CAPÍTULO 8

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

ECUACIONES DIFERENCIALES

Recibe el nombre de Ecuación Diferencial toda ecuación que establece una relación entre la variable independiente x, la función buscada $y = f(x)$ y sus derivadas $y', y'', \ldots\ldots\ldots\ldots, y^{[n]}$.

$$F(x, y, y', y'', \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y^{[n]}) = 0$$

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{d^n y}{dx^n}) = 0$$

Ejemplos:

$$y'' + 2.y'.y^3 + x^4 = 0$$

$$(y''')^2 + y'.x^3 + y^3 - 2 = 0$$

Si la función buscada es de una sola variable independiente, como la indicada precedentemente es una **Ecuación Diferencial Ordinaria.**

Si la función buscada es de dos o más variables independientes, se llama **Ecuación Diferencial en Derivadas Parciales:**

$$F(x, y, z, u, \frac{\partial u}{dx}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) = 0$$

Comenzaremos estudiando las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Definamos:

El **Orden** de una Ecuación Diferencial es el de la derivada superior que interviene en la ecuación.

El **Grado** de una Ecuación Diferencial está dado por el exponente al que está elevada la derivada de mayor orden.

Ejemplos:

$y'' + 2y'y^3 + x^4 = 0$ Es una Ecuación Diferencial de segundo orden y de primer grado.

$(y''')^2 + y'x^3 + y^3 - 2 = 0$ Es una Ecuación Diferencial de tercer orden y de segundo grado.

Se llama **Solución o Integral** de la Ecuación Diferencial a toda función $y = f(x)$ que introducida en la ecuación, la transforma en una identidad. Si la Solución está dada en forma implícita, $\varphi(x, y) = 0$, generalmente se llama Integral.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Estas Ecuaciones Diferenciales son de la forma:

$$F(x, y, y') = 0$$

Se llama **Solución General** de una Ecuación Diferencial de Primer Orden a la función:

$$y = f(x, C)$$

que satisface a la Ecuación Diferencial para cualquier valor de C. Siendo C una constante arbitraria.

Si se fija una Condición Inicial $y = y_0$ para $x = x_0$, se puede encontrar un valor de $C = C_0$, tal que la función:

$$y = f(x, C_0)$$

satisfaga la Condición Inicial dada. Esta última se llama **Solución Particular**.

Desde el punto de vista geométrico, la Solución General representa una familia de curvas en el plano de coordenadas. Estas curvas se llaman **Curvas Integrales** de la Ecuación Diferencial dada.

Cada Solución Particular está representada por una curva de esta familia.

Ejemplo:

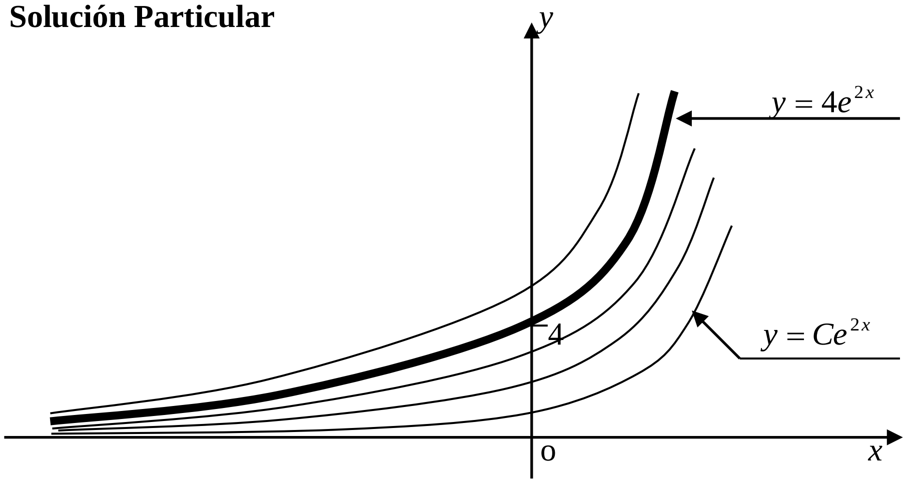
Dada la Ecuación Diferencial de Primer Orden $y' = 2y$, la expresión $y = Ce^{2x}$ es una Solución para cualquier valor de C, siendo ésta una constante arbitraria cuyo valor queda determinado si se da una “Condición Inicial”.

Por ejemplo si fijamos que $y_0 = 4$ para $x_0 = 0$ resultará:

$$y = Ce^{2x} \qquad \Rightarrow \qquad 4 = Ce^{0} \qquad \Rightarrow \qquad C = 4 \qquad \therefore$$

$\boxed{y = Ce^{2x}}$ **Solución General**

$\boxed{y = 4e^{2x}}$ **Solución Particular**



ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN CON VARIABLES SEPARABLES

Las Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden con Variables Separables son aquellas que pueden expresarse de la siguiente manera:

$$\boxed{f(x)dx + g(y)dy = 0}$$

Esta Ecuación puede considerarse como la suma de dos diferenciales. Integrando el primer término respecto a "x" y el segundo respecto a "y" obtendremos la Solución General:

$$\boxed{\int f(x)dx + \int g(y)dy = 0}$$

Ejemplo:

Sea la Ecuación Diferencial: $x + yy' = 0$

Es una Ecuación Diferencial de Primer Orden con Variables Separables, pues la podemos expresar así:

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad xdx + ydy = 0$$

Integramos y obtenemos la Solución General:

$$\int xdx + \int ydy = 0$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1$$

Dada la forma del primer miembro, el segundo siempre será positivo, y podemos considerar:

$$2.C_1 = C^2$$

Con lo que resultará:

$\boxed{x^2 + y^2 = C^2}$ **Solución General**

Corresponde a una familia de circunferencias concéntricas e radio C y centro en el origen de coordenadas.

Fijando una Condición Inicial, por ejemplo $y(4) = 3$, podemos obtener la Solución Particular correspondiente:

$$4^2 + 3^2 = C_0^2 \qquad \Rightarrow \qquad C_0 = 5$$

$\boxed{x^2 + y^2 = 25}$ **Solución Particular**

Esta Solución Particular corresponde a una circunferencia con centro en el origen de coordenadas de radio igual a 5.

ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS DE PRIMER ORDEN

Antes de comenzar recordemos que una función $f(x, y)$ se llama homogénea de grado "n" respecto de las variables x e y, si para todo λ se cumple que:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

Por ejemplo la función $f(x, y) = (x + y)^3$ es una función homogénea de tercer grado respecto de las variables x e y pues:

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x + \lambda y)^3 = \lambda^3 (x + y)^3 = \lambda^3 f(x, y)$$

Y la función $f(x, y) = \dfrac{3xy^2 - y^3}{2x^3}$ es una función homogénea de grado cero respecto de las variables x e y pues:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{3\lambda x(\lambda y)^2 - (\lambda y)^3}{2(\lambda x)^3} = \frac{\lambda^3(3xy^2 - y^3)}{\lambda^3 x^3} = \lambda^o f(x, y) = f(x, y)$$

Ahora definamos que la siguiente Ecuación Diferencial:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x, y)} \qquad (1)$$

Será una Ecuación Diferencial Homogénea de Primer Orden si la función $f(x, y)$ es una función homogénea de grado cero respecto de las variables x e y, es decir si:

$$\boxed{f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)} \qquad (2)$$

Por ejemplo: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3xy^2 - y^3}{2x^3}$

<u>Otra forma de definirlas</u>:

La Ecuación Diferencial $M(x, y).dx + N(x, y).dy = 0$

Será una Ecuación Diferencial Homogénea de Primer Orden si las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son funciones homogéneas del mismo grado respecto de las variables x e y. Pues resultará:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

Y la razón de dos funciones homogéneas de un mismo grado es una función homogénea de grado cero.

Por ejemplo: $(y^3 - 3xy^2)dx + 2x^3 dy = 0$

<u>Solución de una Ecuación Diferencial Homogénea de Primer Orden</u>

Partiendo de la hipótesis de que:

$$f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y)$$

Y considerando $\lambda = \dfrac{1}{x}$ obtendremos:

$$f(x, y) = f(1, \frac{y}{x})$$

La Ecuación Diferencial (1) toma la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(1, \frac{y}{x}) \qquad (3)$$

Considerando ahora: $\dfrac{y}{x} = u$ o sea $y = u.x$

Derivamos: $\dfrac{dy}{dx} = u + \dfrac{du}{dx} x$

Reemplazamos en la expresión (3) y obtenemos:

$$u + \frac{du}{dx} x = f(1, u) \qquad (4)$$

Ésta resulta ser una Ecuación Diferencial de Primer Orden con Variables Separables:

$$\frac{du}{f(1,u)-u}=\frac{dx}{x} \qquad (5)$$

Integramos: $$\int\frac{du}{f(1,u)-u}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\boxed{\int\frac{du}{f(1,u)-u}=\ln x+C}$$

Luego de integrar, se sustituye u por su igualdad $\frac{y}{x}$ y se obtiene la **Solución General** de la Ecuación Diferencial Homogénea de Primer Orden planteada.

<u>Ejemplo</u>:
Resolver la siguiente Ecuación Diferencial: $2y^2-x^2y'-2xyy'=0$.

Reordenamos los términos: $$\frac{dy}{dx}=\frac{2y^2}{x^2+2xy} \qquad (1)$$

Comprobamos si es una Ecuación Diferencial Homogénea de Primer Orden:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{2(\lambda y)^2}{(\lambda x)^2+2\lambda x\lambda y}=\frac{\lambda^2 2y^2}{\lambda^2(x^2+2xy)}=\frac{2y^2}{x^2+2xy}=f(x,y)$$

Hemos comprobado que es una Ec. Dif. Homogénea, hallemos ahora la Solución General, partiendo de la hipótesis:

$$f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y) \qquad (2)$$

Hacemos: $$\lambda=\frac{1}{x}$$

$$f(1,\frac{y}{x})=\frac{2(\frac{1}{x}y)^2}{(\frac{1}{x}x)^2+2\frac{1}{x}x\frac{1}{x}y}=\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+2\frac{y}{x}} \qquad \therefore$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+2\frac{y}{x}} \qquad (3)$$

Hacemos el cambio de variables:
$$\begin{cases}\boxed{\frac{y}{x}=u} \quad \Rightarrow \quad y=u.x\\ \frac{dy}{dx}=u+\frac{du}{dx}x\\ f(1,u)=\frac{2u^2}{1+2u}\end{cases}$$

Reemplazamos en (3) y obtenemos:

$$u+\frac{du}{dx}x=\frac{2u^2}{1+2u} \qquad (4)$$

Ésta resulta ser una Ecuación Diferencial de Primer Orden con Variables Separables, separamos las variables:

$$\frac{du}{dx}x=\frac{2u^2}{1+2u}-u=\frac{2u^2-u-2u^2}{1+2u}=-\frac{u}{1+2u}$$

$$\left(-\frac{1+2.u}{u}\right)du=\frac{dx}{x}$$

$$\left(-\frac{1}{u}-2\right)du=\frac{dx}{x} \qquad (5)$$

Integramos:

$$\int\left(-\frac{1}{u}-2\right)du=\int\frac{dx}{x}$$

$-\ln u-2u=\ln x+C_1$ Para obtener la Solución General reemplazamos $\boxed{\frac{y}{x}=u}$

$$-\ln\frac{y}{x}-2\frac{y}{x}=\ln x+C_1$$

$$-\ln y+\ln x-2\frac{y}{x}=\ln x+C_1$$

$-\ln y-2\frac{y}{x}=C_1$ o haciendo $-C_1=C$

$$-\ln y-2\frac{y}{x}=-C$$

$\boxed{\ln y+2\frac{y}{x}=C}$ **Solución General**

Obtengamos una Solución Particular estableciendo como Condición Inicial $y_0=1$ para $x_0=1$:

$\ln 1+2\frac{1}{1}=C_0 \qquad \Rightarrow \qquad C_0=2$

$\boxed{\ln y+2\frac{y}{x}=2}$ **Solución Particular**

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN

La Ecuación Diferencial que es lineal respecto a la función desconocida (y) y su derivada (y'), recibe el nombre de Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden, y tiene la forma:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)} \qquad (1)$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones de “x” o constantes.

Para resolver este tipo de ecuaciones daremos a la Solución la forma de un producto de dos funciones de “x”, de esta forma transformamos la Ecuación Diferencial Lineal en dos Ecuaciones Diferenciales con Variables Separables. Proponemos como Solución de la Ecuación (1), la siguiente:

$$\boxed{y=u(x).v(x)} \qquad (2)$$

Derivamos:

$$\frac{dy}{dx}=u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}$$

Sustituimos lo obtenido en la Ecuación Diferencial (1):

$$u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}+Puv=Q$$

$$u.\left(\frac{dv}{dx}+P.v\right)+v.\frac{du}{dx}=Q \qquad (3)$$

Elijamos un valor de v conveniente de modo que resulte:

$$\frac{dv}{dx}+Pv=0$$

Ésta es una Ecuación Diferencial de Primer Orden con Variables Separables, separamos las variables:

$$\frac{dv}{v} = -Pdx$$

Integrando obtenemos:

$$\int \frac{dv}{v} = -\int Pdx$$

$$\ln v = -\int P.dx + C_1$$

Como solo necesitamos un valor de v, consideramos $C_1 = 0$:

$$\ln v = -\int Pdx$$ Por definición de Logaritmo resulta:

$$\boxed{v = e^{-\int P.dx}} \quad (4)$$

Reemplazamos este valor de v en la expresión (3) y recordando que el paréntesis de la misma es igual a cero, será:

$$e^{-\int P.dx} \frac{du}{dx} = Q$$

Ésta es otra Ecuación Diferencial de Primer Orden con Variables Separables, separamos las variables:

$$\frac{du}{dx} = e^{\int P.dx} Q$$

Integramos:

$$\boxed{u = \int e^{\int P.dx} Qdx + C} \quad (5)$$

Reemplazando en la expresión (2) los valores de u y v obtenidos en (5) y (4) respectivamente, tendremos la Solución General de la Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden (1) planteada:

$$\boxed{y = e^{-\int P(x).dx}\left[\int e^{\int P(x).dx} Q(x)dx + C\right]}$$ **Solución General**

Ejemplo:

Hallar la Solución de la siguiente Ecuación Diferencial $y' + 3x^2 y = 6x^2$ (1)

Proponemos una Solución de la forma: $y = u(x).v(x)$ (2)

Derivamos: $\frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$

Sustituimos lo obtenido en la Ecuación Diferencial (1):

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} + 3x^2 uv = 6x^2$$

$$u\left(\frac{dv}{dx} + 3x^2 v\right) + v \cdot \frac{du}{dx} = 6x^2 \quad (3)$$

Elijamos un valor de v conveniente de modo que resulte:

$$\frac{dv}{dx} + 3x^2 v = 0$$

Ésta es una Ecuación Diferencial de Primer Orden con Variables Separables, separamos las variables:

$\frac{dv}{v} = -3x^2 dx$ integramos $\int \frac{dv}{v} = -\int 3x^2 dx$ y obtenemos:

$$\ln v = -x^3 + C_1$$

Como solo necesitamos un valor de v, consideramos $C_1 = 0$:

$\ln v = -x^3$ Por definición de Logaritmo resulta:

$$\boxed{v = e^{-x^3}} \quad (4)$$

Reemplazamos este valor de v en la expresión (3) y recordando que el paréntesis de la misma es igual a cero, será:

$$e^{-x^3}\frac{du}{dx}=6x^2$$

Ésta es otra Ecuación Diferencial de Primer Orden con Variables Separables, separamos las variables:

$$\frac{du}{dx}=6x^2e^{x^3}$$

Integramos:

$$u=\int 6x^2e^{x^3}dx+C$$

$$\boxed{u=2e^{x^3}+C} \qquad (5)$$

Reemplazando en la expresión (2) los valores de u y v obtenidos en (5) y (4) respectivamente, tendremos la Solución General de la Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden (1) planteada:

$$y=\left(2e^{x^3}+C\right)e^{-x^3} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{y=2+Ce^{-x^3}}$$ **Solución General**

Fijemos la siguiente Condición Inicial $y(0)=5$, y obtengamos la Solución Particular correspondiente:

$$5=2+C_0e^0$$

$$C_0=3 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{y=2+3e^{-x^3}}$$ **Solución Particular**

ECUACIONES DIFERENCIALES DE BERNOULLI

Son de la forma:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n} \qquad (1)$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones de "x" o constantes.

$n\neq 0$ y $n\neq 1$ (en caso contrario resultaría ser una Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden).

Toda Ecuación Diferencial de Bernoulli puede reducirse a una Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden mediante la siguiente transformación:

- Multiplicamos ambos miembros de la Ecuación (1) por $\boxed{(1-n)y^{-n}}$

  $$(1-n)y^{-n}\cdot\frac{dy}{dx}+(1-n)P(x)y^{1-n}=(1-n)Q(x) \qquad (2)$$

- Realizamos el siguiente cambio de variables: $\boxed{z=y^{1-n}}$

  Derivamos: $\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\cdot\frac{dy}{dx}$

- Reemplazamos en la (2) y obtendremos Una Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden:

  $$\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x) \qquad (3)$$

- Considerando:

  $(1-n)P(x)=P_1(x)$

  $(1-n)Q(x)=Q_1(x)$ obtendremos: $\boxed{\frac{dz}{dx}+P_1(x)z=Q_1(x)}$ (4)

- Ésta es una Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden cuya Solución General, tal como vimos, es de la forma:

$$\boxed{z=e^{-\int P_1(x).dx}\left[\int e^{\int P_1(x).dx}Q_1(x)dx+C\right]}$$ **Solución General**

Finalmente, luego de integrar, sustituimos a z por su igualdad $\boxed{z = y^{1-n}}$, y obtendremos la Solución General de la Ecuación Diferencial de Bernoulli planteada.

<u>Ejemplo</u>:

Hallar la Solución de la siguiente Ecuación Diferencial de Bernoulli:

$$\frac{dy}{dx} + 2y = y^3 \qquad (1) \qquad \text{es decir que} \qquad \begin{cases} P(x) = 2 \\ Q(x) = 1 \\ n = 3 \qquad \Rightarrow \qquad 1-n = -2 \end{cases}$$

Transformamos esta Ecuación Diferencial de Bernoulli en una Ecuación Diferencial Lineal:

- Multiplicamos ambos miembros de la Ecuación (1) por $\boxed{-2y^{-3}}$

$$-2y^{-3} \cdot \frac{dy}{dx} + \left(-2y^{-3}\right)2y = -2y^{-3}y^3$$

$$-2y^{-3} \cdot \frac{dy}{dx} - 4y^{-2} = -2 \qquad (2)$$

- Realizamos el siguiente cambio de variables: $\boxed{z = y^{-2}}$

  Derivamos: $\dfrac{dz}{dx} = -2y^{-3} \cdot \dfrac{dy}{dx}$

- Reemplazamos en la (2) y obtendremos Una Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden:

$$\boxed{\frac{dz}{dx} - 4z = -2} \qquad (4)$$

- Ésta es una Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden cuya Solución General podemos obtener proponiendo una Solución de la forma:

$$\boxed{z = u(x)v(x)} \qquad (5)$$

Derivamos:

$$\frac{dz}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

Sustituimos lo obtenido en la Ecuación Diferencial (4):

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} - 4uv = -2$$

$$u\left(\frac{dv}{dx} - 4v\right) + v \cdot \frac{du}{dx} = -2 \qquad (6)$$

Elijamos un valor de v conveniente de modo que resulte:

$$\frac{dv}{dx} - 4v = 0$$

Ésta es una Ecuación Diferencial de Primer Orden con Variables Separables, separamos las variables:

$$\frac{dv}{v} = 4dx \qquad \text{integramos} \qquad \int \frac{dv}{v} = \int 4dx \qquad \text{y obtenemos:}$$

$\ln v = 4x + C_1$ como solo necesitamos un valor de "v" consideramos $C_1 = 0$

y por definición de Logaritmo resulta:

$$\boxed{v = e^{4x}} \qquad (7)$$

Reemplazamos este valor de v en la expresión (6) y recordando que el paréntesis de la misma es igual a cero, será:

$$e^{4x}\cdot\frac{du}{dx}=-2$$

Ésta es otra Ecuación Diferencial de Primer Orden con Variables Separables, separamos las variables:

$$\frac{du}{dx}=-2e^{-4x}$$

Integramos y obtenemos:

$$u=\int(-2)e^{-4x}dx+C$$

$$\boxed{u=\frac{1}{2}e^{-4x}+C} \qquad (8)$$

Reemplazando en la expresión (5) los valores de u y v obtenidos en (8) y (7) respectivamente, tendremos la Solución de la Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden (4) planteada:

$$z=\left(\frac{1}{2}e^{-4x}+C\right)e^{4x} \qquad \Rightarrow \qquad z=\frac{1}{2}+Ce^{4x}$$

- Ahora sustituimos a z por su igualdad $\boxed{z=y^{-2}}$, y obtenemos la Solución General de la Ecuación Diferencial de Bernoulli (1) planteada:

$$\boxed{y^{-2}=\frac{1}{2}+Ce^{4x}} \qquad \text{o} \qquad y=\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}+Ce^{4x}}}$$ **Solución General**

- Fijemos como Condición Inicial $y_0=0$ para $x_0=0$ y hallemos la Solución Particular correspondiente:

$$0=\frac{1}{2}+C_0e^{0} \qquad \Rightarrow \qquad C_0=-\frac{1}{2}$$

$$\boxed{y^{-2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{4x}} \qquad \text{o} \qquad y=\sqrt{\frac{2}{1-e^{4x}}}$$ **Solución Particular**

ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS (O TOTALES)

Las Ecuaciones Diferenciales de la forma:

$$\boxed{P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0} \qquad (1)$$

Son Ecuaciones Diferenciales Totales o Exactas si $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son funciones continuas y derivables que verifican la igualdad:

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}} \qquad (2)$$

Demostraremos que si se cumple la igualdad (2), el primer miembro de la Ecuación (1) es el Diferencial Total de una función $u(x,y)$, es decir que la Ecuación (1) es de la forma:

$$du(x,y)=0$$

Y su Solución General será: $u(x,y)=C$

Recordar que ya estudiamos este problema en el Capítulo 6 – Integrales Curvilíneas (Obtención de la Función Potencial)

Para demostrarlo supongamos que la Ecuación (1) es el Diferencial Total de cierta función $u(x,y)$, es decir:

$$P(x,y).dx+Q(x,y).dy=du=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot dy$$

Por lo tanto:

$$P=\frac{\partial u}{\partial x} \qquad\qquad Q=\frac{\partial u}{\partial y}$$

Si derivamos la primera igualdad con respecto a "y" y la segunda respecto a "x" obtendremos:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} \qquad\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$$

Por lo tanto si las segundas derivadas son continuas, tendremos:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Por lo tanto la igualdad (2) es condición necesaria y suficiente para que el primer miembro de la Ecuación (1) sea un Diferencial Total.

La Solución General de la Ecuación Diferencial Total (1) se puede obtener a partir de cualquiera de las dos formas siguientes:

1º) <u>Obtención de la Solución General a partir de la expresión</u>:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)}$$

Integramos: $$u=\int Pdx+\varphi(y) \qquad (3)$$

De esta expresión tenemos que hallar el valor de $\varphi(y)$, para lo cual derivamos respecto a "y":

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial\left(\int Pdx\right)}{\partial y}+\varphi'(y)$$

Pero sabemos que $\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$, entonces reemplazamos:

$$\frac{\partial\left(\int Pdx\right)}{\partial y}+\varphi'(y)=Q$$

$$\varphi'(y)=Q-\frac{\partial\left(\int Pdx\right)}{\partial y}$$

Integramos: $$\varphi(y)=\int\left[Q-\frac{\partial\left(\int Pdx\right)}{\partial y}\right]dy+C_1$$

A este valor de $\varphi(y)$ obtenido se lo reemplaza en la expresión (3) y se obtiene la Solución General.

$$u(x,y)=\int Pdx+\int\left[Q-\frac{\partial\left(\int Pdx\right)}{\partial y}\right]dy+C_1$$

$$\boxed{\int Pdx+\int\left[Q-\frac{\partial\left(\int Pdx\right)}{\partial y}\right]dy=C}$$ **<u>Solución General</u>**

2º) Obtención de la Solución General a partir de la expresión:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)}$$

Integramos: $$u = \int Q dy + \psi(x) \qquad (4)$$

De esta expresión tenemos que hallar el valor de $\psi(x)$, para lo cual derivamos respecto a "x":

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial\left(\int Q dy\right)}{\partial x} + \psi'(x)$$

Pero sabemos que $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$, entonces reemplazamos:

$$\frac{\partial\left(\int Q.dy\right)}{\partial x} + \psi'(x) = P$$

$$\psi'(x) = P - \frac{\partial\left(\int Q dy\right)}{\partial x}$$

Integramos: $$\psi(x) = \int\left[P - \frac{\partial\left(\int Q dy\right)}{\partial x}\right]dx + C_2$$

A este valor de $\psi(x)$ obtenido se lo reemplaza en la expresión (4) y se obtiene la Solución General.

$$u(x,y) = \int Q dy + \int\left[P - \frac{\partial\left(\int Q dy\right)}{\partial x}\right]dx + C_2$$

$$\boxed{\int Q dy + \int\left[P - \frac{\partial\left(\int Q dy\right)}{\partial x}\right]dx = C}$$ **Solución General**

Ejemplo:
Determinar la Solución de la siguiente Ecuación Diferencial:

$$-\frac{y^3}{x^2}dx + \left(\frac{3y^2}{x} + 3\right)dy = 0 \qquad (1)$$

Primero verificamos si es una Ecuación Diferencial Total o Exacta:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{3y^2}{x^2} \qquad\qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{3y^2}{x^2}$$

Se cumple que $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (2)$$

Por lo tanto es una Ecuación Diferencial Total o Exacta.

Determinemos la Solución General a partir de la expresión:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y^3}{x^2}}$$

Integramos: $$u = \frac{y^3}{x} + \varphi(y) \qquad (3)$$

Para determinar el valor de $\varphi(y)$, derivamos ahora con respecto a “y”:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3y^2}{x} + \varphi'(y)$$

Pero sabemos que Pero sabemos que $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$, es decir $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3y^2}{x} + 3$ entonces reemplazamos:

$$\frac{3y^2}{x} + \varphi'(y) = \frac{3y^2}{x} + 3 \qquad \therefore$$

$$\varphi'(y) = 3$$

Integramos: $\varphi(y) = 3y + C_1$

Reemplazamos este valor de $\varphi(y)$ en la (3):

$$u = \frac{y^3}{x} + 3y + C_1 \qquad \text{ó}$$

$$\boxed{\frac{y^3}{x} + 3y = C}$$

<u>Solución General</u>

Obtengamos una Solución Particular considerando la siguiente Condición Inicial: $y_0 = 1$ para $x_0 = -1$

Reemplazamos en la Solución General y tenemos:

$$-1 + 3 = C_0 \qquad \Rightarrow \qquad C_0 = 2$$

$$\boxed{\frac{y^3}{x} + 3y = 2}$$

<u>Solución Particular</u>

<u>*Nota*</u>*:*

También podríamos haber obtenido la Solución General a partir de la expresión:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)}$$

Integramos: $u = \frac{y^3}{x} + 3y + \psi(x)$ (4)

Para determinar el valor de $\psi(x)$, derivamos ahora con respecto a “x”:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y^3}{x^2} + \psi'(x)$$

Pero sabemos que Pero sabemos que $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$, es decir $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y^3}{x^2}$ entonces reemplazamos:

$$-\frac{y^3}{x^2} + \psi'(x) = -\frac{y^3}{x^2} \qquad \therefore$$

$$\psi'(x) = 0$$

Integramos: $\psi(x) = C_2$

Reemplazamos este valor de $\psi(x)$ en la (4):

$$u = \frac{y^3}{x} + 3y + C_2 \qquad \text{ó}$$

$$\boxed{\frac{y^3}{x} + 3y = C}$$

<u>Solución General</u>

SOLUCIONES SINGULARES

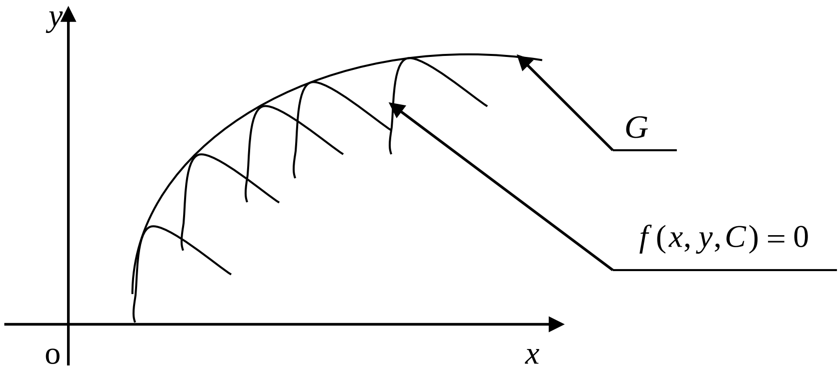
Una Ecuación Diferencial puede tener Soluciones que no se deducen dándoles valores a las Constantes Arbitrarias de las Soluciones Generales. Estas Soluciones, si existen, reciben el nombre de **Soluciones Singulares.** Describamos un caso de Soluciones Singulares:
Consideremos la Ecuación Diferencial:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad (1)$$

Cuya Solución General es la familia de curvas:

$$f(x, y, C) = 0 \qquad (2)$$

Recordemos que si una curva G es envolvente de una familia de curvas, entonces cada una de estas curvas es tangente a G.



Si suponemos que la familia de curvas (2) tiene una envolvente y puesto que en cada punto (x, y) la pendiente de la envolvente es igual a la de la curva que es tangente en ese punto, deducimos que la envolvente satisface también a la Ecuación Diferencial (1).
En general la envolvente no pertenece a la familia definida por (2) y no se la puede obtener dándole valores a la constante C de la misma. Es por lo tanto una Solución Singular de la Ecuación Diferencial.
La ecuación de la envolvente (si existe), se encuentra eliminando la constante C entre las ecuaciones:

$$\begin{cases} f(x, y, C) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial C} = 0 \end{cases}$$

<u>Ejemplo</u>:
Hallar la Solución Singular de la siguiente Ecuación Diferencial:

$$y^2 + y^2 (y')^2 = 4 \qquad (1)$$

Primero determinamos la Solución General. Es una Ecuación Diferencial con Variables Separables.
Separamos las variables:

$$y^2 (y')^2 = 4 - y^2$$

$$(y')^2 = \frac{4 - y^2}{y^2}$$

$$y' = \frac{\pm\sqrt{4 - y^2}}{y} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\pm\sqrt{4 - y^2}}{y}$$

$$\frac{y}{\pm\sqrt{4 - y^2}} \cdot dy = dx$$

Integramos: $\pm\sqrt{4 - y^2} + C = x$ y reordenando términos obtenemos:

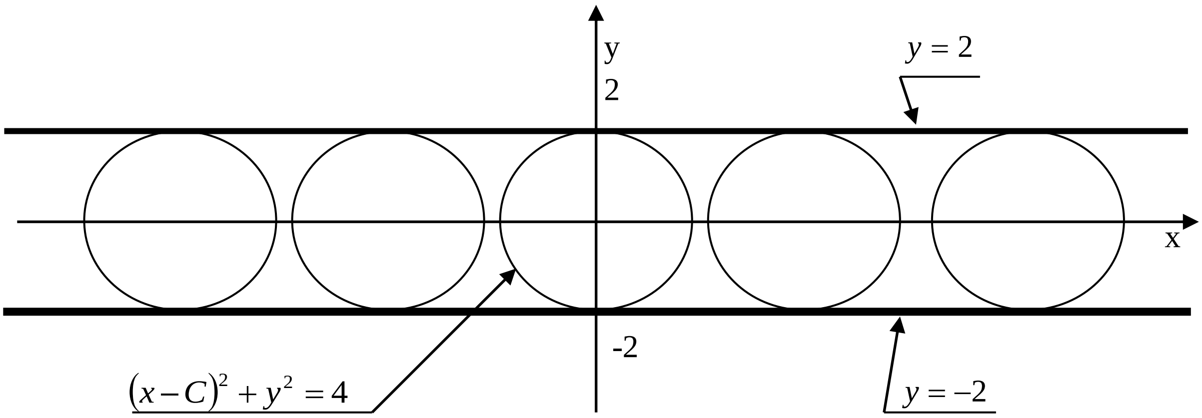
$$\boxed{(x - C)^2 + y^2 = 4} \qquad \textbf{Solución General} \qquad (2)$$

Esta Solución General es una familia de circunferencias de radio $R = 2$ y centro sobre el eje de las abscisas.

$$\begin{cases} f(x,y,C) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial C} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-C)^2 + y^2 = 4 \\ -2x + 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad y = \pm 2$$

Que son dos rectas envolventes a la familia de circunferencias y como satisfacen a la Ecuación Diferencial (1) son Soluciones Singulares.

$\boxed{y = 2}$ e $\boxed{y = -2}$ **Soluciones Singulares**



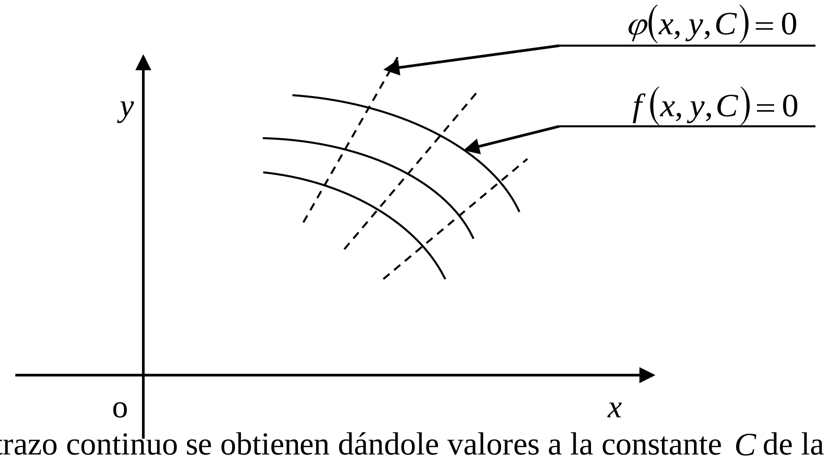
TRAYECTORIAS ORTOGONALES

Dada la familia de curvas:

$$f(x,y,C) = 0 \qquad (1)$$

Las líneas que cortan a las curvas de la familia dada, formando ángulo recto, se llaman **Trayectorias Ortogonales.**

En diversas investigaciones prácticas es necesario determinar Trayectorias Ortogonales de alguna familia de curvas.



En el gráfico las curvas de trazo continuo se obtienen dándole valores a la constante C de la función (1).

Obtengamos la Ecuación Diferencial de esta familia de curvas eliminando C entre la función (1) y su derivada:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (2)$$

Y sea la Ecuación Diferencial resultante:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad (3)$$

Donde $\frac{dy}{dx}$ es el coeficiente angular de la tangente a una curva de la familia en un punto dado.
Por definición la familia de curvas ortogonales corta a las curvas de la familia dada formando ángulos rectos, por lo tanto la pendiente en cada punto de una curva de la familia ortogonal es inversa y de signo contrario que la pendiente de las curvas de la familia dada.
Es decir que la Ecuación Diferencial de la Trayectorias Ortogonales será:

$$F\left(x, y, -\frac{dx}{dy}\right) = 0 \qquad (4)$$

Que es una Ecuación Diferencial de Primer Orden y su Solución General es de la forma:

$$\varphi(x, y, C) = 0 \qquad (5)$$

Ejemplo:
Determinar las Trayectorias Ortogonales de la familia de circunferencias concéntricas:

$$x^2 + y^2 = C^2 \qquad (1)$$

Para obtener la Ecuación Diferencial de esta familia de curvas, derivemos:

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \qquad (3)$$

La Ecuación Diferencial de la familia de curvas ortogonales es:

$$2x - 2y \cdot \frac{dx}{dy} = 0 \qquad (4)$$

Obtengamos ahora la Solución General de esta Ecuación Diferencial. Es una Ecuación Diferencial de Primer Orden con Variables Separables. Separemos las variables:

$$2x = 2y \cdot \frac{dx}{dy}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Integramos: $\ln y = \ln x + \ln C \quad \Rightarrow \quad \ln y = \ln Cx$

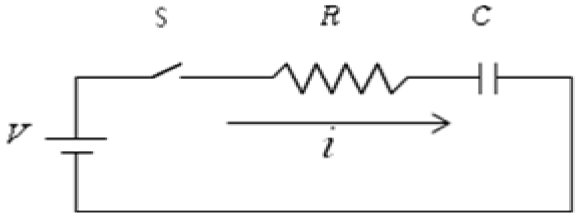
Y finalmente la familia de Trayectorias Ortogonales finalmente resulta:

$$\boxed{y = Cx} \qquad (5)$$

APLICACIONES

Veamos algunos problemas prácticos de aplicación de las Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden:

Ejemplo 1:
En el siguiente circuito *RC* con una fuente de alimentación de corriente continua (*V* = constante) determinemos la corriente *i(t)* en el intervalo *t* [0,∞]. En el instante *t*=0 se cierra el interruptor S (consideremos que en *t*=0 el capacitor está descargado).



De acuerdo con la ley de Kirchhoff de las tensiones, la tensión aplicada *V* es igual a la suma de las caídas de tensión v_R y v_C a través de la resistencia *R* y el capacitor *C* respectivamente:

$$V = v_R + v_C$$

$$V = iR + \frac{1}{C}\int i\,dt$$

Para eliminar la integral, derivamos en ambos miembros de la igualdad con respecto a *t*, y reordenando los términos obtenemos la siguiente Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden:

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} i = 0$$

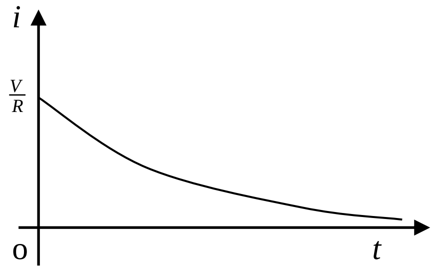
Si resolvemos esta ecuación obtendremos su Solución General:

$$\boxed{i = Ke^{-\frac{1}{RC}t}}$$

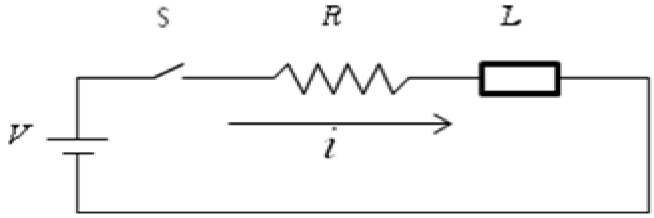
Donde *K* es la constante de integración. Determinemos su valor.
Como consideramos que en el instante *t=0* el capacitor estaba descargado, entonces para *t=0* resulta $i_0 = \frac{V}{R}$, entonces reemplazando estos valores en la Solución General obtendremos $K = \frac{V}{R}$.
Finalmente la Solución Particular correspondiente resulta:

$$\boxed{i = \frac{V}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}}$$

Se puede observar que al ser negativo el exponente de *e*, a medida que transcurre el tiempo $e^{-\frac{1}{RC}t}$ se hace cada vez más pequeño.



Ejemplo 2:
Determinemos ahora *i(t)* a partir del instante $t=0$ en el que se cierra el interruptor S en el siguiente circuito *RL*.



De acuerdo con la ley de Kirchhoff de las tensiones, la tensión aplicada *V* es igual a la suma de las caídas de tensión v_R y v_L a través de la resistencia *R* y el inductor *L* respectivamente:

$$V = v_R + v_L$$

$$V = iR + L\frac{di}{dt}$$

Reordenando los términos obtenemos la siguiente Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}$$

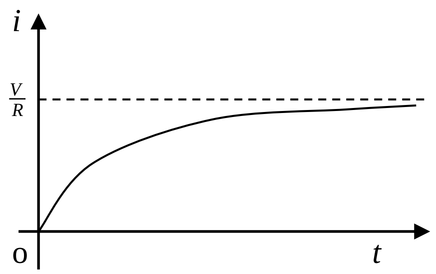
Si resolvemos esta ecuación obtendremos su Solución General:

$$\boxed{i = \frac{V}{R} + Ke^{-\frac{R}{L}t}}$$

Donde *K* es la constante de integración. Determinemos su valor, para ello aceptemos sin demostrar que en el instante $t=0$ resulta $i_0 = 0$, entonces reemplazando estos valores en la Solución General obtendremos $K = -\frac{V}{R}$.
Finalmente la Solución Particular correspondiente resulta:

$$\boxed{i = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t}} \qquad \text{ó} \qquad \boxed{i = \frac{V}{R}\left[1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right]}$$

Al ser negativo el exponente de *e*, a medida que transcurre el tiempo $e^{-\frac{R}{L}t}$ se hace cada vez más pequeño.



Ejemplo 3:

Ley de Newton del enfriamiento o calentamiento

Esta ley indica que la variación de la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la temperatura ambiente.

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = k(T - T_a)}$$

$\begin{cases} T(t)\text{: Temperatura del objeto cuando } T>0 \\ T_a\text{ : Temperatura ambiente} \\ K\text{ : Constante de proporcionalidad} \end{cases}$

Ésta es una Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden y Con Variables Separables a la vez. Resolvámosla como Ecuación Diferencial con Variables Separables:

$$\frac{dT}{T - T_a} = kdt \qquad \text{integramos:}$$

$$\int \frac{dT}{T - T_a} = \int kdt$$

$$\ln(T - T_a) = kt + C_1 \qquad \text{y por definición de logaritmo resulta}$$

$$T - T_a = e^{kt + C_1}$$

$$\boxed{T = Ce^{kt} + T_a} \qquad \text{Solución General}$$

Supongamos como ejemplo que un horno está a 210 ºC en el instante en que se lo apaga y que 5 minutos después su temperatura disminuyó a 180 ºC. Deseamos determinar cuánto demorará en enfriarse a la temperatura ambiente (T_a = 25 ºC), entonces tendremos:

$$T = Ce^{kt} + 25$$

Determinemos el valor de la constante C para la condición inicial ($T_o=210$ ºC en el instante $t_o=0$):

$$210 = C_0 e^0 + 25 \qquad \Rightarrow \qquad C_0 = 185$$

La Solución Particular resulta:

$$T = 185e^{kt} + 25$$

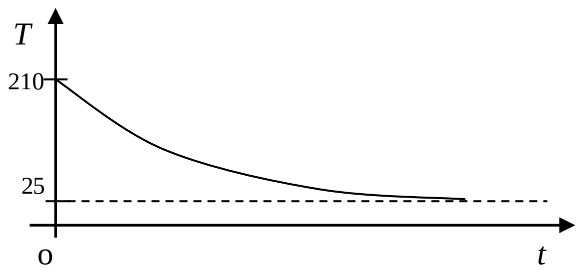
Obtengamos ahora el valor de la constante de proporcionalidad k en base al dato de que transcurridos 5 minutos la temperatura del horno bajó a 180 ºC:

$$180 = 185e^{5k} + 25 \qquad \Rightarrow \qquad e^{5k} = \frac{180 - 25}{185} \qquad \Rightarrow \qquad \ln\frac{155}{185} = 5k$$

$$k = -0.0353861$$

Finalmente obtenemos:

$$\boxed{T = 185e^{-0.0353861t} + 25}$$



Podemos deducir que nunca llegará a la temperatura ambiente. Pero podemos comprobar que pasadas unas dos horas la temperatura llega 27,6 ºC y transcurridas unas tres horas prácticamente la temperatura del horno llega a la temperatura ambiente (T_a = 25 ºC).

$$T(180') = 185e^{-0.0353861x180} + 25 = 25.3\,°C$$

Ejemplo 4:
Un pueblo tiene en la actualidad 1000 habitantes y su población ha venido creciendo a razón de 10 % cada 5 años. Deseamos determinar: A) ¿Qué cantidad de habitantes tendrá dentro de 20 años?, B) ¿Cuántos años tardará en duplicarse la población?

La población crece en forma proporcional a la cantidad de habitantes, por lo tanto resulta:

$$\frac{dy}{dt} = ky \qquad \left\{ \begin{array}{l} y : \text{cantidad de habitantes} \\ \\ k : \text{constante de proporcionalidad} \end{array} \right.$$

Es una Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden y con Variables Separables a la vez, si la resolvemos como Ecuación Diferencial con Variables Separables tendremos:

$$\frac{dy}{y} = kdt \qquad \text{integramos:} \qquad \ln y = k\,t + C_1$$

$$\boxed{y = Ce^{k\,t}} \qquad \text{Solución General}$$

Obtengamos el valor de la constante de integración C a partir de la condición inicial (y_o = 1000 para t_o=0):

$$1000 = C_0 e^0 \qquad \Rightarrow \qquad C_0 = 1000$$

Tenemos la Solución Particular:

$$y = 1000 e^{k\,t}$$

Determinemos ahora el valor de la constante de proporcionalidad k basándonos en el dato de que la población crece a razón de 10 % cada 5 años (es decir que dentro de 5 años habrá 1100 habitantes):

$$1100 = 1000 e^{5k} \qquad \Rightarrow \qquad e^{5k} = \frac{1100}{1000} \qquad \Rightarrow \qquad \ln\frac{1100}{1000} = 5k$$

$$k = 0.019062$$

Finalmente obtenemos:

$$\boxed{y = 1000 e^{0,019062\,t}}$$

A) ¿Qué cantidad de habitantes tendrá dentro de 20 años?

$$y = 1000 e^{0,019062 x 20} = 1464$$

Dentro de 20 años la población será de 1464 habitantes.

B) ¿Cuántos años tardará en duplicarse la población?

$$2000 = 1000 e^{0,019062\,t} \qquad \Rightarrow \qquad e^{0,019062\,t} = \frac{2000}{1000} \qquad \Rightarrow \qquad \ln\frac{2000}{1000} = 0.019062\,t$$

$$t = 36,3$$

En aproximadamente 36 años se duplicará la población.

EJERCICIOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Hallar las Soluciones Generales y/o Particulares de las siguientes Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden:

Nº	Ecuación Diferencial	Condición Inicial
1	$y^2 \cos 2x = y'$	$y_0 = 1$ para $x_0 = \pi$
2	$2yy' seny^2 + x^2 = 0$	$y_0 = 0$ para $x_0 = 3$
3	$2x^3 dy - 2x^2 y dx + y^3 dx = 0$	$y(1) = 2$
4	$(x+y)y' + y = 0$	$y(-2) = 3$
5	$xy' + y - 2x = 0$	$y(2) = 4$
6	$y' + \dfrac{x}{1-x^2}\, y = -x$	$y_0 = 0$ para $x_0 = 0$
7	$y' + xy - x^3 y^3 = 0$	$y_0 = 4$ para $x_0 = 0$
9	$y' + y = xy^3$	
10	$y' + \dfrac{y}{x} - x^2 y^6 = 0$	
11	$y' - \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{x^2} = 0$	
12	$xy' + y = y^2 \ln x$	$y_0 = 1$ para $x_0 = 1$
13	$x' + x - yx^3 = 0$	
14	$(1-x^2)y' - xy = xy^2$	
15	$\dfrac{dx}{x.y^2} + \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{2.\ln x}{y^3}\right)dy = 0$	$y_0 = 1$ para $x_0 = 1$
16	$2x \cos x^2 dx - \dfrac{3}{x-3y}\, dy + \dfrac{1}{x-3y}\, dx = 0$	$y_0 = -\dfrac{1}{3}$ para $x_0 = 0$

Soluciones:

Nº	Solución General	Solución Particular
1	$\frac{1}{2}sen2x+\frac{1}{y}=C$	$\frac{1}{2}sen2x+\frac{1}{y}=1$
2	$\frac{x^3}{3}-\cos y^2=C$	$\frac{x^3}{3}-\cos y^2=8$
3	$\frac{x^2}{y^2}-\ln x=C$	$\frac{x^2}{y^2}-\ln x=\frac{1}{4}$
4	$2xy+y^2=C$	$2xy+y^2=-3$
5	$y=x+\frac{C}{x}$	$y=x+\frac{4}{x}$
6	$y=\left(1-x^2\right)+C\sqrt{1-x^2}$	$y=\left(1-x^2\right)-\sqrt{1-x^2}$
7	$y=\left(x^2+1-Ce^{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$	$y=\left(x^2+1-\frac{1}{2}e^{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$
9	$y=\sqrt{\frac{1}{x+\frac{1}{2}+Ce^{2x}}}$	
10	$y=\sqrt[5]{\frac{1}{\frac{5}{2}x^3+Cx^5}}$	
11	$x=y\ln Cx$	
12	$y^{-1}=1+\ln x+Cx$	$y^{-1}=1+\ln x$
13	$x^{-2}=y+\frac{1}{2}+Ce^{2y}$	
14	$y=\frac{1}{C\sqrt{1-x^2}-1}$	
15	$\frac{\ln x}{y^2}+\ln y=C$	$\frac{\ln x}{y^2}+\ln y=0$
16	$senx^2+\ln(x-3y)=C$	$senx^2+\ln(x-3y)=0$