CAPÍTULO 10

SERIES DE FOURIER

SERIES DE FOURIER

Por medio de las Series de Fourier se puede representar una función como una serie cuyos términos son constantes multiplicadas por funciones seno y/o coseno de diferentes frecuencias.
Originalmente Fourier al estudiar la Ecuación de Propagación de Calor en un Vástago Uniforme (representada por una Ecuación Diferencial en Derivadas Parciales) y buscando una función que represente la temperatura del vástago en un instante de tiempo dado y en una sección determinada del mismo, propuso una solución con la forma de este tipo de series.

Introducción

- $a_1, a_2, ...a_n, ...$ es una **sucesión** infinita de números si se conoce la ley que permite calcular cualquier término a_n para un $"n"$ dado**.**

- $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ es una **serie numérica** si $a_1, a_2, ...a_n, ...$ es una sucesión infinita de números.

- Dada $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ S_n se llama enésima suma parcial de la serie**.**

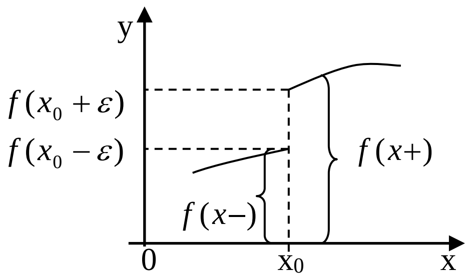
- La serie **converge** si: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$

- La serie **diverge** si: $S_n \to \infty$ para $n \to \infty$

- La función $f(x)$ es periódica de período $"a"$ si: $f(x) = f(x+a)$

- Una función $f(x)$ tiene una **discontinuidad ordinaria ó finita ó de 1º especie** en x_0 si tiene los límites izquierdo y derecho finitos y distintos:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f(x_0+\varepsilon) \neq \lim_{\varepsilon\to 0} f(x_0-\varepsilon)$$



geométricamente, en x_0 la función tiene un **salto** finito.

Condiciones de Dirichlet

Una función $f(x)$ satisface estas condiciones en el intervalo $(-\pi, \pi)$ si en este intervalo la función:

1- está uniformemente acotada, es decir si $|f(x)| \leq M$ para $-\pi < x < \pi$ y siendo M una constante.

2- no tiene más que un número finito de discontinuidades y estos son ordinarios o de 1º especie.

3- no tiene más que un número finito de extremos relativos.

Serie de Fourier

Toda función periódica $f(x)$ de período 2π que satisfaga las condiciones de Dirichlet en el intervalo $(-\pi, \pi)$, se puede desarrollar en serie trigonométrica llamada Serie de Fourier. En cualquier punto **x** de este intervalo en que $f(x)$ sea continua resulta:

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n.\cos nx + b_n.\operatorname{sen} nx\right)} \qquad \text{ó} \qquad (1)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1.\cos x + b_1.\operatorname{sen} x + a_2.\cos 2x + b_2.\operatorname{sen} 2x + ...$$

$a_0, a_n, b_n \quad (n = 1,2,3,..........)$ son los coeficientes de la serie y están expresados por las formulas:

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx} \tag{2}$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos nx dx} \tag{3}$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\operatorname{sen} nx dx} \tag{4}$$

Si la función periódica $f(x)$ de período 2π cumple con las condiciones de Dirichlet en el intervalo $(-\pi, \pi)$, entonces la serie trigonométrica converge en todos sus puntos.
En los puntos de continuidad de la función, la suma de la serie es igual al valor de la función $f(x)$ y en los puntos de discontinuidad de la función, la suma de la serie es igual a la media aritmética de los límites derecho e izquierdo de la función $\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$
Debido a que cada término de la Serie de Fourier es una función periódica de período 2π, cuando se trata de representar funciones **no periódicas**, ello se podrá hacer estudiándolas en un intervalo de amplitud 2π y definiéndola fuera del intervalo como periódica.

Por medio de la Serie de Taylor es posible representar la función $f(x)$ como una serie de potencias de x, pero exige que $f(x)$ sea continua e infinitamente derivable. En cambio por medio de la **Serie de Fourier** se representa a $f(x)$ como una **Serie Trigonométrica** y es aplicable a un grupo de funciones mucho más amplio. Son de amplia aplicación en problemas de mecánica y física. Por ejemplo en las vibraciones sonoras y mecánicas, la propagación de corrientes eléctricas y ondas telegráficas, conducción de calor, etc..

<u>Determinación de los coeficientes de la Serie</u>
Determinemos los valores de los coeficientes a_0, a_n, b_n enunciados en (2), (3) y (4) respectivamente.

● Recordemos la resolución de las siguientes integrales, que nos servirán de referencia para el cálculo de los coeficientes de la serie:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx.\cos kx dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx.\operatorname{sen} kx dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx.\cos kx dx = 0 \qquad \text{para} \quad n \neq k$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx.\cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi \qquad \text{para} \quad n = k$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx.\operatorname{sen} kx dx = 0 \qquad \text{para} \quad n \neq k$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx.\operatorname{sen} kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 nx dx = \pi \qquad \text{para} \quad n = k$$

Para resolverlas aplicamos:

$$\cos\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\text{sen}\alpha.\text{sen}\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\text{sen}\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\text{sen}(\alpha+\beta)+\text{sen}(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}\left(1+\cos 2\alpha\right)$$

$$\text{sen}^2\alpha = \frac{1}{2}\left(1-\cos 2\alpha\right)$$

1- <u>Cálculo del coeficiente</u> a_0

Para calcular el coeficiente a_0 integramos ambos miembros de la igualdad (1) dentro de los límites de $-\pi$ a π. La integral de la función del primer miembro es igual a la suma de las integrales de los términos de la serie:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n.\cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \text{sen} nx dx\right)$$

Resolvamos por separado cada una de las integrales del segundo miembro:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx = \left|\frac{a_0}{2}x\right|_{-\pi}^{\pi} = \pi.a_0\\
&\int_{-\pi}^{\pi} a_n.\cos nx dx = \left|\frac{a_n.\text{sen} nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0\\
&\int_{-\pi}^{\pi} b_n.\text{sen} nx dx = \left|-\frac{b_n.\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0
\end{aligned}\right\} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \pi.a_0$$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx} \qquad (2)$$

2- <u>Cálculo del coeficiente</u> a_n

Multiplicamos ambos miembros de la (1) por $\cos kx$

$$f(x).\cos kx = \frac{a_0}{2}\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n.\cos nx.\cos kx + b_n.\text{sen} nx.\cos kx\right)$$

Integramos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos kx dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n.\cos nx.\cos kx dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n.\text{sen} nx.\cos kx dx\right)$$

De acuerdo a lo visto, se anulan todas las integrales del 2º miembro, excepto la que corresponde al término con coeficiente a_n (o sea cuando $n = k$), por lo tanto

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos nx dx = a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx.\cos nx dx = a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx dx = \pi.a_n$$ despejamos a_n

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos nx dx} \qquad (3)$$

3- Cálculo de los coeficientes b_n

Multiplicamos ambos miembros de la (1) por $senkx$ e integramos entre $-\pi$ y π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\mathrm{sen}kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \mathrm{sen}kx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n.\cos nx.\mathrm{sen}kx dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n.\mathrm{sen}nx.\mathrm{sen}kx dx \right)$$

Todas las integrales del 2º miembro se anulan, excepto la que corresponde al término con coeficiente b_n (o sea cuando $n = k$), por lo tanto

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\mathrm{sen}nx dx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}nx.\mathrm{sen}nx dx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}^2 nx dx = \pi.b_n$$ despejamos b_n

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x).\mathrm{sen}nx dx} \qquad (4)$$

Ejemplo 1: Desarrollar la función $f(x) = x$ en Serie de Fourier, en el intervalo $-\pi < x \le \pi$ determinemos los coeficientes de la serie:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left| \frac{x^2}{2} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x.\cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left(\left| \frac{x.\mathrm{sen}nx}{n} \right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}nx dx \right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x.\mathrm{sen}nx dx = \frac{1}{\pi} \left(\left| -\frac{x.\cos nx}{n} \right|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \right) = -\frac{2}{n} \cos n\pi = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}$$

Para calcular a_n y b_n se integró por partes $\left(\int u dv = u.v - \int v du \right)$ y además recordar que

$\cos\pi = \cos(-\pi) = -1$; $\cos n\pi = 1$ para n par y $\cos n\pi = -1$ para n impar.

Y la serie será:

$$f(x) = x = \frac{2}{1}\mathrm{sen}x - \frac{2}{2}\mathrm{sen}2x + \frac{2}{3}\mathrm{sen}3x - \ldots\ldots\ldots (-1)^{n+1}\frac{2}{n}\mathrm{sen}nx + \ldots\ldots\ldots$$

$$\boxed{x = 2\left(\mathrm{sen}x - \frac{1}{2}\mathrm{sen}2x + \frac{1}{3}\mathrm{sen}3x - \ldots\ldots\ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\mathrm{sen}nx + \ldots\ldots\ldots \right)}$$

En este caso la serie tiene solamente términos en **seno**. Como veremos más adelante ello se debe a que $f(x) = x$ es una función **impar**, es decir que $f(-x) = -f(x)$.

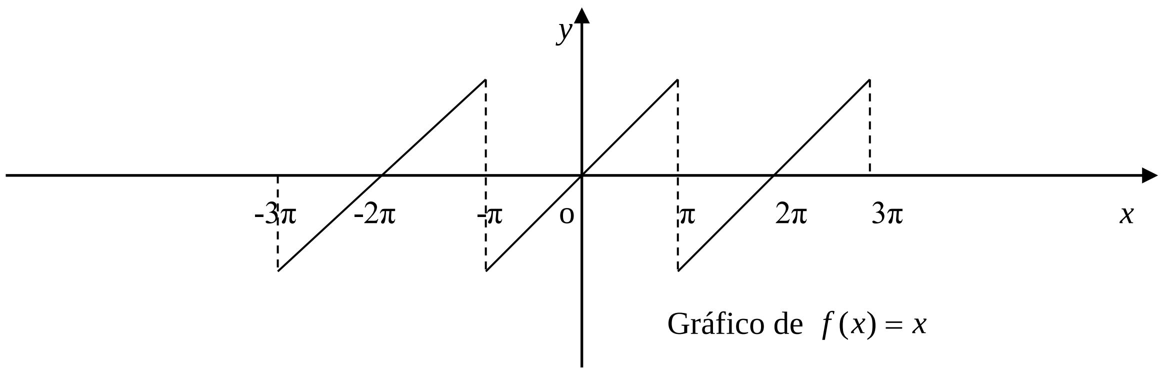
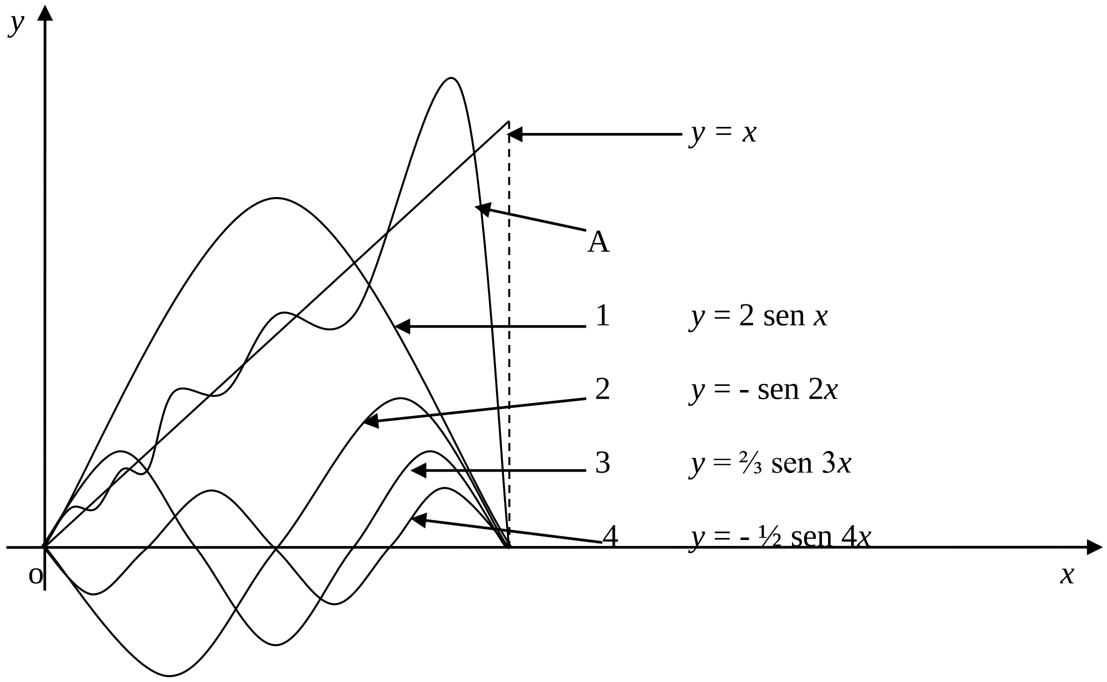


Gráfico de $f(x) = x$



En la figura anterior representamos las curvas 1, 2, 3, 4 que son los 4 primeros términos de la serie, en el período $(0, \pi)$. Por composición se obtiene la curva A:

$$y = 2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x + \tfrac{2}{3} \operatorname{sen} 3x - \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 4x \qquad \text{(A)}$$

Aumentando el número de términos, las curvas obtenidas se aproximan cada vez más a la recta $y = x$, para todo valor de $"x"$ comprendido entre $-\pi < x < \pi$, pero no así para $x = \pm\pi$. Pues en cada punto de discontinuidad la suma de la serie es igual a la media aritmética de los límites izquierdo y derecho de la función (que en este ejercicio es cero).

Series de seno y coseno

Recordemos que si $f(x)$ es una función **par** resulta $[f(-x) = f(x)]$, entonces:

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx$ en la primera integral del 2º miembro realizamos un cambio de variable $x = -x$ es decir $dx = -dx$ y luego invertimos los límites y resulta:

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{0}^{\pi} f(-x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = \int_{0}^{\pi} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx$ y finalmente para $f(x)$ **par**:

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx}$$

Y si la función $f(x)$ es **impar** resulta $[f(-x) = -f(x)]$, entonces:

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0}$$

Demostremos esta igualdad:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = \int_{0}^{\pi} f(-x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = -\int_{0}^{\pi} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = 0$$

La función **seno** es **impar** pues $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$

La función **coseno** es **par** pues $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

Analicemos los coeficientes de la Serie de Fourier para las funciones pares e impares:

<u>$f(x)$ función impar</u>
Entonces $f(x).\cos nx$ es **impar** y $f(x)\operatorname{sen} nx$ es **par**, calculemos los coeficientes de la serie:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos nx dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\operatorname{sen} nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x).\operatorname{sen} nx dx$$

Por lo tanto si $f(x)$ es una función **impar** la Serie de Fourier contiene solamente términos en **seno**.

<u>$f(x)$ función par</u>
Entonces $f(x).\cos nx$ es **par** y $f(x).\operatorname{sen} nx$ es **impar**, y los coeficientes de la serie resultan:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x).\cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\operatorname{sen} nx dx = 0$$

Es decir que si $f(x)$ es una función **par** la Serie de Fourier contiene solamente términos en **coseno**.
Estas fórmulas obtenidas permiten simplificar los cálculos de los coeficientes de la Serie de Fourier, cuando la función dada es par o impar. Pero tener presente que **no** todas las funciones periódicas son pares o impares. En el ejercicio anterior donde la función $f(x) = x$ en impar, la serie resultó con términos en senos solamente.

SERIE DE FOURIER PARA FUNCIONES DE PERÍODO 2ℓ

Consideremos a $f(x)$ como una función periódica de período 2ℓ, distinto de 2π.

Si sustituimos a la variable "x" por $x = \frac{\ell}{\pi}t$ la nueva función $f\left(\frac{\ell}{\pi}t\right)$ es una función de la variable "t", periódica, de período 2π .Podemos desarrollarla en Serie de Fourier en el intervalo $-\pi \le t \le \pi$:

$$f\left(\frac{\ell}{\pi}t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n.\cos nt + b_n.\operatorname{sen} nt\right)$$ cuyos coeficientes son:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell}{\pi}t\right)dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell}{\pi}t\right).\cos nt dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell}{\pi}t\right).\operatorname{sen} nt dt$$

Volvemos ahora a la variable "x", realizando el cambio de variable: $\begin{cases} t = \frac{\pi}{\ell}x \\ dt = \frac{\pi}{\ell}dx \end{cases}$

$$\boxed{f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n.\cos\frac{n\pi}{\ell}x+b_n.\text{sen}\frac{n\pi}{\ell}x\right)} \qquad (5)$$

y sus coeficientes resultan:

$$\boxed{a_0=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)dx} \qquad (6)$$

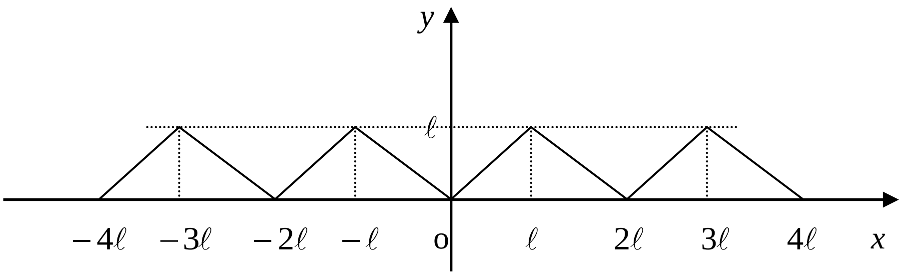
$$\boxed{a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x).\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx} \qquad (7)$$

$$\boxed{b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\text{sen}\frac{n\pi}{\ell}xdx} \qquad (8)$$

Los nuevos límites de las integrales se obtienen así:

Para $t=\pi$ resulta $x=\frac{\ell}{\pi}t=\frac{\ell}{\pi}\pi=\ell$ y para $t=-\pi$ resulta $x=\frac{\ell}{\pi}t=\frac{\ell}{\pi}(-\pi)=-\ell$

<u>Ejemplo 2</u>: Desarrollar en Serie de Fourier la función periódica de período 2ℓ , definida en el segmento $[-\ell,\ell]$ por la igualdad $f(x)=|x|$



Como vemos la función planteada es par, por lo tanto los coeficientes serán:

$$a_0=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}xdx=\frac{2}{\ell}\int_{0}^{\ell}xdx=\frac{2}{\ell}\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^{\ell}=\frac{2}{\ell}\frac{\ell^2}{2}=\ell$$

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}x.\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx=\frac{2}{\ell}\int_{0}^{\ell}x.\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx=\frac{2}{\ell}\left(\left|\frac{x\ell}{n\pi}\text{sen}\frac{n\pi}{\ell}x\right|_0^{\ell}-\int_0^{\ell}\frac{\ell}{n\pi}\text{sen}\frac{n\pi}{\ell}xdx\right)=$$

$$a_n=\frac{2}{\ell}\left|\frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{\ell}x\right|_0^{\ell}=\frac{2\ell}{n^2\pi^2}\cos n\pi-\frac{2\ell}{n^2\pi^2}\cos 0=\begin{cases}=0 & n=par\\ =-\dfrac{4\ell}{n^2\pi^2} & n=impar\end{cases}$$

$$b_n=0$$

La serie será:

$$\boxed{|x|=\frac{\ell}{2}-\frac{4\ell}{\pi^2}\cos\frac{\pi}{\ell}x-\frac{4\ell}{3^2\pi^2}\cos\frac{3\pi}{\ell}x-\frac{4\ell}{5^2\pi^2}\cos\frac{5\pi}{\ell}x-................-\frac{4\ell}{(2n+1)^2\pi^2}\cos\frac{(2n+1)}{\ell}x-.........}$$

FORMA EXPONENCIAL DE LA SERIE DE FOURIER

La Serie de Fourier:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n.\cos nx+b_n.\mathrm{sen}\,nx\right)=\frac{a_0}{2}+a_1.\cos x+b_1.\mathrm{sen}\,x+a_2.\cos 2x+b_2.\mathrm{sen}\,2x+.......... \qquad (1)$$

Cuyos coeficientes se calculan:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx \qquad (2)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x).\cos nx dx \qquad (3)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x).\mathrm{sen}\,nx dx \qquad (4)$$

Puede ser expresada utilizando las Fórmulas de Euler:

$$\begin{cases} e^{iu}=\cos u+i\,\mathrm{sen}\,u \\ e^{-iu}=\cos u-i\,\mathrm{sen}\,u \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{e^{iu}+e^{-iu}}{2}=\cos u \\ \dfrac{e^{iu}-e^{-iu}}{2}=i\,\mathrm{sen}\,u \end{cases}$$

En cuyo caso la Serie de Fourier resulta:

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}c_n.e^{inx}} \qquad (9)$$

y los coeficientes c_n se calculan mediante la integral:

$$\boxed{c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x).e^{-inx}dx} \qquad (10)$$

n toma todos los valores negativos y positivos, incluido el cero.

Demostremos ahora la equivalencia entre las expresiones (1) y (9). Para ello sustituimos en (10) a e^{-inx} por su igualdad según Euler:

◦Para $n>0$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left(\cos nx-i\,\mathrm{sen}\,nx\right)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx-\frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{sen}\,nx dx$$

$$c_n=\frac{a_n}{2}-i\frac{b_n}{2}$$

◦Para $n<0$ operando de forma similar se obtiene:

$$c_{-n}=\frac{a_n}{2}+i\frac{b_n}{2}$$ de donde deducimos que $$c_0=\frac{a_0}{2}$$

La fórmula (9) se puede expresar:

$$f(x)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n.e^{inx}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}.e^{-inx}$$

Reemplacemos ahora en esta expresión los valores de c_0 , c_n y c_{-n} obtenidos:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2} - i\frac{b_n}{2}\right).e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2} + i\frac{b_n}{2}\right).e^{-inx}$$

reordenando términos:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - i\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2}$$

y recordando las Fórmulas de Euler, reemplazamos:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx - i\sum_{n=1}^{\infty} b_n i \operatorname{sen} nx$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx\right)$$

Con lo que queda demostrada la equivalencia entre las expresiones (1) y (9).

RESUMEN

Serie de Fourier

Toda función periódica $f(x)$ de período 2π que satisfaga las condiciones de Dirichlet en el intervalo $(-\pi, \pi)$, se puede desarrollar en serie trigonométrica llamada Serie de Fourier. En cualquier punto **x** de este intervalo en que $f(x)$ sea continua resulta:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n.\cos nx + b_n.\operatorname{sen} nx\right) \qquad \text{ó}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1.\cos x + b_1.\operatorname{sen} x + a_2.\cos 2x + b_2.\operatorname{sen} 2x + \ldots\ldots\ldots.$$

$a_0, a_n, b_n \quad (n = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots)$ son los coeficientes de la serie y están expresados por las formulas:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\operatorname{sen} nx dx$$

Series de seno y coseno

f (x) función impar

En este caso los coeficientes resultan:

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\operatorname{sen} nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x).\operatorname{sen} nx dx$$

Por lo tanto si $f(x)$ es una función **impar** la Serie de Fourier contiene solamente términos en **seno**.

f (x) función par

Entonces los coeficientes de la serie resultan:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x).\cos nx dx$$

$$b_n = 0$$

Es decir que si $f(x)$ es una función **par** la Serie de Fourier contiene solamente términos en **coseno**.

Serie de Fourier para funciones de período 2ℓ

Consideremos a $f(x)$ como una función periódica de período 2ℓ, distinto de 2π, la correspondiente Serie de Fourier resulta:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n.\cos\frac{n\pi}{\ell}x + b_n.\text{sen}\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

y sus coeficientes son:

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x).\cos\frac{n\pi}{\ell}x dx$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x).\text{sen}\frac{n\pi}{\ell}x dx$$

Forma exponencial de la Serie de Fourier

La Serie de Fourier también puede se expresada en forma exponencial:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n.e^{inx}$$

y los coeficientes c_n se calculan mediante la integral:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).e^{-inx}dx$$

n toma todos los valores negativos y positivos, incluido el cero.