CAPÍTULO 11

ECUACIONES DIFERENCIALES CON DERIVADAS PARCIALES

ECUACIONES DIFERENCIALES CON DERIVADAS PARCIALES

Son aquellas ecuaciones que contienen una función de varias variables independientes y algunas de sus derivadas parciales.

Por ejemplo en el caso de una función de dos variables independientes una Ecuación Diferencial con Derivadas Parciales de Primer Orden es de la forma:

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

Y una Ecuación Diferencial con Derivadas Parciales de Segundo Orden es de la forma:

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0$$

Resolver estas Ecuaciones Diferenciales representa mayores dificultades que resolver las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, pues la Solución General de éstas contiene constantes arbitrarias, en cambio en el caso de las Ecuaciones Diferenciales con Derivadas Parciales aparecen **funciones arbitrarias**.

No siempre es posible obtener la Solución General de las Ecuaciones Diferenciales con Derivadas Parciales.

Ejemplos:

Veamos algunos ejemplos simples para confirmar lo afirmado. Dadas las siguientes Ecuaciones Diferenciales:

1- $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ su solución es de la forma $z = \varphi(y)$ donde $\varphi(y)$ es una función arbitraria.

   Al integrar con respecto a *“x”* nos garantiza que “ φ” no es función de *“x”* pero puede serlo de *“y”*.

2- $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ su solución es de la forma $z = \psi(x)$ donde $\psi(x)$ es una función arbitraria.

3- $\frac{\partial z}{\partial y} = x$ su solución es de la forma $z = \frac{x^2}{2} + \varphi(y)$ donde $\varphi(y)$ es una función arbitraria.

4- $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = o$ su solución es de la forma $z = \psi(x) + \varphi(y)$

Estudiaremos a continuación algunos casos de Ecuaciones Diferenciales con Derivadas Parciales Lineales que son muy importantes en el estudio de la Física.

ECUACIÓN DE LAS ONDAS (D´ALEMBERT)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Esta ecuación es del tipo **hiperbólico** y corresponde al caso de las vibraciones transversales de una cuerda, oscilaciones eléctricas en un conductor, vibraciones longitudinales de un vástago, oscilaciones de un gas, etc.

La función buscada es de dos variables independientes $u(x,t)$ y “c^2” es una constante.

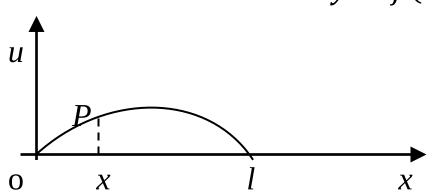
En el caso de funciones de tres variables independientes, la Ecuación de las Ondas resulta:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Analicemos el caso de la vibración transversal de una cuerda elástica.

Vibración transversal de una cuerda elástica

Como cuerda entendemos un hilo o alambre flexible y elástico. Consideramos una cuerda elástica de longitud *“l”* extendida entre dos puntos del eje *0x*, que se la aparta de su posición de equilibrio haciéndola tomar la forma de cierta curva $y = f(x)$ y en el instante $t = 0$ se la deja en libertad y comienza a oscilar.



El problema consiste en determinar la posición de cada punto P de la cuerda en cada instante $t > 0$.

Si analizamos pequeñas desviaciones de los puntos de la cuerda podemos despreciar los desplazamientos de P en la dirección del eje *0x*, es decir que podemos considerar que el movimiento de los puntos es en la dirección del eje *0u* y en un mismo plano.

En base a ello la oscilación de la cuerda se puede describir por una función $u(x,t)$ que da la posición de un punto P (situado a una distancia *“x”* del origen) en cada instante $t > 0$.

Para simplificar el desarrollo se desprecian las fuerzas de amortiguamiento (resistencia del aire y peso de la cuerda) y se supone que la tensión (*T*) de la cuerda siempre actúa tangencialmente a la cuerda y que la densidad (ρ) de la cuerda es constante.

Con estas consideraciones y partiendo de la Segunda Ley de Newton $(F = m.a)$, se obtiene la Ecuación Diferencial con Derivadas Parciales Lineal Homogénea con Coeficientes Constantes:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Donde “c^2” es una constante que depende de la tensión (*T*) a la que está sometida la cuerda y de su densidad (ρ).

Para la determinación completa del movimiento de la cuerda la ecuación hallada es insuficiente.

La función buscada $u(x,t)$ debe satisfacer además las condiciones de contorno (o de frontera) que indican lo que sucede en los extremos de la cuerda (x=0 y x=l) y a las condiciones iniciales que describen el estado de la cuerda en $t = 0$.

Si por ejemplo consideramos fijos los extremos, entonces para $x = 0$ y $x = l$ y para cualquier valor de *"t"* se verifica:

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases}$$

Que son las condiciones de contorno (o de frontera).

En el momento inicial $t = 0$ la cuerda tiene una forma dada en el plano $0xu$ entonces:

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi(x) \end{cases}$$

Estas son las condiciones iniciales.

(Como caso particular se puede considerar que la cuerda se deja en libertad en la posición $u(x,0) = f(x)$ sin imprimirle ninguna velocidad inicial, es decir $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$. O directamente considerar $u(x,0) = 0$ y $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$ en cuyo caso resulta $u(x,t) = 0$ para cualquier *"x"* y la cuerda está en reposo).

Solución de la Ecuación por el Método de la Separación de Variables (Método de Fourier)

Se pretende hallar la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \textbf{(1)}$$

De manera que satisfaga las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi(x) \end{cases} \qquad \textbf{(3)}$$

Para hallar la solución de esta Ecuación Diferencial Lineal Homogénea con Derivadas Parciales buscamos en un principio soluciones particulares de **(1)** que satisfagan las condiciones de contorno **(2)** en forma de un producto de dos funciones $X(x)$ y $T(t)$ de una sola variable independiente cada una:

$$u(x,t) = X(x).T(t) \qquad \textbf{(4)}$$

Derivemos dos veces "u" respecto a "t" y "x" y reemplacemos en la **(1)**:

$$X.T'' = c^2.X''.T$$

es decir:

$$\frac{T''}{c^2.T} = \frac{X''}{X}$$

Como el primer miembro no depende de "x" y el segundo no depende de "t", la igualdad anterior solo se verifica cuando ambos miembros no dependan ni de "x" ni de "t", es decir que sean iguales a una constante, que llamaremos $-\lambda^2$.

$$\frac{T''}{c^2.T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

Podemos obtener las siguientes ecuaciones:

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

$$T'' + c^2\lambda^2 T = 0$$

Éstas son dos Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas de Segundo Orden con Coeficientes Constantes y sus raíces son imaginarias, en consecuencia sus Soluciones Generales son de la forma:

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\,\text{sen}\,\lambda x \qquad \textbf{(5)}$$

$$T(t) = C\cos c\lambda t + D\,\text{sen}\,c\,\lambda t \qquad \textbf{(6)}$$

Donde *A*, *B*, *C* y *D* son constantes arbitrarias.

Para determinar *A* y *B* aplicamos a la **(5)** las condiciones de contorno **(2)**:

$$X(0) = A + B.0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A = 0$$

$$X(l) = A\cos\lambda l + B\,\text{sen}\,\lambda l = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B\,\text{sen}\,\lambda l = 0$$

Debiendo ser $B \neq 0$ puesto que en caso contrario sería $X(x) = 0$ es decir $u(x,t) = 0$ (cuerda en reposo) lo que contradice la hipótesis, entonces debe verificarse que:

$$\text{sen}\,\lambda l = 0$$

Lo que exige que:

$$\lambda = \frac{n\pi}{l} \qquad \text{con} \qquad n = 1, 2, 3, \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\lambda = \frac{\pi}{l}\ ,\ \frac{2\pi}{l}\ ,\ \frac{3\pi}{l}\ ,\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ ,\ \frac{n\pi}{l}$$

Los valores de **λ** se llaman **valores propios** del problema de contorno, y las correspondientes **funciones propias** son:

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{l}x\ ,\ \text{sen}\,\frac{2\pi}{l}x\ ,\ \text{sen}\,\frac{3\pi}{l}x\ ,\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ ,\ \text{sen}\,\frac{n\pi}{l}x$$

Reemplazando estos valores obtenidos en la Solución General **(5)** tendremos:

$$X(x) = B\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{l}x \qquad \textbf{(7)}$$

Conociendo λ reemplazamos su valor en la Solución General **(6)** y obtenemos

$$T(t) = C\cos\frac{cn\pi}{l}t + D\,\mathrm{sen}\,\frac{cn\pi}{l}t \qquad \textbf{(8)}$$

Introducimos las expresiones **(7)** y **(8)** en la **(4)** y obtenemos la Solución de la Ecuación **(1)** que satisface las condiciones de contorno **(2)**:

$$u_n(x,t) = \mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{l}x\left(C_n\cos\frac{cn\pi}{l}t + D_n\,\mathrm{sen}\,\frac{cn\pi}{l}t\right)$$

Para $n = 1, 2, 3, \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$

Para cada valor de *"n"* corresponden valores distintos de *C* y *D*, por eso los llamamos C_n y D_n (*B* está incluida en ellas).

Como la Ecuación **(1)** es lineal y homogénea, la suma de las soluciones también es solución, por ello

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{cn\pi}{l}t + D_n\,\mathrm{sen}\,\frac{cn\pi}{l}t\right)\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{l}x \qquad \textbf{(9)}$$

Es la Solución de la Ecuación Diferencial **(1)** que satisface las condiciones de contorno **(2)**.

La determinación de C_n y D_n se hace teniendo en cuenta las condiciones iniciales **(3)**. Para ello tomamos la **(9)** y su derivada respecto de *"t"*:

$$\begin{cases} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{cn\pi}{l}t + D_n\,\mathrm{sen}\,\frac{cn\pi}{l}t\right)\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{l}x \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{cn\pi}{l}\mathrm{D_n}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{l}x \end{cases}$$

Y de acuerdo a las condiciones iniciales, para $t = 0$ resulta:

$$\begin{cases} u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{l}x = f(x) \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{cn\pi}{l}\mathrm{D_n}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{l}x = \varphi(x) \end{cases}$$

Es decir:

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{l}x \\ \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{cn\pi}{l}\mathrm{D_n}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{l}x \end{cases}$$

Para determinar los coeficientes C_n y D_n hay que desarrollar en Serie de Fourier de senos las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ [Si estas funciones son tales que pueden ser desarrolladas en Serie de Fourier en el intervalo $(0, l)$, ver Capítulo 10]. Y de acuerdo con las fórmulas ya conocidas, podemos determinar los coeficientes:

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{l}x\,dx \qquad \textbf{(10)}$$

$$\frac{cn\pi}{l}D_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

$$D_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^l \varphi(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{l}x\,dx \qquad \textbf{(11)}$$

ECUACIONES DE CONDUCCIÓN DE CALOR O ECUACIÓN DE FOURIER

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Esta ecuación es de tipo parabólico y corresponde a procesos de propagación de calor, filtración de líquidos y gas en un medio poroso (filtraciones de petróleo y gas en areniscos subterráneos), algunos problemas de la teoría de probabilidades, etc.

La función buscada es de dos variables independientes $u(x,t)$ y " c^2 " es una constante.

En el caso de funciones de tres variables independientes $u(x,y,t)$, la Ecuación de Conducción de Calor es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

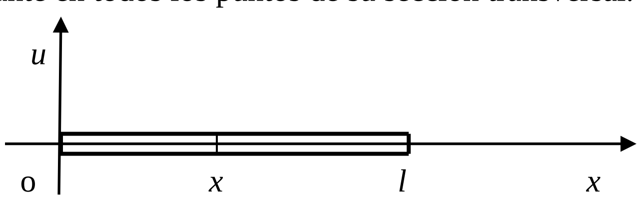
Y en el caso de funciones de cuatro variables independientes $u(x,y,z,t)$ la ecuación correspondiente es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

Estudiemos el caso de la propagación de calor en un vástago.

Ecuación de la Propagación de Calor en un Vástago

Analizaremos la propagación de calor en un vástago o un alambre homogéneo y recto, cuya longitud (l) es mucho mayor que su sección transversal, que su superficie lateral no disipa calor y que la temperatura es constante en todos los puntos de su sección transversal.



Consideramos el vástago ubicado sobre el eje *"x"* y sea $u(x,t)$ la temperatura en la sección del vástago de abscisa *"x"* en el instante *"t"*.

La Ecuación Diferencial con Derivadas Parciales que permite determinar esta temperatura es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Donde "c^2" es una constante que depende del coeficiente de conductividad térmica (k), la densidad (ρ) y de la capacidad calórica del material del vástago (μ) (o calor específico).

Esta ecuación de calor, junto con ciertas condiciones iniciales y de frontera, nos determina de manera única la distribución de la temperatura en todo el vástago, en cualquier instante $t > 0$. estas condiciones pueden ser:

$u(x,0) = \varphi(x)$

$u(0,t) = \psi_1(t)$

$u(l,t) = \psi_2(t)$

La primera indica que en el instante inicial, las deferentes secciones del vástago tienen una temperatura $\varphi(x)$, y las dos últimas indican que en los extremos del vástago sus temperaturas son $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ respectivamente.

Solución de la Ecuación por el Método de la Separación de Variables

Determinaremos la solución de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \textbf{(12)}$$

Que satisfaga las condiciones

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad \text{para} \quad 0 \le x \le l \qquad \textbf{(13)}$$

$$\left.\begin{array}{l} u(0,t) = 0 \\ \\ u(l,t) = 0 \end{array}\right\} \qquad \text{para} \quad t \ge 0 \qquad \textbf{(14)}$$

Es decir que consideraremos que los extremos del vástago son mantenidos a temperatura cero durante todo el tiempo.

Buscamos una Solución Particular de la ecuación **(12)** que satisfaga las condiciones **(13)** y **(14)** en forma de un producto de dos funciones $X(x)$ y $T(t)$ de una sola variable independiente cada una:

$$u(x,t) = X(x).T(t) \qquad \textbf{(15)}$$

Derivemos “u” una vez respecto a “t” y dos veces respecto a “x” y reemplacemos en la **(12)**:

$X.T' = c^2.X''.T$ es decir:

$$\frac{T'}{c^2.T} = \frac{X''}{X}$$

Como el primer miembro no depende de “x” y el segundo no depende de “t”, la igualdad anterior solo se verifica cuando ambos miembros no dependan ni de “x” ni de “t”, es decir que sean iguales a una constante, que llamaremos $-\lambda^2$.

$$\frac{T'}{c^2.T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

Podemos obtener las siguientes ecuaciones:

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \qquad \textbf{(16)}$$

$$T' + c^2\lambda^2 T = 0 \qquad \textbf{(17)}$$

La **(16)** es una Ecuación Diferencial Lineal Homogénea de Segundo Orden con Coeficientes Constantes con raíces imaginarias y la **(17)** es una Ecuación Diferencial Lineal Homogénea de Primer Orden. Y sus respectivas Soluciones Generales son:

$$X = A\cos\lambda x + B\,\mathrm{sen}\,\lambda x \qquad \textbf{(18)}$$

$$T = Ce^{-c^2\lambda^2 t} \qquad \textbf{(19)}$$

Donde A, B y C son constantes arbitrarias. Para determinar A y B aplicamos a la **(18)** las condiciones **(14)**.

$$X(0) = A + B.0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A = 0$$

$$X(l) = A\cos\lambda l + B\,\mathrm{sen}\,\lambda l = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B\,\mathrm{sen}\,\lambda l = 0$$

Debiendo ser $B \neq 0$ puesto que en caso contrario sería $X(x) = 0$ es decir $u(x,t) = 0$ lo que contradice la hipótesis, entonces debe verificarse que:

$$\mathrm{sen}\,\lambda l = 0$$

Lo que exige que:

$$\lambda = \frac{n\pi}{l} \qquad \text{con} \qquad n = 1, 2, 3, \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\lambda = \frac{\pi}{l}\ ,\ \frac{2\pi}{l}\ ,\ \frac{3\pi}{l}\ ,\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ ,\ \frac{n\pi}{l}$$

Los valores de **λ** se llaman **valores propios** del problema de contorno, y las correspondientes **funciones propias** son:

$$\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{l}x\ ,\ \mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{l}x\ ,\ \mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{l}x\ ,\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ ,\ \mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{l}x$$

Reemplazando estos valores obtenidos en la Solución General **(18)** tendremos:

$$X(x) = B\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{l}x \qquad \textbf{(20)}$$

Conociendo **λ** reemplazamos su valor en la Solución General **(19)** y obtenemos

$$T(t) = Ce^{-\frac{c^2n^2\pi^2t}{l^2}} \qquad \textbf{(21)}$$

Reemplazamos en la **(20)** valores de *X* y *T* obtenidos en **(20)** y **(21)** respectivamente:

$$u_n(x,t) = D_n e^{-\frac{c^2n^2\pi^2t}{l^2}} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x \qquad \textbf{(22)}$$

Para $n = 1, 2, 3, \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$

Las constantes *B* y *C* están unificadas en D_n. Para cada valor de *"n"* corresponde un valor distinto de *D* por eso la llamamos D_n.

La **(22)** satisface la Ecuación de Calor en el intervalo $0 < x < l$ y las condiciones de contorno $u(0,t) = 0$ y $u(l,t) = 0$, pero no satisface la condición inicial **(13)** pues para $t = 0$ debería ser

$$u_n(x,0) = D_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x = \varphi(x)$$

Solo la satisface si $\varphi(x)$ tiene forma de un múltiplo de la función **seno**. En consecuencia debemos buscar una solución con la forma de la suma de todas las soluciones anteriores:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-\frac{c^2n^2\pi^2t}{l^2}} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x \qquad \textbf{(23)}$$

Ahora comprobamos que ésta sí satisface también la condición inicial:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x = \varphi(x)$$

Éste es un desarrollo en Serie de Fourier de la función $\varphi(x)$ en el intercalo $0 < x < l$. Entonces podemos calcular su coeficiente D_n así:

$$D_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x\, dx \qquad \textbf{(24)}$$

Entonces:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x\, dx\right] e^{-\frac{c^2n^2\pi^2t}{l^2}} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x \qquad \textbf{(25)}$$

Ésta satisface todas las condiciones del problema y por lo tanto es la solución buscada.

ECUACIÓN DE LAPLACE

Recordemos que en la expresión:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad \text{ó} \qquad \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$\Delta = \nabla^2$ recibe el nombre de Laplaciano u Operador de Laplace y cuando resulta $\Delta u = \nabla^2 u = 0$ se la denomina **Ecuación de Laplace**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{ó} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Esta ecuación es de tipo elíptico y corresponde a problemas sobre campos eléctricos y magnéticos, sobre el estado térmico estacionario, problemas de la hidrodinámica, de fusión, etc.

La función *"u"* que satisface esta ecuación en cierta región, se llama Función Armónica en esa región.

Por ejemplo: $z = 3y^2 - 4x^2$ y $z = x^2 + xy$

Son Funciones Armónicas en todo en plano $0xy$.

A la Ecuación de Laplace también se la conoce como Ecuación del Estado Estacionario del Calor.

Estado estacionario de la temperatura de un cuerpo

Recordemos la Ecuación de Conducción de Calor en el espacio de tres o dos dimensiones

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad \text{ó} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Es decir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u$$

Si el proceso es estacionario, es decir la temperatura no depende del tiempo y solo depende de las coordenadas de los puntos del cuerpo, la ecuación es independiente de *"t"*; por lo tanto resulta

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Y la Ecuación de Calor se transforma en la Ecuación de Laplace: $\nabla^2 u = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{ó} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

En los problemas en que interviene la Ecuación de Laplace no hay condiciones iniciales. Pero si se pueden resolver problemas de funciones sujetas a ciertas condiciones de frontera. El problema de determinar una Función Armónica conociendo su valor de frontera se llama Problema de Dirichlet.

Para simplificar el desarrollo trabajaremos en 2 dimensiones. La dificultad en estos problemas depende en general de que tan complicado en la región, y resultan más accesibles cuando dicha región posee cierto tipo de simetría.

Solución del Problema de Dirichlet para un círculo

Resolvamos el Problema de Dirichlet para un círculo de radio R con centro en el origen.

En coordenadas polares el problema es:

$$\nabla^2 u(r,\theta) = 0 \qquad \text{ó} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{para} \qquad 0 \le r < R \qquad -\pi \le \theta \le \pi \qquad \textbf{(26)}$$

Y en la frontera del círculo la función toma el valor $f(\theta)$:

$$u(R,\theta) = f(\theta) \qquad \text{para} \qquad -\pi \le \theta \le \pi \qquad \textbf{(27)}$$

La Ecuación de Laplace en coordenadas polares resulta:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \qquad \textbf{(28)}$$

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \qquad \textbf{(29)}$$

Busquemos una solución por el Método de Separación de Variables:

$$u(r,\theta) = \boldsymbol{R}(r).\boldsymbol{\Theta}(\theta) \qquad \textbf{(30)}$$

Que para simplificar la escritura expresaremos simplemente:

$$u = \boldsymbol{R}.\boldsymbol{\Theta}$$

Derivemos dos veces a *"u"* respecto a *"r"* y *"θ"* y reemplacemos en la Ecuación de Laplace **(29)**:

$$r^2\boldsymbol{R}''\boldsymbol{\Theta} + r\boldsymbol{R}'\boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{\Theta}'' = 0 \qquad \textbf{(31)} \qquad \text{es decir:}$$

$$\frac{\boldsymbol{\Theta}''}{\boldsymbol{\Theta}} = -\,\frac{r^2\boldsymbol{R}''+r\boldsymbol{R}'}{\boldsymbol{R}} \qquad \textbf{(32)}$$

Como el primer miembro no depende de *"r"* y el segundo no depende de *"θ"* la igualdad anterior solo se verifica cuando ambos miembros no dependen ni de *"r"* ni de *"θ"*, es decir que sean iguales a una constante que llamaremos $-\boldsymbol{\lambda}^2$.

$$\frac{\boldsymbol{\Theta}''}{\boldsymbol{\Theta}} = -\,\frac{r^2\boldsymbol{R}''+r\boldsymbol{R}'}{\boldsymbol{R}} = -\lambda^2 \qquad \textbf{(33)}$$

Podemos obtener las siguientes ecuaciones:

$$\boldsymbol{\Theta}'' + \lambda^2 \boldsymbol{\Theta} = 0 \quad \textbf{(34)}$$

$$r^2 \boldsymbol{R}'' + r\boldsymbol{R}' - \lambda^2 \boldsymbol{R} = 0 \quad \textbf{(35)}$$

La Solución General de la ecuación **(34) es:**

$$\boldsymbol{\Theta} = A\cos\lambda\theta + B\,\mathrm{sen}\,\lambda\theta \quad \textbf{(36)}$$

Busquemos ahora una solución de la **(35)** de la forma $\boldsymbol{R} = r^{\propto}$, derivemos dos veces y reemplacemos en la **(35)**:

$$r^2 \propto (\propto -1) r^{\propto-2} + r \propto r^{\propto-1} - \lambda^2 r^{\propto} = 0$$ resolviendo obtenemos:

$$\propto^2 - \lambda^2 = 0$$

De aquí obtenemos dos Soluciones Particulares Linealmente Independientes r^{λ} y $r^{-\lambda}$ y por lo tanto la Solución General de la ecuación **(35)** resulta:

$$\boldsymbol{R} = Cr^{\lambda} + Dr^{-\lambda} \quad \textbf{(37)}$$

Y reemplazando en la **(30)** lo que hemos obtenido en **(36)** y **(37)** tendremos:

$$\boldsymbol{u}_{\lambda} = (A_{\lambda}\cos\lambda\theta + B_{\lambda}\,\mathrm{sen}\,\lambda\theta)\,(C_{\lambda}r^{\lambda} + D_{\lambda}r^{-\lambda}) \quad \textbf{(38)}$$

Ésta es la solución de la ecuación **(29)** para todos los valores de $\boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{0}$.

Cuando es $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0}$ las ecuaciones **(34)** y **(35)** resultan:

$$\boldsymbol{\Theta}'' = 0$$

$$r\boldsymbol{R}'' + \boldsymbol{R}' = 0$$

Y en este caso la Solución de la ecuación **(29)** resulta:

$$\boldsymbol{u}_0 = (A_0 + B_0\theta)(C_0 + D_0 lnr) \quad \textbf{(39)}$$

Para los puntos (r, θ) y $(r, \theta + 2\pi)$ corresponde un mismo valor de la solución, pues estamos analizando un mismo punto del círculo, entonces la solución debe ser periódica de período 2π. Por lo tanto debe ser $B_0 = 0$.

Además la solución debe ser continua y finita en todos los puntos del círculo, y para que sea finita en el centro del círculo ($r = 0$), debe ser $D_0 = 0$ en la **(39)** y $D_{\lambda} = 0$ en la **(38)**.

Por lo expresado la solución **(39)** queda $u_0 = A_0 C_0$ y la designaremos así:

$$u_0 = \frac{a_0}{2} \quad \textbf{(40)}$$

Y la **(38)** resulta: $\boldsymbol{u}_{\lambda} = (A_{\lambda}\cos\lambda\theta + B_{\lambda}\,\mathrm{sen}\,\lambda\theta)\,C_{\lambda}r^{\lambda} = (A_{\lambda}C_{\lambda}\cos\lambda\theta + B_{\lambda}C_{\lambda}\,\mathrm{sen}\,\lambda\theta)\,r^{\lambda}$ y la designamos:

$$\boldsymbol{u}_\lambda = (a_\lambda \cos\lambda\theta + b_\lambda \operatorname{sen}\lambda\theta)\, r^\lambda \qquad \textbf{(41)}$$

Busquemos nuestra solución como la suma de las soluciones anteriores. Esta suma debe ser periódica y para que ello ocurra λ debe tomar valores enteros. Solo consideraremos valores positivos de λ pues los valores negativos no aportan nuevas soluciones particulares.

$$\lambda = 1, 2, 3, \dots\dots\dots\dots\dots\dots, n\,, \dots\dots\dots\dots\dots....$$

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta)\, r^n \qquad \textbf{(42)}$$

Para satisfacer la condición en la frontera $(r = R)$ debemos elegir los coeficientes de manera que resulte:

$$u(r,\theta) = f(\boldsymbol{\theta}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta)\, R^n$$

$$u(r,\theta) = f(\boldsymbol{\theta}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}(a_n R_n \cos n\theta + b_n R_n \operatorname{sen} n\theta) \qquad \textbf{(43)}$$

Esta expresión es el desarrollo de Fourier de $f(\theta)$ en el período $[-\pi, \pi]$. Y los coeficientes deben determinarse de la forma:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\, dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{sen} nt\, dt$$

La serie **(42)** con los coeficientes calculados de la forma anterior es la solución de nuestro problema:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\pi}}\sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{R}}\right)^{\boldsymbol{n}}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\, dt \cos n\theta + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{sen} nt\, dt \operatorname{sen} n\theta\right]$$

También se la puede expresar:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\pi}}\sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{R}}\right)^{\boldsymbol{n}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos n(t-\theta)\, dt \qquad \text{ó}$$

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{\boldsymbol{R}}\right)^{\boldsymbol{n}}\cos n(t-\theta)\right] f(t)dt \qquad \textbf{(44)}$$