CAPÍTULO 5

INTEGRALES MÚLTIPLES

INTEGRALES MÚLTIPLES

El concepto de Integral Definida puede ser generalizado a las Integrales Múltiples.
Así como las Integrales Definidas permiten calcular áreas, veremos que por medio de la Integrales Múltiples podemos obtener volúmenes, centros de gravedad, masas, momentos de inercia, etc..
Antes de comenzar recordemos que en Análisis Matemático I se estudió el cálculo de volumen de un cuerpo mediante la Integral definida:

Cálculo de volumen con Integrales Definidas

$$\boxed{V = \int_a^b F(x)dx} \qquad (1)$$

Donde $F(x)$ es el área de una sección transversal del cuerpo, obtenida mediante cortes efectuados en el cuerpo en dirección perpendicular al eje "x".
Recordemos su demostración

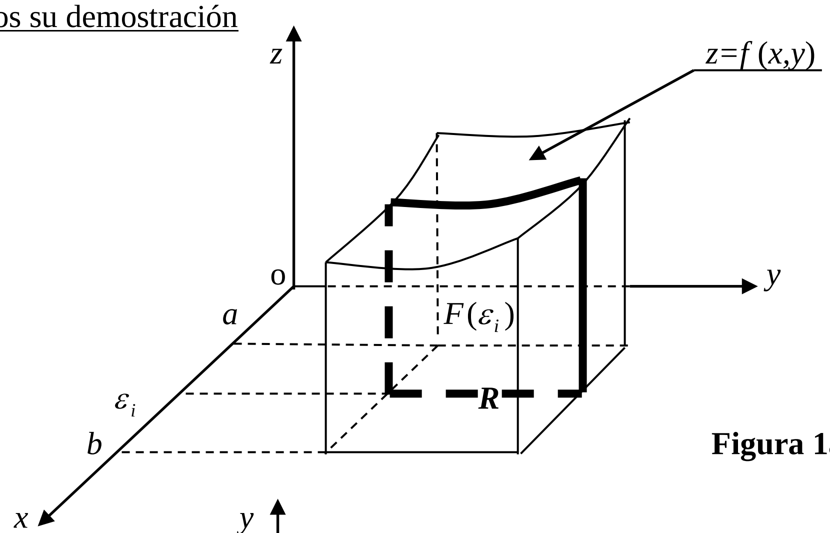


Figura 1a

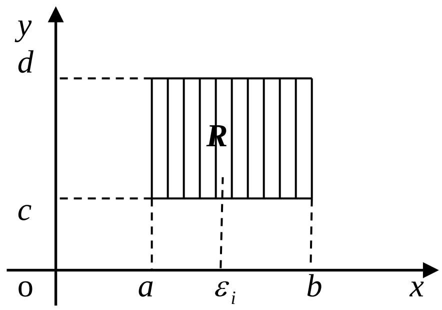
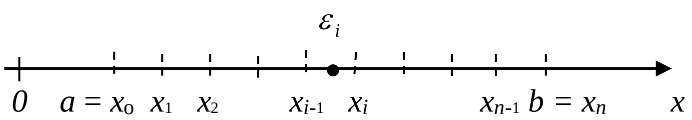


Figura 1b

Calculemos el volumen del cuerpo comprendido entre la función $z = f(x,y)$ y el rectángulo R de la Figura 1. Dividimos al intervalo $[a,b]$ en "n" partes por los puntos $x_0 = a, x_1, x_2, \dots\dots\dots, x_n = b$ y cortamos por estos puntos al cuerpo en rebanadas perpendiculares al eje "x".



Sea ε_i un punto intermedio entre los puntos x_i y x_{i-1}, es decir $x_{i-1} \le \varepsilon_i \le x_i$, el área de la rebanada en ese punto es $F(\varepsilon_i)$, y el volumen de la rebanada es aproximadamente:

$$V_i \cong F(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Siendo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ el espesor de la rebanada. Y el volumen total del cuerpo es aproximadamente:

$$V \cong \sum_{i=1}^{n} F(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

El valor exacto del volumen se obtiene tomando límite para $n \to \infty$ es decir para cuando $\text{máx}\Delta x \to 0$:

$$V = \lim_{\text{máx}\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\varepsilon_i)\Delta x_i = \int_a^b F(x)dx$$

Siendo "$\text{máx}\Delta x$" la longitud del subintervalo más largo de la subdivisión.

INTEGRALES DOBLES EN DOMINIOS RECTANGULARES

Consideremos la función $z = f(x, y)$ definida en el dominio rectangular $R = [a,b]\times[c,d]$ de la Figura 2a

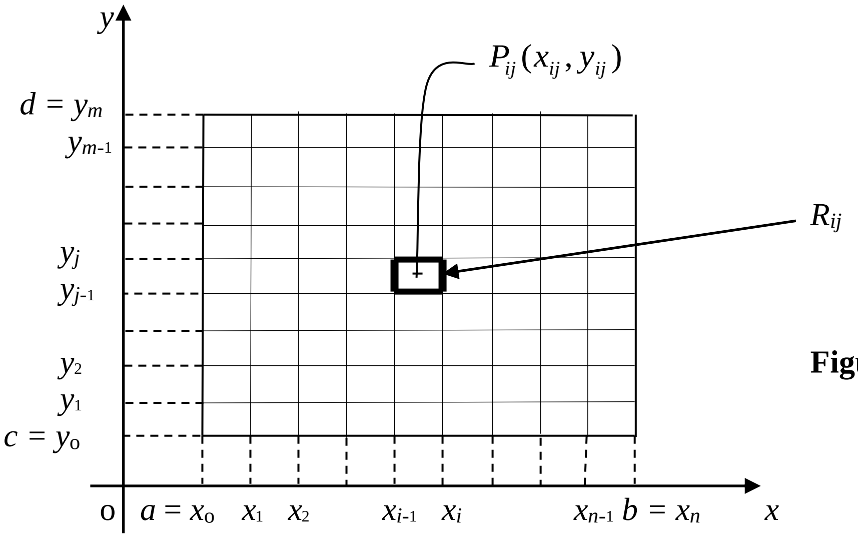


Figura 2a

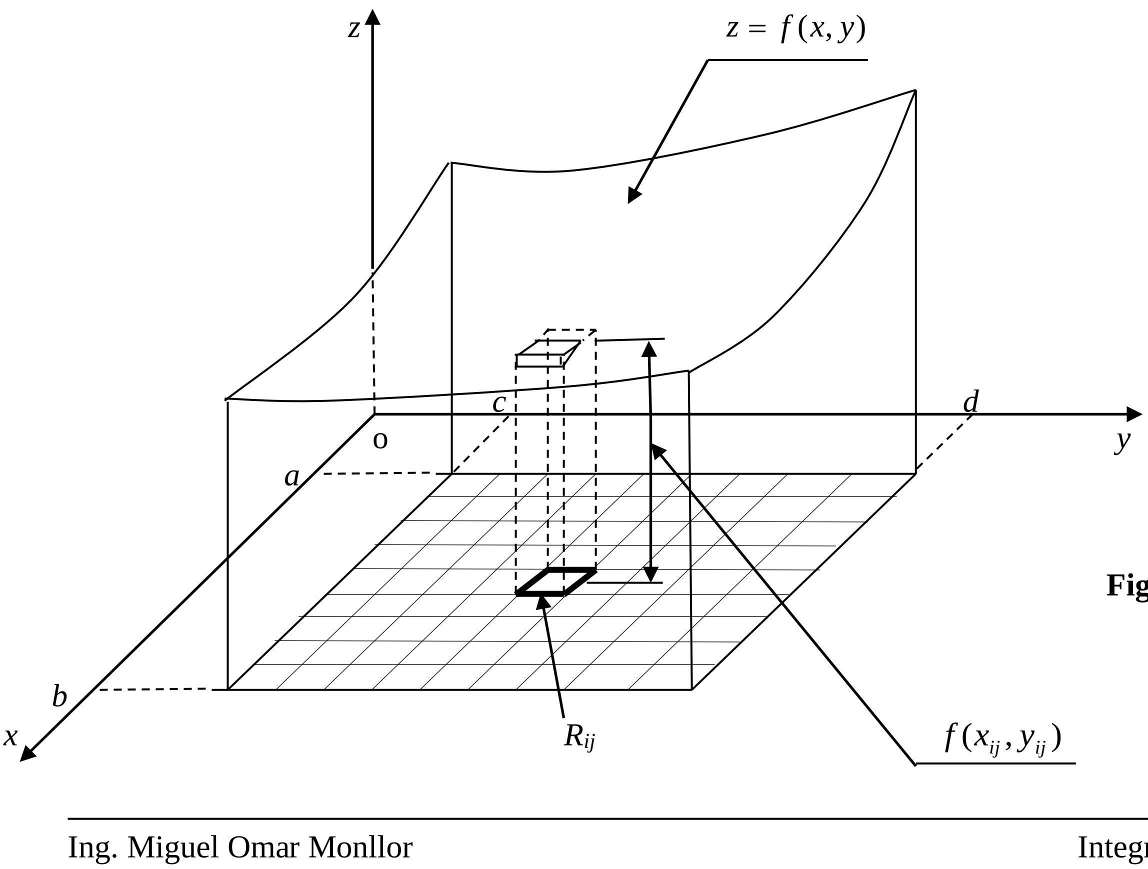


Figura 2b

Dividimos al intervalo $[a,b]$ en "n" partes por los puntos $x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_n = b$
y al intervalo $[c,d]$ en "m" partes por los puntos $y_0 = c, y_1, y_2, ..., y_m = d$
Consideramos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$
El área del rectángulo R_{ij} será: $\Delta A_{ij} = \Delta x_i . \Delta y_j$
Elijamos un punto $P_{ij}(x_{ij}, y_{ij})$ interior a este rectángulo R_{ij} y formemos la siguiente suma (**Suma Doble de Riemann**):

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A_{ij} \qquad (2)$$

Cada término de esta suma es el volumen de un sólido de base ΔA_{ij} y altura $f(x_{ij}, y_{ij})$ y el valor de esta suma es el volumen de un cuerpo.

Definamos como "$\text{máx}\Delta A$" al área del mayor de todos los rectángulos de la subdivisión de R.
Es decir que si R_{ij} es el rectángulo de mayor área entonces $\text{máx}\Delta A = \Delta x_i . \Delta y_j$.

El límite de la sumatoria (2) para cuando $\begin{cases} n \to \infty \\ m \to \infty \end{cases}$ es decir para cuando $\text{máx}\Delta A \to 0$ es la Integral Doble de la función $f(x,y)$ en el Rectángulo R:

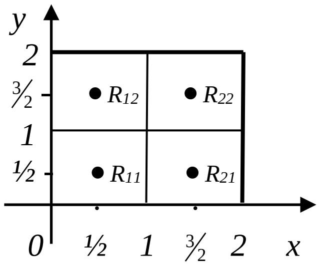
$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{\text{máx}\Delta A \to 0} \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A_{ij} \qquad (3)$$

Si este límite existe decimos que la función $f(x,y)$ es **integrable**.
R es el dominio de integración. Teniendo en cuenta que $\Delta A_{ij} = \Delta x_i . \Delta y_j$ la Integral Doble también se expresa:

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_R f(x,y)dxdy \qquad (4)$$

Si la función $f(x,y)$ es continua y además $f(x,y) \geq 0$ en todo el rectángulo R, esta integral es igual al volumen del cuerpo comprendido entre la superficie $z = f(x,y)$ y el rectángulo R.

Ejemplo 1:
Encontremos el valor aproximado de la integral $\iint_R (x^2 + y^2)dxdy$, siendo
$R = \{(x,y)/0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 2\}$, calculamos la doble suma de Riemann tomando cuatro subrectángulos y considerando a los puntos $P_{ij}(x_{ij}, y_{ij})$ en el centro de cada rectángulo.



$$\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A_{ij} = f(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\Delta A_{11} + f(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2})\Delta A_{12} + f(\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2})\Delta A_{21} + f(\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2})\Delta A_{22}$$

$$\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A_{ij} = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{5}{2}\cdot 1 + \frac{5}{2}\cdot 1 + \frac{9}{2}\cdot 1 = 10$$

Es decir que:

$$\iint_R (x^2 + y^2)dxdy \cong 10$$

Si en lugar de 4 subrectángulos tomamos solo1 el resultado que obtendríamos seria 8 y si tomamos 16 el resultado obtenido seria 10,5.

Como podemos comprobar, calcular las Integrales Dobles aplicando la definición; es decir subdividiendo el dominio y sumar no es tarea sencilla aún en las integrales más simples. Veamos una forma más práctica de resolver las Integrales Dobles.

CÁLCULO DE LAS INTEGRALES DOBLES

Demostraremos que las Integrales Dobles se pueden resolver mediante las llamadas Integrales Iteradas.

Integrales Iteradas (ó Reiteradas ó Sucesivas)

La siguiente expresión recibe el nombre de Integral Iterada extendida en el recinto rectangular $R = [a,b]\times[c,d]$ de la Figura 1b:

$$I_R = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx$$

Esta expresión indica que primero se resuelve la integral entre corchetes, integrando con respecto a "*y*" (entre *c* y *d*) y luego la otra integral, integrando con respecto a "*x*" (entre *a* y *b*).
Al resolver la integral entre corchetes se integra con respecto a "*y*" que varía entre $c \le y \le d$, considerando a "*x*" como constante, es decir que se realiza una **integración parcial respecto a "*y*"** y el resultado es una función de "*x*":

$$\int_c^d f(x,y)dy = F(x)$$

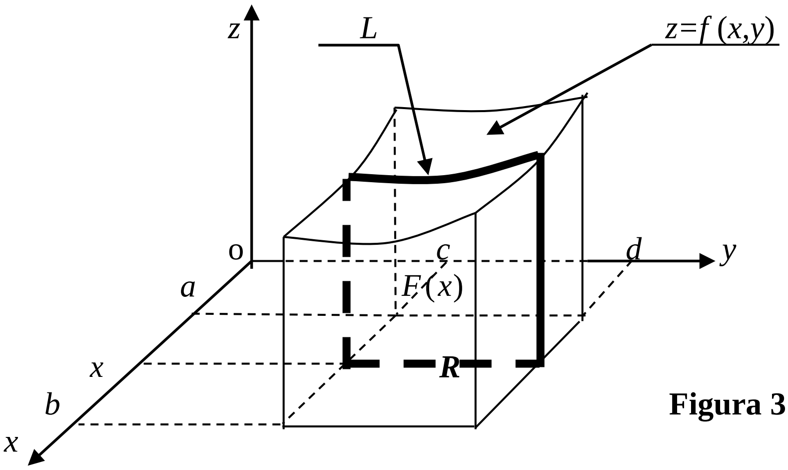


Figura 3

En la figura 3 podemos observar que $F(x)$ es el área de la figura bajo la curva L, cuya ecuación es $z = f(x,y)$. Por lo tanto resulta:

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx = \int_a^b F(x)dx$$

y por lo visto en el inicio del presente capítulo en Cálculo de Volumen con Integrales Definidas, esta Integral Definida nos calcula el volumen del cuerpo definido entre la función $z = f(x,y)$ y el recinto rectangular *R*.

De manera similar también podríamos haber planteado la Integral Iterada:

$$I_R = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy$$

Ésta establece que primero se resuelve la integral entre corchetes, integrando con respecto a "*x*" entre *a* y *b* (considerando a "y" como constante) y luego la otra integral, integrando con respecto a "*y*".
Si la función a integral es continua en el Dominio de Integración, el resultado es independiente del orden de integración.

Cálculo de las Integrales Dobles

Consideremos que $z = f(x,y)$ es una función integrable en el rectángulo $R = [a,b] \times [c,d]$.
La Integral Doble se resuelve expresándola como Integral Iterada:

$$\boxed{\iint_R f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx}$$

Hemos planteado la definición de Integral Doble extendida en el recinto *R* como el volumen del cuerpo definido entre la función $z = f(x,y)$ y dicho recinto *R* [cuando $f(x,y) \geq 0$]; y hemos demostrado que la Integral Iterada del segundo miembro nos da también ese volumen. Por lo tanto es válido resolver de esta manera las Integrales Dobles.
Para simplificar la expresión, se eliminan los corchetes y la integral se expresa así:

$$\boxed{\iint_R f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy}$$

Primero se resuelve la integral de la derecha (integrando con respecto a "*y*") y luego la de la izquierda (integrando con respecto a "*x*").
También se puede resolver la Integral Doble, invirtiendo el orden de integración:

$$\boxed{\iint_R f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy} \qquad \text{ó}$$

$$\boxed{\iint_R f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx}$$

Primero se resuelve la integral de la derecha (integrando con respecto a "*x*") y luego la de la izquierda (integrando con respecto a "*y*").

Aunque la demostración se realizó considerando $f(x,y) \geq 0$, es igualmente válido para cuando $f(x,y) < 0$, solo que en este caso la Integral Doble correspondiente no nos representa un volumen.

Cuando la función $z = f(x,y)$ toma valores tanto positivos como negativos en el Dominio de Integración, la Integral es una diferencia entre volúmenes ($V_a - V_d$), siendo V_a el volumen que está **arriba** de *R* y debajo de $z = f(x,y)$, y V_d el que está **debajo** de *R* y arriba de $z = f(x,y)$.

Ejemplo 2:

Resolvamos la misma Integral Doble del ejemplo anterior $\iint_R (x^2+y^2)dxdy$, siendo $R=\{(x,y)/0\le x\le 2 \wedge 0\le y\le 2\}$ por medio de las integrales sucesivas.

$$\iint_R (x^2+y^2)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^2 (x^2+y^2)dy=\int_0^2 dx\left|x^2y+\frac{y^3}{3}\right|_0^2=\int_0^2\left[\left(x^2.2+\frac{2^3}{3}\right)-(0+0)\right]dx$$

$$=\int_0^2\left(2x^2+\frac{8}{3}\right)dx=\left|\frac{2x^3}{3}+\frac{8x}{3}\right|_0^2=\left(\frac{16}{3}+\frac{16}{3}\right)-(0+0)=\frac{32}{3}$$

$$\boxed{\iint_R (x^2+y^2)dxdy=\frac{32}{3}}$$

Si comparamos este resultado $\iint_R (x^2+y^2)dxdy=\dfrac{32}{3}\cong 10{,}66....$, con los obtenidos en el ejemplo anterior podemos comprobar que nos acercamos cada vez más al valor exacto de la Integral Doble cuando tomamos una cantidad mayor de subrectángulos.

En este ejemplo la función es $f(x,y)=x^2+y^2\ge 0$ en todo el rectángulo, por lo tanto la Integral Doble nos representa el volumen del cuerpo comprendido entre el paraboloide $z=x^2+y^2$ y el rectángulo $R=\{(x,y)/0\le x\le 2 \wedge 0\le y\le 2\}$

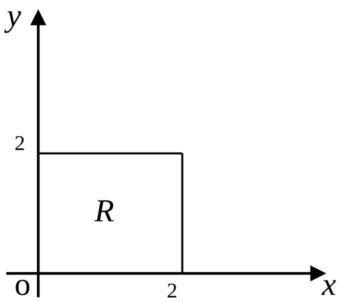


Figura 4a

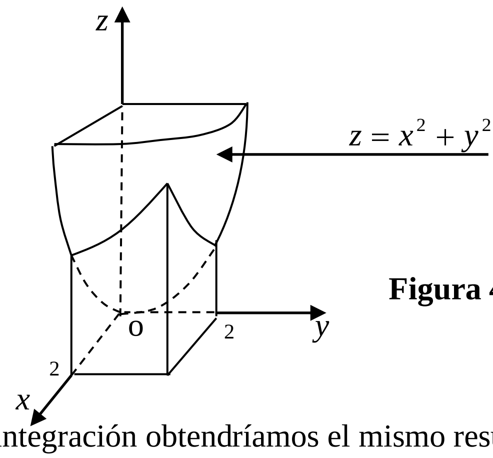


Figura 4b

Si resolviéramos la integral pero cambiando el orden de integración obtendríamos el mismo resultado:

$$\iint_R (x^2+y^2)dxdy=\int_0^2 dy\int_0^2 (x^2+y^2)dx=\frac{32}{3}$$

Ejemplo 3:

Resolvamos Integral Doble $\iint_R (y-6x)dxdy$, siendo $R=\{(x,y)/1\le x\le 3 \wedge 0\le y\le 4\}$

$$\iint_R (y-6x)dxdy=\int_0^4 dy\int_1^3 (y-6x)dx=\int_0^4 dy\left|xy-3x^2\right|_1^3=\int_0^4[(3y-27)-(y-3)]dy$$

$$=\int_0^4(2y-24)dy=\left|y^2-24y\right|_0^4=(16-96)=-80$$

El resultado negativo de la integral se debe a que la función integrada es negativa en el Dominio *R*, por lo tanto la integral no representa un volumen.

Veamos ahora como resolver Integrales Dobles en Dominios que no son rectangulares, sino que tienen una forma más general.

INTEGRALES DOBLES EN DOMINIOS GENERALES

Es común que debamos integrar no solo sobre dominios que son rectangulares, sino también sobre otros dominios *D* que tienen una forma más general.
Utilizaremos lo aprendido para resolver este tipo de Integrales Dobles.
Sea tener que resolver la Integral Doble de la función $f(x, y)$ extendida sobre el dominio *D* de la Figura 5, tomamos un rectángulo *R* que contenga a este dominio y consideramos definida en este rectángulo la función $g(x, y)$ tal que:

$g(x, y) = f(x, y)$ dentro del dominio *D*

$g(x, y) = 0$ dentro del rectángulo *R*, pero fuera del dominio *D*

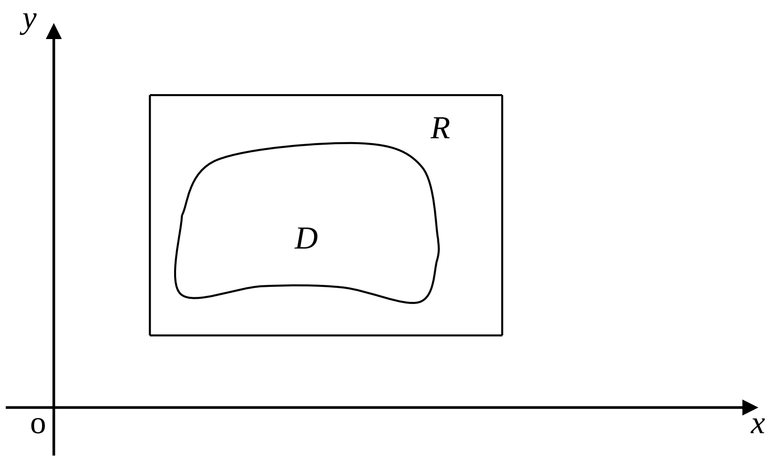


Figura 5

Dado que $g(x, y) = 0$ fuera del dominio *D* podemos plantear la siguiente igualdad:

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_R g(x, y)dxdy$$

Si se cumple que $f(x, y) \geq 0$ en todo el dominio *D* entonces esta integral nos da el volumen del cuerpo definido entre la superficie $z = f(x, y)$ y el dominio *D*.

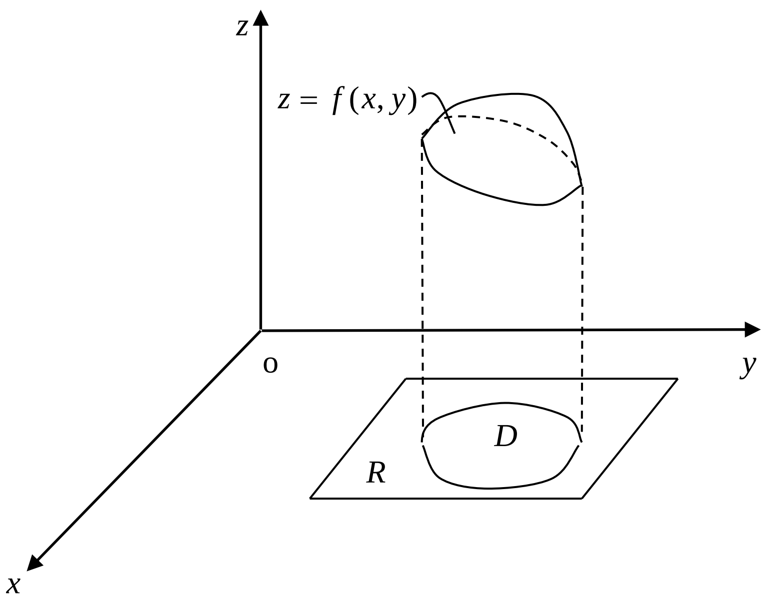


Figura 6

Supongamos un dominio *D* como el de la figura:

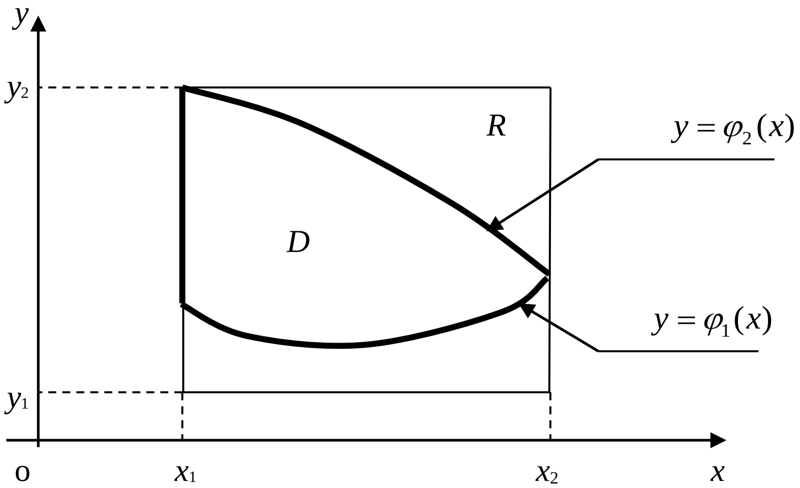


Figura 7

La Integral Dobles extendida en el rectángulo *R* se resuelve:

$$\iint_R g(x,y)dxdy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} g(x,y)dy$$

Pero fuera del dominio *D* es decir para $y < \varphi_1(x)$ y para $y > \varphi_2(x)$ la función es $g(x,y) = 0$, y dentro del dominio es $g(x,y) = f(x,y)$ por lo tanto:

$$\iint_R g(x,y)dxdy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} g(x,y)dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

Y entonces si la función $f(x,y)$ es continua en el dominio *D* la Integral Doble resulta:

$$\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy}$$

Ahora si el Dominio resulta de la forma indicada en el siguiente gráfico, razonando de la misma manera podremos deducir que la integral se resuelve así:

$$\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx}$$

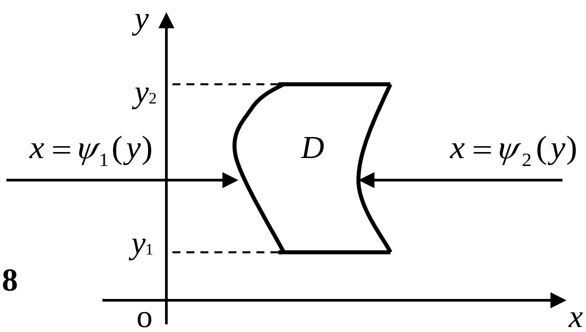


Figura 8

Si la función $f(x,y)$ es continua en el dominio de integración, cualquiera sea el orden de integración obtendremos el mismo resultado.

Ejemplo 4:

Calcular $\iint_D (2x+3y)dxdy$ siendo D la figura limitada por la recta $y=x$ y la parábola $y=x^2$

Para poder determinar el orden de integración y los respectivos límites es imprescindible dibujar el dominio de integración.

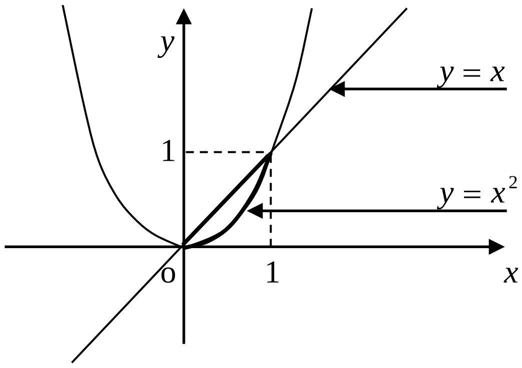


Figura 9

$$\iint_D (2x+3y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (2x+3y)dy = \int_0^1 dx \left| 2xy + \frac{3y^2}{2} \right|_{x^2}^{x} = \int_0^1 \left[\left(2x^2 + \frac{3x^2}{2} \right) - \left(2x^3 + \frac{3x^4}{2} \right) \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{7x^2}{2} - 2x^3 - \frac{3x^4}{2} \right) dx = \left| \frac{7x^3}{6} - \frac{2x^4}{4} - \frac{3x^5}{10} \right|_0^1 = \frac{7}{6} - \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{35-15-9}{30} = \frac{11}{30}$$

$$\boxed{\iint_D (2x+3y)dxdy = \frac{11}{30}}$$

También podríamos haber tomado el otro orden de integración obteniendo el mismo resultado (aunque el desarrollo resulta un poco más complicado):

$$\iint_D (2x+3y)dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} (2x+3y)dx = \frac{11}{30}$$

<u>Propiedades de las Integrales Dobles</u>

1- La Integral Doble de la suma de dos funciones, extendida en un dominio D, es igual a la suma de las Integrales Dobles extendidas en dicho dominio de cada una de las dos funciones.

$$\iint_D \left[f_1(x,y) + f_2(x,y) \right] dxdy = \iint_D f_1(x,y)dxdy + \iint_D f_2(x,y)dxdy$$

2- El factor constante se puede extraer fuera del signo de Integral Doble.

$$\iint_D c.f(x,y)dxdy = c.\iint_D f(x,y)dxdy \qquad c = \text{constante}$$

3- Si el dominio D está dividido en dos dominios parciales D_1 y D_2, sin poseer puntos interiores comunes y $f(x,y)$ es continua en todos los puntos del dominio D entonces:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

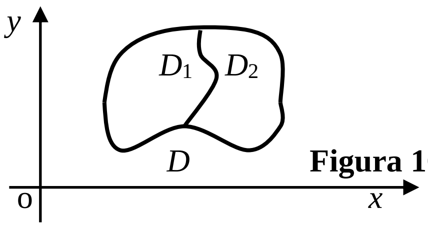


Figura 10

Esta propiedad es válida también para un mayor número de divisiones del dominio.

4- Si $f_1(x,y) \geq f_2(x,y)$ en todos los puntos del dominio *D*, tendremos que:

$$\iint_D f_1(x,y)dxdy \geq \iint_D f_2(x,y)dxdy$$

5- Si $f(x,y)=1$ en todo el dominio *D*, entonces la Integral Doble de la función $f(x,y)$ extendida en el dominio D nos da el área de dicho dominio.

$A_D = \iint_D 1dxdy$ siendo A_D el Área del dominio *D* $\boxed{A_D = \iint_D dxdy}$

Demostración

Demostremos esta propiedad. Sea *D* el dominio indicado en la figura, calculemos la Integral Doble enunciada:

$$\iint_D 1dxdy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} 1.dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \left|y\right|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\right].dx$$

Recordemos que esta última es la Integral Definida, estudiada en Análisis Matemático I, que nos permite calcular el área de la figura; con lo que queda demostrada la propiedad.

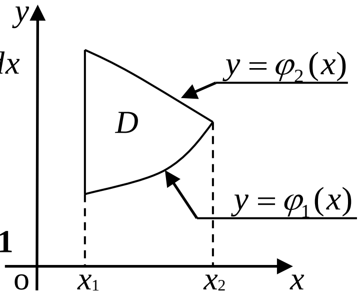


Figura 11

6- Si C_1 y C_2 son dos constantes tal que $C_1 \leq f(x,y) \leq C_2$ en todo el dominio *D*, entonces se cumple que:

$C_1.A_D \leq \iint_D f(x,y)dxdy \leq C_2.A_D$ siendo A_D el Área del dominio *D*

Ejemplo 5:

Calcular el área de la figura indicada en el gráfico siguiente:

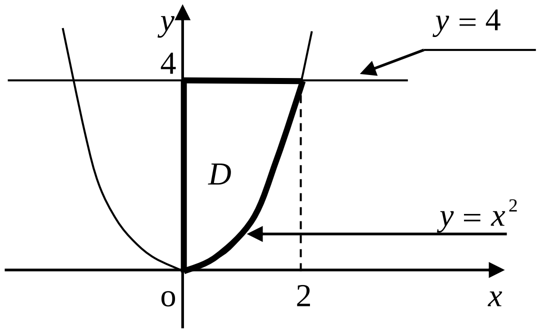


Figura 12

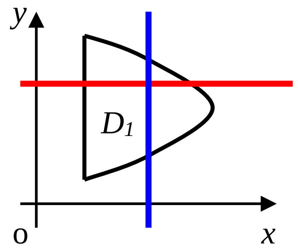
$$A_D = \iint_D dxdy = \int_0^2 dx \int_{x^2}^4 dy = \int_0^2 dx \left|y\right|_{x^2}^4 = \int_0^2 \left(4 - x^2\right)dx = \left|4x - \frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - 0 = \frac{16}{3}$$

$$\boxed{A_D = \frac{16}{3}}$$

Dominio Regular

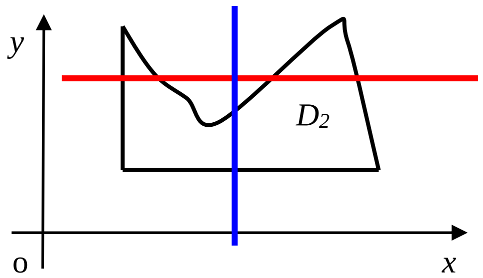
"Un ***Dominio es Regular en la dirección del eje*** ***x****, si toda recta paralela a dicho eje y que pasa por un punto interior del dominio, corta a su frontera en solo dos puntos".*
De igual manera: *"Un* ***Dominio es Regular en la dirección del eje y****, si toda recta paralela a dicho eje y que pasa por un punto interior del dominio, corta a su frontera en solo dos puntos".*
Si el dominio es regular en la dirección de los dos ejes coordenados, se dice simplemente que el ***Dominio es Regular.***

Ejemplo 6:



D_1: Dominio Regular

Figura 13



D_2: Dominio Regular en la dirección del eje "*y*".
No es regular en la dirección del eje "*x*".

Si el dominio de integración nos es regular ni en la dirección del eje "*x*", ni en la dirección del eje "*y*", entonces para poder integrar se lo debe dividir en Subdominios Regulares, aplicando la propiedad nº 3.

Igualmente, si alguno de los límites de integración no puede ser expresado con una sola expresión algebraica, también se debe subdividir el dominio para poder integrar.
Por ejemplo:

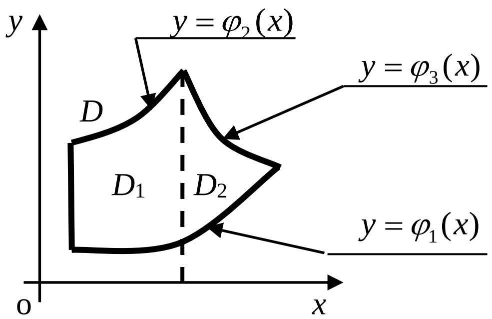


Figura 14

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

Cálculo de Volumen en el Espacio con Integrales Dobles

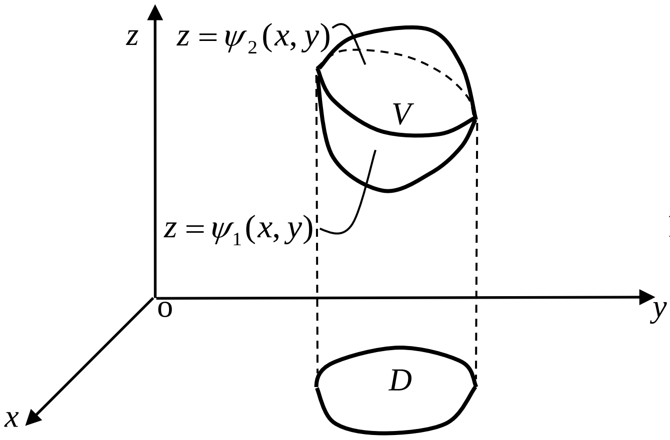


Figura 15

El cuerpo cuyo volumen deseamos calcular está limitado superiormente por la superficie $z=\psi_2(x,y)$ e inferiormente por la superficie $z=\psi_1(x,y)$, y la proyección de ambas superficies sobre el plano 0*xy* es el dominio *D.*

El volumen de este cuerpo es igual a la diferencia entre dos cilindroides:

El primero de ellos tiene como base inferior a *D* y base superior a la superficie $z=\psi_2(x,y)$.

Y el segundo la misma base y a $z=\psi_1(x,y)$ como base superior.

Por lo tanto el volumen buscado es igual a la diferencia entre las siguientes Integrales Dobles:

$$V=\iint_D \psi_2(x,y)dxdy-\iint_D \psi_1(x,y)dxdy$$ ó

$$\boxed{V=\iint_D [\psi_2(x,y)-\psi_1(x,y)]dxdy}$$

Ejemplo 7:

Calcular mediante Integrales Dobles el volumen del cuerpo definido en el primer octante y limitado por los planos $y=1-x$, $z=2-x$, $z=1$.

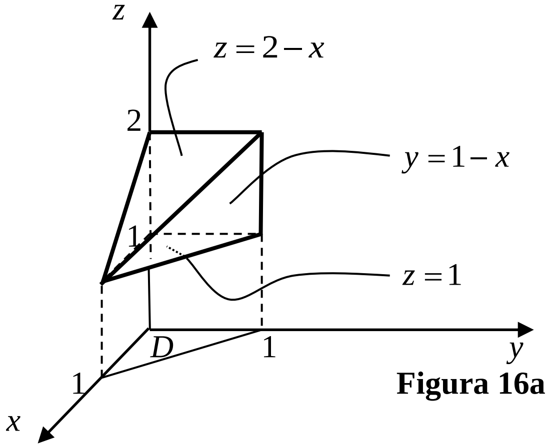


Figura 16a

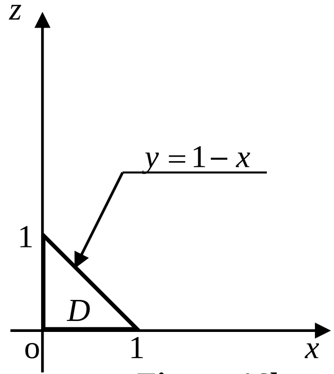


Figura 16b

$$V=\iint_D [\psi_2(x,y)-\psi_1(x,y)]dxdy=\iint_D[(2-x)-1]dxdy=\iint_D(1-x)dxdy$$

$$V=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x)dy=\int_0^1 dx\left|(1-x)y\right|_0^{1-x}=\int_0^1(1-x).(1-x)dx=\int_0^1(1-2x+x^2)dx$$

$$V=\left|x-x^2+\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\left(1-1+\frac{1}{3}\right)-0=\frac{1}{3}\qquad \boxed{V=\frac{1}{3}}$$

Otras aplicaciones de Integrales Dobles

Masa, Momentos Estáticos y Momentos de Inercia de las Láminas

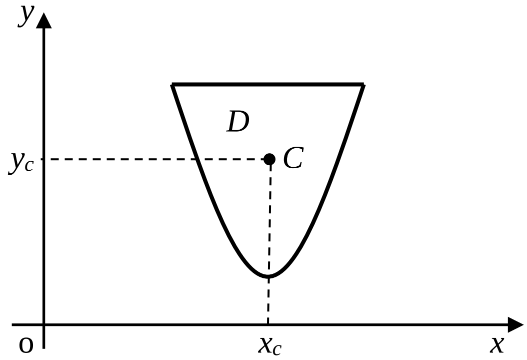


Figura 17

Supongamos que cierta materia está distribuida en el dominio *D* de modo que cada unidad de área de *D* contiene una cantidad determinada de ésta. Esto se refiere a la distribución de la masa, aunque nuestro razonamiento sigue en vigencia cuando nos referimos a la distribución de carga eléctrica, cantidad de calor, etc.
Si llamamos $\rho(x, y)$ a la **Densidad Superficial** de una lámina que ocupa el dominio *D*, entonces:
La Masa de la Lámina (cantidad total de materia en la lámina) es

$$M = \iint_D \rho(x, y)dxdy$$

El Momento Estático de la Lámina respecto al eje 0*x* es

$$M_x = \iint_D y\rho(x, y)dxdy$$

El Momento Estático de la Lámina respecto al eje 0*y* es

$$M_y = \iint_D x\rho(x, y)dxdy$$

Si la Lámina es homogénea resulta $\rho(x, y) = \text{cte}$.

Las Coordenadas del Centro de Gravedad de la Lámina son $x_c = \dfrac{M_y}{M}$ y $y_c = \dfrac{M_x}{M}$

Siendo $C(x_c, y_c)$ el Centro de Gravedad de la Lámina, *M* su Masa y M_x, M_y sus Momentos Estáticos con respecto a los Ejes Coordenados.
Si consideramos $\rho(x, y) = 1$ obtendremos las Coordenadas del Centro Geométrico del Dominio.

El Momento de Inercia de la Lámina respecto al eje 0*x* es

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y)dxdy$$

El Momento de Inercia de la Lámina respecto al eje 0*y* es

$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y)dxdy$$

El Momento de Inercia de la Lámina respecto al Origen de Coordenadas es

$$I_0 = \iint_D \left(x^2 + y^2\right)\rho(x, y)dxdy = I_x + I_y$$

CÁLCULO DE ÁREAS DE SUPERFICIES

Consideremos la superficie $z = f(x, y)$ definida en el dominio rectangular D limitado por la curva cerrada L. Calcularemos el área A_S de la superficie $z = f(x, y)$ limitada por la curva cerrada λ. Siendo la proyección de λ sobre el plano $0xy$ la curva L.

Consideremos a la función $z = f(x, y)$ continua y con derivadas parciales también continuas en el dominio mencionado.

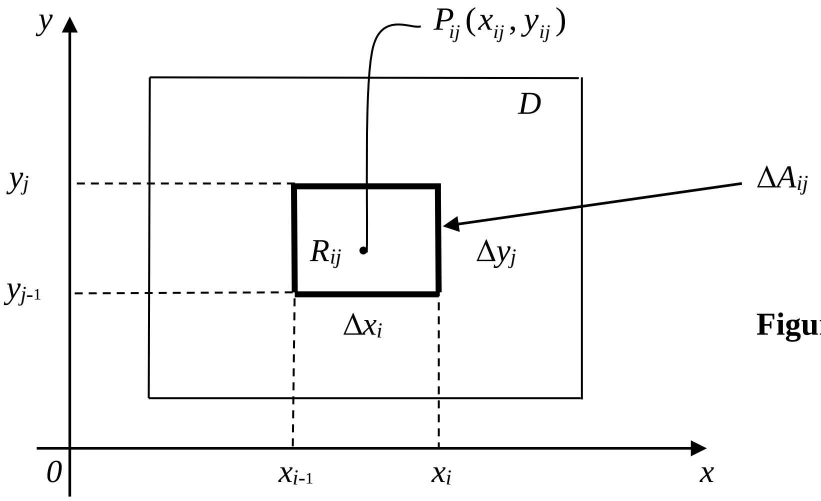


Figura 18a

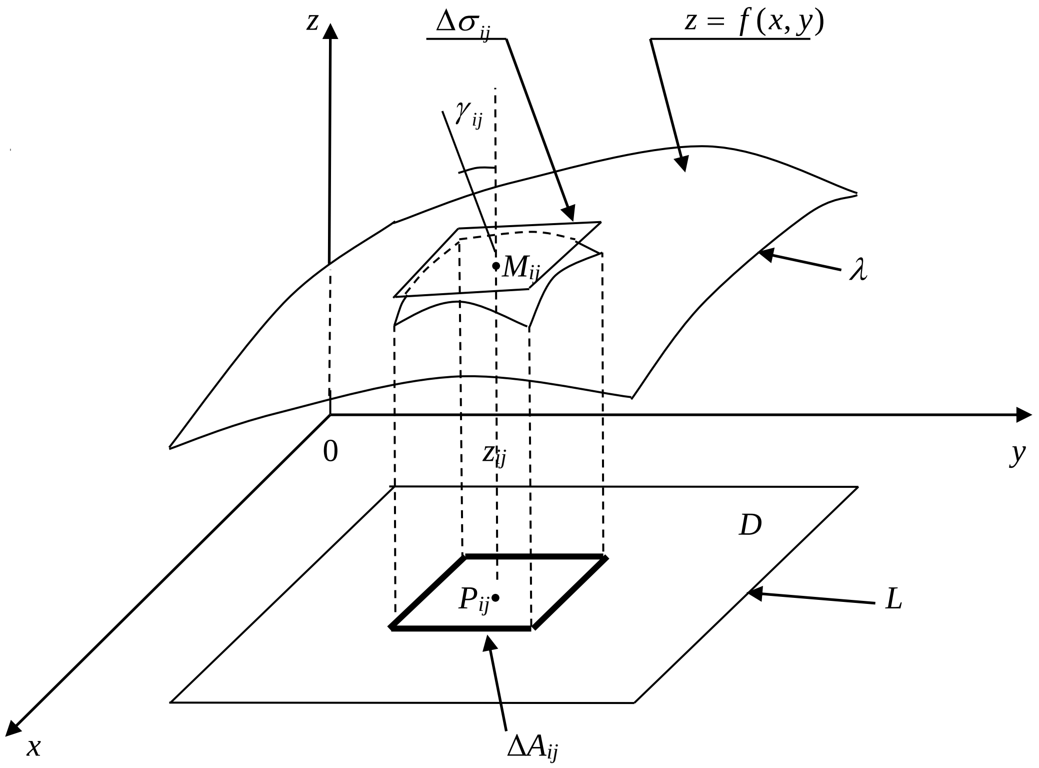


Figura 18b

Dividamos a D en subdominios y sea R_{ij} el rectángulo de área $\Delta A_{ij} = \Delta x_i . \Delta y_j$ y elijamos el punto $P_{ij}(x_{ij}, y_{ij})$ interior al rectángulo. A este punto le corresponde el punto $M_{ij}(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$ de la superficie, por este punto tracemos el plano tangente a la superficie, cuya ecuación es:

$$z - z_{ij} = \frac{\partial f(x_{ij}, y_{ij})}{\partial x}\left(x - x_{ij}\right) + \frac{\partial f(x_{ij}, y_{ij})}{\partial y}\left(y - y_{ij}\right)$$

Tomemos sobre este plano el rectángulo de área $\Delta\sigma_{ij}$ tal que proyectado sobre el plano $0xy$ resulte el rectángulo R_{ij} de área ΔA_{ij}. Consideremos la suma de todos los rectángulos parciales:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_{ij}$$

Definamos como "$\text{máx}\Delta\sigma$" al área del mayor de todos los rectángulos $\Delta\sigma_{ij}$ de la subdivisión de la superficie $z = f(x, y)$.

El límite de esta suma para cuando $\begin{cases} n \to \infty \\ m \to \infty \end{cases}$ es decir para cuando $\text{máx}\Delta\sigma \to 0$ es el área de la superficie que estamos buscando:

$$A_S = \lim_{\text{máx}\Delta\sigma \to 0}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_{ij}$$

Si llamamos γ_{ij} al ángulo formado por el Plano Tangente y el plano $0xy$ tendremos:

$$\Delta A_{ij} = \Delta\sigma_{ij}\cos\gamma_{ij} \qquad \text{ó} \qquad \Delta\sigma_{ij} = \frac{\Delta A_{ij}}{\cos\gamma_{ij}}$$

El ángulo γ_{ij} es también el Ángulo Director formado por la Recta Normal a la superficie en el punto M_{ij} con el eje 0z. Por ello en virtud de la ecuación del Plano Tangente, podemos escribir:

$$\cos\gamma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{\partial f(x_{ij}, y_{ij})}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f(x_{ij}, y_{ij})}{\partial y}\right]^2 + 1}}$$

Por lo tanto resulta:

$$\Delta\sigma_{ij} = \sqrt{\left[\frac{\partial f(x_{ij}, y_{ij})}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f(x_{ij}, y_{ij})}{\partial y}\right]^2 + 1}\cdot\Delta A_{ij}$$

Y reemplazando en la expresión de A_S será:

$$A_S = \lim_{\text{máx}\Delta A \to 0}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\left[\frac{\partial f(x_{ij}, y_{ij})}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f(x_{ij}, y_{ij})}{\partial y}\right]^2 + 1}\cdot\Delta A_{ij}$$

El límite de esta suma es por definición la siguiente Integral Doble:

$$\boxed{A_S = \iint_D \sqrt{\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]^2 + 1}\ .dxdy} \qquad \text{ó}$$

$$\boxed{A_S = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\ .dxdy}$$

Esta Integral Doble nos permite calcular el área de la superficie dada por la ecuación $z = f(x,y)$ comprendida en el dominio *D.*

Si la ecuación de la superficie está dada de la forma:

$x = g(y,z)$ ó de la forma $y = h(x,z)$

Las Integrales para calcular el área A_S serán respectivamente:

$$\boxed{A_S = \iint_{D'} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 1}\ .dydz} \qquad \boxed{A_S = \iint_{D''} \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}\ .dxdz}$$

Siendo D' y D'' los dominios de los planos $0yz$ y $0xz$ respectivamente, sobre los que se proyecta la superficie dada.

Ejemplo 8:
Hallar el área de la parte de la superficie del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ comprendida en el primer octante y limitada por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

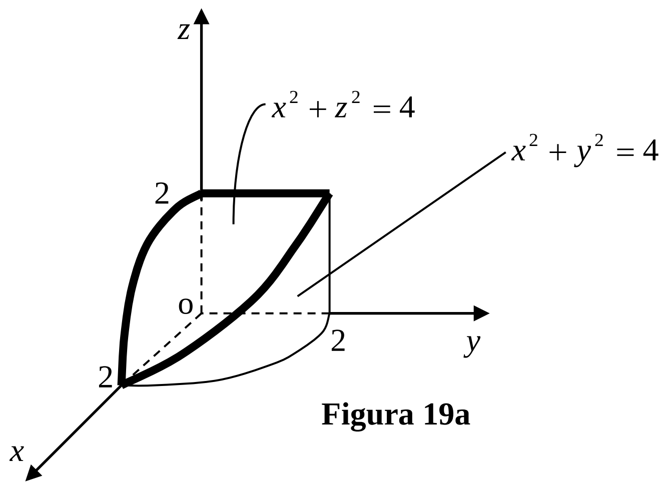


Figura 19a

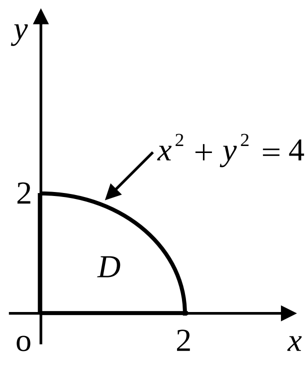


Figura 19b

La ecuación de la superficie es $x^2 + z^2 = 4$ ó $z = \sqrt{4 - x^2}$ por lo tanto su Derivadas Parciales son:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Ahora calculemos el área solicitada:

$$A_S = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\ .dxdy = \iint_D \sqrt{\frac{x^2}{4-x^2} + 1}\ .dxdy = \iint_D \sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\ .dxdy$$

$$A_S = \iint_D \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\, dy = \int_0^2 dx \left| \frac{2y}{\sqrt{4-x^2}} \right|_0^{\sqrt{4-x^2}} = \int_0^2 2dx = \left|2x\right|_0^2 = 4$$

$$\boxed{A_S = 4}$$

También se podría haber elegido proyectar sobre el plano $0yz$:

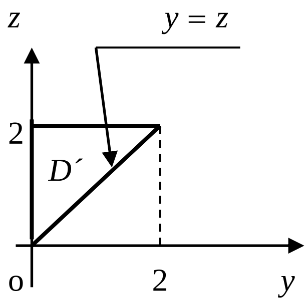


Figura 20

La ecuación de la superficie es $x^2 + z^2 = 4$ ó $x = \sqrt{4-z^2}$

$$A_S = \iint_{D'} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 1}\ .dydz = \iint_{D'} \sqrt{\frac{z^2}{4-z^2} + 1}\ .dydz = \iint_{D'} \sqrt{\frac{4}{4-z^2}}\ .dydz$$

$$A_S = \iint_{D'} \frac{2}{\sqrt{4-z^2}} dydz = \int_0^2 dz \int_0^z \frac{2}{\sqrt{4-z^2}}\, dy = \int_0^2 dz \left| \frac{2y}{\sqrt{4-z^2}} \right|_0^z = \int_0^2 \left(\frac{2z}{\sqrt{4-z^2}} \right) dz = \left| -2\sqrt{4-z^2} \right|_0^2 = 4$$

$$\boxed{A_S = 4}$$

INTEGRALES DOBLES EN COORDENADAS POLARES

El cálculo de una integral se puede simplificar mediante un conveniente cambio de variables. Hay integrales dobles en las que su cálculo en coordenadas rectangulares es más bien complicado y que sin embargo se pueden resolver más fácilmente en coordenadas polares.

Recordemos que las coordenadas rectangulares se relacionan con las coordenadas polares por medio de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x = r.\cos\theta \\ y = r.\mathrm{sen}\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le r \le \infty \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array}$$

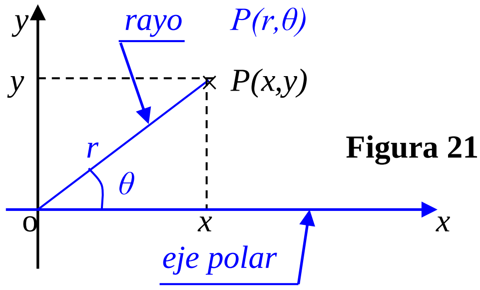


Figura 21

Calculemos la $\iint_R f(x,y)dA$ donde R es el **rectángulo polar** $R = \{(r,\theta)/\, a \le r \le b \wedge \alpha \le \theta \le \beta\}$ indicado en la siguiente figura:

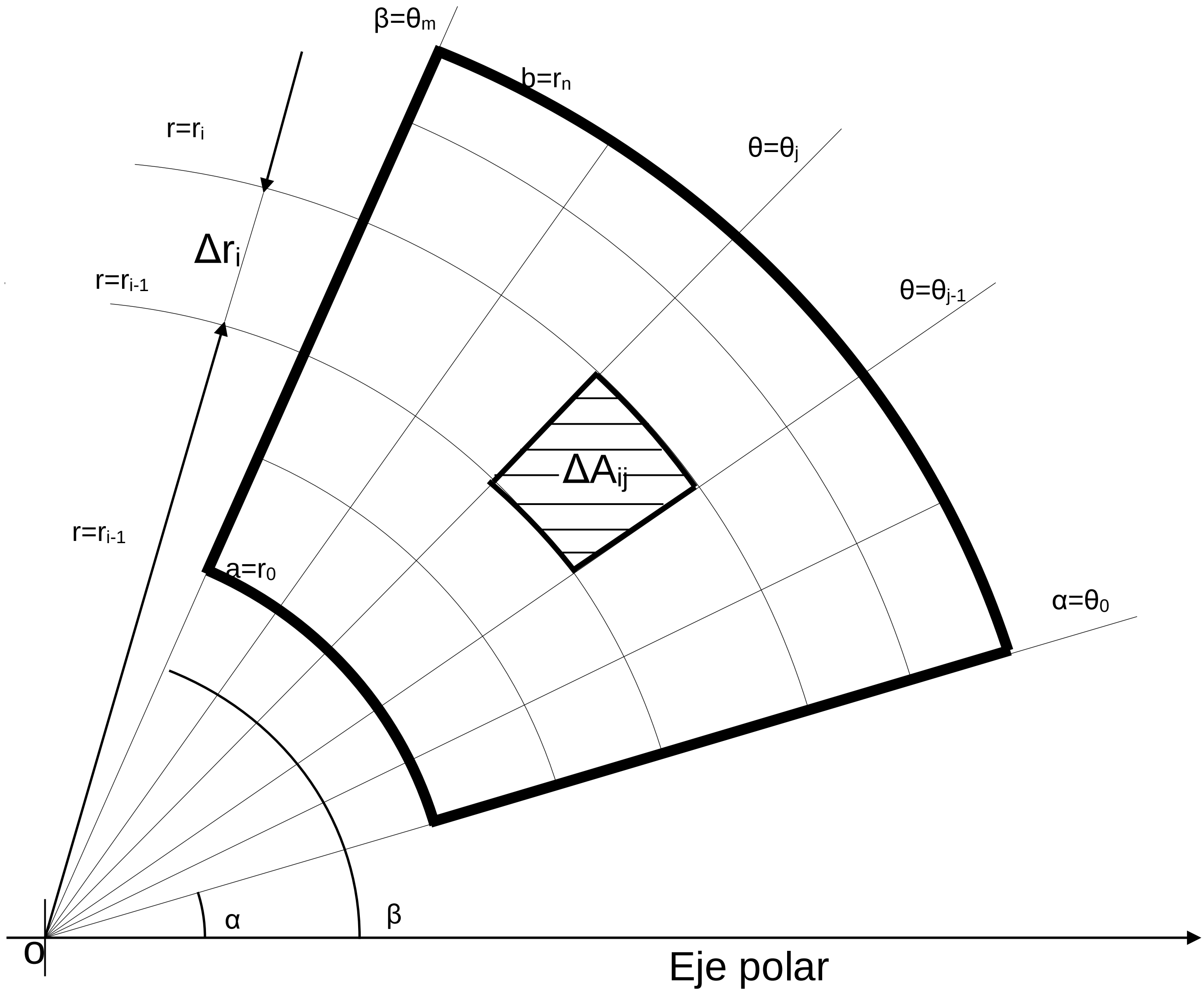


Figura 22

Dividamos al intervalo $[a,b]$ en "n" partes por los puntos $r_0 = a, r_1, r_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, r_n = b$

y al intervalo $[\alpha,\beta]$ en "m" partes por los puntos $\theta_0 = \alpha, \theta_1, \theta_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, \theta_m = \beta$

Tomemos un dominio parcial ΔA_{ij} limitado por:

$$r = r_{i-1} \qquad r = r_i$$
$$\theta = \theta_{j-1} \qquad \theta = \theta_j$$

Recordemos que el área de un sector circular de radio "r" y ángulo "θ" es:

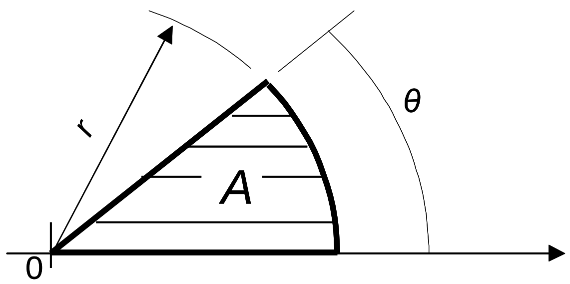


Figura 23

$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

Calculemos el área del dominio ΔA_{ij}:

$$\Delta A_{ij} = \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\theta_j - \frac{1}{2} r_{i-1}^2 \Delta\theta_j \qquad \text{siendo} \qquad \Delta\theta_j = \theta_j - \theta_{j-1}$$

$$\Delta A_{ij} = \frac{1}{2}\left[r_i^2 - r_{i-1}^2\right]\Delta\theta_j = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\Delta\theta_j \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1}) = r_{ij} \\ r_i - r_{i-1} = \Delta r_i \end{cases}$$

$$\Delta A_{ij} = r_{ij}\Delta r_i \Delta\theta_j \qquad \begin{matrix} r_{i-1} \le r_{ij} \le r_i \\ \theta_{j-1} \le \theta_{ij} \le \theta_j \end{matrix}$$

Donde (r_{ij}, θ_{ij}) son las coordenadas polares de un punto interior del dominio parcial ΔA_{ij} y por lo tanto $(r_{ij}\cos\theta_{ij}, r_{ij}\operatorname{sen}\theta_{ij})$ son las coordenadas rectangulares de dicho punto. Escribamos la Doble Suma de Riemann:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(r_{ij}\cos\theta_{ij}, r_{ij}\operatorname{sen}\theta_{ij}) r_{ij}\Delta r_i \Delta\theta_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} g(r_{ij}, \theta_{ij}) r_{ij}\Delta r_i \Delta\theta_j$$

Definamos como "$\text{máx}\Delta A$" al área del mayor de todos los subrectángulos polares de la subdivisión de R.

Tomemos límite para cuando $\begin{cases} n \to \infty \\ m \to \infty \end{cases}$ es decir para cuando $\text{máx}\Delta A \to 0$

$$\lim_{\text{máx}\Delta A\to 0}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_{ij},y_{ij})\Delta A_{ij} = \iint_R f(x,y)dA = \iint_R f(r\cos\theta, r\text{sen}\theta)r\Delta r\Delta\theta = \iint_R g(r,\theta)rdrd\theta$$

En resumen, la Integral Doble de la función $f(x,y)$ dada en coordenadas rectangulares y definida en un rectángulo polar R (como el de la Figura 22) también puede calcularse en coordenadas polares de acuerdo a lo siguiente:

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_R f(r\cos\theta, r\text{sen}\theta)rdrd\theta = \iint_R g(r,\theta)rdrd\theta = \int_\alpha^\beta d\theta\int_a^b g(r,\theta)rdr$$

Lo demostrado es válido también para dominios de forma mas complicadas. Por ejemplo sea la función $z = f(x,y)$ definida en el dominio *D* indicado en la Figura 24:

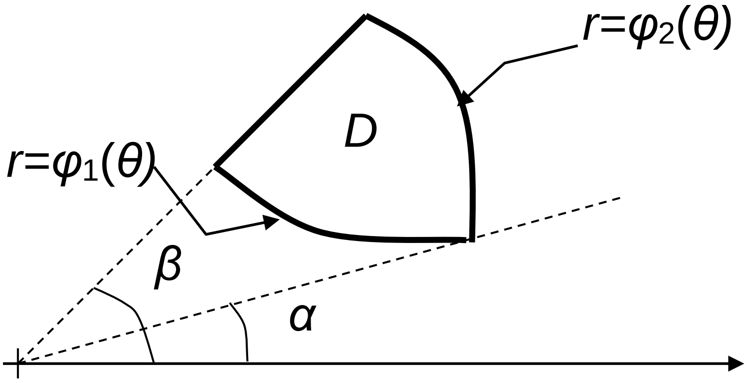


Figura 24

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(r\cos\theta, r\text{sen}\theta)rdrd\theta = \iint_D g(r,\theta)rdrd\theta = \int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} g(r,\theta)rdr$$

O si la forma del dominio lo permite se puede integrar primero con respecto a "θ" y luego respecto a "*r*", por ejemplo:

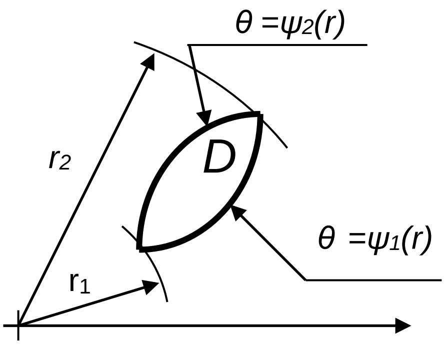


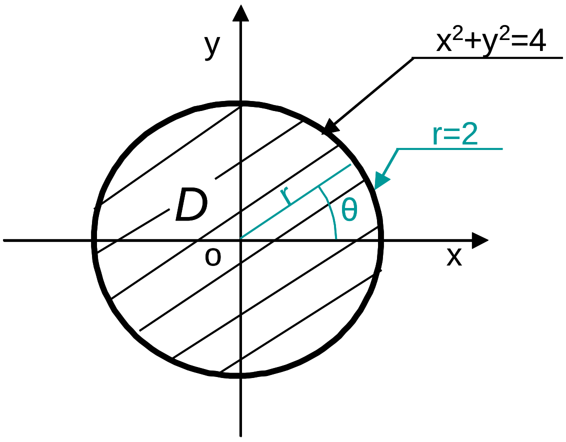
Figura 25

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(r\cos\theta, r\text{sen}\theta)rdrd\theta = \iint_D g(r,\theta)rdrd\theta = \int_{r_1}^{r_2} r.dr\int_{\psi_1(r)}^{\psi_2(r)} g(r,\theta)d\theta$$

Ejemplo 9:

Resolver la integral $\iint_D (2-x)dxdy$, siendo D el círculo de radio $r=2$ y centro en el origen de coordenadas.

Si intentamos resolver esta integral en Coordenadas Cartesianas nos resultará imposible, pero si lo podemos hacer en Coordenadas Polares.



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Figura 26

Dominio de integración:

En Coordenadas Cartesianas $\quad x^2+y^2=4$

En Coordenadas Polares
$$\begin{cases} (r\cos\theta)^2+(r\operatorname{sen}\theta)^2=4 \\ r^2\cos^2\theta+r^2\operatorname{sen}^2\theta=4 \\ r^2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)=4 \\ r^2=4 \\ \boldsymbol{r=2} \end{cases}$$

Función a integrar:

En Coordenadas Cartesianas $\quad f(x,y)=2-x$

En Coordenadas Polares $\quad g(r,\theta) = 2 - r.\cos\theta$

$$\iint_D (2-x)dxdy = \iint_D (2-r\cos\theta)rdrd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (2r-r^2\cos\theta)dr = \int_0^{2\pi} d\theta \left| r^2 - \frac{r^3}{3}\cos\theta \right|_0^2 =$$

$$= \int_0^{2\pi}(4-\frac{8}{3}\cos\theta)d\theta = \left|4\theta - \frac{8}{3}\operatorname{sen}\theta\right|_0^{2\pi} = (8\pi - \frac{8}{3}\operatorname{sen}2\pi) - (0 - \frac{8}{3}\operatorname{sen}0) = 8\pi$$

$$\boxed{\iint_D (2-x)dxdy = 8\pi}$$

CAMBIO DE VARIABLES EN INTEGRALES DOBLES

Recordemos que cuando se nos complicaba la resolución de integrales definidas de funciones de una sola variable, podíamos simplificarla mediante un conveniente cambio de variables:

Siendo $x=\varphi(t)$, $x_1=\varphi(t_1)$, $x_2=\varphi(t_2)$.

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=\int_{t_1}^{t_2} f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt$$

Ya vimos que en algunos casos podemos facilitar la resolución de una Integral Doble convirtiéndola a coordenadas polares:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad \iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)r\,dr\,d\theta$$

Veamos ahora como realizar un cambio más general de variables en Integrales Dobles.

Consideremos que *x* e *y* son funciones de otras variables *u* y *v*:

$$\begin{cases} x=g_1(u,v) \\ y=g_2(u,v) \end{cases} \qquad (1)$$

Y sean g_1 y g_2 funciones continuas y con derivadas parciales de primer orden también continuas.
Consideremos el dominio D limitado por la curva cerrada L.

Por la funciones g_1 y g_2, a cada par de valores *u* y *v* le corresponde un solo par de valores *x* e *y*.
Y supongamos que si damos valores a *x* e *y* estas funciones nos permiten calcular los valores correspondientes de *u* y *v*.

De lo expuesto deducimos que a cada punto $P(x,y)$ del plano $0xy$ le corresponde un punto $M(u,v)$ del plano $0uv$ por intermedio de las funciones g_1 y g_2.
Estableciéndose una correspondencia biunívoca (ó uno a uno) entre los puntos de ambos dominios.

A cada punto *P* de la curva cerrada *L* que limita el Dominio *D* en el plano 0*xy*, le corresponderá en el plano 0*uv* un punto *M* de la curva cerrada L_1 que limita al Dominio *E*.

Al punto $M_1(u_0,v_0)$ del plano $0uv$ le corresponde el punto $P_1(x_0,y_0)$ $\begin{cases} x_0=g_1(u_0,v_0) \\ y_0=g_2(u_0,v_0) \end{cases}$ en el plano 0*xy*.

Dividamos el Dominio *E* mediante rectas paralelas a los ejes coordenados, a cada una de estas rectas le corresponden ciertas curvas en el plano *0xy*.

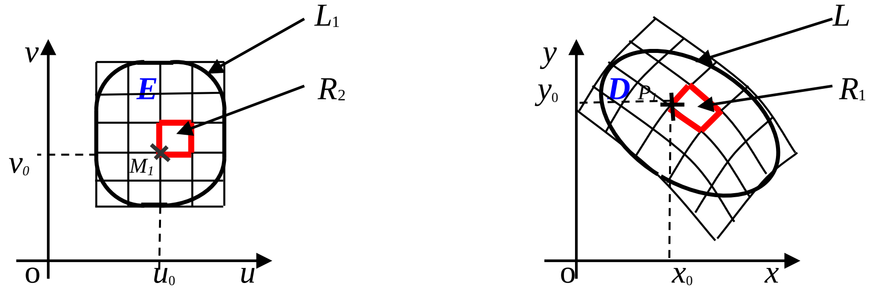


Figura 27

Consideremos el rectángulo R_2 en el plano $0uv$ cuyos lados miden Δu y Δv, su área es $\Delta A_2 = \Delta u \Delta v$. Y su imagen en el dominio D es la figura R_1, cuya área llamaremos ΔA.

En general las áreas de R_1 y R_2 son distintas.

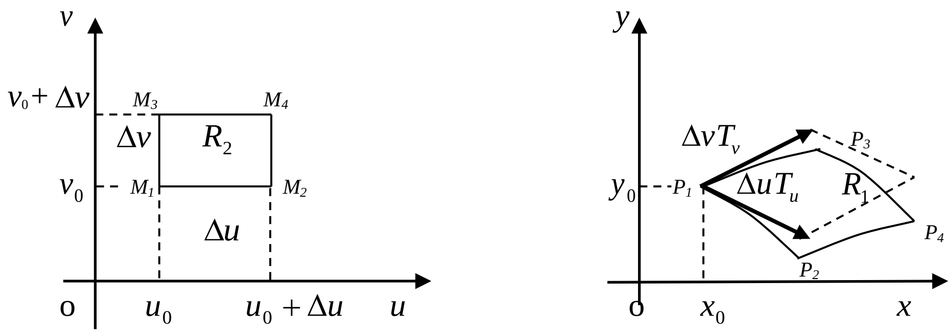


Figura 28

Sea una función $z = f(x, y)$ definida en el Dominio D, le corresponde un mismo valor de la función $z = g(u, v)$ en el Dominio E. Siendo $f[g_1(u,v); g_2(u,v)] = g(u,v)$.

Por lo tanto se verifica que:

$$\sum \sum f(x,y)\Delta A = \sum \sum f[g_1(u,v); g_2(u,v)\Delta A] = \sum \sum g(u,v)\Delta A$$

Calculemos el área ΔA de R_1. Para ello consideremos que las curvas $\overset{\frown}{P_1P_2}$, $\overset{\frown}{P_3P_4}$, $\overset{\frown}{P_1P_3}$ y $\overset{\frown}{P_2P_4}$ son paralelas por pares.

La ecuación del lado inferior del rectángulo R_2 es la recta $v = v_0$. Y su imagen es la curva $\overset{\frown}{P_1P_2}$ dada por:

$$\begin{cases} x = g_1(u, v_0) \\ y = g_2(u, v_0) \end{cases} \qquad \text{o en forma vectorial} \qquad g_1(u,v_0)i + g_2(u,v_0)j$$

El vector tangente a esta curva en el punto $P_1(x_0, y_0)$ es:

$$T_u = \frac{\partial g_1(u_0,v_0)}{\partial u} i + \frac{\partial g_2(u_0,v_0)}{\partial u} j = \frac{\partial x}{\partial u} i + \frac{\partial y}{\partial u} j$$

Y de forma similar, la ecuación del lado izquierdo del rectángulo R_2 es la recta $u = u_0$. Y su imagen es la curva $\overset{\frown}{P_1P_3}$ dada por:

$$\begin{cases} x = g_1(u_0, v) \\ y = g_2(u_0, v) \end{cases} \qquad \text{o en forma vectorial} \qquad g_1(u_0,v)i + g_2(u_0,v)j$$

Y el vector tangente a esta curva en el punto $P_1(x_0, y_0)$ es:

$$T_v = \frac{\partial g_1(u_0,v_0)}{\partial v} i + \frac{\partial g_2(u_0,v_0)}{\partial v} j = \frac{\partial x}{\partial v} i + \frac{\partial y}{\partial v} j$$

Podemos aproximar la figura R_1 mediante el paralelogramo cuyos lados son $\Delta u T_u$ y $\Delta v T_v$.

De esta manera el área del cuadrilátero R_1 se puede calcular en forma aproximada mediante el siguiente producto vectorial:

$$\Delta A \cong \left|\Delta u T_u \times \Delta v T_v\right| = \left|T_u \times T_v\right| \Delta u \Delta v$$

El producto vectorial se toma en valor absoluto, pues estamos calculando un área.

$$T_u \times T_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \cdot k = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \right) \cdot k$$

por lo tanto

$$\left|T_u \times T_v\right| = \left| \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \right| \qquad \Delta A \cong \left| \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \right| \Delta u \Delta v$$

Introduzcamos la designación

$$J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \qquad \Rightarrow \qquad T_u \times T_v = J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$$

Este determinante recibe el nombre de **Jacobiano de la Transformación.**

Finalmente el área de R_1 resulta:

$$\Delta A \cong \left| J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) \right| \Delta u \Delta v$$

Si aplicamos esta igualdad al cálculo de las integrales dobles tendremos:

$$\sum \sum f(x,y)\Delta A \cong \sum \sum f\left[g_1(u,v); g_2(u,v)\right] \left| J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) \right| \Delta u \Delta v = \sum \sum g(u,v) \left| J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) \right| \Delta u \Delta v$$

Y tomando límite para cuando $\text{máx}\Delta A \to 0$ obtendremos:

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f\left[g_1(u,v), g_2(u,v)\right] \left| J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) \right| dudv = \iint_E g(u,v) \left| J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) \right| dudv}$$

Las Integrales Dobles en Coordenadas polares son un caso particular de Cambio de Variables en Integrales Dobles. Recordemos que la transformación está dada por:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\left| J\left(\frac{x,y}{r,\theta}\right)\right| drd\theta$$

Y el Jacobiano de la Transformación resulta:

$$J\left(\frac{x,y}{r,\theta}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\,\mathrm{sen}^2\,\theta = r(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta) = r$$

$$\boxed{J\left(\frac{x,y}{r,\theta}\right) = r}$$

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,r\,drd\theta}$$

INTEGRALES TRIPLES

El concepto de Integrales Dobles puede ser ampliado a Integrales Triples adaptando lo definido para funciones de dos variables a funciones de tres variables independientes.

Consideremos la función $u = f(x, y, z)$, continua en el Dominio con forma de paralelepípedo rectángulo $E = [a,b]\times[c,d]\times[p,q]$ indicado en la figura 29:

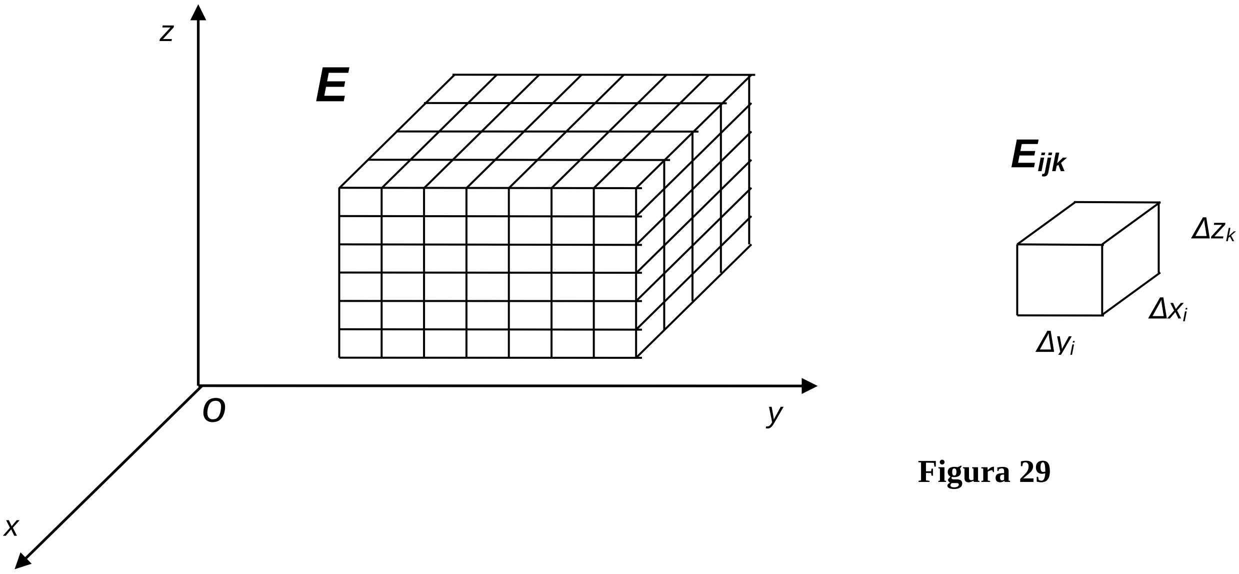


Figura 29

Dividimos al intervalo $[a,b]$ en "n" partes por los puntos $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n = b$
al intervalo $[c,d]$ en "m" partes por los puntos $y_0 = c, y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots, y_m = d$
y al intervalo $[p,q]$ en "l" partes por los puntos $z_0 = p, z_1, z_2, \ldots\ldots\ldots, z_l = q$

Consideremos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ y $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$

El volumen del subdominio E_{ijk} será: $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$

Elegimos un punto $M_{ijk}(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})$ interior al subdominio E_{ijk} y formemos la siguiente suma (**Suma Triple de Riemann**):

$$\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})\Delta V_{ijk}$$

Definimos como "$\text{máx}\Delta V$" al volumen del mayor de todos los subdominios de la división de E.
Es decir que si E_{ijk} es el subdominio de mayor volumen entonces $\text{máx}\Delta V = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$.

El límite de la Suma Triple de Riemann para cuando $\begin{cases} n \to \infty \\ m \to \infty \\ l \to \infty \end{cases}$ es decir para cuando $\text{máx}\Delta V \to 0$
es la Integral Triple de la función $f(x, y, z)$ en el Dominio E:

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \lim_{\text{máx}\Delta V \to 0} \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})\Delta V_{ijk}$$

Si este límite existe decimos que la función $f(x, y, z)$ es **integrable**.

"E" es el Dominio de Integración.
Teniendo en cuenta que $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ la Integral Triple también se expresa:

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \iiint_E f(x,y,z)dxdydz$$

Si consideramos como ejemplo que la función $f(x,y,z)$ nos representa la Densidad de distribución de cierta materia dentro del recinto E entonces la Integral Triple nos da la masa total de la sustancia contenida en E.

Tal como precedimos en Integrales Dobles, también las Integrales Triples pueden ser resueltas mediante Integrales Iteradas:

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left\{ \int_c^d \left[\int_p^q f(x,y,z)dz \right] dy \right\} dx = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_p^q f(x,y,z)dz$$

Esta expresión indica que primero debemos integral con respecto a "z", considerando a "x e y" constantes [obteniendo como resultado de esta integral una función $F(x,y)$]; luego de ello nos queda planteada una Integral Doble definida en el Dominio rectangular $R = [a,b] \times [c,d]$. Luego se integra con respecto a "y", considerando a "x" constante y finalmente se integra con respecto a "x".

Al igual que en Integrales Dobles se puede cambiar el orden de integración, obteniendo el mismo resultado.

Para resolver Integrales Triples definidas en dominios de formas más complejas procedemos de la misma manera que en Integrales Dobles:

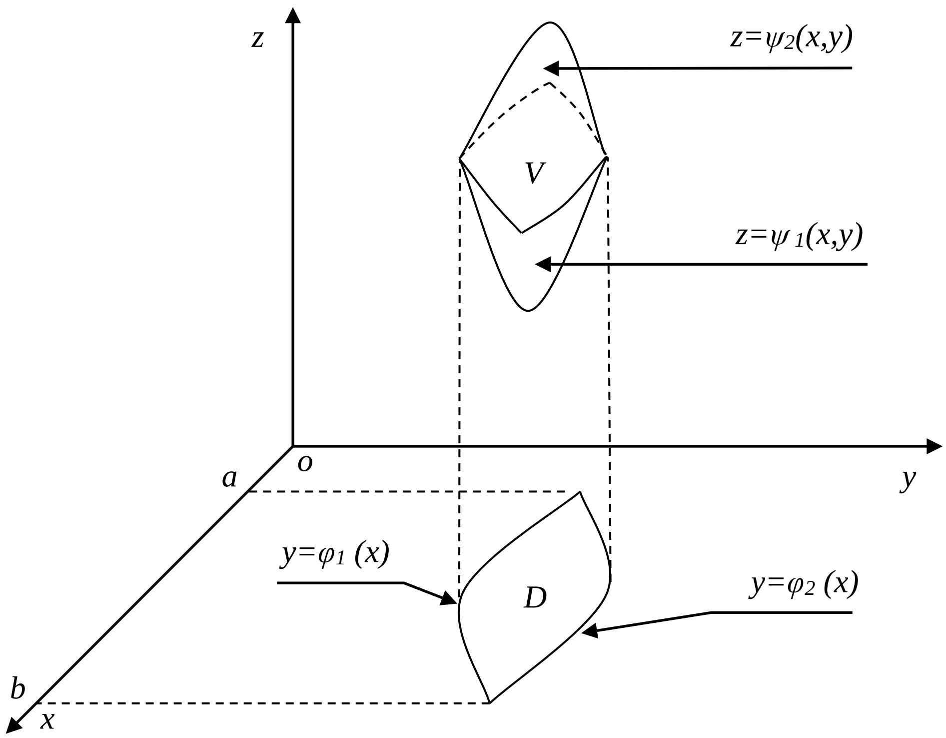


Figura 30

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dy \right\} dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

Ejemplo 10:
Calcular la Integral triple de la función $f(x,y,z) = x^2y^2z$ en el Dominio *V* definido en el Primer Octante y limitado por los planos $x = 3$ e $y + z = 1$.

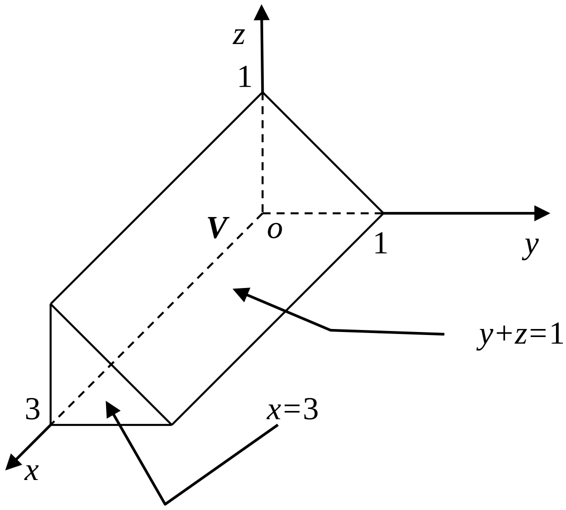


Figura 31

$$\iiint_V x^2y^2z\,dxdydz = \int_0^3 dx\int_0^1 dy\int_0^{1-y} x^2y^2z\,dz = \int_0^3 dx\int_0^1 dy\left|\frac{x^2y^2z^2}{2}\right|_0^{1-y} = \int_0^3 dx\int_0^1\left(\frac{x^2y^2}{2} - x^2y^3 + \frac{x^2y^4}{2}\right)dy =$$

$$= \int_0^3 dx\left|\frac{x^2y^3}{6} - \frac{x^2y^4}{4} + \frac{x^2y^5}{10}\right|_0^1 = \int_0^3 \frac{x^2}{60}dx = \left|\frac{x^3}{180}\right|_0^3 = \frac{3}{20}$$

$$\boxed{\iiint_V x^2y^2z\,dxdydz = \frac{3}{20}}$$

También podríamos haber integrado tomando otro orden de integración y hubiésemos obtenido el mismo resultado, por ejemplo:

$$\iiint_V x^2y^2z\,dxdydz = \int_0^1 dz\int_0^{1-z} dy\int_0^3 x^2y^2z\,dx = \frac{3}{20}$$

Propiedades de las Integrales Triples

1. La Integral Triple de la suma de dos funciones, extendida en un dominio *V*, es igual a la suma de las Integrales Triples extendidas en dicho dominio de cada una de las dos funciones.

$$\iiint_V [f_1(x,y,z) + f_2(x,y,z)]\,dxdydz = \iiint_V f_1(x,y,z)\,dxdydz + \iiint_V f_2(x,y,z)\,dxdydz$$

2. El factor constante se puede extraer fuera del signo de Integral Triple.

$$\iiint_V c.f(x,y,z)\,dxdydz = c.\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz \qquad c = \text{constante}$$

3. Si el dominio *V* está dividido en dos dominios parciales V_1 y V_2, sin poseer puntos interiores comunes y $f(x,y,z)$ es continua en todos los puntos del dominio *V* entonces:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{V_1} f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint_{V_2} f(x,y,z)\,dxdydz$$

Esta propiedad es válida también para un mayor número de divisiones del dominio.
Igual que en Integrales Dobles si alguno de los límites de integración no puede ser dado con una sola expresión algebraica se debe subdividir el dominio aplicando esta propiedad.

4. Si $f_1(x,y,z) \geq f_2(x,y,z)$ en todos los puntos del dominio *V*, tendremos que:

$$\iiint_V f_1(x,y,z)dxdydz \geq \iiint_V f_2(x,y,z)dxdydz$$

5. La Integral Triple de la función $f(x,y,z)=1$ extendida en el dominio *V* nos da el volumen de dicho dominio.

$V = \iiint_V 1.dxdydz$ siendo *V* el volumen del dominio *V*

Demostración
Demostremos esta propiedad. Sea *V* el dominio indicado en la **Figura 30**, calculemos la Integral Triple enunciada:

$$\iiint_V dxdydz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \left| z \right|_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\psi_2(x,y) - \psi_1(x,y)\right] dy$$

Recordemos que esta última es la Integral Doble que nos permite calcular el volumen de de un cuerpo en el espacio, con lo que queda demostrada la propiedad.

6. Si C_1 y C_2 son dos constantes tal que $C_1 \leq f(x,y,z) \leq C_2$ en todo el dominio *V*, entonces se cumple que:

$C_1.V \leq \iiint_V f(x,y,z)dxdydz \leq C_2.V$ siendo *V* el volumen del dominio *V*.

Ejemplo 11:
Calcular el volumen del tetraedro comprendido entre los planos coordenados y el plano $6x+3y+z=6$

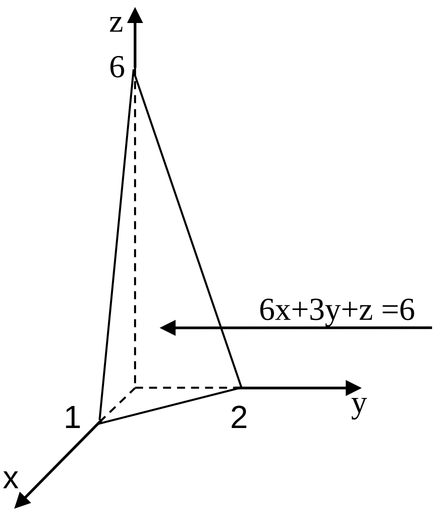


Figura 32

$$V = \iiint_V dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} dy \int_0^{6-6x-3y} dz = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} dy \left| z \right|_o^{6-6x-3y} = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} (6-6x-3y)dy =$$

$$= \int_0^1 dx \left| 6y - 6xy - \frac{3y^2}{2} \right|_0^{2-2x} = \int_0^1 (6x^2 - 12x + 6)dx = \left| 2x^3 - 6x^2 + 6x \right|_0^1 = 2$$

$$\boxed{V = \iiint_V dxdydz = 2}$$

Otras aplicaciones de Integrales Triples

Masa, Momentos Estáticos y Momentos de Inercia de un Cuerpo

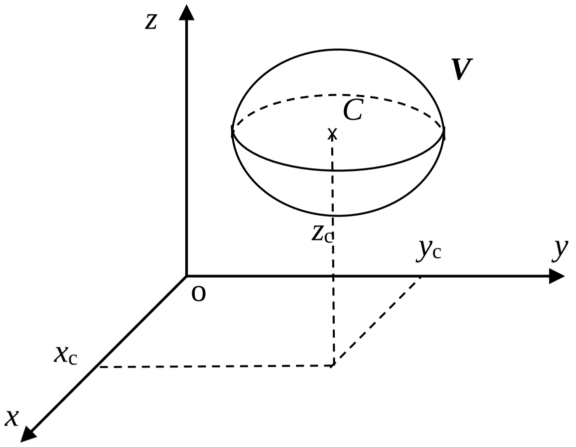


Figura 33

Si llamamos $\rho(x,y,z)$ a la **Densidad** de un Cuerpo que ocupa el dominio *V*, entonces:

La Masa del Cuerpo es

$$M = \iiint_V \rho(x,y,z)dxdydz$$

Si bien nos hemos referido a la Masa de un Cuerpo, este razonamiento sigue vigente si nos referimos a distribución de Carga Eléctrica, Cantidad de Calor, etc..

El Momento Estático del Cuerpo respecto al plano 0*yz* es

$$M_{yz} = \iiint_V x.\rho(x,y,z)dxdydz$$

El Momento Estático del Cuerpo respecto al plano 0*xz* es

$$M_{xz} = \iiint_V y.\rho(x,y,z)dxdydz$$

El Momento Estático del Cuerpo respecto al plano 0*xy* es

$$M_{xy} = \iiint_V z.\rho(x,y,z)dxdydz$$

Si el Cuerpo es homogéneo resulta $\rho(x,y,z) = \text{cte}$.

Las Coordenadas del Centro de Gravedad del Cuerpo son

$$x_c = \frac{M_{yz}}{M} \quad ; \quad y_c = \frac{M_{xz}}{M} \quad \text{y} \quad z_c = \frac{M_{xy}}{M}$$

Siendo $C(x_c, y_c, z_c)$ el Centro de Gravedad del Cuerpo, *M* su Masa y M_{yz}, M_{xz}, M_{xy} sus Momentos Estáticos con respecto a los Planos Coordenados.

Si consideramos $\rho(x,y,z) = 1$ obtendremos las Coordenadas del Centro Geométrico del Cuerpo.

<u>El Momento de Inercia del Cuerpo respecto al eje 0*x*</u> es

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$$

<u>El Momento de Inercia del Cuerpo respecto al eje 0*y*</u> es

$$I_y = \iiint_V (x^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$$

<u>El Momento de Inercia del Cuerpo respecto al eje 0*z*</u> es

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)dxdydz$$

<u>Ejemplo 12</u>:
Hallar la Masa, las coordenadas del Centro de Gravedad y los Momentos de Inercia respecto a los ejes coordenados del Cuerpo con forma de paralelepípedo indicado en la **Figura 34**, si su Densidad responde a la función $\rho(x,y,z) = xyz$.

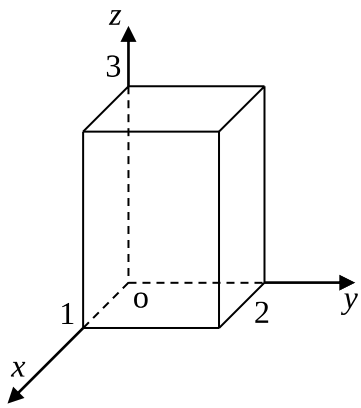


Figura 34

Calculamos primero la Masa del Cuerpo:

$$M = \iiint_V \rho(x,y,z)dxdydz = \iiint_V xyzdxdydz = \int_0^1 dx\int_0^2 dy\int_0^3 xyzdz = \frac{9}{2}$$

Para calcular las coordenadas del Centro de gravedad del Cuerpo necesitamos determinar los Momentos estáticos del Cuerpo respecto a los planos coordenados:

$$M_{yz} = \iiint_V x.\rho(x,y,z)dxdydz = \iiint_V x^2 yzdxdydz = \int_0^1 dx\int_0^2 dy\int_0^3 x^2 yzdxdydz = 3$$

$$M_{xz} = \iiint_V y.\rho(x,y,z)dxdydz = \iiint_V xy^2 zdxdydz = \int_0^1 dx\int_0^2 dy\int_0^3 xy^2 zdxdydz = 6$$

$$M_{xy} = \iiint_V z.\rho(x,y,z)dxdydz = \iiint_V xyz^2 dxdydz = \int_0^1 dx\int_0^2 dy\int_0^3 xyz^2 dxdydz = \frac{9}{2}$$

Por lo tanto las coordenadas del Centro de Gravedad del Cuerpo son:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{3}{9/2} = \frac{2}{3}$$

$$y_c = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{6}{9/2} = \frac{4}{3}$$

$$z_c = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{9}{9/2} = 2$$

Y los Momentos de Inercia del Cuerpo respecto a los ejes coordenados resultan:

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz = \iiint_V (y^2 + z^2)xyzdxdydz = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 (xy^3z + xyz^3)dz = \frac{117}{4}$$

$$I_y = \iiint_V (x^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz = \iiint_V (x^2 + z^2)xyzdxdydz = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 (x^3yz + xyz^3)dz = \frac{45}{2}$$

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)dxdydz = \iiint_V (x^2 + y^2)xyzdxdydz = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 (x^3yz + xy^3z)dz = \frac{45}{4}$$

Finalmente resulta:

La **Masa** del Cuerpo: $\boxed{M = \frac{9}{2}}$

Los **Momentos Estáticos** del Cuerpo respecto a los planos coordenados: $\boxed{\begin{array}{l} M_{yz} = 3 \\ M_{xz} = 6 \\ M_{xy} = 9 \end{array}}$

Las coordenadas del **Centro de Gravedad** del Cuerpo: $\boxed{\begin{array}{l} x_c = \frac{2}{3} \\ y_c = \frac{4}{3} \\ z_c = 2 \end{array}}$

Los **Momentos de Inercia** respecto a los ejes coordenados: $\boxed{\begin{array}{l} I_x = \frac{117}{4} \\ I_y = \frac{45}{2} \\ I_z = \frac{45}{4} \end{array}}$

CAMBIO DE VARIABLES EN INTEGRALES TRIPLES

El Cambio de Variables en Integrales Triples se realiza de forma similar que en Integrales Dobles. Consideremos que *x, y, z* son funciones de otras variables *u, v, w*:

$$\begin{cases} x = g_1(u,v,w) \\ y = g_2(u,v,w) \\ z = g_3(u,v,w) \end{cases}$$

Y sean estas funciones continuas y con derivadas parciales de primer orden también continuas.

Por intermedio de estas funciones establecemos una correspondencia biunívoca entre los puntos del dominio *E* del espacio $0uvw$ y los puntos del dominio *V* del espacio $0xyz$:

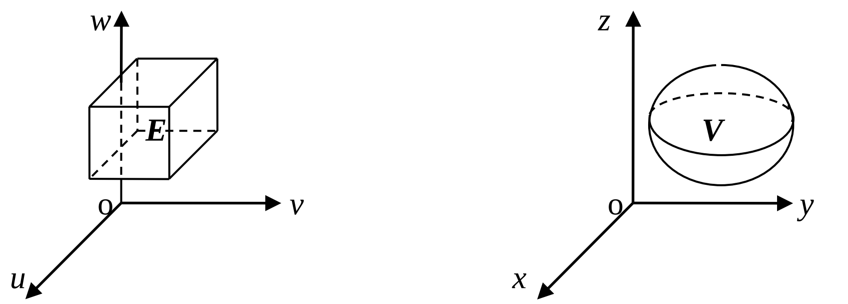


Figura 35

El Jacobiano de la Transformación es:

$$J\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Y el Cambio de Variables en Integrales Triples resulta:

$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_E f\left[g_1(u,v,w), g_2(u,v,w), g_3(u,v,w)\right] \left| J\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right)\right| dudvdw}$$

Nótese que el Jacobiano de la Transformación se debe tomar en valor absoluto.

INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

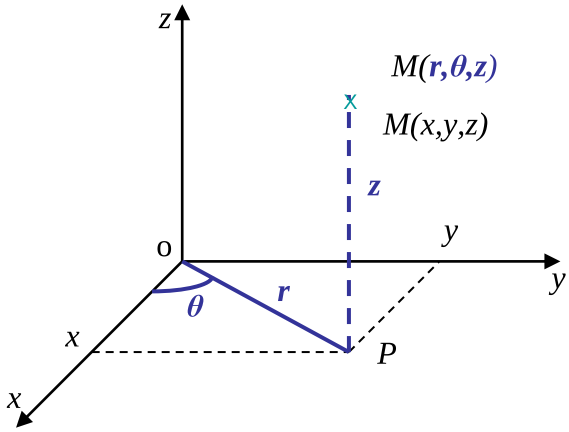


Figura 36

En Coordenadas Cilíndricas la posición de un punto M en el espacio se determina por "$\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{z}$".

"$\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{\theta}$" son la Coordenadas Polares de la proyección del punto M sobre el plano $0xy$

"$\boldsymbol{z}$" es la distancia del punto al plano $0xy$.

"$\boldsymbol{z}$" es positiva si el punto M está sobre el plano $0xy$ y es negativa cuando está debajo del mismo.

Por lo tanto resulta:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \le r \le \infty \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ -\infty \le z \le \infty \end{cases}$$

Entonces para transformar una Integral Triple dada en Coordenadas Rectangulares en otra dada en Coordenadas Cilíndricas procedemos así:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_V f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)\left|J\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,z}\right)\right| drd\theta dz = \iiint_V g(r,\theta,z)\left|J\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,z}\right)\right| drd\theta dz$$

Resolvamos el Jacobiano de la Transformación:

$$J\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,z}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Y finalmente resulta:

$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_V g(r,\theta,z)\, r\, drd\theta\, dz}$$

Ejemplo 13:

Calcular en Coordenadas Cilíndricas la Integral $\iiint_V (x^2+y^2)dxdydz$ siendo V el cuerpo definido en el primer octante y limitado por la superficie $x^2+y^2=4$ y el plano $z=4$.

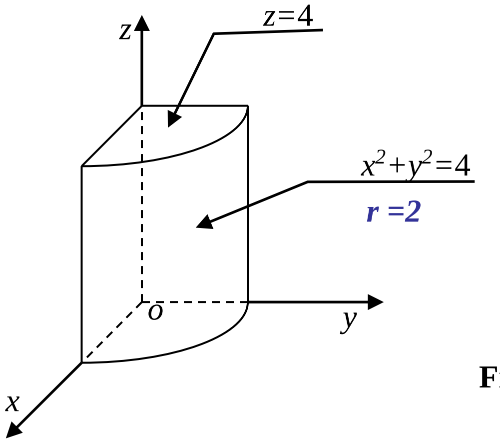


Figura 37

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_V g(r,\theta,z)\, r\, drd\theta\, dz$$

$$f(x,y,z) = x^2+y^2$$

$$g(r,\theta,z) = (r\cos\theta)^2 + (r\mathrm{sen}\theta)^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\mathrm{sen}^2\theta = r^2(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta) = r^2$$

$$\boxed{g(r,\theta,z) = r^2}$$

Dominio V de integración:

En Coordenadas Rectangulares: $x^2+y^2=4$ y $z=4$

En Coordenadas Cilíndricas:

$$(r\cos\theta)^2 + (r\mathrm{sen}\theta)^2 = 4$$
$$r^2\cos^2\theta + r^2\mathrm{sen}^2\theta = 4$$
$$r^2(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta) = 4$$
$$r^2 = 4$$
$$\boxed{r = 2 \qquad \text{y} \qquad z = 4}$$

$$\iiint_V (x^2+y^2)dxdydz = \iiint_V r^2 r drd\theta dz = \iiint_V r^3 drd\theta dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 dr \int_0^4 r^3 dz =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 dr \left| r^3 z \right|_0^4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 4r^3 dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left| r^4 \right|_0^2 =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16 d\theta = \left| 16\theta \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = 8\pi$$

$$\boxed{\iiint_V (x^2+y^2)dxdydz = 8\pi}$$

INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS ESFÉRICAS

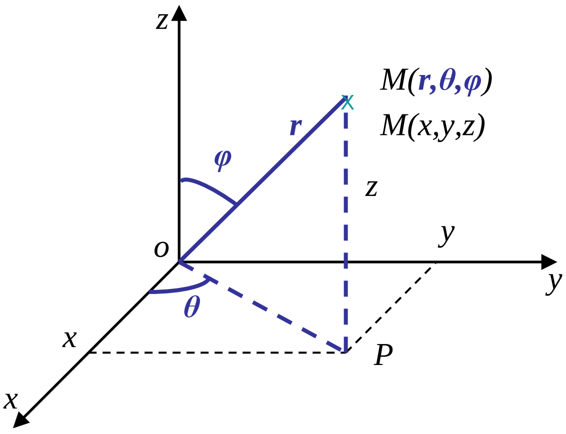


Figura 38

En Coordenadas Esféricas la posición de un punto M en el espacio se determina por "$\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\varphi}$".

De la figura podemos deducir la relación entre las Coordenadas Rectangulares y la Coordenadas Esféricas:

$$\begin{cases} x = r\,\text{sen}\varphi\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\varphi\,\text{sen}\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \le r \le \infty \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

Entonces para transformar una Integral Triple dada en Coordenadas Rectangulares en otra dada en Coordenadas Esféricas procedemos así:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_V f(r\,\text{sen}\varphi\cos\theta, r\,\text{sen}\varphi\,\text{sen}\theta, r\cos\varphi)\left|J\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,\varphi}\right)\right| drd\theta d\varphi =$$

$$= \iiint_V g(r,\theta,\varphi)\left|J\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,\varphi}\right)\right| drd\theta d\varphi$$

Resolvamos el Jacobiano de la Transformación:

$$\left|J\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,\varphi}\right)\right| = \left\|\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \text{sen}\varphi\cos\theta & -r\,\text{sen}\varphi\,\text{sen}\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \text{sen}\varphi\,\text{sen}\theta & r\,\text{sen}\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\,\text{sen}\theta \\ \cos\varphi & 0 & -r\,\text{sen}\varphi \end{matrix}\right\| = r^2\text{sen}\varphi$$

Y finalmente resulta:

$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_V g(r,\theta,\varphi)\, r^2\text{sen}\varphi\, drd\theta\, d\varphi}$$

Ejemplo 14:
Calcular en Coordenadas Esféricas el volumen de una esfera de radio R.

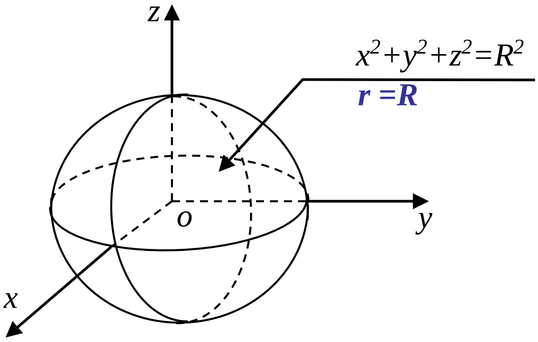


Figura 39

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_V g(r,\theta,\varphi)\, r^2 \text{sen}\varphi\, drd\theta\, d\varphi$$

Como tenemos que calcular el volumen de un cuerpo con Integrales triles resulta:

$$f(x,y,z) = 1$$

$$\boxed{g(r,\theta,\varphi) = 1}$$

$$\iiint_V dxdydz = \iiint_V r^2 \text{sen}\varphi\, drd\theta\, d\varphi$$

Dominio V de integración:

En Coordenadas Rectangulares $\quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

En Coordenadas Cilíndricas: $\quad (r\text{sen}\varphi\cos\theta)^2 + (r\text{sen}\varphi\text{sen}\theta)^2 + (r\cos\varphi)^2 = R^2$

$$r^2\text{sen}^2\varphi\cos^2\theta + r^2\text{sen}^2\varphi\text{sen}^2\theta + r^2\cos^2\varphi = R^2$$

$$r^2[\text{sen}^2\varphi(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) + \cos^2\varphi] = R^2$$

$$r^2 = R^2 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{r = R}$$

$$\iiint_V dxdydz = \iiint_V r^2\text{sen}\varphi drd\theta\, d\varphi = \int_0^R dr\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi} r^2\text{sen}\varphi\, d\varphi =$$

$$= \int_0^R dr\int_0^{2\pi} d\theta \left| -r^2\cos\varphi \right|_0^{\pi} = \int_0^R dr\int_0^{2\pi} 2r^2 d\theta =$$

$$= \int_0^R dr \left|2r^2\theta\right|_0^{2\pi} = \int_0^R 4\pi\, r^2 dr = \left|\frac{4\pi\, r^3}{3}\right|_0^R = \frac{4\pi\, R^3}{3}$$

$$\boxed{\iiint_V dxdydz = \frac{4\pi\, R^3}{3}}$$