_3,b)(x-a) \qquad \boldsymbol{a < \varepsilon_3 < a + h} \quad (4)$$

Fórmula de Taylor

Introduciendo las expresiones (2), (3) y (4) en la fórmula (1) obtenemos:

$$f(x,y) = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + \frac{1}{2!}f''_{xx}(a,b)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''_{xxx}(\varepsilon_1,b)(x-a)^3 +$$

$$+\left[f'_y(a,b) + f''_{yx}(a,b)(x-a) + \frac{1}{2!}f'''_{yxx}(\varepsilon_2,b)(x-a)^2\right](y-b) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{yy}(a,b) + f'''_{yyx}(\varepsilon_3,b)(x-a)\right](y-b)^2 + \frac{1}{3!}f'''_{yyy}(x,\eta)(y-b)^3$$

Reordenando los términos según potencias crecientes de $(x-a)$ y $(y-b)$, obtenemos:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b) + \\ &+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f''_{yx}(a,b)(x-a)(y-b) + f''_{yy}(a,b)(y-b)^2\right] + R_2 \end{aligned}}$$

Fórmula de Taylor

Además, R_2 es el residuo del Polinomio de Taylor de segundo orden y viene dado por:

$$R_2 = \frac{1}{3!}[f'''_{yyy}(x,\eta)(y-b)^3 + 3f'''_{yxx}(\varepsilon_2,b)(x-a)^2(y-b) + 3f'''_{yyx}(\varepsilon_3,b)(x-a)(y-b)^2 +$$
$$+f'''_{yyy}(x,\eta)(y-b)^3]$$

Análogamente a lo dicho para funciones de una única variable independiente, en general:

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left[\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} \cdot (x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} \cdot (y-b)\right]^{n+1}$$

Y además:

$$\lim_{n \to \infty} R_n = 0$$

Fórmula de Taylor

También podemos expresar la Fórmula de Taylor de orden 2:

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial x} \cdot (x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} \cdot (y-b) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} \cdot (x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y} \cdot (x-a) \cdot (y-b) + \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2} \cdot (y-b)^2\right] + R_2$$

Y tal como lo hicimos en Diferenciales de Orden Superior, podemos expresar la Fórmula de Taylor:

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\left[\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} \cdot (x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} \cdot (y-b)\right]^{(i)} + R_n$$

Con:

$$\left[\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} \cdot (x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} \cdot (y-b)\right]^{(0)} = f(a,b) \qquad \text{y} \qquad 0! = 1$$

Fórmula de Taylor

Ejemplo 1:

Desarrolle por Taylor hasta el segundo orden inclusive, la función $z = e^{2x-y}$*, en un entorno de* $(1,2)$*:*

$f(x,y) = e^{2x-y} \rightarrow f(1,2) = 1$

$f'_x(x,y) = 2e^{2x-y} \rightarrow f'_x(1,2) = 2$

$f'_y(x,y) = -e^{2x-y} \rightarrow f'_y(1,2) = -1$

$f''_{xx}(x,y) = 4e^{2x-y} \rightarrow f''_{xx}(1,2) = 4$

$f''_{xy}(x,y) = -2e^{2x-y} \rightarrow f''_{xy}(1,2) = -2$

$f''_{yy}(x,y) = e^{2x-y} \rightarrow f''_{yy}(1,2) = 1$

$$f(x,y) = 1 + 2(x-1) - (y-2) + \frac{1}{2!}[4(x-1)^2 - 4(x-1)(y-2) + (y-2)^2] + R_2$$

$$\boxed{\boldsymbol{e^{2x-y} \cong 1 + 2(x-1) - (y-2) + \frac{1}{2!}\left[4(x-1)^2 - 4(x-1)(y-2) + (y-2)^2\right]}}$$

Fórmula de Taylor

Ejemplo 2:

Desarrolle por Taylor hasta el tercer orden inclusive, la función $z = e^x . \cos y$*, en un entorno de* $(0,0)$*:*

$f(x,y) = e^x . \cos y \rightarrow f(0,0) = 1$

$f'_x(x,y) = e^x . \cos y \rightarrow f'_x(0,0) = 1$

$f'_y(x,y) = -e^x . \operatorname{sen} y \rightarrow f'_y(0,0) = 0$

$f''_{xx}(x,y) = e^x . \cos y \rightarrow f''_{xx}(0,0) = 1$

$f''_{xy}(x,y) = -e^x . \operatorname{sen} y \rightarrow f''_{xy}(0,0) = 0$

$f''_{yy}(x,y) = -e^x . \cos y \rightarrow f''_{yy}(0,0) = -1$

$f'''_{xxx}(x,y) = e^x . \cos y \rightarrow f'''_{xxx}(0,0) = 1$

$f'''_{xxy}(x,y) = -e^x . \operatorname{sen} y \rightarrow f'''_{xxy}(0,0) = 0$

$f'''_{xyy}(x,y) = -e^x . \cos y \rightarrow f'''_{xyy}(0,0) = -1$

$f'''_{yyy}(x,y) = e^x . \operatorname{sen} y \rightarrow f''_{yyy}(0,0) = 0$

Fórmula de Taylor

Ejemplo 2: (cont.)

$$f(x,y) \cong f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f''_{yx}(a,b)(x-a)(y-b) + f''_{yy}(a,b)(y-b)^2\right] +$$

$$+\frac{1}{3!}\left[f'''_{xxx}(a,b)(x-a)^3 + 3.f''_{xxy}(a,b)(x-a)^2(y-b) + 3.f'''_{yyx}(a,b)(x-a)(y-b)^2 + f'''_{yyy}(a,b)(y-b)^3\right]$$

$$f(x,y) = 1 + 1.(x-0) + 0.(y-0) + \frac{1}{2}[1(x-0)^2 + 2.0.(x-0)(y-0) - 1.(y-0)^2] +$$

$$+\frac{1}{6}[1(x-0)^3 + 3.0.(x-0)^2(y-0) - 3.1.(x-0)(y-0)^2 + 0.(y-0)^3] + R_3$$

$$\boxed{\boldsymbol{e^x.\cos y \cong 1 + x + \frac{1}{2}\left[x^2 - y^2\right] + \frac{1}{6}\left[x^3 - 3.x.y^2\right]}}$$

Análisis Matemático II

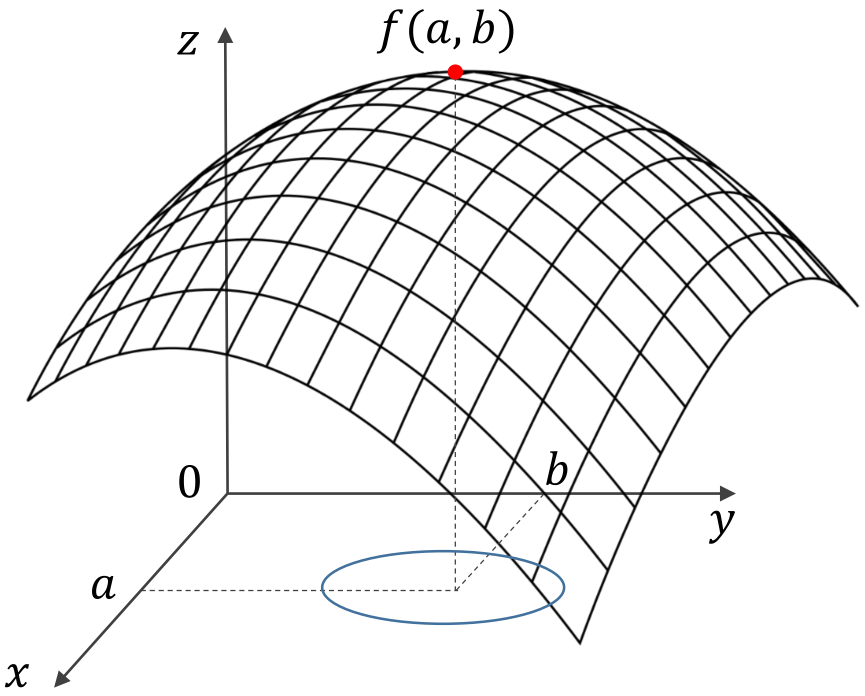
Máximos y Mínimos Relativos

Máximos y Mínimos Relativos

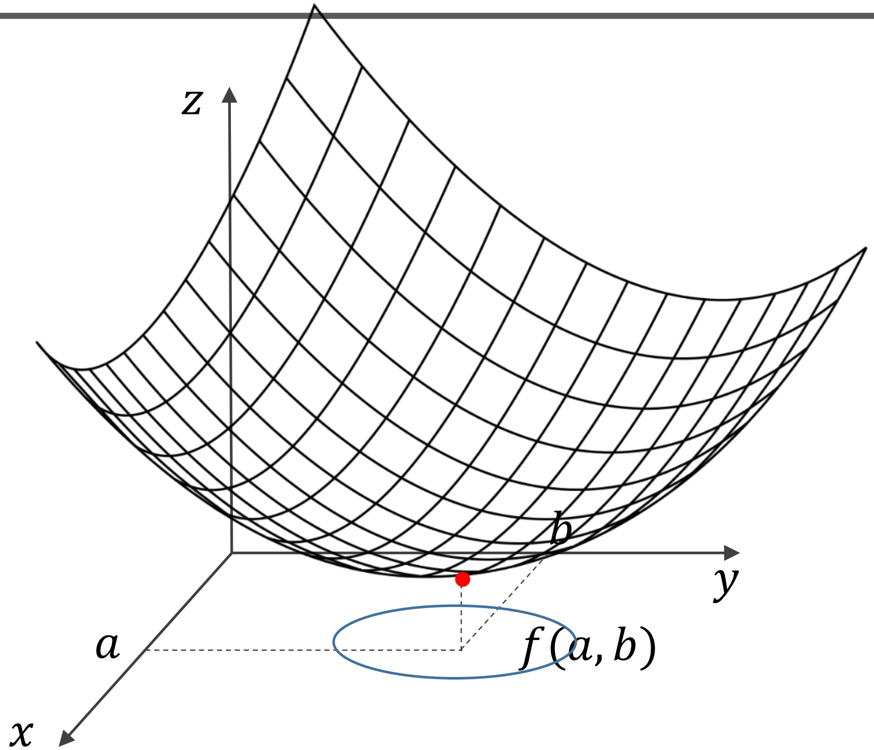
Máximos y mínimos relativos para funciones de dos variables

Sea $z = f(x, y)$ un campo escalar de dos variables independientes y un punto (a, b) que pertenece al dominio de la función. Si $f(x, y)$ es continua y derivable parcialmente hasta el tercer orden en (a, b) y es continua en un entorno $E[(a, b), \delta]$, entonces, existe otro punto $(a + h, b + k) \in E[(a, b), \delta]$, para el cual se cumple:

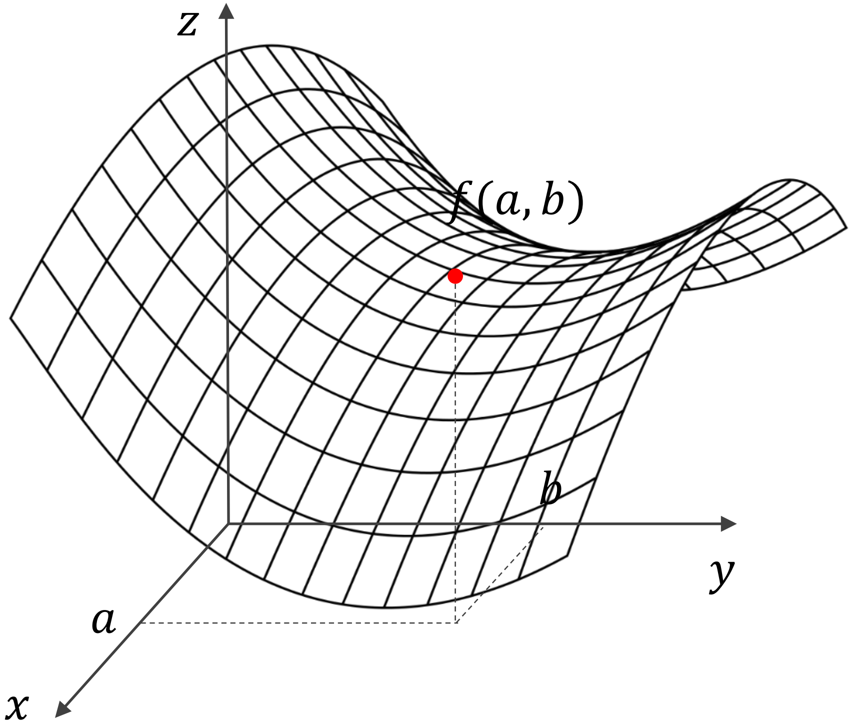
$f(x, y)$ presenta un máximo relativo en (a, b) si y solo si $\forall(h, k \neq 0)$: $f(a + h, b + k) - f(a, b) < 0$.
O bien $f(a, b)$ es un máximo relativo si y solo si $\forall(h, k \neq 0)$: $\boldsymbol{\Delta f(a, b) < 0}$.



Máximos y Mínimos Relativos



$f(x,y)$ presenta un mínimo relativo en (a,b) si y solo si $\forall(h,k \neq 0)$: $f(a+h,b+k) - f(a,b) > 0$.
O bien $f(a,b)$ es un mínimo relativo si y solo si $\forall(h,k \neq 0)$: $\boldsymbol{\Delta f(a,b) > 0}$.



$f(x,y)$ presenta un punto de silla en (a,b) si y solo si $\forall(h,k \neq 0)$: $f(a+h,b+k) - f(a,b) \lesseqgtr 0$. O bien $f(a,b)$ es un punto de ensilladura si y solo si $\forall(h,k \neq 0)$: $\boldsymbol{\Delta f(a,b) \lesseqgtr 0}$.

Máximos y Mínimos Relativos

Ejemplo:

La función $z = x^2 + y^2$, tiene un mínimo relativo en el punto $(0,0)$ puesto que $f(0,0) = 0$ y x^2 e y^2 son siempre positivos para $x \neq 0$ e $y \neq 0$, esto es:

$x^2 + y^2 > 0 \Rightarrow f(x,y) > f(0,0) \;\Rightarrow f(x,y) - f(0,0) > 0$

Pero como $x = 0 + h$ y $y = 0 + k$ entonces $f(0+h, 0+k) - f(0,0) > 0, \forall(h, k \neq 0)$

Es decir $\boldsymbol{\Delta f(0,0) > 0}$

En el caso en que la función presente extremos absolutos, de todos los máximos relativos (o locales), aquel en que la función toma el mayor valor, se denomina **máximo absoluto**. Y de igual manera, de todos los mínimos relativos (o locales), aquel en el que la función toma el menor valor, se denomina **mínimo absoluto**. De forma similar, se pueden definir extremos de funciones de más de dos variables independientes.

Máximos y Mínimos Relativos

Condición necesaria para la existencia de extremos relativos

Si la función $z = f(x, y)$ tiene un extremo en el punto (a, b), entonces sus derivadas parciales de primer orden, si existen, se anulan en ese punto (punto crítico). Es decir:

$$f'_x(a, b) = 0 \text{ y } f'_y(a, b) = 0$$

Para demostrarlo, consideremos a la función $g(x) = f(x, b)$ de una sola variable x. Si por hipótesis f tiene un extremo relativo en (a, b), entonces g tiene un extremo relativo en a, en este caso es $g'(a) = 0$ y como $g'(a) = f'_x(a, b)$, entonces resulta $f'_x(a, b) = 0$.

De forma similar se puede demostrar que se cumple que $f'_y(a, b) = 0$.

Esta condición, si bien es necesaria, no es suficiente para demostrar la existencia de extremos de la función, pues hay funciones en las cuales en algunos punto se anulan sus derivadas parciales de primer orden y sin embargo, no son extremos, este es el caso de los **puntos de silla** o **puntos de ensilladura.**

Máximos y Mínimos Relativos

Ejemplo:

Sea la función $z = x^2 - y^2$. Veamos qué ocurre en el punto $(0,0)$:

$f'_x(x, y) = 2x \quad \Rightarrow f'_x(0,0) = 0$

$f'_y(x, y) = -2y \Rightarrow f'_y(0,0) = 0$

En el punto crítico $(0,0)$ las derivadas parciales de primer orden se anulan.

Sin embargo, $f(1,0) = 1$ y $f(0,1) = -1$, luego $f(1,0) - f(0,0) > 0$ y $f(0,1) - f(0,0) < 0$. En general $\Delta f(0,0) \lesseqgtr 0\ \forall(h, k \neq 0)$, entonces, existe un punto de silla en $(0,0)$.

Máximos y Mínimos Relativos

Condición suficiente para la existencia de extremos relativos

Sea $z = f(x, y)$ una función continua y con derivadas parciales también continuas en un dominio que contiene un punto (a, b), siendo (a, b) un punto crítico, es decir: $f'_x(a, b) = 0$ y $f'_y(a, b) = 0$.

La función tendrá un extremo relativo o un punto de silla en (a, b) si $\boldsymbol{d^2 f(a, b) \neq 0}$.

Análogamente al caso de funciones de una variable, habrá que determinar el signo de este diferencial de segundo orden, cosa que puede ser difícil y en algunos casos, imposible. Para resolver este problema, haremos un análisis de signos valiéndonos de la Fórmula de Taylor.

Usaremos la Fórmula de Taylor, despreciando R_2 porque nos bastará con una aproximación:

$$f(a + h, b + k) \cong f(a, b) + \underbrace{f'_x(a, b) \cdot h + f'_y(a, b) \cdot k}_{\text{Se anulan porque } (a,b) \text{ es un punto crítico}} +$$

$$+ \frac{1}{2!} [f''_{xx}(a, b) \cdot h^2 + 2 f''_{xy}(a, b) \cdot kh + f''_{yy}(a, b) \cdot k^2]$$

Máximos y Mínimos Relativos

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)\cong\frac{1}{2!}[\underbrace{f''_{xx}(a,b)}_{A}\cdot h^2+2\underbrace{f''_{xy}(a,b)}_{B}\cdot kh+\underbrace{f''_{yy}(a,b)}_{C}\cdot k^2]$$

Llamamos A, B y C a las derivadas parciales segundas con el fin de facilitar la escritura:

$$\Delta f(a,b)\cong\frac{1}{2}[A\cdot h^2+2B\cdot hk+C\cdot k^2]$$

Multiplicamos y dividimos el segundo miembro por A:

$$\Delta f(a,b)\cong\frac{1}{2A}[A^2\cdot h^2+2AB\cdot hk+AC\cdot k^2]$$

Completamos el cuadrado:

$$\Delta f(a,b)\cong\frac{1}{2A}[(Ah)^2+2Ah\cdot Bk+(Bk)^2+AC\cdot k^2-(Bk)^2]$$

Máximos y Mínimos Relativos

$$\Delta f\,(a,b) \cong \frac{1}{2A}\left[(Ah+Bk)^2+(AC-B^2)\cdot k^2\right]$$

El signo de la expresión entre corchetes sólo depende del signo de $AC-B^2$

Llamaremos a $AC-B^2$ determinante **Hessiano** o simplemente **Hessiano** y lo escribiremos:

$$H=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

Como $A=f''_{xx}(a,b)$, $B=f''_{xy}(a,b)$ y $C=f''_{yy}(a,b)$, entonces:

$$H(a,b)=\begin{vmatrix} f''_{xx}(a,b) & f''_{xy}(a,b) \\ f''_{yx}(a,b) & f''_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$$

Veamos, entonces, cuál será el signo de $\Delta f\,(a,b)$ según sea el signo del Hessiano:

Máximos y Mínimos Relativos

- Si $\boldsymbol{H(a,b) > 0} \;\Rightarrow\;$ hay un extremo relativo en (a,b)
  - $A = f''_{xx}(a,b) > 0 \Rightarrow \Delta f(a,b) > 0 \Rightarrow$ hay un mínimo relativo en (a,b).
  - $A = f''_{xx}(a,b) < 0 \Rightarrow \Delta f(a,b) < 0 \Rightarrow$ hay un máximo relativo en (a,b).
- Si $\boldsymbol{H(a,b) < 0} \;\Rightarrow\; \Delta f(a,b) \lesseqgtr 0 \Rightarrow$ hay un punto de silla en (a,b).
- Si $\boldsymbol{H(a,b) = 0} \;\Rightarrow\; \Delta f(a,b) = nro + R_2 \Rightarrow$ hay un caso dudoso en (a,b).

En un caso dudoso hay que estudiar la derivadas de mayor orden ya que puede existir o no un extremo.

Máximos y Mínimos Relativos

Ejemplo:

Determinar los extremos relativos y/o puntos de ensilladura de la función: $\boldsymbol{z = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2}$

$$z = x^4 + y^4 - 2(x^2 - 2xy + y^2)$$

$$z'_x = 4x^3 - 4x + 4y \qquad \begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases}$$
$$z'_y = 4y^3 + 4x - 4y$$

Podemos resolver este sistema de ecuaciones sumando miembro a miembro la ecuaciones: $4x^3 + 4y^3 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x = -y}$ y luego sustituyendo $x = -y$ en cualquier ecuación. (En este caso sustituimos en la segunda)

$$4y^3 - 4y - 4y = 0 \rightarrow 4y^3 - 8y = 0$$

$$y.(4y^2 - 8) = 0 \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y = 0 \Rightarrow x = 0} \\ 4y^2 - 8 = 0 \rightarrow y^2 = 2 \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y = \sqrt{2} \Rightarrow x = -\sqrt{2}} \\ \boldsymbol{y = -\sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt{2}} \end{cases} \end{cases}$$

NO se debe dividir ambos miembros de una ecuación por una incógnita (por una letra) porque le “bajo” el grado a la ecuación y pierdo raíces en el camino (que en este caso son puntos críticos).

Máximos y Mínimos Relativos

Ejemplo: (cont.)

Obtenemos así los puntos críticos: $(\mathbf{0},\mathbf{0})$; $(\sqrt{\mathbf{2}},-\sqrt{\mathbf{2}})$ **y** $(-\sqrt{\mathbf{2}},\sqrt{\mathbf{2}})$

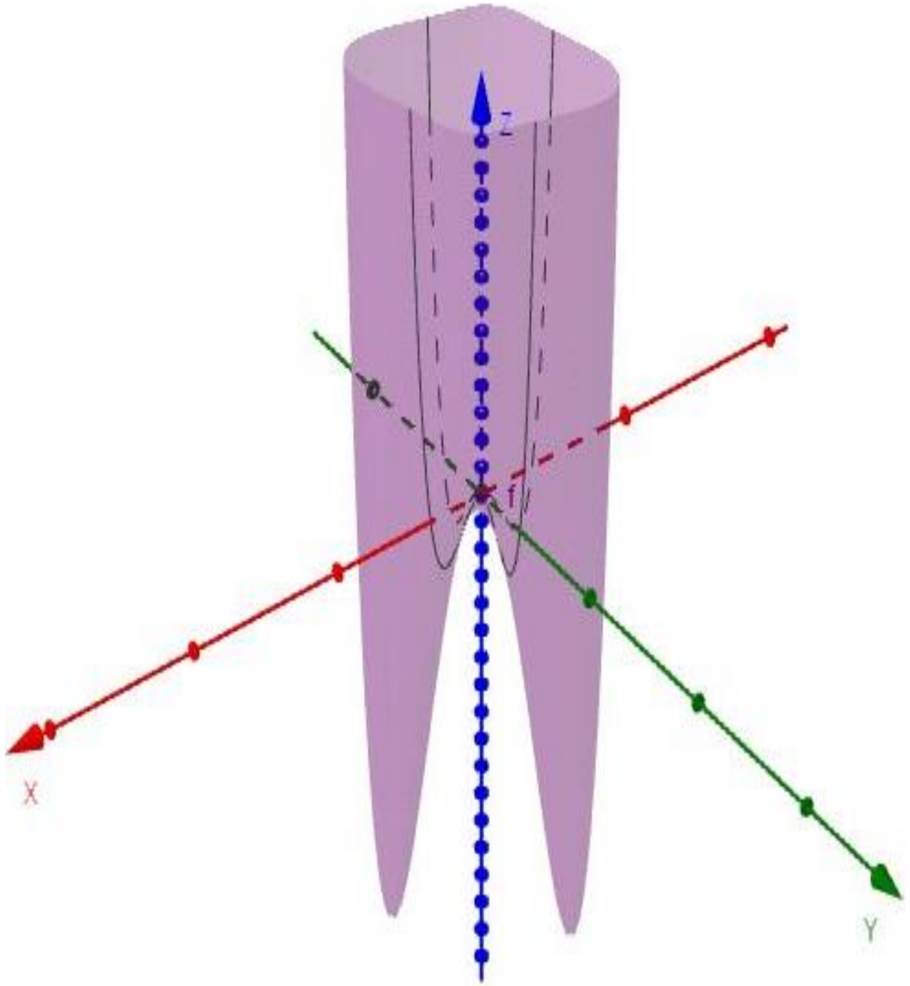
$$z''_{xx} = 12x^2 - 4$$
$$z''_{yy} = 12y^2 - 4$$
$$z''_{xy} = 4$$

$$H(x,y) = z''_{xx} \cdot z''_{yy} - \left(z''_{xy}\right)^2$$

$$\boldsymbol{H(x,y) = \left(12x^2 - 4\right) \cdot \left(12y^2 - 4\right) - 16}$$

$\boldsymbol{H(0,0) = 0}$ **hay un caso dudoso**.

Con un análisis más detallado, veríamos que hay un punto de silla en (0,0)



$\boldsymbol{H\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right) > 0 \Rightarrow z''_{xx}\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right) > 0}$ **hay un mínimo relativo.**

$\boldsymbol{H\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right) > 0 \Rightarrow z''_{xx}\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right) > 0}$ **hay un mínimo relativo**.

Máximos y Mínimos Relativos

Ejemplo: (cont.)

Calculo las alturas, $\boldsymbol{z}$, en los puntos críticos de la función.

$$\boldsymbol{z = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2}$$

$$z(0{,}0) = \mathbf{0}$$

$$z\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^4 + \left(-\sqrt{2}\right)^4 - 2\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 4 + 4 - 16 = \mathbf{-8}$$

$$z\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = \left(-\sqrt{2}\right)^4 + \left(\sqrt{2}\right)^4 - 2\left(-2\sqrt{2}\right)^2 = 4 + 4 - 16 = \mathbf{-8}$$

Entonces

$(\,\mathbf{0}; \mathbf{0}: \mathbf{0}\,)$ **es punto dudoso**. Se necesitaría hacer un análisis más profundo de la función en ese punto que puede incluir analizar las derivadas de orden superior.

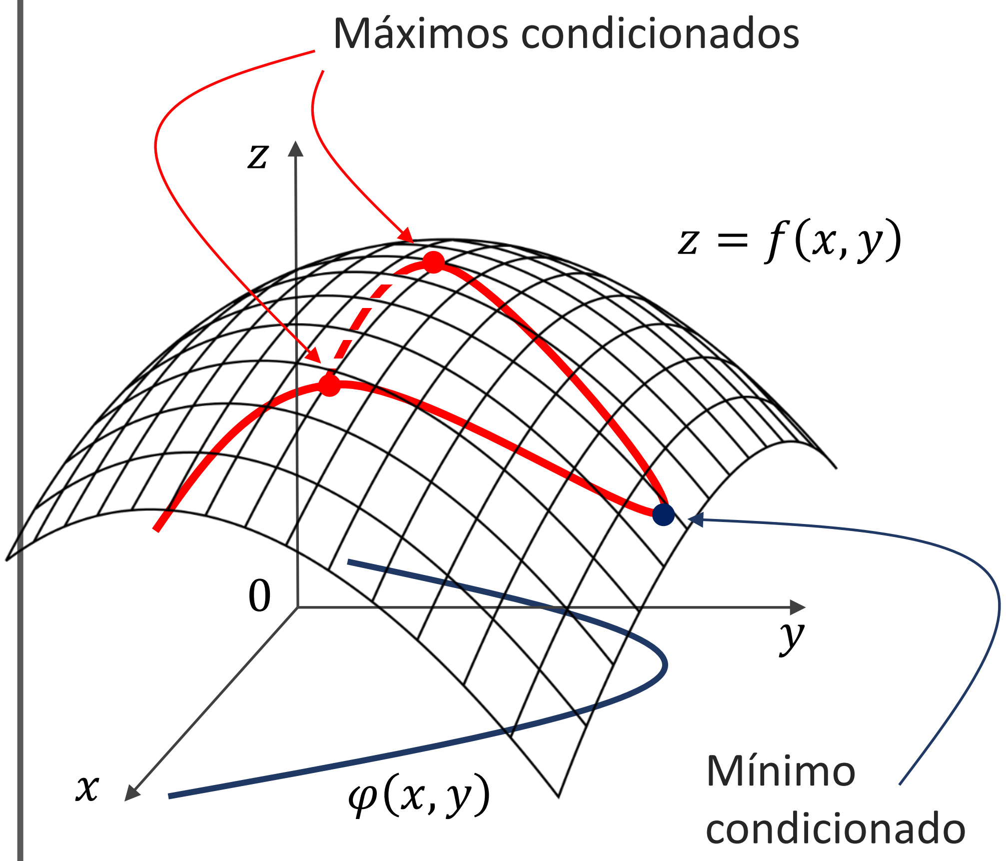
$\left(\sqrt{\mathbf{2}}, -\sqrt{\mathbf{2}}, -\mathbf{8}\right)$ **es un mínimo relativo.**

$\left(-\sqrt{\mathbf{2}}, \sqrt{\mathbf{2}}, -\mathbf{8}\right)$ **es un mínimo relativo.**

Análisis Matemático II

Máximos y Mínimos Condicionados

Máximos y Mínimos Condicionados



Se trata ahora de hallar los extremos de una función $z = f(x, y)$ sujetos a una restricción de su dominio dada por la expresión $\varphi(x, y) = 0$ que se denomina ecuación de condición.

Ahora las variables de f no son todas independientes, sino que están relacionadas entre sí mediante esta ecuación de condición.

Los problemas en los que es necesario encontrar máximos y/o mínimos de una función sujeta a una restricción (o más de una restricción), se conocen como problemas de optimización.

Máximos y Mínimos Condicionados

Si la ecuación de condición se puede llevar a la forma explícita $y = g(x)$ que se verifica para los mismos valores de x e y que, a su vez, verifican $\varphi(x, y) = 0$, se puede sustituir en z y obtendremos: $z = f\left(x, g(x)\right)$.

De esta forma el problema se reduce al de hallar los máximos y mínimos relativos de una función de una variable independiente.

A primera vista este método, conocido como *método de variables ligadas*, aparenta ser de fácil aplicación. Sin embargo, presenta dificultades que pueden ser insuperables. Por un lado, estamos limitados por la cantidad de variables, pues sólo sabemos calcular (de forma accesible) máximos y mínimos de hasta dos variables independientes. Y, por otro lado, aún cuando pueda explicitarse una de las variables en función de la otra en la ecuación de condición, la forma explícita puede ser mucho más compleja de lo que parece.

Máximos y Mínimos Condicionados

Ejemplo 1:

Dada la función $z = x^2 - y^2$ y la restricción: $x^2 + y^2 = 1$.

Podemos despejar y, de la ecuación de condición:

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

Reemplazando y en z, tendremos que hallar los máximos y mínimos relativos de:

$$z = x^2 - \left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2 \;\Rightarrow\; z = x^2 - 1 + x^2 \;\Rightarrow z = 2x^2 - 1$$

Si derivamos z, como una función de una variable independiente, tenemos: $z' = 4x$

Igualamos a cero para hallar los puntos críticos. En este caso si $z' = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$

La derivada segunda es: $z'' = 4$ que es positiva para todo x del dominio de z, en particular, para $x = 0$. Entonces hay un mínimo relativo en $x = 0$. Luego, según la forma explícita de la ecuación de condición, habrá un mínimo condicionado en $(0{,}1)$ y $(0, -1)$.

Pero, como veremos más adelante, hay más información que el método no ha revelado.

Máximos y Mínimos Condicionados

Si la ecuación de condición no se puede explicitar o su forma explícita resulta engorrosa, utilizaremos el método de los multiplicadores de Lagrange.

Permite calcular los puntos críticos de una función auxiliar, conocida como función de Lagrange que se construye:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \underbrace{\lambda}_{\text{Multiplicador de Lagrange}} \cdot \varphi(x, y)$$

La **condición necesaria** para la existencia de un extremo condicionado, como en el caso de extremos relativos, es que las derivadas parciales de primer orden de la función (llamada también Lagrangiana), sean simultáneamente nulas:

$$\begin{cases} L'_x = f'_x(x, y) + \lambda \cdot \varphi'_x(x, y) = 0 \\ L'_y = f'_y(x, y) + \lambda \cdot \varphi'_y(x, y) = 0 \\ L'_\lambda = \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Máximos y Mínimos Condicionados

Una vez conocidos los puntos críticos, se pueden hacer varios análisis distintos para determinar, en cada caso, si corresponde a un extremo condicionado:

- Una posibilidad, es analizar cómo se comporta la función dada en los puntos críticos valuando dicha función y estudiando los resultados obtenidos.
- Otra posibilidad, similar al caso de extremos relativos, es considerar la condición suficiente: que el diferencial segundo de la función de Lagrange, sea no nulo, es decir:

$$d^2L(x,y,\lambda) \neq 0$$

Calculemos el diferencial segundo de la función de Lagrange: $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot \varphi(x,y)$

$$dL = L'_x\,dx + L'_y\,dy + L'_\lambda\,d\lambda$$

$$d^2L = \left(L''_{xx}\,dx + L''_{yx}\,dy + L''_{\lambda x}\,d\lambda\right)dx + \left(L''_{xy}\,dx + L''_{yy}\,dy + L''_{\lambda y}\,d\lambda\right)dy + \left(L''_{x\lambda}\,dx + L''_{y\lambda}\,dy + L''_{\lambda\lambda}\,d\lambda\right)d\lambda$$

$$d^2L = L''_{xx}\,dx^2 + L''_{yx}\,dydx + L''_{\lambda x}\,d\lambda dx + L''_{xy}\,dxdy + L''_{yy}\,dy^2 + L''_{\lambda y}\,d\lambda dy + L''_{x\lambda}\,dxd\lambda + L''_{y\lambda}\,dyd\lambda + L''_{\lambda\lambda}\,d\lambda^2$$

Asociamos los términos semejantes:

$$d^2L = L''_{xx}\,dx^2 + 2L''_{xy}\,dxdy + L''_{yy}\,dy^2 + 2L''_{x\lambda}\,dxd\lambda + 2L''_{y\lambda}\,dyd\lambda + \cancel{L''_{\lambda\lambda}\,(d\lambda)^2}$$

El último término vale siempre cero.

Máximos y Mínimos Condicionados

Entonces

$$d^2L = L''_{xx}\,dx^2 + 2L''_{xy}\,dxdy + L''_{yy}\,dy^2 + 2L''_{x\lambda}\,dxd\lambda + 2L''_{y\lambda}\,dyd\lambda$$

También podemos escribir los dos últimos términos como:

$$d^2L = L''_{xx}\,dx^2 + 2L''_{xy}\,dxdy + L''_{yy}\,dy^2 + 2\underbrace{\left[\varphi'_x(x,y)\,dx + \varphi'_y(x,y)\,dy\right]}_{d\varphi}\,d\lambda$$

Como $\varphi(x,y) = 0 \to \;\; d\varphi = 0$

Finalmente $\boxed{\boldsymbol{d^2L = L''_{xx}\,dx^2 + 2L''_{xy}\,dxdy + L''_{yy}\,dy^2}}$

Se debe analizar el signo de este diferencial segundo en cada punto crítico.

Sea (x_0, y_0, λ_0) un punto crítico de la función de Lagrange:

- $d^2L(x_0, y_0, \lambda_0) < 0 \;\; \to$ habrá un máximo condicionado en (x_0, y_0).
- $d^2L(x_0, y_0, \lambda_0) > 0 \;\; \to$ habrá un mínimo condicionado en (x_0, y_0).

Pero como en el caso de los máximos y mínimos relativos libres (sin condiciones), la determinación del signo de este diferencial segundo, puede resultar complicado y hasta imposible.

Máximos y Mínimos Condicionados

Ejemplo 2:

Volvamos al ejemplo anterior. Dada la función $z = x^2 - y^2$ y la restricción: $x^2 + y^2 = 1$.

La Lagrangiana es:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 1)$$

Recuerde que la ecuación de condición tiene la forma $\varphi(x, y) = 0$

Derivando:

$$\begin{cases} L'_x = 2x + 2x\lambda = 0 \\ L'_y = -2y + 2y\lambda = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \longrightarrow 2x(1+\lambda) = 0 \to x = 0, \quad \lambda = -1$$

Para $x = 0$

$$\begin{cases} -2y + 2y\lambda = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \longrightarrow y = \pm 1 \end{cases}$$

Para $y = 1$

$-2 + 2\lambda = 0 \to \lambda = 1$

Para $y = -1$

$2 - 2\lambda = 0 \to \lambda = 1$

Para $\lambda = -1$

$$\begin{cases} -2y - 2y = 0 \longrightarrow y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Para $y = 0$

$x^2 - 1 = 0 \to x = \pm 1$

Los puntos críticos de L son:

$(0,1,1)$

$(0,-1,1)$

$(1,0,-1)$

$(-1;0,-1)$

Máximos y Mínimos Condicionados

Calculemos d^2L

$L''_{xx} = 2 + 2\lambda$

$L''_{xy} = 0$

$L''_{yy} = -2 + 2\lambda$

$$d^2L = L''_{xx} \cdot dx^2 + 2L''_{xy} \cdot dxdy + L''_{yy} \cdot dy^2$$

$$d^2L = (2 + 2\lambda) \cdot dx^2 + (-2 + 2\lambda) \cdot dy^2$$

$d^2L(0,1,1) = 4 \cdot dx^2 > 0$ $\rightarrow$ hay un mínimo condicionado en $(0,1)$.

$d^2L(0,-1,1) = 4 \cdot dx^2 > 0$ $\rightarrow$ hay un mínimo condicionado en $(0,-1)$.

$d^2L(1,0,-1) = -4 \cdot dy^2 < 0$ $\rightarrow$ hay un máximo condicionado en $(1,0)$.

$d^2L(-1,0,-1) = -4 \cdot dy^2 < 0$ $\rightarrow$ hay un máximo condicionado en $(-1,0)$.

En contraste con la aplicación del método de variables ligadas, <u>hemos encontrado dos puntos críticos más</u>. Un máximo condicionado en $(1,0)$ y otro en $(-1,0)$.

Máximos y Mínimos Condicionados

Ejemplo 3:

Sea ahora $z = x^2 - y^2$ y la restricción: $3x - y = 0$.

La Lagrangiana es:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 + \lambda \cdot (3x - y)$$

Derivando:

$$\begin{cases} L'_x = 2x + 3\lambda = 0 \\ L'_y = -2y - \lambda = 0 \\ L'_\lambda = 3x - y = 0 \end{cases} \longrightarrow \quad 2x + 3\lambda = 0 \rightarrow x = -\frac{3\lambda}{2}$$

$$\begin{cases} -2y - \lambda = 0 \\ -\frac{9\lambda}{2} - y = 0 \end{cases} \longrightarrow \quad y = -\frac{\lambda}{2} \qquad -\frac{9\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = 0 \rightarrow \lambda = 0$$

En este caso, L tiene un punto crítico en: $(0,0,0)$

$$d^2L = L''_{xx} \cdot dx^2 + 2L''_{xy} \cdot dxdy + L''_{yy} \cdot dy^2$$

$$d^2L = 2 \cdot dx^2 - 2 \cdot dy^2$$

Pero en este caso, es imposible conocer el signo de $d^2L(0,0,0)$

Máximos y Mínimos Condicionados

- Para subsanar este problema, podemos citar una última posibilidad: valernos del estudio del Hessiano Orlado.

El Hessiano Orlado es una variante del Hessiano utilizado en problemas de optimización restringida (extremos condicionados). El determinante de sus principales menores se utiliza como criterio para determinar si un punto crítico de una función es un mínimo o un máximo. Si $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot \varphi(x,y)$, el Hessiano Orlado es:

$$\overline{H} = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{x\lambda} \\ L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{y\lambda} \\ L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} & L''_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} \Rightarrow \overline{H} = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & \varphi'_x \\ L''_{yx} & L''_{yy} & \varphi'_y \\ \varphi'_x & \varphi'_y & 0 \end{vmatrix} \text{ o } \overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{vmatrix}$$

Si $\overline{H}(x_0, y_0, \lambda_0) > 0 \;\rightarrow$ Habrá un máximo condicionado en (x_0, y_0).

Si $\overline{H}(x_0, y_0, \lambda_0) < 0 \;\rightarrow$ Habrá un mínimo condicionado en (x_0, y_0).

¡Atención al cambio de signo!

Máximos y Mínimos Condicionados

Ejemplo 4:

Volvamos al ejemplo 3. Donde $z = x^2 - y^2$ y la restricción: $3x - y = 0$.

Para su solución construimos la Lagrangiana:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 + \lambda \cdot (3x - y)$$

Derivando, igualando a cero y operando, obtuvimos el punto crítico: $(0{,}0{,}0)$.

El Hessiano Orlado es:

$$\bar{H} = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & \varphi'_x \\ L''_{yx} & L''_{yy} & \varphi'_y \\ \varphi'_x & \varphi'_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 18 - 2 > 0$$

Entonces hay un máximo condicionado en el punto $(0{,}0)$

$L'_x = 2x + 3\lambda$

$L'_y = -2y - \lambda$

$L'_\lambda = 3x - y$

$L''_{xx} = 2$

$L''_{xy} = 0$

$L''_{x\lambda} = \varphi'_x = 3$

$L''_{yy} = -2$

$L''_{y\lambda} = \varphi'_y = -1$

$L''_{\lambda\lambda} = \varphi'_\lambda = 0$

Observe que un máximo o un mínimo condicionado de la función $z = f(x, y)$, **NO** es un extremo, sino que se debe interpretar como el mayor o menor valor de la función que cumple (verifica) la ecuación de condición.

Máximos y Mínimos Condicionados

En resumen:

Dados un campo escalar de $\boldsymbol{n}$ variables $\boldsymbol{z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ y $\boldsymbol{m}$ funciones de restricción, tales como

$$\boldsymbol{\varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0,\ \varphi_2(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n) = 0}$$

Algoritmo de solución

1) Construimos la Lagrangiana para calcular los puntos críticos :

$$\boxed{\boldsymbol{L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 . \varphi_1(x_1, \dots, x_n) + \cdots + \lambda_m . \varphi_m(x_1, \dots, x_n)}}$$

2) Construimos un sistema de ecuaciones con las derivadas primeras de la Lagrangiana igualadas a cero.

3) Resolvemos el sistema para obtener los puntos críticos. Sean $\boldsymbol{P_1, P_2, \dots, P_k}$ los puntos críticos.

Analisis de signos en los puntos críticos:

En el caso más frecuente, que es un campo escalar de dos variables independientes $\boldsymbol{z = f(x, y)}$ con una única condición $\boldsymbol{\varphi(x, y) = 0}$:

4) Construyo el Hessiano Orlado de la Langrangiana con las derivadas $\boldsymbol{\overline{H} = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & \varphi'_x \\ L''_{yx} & L''_{yy} & \varphi'_y \\ \varphi'_x & \varphi'_y & 0 \end{vmatrix}}$

5) Valúo $\boldsymbol{\overline{H}}$ en los puntos críticos.

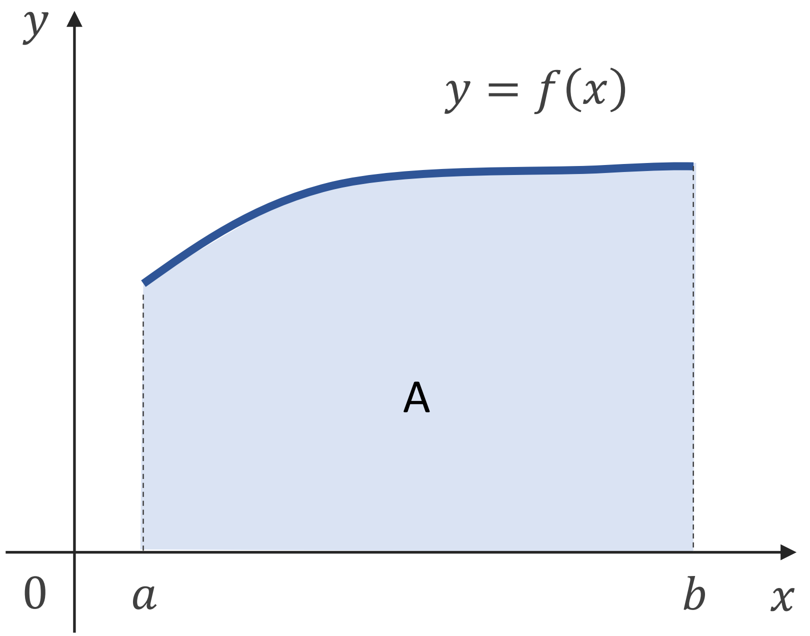
Se verifica que:

$$\overline{H}(\boldsymbol{P_i}) > 0 \rightarrow \textit{máximo condicionado en } \textbf{\textit{el punto crítico }} \boldsymbol{P_i}$$
$$\overline{H}(\boldsymbol{P_i}) < 0 \rightarrow \textit{mínimo condicionado en } \textbf{\textit{el punto crítico }} \boldsymbol{P_i}$$

Análisis Matemático II

Integrales Múltiples

Integrales múltiples



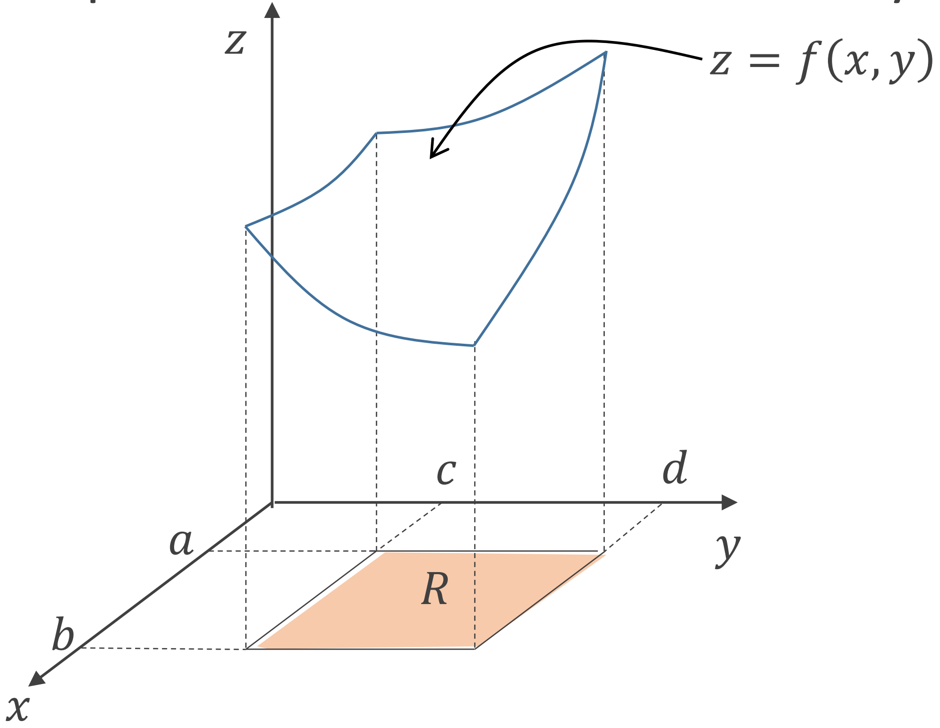
$$A = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

El concepto de Integral Definida, aplicada a funciones escalares, es un concepto que puede extenderse fácilmente a campos escalares. Así como las integrales definidas permiten calcular áreas, por medio de integrales múltiples podremos obtener volúmenes, centros de gravedad, centros de masa, momentos de inercia, etc.

Integrales múltiples

Integrales Dobles en dominios rectangulares

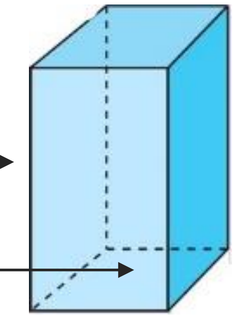
Vamos a obtener el volumen total de una función $z = f(x, y)$ definida sobre una región rectangular de integración $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$ como una integral doble. Si la superficie de la cara superior del cuerpo fuese un plano horizontal $(z = cte)$, el cuerpo tendría una altura constante y su volumen se expresaría:



$$V = S_B \cdot h$$

altura

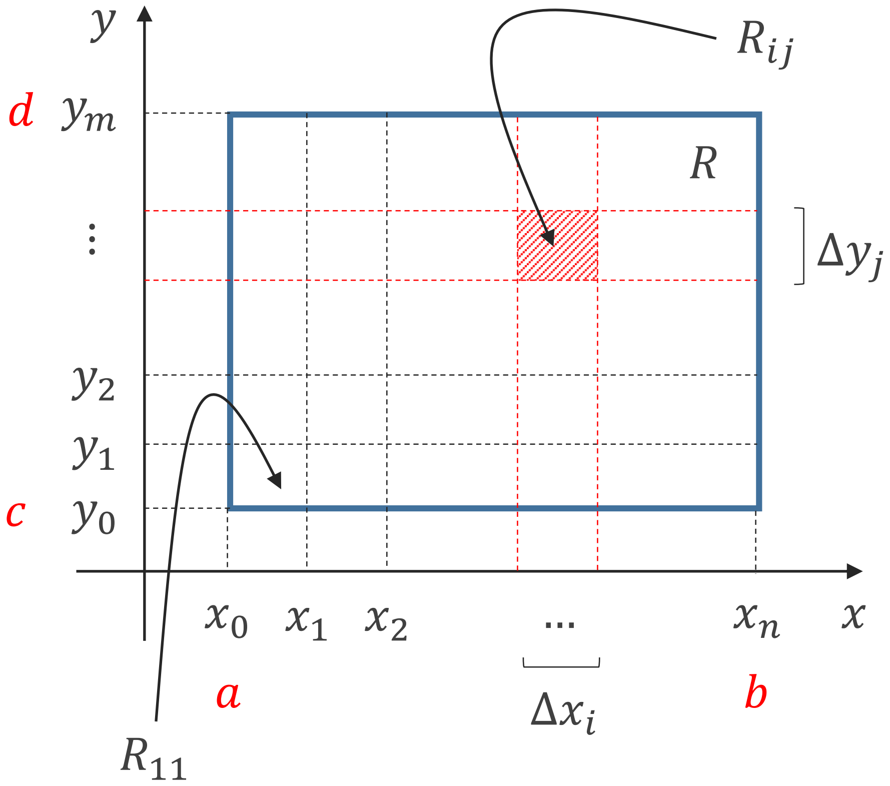
superficie de la base



Pero, si observamos la gráfica, la altura es variable y corresponde al valor de la función $z = f(x, y)$

Integrales múltiples

Subdividamos el intervalo $[a, b]$ en n partes (particiones) $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ y el intervalo $[c, d]$ en m partes $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d$.



Si $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, el área del subrectángulo R_{ij} vendrá dada por $\Delta x_i \cdot \Delta y_j = \Delta A_{ij}$.

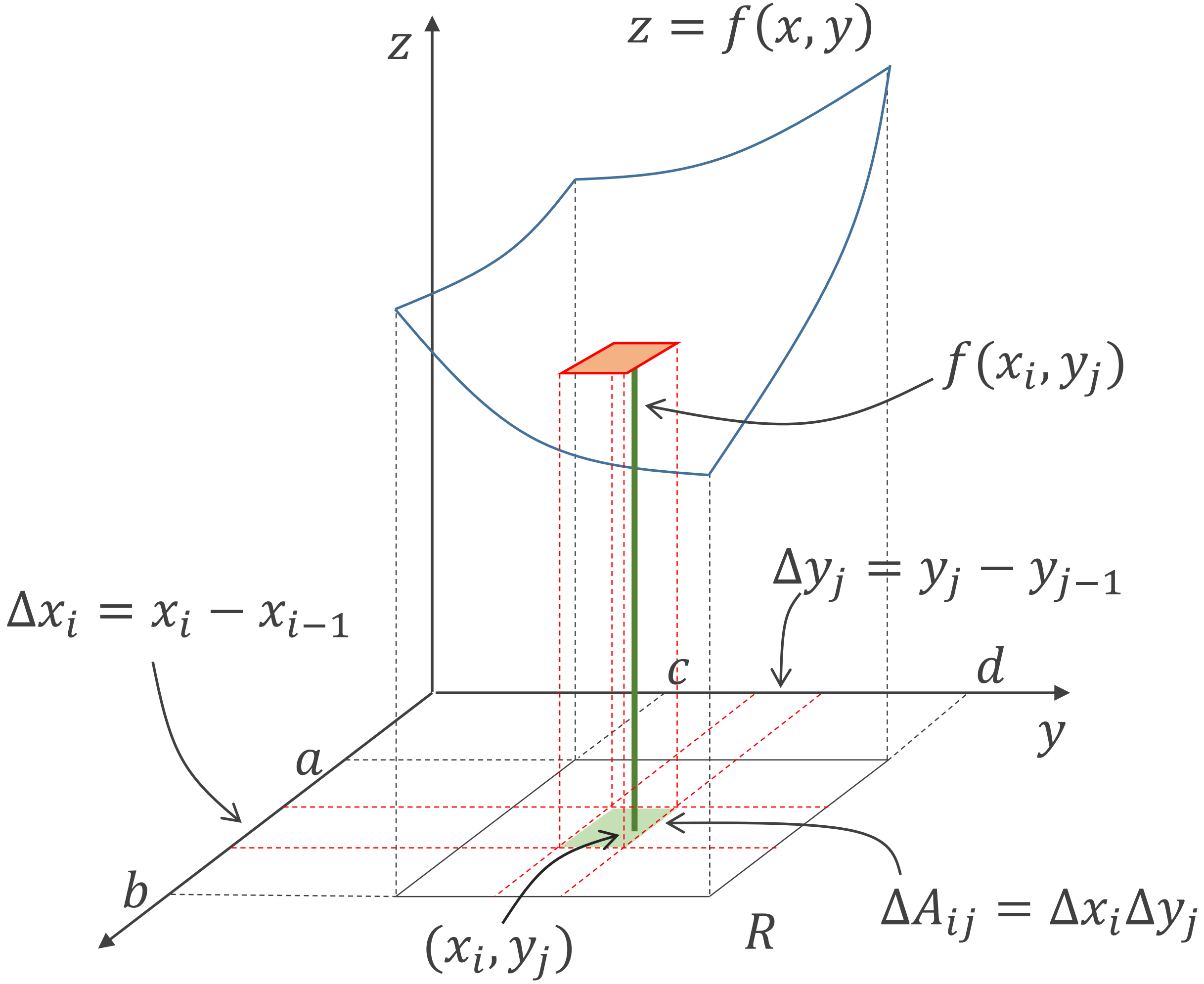
Sea (x_i, y_j) un punto interior al subrectángulo R_{ij} que tiene una **altura promedio** $f(x_i, y_i)$ en el subrectángulo, entonces:

$V_{ij} = f(x_i, y_i) \cdot \Delta A_{ij}$

es el volumen del cuerpo de base ΔA_{ij} y altura $f(x_i, y_i)$.

Gráficamente:

Integrales múltiples



Formemos la **Suma Doble de Riemann**:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j) \cdot \Delta A_{ij}$$

Cada término de la suma es el volumen de un sólido de base ΔA_{ij} y altura $f(x_i, y_j)$ y el valor de esta suma es el volumen aproximado del cuerpo.

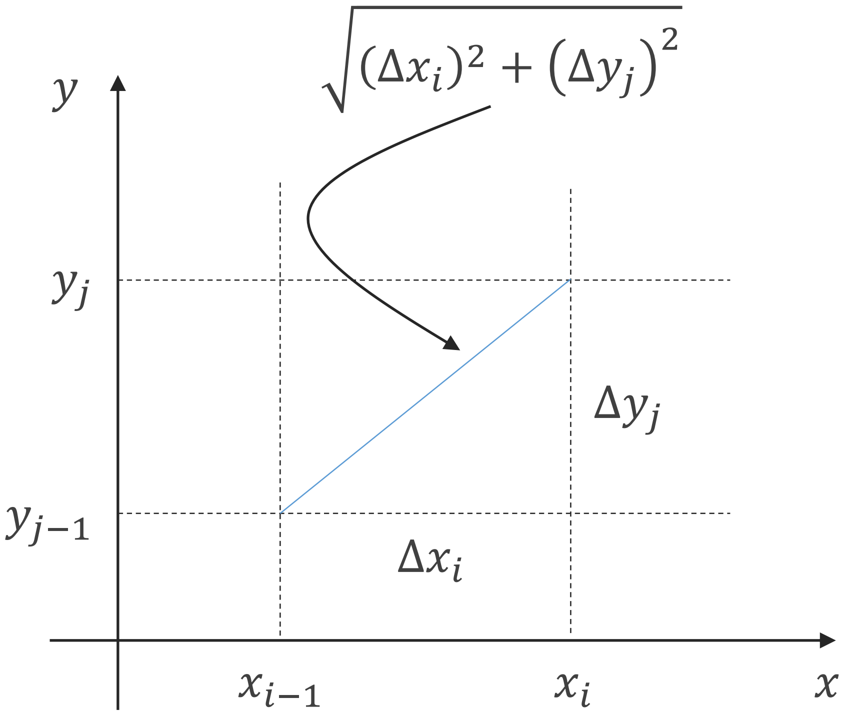
Para cada subrectángulo, como se puede ver en la siguiente figura, la diagonal mide

$$\sqrt{(\Delta \boldsymbol{x}_i)^2 + (\Delta \boldsymbol{y}_j)^2}$$

Definiremos el concepto de norma:

Integrales múltiples

Se llama norma de la partición y se designa $\|P\|$ a la mayor diagonal de los subrectángulos:



$$\|P\| = \max \sqrt{(\Delta x_i)^2 + \left(\Delta y_j\right)^2}$$

Pero si

$$\left.\begin{array}{l} m \to \infty \\ n \to \infty \end{array}\right] \Rightarrow \|P\| \to 0$$

Entonces podemos dar la siguiente definición:

$$V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j) \cdot \Delta A_{ij}$$

Si este límite existe, es la integral doble de la función $f(x, y)$ sobre la región de integración R.

Integrales múltiples

Es decir:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)\,\Delta A_{ij}$$

En este caso se dice que $f(x,y)$ es integrable sobre la región rectangular R y esta integral es el volumen encerrado entre la superficie de la función y el plano xy, sobre el dominio R.

Teniendo en cuenta de que $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$, la **Integral Doble** también se expresa:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dy\,dx$$

Condición suficiente de integrabilidad

Si $f(x,y)$ es continua sobre R, entonces $f(x,y)$ es integrable sobre R.

Integrales múltiples

Cálculo de la Integral Doble

Se puede demostrar que, para calcular la Integral Doble, podemos aplicar dos integrales simples sucesivas, es decir:

$$I_R = \iint_R f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx \qquad (1)$$

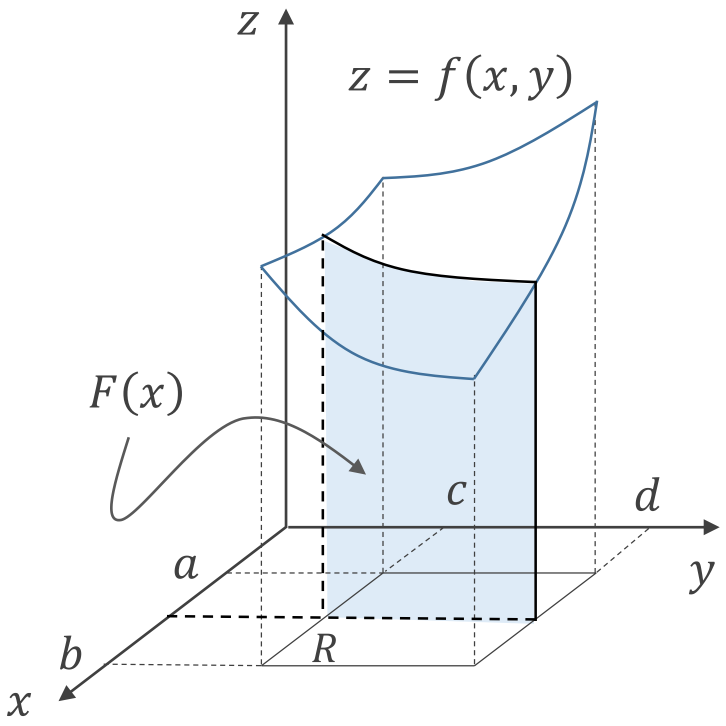
$$I_R = \iint_R f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy \qquad (2)$$

Estas integrales reciben el nombre de *integrales iteradas* o *sucesivas* en el recinto rectangular $R = [a,b] \times [c,d]$.

La expresión (1), por ejemplo, indica que primero debemos realizar una *integración parcial respecto* a y:

Integrales múltiples

En este sentido, el volumen total de una función $z = f(x, y)$ definida sobre una región de integración R, vendrá dado por:



$$V = \int_a^b F(x) \cdot dx$$

Siendo $F(x)$ el área de una sección transversal del cuerpo, obtenida mediante un corte efectuado en una dirección perpendicular al eje x.

Para calcular el volumen del cuerpo comprendido entre la función $z = f(x, y)$ y la región de integración R, podemos dividir el intervalo $[a, b]$ en n partes o particiones:

$$a = x_0 < x_1 < \ \ldots < x_n = b.$$

Integrales múltiples

Para un punto ε_i tal que $x_{i-1} \leq \varepsilon_i \leq x_i$ el área de la sección en ese punto es $F(\varepsilon_i)$ y el volumen de la sección entre los puntos x_{i-1} y x_i es, aproximadamente: $V_i \cong F(\varepsilon_i) \cdot \Delta x_i$, donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ es el espesor de la «rebanada». Entonces, el volumen total será:

$$V \cong \sum_{i=1}^{n} F(\varepsilon_i) \cdot \Delta x_i$$

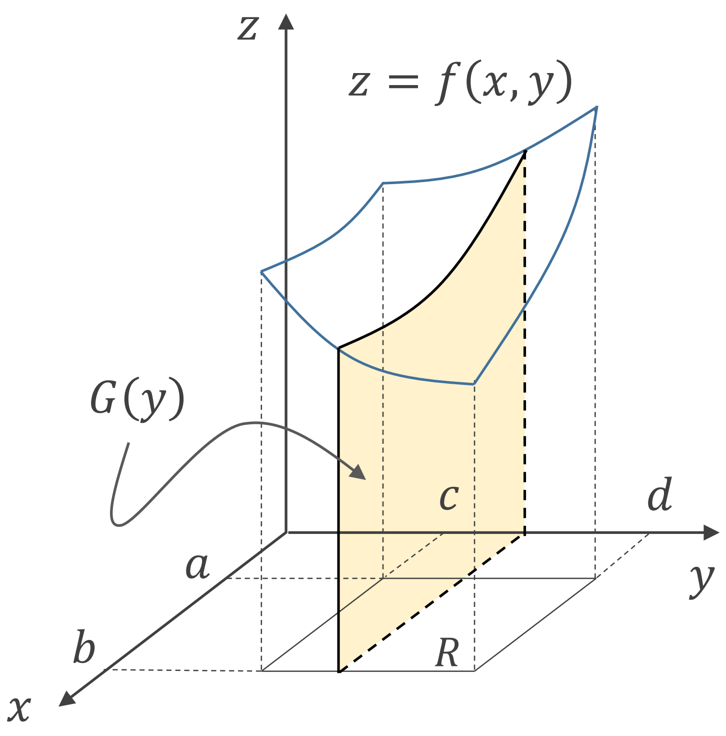
El valor exacto del volumen se obtiene tomando el límite para $n \to \infty$ o $\max \Delta x \to 0$

$$V \cong \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\varepsilon_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b F(x) \cdot dx$$

De forma análoga, la expresión (2), indica que primero debemos realizar una *integración parcial respecto* a x:

Integrales múltiples

El volumen total de una función $z = f(x, y)$ definida sobre la región de integración R, vendrá dado ahora por:



$$V = \int_c^d G(y) \cdot dy$$

Siendo $G(y)$ el área de una sección transversal del cuerpo, obtenida mediante un corte efectuado en una dirección perpendicular al eje y.

Para calcular el volumen del cuerpo comprendido entre la función $z = f(x, y)$ y la región de integración R, podemos dividir el intervalo $[\mathrm{c}, \mathrm{d}]$ en m partes o particiones:

$c < y_1 < \ \ldots < y_m = d.$

Integrales múltiples

Para un punto δ_j tal que $y_{j-1} \leq \delta_j \leq y_j$ el área de la sección en ese punto es $G(\delta_j)$ y el volumen de la sección entre los puntos y_{j-1} y y_j es, aproximadamente: $V_j \cong G\left(\delta_j\right) \cdot \Delta y_j$, donde $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ es el espesor de la «rebanada». Entonces, el volumen total será:

$$V \cong \sum_{j=1}^{m} G\left(\delta_j\right) \cdot \Delta y_j$$

El valor exacto del volumen se obtiene tomando el límite para $m \to \infty$ o $\max \Delta y \to 0$

$$V \cong \lim_{\max \Delta y \to 0} \sum_{j=1}^{m} G\left(\delta_j\right) \cdot \Delta y_j = \int_c^d G(y) \cdot dy$$

Integrales múltiples

Ejemplo 1:

Sea $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \wedge 2 \leq x \leq 3 \wedge 1 \leq y \leq 2\}$ obtener:

$$I_R = \iint_R (x+y)\, dxdy$$

$G(y)$

$$I_R = \int_1^2 \int_2^3 (x+y)\, dx\, dy = \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} + yx\right]_2^3 dy = \int_1^2 \left(\frac{9}{2} + 3y \ - 2 - 2y\right) dy = \int_1^2 \left(\frac{5}{2} + y\ \right) dy$$

$$= \left[\frac{5}{2}\mathrm{y} + \frac{\mathrm{y}^2}{2}\right]_1^2 = 5 + 2 - \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 4$$

$F(x)$

$$I_R = \int_2^3 \int_1^2 (x+y)\, dy\, dx = \int_2^3 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_1^2 dx = \int_2^3 \left(2x + 2 \ - x - \frac{1}{2}\right) dx = \int_2^3 \left(x + \frac{3}{2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x\right]_2^3 = \frac{9}{2} + \frac{9}{2} - 2 - 3 = 4$$

Integrales múltiples

Propiedades de las Integrales Dobles

1. La Integral Doble de la suma de dos funciones, sobre una región de integración D, es igual a la suma de las Integrales Dobles, sobre D, de cada una de las dos funciones:

$$\iint_D [f_1(x,y) + f_2(x,y)]\, dy\, dx = \iint_D f_1(x,y)\, dy\, dx + \iint_D f_2(x,y)\, dy\, dx$$

2. El factor constante se puede extraer fuera del símbolo integral doble

$$\iint_D c\, f(x,y)\, dy\, dx = c\, \iint_D f(x,y)\, dy\, dx$$

3. Si el dominio D está dividido en dos dominios parciales D_1 y D_2 sin poseer puntos interiores comunes y $f(x,y)$ es continua en todos los puntos del dominio D entonces:

$$\iint_D f(x,y)\, dy\, dx = \iint_{D_1} f(x,y)\, dy\, dx + \iint_{D_2} f(x,y)\, dy\, dx$$

Integrales múltiples

Propiedades de las Integrales Dobles

4. Si $f_1(x,y) \geq f_2(x,y)$ *en todos los puntos del dominio* D*, tendremos que :*

$$\iint_D f_1(x,y)\, dy\, dx \geq \iint_D f_2(x,y)\, dy\, dx$$

5. Si $f(x,y) = 1$ *en todos los puntos del dominio* D*, entonces, la integral doble de* $f(x,y)$ *sobre el dominio* D*, nos da el área de ese dominio (lo vamos a demostrar más adelante).*

$$A_D = \iint_D 1\, dy\, dx$$

6. Si C_1 *y* C_2 *son dos constantes tales que* $C_1 \leq f(x,y) \leq C_2$ *en todo el dominio* D*, entonces se cumple que :*

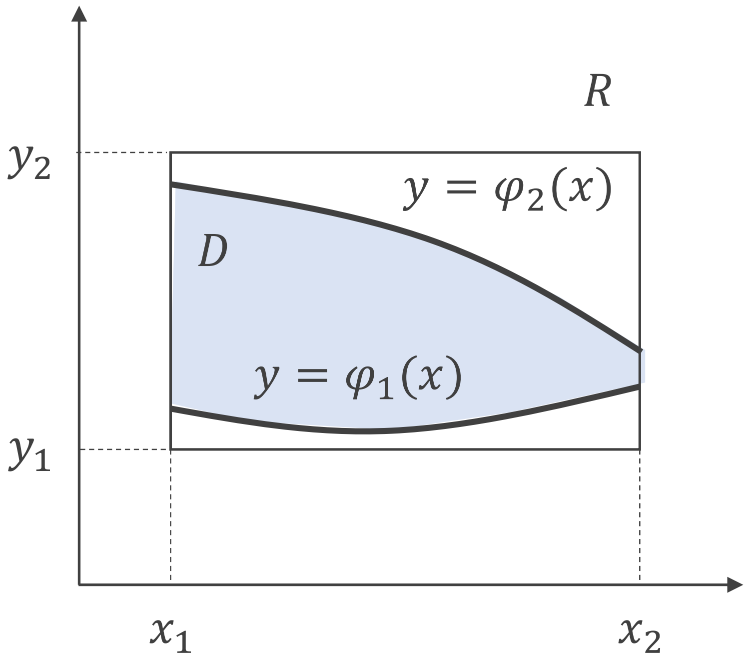
$$C_1\, A_D \leq \iint_D f(x,y) dy\, dx \leq C_2\, A_D$$

Integrales múltiples

Integrales Dobles en Dominios no Rectangulares

Puede ocurrir que el dominio de integración D sea no rectangular. Para estos casos podemos distinguir dos tipos de integrales:

Tipo I



Sea $z = f(x, y)$ una función definida sobre un dominio D, limitado por dos segmentos de rectas $x = x_1$ y $x = x_2$ y por las curvas $y = \varphi_1(x)$ y $y = \varphi_2(x)$, continuas.
Sea un rectángulo $R = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ que incluye a D.
Sea finalmente $f(x, y): D \to \mathbb{R}$ integrable.
Definimos una nueva función auxiliar:

$$G(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \in R - D \end{cases}$$

$f(x, y)$ y $G(x, y)$ encierran el mismo volumen.

Integrales múltiples

$G(x, y)$ es integrable sobre R y se cumple que:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_R G(x,y)\,dxdy$$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{x_1}^{x_2}\left[\int_{y_1}^{y_2} G(x,y)\,dy\right]dx$$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{x_1}^{x_2}\left[\int_{y_1}^{y=\varphi_1(x)} G(x,y)\,dy + \int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} G(x,y)\,dy + \int_{y=\varphi_2(x)}^{y_2} G(x,y)\,dy\right]dx$$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{x_1}^{x_2}\left[0 + \int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} G(x,y)\,dy + 0\right]dx$$

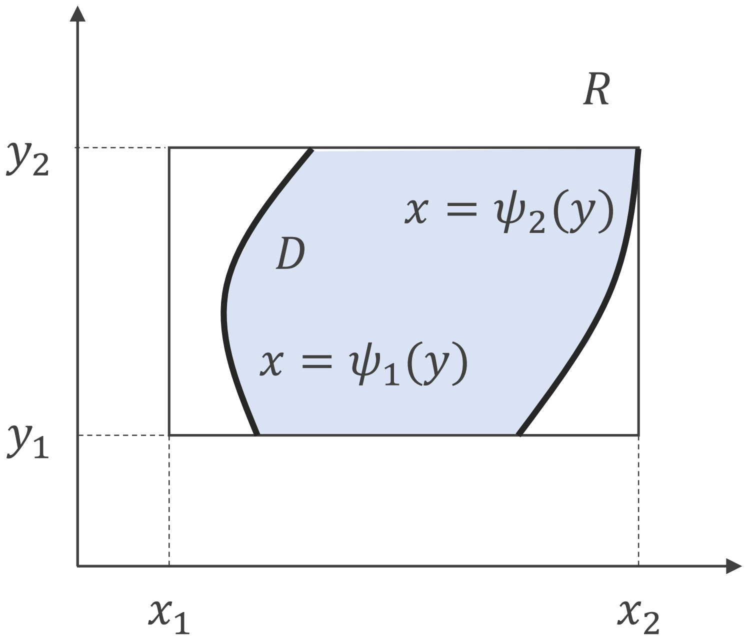
Pero entre $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ se cumple que $f(x,y) = G(x,y)$, luego

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x,y)\,dydx$$

En las regiones TIPO 1 se debe integrar siempre primero respecto de y y luego respecto a x.

Integrales múltiples

Análogamente, pueden calcularse las integrales **Tipo 2**:



Sea $z = f(x, y)$ una función definida sobre un dominio D, limitado por dos segmentos de rectas horizontales $y = y_1$ y $y = y_2$ y por las curvas que corresponden a las funciones $x = \psi_1(y)$ y $x = \psi_2(y)$, continuas, (con x despejada en cada una).

Sea un rectángulo $R = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ que incluye a D.

Sea finalmente $f(x, y): D \to \mathbb{R}$ integrable.

Definimos una nueva función auxiliar:

$$G(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \epsilon D \\ 0, & (x, y) \in R - D \end{cases}$$

$f(x, y)$ y $G(x, y)$ encierran el mismo volumen.

Integrales múltiples

$G(x, y)$ es integrable sobre R y se cumple que:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_R G(x,y)\,dxdy$$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{y_1}^{y_2}\left[\int_{x_1}^{x_2} G(x,y)\,dx\right]dy$$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{y_1}^{y_2}\left[\int_{x_1}^{\psi_1(y)} G(x,y)\,dx + \int_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} G(x,y)\,dx + \int_{x=\psi_2(y)}^{x_2} G(x,y)\,dx\right]dy$$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{y_1}^{y_2}\left[0 + \int_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} G(x,y)\,dx + 0\right]dy$$

Pero entre $\psi_1(y)$ y $\psi_2(y)$ se cumple que $f(x,y) = G(x,y)$, luego

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{y_1}^{y_2}\int_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

En las regiones TIPO 2 se debe integrar siempre primero respecto de x y luego respecto a y.

Análisis Matemático II

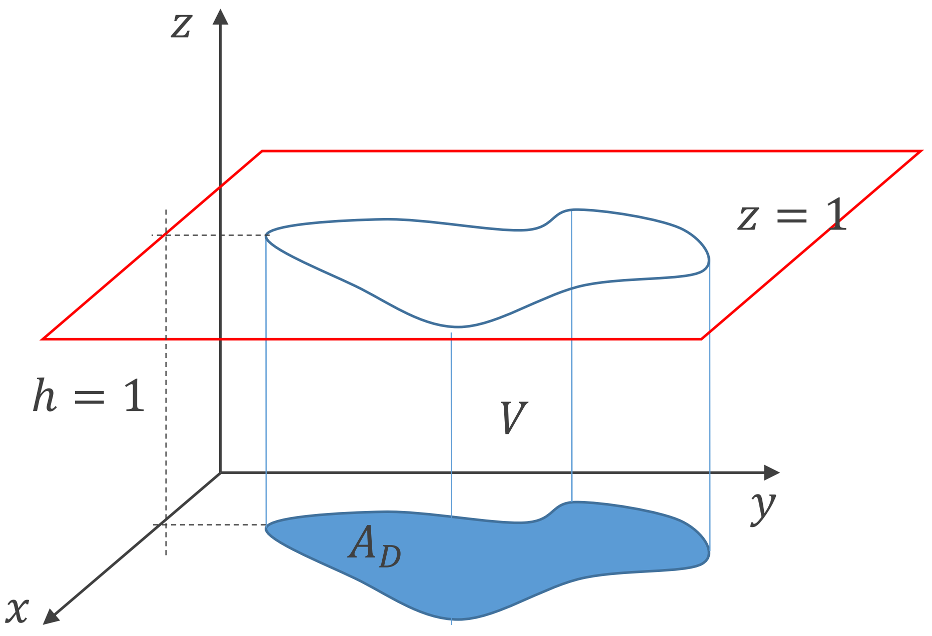
Integrales Múltiples

Cálculo de Áreas Planas con Integrales Dobles

Sabemos que:

$$V = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

Si consideramos la función $f(x,y) = 1$ es decir $z = 1$, entonces:

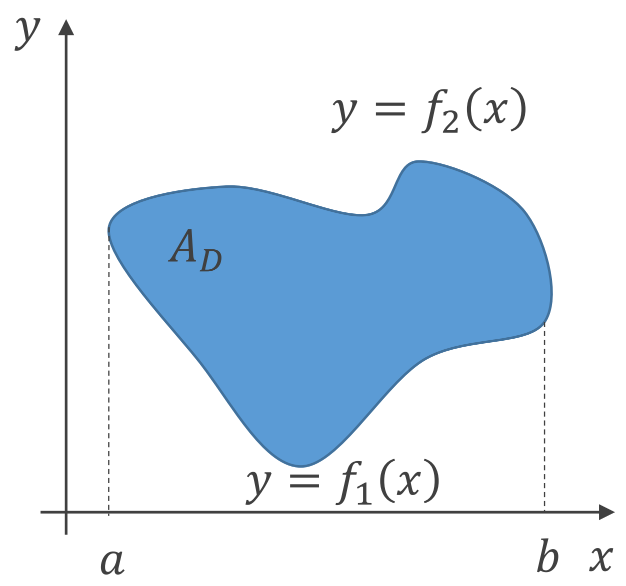


$$V = \iint_D 1\,dx\,dy \quad (I)$$

Además $V = A_D \cdot 1 \quad (II)$

De (I) y (II):

$$\boxed{A_D = \iint_D dx\,dy} \longrightarrow \boxed{A_D = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy\,dx}$$



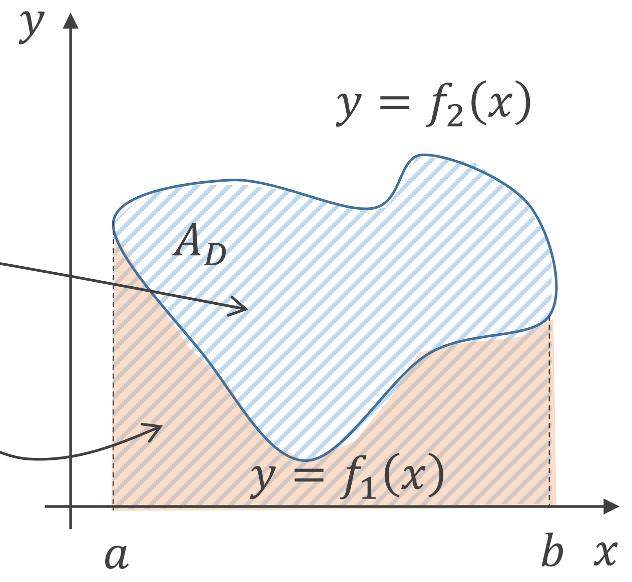
Cálculo de Áreas Planas con Integrales Dobles

La propiedad 5 decía: *Si* $f(x, y) = 1$ *en todos los puntos del dominio* D*, entonces la integral doble de* $f(x, y)$ *sobre el dominio* D*, nos dará el área de ese dominio.*

$$A_D = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy dx$$

$$A_D = \int_a^b [y]_{f_1(x)}^{f_2(x)} dx$$

$$A_D = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\, dx = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx$$

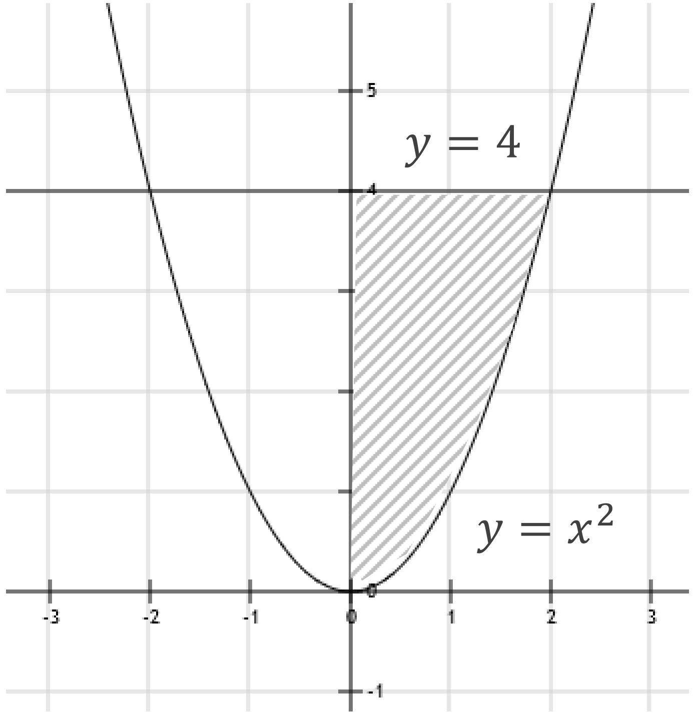


Igual que hacíamos en Análisis Matemático I.

Cálculo de Áreas Planas con Integrales Dobles

Ejemplo:

Hallar el área indicada en la figura.



Sabemos que el área a calcular se encuentra en el primer cuadrante.
Determinemos el punto de intersección de las dos funciones:

Igualamos $y = 4$ y $y = x^2 \;\rightarrow\; 4 = x^2$. Luego el punto de intersección que estamos buscando es $(2, 4)$.

Ahora podemos definir dos integrales dobles (TIPO 1 y TIPO 2):

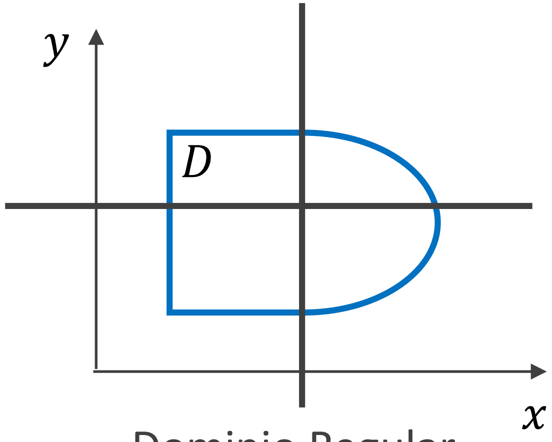
$$A_D = \int_0^2 \int_{y=x^2}^{y=4} dy\,dx \quad o \quad A_D = \int_0^4 \int_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dx\,dy$$

$$A_D = \int_0^2 \int_{y=x^2}^{y=4} dy\,dx = \int_0^2 [y]_{x^2}^{4}\,dx = \int_0^2 (4 - x^2)\,dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{3}$$

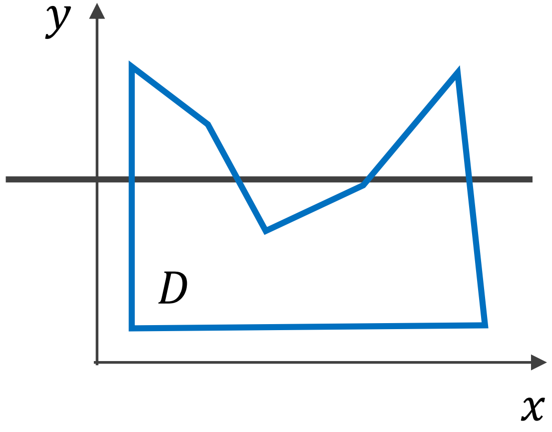
Lo mismo podemos hacer con la otra integral.

Cálculo de Áreas de Superficies

Dominio Regular



Dominio Regular



Dominio No Regular en x

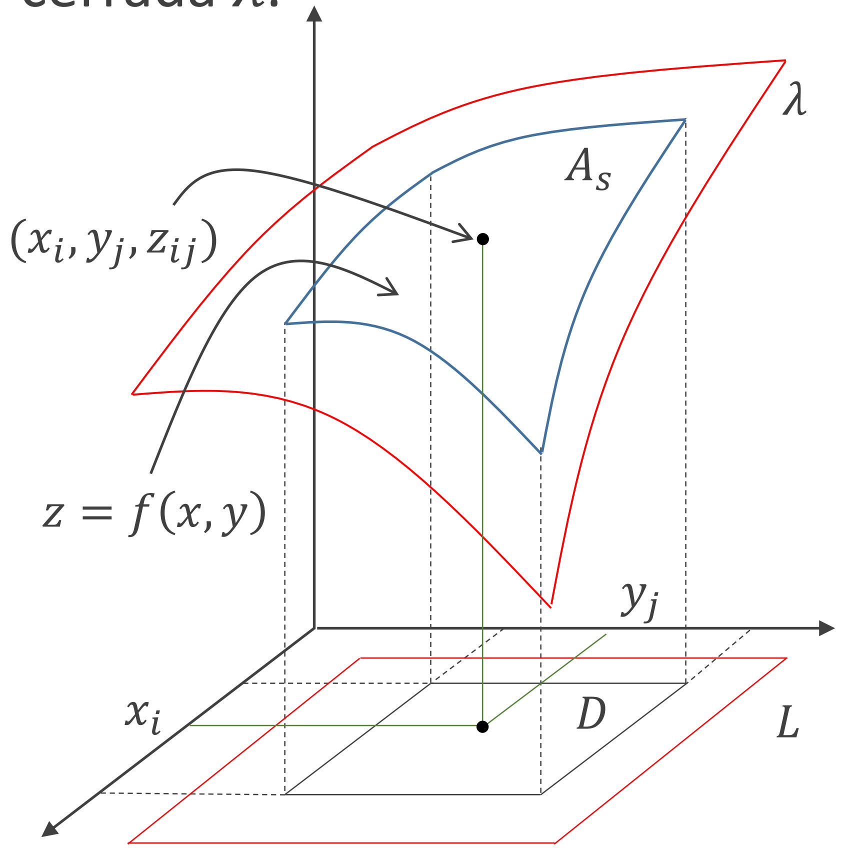
Un dominio es regular en la dirección del eje x si toda recta paralela a dicho eje y que pasa por un punto interior del dominio, corta a su frontera solo en dos puntos. (La definición de dominio regular en la dirección de y es análoga). Si un dominio es regular en la dirección de los dos ejes, se dice, simplemente, que el dominio es regular.

Si el dominio no es regular ni en la dirección de x, ni en la dirección de y, entonces para poder integrar se lo debe subdividir en subdominios regulares, aplicando la propiedad vista.

De igual forma, si alguno de los límites de integración no puede ser expresado con una sola expresión algebraica, también se debe subdividir el dominio para poder integrar.

Cálculo de Áreas de Superficies

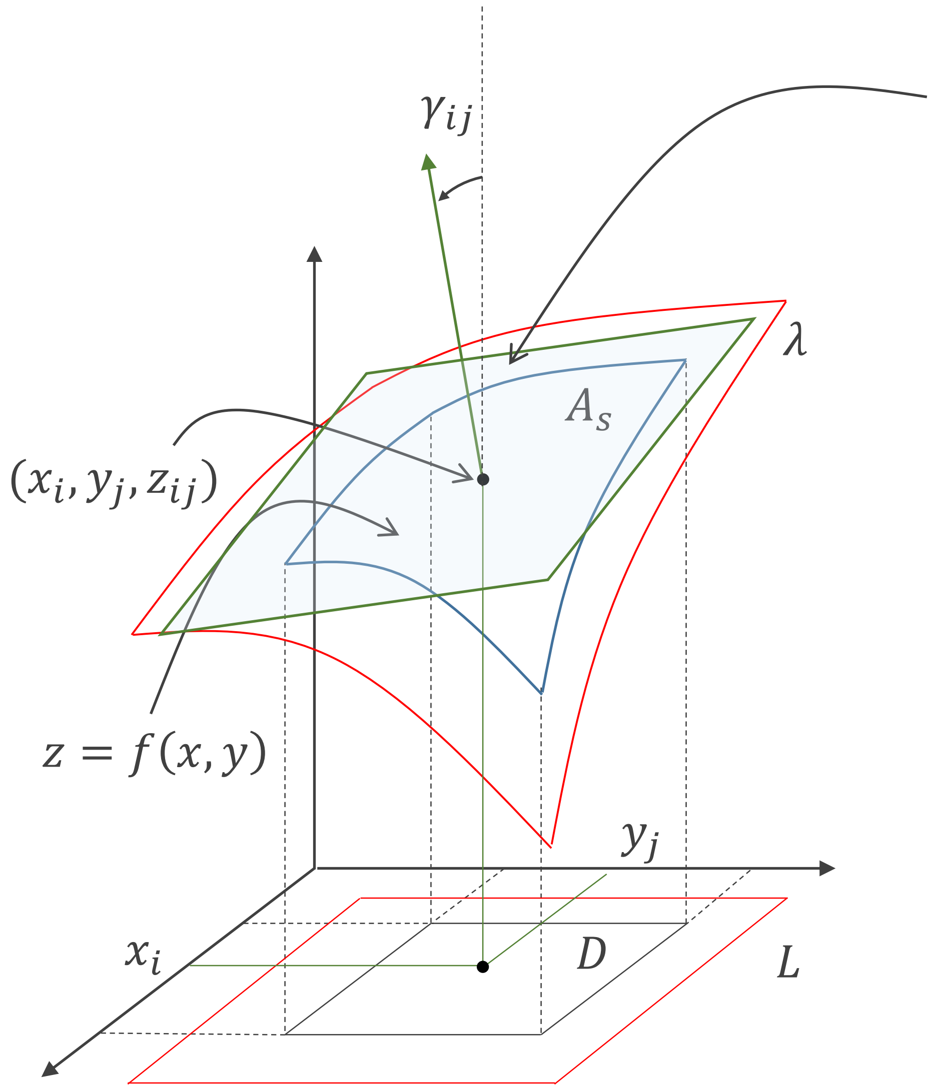
Consideremos la función $z = f(x, y)$ definida sobre un dominio regular D limitado por la curva cerrada L. Calculemos es área A_s de la superficie $z = f(x, y)$ limitada por la curva cerrada λ.



Consideremos la función $z = f(x, y)$ continua, con derivadas parciales también continuas en el dominio D.

Dividamos el dominio D en subdominios tal que R_{ij} es el rectángulo de área $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j$. Elijamos un punto (x_i, y_j) interior al rectángulo. A este punto le corresponderá el punto (x_i, y_j, z_{ij}). Por este punto trazaremos el plano tangente a la superficie, cuya ecuación viene dada por:

Cálculo de Áreas de Superficies



$$z - z_{ij} = \frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial x}(x - x_i) + \frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y}(y - y_j)$$

Sobre este plano tomemos un rectángulo de área $\Delta\sigma_{ij}$ cuya proyección en el plano xy es el rectángulo R_{ij} de área ΔA_{ij}.

Consideremos la suma de todos los rectángulos:

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_{ij}$$

Siendo m el número total de pariciones de D en la dirección de y y n el número total de particiones en la dirección de x.

Definamos el área mayor de todos los rectángulos $\Delta\sigma_{ij}$ de la subdivisión de la superficie $z = f(x,y)$ como el $\max \Delta\sigma_{ij}$.

Cálculo de Áreas de Superficies

Cuando $n \to \infty$ y $m \to \infty$, es decir, cuando $\max \Delta\sigma_{ij} \to 0$, el límite de la suma doble es el área de la superficie que estamos buscando:

$$A_s = \lim_{\max \Delta\sigma_{ij} \to 0} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_{ij} \qquad (*)$$

Si llamamos γ_{ij} al ángulo formado por el Plano Tangente y el plano xy, tendremos:

$$\Delta A_{ij} = \Delta\sigma_{ij} \cdot \cos\gamma_{ij} \qquad o \qquad \Delta\sigma_{ij} = \frac{\Delta A_{ij}}{\cos\gamma_{ij}}$$

El ángulo γ_{ij} es también el ángulo director formado por la Recta Normal a la superficie en el punto $\left(x_i, y_j, z_{ij}\right)$ con el eje z. Por esta razón, en virtud del Plano Tangente, podemos escribir el coseno director (respecto del eje z) de la Recta Normal:

Cálculo de Áreas de Superficies

$$\cos\gamma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y}\right]^2 + 1}}$$

Por lo tanto, resulta:

$$\Delta\sigma_{ij} = \sqrt{\left[\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y}\right]^2 + 1}\ .\Delta A_{ij}$$

Y reemplazando en $(*)$, A_s es:

$$A_s = \lim_{\max \Delta\sigma_{ij}\to 0} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left[\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y}\right]^2 + 1}\ \cdot \Delta A_{ij}$$

Cálculo de Áreas de Superficies

El límite de aquella suma doble es por definición la siguiente integral:

$$A_s = \iint_D \sqrt{\left[\frac{\partial f\left(x_i, y_j\right)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f\left(x_i, y_j\right)}{\partial y}\right]^2 + 1} \cdot dx\, dy$$

De manera más simplificada:

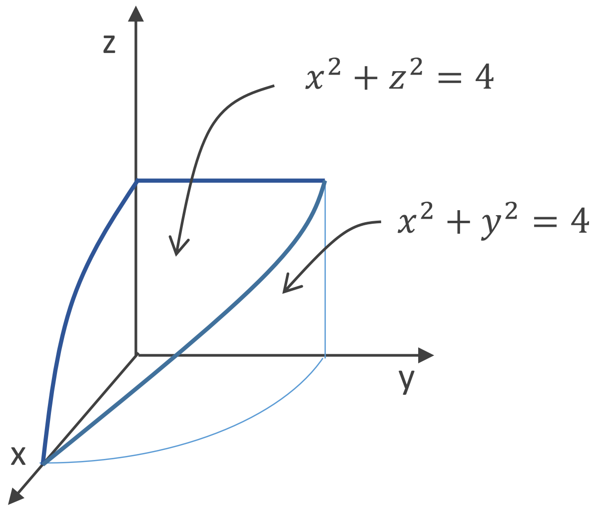
$$\boldsymbol{A_s = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \cdot dx\, dy}$$

Debemos tener en cuenta que las variables independientes, en este caso, son x e y; no obstante, hay que cambiar las derivadas parciales respecto de las variables de integración según sea el caso.

Cálculo de Áreas de Superficies

Ejemplo:

Hallar el área de la parte de la superficie del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ comprendida en el primer octante y limitada por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$



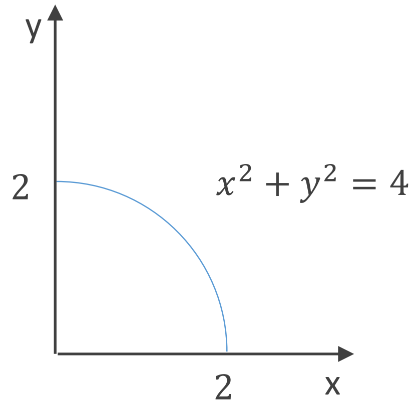
La ecuación de la superficie es $z = \sqrt{4 - x^2}$ por lo tanto, sus derivadas parciales son:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

El área entonces será:

$$A_s = \iint_D \left[\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \right] \cdot dx\, dy = \iint_D \left(\sqrt{\frac{x^2}{4 - x^2} + 1} \right) \cdot dx\, dy = \iint_D \left(\sqrt{\frac{4}{4 - x^2}} \right) \cdot dx\, dy$$

Cálculo de Áreas de Superficies



$$A_s = \iint_D \left(\sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\right) \cdot dx\,dy = \iint_D \left(\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\right) \cdot dx\,dy$$

$$A_s = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,dy\,dx$$

$$A_s = \int_0^2 \left[\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,y\right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$A_s = \int_0^2 2\;dx$$

$$A_s = [2x]_0^2$$

$$A_s = 4$$

También podríamos haber resuelto la integral como TIPO 2.

Por otro lado, podríamos haber proyectado la superficie sobre el plano yz, resolviendo:

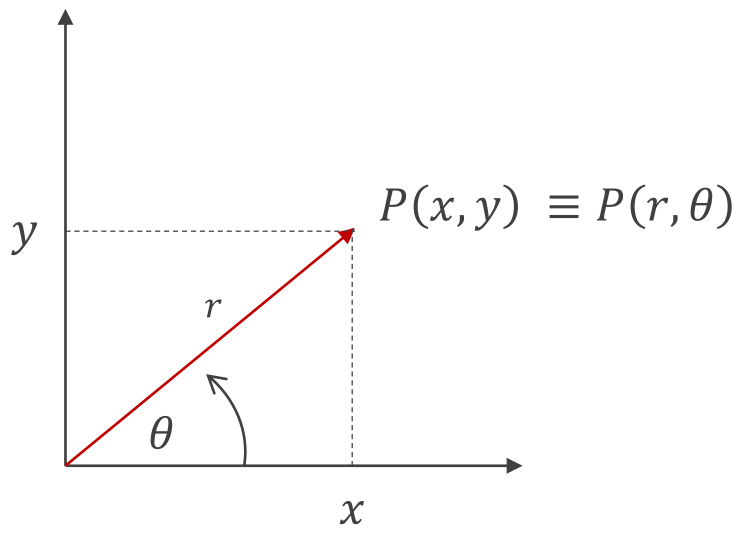
$$A_s = \iint_D \left[\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 1}\right] \cdot dy\,dz$$

Con: $x = \sqrt{4-z^2}$ e integrar sobre el dominio:

$R = \{(z,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge 0 \leq z \leq 2 \;\wedge 0 \leq y \leq 2\}$

Integrales Dobles en Coordenadas Polares

El cálculo de una integral se puede simplificar mediante un conveniente cambio de variables. Hay integrales dobles en las que el cálculo en coordenadas rectangulares es más bien complejo y que, sin embargo, pueden fácilmente resolverse en coordenadas polares.



Relación entre coordenadas rectangulares y polares

$x = r\cos\theta$

$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$

con $0 \leq r < \infty$ y $0 \leq \theta < 2\pi$

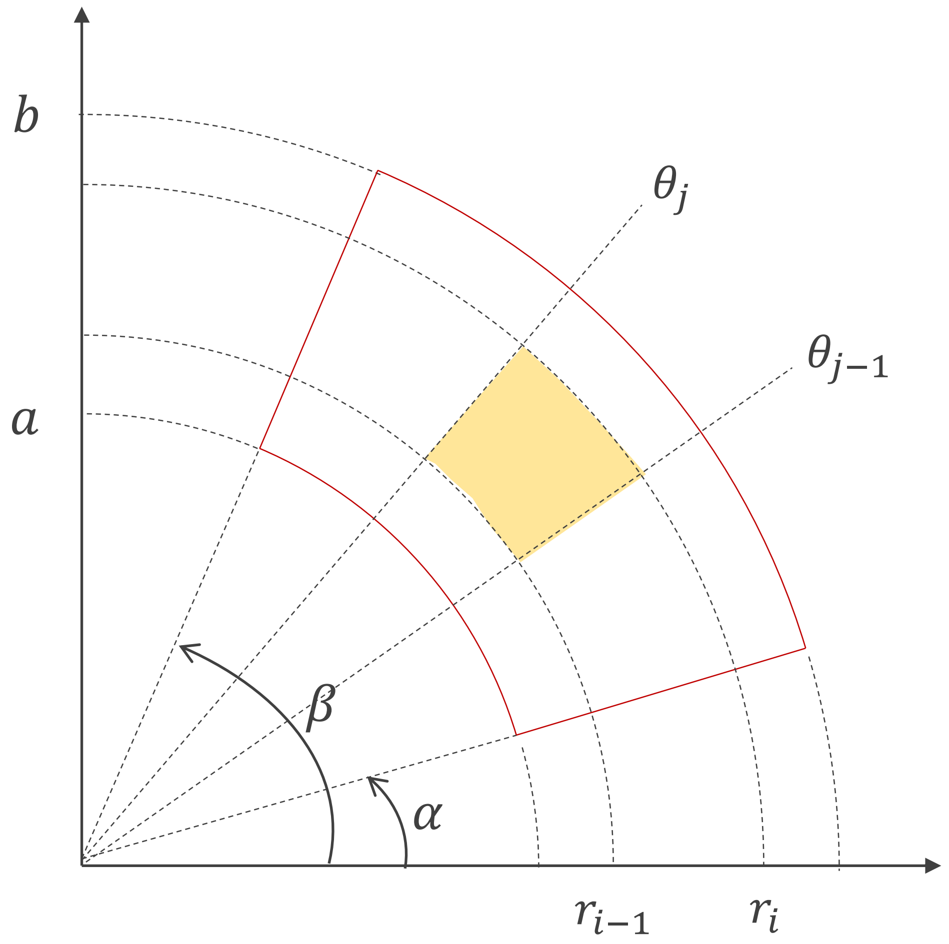
Calculemos ahora la integral doble:

$$\iint_R f(x, y) \cdot dA$$

Donde $R = \{(r, \theta): a \leq r \leq b \ \wedge \alpha \leq \theta \leq \beta\}$

Integrales Dobles en Coordenadas Polares

Dividamos el intervalo $[a, b]$ en n partes por los puntos $a = r_0, < r_1 < \ ... < r_n = b$ y el intervalo $[\alpha, \beta]$ en m partes, por los puntos $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_m = \beta$. Tomemos un dominio parcial ΔA_{ij} limitado por r_{i-1}, r_i y θ_{j-1}, θ_j.



Recordemos que el área de un sector circular de radio r y ángulo θ es:

$A = \frac{1}{2} r^2 \theta$, el área del dominio ΔA_{ij} será:

$$\Delta A_{ij} = \frac{1}{2} r_i^2 (\theta_j - \theta_{j-1}) - \frac{1}{2} r_{i-1}^2 (\theta_j - \theta_{j-1})$$

$$\Delta A_{ij} = \frac{1}{2} (r_i^2 - r_{i-1}^2)(\theta_j - \theta_{j-1})$$

$$\Delta A_{ij} = \frac{1}{2} (r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1}) \Delta\theta_j \rightarrow \Delta A_{ij} = \frac{r_i + r_{i-1}}{2} \Delta r_i \Delta\theta_j$$

Integrales Dobles en Coordenadas Polares

Sea (r_i, θ_j) las coordenadas polares de un punto interior del dominio parcial ΔA_{ij}, entonces $(r_i \cos\theta_j, r_i \,sen\, \theta_j)$ son las coordenadas rectangulares de dicho punto.

Escribamos la doble suma de Riemann:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_j)\,\Delta A_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(r_i\cos\theta_j, r_i\,sen\,\theta_j)\frac{r_i + r_{i-1}}{2}\Delta r_i\,\Delta\theta_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} g(r_i, \theta_j)\frac{r_i + r_{i-1}}{2}\Delta r_i\,\Delta\theta_j$$

Definamos como $\max \Delta A$ al área del mayor de los rectángulos polares de la subdivisión de R.

Tomemos el límite para $n \to \infty$, $m \to \infty$, es decir cuando $\max \Delta A \to 0$ y $r_i \to r_{i-1}$

$$\lim_{\max \Delta A \to 0}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_j)\,\Delta A_{ij} = \iint_R f(x,y)\,dA = \iint_R f(r\cos\theta\,, r\,sen\,\theta)\;r\,dr\,d\theta = \iint_R g(r,\theta)\;r\,dr\,d\theta$$

Podemos calcular esta integral escribiendo: $\int_\alpha^\beta \int_a^b g(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta$

Lo demostrado es válido también para dominios de forma complicada.

Cambio de Variables

En Análisis Matemático I, para funciones de una única variable independiente, se estudió que a veces, un cambio de variables simplifica el cálculo integral. Recordemos entonces que si $y = f(x)$ con $x = g(t)$, entonces:

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f\big(g(t)\big) \cdot g'(t) \cdot dt$$

Para funciones de varias variables se complica porque intervienen las derivadas parciales que son tantas como las variables independientes. Entonces, en el integrando, se debe introducir, además de la función expresada en las nuevas variables, un factor que involucre las derivadas parciales respecto de las nuevas variables **en valor absoluto**.

Este factor se conoce como el **Jacobiano de la transformación**.

Cambio de Variables

Supongamos que las funciones

$$\begin{cases} x = g_1(u, v) \\ y = g_2(u, v) \end{cases}$$

Definen una correspondencia biunívoca entre los puntos del dominio E del plano uv y los puntos del dominio V del plano xy:

El Jacobiano de la transformación será:

Cambio de Variables

$$\mathcal{J}\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\iint_V f(x,y)\, dxdy = \iint_E f[g_1(u,v), g_2(u,v)] \left|\mathcal{J}\left(\frac{x,y}{u,v}\right)\right| dudv$$

Ejemplo: En coordenadas polares, $x = r\, cos\, \theta,\, y = r\, sen\, \theta$

$$\mathcal{J}\left(\frac{x,y}{r,\theta}\right) = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial r} = cos\,\theta\,.\,r\,cos\,\theta + r\,sen\,\theta\,.\,sen\,\theta = r$$

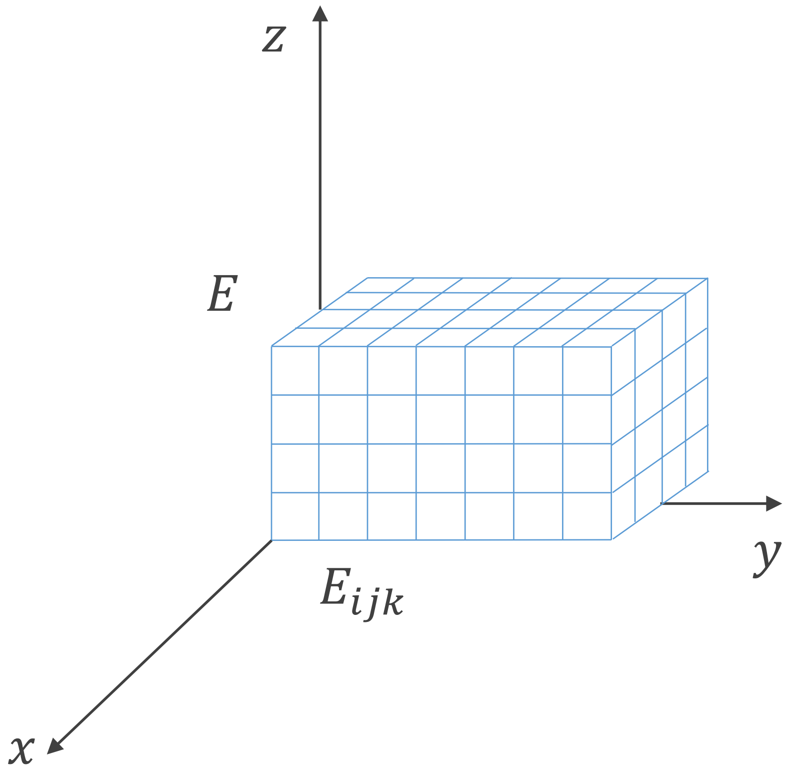
$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \iint_D f[r\,cos\,\theta\,, r\,sen\,\theta]\, r\, drd\theta = \iint_D g(r,\theta)\, r\, drd\theta$$

Análisis Matemático II

Integrales Múltiples

Integrales Triples

Ampliaremos ahora el concepto de Integrales Dobles a Integrales Triples, adaptando lo definido para funciones de dos variables a funciones de tres variables.



Consideremos la función $w = f(x, y, z)$, continua en el dominio con forma de paralelepípedo rectangular, $E = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$.

Dividimos los intervalos:

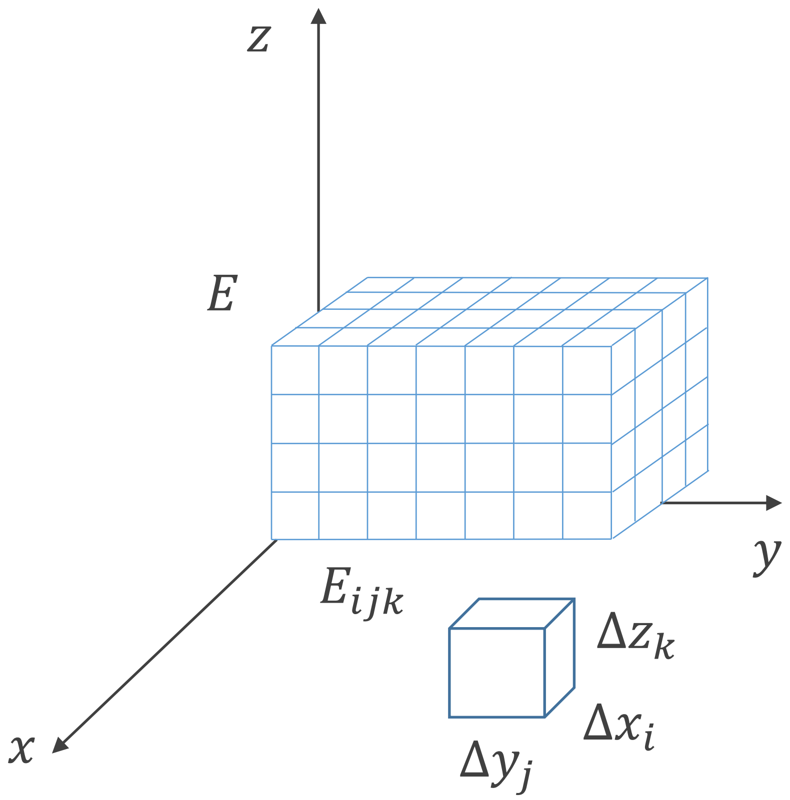
$[a, b]$ en n partes, $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$

$[c, d]$ en m partes, $c = y_1 < y_2 < \cdots < y_m = d$

$[p, q]$ en l partes, $p = z_1 < z_2 < \cdots < z_l = q$

Integrales Triples

Consideremos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ y $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. El volumen del subdominio E_{ijk} será $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j \cdot \Delta z_k$.



Elijamos un punto (x_i, y_j, z_k) interior al subdominio E_{ijk} y formemos la Suma Triple de Riemnann:

$$\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_j, z_k) \cdot \Delta V_{ijk}$$

Definimos como $\max \Delta V$ al volumen del mayor de los subdominios de la división de E. El límite de la Suma Triple cuando $n \to \infty, m \to \infty$ y $l \to \infty$ es decir cuando $\max \Delta V \to 0$ es la Integral Triple de f en el dominio E.

Integrales Triples

$$\lim_{\max \Delta V \to 0} \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_j, z_k\right) \cdot \Delta V_{ijk} = \iiint_E f(x, y, z)\, dV$$

Si este límite existe, decimos que la función $f(x, y, z)$ es integrable sobre el dominio de integración E.

Teniendo en cuenta que $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$, la Integral Triple también se expresa como:

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \int_c^d \int_p^q f(x, y, z)\, dz\; dy\, dx$$

O en el caso de dominios con formas no regulares (igual que lo hicimos con Integrales Dobles):

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\; dy\, dx$$

Cambio de Variables en Integrales Triples

Consideremos las funciones: $\begin{cases} x = g_1(u,v,w) \\ y = g_2(u,v,w) \\ z = g_3(u,v,w) \end{cases}$

El Jacobiano de la transformación es: $\mathcal{J}\left(\dfrac{x,y,z}{u,v,w}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$

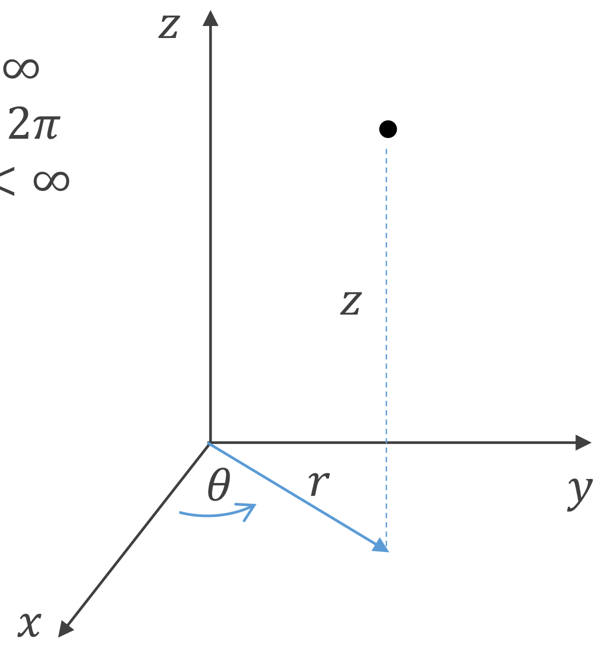
Y el cambio de variables en Integrales Triples resulta:

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\;dy\,dz = \iiint_E f[g_1(u,v,w), g_2(u,v,w), g_3(u,v,w)]\;\left|\mathcal{J}\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right)\right| du\,dv\,dw$$

Cambio de Variables en Integrales Triples

En coordenadas cilíndricas, tenemos:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,sen\,\theta \\ z = z \end{cases} \quad con \begin{cases} 0 \le r < \infty \\ 0 \le \theta < 2\pi \\ -\infty < z < \infty \end{cases}$$



El Jacobiano de la Transformación es:

$$\mathcal{J}\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,z}\right) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,sen\,\theta & 0 \\ sen\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

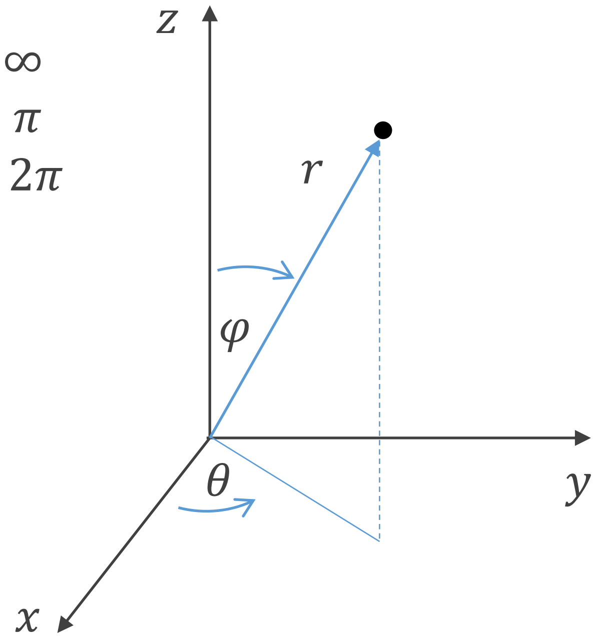
Y el cambio de variables en Integrales Triples resulta:

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\;dy\,dz = \iiint_E f[r\cos\theta\,, r\,sen\,\theta\,, z]\,\left|\mathcal{J}\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,z}\right)\right| dr\,d\theta\,dz$$

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\;dy\,dz = \iiint_E g(r,\theta,z)\,r\,dr\,d\theta\,dz$$

Cambio de Variables en Integrales Triples

En coordenadas esféricas, tenemos: $\begin{cases} x = r\,sen\,\varphi\,cos\,\theta \\ y = r\,sen\,\varphi\,sen\,\theta \\ z = r\,cos\,\varphi \end{cases}$ $con \begin{cases} 0 \le r < \infty \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \theta < 2\pi \end{cases}$



El Jacobiano de la Transformación es:

$$\mathcal{J}\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,\varphi}\right) = \begin{vmatrix} sen\,\varphi\,cos\,\theta & -r\,sen\,\varphi\,sen\,\theta & r\,cos\,\varphi\,cos\,\theta \\ sen\,\varphi\,sen\,\theta & r\,sen\,\varphi\,cos\,\theta & r\,cos\,\varphi\,sen\,\theta \\ cos\,\varphi & 0 & -r\,sen\,\varphi \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{J}\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,\varphi}\right) = cos\,\varphi\,[-r^2 sen\varphi\,cos\varphi\,sen^2\theta - r^2 sen\varphi\,cos\varphi\,cos^2\theta] - r\,sen\varphi[r.sen^2\varphi\,cos^2\theta + rsen^2\varphi\,sen^2\theta]$$

$$\mathcal{J}\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,\varphi}\right) = cos\,\varphi\,[-r^2 sen\varphi\,cos\varphi\,(sen^2\theta + cos^2\theta)] - r\,sen\varphi\,[r.sen^2\varphi(\,cos^2\theta + \,sen^2\theta)]$$

$$\mathcal{J}\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,\varphi}\right) = -r^2 sen\varphi\,cos^2\,\varphi - r^2 sen^3\varphi$$

Cambio de Variables en Integrales Triples

$$\mathcal{J}\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,\varphi}\right) = -r^2 sen\varphi\, cos^2\varphi - r^2 sen^3\varphi$$

$$\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,\varphi}\right) = -r^2\, sen\varphi[cos^2\varphi + sen^2\varphi\,]$$

$$\boldsymbol{\mathcal{J}\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,\varphi}\right) = -r^2\, sen\varphi}$$

Luego, el Jacobiano de la Transformación **en valor absoluto** es: $\left|\mathcal{J}\left(\frac{\boldsymbol{x,y,z}}{\boldsymbol{r,\theta,\varphi}}\right)\right| = \boldsymbol{r^2\, sen\,\varphi}$

Y el cambio de variables en Integrales Triples resulta:

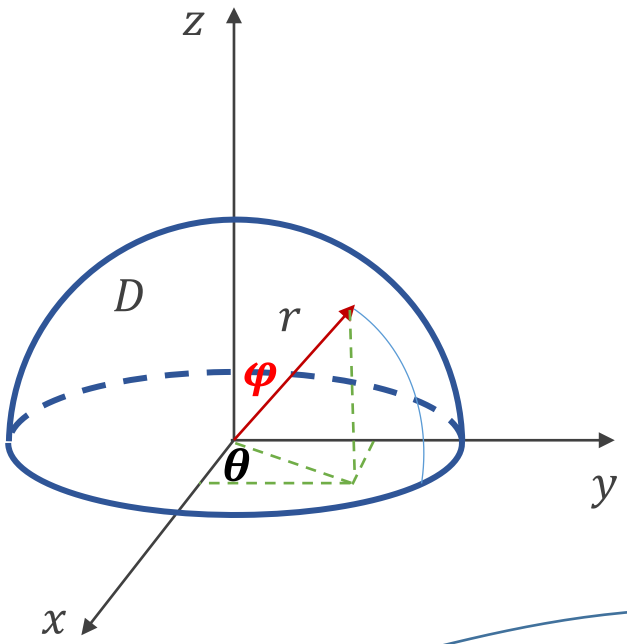
$$\iiint_E f(x,y,z)\, dx\;\, dy\, dz = \iiint_E f[r\, sen\,\varphi\, cos\,\theta\,, r\, sen\,\varphi\, sen\,\theta\,, r\, cos\,\varphi]\, \left|\mathcal{J}\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,\varphi}\right)\right| dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$\iiint_E f(x,y,z)\, dx\;\, dy\, dz = \iiint_E g(r,\theta,\varphi)\, r^2\, sen\,\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

Cambio de Variables en Integrales Triples

Ejemplo:

Hallar el volumen de una semiesfera de radio $r = 4$.



En coordenadas esféricas tenemos: $\begin{cases} x = r\, sen\, \varphi \cos\theta \\ y = r\, sen\, \varphi\, sen\, \theta \\ z = r \cos\varphi \end{cases}$ $con \begin{cases} 0 \le r < \infty \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \theta < 2\pi \end{cases}$

Para una semiesfera de radio $r = 4$: $\begin{cases} 0 \le r \le 4 \\ 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ 0 \le \theta < 2\pi \end{cases}$

Entonces, la integral triple en coordenadas esféricas es:

$$V_D = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{4} 1 \cdot r^2\, sen\, \varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^4 sen\, \varphi\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/2}\frac{64}{3}\, sen\, \varphi\, [\theta]_0^{2\pi}\, d\varphi = \frac{128}{3}\pi\,[-\cos\varphi]_0^{\pi/2} = \frac{128}{3}\pi$$

Como calculamos un volumen en tres dimensiones, la función $g(r,\theta,\varphi) = 1$

Compare este valor, con el que hubiese obtenido por fórmula.

Análisis Matemático II

Funciones y Campos Vectoriales

Funciones y Campos Vectoriales

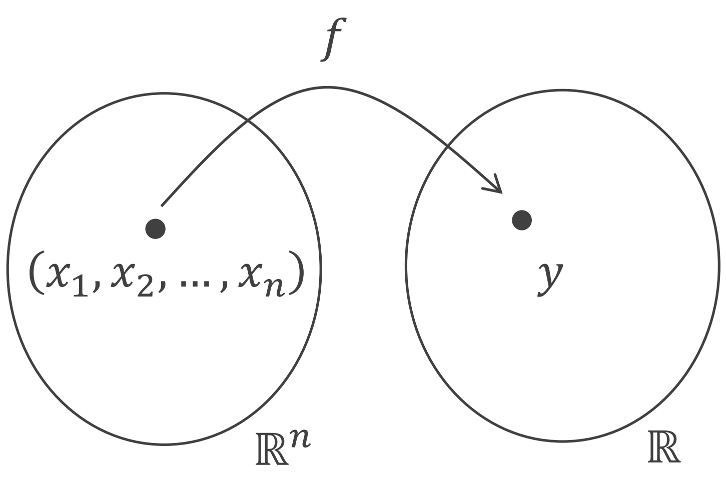
Hasta ahora hemos estudiado:

Funciones escalares (en Análisis Matemático I) donde $\dim(\mathcal{D}) = \dim(\mathcal{J}m) = 1$. Es decir, funciones que transforman un número real (escalar) en otro número real (escalar).

$$f: x \in \mathbb{R} \to y \in \mathbb{R}$$

Campos escalares (en Análisis Matemático II) donde $\dim(\mathcal{D}) > 1$ y $\dim(\mathcal{J}m) = 1$. Es decir, funciones que transforman una *n-upla* de números reales (escalares) en otro número real (escalar).

$$f: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to z \in \mathbb{R}$$



En general, se trata de funciones $f: \mathbb{R}^\mathrm{n} \to \mathbb{R}$

Funciones y Campos Vectoriales

Ahora vamos a extender estos concepto a Funciones y Campos Escalares:

Función vectorial: En este caso, la $\dim(\mathcal{D}) = 1$ y $\dim(\mathcal{Jm}) > 1$, es decir que se trata de funciones a las que a un número real le hace corresponder una *m-upla* de número reales que identificaremos como las componentes de un vector.

$$\vec{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$$

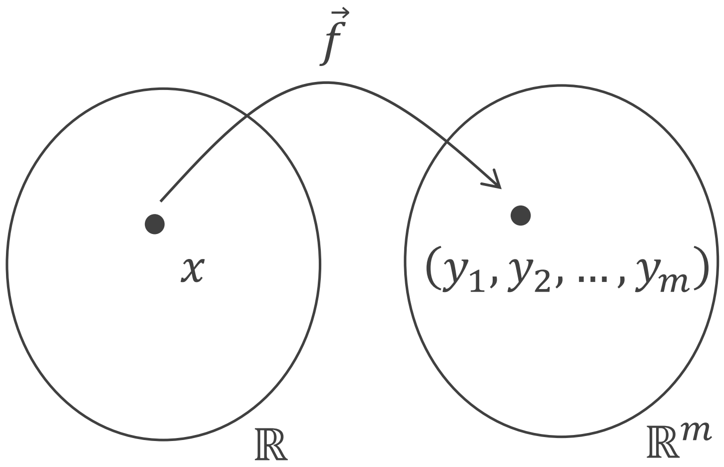
La definición de función vectorial, equivale a la definición de m funciones escalares.

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x) \\ y_2 = f_2(x) \\ \quad \vdots \\ y_m = f_m(x) \end{cases}$$

Considerando $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$,

resulta $\vec{y} = \vec{f}(x)$

$\vec{f}: x \in \mathbb{R} \to [y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)] \in \mathbb{R}^m$



Funciones y Campos Vectoriales

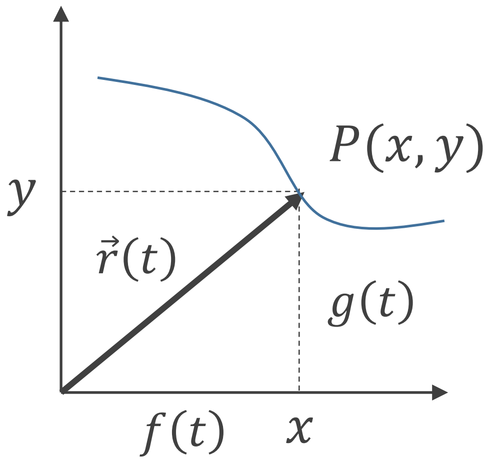
Nos interesan aquellas funciones vectoriales cuyas imágenes son vectores de dos o tres dimensiones y se utilizan para describir curvas, movimiento de partículas, etc.

Ejemplo 1:

Si $m = 2$, una función vectorial asigna, a cada numero real, un vector de dos componentes en $\mathbb{R}^2$ o un par ordenado de números reales (x, y), dicho de otro modo, un punto del plano.

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$



En forma **paramétrica** podemos simbolizarla como dos funciones f y g dependientes de una variable t (porque suele asociarse al tiempo en el estudio de las sucesivas posiciones de P que ocupa una partícula en movimiento). Es decir, a cada valor t le corresponde un par (x, y), un punto en R^2. A t se lo denomina **parámetro**.

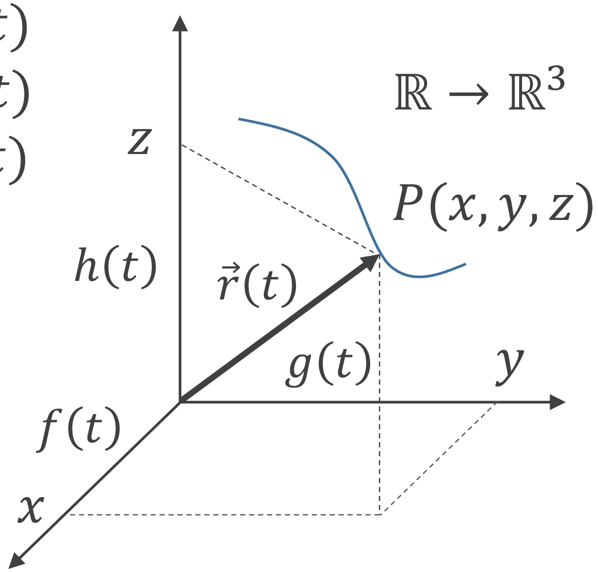
En forma **vectorial**: $\vec{r}(t) = [f(t), g(t)] = f(t)\hat{\imath} + g(t)\hat{\jmath}$, es decir, $\vec{r}(t)$ es un vector de componentes $f(t)$ y $g(t)$.

Funciones y Campos Vectoriales

Ejemplo 2:

Si $m = 3$, una función vectorial asigna, a cada numero real, un vector de tres componentes en $\mathbb{R}^3$ o una terna ordenada de números reales (x, y, z), dicho de otro modo, un punto en el espacio.

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$



Ahora, la forma **paramétrica** podemos simbolizarla como tres funciones f, g y h dependientes de la variable t. A cada valor t le corresponderá una terna (x, y, z), un punto en R^3.

En forma **vectorial**:

$\vec{r}(t) = [f(t), g(t), h(t)] = f(t)\hat{\imath} + g(t)\hat{\jmath} + h(t)\hat{k}$, es decir que $\vec{r}(t)$ será un vector de componentes $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$.

Como se trata de componentes que son funciones escalares, podemos extender los conceptos de Dominio, Límite, Continuidad, Derivadas e Integrales.

Funciones y Campos Vectoriales

Dominio:

Dada la función vectorial $\vec{r}(t) = [f(t), g(t), h(t)]$ su **dominio** es el conjunto de valores t para los que la función está definida. El dominio resulta de la intersección de los dominios de las funciones escalares componentes $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$.

Ejemplo:

Sea la función vectorial $\vec{r}(t) = \left[\sqrt{2-t}, t^{-1},\ ln(2t)\right]$

Las funciones componentes son: $f(t) = \sqrt{2-t}$, $g(t) = t^{-1}$ y $h(t) = ln(2t)$

Estas funciones están definidas para $t \leq 2$, $t \neq 0$ *y* $t > 0$ respectivamente.

Luego, el dominio de $\vec{r}(t)$ puede definirse como $\{t \in \mathbb{R} : 0 < t \leq 2\}$

Funciones y Campos Vectoriales

Límite:

Dada la función vectorial $\vec{r}(t) = [f(t), g(t), h(t)]$ su **límite** se obtiene tomando el límite de las funciones escalares componentes $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$.

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \left[\lim_{t \to t_0} f(t)\,, \lim_{t \to t_0} g(t)\,, \lim_{t \to t_0} h(t)\right]$$

El límite de la función vectorial existirá, siempre que los límites de las funciones escalares componentes existan.

Ejemplo:

Sea la función vectorial $\vec{r}(t) = [ln(e^2 + t)\,, t^2\,, (2+t)^2]$

$$\lim_{t \to 0} \vec{r}(t) = \left[\lim_{t \to 0} ln(e^2 + t)\,, \lim_{t \to 0} t^2\,, \lim_{t \to 0} (2+t)^2\right] = (2, 0, 4)$$

Funciones y Campos Vectoriales

Continuidad:

Dada la función vectorial $\vec{r}(t) = [f(t), g(t), h(t)]$ la función $\vec{r}(t)$ es **continua** en un punto $t = t_0$ si sus funciones componentes son continuas en t_0 y se cumple:

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$$

Derivada:

Dada la función vectorial $\vec{r}(t) = [f(t), g(t), h(t)]$ definiremos su **derivada**, de la misma forma que lo hicimos con funciones escalares:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Funciones y Campos Vectoriales

Y, aplicando la definición de derivada de las funciones escalares componentes del vector:

$$\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\frac{df}{dt}, \frac{dg}{dt}, \frac{dh}{dt}\right] = \frac{df}{dt}\hat{\imath} + \frac{dg}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dh}{dt}\hat{k}$$

Es decir, la derivada de $\vec{r}(t)$ se obtiene derivando cada una de sus componentes y su módulo:

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{df}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dg}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dh}{dt}\right)^2}$$

Las derivadas sucesivas de las funciones vectoriales, de igual manera, se obtienen calculando las derivadas sucesivas de las componentes.

Funciones y Campos Vectoriales

Ejemplo:

Sea la función vectorial $\vec{r}(t) = [t^3 - 3, sen(2t), ln(t)]$

$$\vec{r}'(t) = \left[3t^2, 2\,cos(2t), \frac{1}{t}\right] = 3t^2\,\hat{\imath} + 2\,cos(2t)\,\hat{\jmath} + \frac{1}{t}\hat{k}$$

$$\vec{r}''(t) = \left[6t, -4\,sen(2t), -\frac{1}{t^2}\right] = 6t\,\hat{\imath} - 4\,sen(2t)\,\hat{\jmath} - \frac{1}{t^2}\hat{k}$$

Es decir, si el parámetro t es el tiempo, mientras que la curva que se obtiene al mover el vector $\vec{r}(t)$ describe la posición del extremo de dicho vector en un tiempo t, $\vec{r}'(t)$ describe la velocidad y $\vec{r}''(t)$ la aceleración con que se mueve el extremo de dicho vector.

Funciones y Campos Vectoriales

Integral:

Dada la función vectorial $\vec{r}(t) = [f(t), g(t), h(t)]$ definiremos su **integral**, como la integral de las funciones escalares componentes:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{r}(t)\,dt = \left[\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt, \int_{t_1}^{t_2} g(t)\,dt, \int_{t_1}^{t_2} h(t)\,dt\right]$$

Ejemplo:

Sea la función vectorial $\vec{r}(t) = [t^3, e^t, 2 - t]$

$$\int_0^1 \vec{r}(t)\,dt = \left[\int_0^1 t^3\,dt, \int_0^1 e^t\,dt, \int_0^1 (2-t)\,dt\right] = \left[\frac{t^4}{4}\Big|_0^1, e^t\Big|_0^1, \left(2t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1\right] = \left[\frac{1}{4}, e - 1, \frac{3}{2}\right]$$

Funciones y Campos Vectoriales

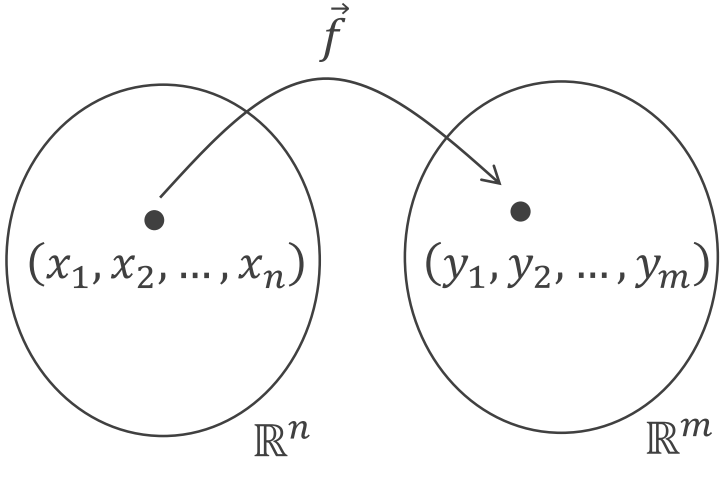
Campo vectorial: En este caso, la $\dim(\mathcal{D}) > 1$ y $\dim(\mathcal{I}m) > 1$, es decir que se trata de funciones a las que a una *n-upla* de número reales, se le hace corresponder una *m-upla* de número reales.

$$\vec{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

La definición de función vectorial, equivale a la definición de m campos escalares.

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \qquad\vdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Considerando $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, resulta $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$



$$\vec{f}: (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \to [y_1(\vec{x}), y_2(\vec{x}), \dots, y_m(\vec{x})] \in \mathbb{R}^m$$

Funciones y Campos Vectoriales

En particular, nos interesan los campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$.

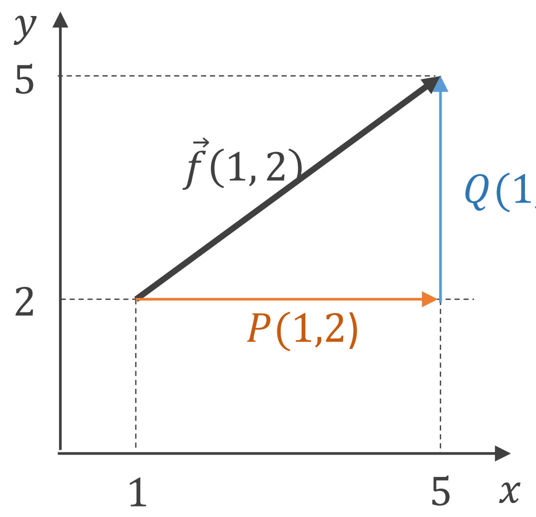
Sea $\mathcal{D}$ una región plana en $\mathbb{R}^2$. Un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ es una función $\vec{f}$ que asigna a cada punto (x, y) en $\mathcal{D}$ un vector bidimensional $\vec{f}(x, y)$.

$$\vec{f}(x, y) = [P(x, y), Q(x, y)] = P(x, y)\hat{\imath} + Q(x, y)\hat{\jmath} \qquad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

Ejemplo:

Sea $\vec{f}(x, y) = [2xy, x^3 + y] = 2xy\ \hat{\imath} + (x^3 + y)\ \hat{\jmath}$

$\vec{f}(1, 2) = (4, 3)$



Funciones y Campos Vectoriales

Derivada de un Campo Vectorial

Como se trata de m funciones de n variables, obtendremos $m \times n$ derivadas parciales que se agrupan en la denominada **Matriz Jacobiana** de la función. Y Se define:

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \frac{\partial f_m}{\partial x_3} \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \vec{f}_1 \\ \nabla \vec{f}_2 \\ \nabla \vec{f}_3 \\ \vdots \\ \nabla \vec{f}_m \end{bmatrix}$$

Observen que las filas de la Matriz Jacobiana son los vectores gradiente de las componentes.

- Si se trata de un **campo escalar**, el Jacobiano coincide con el gradiente. En este caso es una matriz fila.
- Si se trata de una **función vectorial**, el Jacobiano resulta una matriz columna.

Funciones y Campos Vectoriales

Gradiente de un Campo Escalar

Como ya se estudió, el gradiente de un campo escalar es un vector cuyas componentes son las derivadas parciales respecto de cada variable independiente:

$$\overrightarrow{grad\ f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

El gradiente en un punto mide el máximo crecimiento (en dirección, sentido y módulo) del campo en dicho punto. Se trata de un operador vectorial. Es decir un operador que al aplicarlo a una función o a un campo escalar da por resultado un vector y se suele representar por ∇ (nabla) y se lo denomina, **operador nabla**:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

Por ejemplo: Si $f(x, y) \to z$ entonces $\overrightarrow{\nabla f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

Funciones y Campos Vectoriales

Divergencia de un Campo Vectorial

La divergencia de un campo vectorial es ***un escalar*** que se calcula como la traza de la matriz Jacobiana (cabe aclarar que debe tratarse de una matriz cuadrada, es decir que se trata de campos vectoriales $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$).

Recordemos que la traza es la suma de los elementos de la diagonal principal de la matriz:

Sea $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$ entonces $\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x} & \frac{\partial V_1}{\partial y} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} & \frac{\partial V_2}{\partial y} \end{vmatrix}$ por lo que resulta: $\boxed{div\, \vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y}}$

Si pensamos al campo vectorial como el movimiento de un fluido (pudiendo dibujar en cada punto un vector que representa su velocidad), la divergencia mide el cambio de densidad del fluido en dicho punto.

Funciones y Campos Vectoriales

La notación de divergencia usa el símbolo ∇ (nabla) que como ya se dijo, representa un vector de derivadas parciales.

$$div\,\vec{V} = \underbrace{\nabla \cdot \vec{V}}_{\textit{Producto escalar}}$$

Suma de los productos de la componentes análogas.
Es decir: Suma de la derivada de la primera componente, respecto de la primera variable, más la derivada de la segunda componente, respecto de la segunda variable, etc.

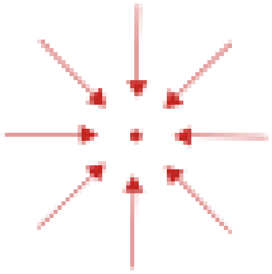
Interpretación del signo de la divergencia en un punto:

a. $\nabla \cdot \vec{V}(x_0, y_0) < 0 \;\Rightarrow$ la densidad en el punto aumenta.
El punto se comporta como un sumidero.

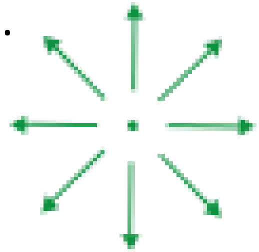
b. $\nabla \cdot \vec{V}(x_0, y_0) > 0 \;\Rightarrow$ la densidad en el punto disminuye.
El punto se comporta como una fuente.

c. $\nabla \cdot \vec{V}(x_0, y_0) = 0 \;\Rightarrow$ el fluido se mueve libremente con velocidad constate.
Se trata de un fluido incompresible, como el agua en una corriente.

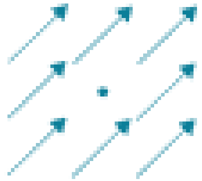
a.



b.



c.



Funciones y Campos Vectoriales

Vale la pena aclarar que la divergencia no sólo se aplica al estudio de fluidos sino en otros contextos como la electrodinámica por ejemplo.

Ejemplo 1

Dado el campo vectorial: $\vec{V}(x,y) = (x^2 - y^2)\,\hat{\imath} + 2xy\hat{\jmath}$ calcular la divergencia y analizar el comportamiento de la densidad en el punto $(1,2)$

$\nabla.\vec{V} = 2x + 2x = 4x$

$\nabla.\vec{V}(1,2) = 4 > 0$ → el punto $(1,2)$ se comporta como fuente, es decir, su densidad disminuye.

Ejemplo 2

Dado el campo vectorial: $\vec{V}(x,y,z) = (xyz, y^2z^3, x^2 - 2xz)$ calcular la divergencia y analizar el comportamiento de la densidad en el punto $(1,0,-2)$

$\nabla.\vec{V} = yz + 2yz^3 - 2x$

$\nabla.\vec{V}(1,0,-2) = -2 < 0$ → el punto $(1,0,-2)$ se comporta como un sumidero, es decir, su densidad aumenta.

Funciones y Campos Vectoriales

Rotacional o Rotor de un Campo Vectorial

Dado un campo vectorial $\vec{V}$ se define como rotacional de $\vec{V}$ al vector que resulta del producto vectorial entre ∇ (nabla), que es el vector de las derivadas parciales, y $\vec{V}$:

$$rot\,\vec{V} = \nabla \times \vec{V}$$

Sea $\vec{V} = \begin{cases} V_1(x,y,z) \\ V_2(x,y,z) \\ V_3(x,y,z) \end{cases}$ entonces $\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$ por lo que resulta:

$$\boxed{\nabla \times \vec{V} = \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right)\hat{\imath} - \left(\frac{\partial V_3}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial z}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\hat{k}}$$

El rotor mide la tendencia del campo vectorial a rotar alrededor de un punto.

Funciones y Campos Vectoriales

En cada punto, su módulo resulta ser el doble de la rapidez angular de rotación y su sentido horario o antihorario, se puede determinar con la regla de la mano derecha.

Ejemplo

Sea $\vec{V}(x,y,z) = (x^3 + y^2 + z, z\,e^x, xyz - 4xz)$ calcular el rotacional de $\vec{V}$ en $(0{,}1{,}2)$ y analizar el resultado.

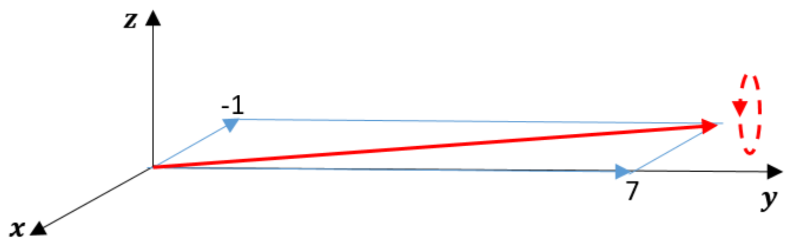
$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^3 + y^2 + z & z\,e^x & xyz - 4xz \end{vmatrix} = (xz - e^x)\,\hat{\imath} - (yz - 4z - 1)\,\hat{\jmath} + (ze^x - 2y)\,\hat{k}$$

$$\nabla \times \vec{V}(0,1\,,2) = (0 \cdot 2 - e^0)\,\hat{\imath} - (1 \cdot 2 - 4 \cdot 2 - 1)\,\hat{\jmath} + (2\,e^0 - 2 \cdot 1)\,\hat{k} = -\hat{\imath} + 7\,\hat{\jmath}$$

$$\left|\nabla \times \vec{V}(0,1\,,2)\right| = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = \sqrt{50} \cong 7.07$$

$$|\omega| \cong \frac{7.07}{2} \cong 3.54\ \frac{rad}{seg}$$

Rota en un plano vertical (la componente $\hat{k}$ es nula) con eje de rotación casi coincidente con yy' y sentido antihorario si lo miramos desde el sentido positivo hacia el origen, porque la componente $\hat{\jmath}$ es mucho mayor que la $\hat{\imath}$, usando la regla de la mano derecha.



Análisis Matemático II

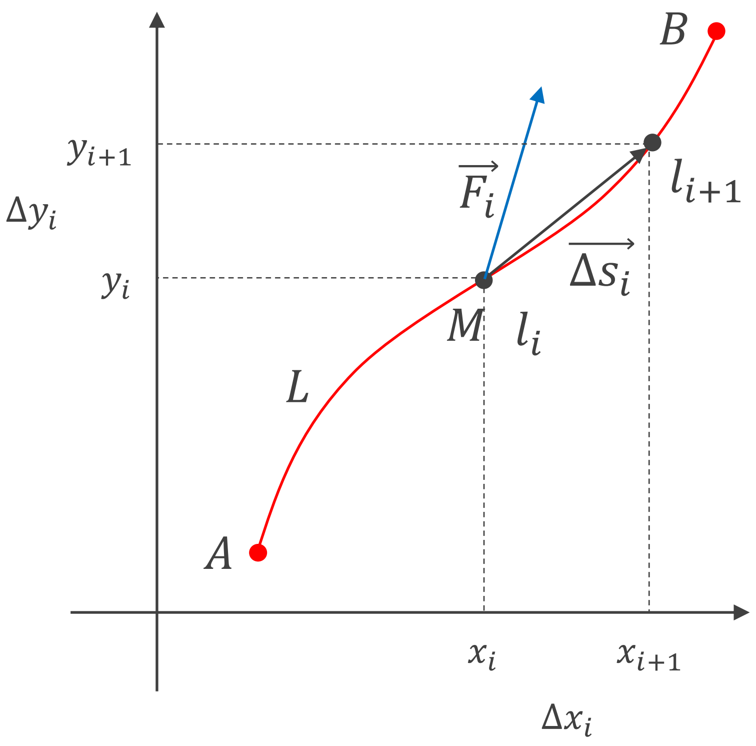
Integrales Curvilíneas

Integrales curvilíneas

Podemos generalizar el concepto de Integral Curvilínea a partir de lo estudiado para Integral Simple, reemplazando el intervalo de integración por una curva plana o una curva alabeada.

$\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}^3$

Sea un campo vectorial $\vec{F}$ definido a lo largo de una curva plana L tal que:



$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\hat{\imath} + Q(x,y)\hat{\jmath}$$

Podríamos suponer que $\vec{F}$ es la fuerza aplicada sobre un punto M que se desplaza a lo largo de la curva L y que dicha fuerza varía en magnitud y dirección a medida que el punto se desplaza, es decir:

$$\vec{F} = \vec{f}(M)$$

Calcularemos el trabajo T que realiza la fuerza $\vec{F}$ al desplazar el punto M desde A hasta B.

Integrales curvilíneas

Dividamos la curva L en n arcos por los puntos $A = l_0, l_1, \dots, l_{i-1}, l_i, l_{i+1}, \dots, l_n = B$, siendo $max\,\Delta l$ la longitud del arco más largo de la subdivisión. El trabajo que realiza la fuerza $\vec{F}$ a lo largo del arco $\widehat{l_i l_{i+1}}$ es, aproximadamente: $T_i \cong \overrightarrow{F_i} \cdot \overrightarrow{\Delta s_i}$.

Donde $\overrightarrow{F_i} = P(x_i, y_i)\hat{\imath} + Q(x_i, y_i)\hat{\jmath}$ es el valor de la fuerza $\vec{F}$ en l_i y $\overrightarrow{\Delta s_i} = \Delta x_i\,\hat{\imath} + \Delta y_i\,\hat{\jmath}$ el vector $\overrightarrow{l_i l_{i+1}}$. Entonces:

$$T_i \cong \overrightarrow{F_i} . \overrightarrow{\Delta s_i} = P(x_i, y_i)\,\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\,\Delta y_i$$

Y el trabajo total T de la fuerza $\vec{F}$ a lo largo de la curva L es, aproximadamente:

$$T \cong \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} . \overrightarrow{\Delta s_i} = \sum_{i=1}^{n} [P(x_i, y_i)\,\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\,\Delta y_i]$$

El trabajo T de la fuerza $\vec{F}$ a lo largo de la curva L entre los puntos A y B está dado por el límite de esta suma cuando $n \to \infty$, es decir, cuando $max\,\Delta s \to 0$

Integrales curvilíneas

$$T = \lim_{max\ \Delta s \to 0} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i}.\overrightarrow{\Delta s_i} = \lim_{max\ \Delta s \to 0} \sum_{i=1}^{n} [P(x_i, y_i)\ \Delta x_i + Q(x_i, y_i)\ \Delta y_i]$$

Si $\vec{F}$ es una función continua, este límite existe y recibe el nombre de **Integral Curvilínea** de $\vec{F}$ a lo largo de la curva L.

$$\int_L \vec{F}\,.\overrightarrow{ds} = \lim_{max\ \Delta s \to 0} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i}.\overrightarrow{\Delta s_i}$$

$$\int_L P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy = \lim_{max\ \Delta s \to 0} \sum_{i=1}^{n} [P(x_i, y_i)\ \Delta x_i + Q(x_i, y_i)\ \Delta y_i]$$

Esta última integral, se escribe usualmente especificando las coordenadas de los extremos de C.

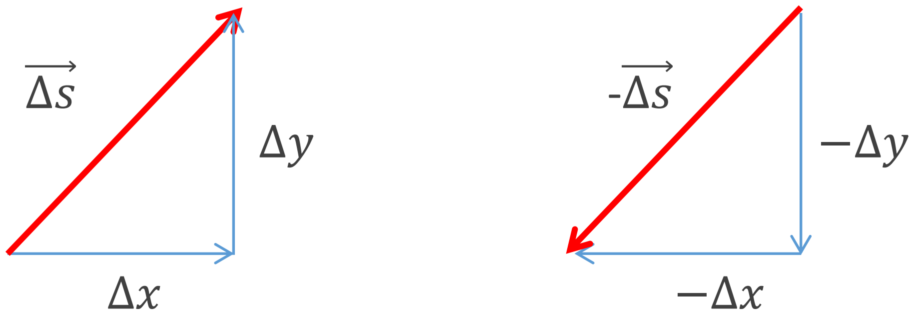
$$\boxed{\int_L P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy = \int_{(A)}^{(B)} P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy}$$

Integrales curvilíneas

Propiedades

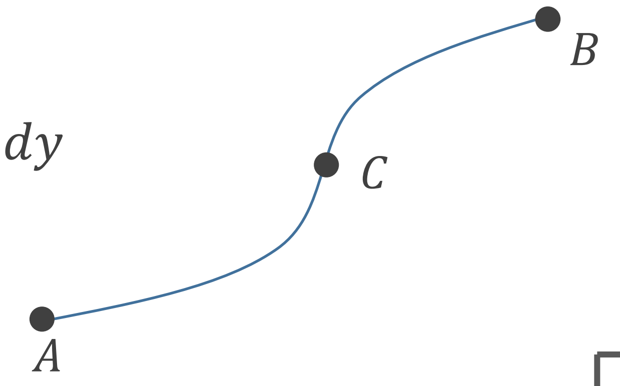
1. *Al cambiar el sentido de integración, cambia el signo de la Integral Curvilínea (pues al invertir el sentido de integración cambia el signo del vector $\overrightarrow{\Delta s}$, por lo tanto cambia el signo de sus proyecciones Δx y Δy.*

$$\int_{(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy = -\int_{(B)}^{(A)} P\,dx + Q\,dy$$



2. *Si dividimos la curva L por algún punto intermedio C, entonces:*

$$\int_{(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy = \int_{(A)}^{(C)} P\,dx + Q\,dy + \int_{(C)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy$$

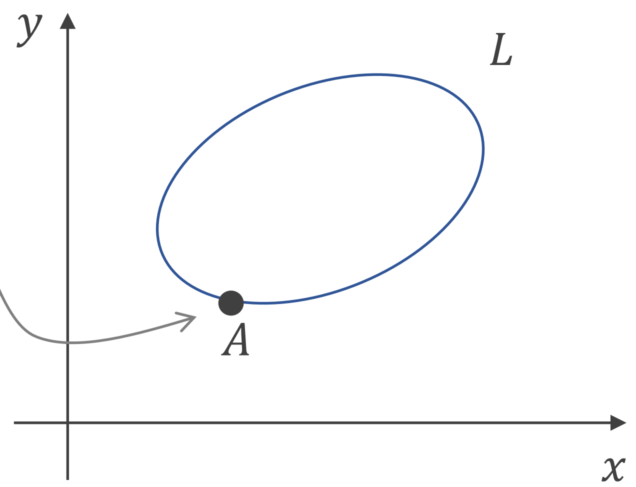


Esta última propiedad es válida para un mayor número de divisiones.

Integrales curvilíneas

Lo definido para la Integral Curvilínea es válido también cuando la curva L es cerrada. Se dice Integral Curvilínea a lo largo de una curva cerrada $\underbrace{\text{positivamente orientada}}_{\text{en sentido antihorario}}$ y se indica:

$$\int_L P\,dx + Q\,dy \quad o \quad \oint_L P\,dx + Q\,dy$$



El origen y el extremo de la curva coinciden, por lo tanto para integrar se debe subdividir la curva y debe indicarse el sentido de integración.

Integrales curvilíneas

Cálculo de la Integral Curvilínea

Evidentemente, el valor de la integral depende de la curva L.

- Si la curva L está dada en la forma $y = f(x)$, entonces, $dy = f'(x)\,dx$, sustituyendo:

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{x_1}^{x_2} \big(P[x,f(x)] + Q[x,f(x)]\,f'(x)\big)\,dx$$

- Si la curva L está dada en la forma $x = g(y)$, entonces, $dx = g'(y)\,dy$, sustituyendo:

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{y_1}^{y_2} (P[g(y),y]\,g'(y) + Q[g(y),y]\,)\,dy$$

Integrales curvilíneas

Ejemplo 1

Calcular la integral curvilínea: $\int_{(0,3)}^{(1,2)} (2x^4 + 2yx^2)\, dx + 4xy\, dy$, a lo largo de la curva: $y = \frac{1}{2}x^2$

La ecuación de la curva L viene dada por $y = \frac{1}{2}x^2$, por lo tanto, $dy = x\, dx$, sustituyendo en la integral:

$$\int_{(0,3)}^{(1,2)} (2x^4 + 2yx^2)\, dx + 4xy\, dy = \int_0^1 (2x^4 + x^4)\, dx + 2x^3\, x\, dx = \int_0^1 5x^4\, dx = x^5\Big|_0^1 = 1$$

Ejemplo 2

Calcular la integral curvilínea: $\int_{(4,0)}^{(5,1)} y\, dx + x\, dy$, a lo largo de la curva: $x = 5y - 1$

La ecuación de la curva L viene dada por $x = 5y - 1$, por lo tanto, $dx = 5\, dy$, sustituyendo en la integral:

$$\int_{(4,0)}^{(5,1)} y\, dx + x\, dy = \int_0^1 5y\, dy + (5y - 1)\, dy = \int_0^1 (10y - 1)\, dy = (5y^2 - y)\Big|_0^1 = 4$$

Integrales curvilíneas

- Si la curva L está dada en la forma vectorial $\vec{r}(t) = [f(t), g(t)]$:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} dx = f'(t)dt \\ dy = g'(t)dt \end{cases} \quad \text{con} \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{t_1}^{t_2} \left(P[f(t),g(t)]\,f'(t) + Q[f(t),g(t)]\,g'(t)\right) dt$$

Ejemplo 3

Calcular la integral curvilínea: $\int_L y\,dx + x\,dy$, siendo L: $\begin{cases} x = 2t \\ y = t+1 \end{cases}$ $\quad 2 \leq t \leq 3$

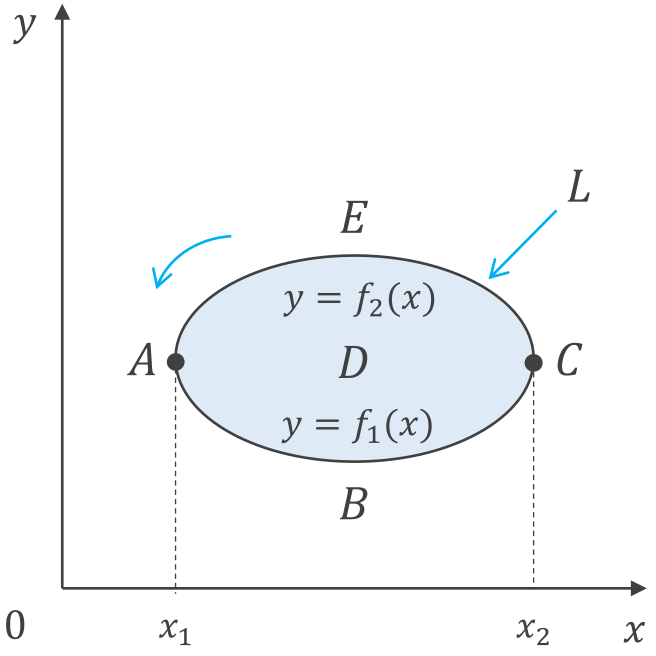
Entonces $dx = 2\,dt$ y $dy = dt$, sustituyendo en la integral:

$$\int_2^3 (t+1)\,2\,dt + 2t\,dt = \int_2^3 (2t+2)\,dt + 2t\,dt = \int_2^3 (4t+2)\,dt = (2t^2 + 2t)\Big|_2^3 = 24 - 12 = 12$$

Integrales curvilíneas

Área de un dominio limitado por una curva cerrada

Consideremos el Dominio D limitado por la curva cerrada L, tal como se indica en la figura:



Recordemos cómo calcular el área del dominio D:

$$A_D = \iint_D dydx = \int_{x_1}^{x_2} [f_2(x) - f_1(x)]\, dx = \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} f_2(x)\, dx}_{(a)} - \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} f_1(x)\, dx}_{(b)}$$

La integral (a) es una integral curvilínea a lo largo de la curva $\widehat{AEC}$ cuya ecuación es $y = f_2(x)$:

$$\int_{x_1}^{x_2} f_2(x)\, dx = \int_{\widehat{AEC}} y\, dx = -\int_{\widehat{CEA}} y\, dx$$

Integrales curvilíneas

La integral (b) es una integral curvilínea a lo largo de la curva $\widehat{ABC}$ con ecuación $y = f_1(x)$:

$$\int_{x_1}^{x_2} f_1(x)\, dx = \int_{\widehat{ABC}} y\, dx$$

Reemplazando en la fórmula de área lo obtenido en (a) y (b) tenemos:

$$A_D = -\int_{\widehat{CEA}} y\, dx - \int_{\widehat{ABC}} y\, dx = -\left(\int_{\widehat{CEA}} y\, dx + \int_{\widehat{ABC}} y\, dx\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_D = -\int_L y\, dx}$$

Nótese que se integró en sentido anti-horario.

Análogamente, con un procedimiento similar, podemos demostrar que: $\boxed{A_D = \int_L x\, dy}$

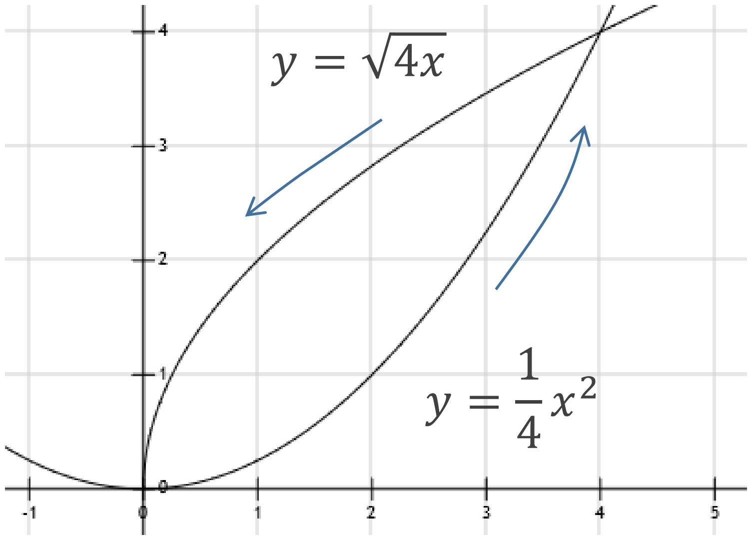
La fórmula mas frecuentemente usada es la semisuma de las dos expresiones anteriores:

$$\boxed{A_D = \frac{1}{2}\int_L (-y)\, dx + x\, dy}$$

Integrales curvilíneas

Ejemplo 4

Calcular el área comprendida entre la curva: $4y = x^2$ y la curva: $4x = y^2$



$$L_1:\ 4y = x^2 \ \rightarrow\ y = \frac{1}{4}x^2, \qquad dy = \frac{1}{2}x\,dx$$

$$L_2:\ 4x = y^2 \ \rightarrow\ x = \frac{1}{4}y^2, \qquad dx = \frac{1}{2}y\,dy$$

$$A = \frac{1}{2}\int_L (-y)\,dx + x\,dy = \frac{1}{2}\int_{L_1} (-y)\,dx + x\,dy + \frac{1}{2}\int_{L_2} (-y)\,dx + x\,dy$$

$$A = \frac{1}{2}\left[\int_0^4 \left(-\frac{1}{4}x^2\right)dx + \int_0^4 x\cdot\frac{1}{2}x\,dx\right] + \frac{1}{2}\left[\int_4^0 (-y)\cdot\frac{1}{2}\,y\,dy + \frac{1}{4}y^2\,dy\right]$$

$$A = \frac{1}{2}\left[-\frac{x^3}{12} + \frac{x^3}{6}\right]_0^4 + \frac{1}{2}\left[-\frac{y^3}{6} + \frac{y^3}{12}\right]_4^0 = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{12}\right]_0^4 + \frac{1}{2}\left[-\frac{y^3}{12}\right]_4^0 = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

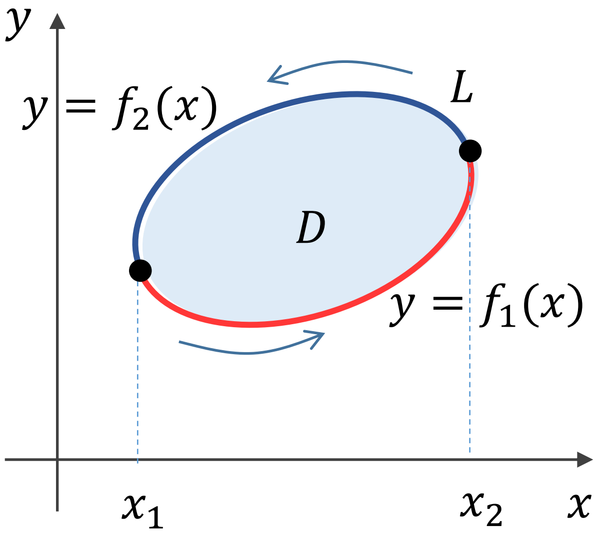
Integrales curvilíneas

Fórmula de Green (Teorema de Green)

La Fórmula de Green establece la relación existente entre la Integral Doble, extendida sobre un dominio D y la Integral Curvilínea a lo largo de la frontera L de dicho dominio.

Enunciado: Sea L una trayectoria cerrada simple, positivamente orientada, diferenciable a trozos en el plano xy y sea D el dominio limitado por L.

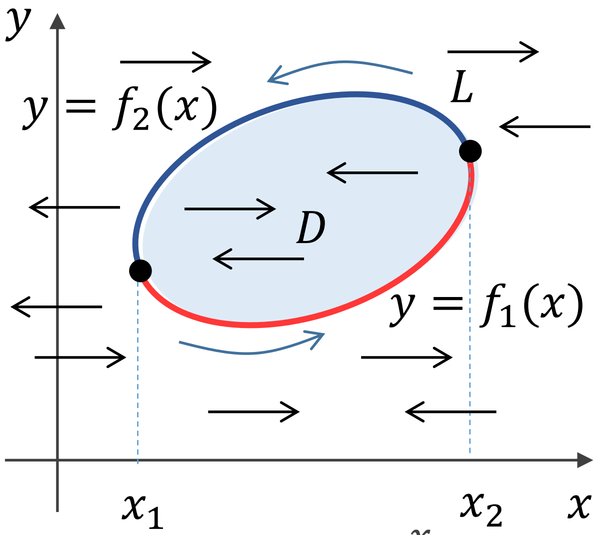
Si $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\,\hat{\imath} + Q(x,y)\,\hat{\jmath}$ es un campo vectorial con derivadas parciales continuas en el dominio D, y $\overrightarrow{dr} = dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath}$, entonces:



$$\oint_L [\boldsymbol{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy}] = \iint_D \left[\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right] \boldsymbol{dxdy}$$

Integrales curvilíneas

Demostración: Para demostrar el Teorema, supongamos primero que $\vec{F}(x,y)$ es un campo vectorial que sólo tiene componente en la dirección del versor $\hat{\imath}$. Es decir $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\,\hat{\imath}$



$$\oint_L \vec{F}(x,y)\cdot\overrightarrow{dr} = \oint_L P(x,y)\,dx$$

$$\oint_L P(x,y)\,dx = \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} P\big(x,f_1(x)\big)\,dx}_{} + \underbrace{\int_{x_2}^{x_1} P\big(x,f_2(x)\big)\,dx}_{}$$

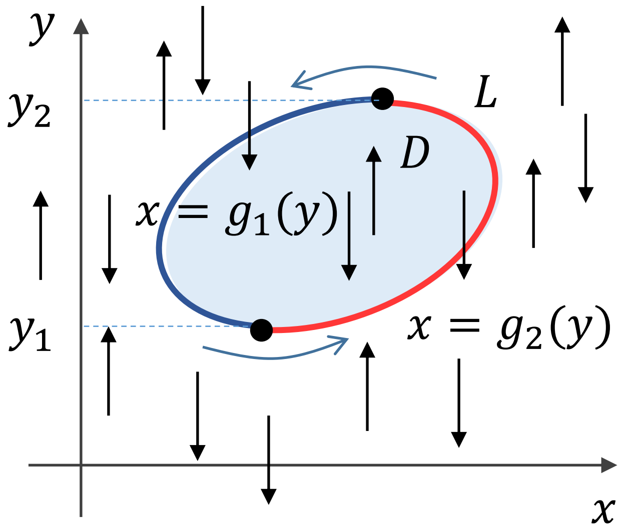
$$\oint_L P(x,y)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} P\big(x,f_1(x)\big)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} P\big(x,f_2(x)\big)\,dx$$

$$\oint_L P(x,y)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \big[\underbrace{P\big(x,f_1(x)\big)}_{} - \underbrace{P\big(x,f_2(x)\big)}_{}\big]\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} \big[\underbrace{P\big(x,f_2(x)\big)}_{} - \underbrace{P\big(x,f_1(x)\big)}_{}\big]\,dx$$

$$= -\int_{x_1}^{x_2} \big[P(x,y)\,\big]_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)}\,dx = -\int_{x_1}^{x_2}\int_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\;dy\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\;dA \qquad (1)$$

Integrales curvilíneas

Análogamente, supongamos ahora que $\vec{F}(x,y)$ es un campo vectorial que sólo tiene componente en la dirección del versor $\hat{j}$. Es decir $\vec{F}(x,y) = Q(x,y)\,\hat{j}$



$$\oint_L \vec{F}(x,y)\cdot\overrightarrow{dr} = \int_L Q(x,y)\,dy$$

$$\oint_L Q(x,y)\,dy = \underbrace{\int_{y_1}^{y_2} Q(g_2(y),y)\,dy}_{} + \underbrace{\int_{y_2}^{y_1} Q(g_1(y),y)\,dy}_{}$$

$$\oint_L Q(x,y)\,dy = \int_{y_1}^{y_2} Q(g_2(y),y)\,dy - \int_{y_1}^{y_2} Q(g_1(y),y)\,dy$$

$$\oint_L Q(x,y)\,dy = \int_{y_1}^{y_2} [\underbrace{Q(g_2(y),y)}_{} - \underbrace{Q(g_1(y),y)}_{}]\,dy$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} [Q(x,y)]_{x=g_1(y)}^{x=g_2(y)}\,dy = \int_{y_1}^{y_2}\int_{x=g_1(y)}^{x=g_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dA \qquad (2)$$

Integrales curvilíneas

Sea ahora cualquier campo vectorial $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\,\hat{\imath} + Q(x,y)\,\hat{\jmath}$,

$$\oint_L \vec{F}(x,y)\cdot\overrightarrow{dr} = \oint_L [P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy] = \oint_L P(x,y)\,dx + \oint_L Q(x,y)\,dy$$

De (1) y (2):

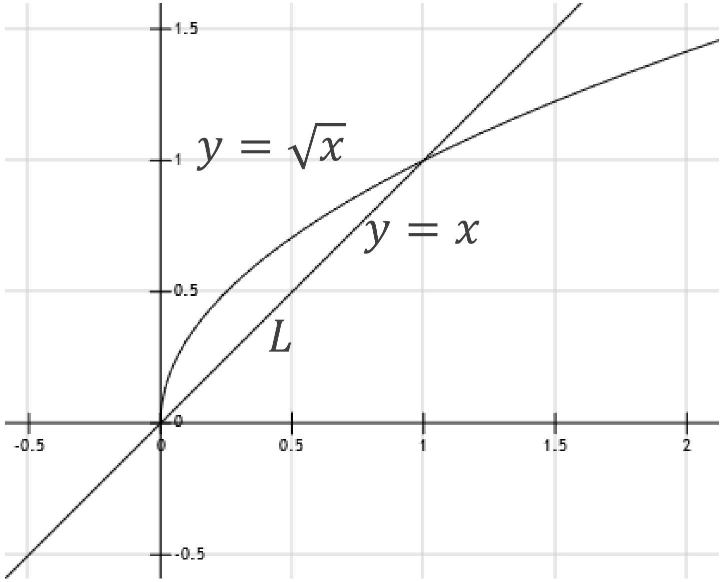
$$\oint_L [P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy] = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\;dA + \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\;dA$$

$$\boxed{\oint_{\boldsymbol{L}} [\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{dx} + \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{dy}] = \iint_{\boldsymbol{D}} \left[\frac{\boldsymbol{\partial Q}}{\boldsymbol{\partial x}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \frac{\boldsymbol{\partial P}}{\boldsymbol{\partial y}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right]\boldsymbol{dxdy}}$$

Integrales curvilíneas

Ejemplo 5

Usando la fórmula de Green calcular la integral curvilínea: $\oint_{L} -\boldsymbol{x^2 y\, dx + y\, dy}$ a lo largo de la curva L.



$$P(x,y) = -x^2 y, \qquad Q(x,y) = y$$

$$\oint_{L} P\,dx + Q dy = \iint_{D} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dxdy$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -x^2, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 0$$

$$\oint_{L} -x^2 y\,dx + y\,dy = \iint_{D} x^2\ dxdy$$

$$\iint_{D} x^2\,dxdy = \int_0^1 \int_{y^2}^{y} x^2\,dxdy = \int_0^1 \frac{x^3}{3}\bigg|_{y^2}^{y} dy = \int_0^1 \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^6}{3}\right) dy = \left(\frac{y^4}{12} - \frac{y^7}{21}\right)\bigg|_0^1 = \frac{1}{12} - \frac{1}{21} = \frac{3}{84} = \frac{1}{28}$$

Integrales curvilíneas

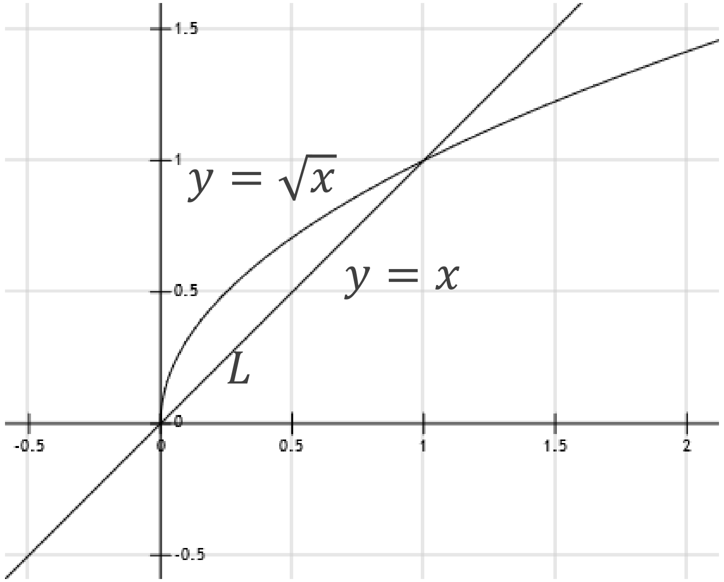
Ejemplo 5 (cont.)

La integral doble del segundo miembro de la igualdad, se resolvió como integral doble Tipo II, es decir integrando primero según $\boldsymbol{x}$, y luego según $\boldsymbol{y}$. Observe que, en este caso, se podría haber resuelto como integral doble Tipo I, es decir integrando primero según $\boldsymbol{y}$, y luego según $\boldsymbol{x}$, y el resultado es el mismo, como se muestra a continuación:

$$\oint_L -x^2y\,dx + y\,dy = \iint_D x^2\;dxdy = \int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} x^2\,dy\,dx$$

$$\int_0^1 x^2.\,y\Big|_x^{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 x^2.\,(\sqrt{x}\,-x)dx = \int_0^1 (x^{\frac{5}{2}} - x^3)dx$$

$$= \left(\frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{7} - \frac{1}{4} = \frac{8-7}{28} = \frac{1}{28}$$



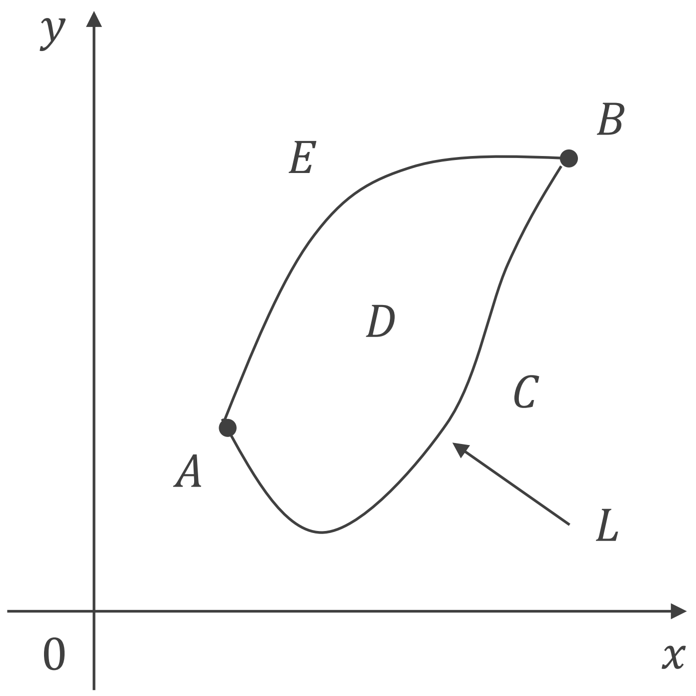
Análisis Matemático II

Integrales Curvilíneas

Integrales curvilíneas

Condición para que la integral curvilínea no dependa de la trayectoria

Analicemos la integral curvilínea:



$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \qquad (1)$$

Siendo $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ funciones continuas, con derivadas parciales también continuas en un dominio arbitrario D.

Si la integral (1) no depende de la trayectoria de integración, sino que sólo depende de los extremos, entonces debe cumplirse que:

$$\int_{\widehat{ACB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{\widehat{AEB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

Integrales curvilíneas

Igualamos a cero:

$$\int_{\widehat{ACB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy - \int_{\widehat{AEB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

Cambiamos el sentido de integración de la segunda integral:

$$\int_{\widehat{ACB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy + \int_{\widehat{BEA}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

Luego, la integral curvilínea a lo largo del contorno L es:

$$\int_{L} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \qquad (2)$$

Es evidente que el contorno cerrado L, compuesto por las curvas $\widehat{ACB}$ y $\widehat{BEA}$ es arbitrario.

Integrales curvilíneas

Si la integral curvilínea no depende de la forma de la curva que une los puntos A y B, sino de la posición de estos, resulta que esta integral a lo largo de un contorno cerrado cualquiera L es nula.

La conclusión recíproca también es válida. Si la integral curvilínea a lo largo de cualquier contorno cerrado L es nula, ésta no depende de la forma de la curva que une los puntos A y B sino de la posición de estos.

Veamos ahora qué condiciones deben satisfacer las funciones $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ para que la integral curvilínea (2) sea nula. Recordemos la Fórmula de Green correspondiente a la trayectoria dada:

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dxdy$$

Integrales curvilíneas

Si la integral curvilínea del primer miembro es nula, también lo será la integral doble del segundo miembro y, para que ello ocurra, se debe cumplir:

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}}$$

Esta es la condición necesaria y suficiente para que la Integral Curvilínea (1) sea independiente de la trayectoria de integración.

Ejemplo 1:

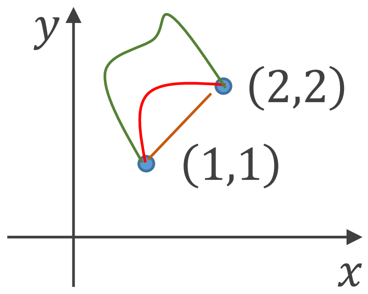
La integral curvilínea $\int_{(1,1)}^{(2,2)} xy^2dx + (x^2y - 2y)\,dy$ es independiente de la trayectoria de integración pues:

$$P(x,y) = xy^2 \rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2xy$$

$$Q(x,y) = (x^2y - 2y) \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

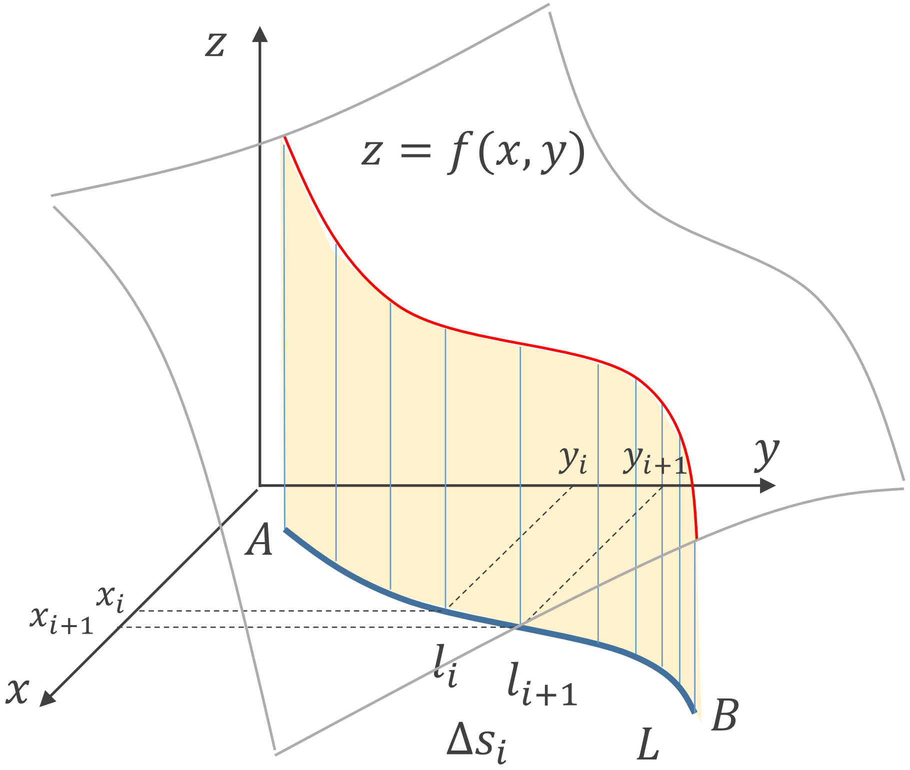
Cualquiera sea la trayectoria de integración que elijamos para integrar entre los puntos $(1,1)$ y $(2,2)$, siempre obtendremos el mismo resultado.



Integrales curvilíneas

Integral curvilínea de un campo escalar

Definiremos la integral curvilínea de la función $z = f(x, y)$ a lo largo de una curva L como:



$$\int_L f(x, y)\, ds = \lim_{max\ \Delta s \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta s_i$$

Donde Δs_i es la longitud del arco $\widehat{l_i l_{i+1}}$ y ds el diferencial de arco.

- La curva L, en forma paramétrica, viene dada como:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t) \\ y = \varphi_2(t) \end{cases}$$

con φ_1 y φ_2 continuas con derivadas también continuas.

Integrales curvilíneas

Como $dx = \varphi_1'(t)\,dt,\; dy = \varphi_2'(t)\,dt$ y $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \;\Rightarrow ds = \sqrt{[\varphi_1{}'(t)]^2 + [\varphi_2{}'(t)]^2}\,dt$

La integral curvilínea se calcula como:

$$\int_L f(x,y)\,ds = \int_{(A)}^{(B)} f[\varphi_1(t), \varphi_2(t)]\sqrt{[\varphi_1{}'(t)]^2 + [\varphi_2{}'(t)]^2}\,dt$$

Una interpretación gráfica de esta integral curvilínea es que nos da el área de la lámina perpendicular al plano xy, bajo la superficie $z = f(x,y)$, cuya base es la curva L.

- Por ejemplo, si la curva L se da en la forma $y = g(x)$ la longitud del diferencial de arco es:

$$ds = \sqrt{1 + [g'(x)]^2}\,dx$$

$$\begin{cases} x = x \\ y = g(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} dx = dx \\ dy = g'(x)\,dx \end{array}$$

Y la integral curvilínea se calcula:

$$\int_L f(x,y)\,ds = \int_{(A)}^{(B)} f[x, g(x)]\sqrt{1 + [g'(x)]^2}\,dx$$

Integrales curvilíneas

- También podemos considerar la integral curvilínea de la función $w = f(x, y, z)$ a lo largo de la curva alabeada L como:

$$\int_L f(x,y,z)\,ds = \int_{(t_1)}^{(t_2)} f[\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t)]\sqrt{[\varphi_1{}'(t)]^2+[\varphi_2{}'(t)]^2+[\varphi_3{}'(t)]^2}\,dt \quad \begin{cases} x=\varphi_1(t) \\ y=\varphi_2(t) \\ z=\varphi_3(t) \end{cases}$$

$$\text{con } t_1 \le t \le t_2$$

Ejemplo 2:

Sea el campo escalar $z = xy$ y la curva L dada por: $\begin{cases} x = 4t \\ y = 3t \end{cases} \to 0 \le t \le 1$

Tenemos $dx = 4\,dt,\ dy = 3\,dt$ y $ds = \sqrt{16+9}\,dt = \sqrt{25}\,dt = 5\,dt$

La integral curvilínea:

$$\int_L f(x,y)\,ds = \int_0^1 f(4t,3t)\,5\,dt = \int_0^1 12\,t^2\,5\,dt = \int_0^1 60\,t^2\,dt = 20\,t^3\Big|_0^1 = 20$$

Integrales curvilíneas

Integral curvilínea de un campo vectorial

De manera análoga, podemos definir la integral curvilínea de un campo vectorial. Sea el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\hat{\imath} + Q(x,y,z)\hat{\jmath} + R(x,y,z)\hat{k}$ y la curva alabeada L dada por la función vectorial $\vec{r}(x,y,z) = x.\hat{\imath} + y.\hat{\jmath} + z.\hat{k}$

O en su forma paramétrica: $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$ continuas en un intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$

Entonces la integral curvilínea del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)$ a lo largo de la curva L es:

$$\int_L \vec{F}(x,y,z) \cdot \overrightarrow{dr} = \int_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

$$\int_{(t_1)}^{(t_2)} \Big(P[f(t),g(t),h(t)]f'(t) + Q[f(t),g(t),h(t)]g'(t) + R[f(t),g(t),h(t)]h'(t)\Big)\,dt$$

Integrales curvilíneas

Función potencial y campo vectorial conservativo

Si un campo vectorial $\vec{F} = P(x,y)\hat{\imath} + Q(x,y)\hat{\jmath}$ es el gradiente de alguna función $\boldsymbol{u(x,y)}$, se dice que es un **campo vectorial conservativo** y la función $\boldsymbol{u}$ se llama **función potencial** de $\vec{F}$.

De acuerdo a lo definido, si $\vec{F}$es el gradiente de una función $u(x,y)$ tenemos:

$$\vec{F} = P(x,y)\,\hat{\imath} + Q(x,y)\,\hat{\jmath} = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\,\hat{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,\hat{\jmath}$$

Por lo tanto:

$$P = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad\qquad Q = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Si derivamos la primera igualdad con respecto a «y» y la segunda respecto a «x», tenemos:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \qquad\qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

Integrales curvilíneas

Si las derivadas segundas son continuas, por el teorema de Schwartz se verifica que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (3)$$

Luego podemos afirmar que si $\vec{F} = P(x, y)\,\hat{\imath} + Q(x, y)\,\hat{\jmath}$ es un **campo vectorial conservativo** entonces se verifica (3) es decir que la integral curvilínea del campo es nula.

La inversa de esta afirmación se cumple solo si $\vec{F}$ es un campo vectorial conservativo definido sobre una región simplemente conexa D.

Entonces, podemos decir que si $\vec{F} = P(x, y)\,\hat{\imath} + Q(x, y)\,\hat{\jmath}$ es un campo vectorial definido en una región simplemente conexa D, con $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ continuas y con derivadas parciales también continuas, si se verifica que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ en toda la región, entonces $\vec{F}$ es un **campo vectorial conservativo.**

Integrales curvilíneas

Diferencia de potencial

Si $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ es la función potencial del campo vectorial conservativo $\vec{F} = P(x,y)\,\hat{\imath} + Q(x,y)\,\hat{\jmath}$ entonces, la integral curvilínea $\int_{(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy$ mide la diferencia de potencial entre los puntos A y B.

Demostración:

Recordemos que si $u(x,y)$ es la función potencial de $\vec{F}$, entonces $P = \partial u/\partial x$ y $Q = \partial u/\partial y$, en cuyo caso la expresión $P\,dx + Q\,dy$ es:

$$P\,dx + Q\,dy = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy$$

Y la integral curvilínea resulta:

$$\int_{(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy = \int_{(A)}^{(B)} \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy$$

Integrales curvilíneas

Ahora escribamos la ecuación paramétrica de la trayectoria L que une los puntos A y B

$u(x, y)\ \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ $\quad t_A \leq t \leq t_B$, con t_A que corresponde al punto A y t_B al punto B.

Entonces:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} \ \rightarrow \ du = \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right] dt \ \rightarrow du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

Finalmente, la integral curvilínea resulta:

$$\int_{(A)}^{(B)} \frac{\partial u}{\partial x}\ dx + \frac{\partial u}{\partial y}\ dy = \int_{(A)}^{(B)} du = u(B) - u(A)$$

Integrales curvilíneas

Obtención de la función potencial

Dado un campo vectorial conservativo $\vec{F} = P(x,y)\,\hat{\imath} + Q(x,y)\,\hat{\jmath}$, entonces: $P = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ y $Q = \dfrac{\partial u}{\partial y}$

Luego podemos obtener $u(x,y)$ integrando a P con respecto a x o a Q con respecto a y.

Integremos P con respecto a x:

$$u(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \varphi(y) \quad (1)$$

Como estamos integrando respecto a x y P es una derivada parcial respecto e x, podemos expresar la constante de integración en función de y.

$u(x,y)$ es la función potencial buscada, sólo nos resta obtener el valor de $\varphi(y)$ y para ello derivaremos (1) con respecto a y:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \int P(x,y)dx}{\partial y} + \varphi'(y)$$

pero como $Q = \partial u \,/\, \partial y$

$$\varphi'(y) = Q - \frac{\partial \int P(x,y)dx}{\partial y}$$

$$\varphi(y) = \int \left[Q - \frac{\partial \int P(x,y)dx}{\partial y}\right] dy$$

Sólo resta reemplazar $\varphi(y)$ en (1)

Integrales curvilíneas

Ejemplo 3:

Sea $\vec{F} = (x + y^2)\,\hat{\imath} + 2xy\,\hat{\jmath}$

Primero, verifiquemos que se trata de un campo vectorial conservativo:

$$P = x + y^2 \;\Rightarrow\; \frac{\partial P}{\partial y} = 2y \qquad Q = 2xy \;\Rightarrow\; \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y \qquad \therefore \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Entonces, la expresión $(x + y^2)\,dx + 2xy\,dy$ es el diferencial total de una función $u(x, y)$, es decir:

$$du(x, y) = (x + y^2)\,dx + 2xy\,dy$$

$$u(x, y) = \int P\,dx + \varphi(y) = \int (x + y^2)\,dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{2} + y^2x + \varphi(y)$$

$$Q = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2xy + \varphi'(y) \rightarrow 2xy = 2xy + \varphi'(y) \quad \therefore \quad \varphi(y) = C$$

$$\boxed{u(x, y) = \frac{x^2}{2} + y^2x + C}$$

Análisis Matemático II

Integrales de Superficie

Integrales de Superficie

Las integrales de superficie son la generalización de las integrales dobles.

Se trata de calcular una integral sobre un dominio que no es plano sino una superficie σ en el espacio, limitada por una curva cerrada λ y cada punto de dicha superficie lleva asociado un valor que mide, por ejemplo, la velocidad de las partículas de un líquido y en ese caso se tratará de la medida de cuánto líquido pasa a través de una superficie (que se llama **flujo**).

Si se trata de una superficie cerrada que es el límite de una región, el flujo será también una medida de la masa cambiante en esa región.

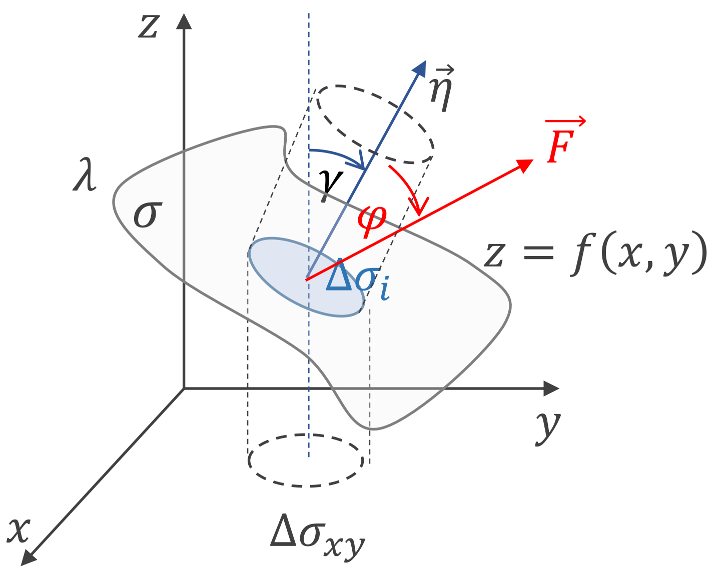
En general, cada partícula estará sometida a un campo vectorial $\vec{F}$.

En principio, el flujo que atraviesa es algo que se puede calcular para cualquier superficie, cerrada o no.

En física muchas cosas pueden considerarse como un flujo de algún tipo, no solo los líquidos sino también el calor, las fuerzas y los campos electromagnéticos pueden considerarse como flujos a través del espacio.

Integrales de Superficie

Sean una superficie σ limitada por una curva cerrada λ y en cada punto de dicha superficie un versor normal $\vec{\eta}$. Si los puntos de esta superficie, son puntos de un campo vectorial $\vec{F}$, se define la **Integral de Superficie**:



$$\iint_\sigma \vec{F}.\vec{\eta}\, d\sigma = \lim_{máx\ \Delta\sigma_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\,.\vec{\eta}_i\, \Delta\sigma_i$$

Siendo el campo $\vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\,\widehat{\boldsymbol{k}}$ y el versor normal $\vec{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{cos\,\alpha}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{cos\,\beta}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{cos\,\gamma}\,\widehat{\boldsymbol{k}}$ con $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ y $\boldsymbol{\gamma}$ los ángulos que forma el versor normal con los ejes coordenados.

$$\iint_{\boldsymbol{\sigma}} \vec{\boldsymbol{F}}.\vec{\boldsymbol{\eta}}\, \boldsymbol{d\sigma} = \iint_{\boldsymbol{\sigma}} (\boldsymbol{P\,cos\,\alpha} + \boldsymbol{Q\,cos\,\beta} + \boldsymbol{R\,cos\,\gamma})\, \boldsymbol{d\sigma}$$

Observe que se trata del producto escalar de dos vectores $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{i}}\,.\vec{\boldsymbol{\eta}}_{\boldsymbol{i}}\,\Delta\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}}.\boldsymbol{1}.\boldsymbol{cos\varphi}.\,\Delta\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{i}}$

Y el segundo miembro es el volumen de un cilindro de base $\Delta\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{i}}$ y altura $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}}.\boldsymbol{cos\varphi}$

Luego, si $\vec{\boldsymbol{F}}$ por ejemplo, representa la velocidad de un líquido, este producto, la integral de superficie, corresponde a la cantidad total de líquido que atraviesa $\boldsymbol{\sigma}$ en la dirección de $\vec{\boldsymbol{\eta}}$.

Integrales de Superficie

Cálculo de la Integral de Superficie

Supongamos que la superficie $\boldsymbol{\sigma}$ limitada por la curva $\boldsymbol{\lambda}$ viene dada por una expresión de la forma: $\boldsymbol{z = f(x, y)}$

Recordemos además que los cosenos directores del versor normal $\vec{\boldsymbol{\eta}}$ son:

$$cos\,\alpha = \frac{-\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}, \quad cos\,\beta = \frac{-\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}, \quad cos\,\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

$\Delta\boldsymbol{\sigma_{xy}}$ es la proyección en el plano $\boldsymbol{xy}$ de $\Delta\boldsymbol{\sigma}$, es decir:

$$\Delta\boldsymbol{\sigma_{xy}} = \Delta\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{cos\,\gamma} \;\Rightarrow\; \Delta\boldsymbol{\sigma} = \frac{\Delta\boldsymbol{\sigma_{xy}}}{\boldsymbol{cos\,\gamma}} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{d\sigma} = \frac{\boldsymbol{dxdy}}{\boldsymbol{cos\,\gamma}}$$

Reemplazando en la definición de Integral de Superficie $\iint_{\boldsymbol{\sigma}} \vec{\boldsymbol{F}}.\vec{\boldsymbol{\eta}}\, \boldsymbol{d\sigma} = \iint_{\boldsymbol{\sigma}} (\boldsymbol{P\,cos\,\alpha + Q\,cos\,\beta + R\,cos\,\gamma})\, \boldsymbol{d\sigma}$ en el segundo miembro a $\boldsymbol{d\sigma}$ obtenemos:

Integrales de Superficie

$$\iint_\sigma \vec{F}.\vec{\eta}\, d\sigma = \iint_\sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\frac{dxdy}{\cos\gamma}$$

$$= \iint_\sigma \left(P\,\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} + Q\,\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} + R\,\frac{\cos\gamma}{\cos\gamma}\right) dxdy$$

$$\boxed{\iint_{\boldsymbol{\sigma}} \vec{\boldsymbol{F}}.\vec{\boldsymbol{\eta}}\, \boldsymbol{d\sigma} = \iint_{\boldsymbol{\sigma}} \left(-\frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{P} - \frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{y}}\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{R}\right)\boldsymbol{dxdy}}$$

donde P, Q y R están evaluadas en $[x, y, f(x,y)]$.

Si la superficie $\boldsymbol{\sigma}$ limitada por la curva $\boldsymbol{\lambda}$, viene dada por una expresión de la forma: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ o de la forma $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$, se procede de manera análoga pero proyectando sobre los planos $\boldsymbol{yoz}$ o sobre el plano $\boldsymbol{xoz}$, respectivamente y en esos casos diremos que:

$$\Delta\sigma_{yz} = \Delta\sigma \cdot \cos\alpha \;\Rightarrow\; \Delta\sigma = \frac{\Delta\sigma_{yz}}{\cos\alpha}$$

o bien

$$\Delta\sigma_{xz} = \Delta\sigma \cdot \cos\beta \;\Rightarrow\; \Delta\sigma = \frac{\Delta\sigma_{xz}}{\cos\beta}$$

Integrales de Superficie

Teorema de Stokes

El Teorema de Stokes establece la relación entre la Integral Curvilínea a lo largo de la curva λ y la Integral de Superficie sobre la superficie σ cuya frontera es la curva λ.
Puede considerarse como una versión en el espacio del Teorema de Green.

Sea σ una superficie positivamente orientada limitada por la curva λ y $\vec{F}$ un campo vectorial con derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a σ, entonces:

$$\iint_{\sigma} rot\,\vec{F}\cdot\vec{\eta}\,d\sigma = \int_{\lambda} \vec{F}\cdot\overrightarrow{ds}$$

con $\vec{\eta}$ un versor normal a la superficie $\boldsymbol{\sigma}$.

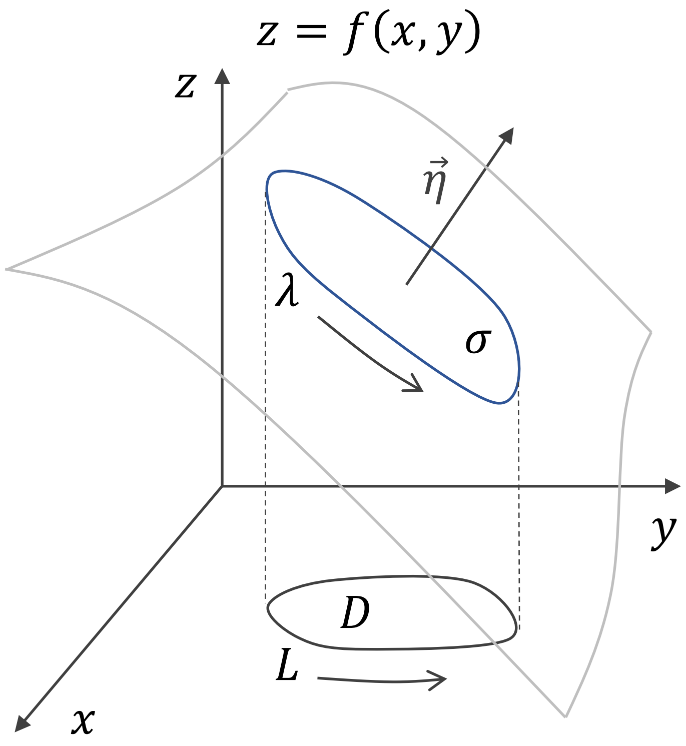
O, de otra manera:

$$\iint_{\sigma}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]d\sigma=\int_{\lambda} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

Integrales de Superficie

Demostración

Supongamos que $\boldsymbol{\sigma}$ viene dada por la ecuación $\boldsymbol{z = f(x, y)}$ y es tal que toda recta paralela al eje $\boldsymbol{z}$, que la atraviesa, la corta en un punto y la proyección de esta superficie en el plano es el domino D.



Considerando que $\boldsymbol{z = f(x, y)}$ es continua y tiene derivadas hasta segundo orden también continuas, **resolveremos las integrales del teorema por separado**. Recordemos que:

$$\vec{F} = P(x, y, z)\,\hat{\imath} + Q(x, y, z)\,\hat{\jmath} + R(x, y, z)\,\hat{k}$$

Recordemos que:

$$rot\,\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\hat{k}$$

$$\iint_{\sigma} \vec{F}.\vec{\eta}\,d\sigma = \iint_{\sigma} \left(-\frac{\partial z}{\partial x}P - \frac{\partial z}{\partial y}Q + R\right) dxdy$$

donde P, Q y R se evalúan en $[x, y, f(x, y)]$.

Integrales de Superficie

Comencemos resolviendo la **Integral de Superficie** aplicando la fórmula de cálculo anterior a $rot\ \vec{F}$:

$$\iint_\sigma rot\ \vec{F} \cdot \vec{\eta}\ d\sigma = \iint_\sigma \left[-\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] dxdy \qquad (1)$$

donde P, Q y R están evaluados en $[x, y, f(x, y)]$.

Ahora resolveremos la **Integral Curvilínea**:

$$\int_\lambda \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_\lambda P\ dx + Q\ dy + R\ dz$$

Recordemos que

$$\boldsymbol{\vec{F} = P(x, y, z)\ \hat{\imath} + Q(x, y, z)\ \hat{\jmath} + R(x, y, z)\ \hat{k}}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{ds} = dx\ \hat{\imath} + dy\ \hat{\jmath} + dz\ \hat{k}}$$

La curva λ está dada por la función $\boldsymbol{z = f(x, y)}$, donde $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ son las coordenadas de los puntos de la curva $\boldsymbol{L}$ que es la proyección de $\boldsymbol{\lambda}$ sobre el plano $\boldsymbol{xy}$. Por lo tanto como:

$$z = f(x, y) \;\; \Rightarrow \;\; dz = \frac{\partial z}{\partial x}\ dx + \frac{\partial z}{\partial y}\ dy$$

Integrales de Superficie

Entonces:

$$\int_{\lambda} \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{\lambda} P[x, y, f(x, y)]dx + Q[x, y, f(x, y)]dy + R[x, y, f(x, y)] \left(\frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy \right)$$

O más breve:

$$\int_{\lambda} \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{\lambda} P\, dx + Q\, dy + R \left(\frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy \right)$$

Aplicando propiedad distributiva en el 3er término y sacando factor común dx y dy obtenemos:

$$\int_{\lambda} \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{\lambda} P\, dx + Q\, dy + R \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + R \frac{\partial z}{\partial y}\, dy$$

$$\int_{\lambda} \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{\lambda} \left(P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy$$

Integrales de Superficie

Al segundo miembro le aplicamos el Teorema de Green, obtendremos:

$$\int_{\lambda} \vec{F}\cdot\overrightarrow{ds} = \iint_D \left[\frac{\partial\left(Q + R\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(P + R\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}\right] dxdy \qquad (2)$$

Calculemos estas derivadas parciales como funciones compuestas, teniendo en cuenta que P, Q y R son funciones de x, y, z y que $z = f(x, y)$

$$\frac{\partial\left(Q + R\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}\underbrace{\frac{dx}{dx}}_{1} + \frac{\partial Q}{\partial y}\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{0} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\underbrace{\frac{dx}{dx}}_{1} + \frac{\partial R}{\partial y}\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{0} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial y} + R\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + R\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

Integrales de Superficie

$$\frac{\partial\left(P+R\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial x}\underbrace{\frac{dx}{dy}}_{0}+\frac{\partial P}{\partial y}\underbrace{\frac{dy}{dy}}_{1}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\left(\frac{\partial R}{\partial x}\underbrace{\frac{dx}{dy}}_{0}+\frac{\partial R}{\partial y}\underbrace{\frac{dy}{dy}}_{1}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial x}+R\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

$$=\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+R\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

Restando ambas expresiones de las derivadas parciales y reduciendo términos semejantes:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+R\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\left[\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+R\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right]=$$

$$=\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+\cancel{\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}}+\cancel{R\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}}-\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}-\cancel{\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}}-\cancel{R\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}}$$

$$=-\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)-\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Integrales de Superficie

Reemplazando en (2):

$$\int_{\lambda} \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \iint_{D} \left[\frac{\partial \left(Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\partial y} \right] dxdy$$

$$\int_{\lambda} \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \iint_{D} \left[-\frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] dxdy \quad (3)$$

Finalmente, comparando los resultados de ambas integrales (1) y (3):

$$\iint_{\sigma} rot\, \vec{F} \cdot \vec{\eta}\, d\sigma = \iint_{\sigma} \left[-\frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] dxdy \ (1)$$

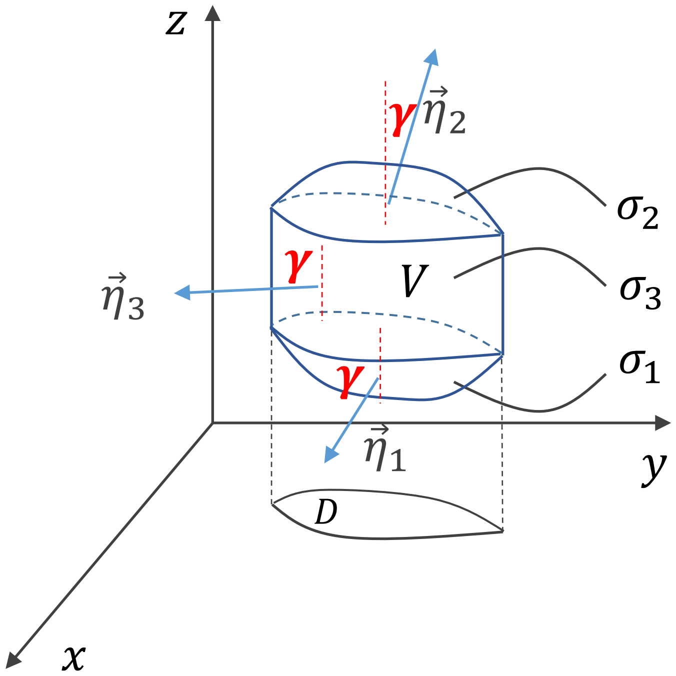
Se verifica lo que queríamos demostrar:

$$\boxed{\iint_{\sigma} rot\, \vec{F} \cdot \vec{\eta}\, d\sigma = \int_{\lambda} \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds}}$$

Integrales de Superficie

Teorema de la Divergencia.

Sea V un volumen definido en $\mathbb{R}^3$, limitado por una superficie cerrada σ, que puede ser proyectada sobre los tres planos coordenados. Y sea $\vec{F}$ un campo vectorial continuo y con derivadas parciales también continuas en una región que contiene a V, entonces:



$$\iiint_V div\, \vec{F}\, dv = \iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{\eta}\, d\sigma$$

El Teorema de la Divergencia nos dice que la Integral Triple extendida en el dominio V de la divergencia del campo vectorial $\vec{F}$ es igual al flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie cerrada σ que limita a este dominio.

Por ejemplo, si $\vec{F}$ representa la velocidad de un fluido que corre en el volumen V, la integral del primer miembro puede interpretarse como la cantidad de fluido que sale a través de la superficie σ, en caso de ser positiva. Si la integral es negativa lo que entra través de la superficie cerrada σ que limita a este dominio y si fuera nula indica que la cantidad de fluido que entra, es igual a la que sale.

Integrales de Superficie

Demostración

Recordemos que:

$\vec{F} = P(x,y,z)\,\hat{\imath} + Q(x,y,z)\,\hat{\jmath} + R(x,y,z)\,\hat{k}$

$\vec{\eta} = cos\,\alpha\ \hat{\imath} + cos\,\beta\,\hat{\jmath} + cos\,\gamma\,\hat{k}$

$$div\ \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Por lo tanto resulta:

$$\iiint_V div\ \vec{F}\,dv = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv = \iint_\sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma = \iint_\sigma \vec{F}\cdot\vec{\eta}\,d\sigma$$

Es decir que si deseamos demostrar que $\iiint_V div\ \vec{F}\,dv = \iint_\sigma \vec{F}\cdot\vec{\eta}\,d\sigma$, debemos demostrar 3 igualdades:

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}\,dv = \iint_\sigma P\cos\alpha\,d\sigma \quad (I)\,, \qquad \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}\,dv = \iint_\sigma Q\cos\beta\,d\sigma \quad (II)\,, \qquad \boldsymbol{\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dv = \iint_\sigma R\cos\gamma\,d\sigma \quad (III)}$$

Integrales de Superficie

Comencemos por la tercera igualdad: $$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dv = \iint_\sigma R\cos\gamma\, d\sigma$$

V está limitado por la superficie σ y su proyección sobre el plano xy es el dominio D.

Considerando que σ puede dividirse en σ_1, σ_2 y σ_3, entonces σ_1 está dada por $z = f_1(x, y)$, que corresponde a la superficie de la cara inferior, σ_2 está dada por $z = f_2(x, y)$ que corresponde a la superficie de la cara superior y σ_3 es una superficie cilíndrica de generatrices paralelas al eje z.

Resolvamos la integral del primer miembro:

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dv = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dz\, dy\, dx$$

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dv = \iint_D \left[\int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz\right] dydx = \iint_D \{R[x,y,f_2(x,y)] - R[x,y,f_1(x,y)]\}\, dydx \qquad (1)$$

Integrales de Superficie

Resolvamos la integral del segundo miembro:

$$\iint_{\sigma} R\cos\gamma\, d\sigma = \iint_{\sigma_1} R\cos\gamma\, d\sigma + \iint_{\sigma_2} R\cos\gamma\, d\sigma + \iint_{\sigma_3} R\cos\gamma\, d\sigma$$

Si consideramos los vectores normales exteriores a la superficie σ resulta:

$\cos\gamma < 0$ en σ_1

$\cos\gamma > 0$ en σ_2

$\cos\gamma = 0$ en σ_3

Recordemos además que: $\cos\gamma\, \Delta\sigma = \Delta\sigma_{xy} \;\Rightarrow\; \cos\gamma\, d\sigma = dydx$

Reemplazando en las integrales:

$$\iint_{\sigma} R\cos\gamma\, d\sigma = -\iint_{D} R[x,y,f_1(x,y)]\, dydx + \iint_{D} R[x,y,f_2(x,y)]\, dydx + 0$$

$$= \iint_{D} R[x,y,f_2(x,y)]\, dydx - \iint_{D} R[x,y,f_1(x,y)]\, dydx$$

$$= \iint_{D} \{\, R[x,y,f_2(x,y)] - R[x,y,f_1(x,y)]\,\}\, dydx \qquad (2)$$

Comparando (1) y (2) se demuestra la tercera igualdad: $\displaystyle\iiint_{V} \frac{\partial R}{\partial z}\, dv = \iint_{\sigma} R\cos\gamma\, d\sigma$

Se procede análogamente con las otras dos igualdades y así queda demostrado el teorema.

Análisis Matemático II

Ecuaciones Diferenciales

Ecuaciones Diferenciales

Una **ecuación diferencial** es toda ecuación que establece una relación entre una función desconocida, su variable independiente (o variables independientes) y una o más, de sus derivadas.

Si la función desconocida depende de una sola variable la ecuación diferencial se llama **ordinaria**, por el contrario, si la función desconocida depende de más una variable, se llama **parcial** o **a derivadas parciales**.

En general representaremos una **ecuación diferencial ordinaria** de la forma:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

El **ORDEN** de la ecuación diferencial estará dado por el orden de la **derivada de mayor orden** de la ecuación.

El **GRADO** de la ecuación diferencial estará dado por el **mayor exponente** con el que aparece **la derivada que da el orden** a la ecuación.

Ecuaciones Diferenciales

Se llama **SOLUCIÓN** o **INTEGRAL** de una ecuación diferencial a cualquier función que la verifica, es decir, que introducida en la ecuación diferencial la transforma en una identidad.

- Llamaremos **SOLUCIÓN GENERAL** a la solución que satisface la ecuación y contiene n constantes arbitrarias, siendo n el orden de la ecuación.
- Llamaremos **SOLUCIÓN PARTICULAR** a la solución que se obtiene asignando valor a las constantes arbitrarias. Para ello hace falta información adicional que suele denominarse **condiciones iniciales** o **condiciones de entorno.**

Resolver una ecuación diferencial es calcular la Solución General (luego, si se pide, a partir de ella calcular la Solución Particular).

¿Qué vamos a estudiar en este curso?

Ecuaciones Diferenciales

Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden Ordinarias

A variables separables.

Homogéneas.

Lineales.

De Bernoulli.

Totales o exactas.

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden Ordinarias

Homogéneas

No Homogéneas *métodos* → Coeficientes Indeterminados.

Variación de Parámetros.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

Por lo visto, en general, son de la forma:

$$F(x, y, y') = 0$$

La Solución General será de la forma:

$$y = f(x, C)$$

Siendo C una constante arbitraria. Al fijar una condición inicial $y = y_0$ para $x = x_0$, se puede encontrar un valor $C = C_0$ tal que:

$$y = f(x, C_0)$$

Desde un punto de vista geométrico, la Solución General representa **una familia de curvas** en el plano de coordenadas. Estas curvas se llaman **curvas integrales** de la EDO dada y cada solución particular está representa por **una** curva de esta familia.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

A Variables Separables

En su **forma diferencial** se expresa como: $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ siendo

$$M(x,y) = m_1(x) \cdot m_2(y)$$

$$N(x,y) = n_1(x) \cdot n_2(y)$$

Es decir que $M(x,y)$ y $N(x,y)$ deben ser productos de funciones de x e y.

En su **forma explícita** se expresan como $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$ y separando las variables:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) \cdot dx$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

Integrando ambos miembros:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) \cdot dx$$

$$F_2(y) = F_1(x) + C$$

Donde la constante C resulta de asociar las constantes de integración de ambas integrales.

Ejemplo 1

Calcular la solución particular de $2y\ln(x)\ dx - x\sqrt{1+\ln(x)}\ dy = 0$ sabiendo que $y(1) = 1$.

$$2y\ln(x)\ dx - x\sqrt{1+\ln(x)}\,dy = 0$$

$$2y\ln(x)\ dx = x\sqrt{1+\ln(x)}\ dy$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

$$x\sqrt{1+\ln(x)}\ dy = 2y\ln(x)\ dx$$

$$\frac{1}{y}\,dy = \frac{2\ \ln(x)}{x\sqrt{1+\ln(x)}}\,dx$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{2\ \ln(x)}{x\sqrt{1+\ln(x)}}\,dx$$

Solución General Implícita

$$\boxed{\ln y = \frac{4}{3}\sqrt{1+\ln(x)}\ (\ln(x)-2)\ + C}$$

$$\ln 1 = \frac{4}{3}\sqrt{1+\ln(1)}\ (\ln(1)-2)\ + C \to C = \frac{8}{3}$$

$$\boxed{\ln y = \frac{4}{3}\sqrt{1+\ln(x)}\ (\ln(x)-2)\ + \frac{8}{3}}$$

Solución Particular Implícita

Cálculos auxiliares:

$$\int \frac{2\ \ln(x)}{x\sqrt{1+\ln(x)}}\,dx \ \to\ s=\ln(x), \qquad ds = \frac{1}{x}\,dx$$

$$2\int \frac{s}{\sqrt{1+s}}\,ds \ \to\ t^2 = 1+s, \qquad 2\,t\,dt = ds$$

$$s = t^2 - 1$$

$$2\int \frac{t^2-1}{t}\ 2t\,dt$$

$$4\int (t^2-1)\,dt$$

$$4\left(\frac{1}{3}t^3 - t\right) \to 4t\left(\frac{1}{3}t^2 - 1\right)$$

$$4\sqrt{1+s}\left(\frac{1+s-3}{3}\right)$$

$$\frac{4}{3}\sqrt{1+\ln(x)}\ (\ln(x)-2)$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

Homogéneas

En su **forma explícita**, $y' = f(x, y)$ es una **ecuación diferencial ordinaria de primer homogénea** si y sólo si $f(x, y)$ es una función homogénea de grado cero.

En su **forma diferencial** $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$, tanto $N(x, y)$ como $M(x, y)$ son funciones homogéneas de igual grado.

Recordemos que una función $f(x, y)$ es homogénea de grado m si y sólo si:

$$f(tx, ty) = t^m\, f(x, y)$$

es decir que, si sustituyo a x por tx y a y por ty, la función queda multiplicada por t^m.

Para poder resolverlas, se las convierte en ecuaciones diferenciales a variables separables usando una función auxiliar $\boldsymbol{y = ux}$ siendo u una función de la variable independiente x.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

Sea $y' = f(x,y)$ con $f(x,y)$ una función homogénea de grado cero, podemos escribir:

$$y' = f(tx, ty) = f(x,y)$$

Si hacemos $t = \dfrac{1}{x}$, entonces:

$$y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(x,y)$$

Es decir que y' es una función de $\dfrac{y}{x}$ que llamaremos φ, es decir: $y' = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (1)

Además $y = ux \;\rightarrow y' = u'x + u$ (2)

Igualando (1) y (2): $u'x + u = \varphi(u)$ es a variables separables. Separamos las variables:

$$\frac{du}{dx}x + u = \varphi(u) \;\longrightarrow\; \frac{du}{dx}x = \varphi(u) - u \;\longrightarrow\; du = (\varphi(u) - u).\frac{dx}{x}$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x} \quad \rightarrow \int \frac{du}{\varphi(u)-u}=\int \frac{dx}{x}$$

$$G(u)=\ln(x)+C$$

Finalmente, reemplazando u por su igual:

$$\boxed{G\left(\frac{y}{x}\right)=\ln(x)+C}$$

Ejemplo 2:

Calcular la solución general de la siguiente ecuación diferencial $\boldsymbol{y'=\frac{x+y}{x-y}}$

Primero, verificamos que es EDO de 1er Orden Homogénea:

$$\frac{tx+ty}{tx-ty}=\frac{t(x+y)}{t(x-y)}=t^0\frac{x+y}{x-y} \quad \Rightarrow$$ Es función homogénea de grado **<u>0</u>**

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

$$y' = \frac{x+y}{x-y}$$

$$\boldsymbol{y = ux} \rightarrow y' = u'x + u$$

$$u'x + u = \frac{x+ux}{x-ux}$$ Ahora es una EDO a variables separables

$$\frac{du}{dx}x = \frac{x+ux}{x-ux} - u$$

$$\frac{du}{dx}x = \frac{x(1+u)}{x(1-u)} - u$$

$$\frac{du}{dx}x = \frac{1+u}{1-u} - u \quad \rightarrow \quad \frac{du}{dx}x = \frac{1+u-u+u^2}{1-u}$$

$$\frac{du}{dx}x = \frac{1+u^2}{1-u} \rightarrow \frac{1-u}{1+u^2}du = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \frac{1-u}{1+u^2}du = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{1+u^2}du - \int \frac{u}{1+u^2}du = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$arctg(u) - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln(x) + C$$

$$\boxed{arctg\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) = \ln(x) + C}$$

Solución General Implícita

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

Lineales

Son de la forma $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$ con $\left| \begin{array}{l} P(x) \neq 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{array} \right.$ (por que si no, es a variables separables)

Se usa una función auxiliar $\boldsymbol{y = uv}$ donde u y v son funciones de x continuas y derivables.

Derivando: $y = uv \;\rightarrow\; y' = u'v + uv'$

Sustituyendo en la ecuación: $u'v + uv' + P(x)\,uv = Q(x)$

Extraemos factor común, por ejemplo v, en el 1° y 3° término:

$$[u' + P(x)u]v + uv' = Q(x) \qquad (1)$$

Resolvemos $u' + P(x)u = 0$ que suele llamarse **ecuación diferencial lineal incompleta**.
(Observe que resulta ser a Variables Separables)

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

$$u' + P(x)u = 0 \rightarrow \frac{du}{dx} = -P(x)u \rightarrow \frac{du}{u} = -P(x)dx$$

$$\int \frac{du}{u} = -\int P(x)dx \ \rightarrow \ln(u) = -\int P(x)\, dx + C$$

Calculo la solución particular más sencilla con $C = 0$.

$$\boxed{u = e^{-\int P(x)\, dx}}$$

Sustituyendo en (1):

$$e^{-\int P(x)\, dx}\, v' = Q(x)$$

Calculo la solución particular. (Observe que resulta ser a Variables Separables)

$$\frac{dv}{dx} = \frac{Q(x)}{e^{-\int P(x)\, dx}} \rightarrow dv = Q(x)\, .\, e^{\int P(x)\, dx}\, dx \ \rightarrow \int dv = \int Q(x)\, e^{\int P(x)\, dx}\, dx$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

$$v = \int Q(x)\, e^{\int P(x)\, dx}\, dx + C$$

Como $y = uv$

$$y = e^{-\int P(x)\, dx} \left[\int Q(x)\, e^{\int P(x)\, dx}\, dx + C \right]$$

Solución General Explícita

Ejemplo 3:

Calcular la solución general de la siguiente ecuación diferencial:

$$(x+1)[sen(x) - y'] = y$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

$$(x+1)[sen(x) - y'] = y$$

$$sen(x) - y' = \frac{y}{x+1}$$

$$y' + \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{P(x)}y = \underbrace{sen(x)}_{Q(x)}$$

$y = uv$ con
$$u = e^{-\int P(x)\,dx}$$
$$v = \int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}\, dx + C$$

$$u = e^{-\int \frac{1}{x+1}dx}$$

$$u = e^{-\,ln(x+1)}$$

$$u = e^{ln(x+1)^{-1}}$$

$$u = (x+1)^{-1} \rightarrow \boxed{u = \frac{1}{x+1}}$$

$$v = \int sen(x)\, e^{\int \frac{1}{x+1}dx}\, dx + C$$

$$v = \int sen(x)\, e^{ln(x+1)}\, dx + C$$

$$v = \int (x+1)\, sen(x)\; dx + C$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

$$v = \int (x+1)\,\mathrm{sen}(x)\ dx + C$$

Resolvemos la integral por partes. Recuerde que $\int t\,.ds = t.s - \int s\,.dt$

Hacemos

$$t = x + 1 \ \rightarrow \ dt = dx$$

$$ds = sen(x)\,dx \ \rightarrow s = -cos(x)$$

$$v = -(x+1)\,cos(x) + \int cos(x)\ dx + C$$

$$\boxed{v = -(x+1)\,cos(x) + sen(x) + C}$$

Finalmente $\boldsymbol{y = uv}$

$$\boxed{y = \frac{1}{x+1}\left[-(x+1)\cos(x) + \mathrm{sen}(x) + C\right]}$$

Solución General Explícita

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

De Bernoulli

Son de la forma $y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n$ con $n \neq 0$ (por que si no, sería lineal)
$n \neq 1$ (por que si no, sería a variables separables)

Para resolverla la convertimos en una Ecuación Diferencial Lineal usando la función auxiliar:

$$\boldsymbol{z = y^{1-n}}$$

$$z' = (1-n) \cdot y^{1-n-1} \cdot y'$$

$$z' = (1-n) \cdot y^{-n} \cdot y'$$

$$\frac{z'}{1-n} = \frac{y'}{y^n}$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

En la ecuación de Bernoulli, dividiendo ambos miembros por y^n

$$\frac{y'}{y^n} + P(x) \cdot \frac{y}{y^n} = Q(x)$$

Reemplazando

$$\frac{z'}{1-n} + P(x) \cdot z = Q(x)$$

$$z' + \underbrace{(1-n)P(x)}_{p(x)} \cdot z = \underbrace{(1-n)Q(x)}_{q(x)}$$ Ecuación diferencial Lineal en z

Resuelvo como lineal:

$z = uv$ con $\begin{cases} u = e^{-\int p(x)\,dx} \\ v = \int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\, dx + C \end{cases}$

z

$$\boxed{y^{1-n} = e^{-\int p(x)\,dx} \left[\int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\, dx + C \right]}$$

Solución General Implícita

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

Ejemplo 4

Calcular la solución general de la siguiente ecuación diferencial: $y' + xy = 6x\sqrt{y}$

$$y' + \underbrace{x}_{p(x)}\, y = \underbrace{6x}_{q(x)}\, y^{\frac{1}{2}} \qquad n = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; z = y^{1-\frac{1}{2}}$$

$$z = y^{\frac{1}{2}} \;\rightarrow\; z' = \frac{1}{2}\, y^{-\frac{1}{2}}\, y' \;\rightarrow\; 2z' = y^{-\frac{1}{2}}\, y'$$

Multiplicamos ambos miembros por $\boldsymbol{y^{-\frac{1}{2}}}$ y reemplazando: $\boldsymbol{y' . y^{-\frac{1}{2}} + x . y . y^{-\frac{1}{2}} = 6x\, y^{\frac{1}{2}} . y^{-\frac{1}{2}}}$

$$2z' + xz = 6x$$

$$z' + \underbrace{\frac{x}{2}}_{P(x)}\, z = \underbrace{3x}_{Q(x)}$$ Ecuación diferencial Lineal en $\boldsymbol{z}$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

$z = uv$ con $\quad u = e^{-\int p(x)\,dx}$

$v = \int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\, dx + C$

$$u = e^{-\int \frac{1}{2} x\,dx} \rightarrow \boxed{u = e^{-\frac{1}{4}x^2}}$$

$$v = \int 3x\ e^{\frac{1}{4}x^2} dx + C \qquad s = \frac{1}{4}x^2 \rightarrow ds = \frac{1}{2}x\,dx \rightarrow 2\,ds = x\,dx$$

$$v = 3\int 2\,e^s ds + C$$

$$v = 6\,e^s + C \rightarrow \boxed{v = 6\,e^{\frac{1}{4}x^2} + C}$$

Finalmente:

Solución General Implícita

$$z = e^{-\frac{1}{4}x^2}\left[6\,e^{\frac{1}{4}x^2} + C\right] \rightarrow \boldsymbol{y^{\frac{1}{2}} = \left[6 + C.e^{-\frac{1}{4}x^2}\right]}$$

Solución General Explícita

O bien:

$$\boldsymbol{y = \left[6 + C.e^{-\frac{1}{4}x^2}\right]^2}$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

Totales o Exactas

Su forma diferencial $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ indica que es ecuación diferencial exacta si se cumple:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Recordando lo que ya estudiamos en Integrales Curvilíneas con referencia a Campos Vectoriales Conservativos, podemos afirmar que existe una función, llamada Función Potencial, que llamaremos $\varphi(x,y)$ tal que:

$$M(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad N(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

Luego:

$$\overbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy}^{d\varphi = 0 \quad \rightarrow} = 0$$

$$\boxed{\varphi(x,y) = cte}$$

Solución general implícita

Para calcular $\varphi(x,y)$ un camino es:

$$\varphi(x,y) = \int M(x,y)\,dx + C(y) \quad (*)$$

Una constante que **puede** depender de y.
Debo calcular esta constante.

$$\varphi(x,y) = F(x,y) + C(y)$$

Derivamos ambos miembros respecto de y

$$\varphi'_y(x,y) = F'_y(x,y) + C'(y) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = F'_y(x,y) + C'(y)$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

$$N(x,y) - F'_y(x,y) = C'(y) \;\; \rightarrow \;\; C(y) = \int \left[N(x,y) - F'_y(x,y)\right] dy$$

Sustituyendo en $(*)$

$$\boxed{\varphi(x,y) = \int M(x,y)\, dx + \int \left[N(x,y) - F'_y(x,y)\right] dy = cte}$$

Solución General Implícita

Para calcular $\varphi(x,y)$ el otro camino es:

$$\varphi(x,y) = \int N(x,y)\, dy + C(x) \quad (**)$$

Una constante que **puede** depender de x.
Debo calcular esta constante.

$$\varphi(x,y) = G(x,y) + C(x)$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

Derivamos ambos miembros respecto de x

$$\varphi'_x(x,y) = G'_x(x,y) + C'(x) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = G'_x(x,y) + C'(x)$$

$$M(x,y) - G'_x(x,y) = C'(x) \quad \rightarrow \quad C(x) = \int [M(x,y) - G'_x(x,y)]\, dx$$

Sustituyendo en $(**)$

$$\boxed{\varphi(x,y) = \int N(x,y)\, dy + \int [M(x,y) - G'_x(x,y)]\, dx = cte}$$

Solución General Implícita

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

Ejemplo 5

Calcular la solución general de la EDO: $\underbrace{(xy^2 - 3x^2y)}_{M(x,y)}\,dx + \underbrace{(x^2y - x^3 + y^3)}_{N(x,y)}\,dy = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 3x^2$$ La ecuación diferencial es Exacta… (Observe que también es Homogénea)

Si seguimos el primer camino mencionado:

$$\varphi(x,y) = \int (xy^2 - 3x^2y)\,dx + C(y) \rightarrow \varphi(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 - x^3y + C(y) \qquad (1)$$

$$\varphi'_y(x,y) = x^2y - x^3 + C'(y)$$

$$x^2y - x^3 + y^3 = x^2y - x^3 + C'(y) \;\rightarrow\; C'(y) = y^3 \;\rightarrow\; C(y) = \int y^3\,dy \;\rightarrow\; C(y) = \frac{1}{4}y^4$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

Reemplazando en (1):

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 - x^3y + \frac{1}{4}y^4 \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{2}x^2y^2 - x^3y + \frac{1}{4}y^4 = \mathrm{C}}$$ Solución General Implícita

Si seguimos el segundo camino:

$$\varphi(x,y) = \int (x^2y - x^3 + y^3)\,dy + C(x) \rightarrow \varphi(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 - x^3y + \frac{1}{4}y^4 + C(x) \qquad (2)$$

$$\varphi'_x(x,y) = xy^2 - 3x^2y + C'(x)$$

$$xy^2 - 3x^2y = xy^2 - 3x^2y + C'(x) \rightarrow \quad C'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad C(x) = cte$$

Reemplazando en (2):

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 - x^3y + \frac{1}{4}y^4 + cte \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{2}x^2y^2 - x^3y + \frac{1}{4}y^4 = \mathrm{C}}$$ Solución General Implícita

Se verifica que ambos caminos son iguales.

Análisis Matemático II

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Como habíamos estudiado, una EDO de orden n es de la forma:

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

Y su **Solución General** es de la forma:

$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, con $C_1, C_2, \dots, C_n$ constantes arbitrarias.

Una EDO de orden n es **Lineal**, si es de 1° grado respecto de la variable dependiente y sus derivadas y, su expresión general es:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-2} y'' + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

con $a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, f(x)$ son funciones de x o constantes, $a_0 \neq 0$ y, en particular, $a_0 = 1$.

Si $f(x) = 0$, se dice que la EDO es **Homogénea** y si $f(x) \neq 0$, que es **no Homogénea**.

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas de Segundo Orden

Son de la forma: $y'' + a_1\, y' + a_2\, y = 0 \qquad (1)$

También se la llama *incompleta*.

Propiedad 1:

Si y_1 e y_2 son dos soluciones particulares de la EDO lineal homogénea de segundo orden, entonces $y_1 + y_2$ es también solución de esta ecuación.

Demostración:

Si y_1 e y_2 son soluciones de la EDO lineal homogénea de segundo orden, entonces:

$$\begin{aligned} y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 &= 0 \\ y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Poniendo en la ecuación (1) la suma $y_1 + y_2$ y tomando en consideración las identidades (2), tenemos:

$$(y_1 + y_2)'' + a_1(y_1 + y_2)' + a_2(y_1 + y_2) =$$

$$= y_1'' + y_2'' + a_1 y_1' + a_1 y_2' + a_2 y_1 + a_2 y_2$$

$= \underbrace{y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1}_{0} + \underbrace{y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2}_{0} = 0$ es decir, $y_1 + y_2$ es solución de la ecuación.

Propiedad 2:

Si y_1 es una solución particular de la EDO lineal homogénea de segundo orden y C es una constante, el producto Cy_1 es, también, una solución de esta ecuación.

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Demostración:

Poniendo en la ecuación (1) la expresión Cy_1, tenemos:

$$(Cy_1)'' + a_1(Cy_1)' + a_2(Cy_1)$$

$$= C\underbrace{(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1)}_{0} = 0$$ es decir, Cy_1 es solución de la ecuación.

Algunas definiciones:

- Dos funciones y_1 e y_2 son linealmente dependientes en un intervalo $[a, b]$ si su cociente es constante en dicho intervalo.

- **Dos funciones y_1 e y_2 son linealmente independientes en un intervalo $[a, b]$ si su cociente no es constante sino una función de x.**

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

- Dos funciones no pueden ser linealmente independientes si una de ellas es nula

- Dos funciones y_1 e y_2 son linealmente independientes si:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

Este determinante se conoce como Wronsquiano.

Propiedad 3:

Si y_1 e y_2 son soluciones particulares linealmente independientes de la EDO lineal de segundo orden, su solución general será:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Siendo C_1 y C_2 dos constantes arbitrarias.

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Demostración:

En efecto, $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ es solución por las propiedades 1 y 2 y además, es solución general porque tiene dos constantes arbitrarias (2° orden $\rightarrow$ 2 constantes arbitrarias).

Por otra parte, si y_1 e y_2 **no** son linealmente independientes, entonces:

$$\frac{y_1}{y_2} = k \quad \Rightarrow \quad y_1 = k y_2$$

La solución quedaría: $y = C_1 k y_2 + C_2 y_2 = \underbrace{(C_1 k + C_2)}_{C\,=\,cte} y_2 = C y_2$

$C y_2$ es solución por la propiedad 2 pero no es solución general porque tiene una sola constate arbitraria. Luego y_1 e y_2 deben ser linealmente independientes.

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas de Segundo Orden

En resumen:

- El conjunto de soluciones es un espacio vectorial y el conjunto formado por y_1 e y_2 forman una base de dicho espacio.
- Para construir la solución general, se deben calcular dos soluciones particulares (y_1 e y_2) linealmente independientes.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas de Segundo Orden a Coeficientes Constantes

Son de la forma $y'' + py' + qy = 0 \quad (3)$, donde p y q son número reales.

Para obtener su solución general será suficiente con encontrar dos soluciones particulares linealmente independientes.

Supongamos que $y = e^{mx}$ es solución, con $y' = me^{mx}$ e $y'' = m^2 e^{mx}$

Entonces se debe cumplir que: $m^2 e^{mx} + p\, me^{mx} + q\, e^{mx} = 0$

$$e^{mx}\,(m^2 + pm + q) = 0$$

Como $e^{mx} \neq 0, \forall x$. Luego es $\boxed{m^2 + pm + q = 0}$ Ecuación Característica

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

La ecuación característica $m^2 + pm + q = 0$ es una ecuación de segundo grado que tiene dos raíces m_1 y m_2. Se pueden presentar 3 casos:

1° CASO: Dos raíces reales distintas ($m_1 \neq m_2$ con $p^2 - 4q > 0$)

Tendremos dos soluciones particulares:

$y_1 = e^{m_1 x}, \qquad y_2 = e^{m_2 x}$

Estas dos soluciones resultan ser linealmente independientes pues: $W(y_1, y_2) \neq 0$. Otra forma es ver que su cociente no es constante:

$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{m_1 x}}{e^{m_2 x}} = e^{(m_1 - m_2)x}$ → Es función de x (no es constante).

Por lo tanto, la Solución General de la EDO será: $\boxed{y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}}$

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

2° CASO: Dos raíces reales iguales ($m_1 = m_2 = m$ con $p^2 - 4q = 0$)

Como $m = -\frac{p}{2}$ una solución particular es $y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}$

Propondremos otra solución particular (necesitamos 2) $y_2 = x.e^{-\frac{p}{2}x}$

Veamos si y_2 es solución:

$$y_2 = x.e^{-\frac{p}{2}x}, \qquad y_2' = e^{-\frac{p}{2}x} - \frac{p}{2}x.e^{-\frac{p}{2}x}, \qquad y_2'' = -\frac{p}{2}e^{-\frac{p}{2}x} - \frac{p}{2}e^{-\frac{p}{2}x} + \frac{p^2}{4}xe^{-\frac{p}{2}x}$$

$$y_2'' = -pe^{-\frac{p}{2}x} + \frac{p^2}{4}xe^{-\frac{p}{2}x}$$

Reemplazando en (3):

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = \left(-pe^{-\frac{p}{2}x} + \frac{p^2}{4}xe^{-\frac{p}{2}x}\right) + p\left(e^{-\frac{p}{2}x} - \frac{p}{2}xe^{-\frac{p}{2}x}\right) + q\left(xe^{-\frac{p}{2}x}\right)$$

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = \left(-pe^{-\frac{p}{2}x} + \frac{p^2}{4}xe^{-\frac{p}{2}x}\right) + p\left(e^{-\frac{p}{2}x} - \frac{p}{2}xe^{-\frac{p}{2}x}\right) + q\left(xe^{-\frac{p}{2}x}\right)$$

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = \cancel{-pe^{-\frac{p}{2}x}} + \frac{p^2}{4}xe^{-\frac{p}{2}x} + \cancel{pe^{-\frac{p}{2}x}} - \frac{p^2}{2}xe^{-\frac{p}{2}x} + qxe^{-\frac{p}{2}x}$$

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = -\frac{p^2}{4}xe^{-\frac{p}{2}x} + qxe^{-\frac{p}{2}x}$$

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = xe^{-\frac{p}{2}x}\left(-\frac{p^2}{4} + q\right)$$

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = -\frac{1}{4}xe^{-\frac{p}{2}x}\underbrace{(p^2 - 4q)}_{=0} = 0$$

y_2 verifica la EDO, por lo tanto, es una solución particular.

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Además, las dos soluciones son linealmente independientes ya que su cociente:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\cancel{e^{-\frac{p}{2}x}}}{x.\cancel{e^{-\frac{p}{2}x}}} = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \text{Es función de } x \text{ (no es constante).}$$

Luego, la solución general es: $y = C_1 e^{-\frac{p}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{p}{2}x} \quad \rightarrow \quad \boxed{y = (C_1 + C_2 x)\, e^{-\frac{p}{2}x}}$

3° CASO: Dos raíces complejas conjugadas ($m_1 = \alpha + \beta i, m_2 = \alpha - \beta i$ con $p^2 - 4q < 0$)

Tendremos dos soluciones particulares:

$y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x}, \qquad y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}$

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Son funciones linealmente independientes ya que su cociente:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{(\alpha+\beta i)x}}{e^{(\alpha-\beta i)x}} = \frac{\cancel{e^{\alpha x}} e^{\beta i x}}{\cancel{e^{\alpha x}} e^{-\beta i x}} = e^{2\beta i x}$$ → Es función de x (no es constante).

Luego, la solución general es: $\boxed{y = C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 e^{(\alpha-\beta i)x}}$

Sin embargo, se prefiere trabajar con funciones reales y no con exponenciales complejas.

Con este fin aplicaremos la fórmula de Euler:

$$e^{+i\beta} = cos\,\beta + i\ sen\,\beta$$

$$e^{-i\beta} = cos\,\beta - i\ sen\,\beta$$

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Podemos expresar la solución particular así:

$$y = C_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + C_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x}$$

$$y = e^{\alpha x}(C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x})$$

$$y = e^{\alpha x}[C_1\,(cos\,\beta x + i\;sen\;\beta x) + C_2\,(cos\,\beta x - i\;sen\;\beta x)]$$

$$y = e^{\alpha x}[(C_1 + C_2)\,cos\,\beta x + i(C_1 - C_2)\;sen\;\beta x]$$

Llamemos $A = C_1 + C_2, \;\; B = i(C_1 - C_2)$

Se puede demostrar que C_1 y C_2, en este caso son complejos conjugados por lo tanto $(C_1 + C_2) \in \mathbb{R}$ y $i(C_1 - C_2) \in \mathbb{R}$, es decir A y B son números reales.

Luego

$$\boxed{y = e^{\alpha x}(A\,cos\,\beta x + B\;sen\;\beta x)}$$

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

EDO Lineales No Homogéneas de Segundo Orden a Coeficientes Constantes

Son de la forma $y'' + py' + qy = r(x)$, donde p y q son número reales.

$y'' + py' + qy = 0$ se llama **homogénea asociada**.

Propiedad:

Si Y_{GH} es la solución general de la homogénea asociada, se cumple que:

$$Y''_{GH} + pY'_{GH} + qY_{GH} = 0$$

Si Y_P es una solución particular de la no homogénea, se cumple que:

$$Y''_P + pY'_P + qY_P = r(x)$$

Entonces $\boxed{Y_{GNH} = Y_{GH} + Y_P}$ es una solución general de la no homogénea.

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

En efecto, si sustituimos en la **no homogénea**:

$$y'' + py' + qy = (Y_{GH} + Y_P)'' + p(Y_{GH} + Y_P)' + q(Y_{GH} + Y_P)$$

$$y'' + py' + qy = Y''_{GH} + Y''_P + pY'_{GH} + pY'_P + qY_{GH} + qY_P$$

$$y'' + py' + qy = \underbrace{Y''_{GH} + pY'_{GH} + qY_{GH}}_{0} + \underbrace{Y''_P + pY'_P + qY_P}_{r(x)} = r(x)$$

Porque Y_{GH} es solución general de la homogénea asociada

Porque Y_P es solución particular de la no homogénea

Luego $Y_{GNH} = Y_{GH} + Y_P$ es solución de la no homogénea porque la verifica.

Además, es solución general porque tiene dos constantes arbitrarias en Y_{GH}.

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Métodos para encontrar la solución particular de la no homogénea

Hemos demostrado que la solución general de la EDO lineal de 2° Orden No Homogénea, viene dada por la suma de la solución general de la homogénea asociada y una solución particular de la no homogénea $Y_{GNH} = Y_{GH} + Y_P$

Siendo la homogénea asociada $y'' + py' + qy = 0$ y $m^2 + pm + q = 0$, su ecuación característica, sabemos que se pueden presentar tres casos:

- Dos raíces reales distintas $\rightarrow$ $Y_{GH} = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$
- Dos raíces reales iguales $\rightarrow$ $Y_{GH} = (C_1 + xC_2)e^{-\frac{p}{2}x}$
- Dos raíces complejas conjugadas $\rightarrow$ $Y_{GH} = e^{\alpha x}(A\,cos\,\beta x + B\,sen\,\beta x)$

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Entonces, conocidas las soluciones generales de la homogénea asociada, Y_{GH}, lo que falta es encontrar una solución particular de la no homogénea Y_P.

Estudiaremos para esto dos métodos:

- Método de coeficientes indeterminados.
- Método de variación de parámetros.

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Métodos de los Coeficientes Indeterminados

Sea la EDO de la forma $y'' + py' + qy = r(x)$

La solución particular propuesta **Y_P debe tener la misma forma de $r(x)$.**

Distinguiremos 5 casos:

$r(x)$	Y_P	Condición
Constante A	k	Si 0 **no** es raíz de la ecuación característica.
	$k \cdot x$	Si 0 es **1** raíz de la ecuación característica.
	$k \cdot x^2$	Si 0 es **2 veces** raíz de la ecuación característica.

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

$r(x)$	Y_P	Condición
Polinomio en x de grado n $P_n(x)$	$Q_n(x)$	Si 0 **no** es raíz de la ecuación característica.
	$Q_n(x) \cdot x$	Si 0 es **1** raíz de la ecuación característica.
	$Q_n(x) \cdot x^2$	Si 0 es **2 veces** raíz de la ecuación característica.

$r(x)$	Y_P	Condición
$A \cdot e^{\alpha x}$	$k \cdot e^{\alpha x}$	Si α **no** es raíz de la ecuación característica.
	$k \cdot x \cdot e^{\alpha x}$	Si α es **1** raíz de la ecuación característica.
	$k \cdot x^2 \cdot e^{\alpha x}$	Si α es **2 veces** raíz de la ecuación característica.

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

$r(x)$	Y_P	Condición
$sen\ \beta x$ o $cos\ \beta x$	$A \cdot cos\ \beta x + B \cdot sen\ \beta x$	Si βi **no** es raíz de la ecuación característica.
	$(A \cdot cos\ \beta x + B \cdot sen\ \beta x) \cdot x$	Si βi **es** raíz de la ecuación característica.

$r(x)$	Y_P	Condición
$e^{\alpha x} sen\ \beta x$ o $e^{\alpha x}\ cos\ \beta x$	$e^{\alpha x}(A \cdot cos\ \beta x + B \cdot sen\ \beta x)$	Si $\alpha \pm\ \beta i$ **no** es raíz de la ecuación característica.
	$e^{\alpha x}(A \cdot cos\ \beta x + B \cdot sen\ \beta x) \cdot x$	Si $\alpha \pm\ \beta i$ **es** raíz de la ecuación característica.

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

En los cinco casos, ya que se trata de una solución particular, es necesario calcular el valor de las constantes, (sólo tenemos la forma de la solución particular). Para ello derivamos y sustituimos la solución particular en la ecuación no homogénea. Igualamos coeficientes en ambos miembros y obtenemos el valor de las constantes indeterminadas (a veces será necesario resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas).

Además de los cinco casos, están los que son suma o producto de ellos, cuyas soluciones particulares son las sumas o productos de las respectivas soluciones.

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Métodos de Variación de Parámetros

Para calcular Y_P con este método, reemplazamos en la solución general de la homogénea asociada a las constantes C_1 y C_2 por funciones de x:

$$Y_{GH} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Las funciones y_1 e y_2 dependen de las raíces de la ecuación característica.

$$Y_P = v_1(x) y_1(x) + v_2(x) y_2(x)$$

En Y_P, tanto y_1 e y_2 como v_1 y v_2 son funciones que dependen de x.

v_1 y v_2 serán las incógnitas.

Por simplicidad, escribiremos:

$$Y_P = v_1\, y_1 + v_2\, y_2$$

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

En Y_P hay dos incógnitas, entonces se necesitarán **dos condiciones**:

1. Que Y_P verifique la EDO no homogénea (que sea solución).
2. En la derivada de Y_P: $Y_P' = v_1' \, y_1 + v_1 \, y_1' + v_2' \, y_2 + v_2 \, y_2'$, para simplificar los cálculos, se introduce una condición arbitraria: $v_1' \, y_1 + v_2' \, y_2 = 0$

Resumiendo:

$Y_P = v_1 \, y_1 + v_2 \, y_2$

$Y_P' = v_1 \, y_1' + v_2 \, y_2'$ (por la segunda condición).

$Y_P'' = v_1' \, y_1' + v_1 \, y_1'' + v_2' \, y_2' + v_2 \, y_2''$

Sustituyendo en la EDO no homogénea y, por la primera condición:

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

$$v_1' \, y_1' + v_1 \, y_1'' + v_2' \, y_2' + v_2 \, y_2'' + p(v_1 \, y_1' + v_2 \, y_2') + q(v_1 \, y_1 + v_2 \, y_2) = r(x)$$

$$v_1' \, y_1' + v_1 \, y_1'' + v_2' \, y_2' + v_2 \, y_2'' + pv_1 \, y_1' + pv_2 \, y_2' + qv_1 \, y_1 + qv_2 \, y_2 = r(x)$$

$$v_1 \, y_1'' + pv_1 \, y_1' + qv_1 \, y_1 + v_2 \, y_2'' + pv_2 \, y_2' + qv_2 \, y_2 + v_1' \, y_1' + v_2' \, y_2' = r(x)$$

$$v_1 \underbrace{(y_1'' + p \, y_1' + q \, y_1)}_{0} + v_2 \underbrace{(y_2'' + p \, y_2' + q \, y_2)}_{0} + v_1' \, y_1' + v_2' \, y_2' = r(x)$$

$$\begin{cases} v_1' \, y_1 + v_2' \, y_2 = 0 \\ v_1' y_1' + v_2' \, y_2' = r(x) \end{cases} \quad \rightarrow \quad \text{Por la segunda condición}$$

Y tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: v_1' y v_2'

ATENCIÓN: son las derivadas de v_1 y v_2

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Resolviendo:

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ r(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}, \qquad v_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & r(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

Determinante Wronsquiano $\neq 0$ ya que y_1 e y_2 son linealmente independientes.

El sistema, entonces tiene solución única:

$$v_1' = -\frac{y_2 \cdot r(x)}{W} \to \boxed{v_1 = -\int \frac{y_2 \cdot r(x)}{W}\, dx}, \qquad v_2' = \frac{y_1 \cdot r(x)}{W} \to \boxed{v_2 = \int \frac{y_1 \cdot r(x)}{W}\, dx}$$

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Sustituyendo en $Y_P = v_1\, y_1 + v_2\, y_2$ obtenemos la solución particular.

Luego, sumando Y_{GH}, obtenemos la solución general de la no homogénea.

IMPORTANTE:

- El método de **coeficientes indeterminados** se aplica sólo en los casos en los que $r(x)$ es constante, polinómica, exponencial, sinusoidal o una combinación de sumas y productos de ellas.
- El método de **variación de parámetros** sirve para cualquier caso de $r(x)$ pero si $W \neq 1$, las funciones a integrar suelen resultar muy complicadas.

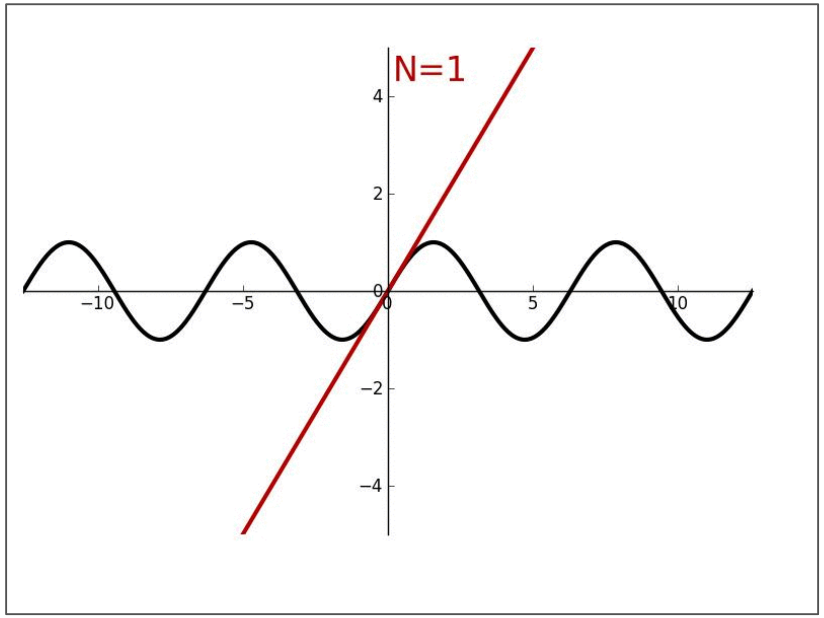
Análisis Matemático II

Series de Fourier

Series de Fourier

Introducción

Vimos que muchas funciones pueden desarrollarse en series de potencias de acuerdo a la Fórmula de Taylor.



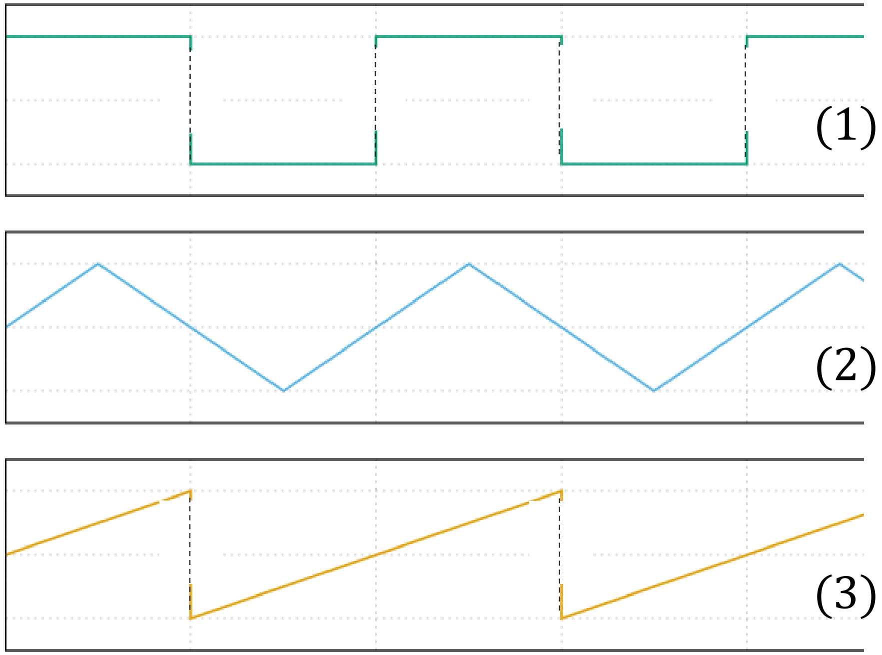
Los coeficientes de la Serie de Taylor de una función f, son derivadas sucesivas de dicha función en un punto a. Por lo tanto, será condición que f sea continua y sucesivamente derivable en el punto a.

Gráficamente, se trata de curvas continuas y «suaves» sin picos, vértices o saltos bruscos (discontinuidades).

¿Y qué pasa si f es discontinua o al menos no derivable?

Series de Fourier

El pulso rectangular (1), triangular (2) y dientes de sierra (3), entre otros, no pueden ser desarrollados en series de potencias. No obstante hay una característica común: se trata de funciones periódicas.



Sobre las funciones periódicas y continuas a trozos podemos aplicar desarrollos en series de senos y cosenos conocidos como **Series Trigonométricas de Fourier**.

Jean-Baptiste Joseph Fourier fue un matemático y físico francés conocido por sus trabajos sobre estos desarrollos con los que consiguió resolver la ecuación del calor.

Series de Fourier

Sabemos que una función $f(t)$ es continua en un punto $a \in \mathcal{D}_f$, si y solo si:

1. Existe $f(a)$
2. Existe $\lim_{t \to a} f(t)$
3. $\lim_{t \to a} f(t) = f(a)$

$f(t)$ es continua en un intervalo, si y sólo si es continua en todos los puntos del intervalo.

Las funciones rectangular (1) y dientes de sierra (3) no son continuas en todos sus puntos. La función triangular (2), lo es (aunque no es derivable en sus vértices).

Una función $f(t)$ es periódica, de período T, si y sólo si, $f(t) = f(t + T)$ para todo t.

Las funciones rectangular (1), triangular (2) y dientes de sierra (3) son periódicas (se comportan de una manera cíclica o repetitiva sobre un intervalo determinado T).

Series de Fourier

Fourier obtuvo experimentalmente la siguiente expresión:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nw_0 t) + b_n \operatorname{sen}(nw_0 t)]$$

Donde:

$$(*) \begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\ dt \\ a_n = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \cos(nw_0 t)\ dt \\ b_n = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \operatorname{sen}(nw_0 t)\ dt \end{cases}$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Se denomina **frecuencia fundamental** y los múltiplos de ella, nw_0, se denominan **armónicos**.

Los límites de integración deben incluir un período completo si el período va de 0 a π, por ejemplo, podemos integrar entre $-\pi/2$ y $\pi/2$)

Series de Fourier

Toda función periódica $f(t)$ que cumple que:

1. $f(t)$ es periódica de período T.
2. $f(t)$ es continua a trozos en $[-T/2,\ T/2]$.
3. $|f(t)|$ está acotada en $[-T/2,\ T/2]$.

Condiciones de Dirichlet

se puede desarrollar en una serie trigonométrica llamada **Serie de Fourier** y, en cualquier punto t en el intervalo $[-T/2,\ T/2]$, resulta:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nw_0 t) + b_n \operatorname{sen}(nw_0 t)]$$

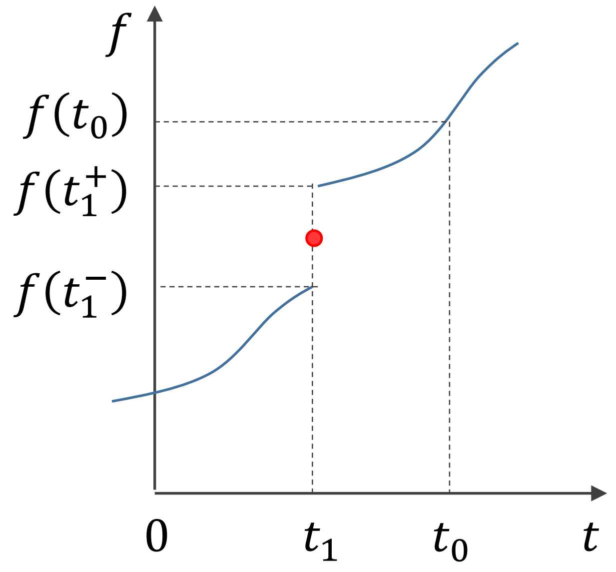
con los coeficientes dados en $(*)$.

Series de Fourier

Si la función $f(t)$ cumple con las condiciones de Dirichlet la serie trigonométrica es convergente y converge a:

$f(t_0)$ si t_0 es un punto de continuidad de la función.

$\dfrac{f(t_1^-) + f(t_1^+)}{2}$ si t_1 es un punto de discontinuidad de la función.



Cuando se trata de funciones no periódicas, podemos estudiarlas en un intervalo de amplitud T, definiéndolas fuera del intervalo como periódica. Las Series de Fourier son aplicables a un grupo amplio de funciones: vibraciones sonoras o mecánicas, propagación de corriente eléctrica y ondas telegráficas, conducción de calor, etc.

Series de Fourier

Determinación de los coeficientes de la Serie

Usando las identidades en el recuadro, se puede demostrar que:

$$\int_{-T/2}^{T/2} sen\, nx \cos kx\, dx = 0 \qquad \int_{-T/2}^{T/2} \cos nx \cos kx\, dx = 0\,, \quad n \neq k$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos nx\, sen\, kx\, dx = 0 \qquad \int_{-T/2}^{T/2} sen\, nx\, sen\, kx\, dx = 0\,, \quad n \neq k$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos nx \cos kx\, dx = \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2 nx\, dx = \frac{T}{2}, \quad n = k$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} sen\, nx\, sen\, kx\, dx = \int_{-T/2}^{T/2} sen^2\, nx\, dx = \frac{T}{2}, \quad n = k$$

$^{(**)}$ Usaremos estas fórmulas (no vamos a demostrarlas).

Podríamos probar estas fórmulas usando:

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$sen\,\alpha\, sen\,\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$sen\,\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[sen(\alpha+\beta) + sen(\alpha-\beta)]$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$sen^2\,\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

Series de Fourier

1. Cálculo del coeficiente a_0: integremos $f(t)$ en el intervalo $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, dt}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nw_0 t) + b_n \operatorname{sen}(nw_0 t)]\right] dt$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{a_0}{2}\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} a_n \cos(nw_0 t)\, dt + \int_{-T/2}^{T/2} b_n \operatorname{sen}(nw_0 t)\, dt\right]$$

Recordemos que $w_0 = \frac{2\pi}{T}$ y calculemos las tres integrales:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \frac{a_0}{2}\, dt = \frac{a_0}{2} \cdot t\Big|_{-T/2}^{T/2} = a_0 \cdot \frac{T}{2}$$

finalmente

$$\int_{-T/2}^{T/2} a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt = \frac{a_n T}{2n\pi}\, sen\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)\Bigg|_{-T/2}^{T/2} = 0, \int_{-T/2}^{T/2} b_n\, sen\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt = -\frac{b_n T}{2n\pi} \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)\Bigg|_{-T/2}^{T/2} = 0$$

Series de Fourier

2. Cálculo del coeficiente a_n

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nw_0 t) + b_n \operatorname{sen}(nw_0 t)]$$

Multipliquemos ambos miembros por $cos(nw_0 t)$ e integremos $f(t) \cdot cos(nw_0 t)$en el intervalo $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$

$$f(t) \cdot cos(nw_0 t) = \frac{a_0}{2} \cdot cos(nw_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nw_0 t)\, cos(nw_0 t) + b_n \operatorname{sen}(nw_0 t)\, cos(nw_0 t)]$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot cos(nw_0 t)\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} \left[\underbrace{\frac{a_0}{2} \cdot cos(nw_0 t)}_{=\ 0} + \sum_{n=1}^{\infty} [\underbrace{a_n \cos^2(nw_0 t)}_{=\ a_n \frac{T}{2}} + \underbrace{b_n \operatorname{sen}(nw_0 t)\, cos(nw_0 t)}_{=\ 0}] \right] dt$$

por las fórmulas (**)

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot cos(nw_0 t)\, dt}$$

Series de Fourier

3. Cálculo del coeficiente b_n

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nw_0 t) + b_n \operatorname{sen}(nw_0 t)]$$

Multiplicamos ambos miembros por $sen(nw_0 t)$ e integremos $f(t) \cdot sen(nw_0 t)$en el intervalo $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$

$$f(t) \cdot sen(nw_0 t) = \frac{a_0}{2} \cdot sen(nw_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nw_0 t)\, sen(nw_0 t) + b_n \operatorname{sen}(nw_0 t)\, sen(nw_0 t)]$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot sen(nw_0 t)\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} \left[\underbrace{\frac{a_0}{2} \cdot sen(nw_0 t)}_{=\ 0} + \sum_{n=1}^{\infty} [\underbrace{a_n \cos(nw_0 t)\, sen(nw_0 t)}_{=\ 0} + \underbrace{b_n \operatorname{sen}^2(nw_0 t)}_{=\ b_n \frac{T}{2}}]\right] dt$$

por las fórmulas $^{(**)}$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot sen(nw_0 t)\, dt}$$

Series de Fourier

Cuando se trata de funciones pares o impares, la expresión y el cálculo de los coeficientes de la Serie se simplifica significativamente.

Recordemos algunas propiedades

1. Las gráficas de las funciones pares son simétricas respecto al eje de las ordenadas.
2. Las gráficas de las funciones impares son simétricas respecto al origen.
3. La suma de dos o más funciones pares, es otra par.
4. La suma de dos o más funciones impares, es otra impar.
5. El producto de dos funciones pares o impares, es otra función par.
6. El producto de una función par y una impar, es otra función impar.

Series de Fourier

Si $f(x)$ es una función **par**, resulta $f(-x) = f(x)$, entonces:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

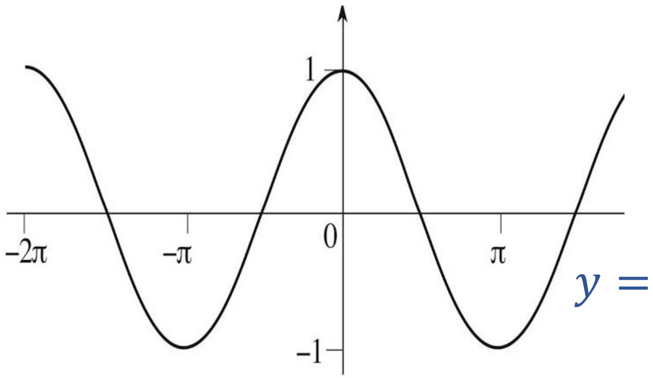
Hacemos un cambio de variable en la primera integral del segundo miembro ($x = -x,\ dx = -\,dx$) y luego invertimos los límites.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Porque $f(x)$ es par

Luego, si $f(x)$ es par, resulta:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$



$y = \cos(x)$

Series de Fourier

Si $f(x)$ es una función **impar**, resulta $f(-x) = -f(x)$, entonces:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

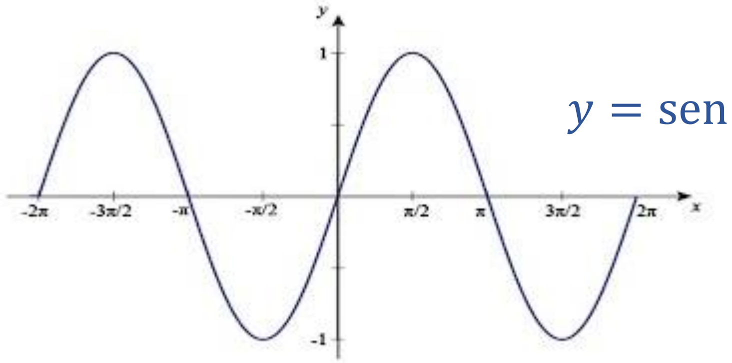
Hacemos un cambio de variable en la primera integral del segundo miembro ($x = -x,\ dx = -\,dx$) y luego invertimos los límites.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$

Porque $f(x)$ es impar

Luego, si $f(x)$ es impar, resulta:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$



$y = \mathrm{sen}(x)$

Series de Fourier

En conclusión, para funciones pares tenemos:

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\ dt$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cdot\cos(nw_0t)\ dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot\operatorname{sen}(nw_0t)\ dt = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nw_0t)}$$

Los coeficientes b_n se anulan.

Series de Fourier

Para funciones impares tenemos:

Los coeficientes a_n se anulan.

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\ dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot \cos(nw_0 t)\ dt\ = 0$$

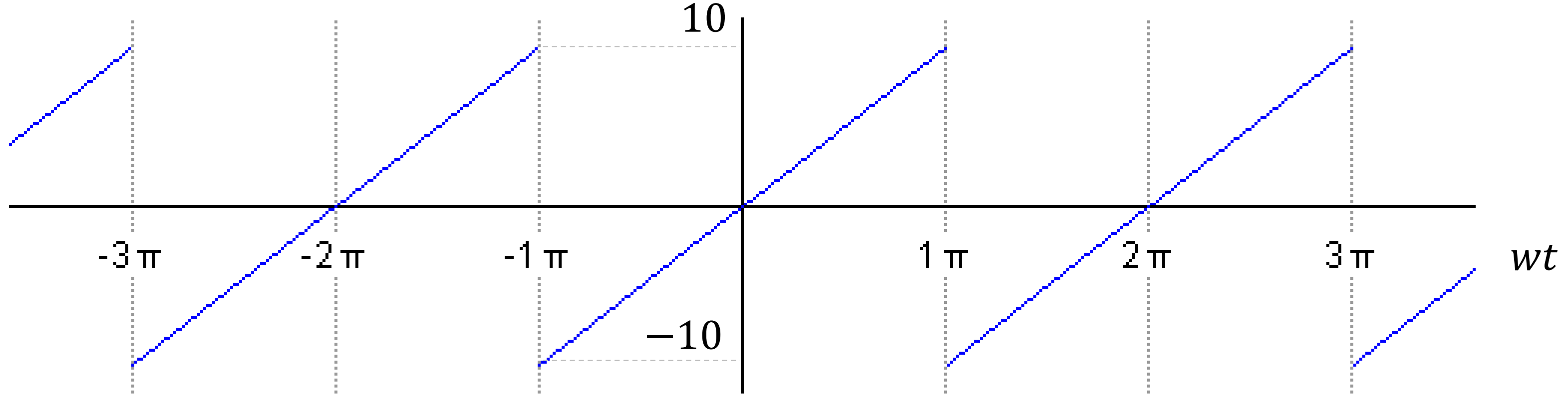
$$b_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cdot \mathrm{sen}(nw_0 t)\ dt$$

$$\Rightarrow \boxed{f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, \mathrm{sen}(nw_0 t)}$$

Series de Fourier

Ejemplo:

Desarrollar en Serie de Fourier la onda representada en la figura:



La onda es periódica de período 2π y es continua en $(-\pi, \pi)$. Presenta discontinuidades en $wt = (2n+1)\pi$, siendo $n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ Satisface las condiciones de Dirichlet y:

$f(wt) = \dfrac{10}{\pi} wt$ además, $f(t)$ es impar. Luego:

Series de Fourier

Como $f(t)$ es una función **impar**:

Se integra por partes

$$f(\omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)$$

Recordemos que $\omega_0 = 1$

$$\int x \cdot \operatorname{sen}(nx)\, dx = \frac{\operatorname{sen}(nx) - nx\cos(nx)}{n^2}$$

Calcularemos entonces sólo los coeficientes b_n:

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(\omega t)\cdot \operatorname{sen}(n\omega t)\ d(\omega t) \rightarrow \quad b_n = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{10}{\pi}\omega t \cdot \operatorname{sen}(n\omega t)\ d(\omega t)$$

$$b_n = \frac{20}{\pi^2}\int_0^{\pi} \omega t \cdot \operatorname{sen}(n\omega t)\, d(\omega t)$$

Son todos cero

$$b_n = \frac{20}{\pi^2}\left[\frac{sen(n\omega t) - n\omega t\, cos(n\omega t)}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$b_n = -\frac{20}{n\pi^2}\left[\pi\, cos(n\pi) - 0\, cos(n0)\right] \quad \rightarrow \quad \boxed{b_n = (-1)^{n+1}\frac{20}{n\pi}}$$

Series de Fourier

Escribamos algunos términos de la Serie de Fourier:

$$f(\omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nt), \qquad b_n = (-1)^{n+1}\frac{20}{n\pi}$$

$$f(\omega t) = \frac{20}{\pi}\operatorname{sen}(t) - \frac{20}{2\pi}\operatorname{sen}(2t) + \frac{20}{3\pi}\operatorname{sen}(3t) - \frac{20}{4\pi}\operatorname{sen}(4t) + \frac{20}{5\pi}\operatorname{sen}(5t) - \cdots$$

Amplitudes de los términos de la serie

$$f(\omega t) \cong \frac{20}{\pi}\operatorname{sen}(t) - \frac{10}{\pi}\operatorname{sen}(2t) + \frac{20}{3\pi}\operatorname{sen}(3t) - \frac{5}{\pi}\operatorname{sen}(4t) + \frac{4}{\pi}\operatorname{sen}(5t)$$

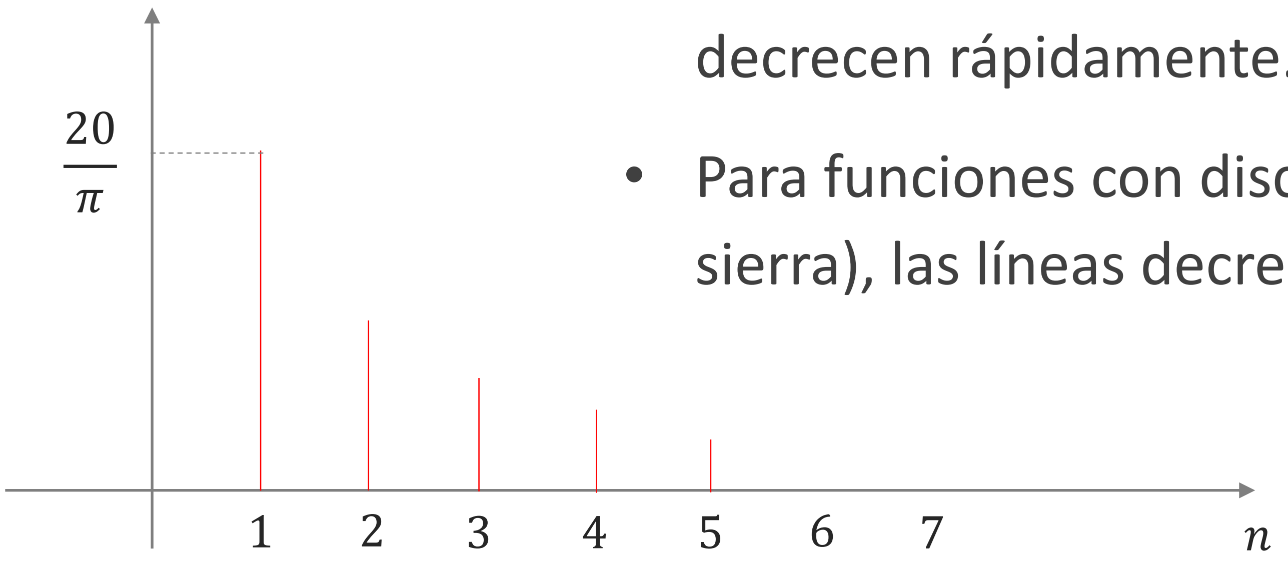
2°, 3°,… armónicos de la serie

Series de Fourier

El Espectro de Líneas

Es la representación gráfica de las amplitudes de los distintos armónicos de la serie.

Sirve como indicador de la rapidez con la que converge la serie.



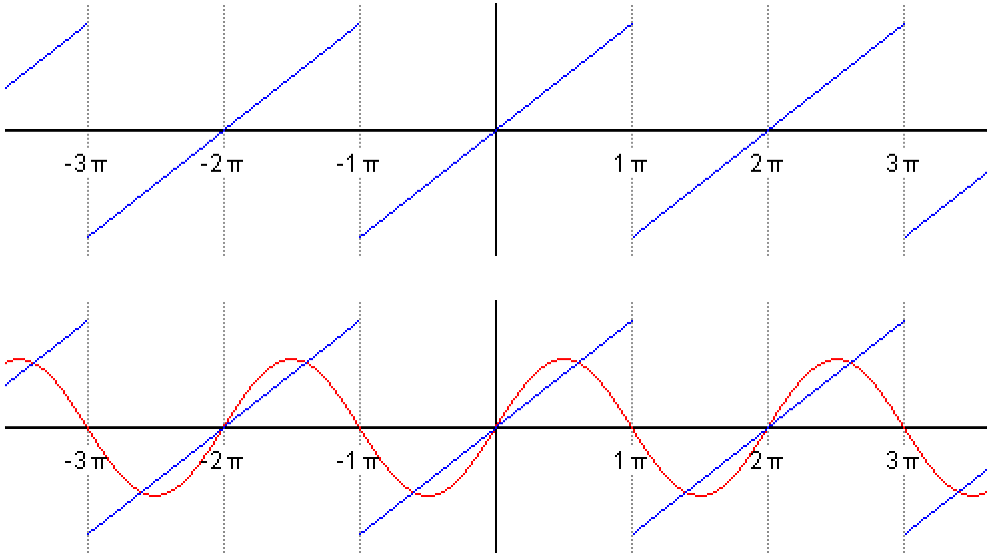
- Para funciones sin discontinuidades («suaves»), las líneas decrecen rápidamente.
- Para funciones con discontinuidades (por ejemplo, dientes de sierra), las líneas decrecen lentamente.

Series de Fourier

Síntesis de ondas

Es la reconstrucción de la función de onda a partir de los primeros términos de la serie.

Podemos ver que la serie representa realmente la función periódica, construyendo la tabla correspondiente y volcando dichos valores en un gráfico.



Series de Fourier

Forma Exponencial de la Serie de Fourier

Otra forma de escribir la expresión de la Serie de Fourier es en forma exponencial. En la descripción de muchos problemas, esta forma resulta conveniente:

Usando las fórmulas de Euler:

$$cos\, u = \frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2}, \quad i\, sen\, u = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2}, \quad e^{iu} = cos\, u + i\, sen\, u\,, \quad e^{-iu} = cos\, u - i\, sen\, u$$

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n\, e^{inw_0 t}\,, \qquad c_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-inw_0 t}\, dt}$$

Series de Fourier

Demostración:

Para $n > 0$

$$c_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,(cos\, nw_0 t - i\ sen\, nw_0 t)\ dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, cos\, nw_0 t\ \ dt - i\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, sen\, nw_0 t\ \ dt$$

$$= \frac{a_n}{2} - i\frac{b_n}{2}$$

Para $n < 0$

$$c_n = \frac{a_n}{2} + i\frac{b_n}{2}$$

Series de Fourier

De donde deducimos que, para $n = 0$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n\, e^{inw_0t} = c_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n\, e^{inw_0t} + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_{-n}\, e^{-inw_0t}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{a_n}{2} - i\,\frac{b_n}{2}\right) e^{inw_0t} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{a_n}{2} + i\,\frac{b_n}{2}\right) e^{-inw_0t}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n\, \frac{e^{inw_0t} + e^{-inw_0t}}{2} - i \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n\, \frac{e^{inw_0t} - e^{-inw_0t}}{2}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos nw_0t - i \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n\, i\, sen\, nw_0t = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cos nw_0t + b_n\, sen\, nw_0t)$$

Análisis Matemático II

Ecuaciones Diferenciales a Derivadas Parciales

Ecuaciones Diferenciales a Derivadas Parciales

Introducción

Son aquellas ecuaciones que contienen una función de varias variables independientes y al menos alguna de sus derivadas parciales.

Por ejemplo, en el caso de una función de dos variables independientes, la expresión general implícita de una EDP de Primer Orden es de la forma:

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

Y la de una EDP de Segundo Orden es de la forma:

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0$$

Ecuaciones Diferenciales a Derivadas Parciales

Resolver estas ecuaciones diferenciales se complica mucho más que resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, pues la Solución General de las EDO contiene constantes arbitrarias; en cambio, la Solución General de las EDP contiene **funciones arbitrarias**.

Por ser de uso muy habitual en fenómenos que interesan a la ingeniería, centraremos nuestro estudio en las EDP Lineales de Segundo Orden y de primer grado, que tienen como solución una función $u(x, y)$ con 2 variables independientes.

En su forma más general, estas EDP se representan:

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

Lo que permite clasificarlas en tres tipos:

Ecuaciones Diferenciales a Derivadas Parciales

ELÍPTICAS si $B^2 - 4AC < 0$

Modelan sistemas en estado estacionario (no dependen del tiempo).

Ejemplo: problemas sobre campos eléctricos y magnéticos, problemas térmicos estacionarios.

Ecuación típica: Ecuación de Laplace.

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

PARABÓLICAS si $B^2 - 4AC = 0$

Modelan sistemas en estado transitorio (dependen de t), pero se estabilizan para $t \to \infty$.

Ejemplo: problemas de propagación de calor, filtración de líquidos y gases en medios porosos.

Ecuaciones Diferenciales a Derivadas Parciales

Ecuación típica: Ecuación de Conducción de Calor o Ecuación de Fourier.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

HIPERBÓLICAS si $B^2 - 4AC > 0$

Modelan sistemas en estado transitorio oscilatorio (dependen de t) y nunca se estabilizan.

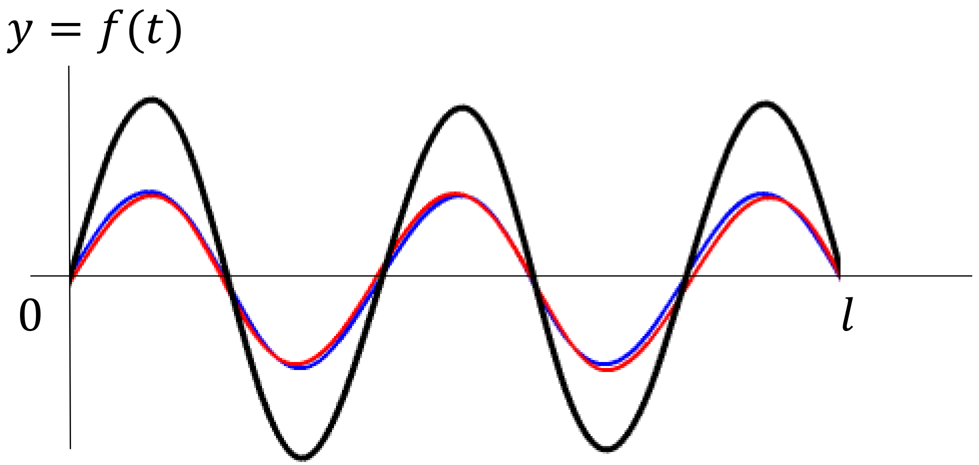
Ejemplo: vibraciones transversales de una cuerda, oscilaciones eléctricas en un conductor.

Ecuación típica: Ecuación de Ondas de D'Alembert.

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

Ecuaciones Diferenciales a Derivadas Parciales

Estudiemos un ejemplo típico de este último tipo: una *cuerda vibrante.*

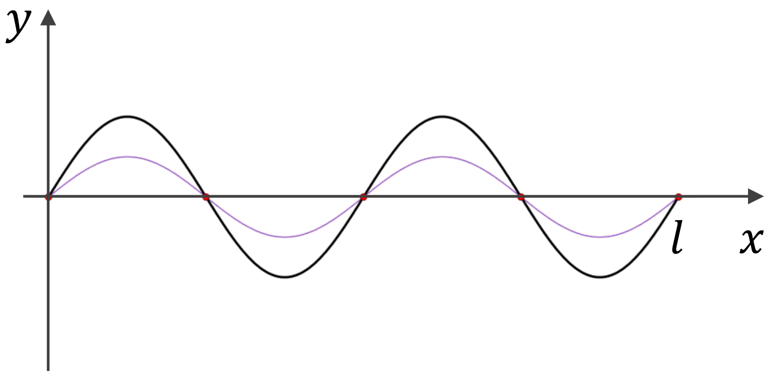


Como cuerda entendemos un hilo o alambre flexible y elástico. Consideremos una cuerda de longitud l extendida entre dos puntos del eje x que se aparta de su posición de equilibrio haciéndola tomar la forma de cierta curva $y = f(x)$ y en el instante $t = 0$ se la deja en libertad, comenzando ésta a oscilar.

Una cuerda al vibrar, produce **ondas estacionarias.**

Ecuaciones Diferenciales a Derivadas Parciales

Llamaremos **onda estacionaria** al fenómeno vibratorio de un punto, resultante de la superposición de dos ondas progresivas, de igual frecuencia e igual amplitud, pero que se propagan en sentidos opuestos (la de color rojo y azul en la imagen).
El problema consiste en determinar la posición de cada punto P de la cuerda en cada instante de tiempo $t > 0$.



Consideremos a los puntos moverse en el plano xy y sólo en la dirección de y (la función de color negro en la imagen). Vamos a despreciar las fuerzas de amortiguamiento, considerar que la tensión T es tangencial a la cuerda en todo punto y que la densidad ρ de la cuerda es uniforme y c depende de la elasticidad de la cuerda.

Es interesante mencionar, que las ondas estacionarias se producen en medios acotados.

Ecuaciones Diferenciales a Derivadas Parciales

Para la determinación completa del movimiento de la cuerda, la función buscada $y(x,t)$ debe satisfacer además las condiciones de frontera, que describen lo que sucede en $x = 0$ y $x = l$ y las condiciones iniciales que describen el estado de la cuerda en $t = 0$.

Supongamos los extremos fijos para cualquier valor de tiempo, es decir:

$$y(0,t) = y(l,t) = 0$$

Y en el instante $t = 0$ la cuerda tiene la forma dada por:

$$y(x,0) = f(x)$$

Y que se imprime una velocidad $g(x)$ a cada punto en el instante inicial, es decir:

$$\frac{\partial y(x,0)}{\partial t} = g(x)$$

Ecuaciones Diferenciales a Derivadas Parciales

Solución por el Método de Separación de Variables (método de Fourier)

Para hallar la solución buscamos, en un principio, soluciones particulares de la EDP que satisfagan las condiciones de frontera en la forma de dos funciones $X(x)$ y $T(t)$, es decir:

$$y(x,t) = X(x)\,T(t)$$

Derivemos a $y(x,t)$ dos veces respecto de x y respecto de t y la reemplacemos en la EDP:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = X''T, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = XT''$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \;\rightarrow\; XT'' - c^2X''T = 0 \;\rightarrow \frac{T''}{c^2T} = \frac{X''}{X}$$

El primer miembro no depende de x y el segundo no depende de t. La igualdad se verifica sólo si ambos miembros son iguales a una constante que llamaremos $-\lambda^2$.

Ecuaciones Diferenciales a Derivadas Parciales

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

De esta manera, podemos obtener las siguientes ecuaciones:

$$T'' + \lambda^2 c^2 T = 0$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

Estas son dos EDO Lineales Homogéneas de Segundo Orden a coeficientes constantes y las raíces de sus ecuaciones característica son complejas conjugadas, por lo tanto:

$$T = A\cos(c\lambda t) + B\,\mathrm{sen}(c\lambda t)$$

$$X = C\cos(\lambda x) + D\,\mathrm{sen}(\lambda x)$$

Donde A, B, C y D son constantes arbitrarias. Determinemos C y D aplicando condiciones de frontera: $y(0,t) = y(l,t) = 0$

Ecuaciones Diferenciales a Derivadas Parciales

$X(0) = C \cdot 1 + D \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$

$X(l) = C \cdot \cos(\lambda l) + D \operatorname{sen}(\lambda l) \ \ \Rightarrow \ D \operatorname{sen}(\lambda l) = 0$

$D \neq 0$ puesto que, de lo contrario sería $X(x) = 0$, es decir $y(x,t) = 0$ que es una cuerda en reposo y esto contradice la hipótesis. Entonces debe verificarse que:

$$\operatorname{sen}(\lambda l) = 0 \ \Rightarrow \ \lambda = \frac{n\pi}{l} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Los valores de λ se llaman **valores propios** del problema de frontera y las correspondientes **funciones propias** son: $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

Reemplazando en la Solución para $X(x)$ obtenemos:

$$\boxed{X(x) = D_n\, sen\left(\frac{n\pi}{l}x\right)}$$

Ecuaciones Diferenciales a Derivadas Parciales

Conociendo λ la reemplacemos en la Solución para $T(t)$:

$$\boxed{T(t) = A_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi}{l}t\right)}$$

Luego:

$$y_n(x,t) = D_n\, sen\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left[A_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi}{l}t\right)\right] \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$y_n(x,t) = sen\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left[a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi}{l}t\right)\right] \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Como la EDP es lineal y homogénea, la suma de las soluciones es también solución:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} sen\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left[a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi}{l}t\right)\right] \qquad (I)$$

Ecuaciones Diferenciales a Derivadas Parciales

Para determinar a_n y b_n debemos tener en cuenta las condiciones iniciales:

$$y(x,0) = f(x), \qquad \frac{\partial y(x,0)}{\partial t} = g(x)$$

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} sen\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left[a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l}0\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi}{l}0\right)\right] = f(x)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, sen\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$\frac{\partial y(x,0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} sen\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\frac{cn\pi}{l}\right)\left[-a_n \operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi}{l}0\right) + b_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l}0\right)\right] = g(x)$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, sen\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\frac{cn\pi}{l}\right)$$

Ecuaciones Diferenciales a Derivadas Parciales

Según el desarrollo en Serie de Fourier:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, sen\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \quad \rightarrow \quad \boxed{a_n = \frac{1}{l}\int_{-l/2}^{l/2} f(x)\ sen\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, sen\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\frac{cn\pi}{l}\right)$$

$$g(x)\left(\frac{l}{cn\pi}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, sen\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \rightarrow \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l/2}^{l/2} g(x)\left(\frac{l}{cn\pi}\right) sen\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{cn\pi}\int_{-l/2}^{l/2} g(x)\, sen\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx}$$

Reemplazando en (I) se obtiene la solución buscada.

Ecuaciones Diferenciales a Derivadas Parciales

En forma análoga, se puede aplicar el método de separación de variables de Fourier, para calcular las soluciones generales en los casos de las ecuaciones Ecuación de Laplace:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0}$$

haciendo $u(x,y) = X(x).Y(y)$ para posteriormente aplicar las condiciones de frontera.

Y también para la Ecuación de Conducción de Calor o Ecuación de Fourier.

$$\boxed{\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - c^2 \, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0}$$

haciendo $u(x,t) = X(x).T(t)$ para posteriormente aplicar las condiciones iniciales y de frontera.