Análisis Matemático 2

Funciones escalares y vectoriales

Concepto y gráficos

Preliminares

- **En Análisis Matemático 1**:
  - **Funciones Escalares**: $y = f(x)$

    Funciones de una sola variable independiente x.

    Es decir: $f: x \to y$ donde $x \in A \subseteq \mathbb{R} \to \dim(A) = 1$

    $y \in B \subseteq \mathbb{R} \to \dim(B) = 1$

- **En Análisis Matemático 2**:
  - **Campos Escalares**: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

    Es decir: $f: (x_1, x_2, \dots, x_n) \to y$ donde $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A \subseteq \mathbb{R}^n \to \dim(A) = n$

    $y \in B \subseteq \mathbb{R} \to \dim(B) = 1$
  - **Funciones Vectoriales**: $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{f}(t)$

    Es decir: $\vec{f}: t \to (x_1, x_2, \dots, x_n)$ donde t $\in A \subseteq \mathbb{R} \to \dim(A) = 1$

    $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B \subseteq \mathbb{R}^n \to \dim(B) = n$
  - **Campos Vectoriales**: $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{f}(y_1, y_2, \dots, y_m)$

    Es decir: $\vec{f}: (y_1, y_2, \dots, y_m) \to (x_1, x_2, \dots, x_n)$ donde$(y_1, y_2, \dots, y_m) \in A \subseteq \mathbb{R}^m \to \dim(A) = m$

    $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B \subseteq \mathbb{R}^n \to \dim(B) = n$

Preliminares

- **En Análisis Matemático 1**:
  - **Funciones Escalares**: $y = f(x)$

    Es decir: $f: x \to y$ donde $x \in A \subseteq \mathbb{R} \to \dim(A) = 1$

    $y \in B \subseteq \mathbb{R} \to \dim(B) = 1$

Un ejemplo de estas funciones es la temperatura (T) en cada punto del espacio (x, y, z).

- **En Análisis Matemático 2**:
  - **Campos Escalares**: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

    Funciones de dos o más variables independientes $x_1, x_2, \dots x_n$.

    Es decir: $f: (x_1, x_2, \dots, x_n) \to y$ donde $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A \subseteq \mathbb{R}^n \to \dim(A) = n$

    $y \in B \subseteq \mathbb{R} \to \dim(B) = 1$

  - **Funciones Vectoriales**: $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{f}(t)$

    Es decir: $\vec{f}: t \to (x_1, x_2, \dots, x_n)$ donde t $\in A \subseteq \mathbb{R} \to \dim(A) = 1$

    $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B \subseteq \mathbb{R}^n \to \dim(B) = n$

  - **Campos Vectoriales**: $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{f}(y_1, y_2, \dots, y_m)$

    Es decir: $\vec{f}: (y_1, y_2, \dots, y_m) \to (x_1, x_2, \dots, x_n)$ donde$(y_1, y_2, \dots, y_m) \in A \subseteq \mathbb{R}^m \to \dim(A) = m$

    $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B \subseteq \mathbb{R}^n \to \dim(B) = n$

Preliminares

- **En Análisis Matemático 1**:
  - **Funciones Escalares**: $y = f(x)$

    Es decir: $f: x \to y$ donde $x \in A \subseteq \mathbb{R} \to \dim(A) = 1$

    $y \in B \subseteq \mathbb{R} \to \dim(B) = 1$

- **En Análisis Matemático 2**:
  - **Campos Escalares**: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

    Es decir: $f: (x_1, x_2, \dots, x_n) \to y$ donde $(x_1, x_2, \dots,$

  - **Funciones Vectoriales**: $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{f}(t)$

    Es decir: $\vec{f}: t \to (x_1, x_2, \dots, x_n)$ donde t $\in A \subseteq \mathbb{R} \to \dim(A) = 1$

    $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B \subseteq \mathbb{R}^n \to \dim(B) = n$

  - **Campos Vectoriales**: $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{f}(y_1, y_2, \dots, y_m)$

    Es decir: $\vec{f}: (y_1, y_2, \dots, y_m) \to (x_1, x_2, \dots, x_n)$ donde $(y_1, y_2, \dots, y_m) \in A \subseteq \mathbb{R}^m \to \dim(A) = m$

    $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B \subseteq \mathbb{R}^n \to \dim(B) = n$

Funciones a las que a una variable independiente le corresponde un conjunto $x_1, x_2, \dots x_n$ de números reales, o un vector de n componentes.

Este tipo de funciones se utilizan, por ejemplo, para describir curvas en forma paramétrica, el movimiento de partículas en física, etc.

Preliminares

- **En Análisis Matemático 1**:
  - **Funciones Escalares**: $y = f(x)$

    Es decir: $f: x \to y$ donde $x \in A \subseteq \mathbb{R} \;\to \dim(A) = 1$

    $y \in B \subseteq \mathbb{R} \;\to \dim(B) = 1$

- **En Análisis Matemático 2**:
  - **Campos Escalares**: $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

    Es decir: $f: (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to y$ donde $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A \subseteq \mathbb{R}^n \;\to \dim(A) = n$

    $y \in B \subseteq \mathbb{R} \;\to \dim(B) = 1$

  - **Funciones Vectoriales**: $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \vec{f}(t)$

    Es decir: $\vec{f}: t \to (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ donde t $\in A \subseteq \mathbb{R} \;\to \dim(A$

    $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B \subseteq \mathbb{R}^n \to \dim(B$

  - **Campos Vectoriales**: $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \vec{f}(y_1, y_2, \ldots, y_m)$

    Es decir: $\vec{f}: (y_1, y_2, \ldots, y_m) \to (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ donde$(y_1, y_2, \ldots, y_m) \in A \subseteq \mathbb{R}^m \to \dim(A) = m$

    $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B \subseteq \mathbb{R}^n \to \dim(B) = n$

Ejemplos de este tipo de funciones, es el campo eléctrico, campo magnético, campo gravitacional, etc.

Funciones a las que a un conjunto de n de variables independientes le corresponde, como imagen, un conjunto de m de números reales.

Ejemplos

Empecemos con un campo escalar:

$\mathcal{D}(f) = \{(x, y)/(x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge \exists\ un\ \text{ú}nico\ z \in \mathbb{R}, z = f(x, y)\}$

$\mathcal{Im}(f) = \{z \in \mathbb{R}/\exists(x, y) \in \mathbb{R}^2, z = f(x, y)\}$

Un caso particular para dos variables independientes es

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \to \mathcal{D}(f) = \{(x, y)/(x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$\mathcal{Im}(f) = \{z/z \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq z \leq 2\}$$

En este caso es factible construir la gráfica de la función ya que se trata de una superficie curva en un espacio tridimensional.

Si se tratara de un campo escalar de más de dos variables independientes ya no sería posible construir su gráfica cartesiana

Ejemplos

Para conocer el comportamiento de **z** calculo las intersecciones con los planos cartesianos y construyo las curvas de nivel que se obtienen como intersecciones de la superficie **z** con planos paralelos al plano xy (es decir z=constante).

- Con el plano xy → $z = 0$ (figura 1)

  $4 = x^2 + y^2$ → circunferencia con centro en (0, 0) y R = 2
- Con el plano yz → $x = 0$ (figura 2)

  $z = \sqrt{4 - y^2}$ → semicircunferencia positiva de centro (0, 0) y R = 2
- Con el plano xz → $y = 0$ (figura 3)

  $z = \sqrt{4 - x^2}$ → semicircunferencia positiva de centro en (0, 0) y R = 2

Ejemplos

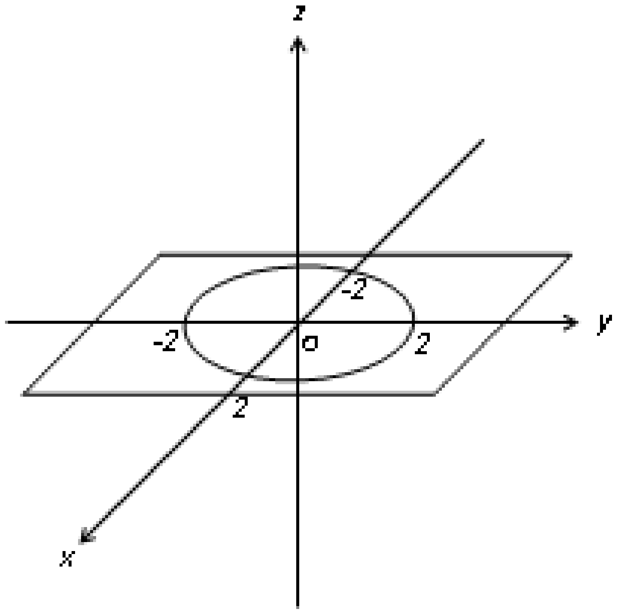


Figura 1

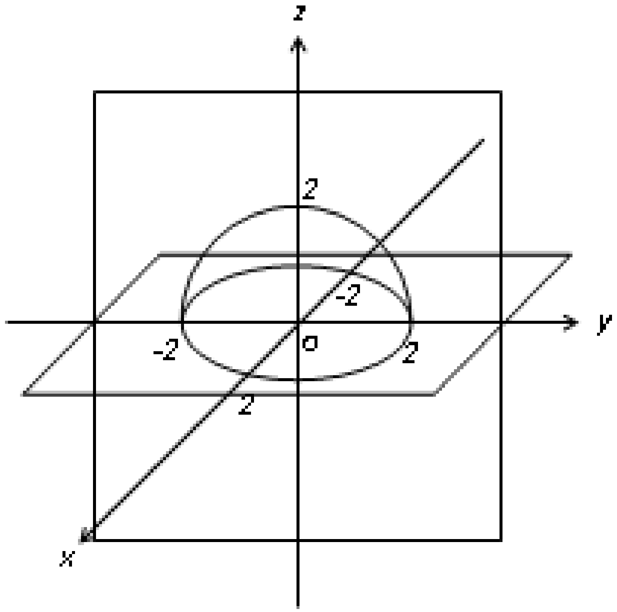


Figura 2

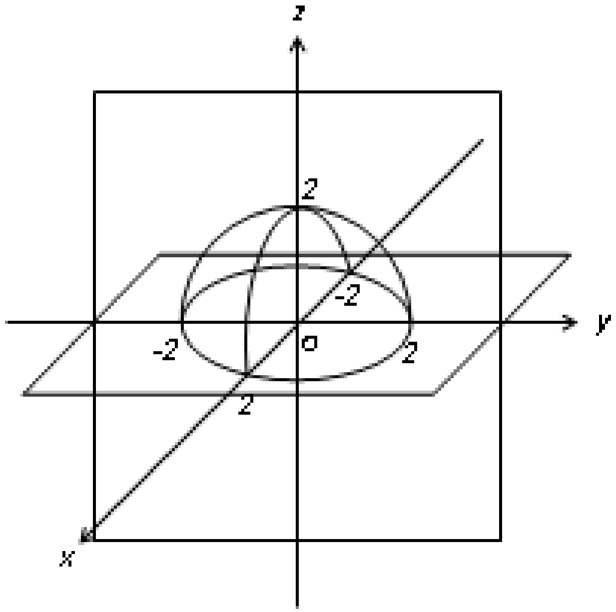


Figura 3

Ejemplos

Curvas de nivel

- $\boldsymbol{z = 0} \rightarrow 0 = 4 - x^2 - y^2$

  $4 = x^2 + y^2 \rightarrow$ circunferencia de centro (0, 0, 0) y R = 2
- $\boldsymbol{z = 1} \rightarrow 1 = 4 - x^2 - y^2$

  $3 = x^2 + y^2 \rightarrow$ circunferencia de centro (0, 0, 1) y R = $\sqrt{3}$
- $\boldsymbol{z = 2} \rightarrow 4 = 4 - x^2 - y^2$

  $0 = x^2 + y^2 \rightarrow$ circunferencia de centro (0, 0, 2) y R = 0 (es un punto)

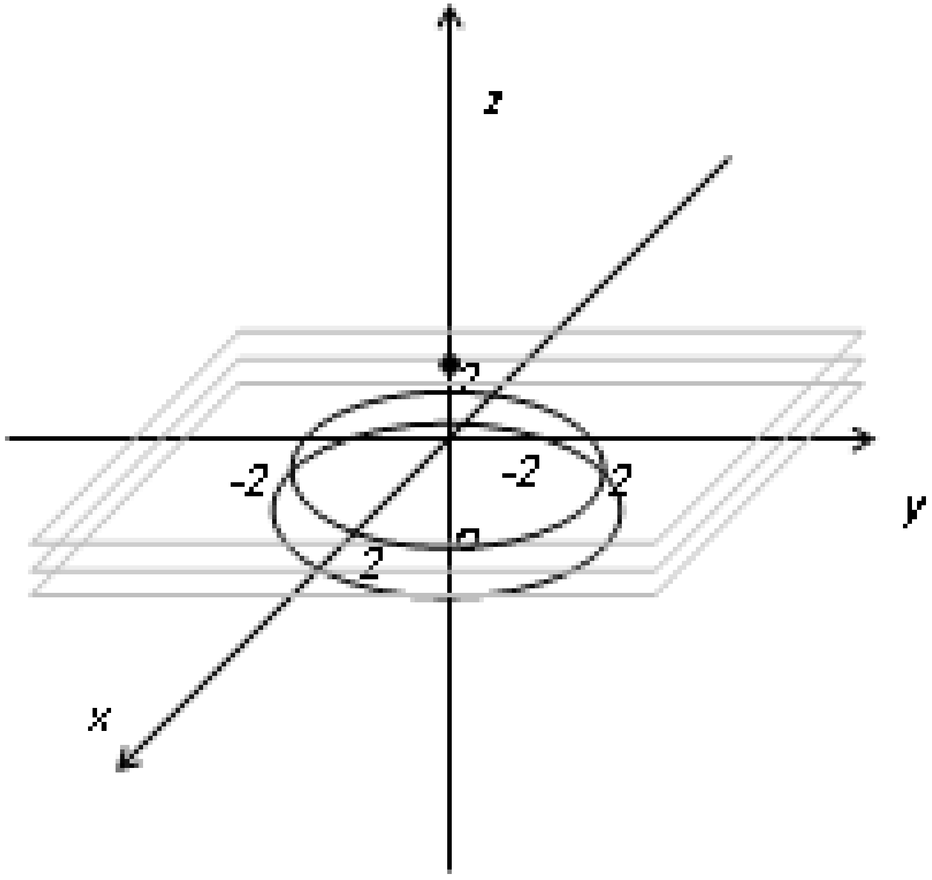


Figura 4

Ejemplos

- Otro caso (ver figura 5)

$z = x^2 + y^2 \rightarrow \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$

$$\mathcal{Im}(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

- Con el plano xy $\rightarrow z = 0$

$0 = x^2 + y^2 \rightarrow$ circunferencia con centro en (0, 0) y R = 0 (punto origen del sistema)

- Con el plano yz $\rightarrow x = 0$

$z = y^2 \rightarrow$ parábola de ramas verticales con vértice en (0, 0)

- Con el plano xz $\rightarrow y = 0$

$z = x^2 \rightarrow$ parábola de ramas verticales con vértice en (0, 0)

Ejemplos

Curvas de nivel (ver figura 6)

- $\boldsymbol{z = 0} \rightarrow (0,0,0)$
- $\boldsymbol{z > 0} \rightarrow$ circunferencias concéntricas

$$z = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 1 \rightarrow \text{R} = 1$$

$$z = 4 \rightarrow x^2 + y^2 = 4 \rightarrow \text{R} = 2$$

$$z = 7 \rightarrow x^2 + y^2 = 7 \rightarrow \text{R} = \sqrt{7}$$

- $\boldsymbol{z < 0} \rightarrow \notin \mathbb{R}$

Ejemplos

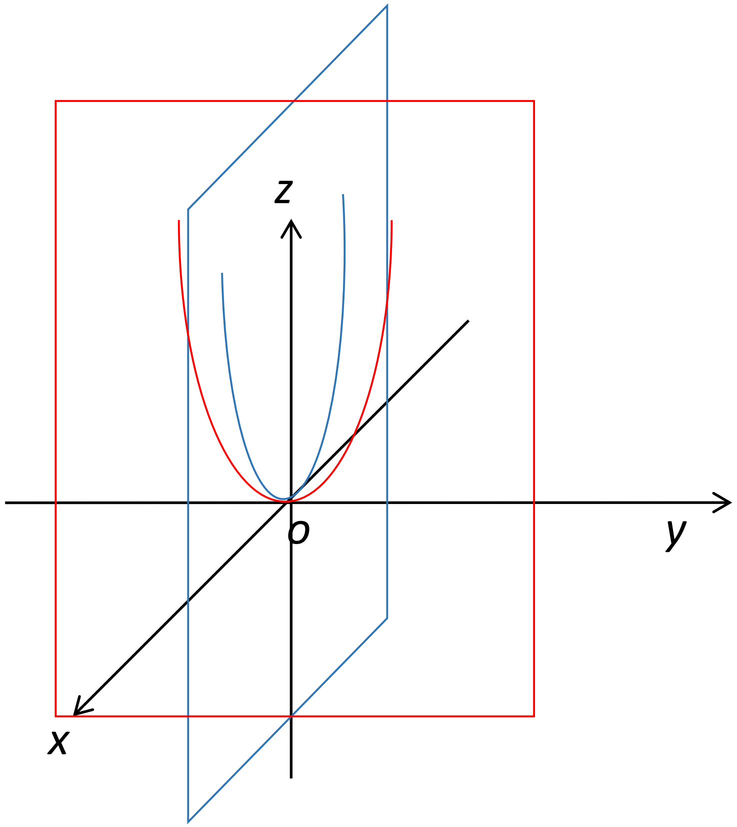


Figura 5

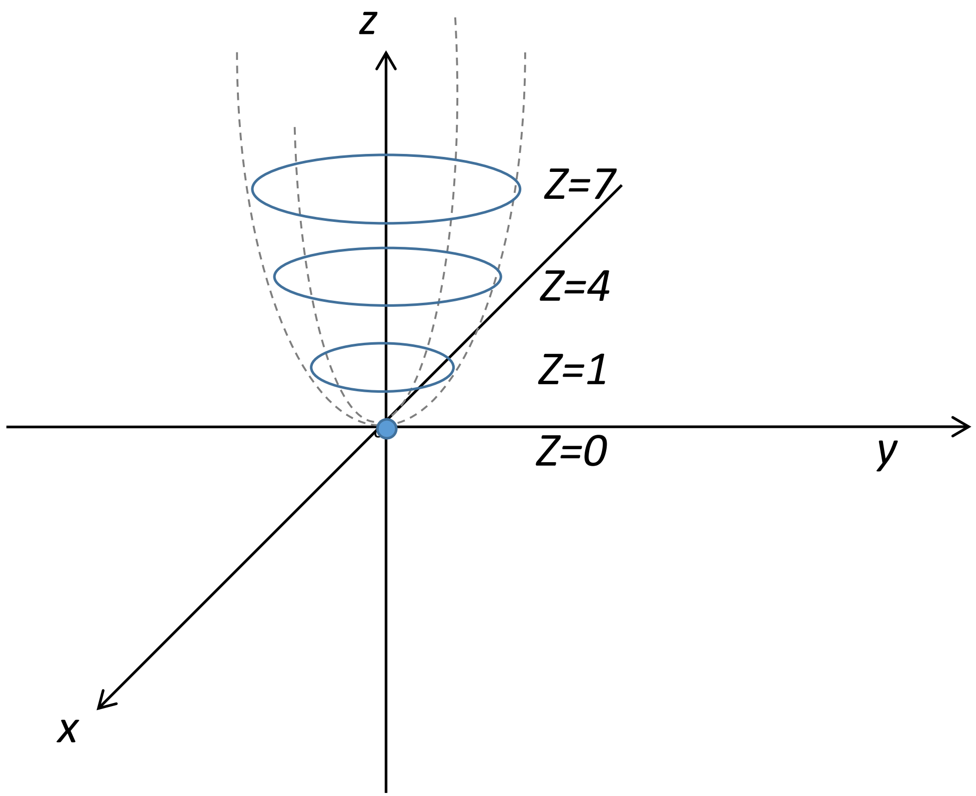


Figura 6

Dominio de un Campo Escalar (restricciones)

Entre la infinita variedad de casos que se pueden presentar, existen cuatro situaciones especialmente interesantes:

- $y = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow g(x) \neq 0$
- $y = \ln f(x) \rightarrow f(x) > 0$
- $y = \sqrt[n]{f(x)}$ con n par $\rightarrow f(x) \geq 0$
- $\left| \begin{array}{l} y = arcsen\, f(x) \\ y = arccos\, f(x) \end{array} \right. \rightarrow -1 \leq f(x) \leq 1$

Ejemplo

Determinar analítica y gráficamente el dominio de $\boldsymbol{z = ln\frac{(x+1)^2+(y-2)^2-4}{4x^2+y^2-16}}$

$\boldsymbol{\frac{(x+1)^2+(y-2)^2-4}{4x^2+y^2-16} > 0}$ → restricción de la función logarítmica

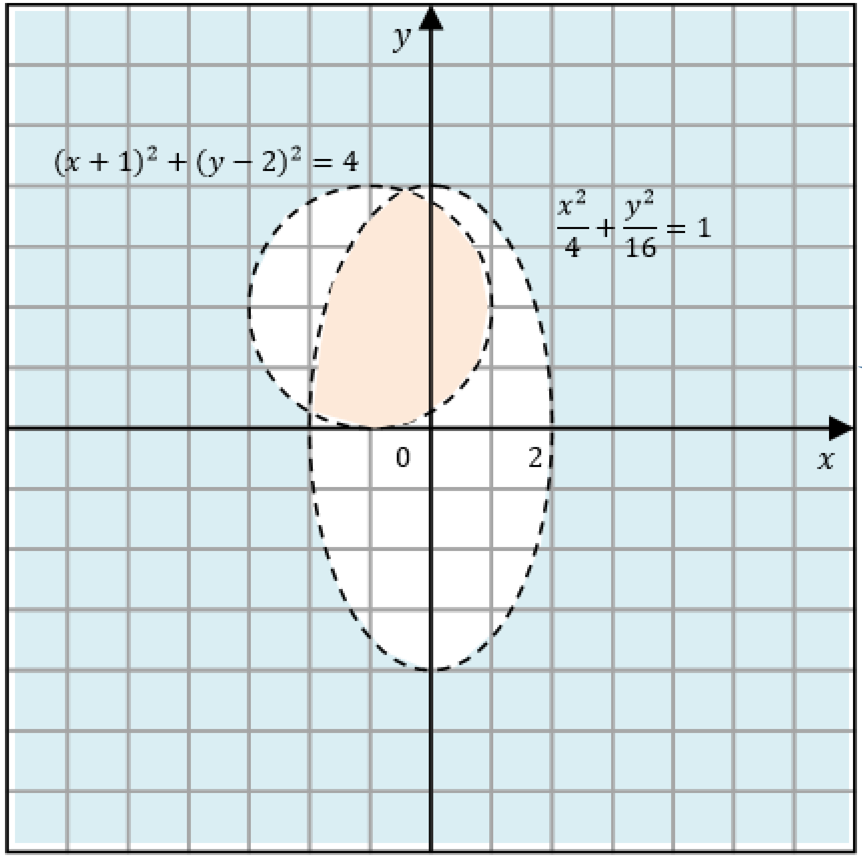
Para que el cociente resulte positivo numerador y denominador deben ser de igual signo:

$$\begin{cases}(x+1)^2+(y-2)^2-4>0\\ 4x^2+y^2-16>0\end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases}(x+1)^2+(y-2)^2-4<0\\ 4x^2+y^2-16<0\end{cases}$$

Despejando

$$\begin{cases}(x+1)^2+(y-2)^2>4\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}>1\end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases}(x+1)^2+(y-2)^2<4\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}<1\end{cases}$$

Ejemplo



Representamos gráficamente **ambas** situaciones que corresponden a todos los pares ordenados de números reales que pertenecen al dominio de z, es decir todos los puntos del plano xy que constituyen el dominio de z.

El área sombreada *fuera* de la circunferencia y *fuera* de la elipse (en color celeste), corresponde a la primera rama de análisis.
El área sombreada *dentro* de la circunferencia y *dentro* de la elipse (en color rosa), corresponde a la segunda rama de análisis.

Finalmente en forma analítica: $\mathcal{D}(f)=\left\{(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2 \wedge \frac{(x+1)^2+(y-2)^2-4}{4x^2+y^2-16}>0\right\}$

Análisis Matemático II

Funciones de varias variables independientes

Límite y Continuidad

Funciones de varias variables

- En funciones de una variable (Análisis Matemático I)

Llamamos **entorno** de centro a y radio δ, al conjunto de todos los puntos de la recta que pertenecen al intervalo $(a-\delta, a+\delta)$.

En símbolos: $E(a,\delta) = \{x \ / \ x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq |x-a| < \delta\}$

- En funciones de dos variables independientes (Análisis Matemático II)

Llamamos **entorno** de centro (a,b) y radio δ, al conjunto de todos los puntos del plano que pertenecen a un círculo de centro (a,b) y radio menor que δ. En símbolos:

$$E[(a,b),\delta] = \left\{(x,y) \ / \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge 0 \leq \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta\right\}$$

Funciones de varias variables

- De manera análoga, en funciones de una variable (Análisis Matemático I)

Llamamos **entorno reducido** de centro a y radio δ, al conjunto de todos los puntos de la recta que pertenecen al intervalo $(a-\delta, a+\delta)$, excepto a.

En símbolos: $E'(a,\delta) = \{x \;/\; x \in \mathbb{R} \wedge 0 < |x-a| < \delta\}$

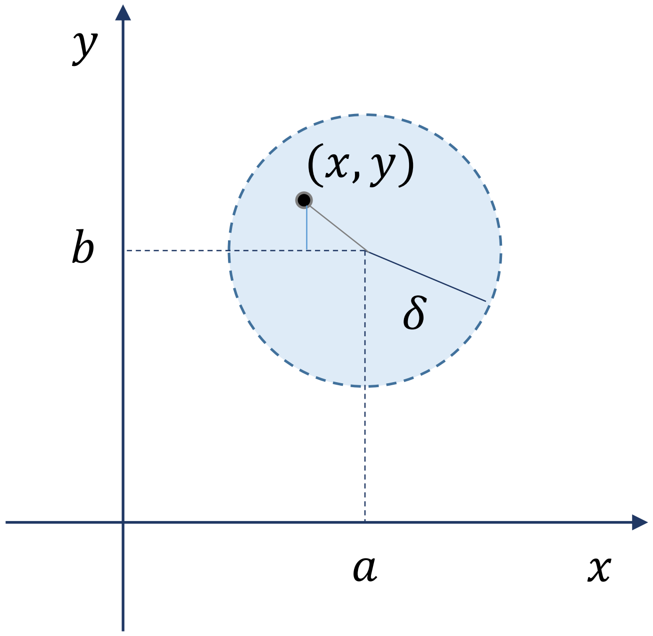
- En funciones de dos variables independientes (Análisis Matemático II)

Llamamos **entorno reducido** de centro (a,b) y radio δ, al conjunto de todos los puntos del plano que pertenecen a un círculo de centro (a,b) y radio menor que δ, excepto el punto (a,b). En símbolos:

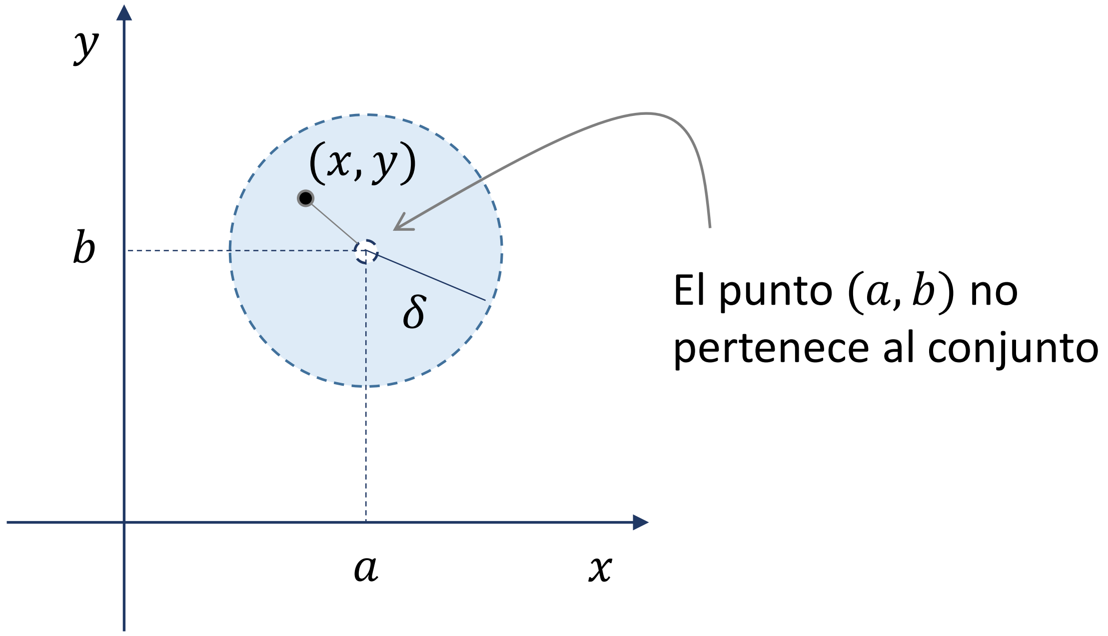
$$E'[(a,b),\delta] = \left\{(x,y) \;/\; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge 0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta\right\}$$

Funciones de varias variables

Entorno de centro (a, b) y radio δ



Entorno reducido de centro (a, b) y radio δ



El punto (a, b) se denomina **punto de acumulación**.

Funciones de varias variables

Límite doble o simultáneo

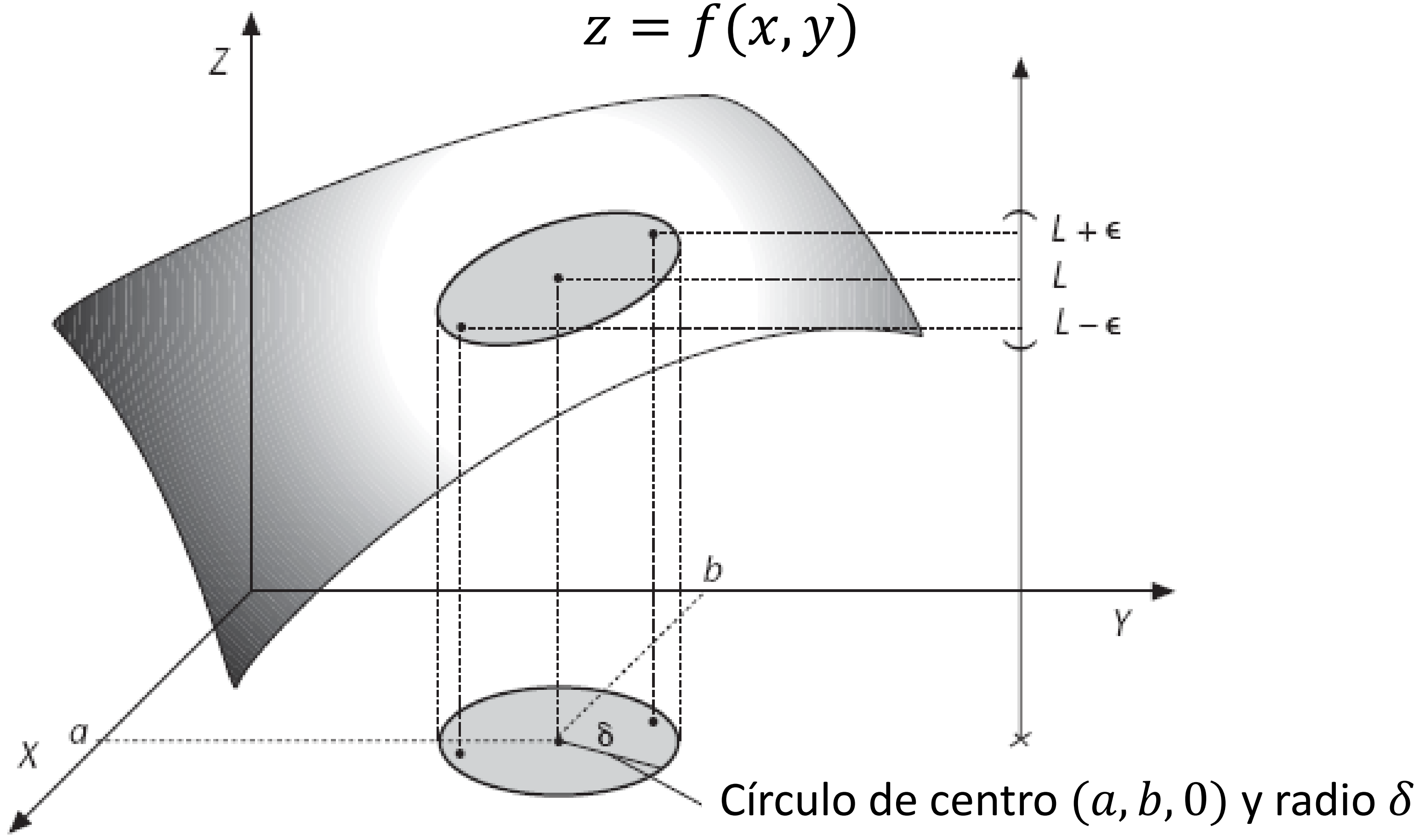
Dada una función $z = f(x, y)$ definida en un dominio D, un número real L es el límite de la función f en el punto de acumulación (a, b) de su dominio, si y sólo si, para todo número positivo ε, fijado de antemano, existe otro número positivo δ tal que, para cualquier punto (x, y), que pertenece al dominio de la función f, y pertenece al entorno reducido de centro (a, b) y radio δ, el valor de la función f se acerca al límite L una distancia menor que ε.

En símbolos:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L \iff$$

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \;/\; si\; \forall (x, y) \in D_f, 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \;\Rightarrow\; |f(x, y) - L| < \varepsilon$$

Funciones de varias variables



Funciones de varias variables

Límite doble o simultáneo

Se puede demostrar que:

a) El límite doble goza de todas las propiedades de los límites finitos para funciones de una variable y está sometido a las mismas reglas para operar.

b) Si el límite doble existe, es **único**.

c) Si al aplicar al cálculo del límite doble las propiedades de los límites finitos obtenemos como resultado ∞ , diremos que **el límite doble no existe** ya que la función no está acotada.

Funciones de varias variables

Límite doble o simultáneo

d) Si al aplicar al cálculo del límite doble las propiedades de los límites finitos, obtenemos como resultado una indeterminación, y esta indeterminación se puede levantar usando métodos algebraicos, podremos concluir lo expuesto en **b)** o **c)**

e) Si al aplicar al cálculo del límite doble las propiedades de los límites finitos obtenemos como resultado una indeterminación, y esta indeterminación ***no*** se puede levantar usando métodos algebraicos, deberíamos calcular el límite para los infinitos caminos por los cuales $(x, y) \to (a, b)$ aplicando la definición de límite.

Funciones de varias variables

Límite doble o simultáneo

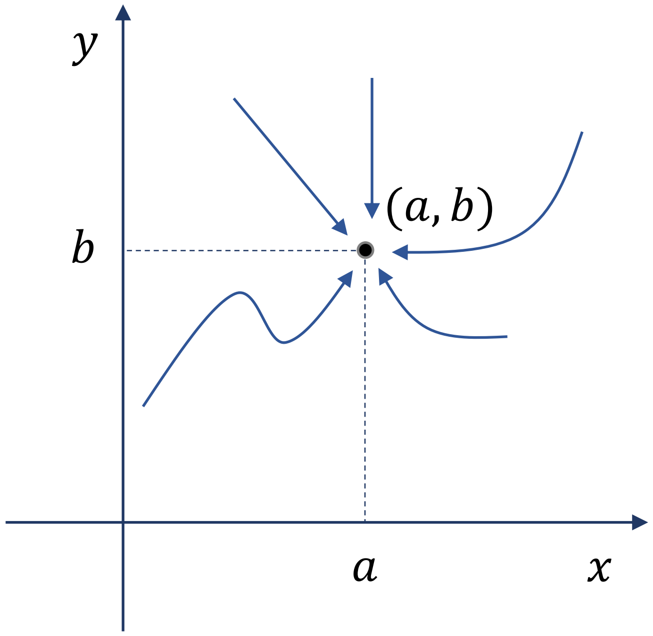
El concepto de Límite Doble para una función de dos variables independientes es el mismo que el de Límite Simple de una función de una sola variable independiente. Existe, sin embargo, una diferencia sustancial entre uno y otro:

En el Límite Simple existen únicamente dos trayectorias posibles para $x \to a$ (por izquierda y por derecha), en consecuencia basta calcular los límites izquierdo y derecho y, si en estas condiciones los límites son iguales, decimos que la función tiene límite para $x \to a$.

Pero en el caso de la función $z = f(x, y)$, el punto (a, b) es un punto del plano XY y existen infinitas formas en que (x, y) puede aproximarse a (a, b).

Funciones de varias variables

Límite doble o simultáneo



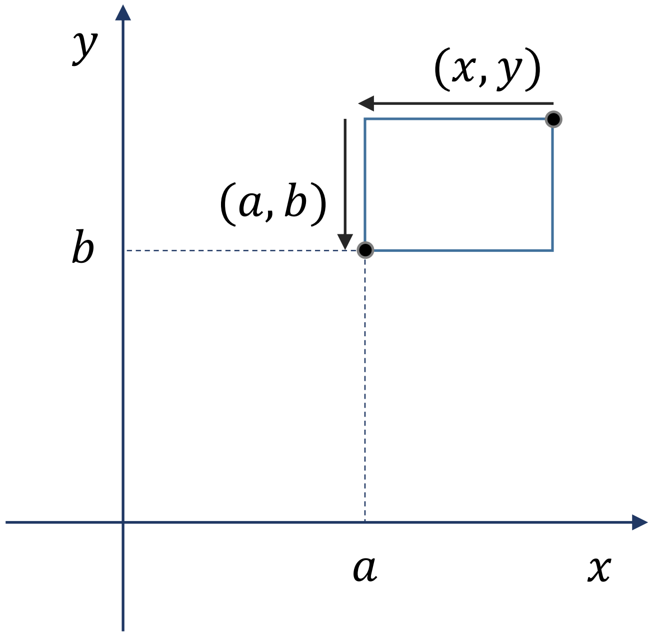
Para asegurar la existencia del límite doble hay 2 métodos:

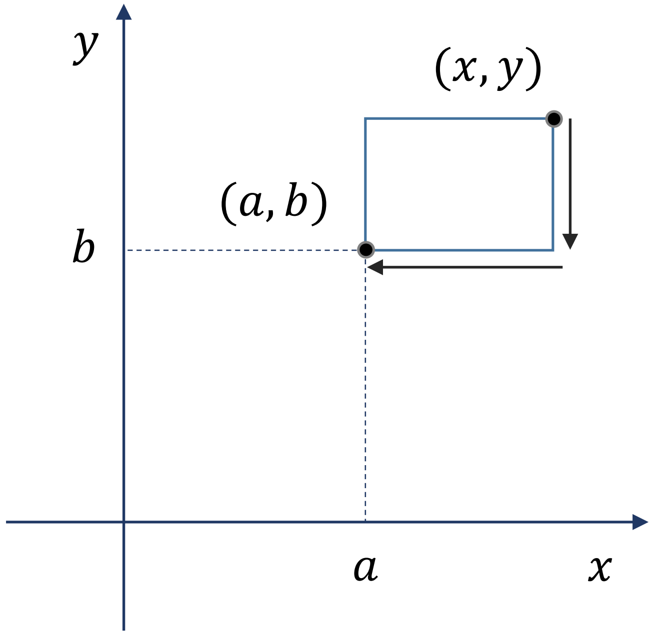
a) calcularlo aplicando la definición. (Esta es una tarea bastante compleja que no vamos a comprometernos a emprender) o aplicando las propiedades de los límites finitos.

b) En el caso de resultar imposible (porque se obtuvo una indeterminación que no pudo levantarse por métodos algebraicos), sólo calcularemos el límite ***por algunos de los infinitos caminos*** (límites sucesivos, límites radiales y límite a lo largo de una curva). Por esto es que, en este caso, sólo podremos concluir que el límite doble **no existe** o que el límite doble **puede existir**.

Funciones de varias variables

Cálculo de Límites Dobles: Límites Sucesivos





Si $L_1 \neq L_2 \Rightarrow$ el límite doble L **no existe**.

Si $L_1 = L_2 \Rightarrow$ el límite doble L **puede existir** y si existe $L = L_1 = L_2$.

$$L_1 = \lim_{y \to b} \underbrace{\left(\lim_{x \to a} f(x, y)\right)}$$

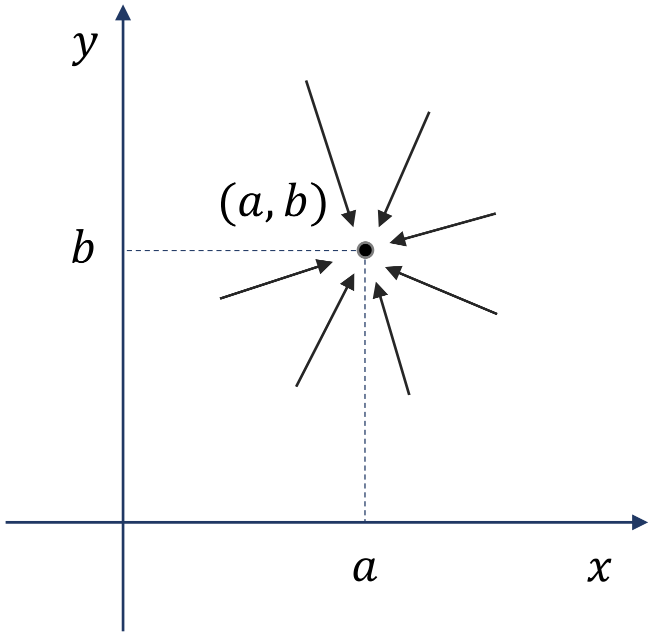
$\varphi(y)$ es sólo función de y

$$L_2 = \lim_{x \to a} \underbrace{\left(\lim_{y \to b} f(x, y)\right)}$$

$\varphi(x)$ es sólo función de x

Funciones de varias variables

Cálculo de Límites Dobles: Límites Radiales



$$L_r = \lim_{x \to a} \underbrace{f(x, m(x-a)+b\,)}_{\text{Es sólo función de } x}$$

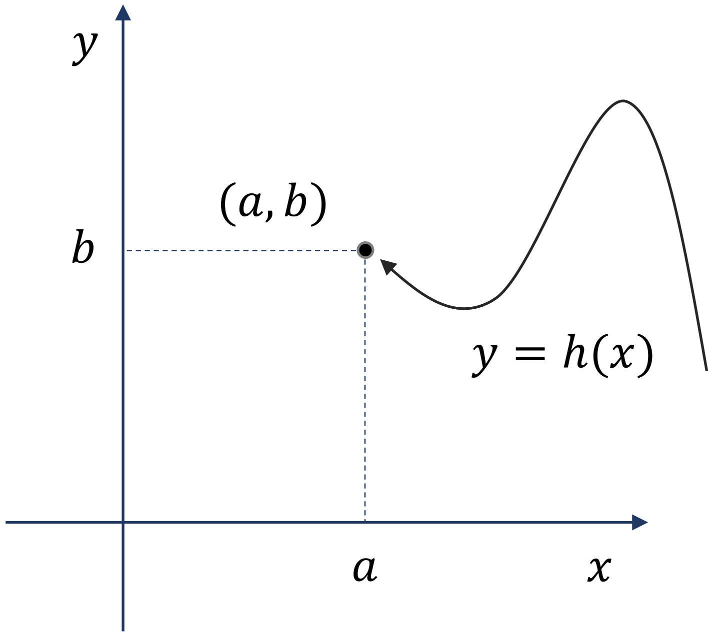
Se trata de calcular el límite cuando nos acercamos al punto de acumulación en forma radial.

Este límite corresponde a las rectas que pasan por el punto de acumulación, es decir, las rectas de la ecuación: $y = m(x-a) + b$

- Si $L_r = g(m) \Rightarrow$ el límite doble L **no existe**.
- Si $L_r = cte \neq L_1 \neq L_2 \Rightarrow$ el límite doble L **no existe**.
- Si $L_r = cte = L_1 = L_2 \Rightarrow$ el límite doble L **puede existir** y si existe $L = L_r = L_1 = L_2$.

Funciones de varias variables

Cálculo de Límites Dobles: Límite a lo largo de una curva



$$L_c = \lim_{x \to a} \underbrace{f\big(x, h(x)\big)}_{\text{Es sólo función de } x}$$

Se trata de calcular el límite cuando nos acercamos al punto de acumulación a través de una curva de ecuación $y = h(x)$.

- Si $L_c \neq L_r \neq L_1 \neq L_2 \Rightarrow$ el límite doble L **no existe**.
- Si $L_c = L_r = L_1 = L_2 \Rightarrow$ el límite doble L **puede existir** y si existe $L = L_c = L_r = L_1 = L_2$.

Si en alguno cualquiera de los casos anteriores resultara que el límite calculado, da por resultado ∞, entonces el límite doble **no existe**.

Funciones de varias variables

Límite doble o simultáneo: EJEMPLO 1

Sea la función:

$$z = \frac{x^2 - y^2}{x - y} \quad \text{para } (x, y) \to (0,0)$$

Si queremos calcular el límite doble, aplicando las propiedades de los límites finitos, obtendremos una indeterminación. Sin embargo, en este caso, podemos levantar la indeterminación por métodos algebraicos:

Usamos el quinto caso de factoreo

$$\lim_{(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x - y} = \lim_{(0,0)} \frac{\cancel{(x - y)}(x + y)}{\cancel{x - y}} = \lim_{(0,0)} x + y = 0$$

Como pudimos calcular el límite doble aplicando las propiedades de los límites finitos, el límite doble existe y vale 0.

Funciones de varias variables

Límite doble o simultáneo: EJEMPLO 2

Sea la función:

$$z = \frac{x - y}{x^2 - y^2} \quad \text{para } (x, y) \to (0,0)$$

Si queremos calcular el límite doble, aplicando las propiedades de los límites finitos, obtendremos una indeterminación. Sin embargo, en este caso, podemos levantar la indeterminación por métodos algebraicos:

$$\lim_{(0,0)} \frac{x - y}{x^2 - y^2} = \lim_{(0,0)} \frac{\cancel{x - y}}{\underbrace{\cancel{(x - y)}(x + y)}_{\text{Usamos el quinto caso de factoreo}}} = \lim_{(0,0)} \frac{1}{x + y} = \infty$$

Como pudimos calcular el límite doble aplicando las propiedades de los límites finitos, y resultó ∞ , la función no está acotada. Luego, el límite doble no existe

Funciones de varias variables

Límite doble o simultáneo: EJEMPLO 3

Sea la función:

$$z = \frac{2x^2y}{x^4 + 3y^2} \quad \text{para } (x, y) \to (0,0)$$

Si queremos calcular el límite doble, aplicando las propiedades de los límites finitos, obtendremos una indeterminación. Ya que no podemos levantar la indeterminación por métodos algebraicos, intentaremos demostrar, entonces, que el límite doble no existe.

Recordar que la Regla de L'Hopital es válida sólo para funciones de 1 variable NO se puede aplicar a funciones de dos variables.

Calculemos primero, los límites sucesivos:

$$L_1 = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2x^2y}{x^4 + 3y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{2.0^2\, y}{0^4 + 3y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{3y^2}\right) = \lim_{y\to 0}(0) = 0$$

$$L_2 = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{2x^2y}{x^4 + 3y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x^2.0}{x^4 + 3\,.\,0^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x^4}\right) = \lim_{x\to 0}(0) = 0$$

Como $L_1 = L_2$, el límite doble **puede existir** y si existe vale 0.

Funciones de varias variables

Límite doble o simultáneo: EJEMPLO 3 (cont.)

Calculemos ahora, los límites radiales:

$$y = m(x-a) + b \;\Rightarrow y = mx$$

$$L_r = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2\, mx}{x^4 + 3(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3\, m}{x^4 + 3x^2m^2} = \lim_{x\to 0} \frac{6x^2 m}{4x^3 + 6xm^2} = \lim_{x\to 0} \frac{12xm}{12x^2 + 6m^2} = \frac{12.0\,.\,m}{12\,.\,0^2 + 6m^2} = 0$$

Aplicamos L´Hopital

Porque se trata de una función de una variable.

Como $L_r = L_1 = L_2$, el límite doble **puede existir** y si existe vale 0.

Calculemos ahora, al límite a lo largo de la curva $y = x^2$:

$$L_c = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2\, x^2}{x^4 + 3x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2\, x^4}{x^4(1+3)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Como $L_c \neq L_r, L_c \neq L_1$, $L_c \neq L_2$, el límite doble **no existe**.

Funciones de varias variables

Continuidad

Una función $f(x,y)$ es continua en un punto (a,b) de su dominio, si se cumple:

1) $\exists\ f(a,b)$
2) $\exists \lim\limits_{(a,b)} f(x,y)$
3) $\lim\limits_{(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

Si alguna de estas condiciones no se cumple, entonces $f(x,y)$ **es discontinua en el punto** (a,b).

Funciones de varias variables

Continuidad

Clasificación de las discontinuidades:

ESENCIAL (no evitable)	Si no se cumple (2)
APARENTE (evitable)	Si se cumple (2) pero no se cumple (1) Si se cumple (1) y (2) pero no se cumple (3) En estos casos se puede definir la función: $G(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & si\ (x,y)\neq(a,b) \\ \lim\limits_{(a,b)} f(x,y) & si\ (x,y)=(a,b) \end{cases}$

Funciones de varias variables

Continuidad: EJEMPLO

Veamos la misma función del ejemplo anterior: $z = \dfrac{2x^2y}{x^4+3y^2}$ y analicemos si es continua en $(x,y) \rightarrow (0{,}0)$

Analicemos las condiciones de continuidad:

1) ¿Existe $f(a,b)$? No. Luego, la función es discontinua en $(0{,}0)$.

Para determinar el tipo de discontinuidad, sigamos analizando las condiciones:

2) ¿Existe $\lim\limits_{(a,b)} f(x,y)$? Acá se presenta una situación interesante:

a) Como $L_c \neq L_r, L_c \neq L_1, L_c \neq L_2$, el límite doble **no existe**. Luego la función presenta una discontinuidad del tipo **esencial** (no evitable) en $(0{,}0)$

b) Si no se conociera el límite a lo largo de la curva, como $L_r = L_1 = L_2$, el límite doble **puede existir** y si existe vale 0. Entonces, en este caso, se puede concluir que la discontinuidad **puede ser aparente** (evitable) y para evitar dicha discontinuidad podríamos definir:

$$G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4+3y^2} & si\ (x,y) \neq (0{,}0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0{,}0) \end{cases}$$

Análisis Matemático II

Derivadas Parciales
Derivadas Parciales Sucesivas

Derivadas Parciales

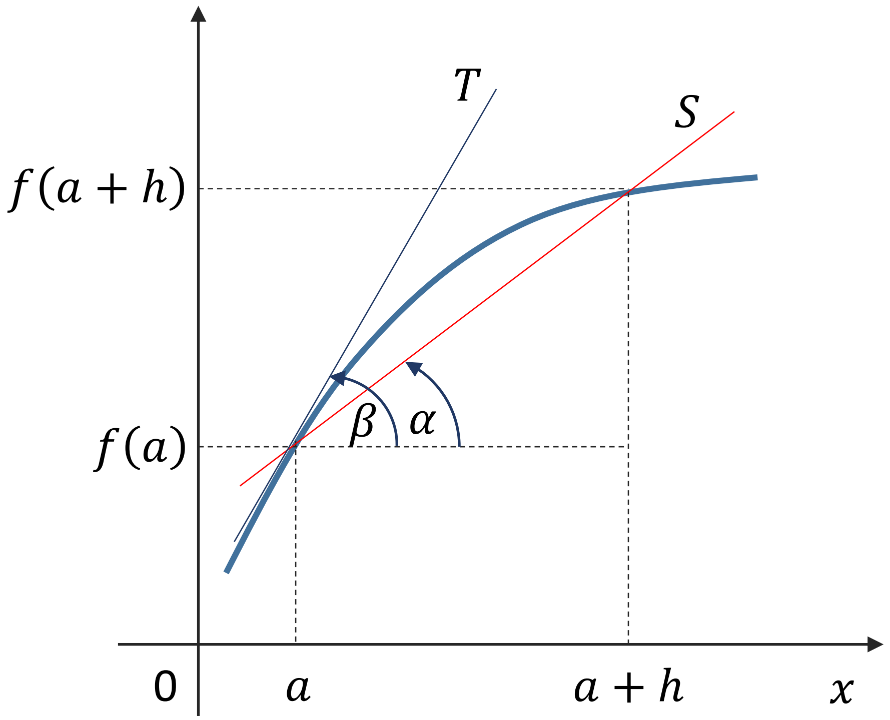
Introducción

La derivada es uno de los conceptos fundamentales del análisis matemático. Tiene importantes aplicaciones en la Física, Química, Biología y Ciencias Sociales, donde es necesario medir la rapidez con la que se produce el cambio de una magnitud.

Recordemos que la derivada de una función es la razón de cambio instantáneo con el que el valor de dicha función matemática varía, según se modifique el valor de su variable independiente. La derivada de una función es un concepto local, es decir, se calcula como el límite de la rapidez de cambio media de la función en cierto intervalo, cuando el intervalo considerado para la variable independiente se torna cada vez más pequeño. Por eso se habla del valor de la derivada de una función en un punto.

Derivadas Parciales

Repasemos lo estudiado en Análisis Matemático I para funciones de una variable:



Sea $y = f(x)$ una función de variable independiente x y a un punto interior al dominio D_f. Consideremos un incremento h de la variable x tal, que el cociente incremental:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = tg\,\alpha$$

corresponde a la pendiente de la recta secante S.

Cuando $h \to 0$, $S \to T$ y $\alpha \to \beta$, luego:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) = tg\,\beta$$

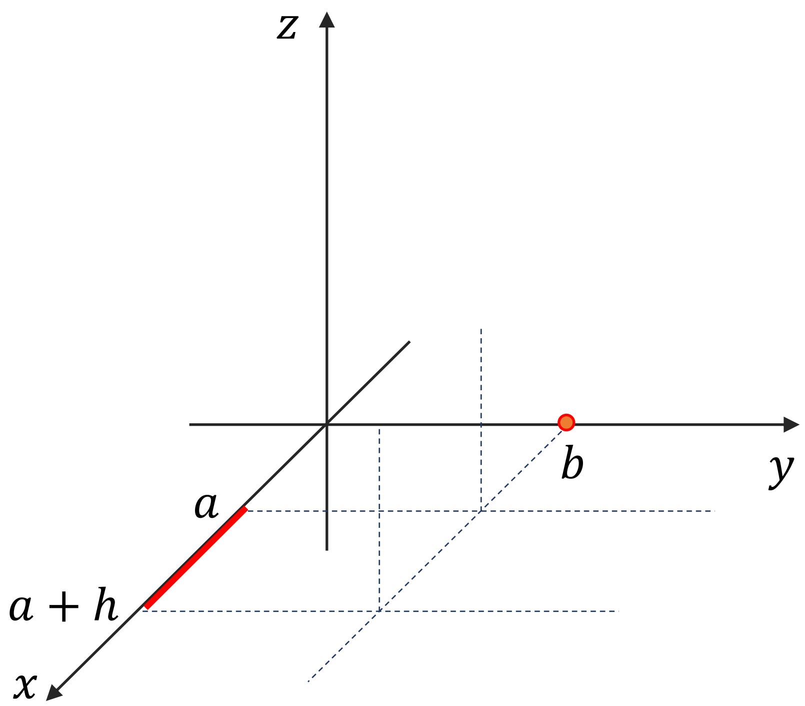
es la derivada de la función f en el punto a.

Y coincide con la pendiente de la recta tangente T.

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales: Definición

Al trabajar con campos escalares de dos variables independientes $z = f(x, y)$, se puede incrementar una u otra y esto da origen a las **derivadas parciales.**

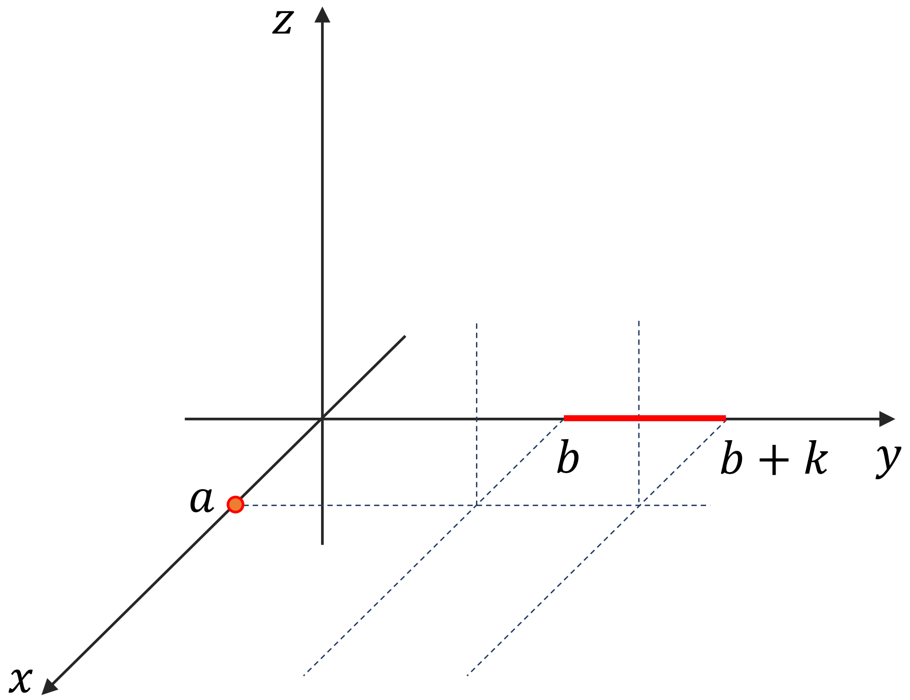


Supongamos que se mantiene y constante, haciendo variar solamente x, entonces, f se comporta como una función de una variable independiente en x. Si, bajo esta condición, derivamos a $f(x, y)$ en el punto (a, b), obtendremos «*la derivada parcial de f con respecto a x*» en (a, b):

$$f'_x(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

Derivadas Parciales

De manera análoga, si se mantiene x constante haciendo variar solamente y, ahora f se comporta como una función de una variable independiente en y. Si derivamos a $f(x,y)$ en el punto (a,b), obtendremos «*la derivada parcial de f con respecto a y*» en (a,b):



$$f'_y(a,b) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}$$

De forma similar se pueden definir las derivadas parciales de funciones de más de dos variables independientes.

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales: Función derivada parcial

Si las derivadas parciales respecto de x e y existen en todos los puntos de un conjunto A, es decir que a cada punto se le puede asignar el valor de su derivada parcial en dicho punto, queda definida la **función derivada parcial** respecto a x o respecto a y.

La funciones derivas parciales se denotan:

$$f'_x(x,y) = z'_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) \quad \text{o} \quad f'_y(x,y) = z'_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)$$

El símbolo ∂ denota derivada parcial y se debe al matemático C. G. Jacobi. Se la conoce también como «d de Jacobi».

Derivadas Parciales

De lo definido anteriormente, podemos deducir que las reglas para calcular las derivadas parciales son las mismas que se utilizan para calcular la derivada de las funciones de una sola variable independiente; sólo es preciso tener en cuenta con respecto a qué variable se desea derivar y mantener la otra constante.

Ejemplo:

Sea $z = xy^3 - 2x^2y + 3y$, obtengamos las derivadas parciales en el punto $(2,1)$.

Calculemos las funciones derivadas respecto de x e y respectivamente:

$z'_x = y^3 - 4xy$ Se obtuvo derivando respecto a x haciendo y constante

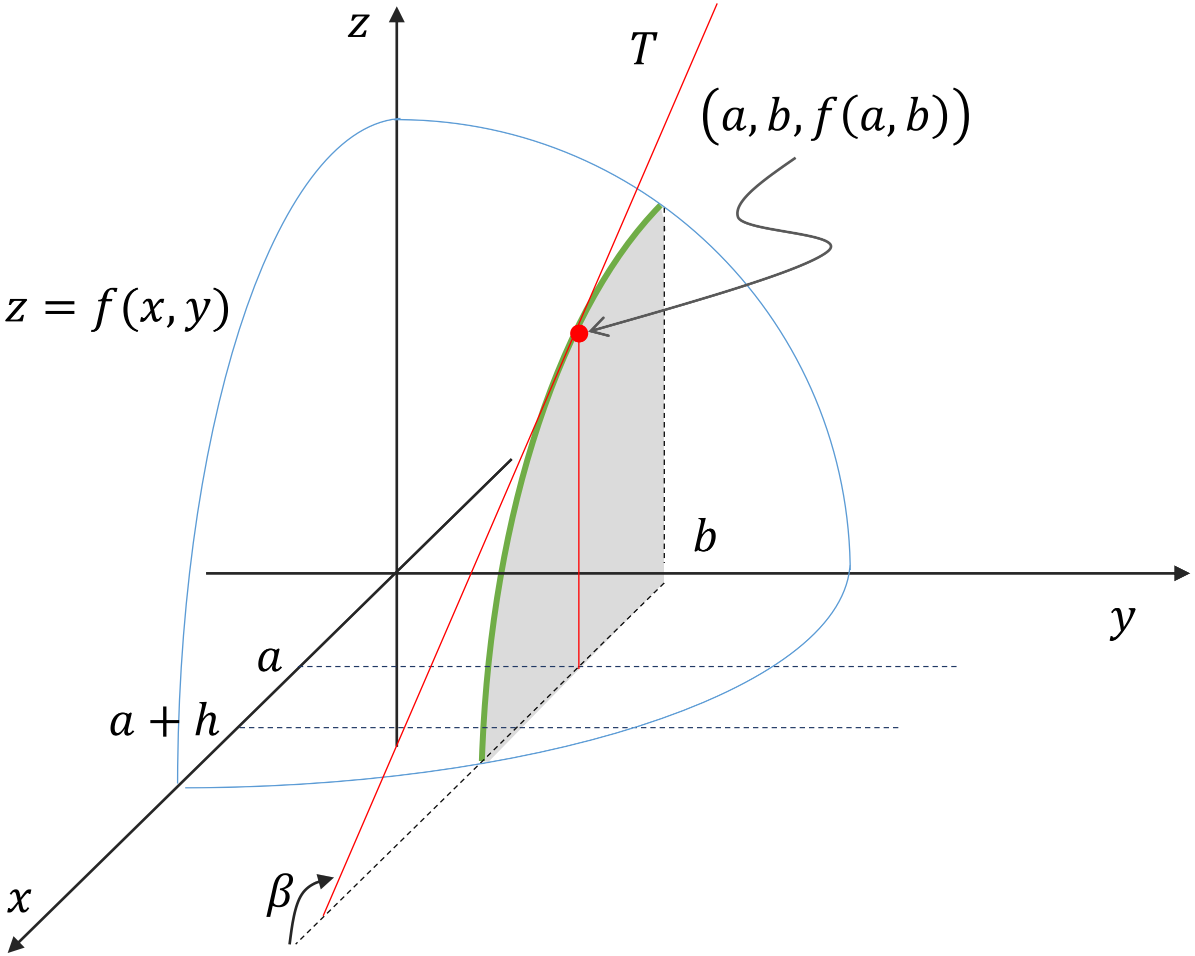
$z'_y = 3xy^2 - 2x^2 + 3$ Se obtuvo derivando respecto a y haciendo x constante

Ahora calculemos las derivadas en el punto $(2,1)$

$z'_x(2,1) = -7, \qquad z'_y(2,1) = 1$ ¿Qué podemos concluir de estos resultados?

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales: Interpretación Geométrica



Si trazamos el plano $y = b$, la intersección de éste con la superficie $z = f(x, y)$ determinará una curva (graficada en color verde).

Incrementemos la variable x en h.

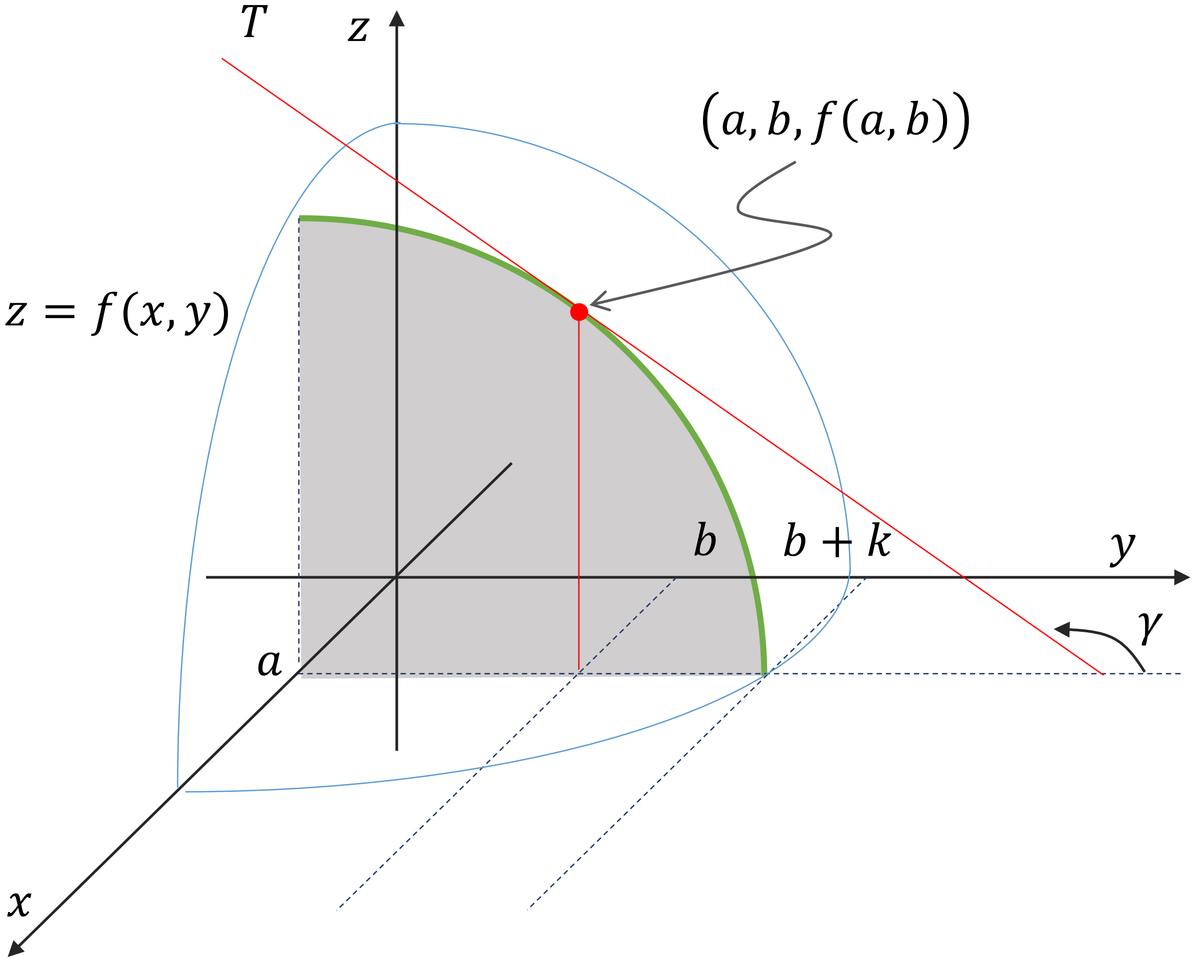
Si procedemos de manera análoga a lo estudiado para funciones de una variable independiente:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} = tg\, \beta = f'_x(a, b)$$

Es decir que, la derivada parcial de $f(x, y)$ respecto de x, en el punto (a, b), es igual al valor de la pendiente de la recta tangente T a la superficie $z = f(x, y)$ en $(a, b, f(a, b))$, en la dirección de x.

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales: Interpretación Geométrica



Si trazamos ahora el plano $x = a$, la intersección de éste con la superficie $z = f(x, y)$ determinará una curva (graficada en color verde).

Incrementemos la variable y en k.

Si procedemos de manera análoga a lo estudiado para funciones de una variable independiente:

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} = tg\, \gamma = f'_y(a, b)$$

Es decir que, la derivada parcial de $f(x, y)$ respecto de y, en el punto (a, b), es igual al valor de la pendiente de la recta tangente T a la superficie $z = f(x, y)$ en $(a, b, f(a, b))$, en la dirección de y.

Derivadas Parciales

Derivadas Parciales: Derivadas de orden superior

Como vimos, a partir de una función de dos o más variables independientes, se pueden definir las funciones derivadas parciales primeras. Estas funciones pueden, a su vez, admitir nuevas derivadas parciales. Cada función derivada, se puede volver a derivar respecto de una u otra variables de manera sucesiva:

$$\begin{tikzcd}
 & & f''_{xx} & \\
 & f'_x \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & & f''_{xy} & \\
z=f(x,y) \arrow[uur] \arrow[ddr] & & & \text{y así sucesivamente} \\
 & & f''_{yx} & \\
 & f'_y \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & & f''_{yy} &
\end{tikzcd}$$

Si las funciones derivadas segundas, se vuelven a derivar, se obtendrán 8 funciones derivadas parciales de 3° orden. Es fácil darse cuenta que, para funciones de dos variables independientes, obtendremos 2^n funciones derivadas de orden n.

Derivadas Parciales

Teorema de Schwartz

Si las derivadas parciales f'_x, f'_y y f''_{xy} de una función $z = f(x,y)$ existen en un entorno del punto $(a,b) \in D_f$ y además f''_{xy} es continua en dicho punto, entonces existe también $f''_{yx}(a,b)$ y se verifica que:

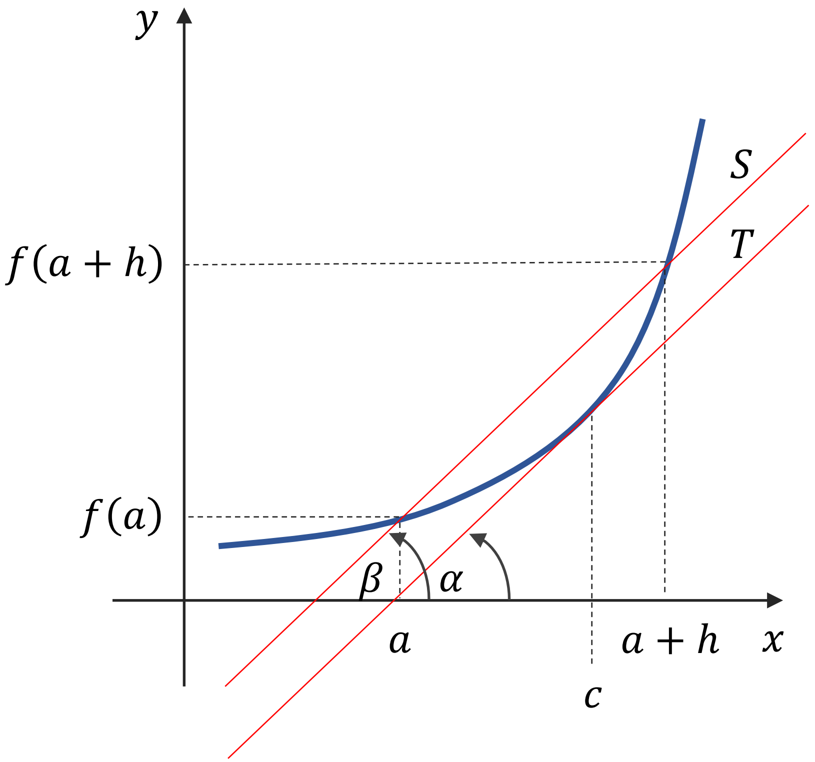
$$\boxed{f''_{yx}(a,b) = f''_{xy}(a,b)}$$

A este teorema se lo conoce también como el teorema de las derivadas cruzadas y establece la igualdad de las mismas en todos los puntos donde sean continuas, $f''_{yx}(x,y) = f''_{xy}(x,y)$. Si las derivadas cruzadas no son continuas, la igualdad no tiene por qué verificarse.

Derivadas Parciales

Preliminares

El Teorema de Schwartz se demostrará como consecuencia del Teorema del Valor Medio para funciones de una variable, recordemos su enunciado:



Si $y = f(x)$ es continua en $[a, a+h]$ y derivable en $(a, a+h)$, existe $c \in (a, a+h)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad (1)$$

$$tg\,\alpha = tg\,\beta \;\; \Rightarrow \;\; \alpha = \beta \text{ y } T \,||\, S$$

La ecuación (1) se puede expresar también:

$$f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta h)\,h \quad \text{con} \quad 0 < \theta < 1$$

Derivadas Parciales

Demostración del Teorema de Schwartz

Sea $z = f(x, y)$ y sea una función auxiliar en un entorno de $(a, b) \in D_f$, $(a + h, b + k) \in D_f$:

$g(x) = f(x, b + k) - f(x, b)$ con $a < x < a + h$, tal que: $g'(x) = f'(x, b + k) - f'(x, b)$

Aplicando el teorema del valor medio para una variable:

$$g(a + h) - g(a) = g'(a + \theta h)\, h \quad \text{con} \quad 0 < \theta < 1$$

Reemplazando a g y g':

$$f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - [f(a, b + k) - f(a, b)] = [f'_x(a + \theta h, b + k) - f'_x(a + \theta h, b)]\, h$$

Dividiendo ambos miembros por k:

$$\frac{f(a + h, b + k) - f(a + h, b)}{k} - \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k} = \frac{[f'_x(a + \theta h, b + k) - f'_x(a + \theta h, b)]}{k}\, h$$

Y tomando el límite para $k \to 0$:

Derivadas Parciales

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(a+h,b+k)-f(a+h,b)}{k}-\lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{[f'_x(a+\theta h,b+k)-f'_x(a+\theta h,b)]}{k}h$$

$$f'_y(a+h,b)\ -f'_y(a,b)=f''_{xy}(a+\theta h,b)\,h$$

Dividiendo ambos miembros por h:

$$\frac{f'_y(a+h,b)\ -f'_y(a,b)}{h}=f''_{xy}(a+\theta h,b)$$

Tomando el límite para $h\to 0$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'_y(a+h,b)\ -f'_y(a,b)}{h}=\lim_{h\to 0}f''_{xy}(a+\theta h,b)$$

$$\boxed{f''_{yx}(a,b)=f''_{xy}(a,b)}$$

Nota: En general es: $f''_{yx}(x,y)=f''_{xy}(x,y)$

Derivadas Parciales

Ejemplo:

Calcular las derivadas parciales sucesivas hasta el segundo orden de la función:

$$f(x,y) = y.e^{2x} + 2x.e^{y}$$

Calculamos las derivadas parciales de 1er orden:

$$f'_x = 2y.e^{2x} + 2\,e^{y}$$

$$f'_y = e^{2x} + 2x.e^{y}$$

Calculamos las derivadas parciales de 2do orden:

$$f''_{xx} = 4y.e^{2x}$$

$$f''_{yy} = 2x.e^{y}$$

$$f''_{xy} = 2\,e^{2x} + 2\,e^{y}$$

$$f''_{yx} = 2\,e^{2x} + 2\,e^{y}$$

$$\boxed{f''_{yx}(x,y) = f''_{xy}(x,y)}$$

Derivadas Parciales

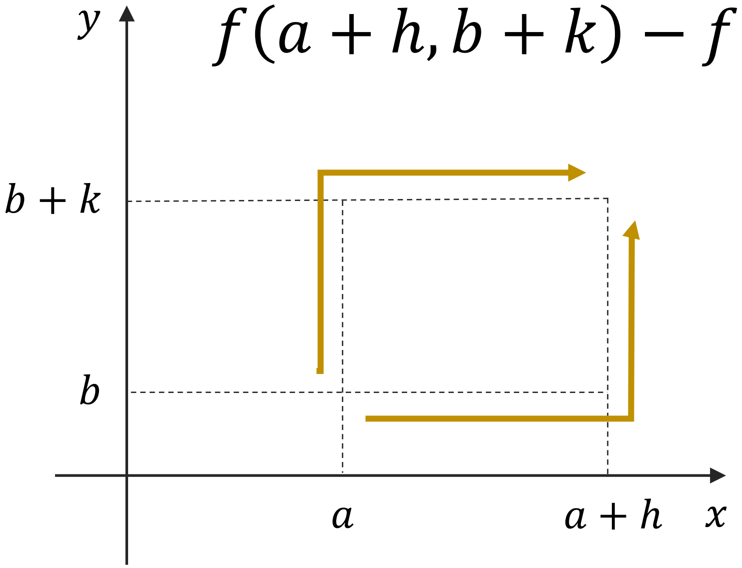
Teorema del Valor Medio para campos escalares de dos variables independientes

Sea $z = f(x, y)$ una función continua y derivable parcialmente en el entorno de un punto $(a, b) \in D_f$ y $(a + h, b + k)$ un punto que pertenece a dicho entorno. Entonces:

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = h\, f_x'(a + \theta_1 h, b) + k\, f_y'(a + h, b + \theta_2 k) \quad (1)$$

O bien:

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = k\, f_y'(a, b + \theta_2 k) + h\, f_x'(a + \theta_1 h, b + k) \quad (2)$$



Con $0 < \theta_1 < 1$ y $0 < \theta_2 < 1$

Según se incremente primero en x o en y dejando constante la otra variable.

Derivadas Parciales

Demostración del Teorema del Valor Medio

1) Incrementamos x dejando y constante ($y = b$)

$f(x,b) = g(x)$ es continua y derivable, por hipótesis, en $(a, a+h)$. Podemos luego aplicar el TVM para una variable a $g(x)$:

$$g(a+h) - g(a) = h\, g'(a + \theta_1 h) \quad \text{con} \quad 0 < \theta_1 < 1$$

Es decir:

$$f(a+h,b) - f(a,b) = h\, f'_x(a + \theta_1 h, b) \quad (I)$$

2) Incrementamos y dejando x constante ($x = a + h$)

$f(a+h,y) = u(y)$ es continua y derivable, por hipótesis, en $(b, b+k)$. Podemos luego aplicar el TVM para una variable a $u(y)$:

$$u(b+k) - u(b) = k\, u'(b + \theta_2 k) \quad \text{con} \quad 0 < \theta_2 < 1$$

Es decir:

$$f(a+h,b+k) - f(a+h,b) = k\, f'_y(a+h, b + \theta_2 k) \quad (II)$$

Derivadas Parciales

Sumamos (I) y (II):

$$f(a+h,b)-f(a,b)+f(a+h,b+k)-f(a+h,b)=h\,f'_x(a+\theta_1 h,b)+k\,f'_y(a+h,b+\theta_2 k)$$

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=h\,f'_x(a+\theta_1 h,b)+k\,f'_y(a+h,b+\theta_2 k)$$

Y la expresión (1) queda demostrada.

Podemos ahora demostrar la expresión (2) mediante un procedimiento análogo, incrementando primero y:

1) Incrementamos y dejando x constante ($x=a$)

$f(a,y)=g(y)$ es continua y derivable, por hipótesis, en $(b,b+k)$. Podemos luego aplicar el TVM para una variable a $g(y)$:

$$g(b+k)-g(b)=k\,g'(b+\theta_2 k) \quad \text{con} \quad 0<\theta_2<1$$

Es decir:

$$f(a,b+k)-f(a,b)=k\,f'_y(a,b+\theta_2 k) \quad (III)$$

Derivadas Parciales

2) Incrementamos x dejando y constante ($y = b + k$)

$f(x, b + k) = u(x)$ es continua y derivable, por hipótesis, en $(a, a + h)$. Podemos luego aplicar el TVM para una variable a $u(x)$:

$$u(a + h) - u(a) = h\, u'(a + \theta_1 h) \quad \text{con} \quad 0 < \theta_1 < 1$$

Es decir:

$$f(a + h, b + k) - f(a, b + k) = h\, f'_x(a + \theta_1 h, b + k) \qquad (IV)$$

Sumamos (III) y (IV):

$$f(a, b + k) - f(a, b) + f(a + h, b + k) - f(a, b + k) = k\, f'_y(a, b + \theta_2 k) + h\, f'_x(a + \theta_1 h, b + k)$$

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = k\, f'_y(a, b + \theta_2 k) + h\, f'_x(a + \theta_1 h, b + k)$$

Y la expresión (2) queda demostrada.

Análisis Matemático II

Derivada Direccional

Derivada Direccional

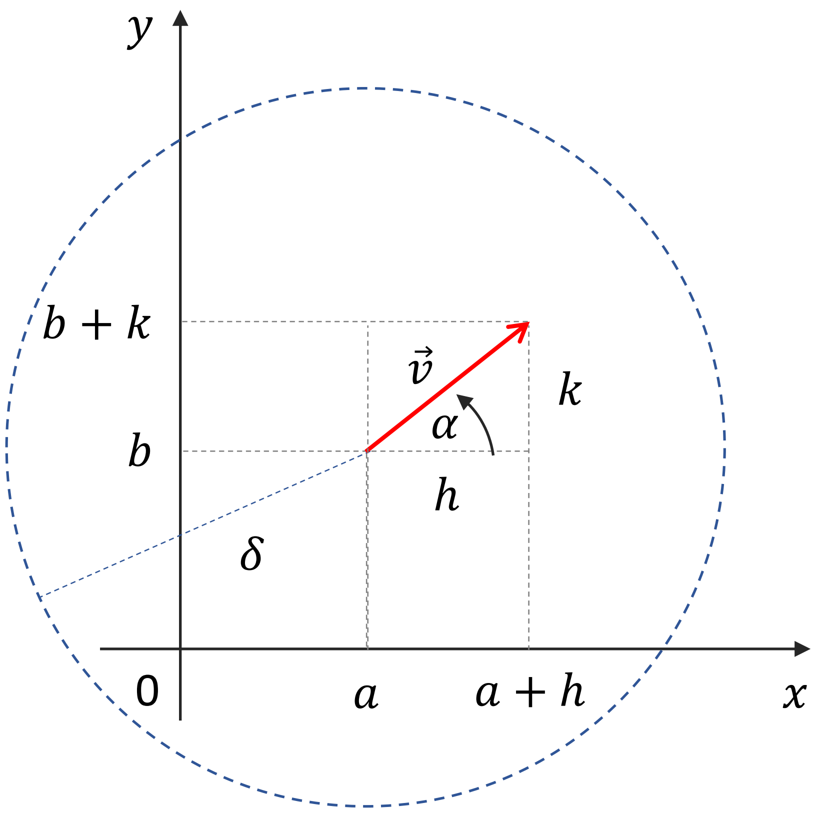
Introducción

Hemos estudiado que, dada una función $z = f(x, y)$, las derivadas parciales con respecto a x y a y nos dan la razón de cambio de f a medida que nos movemos en la dirección de x o y respectivamente. La pregunta que podemos hacernos en este momento es, ¿qué pasa si nos movemos en una dirección que no sea paralela al eje x o al eje y?

En campos escalares de dos o más variables independientes, de acuerdo a los incrementos de dichas variables, se pueden obtener infinitas derivadas. Estas infinitas derivadas se denominan **derivadas direccionales** y, como veremos más adelante, las derivadas parciales son un caso particular de ellas.

Derivada Direccional

Sea $z = f(x, y)$ una función derivable parcialmente en un entorno $E[(a, b), \delta]$ y un punto $(a + h, b + k)$ perteneciente a dicho entorno.



Las variables x e y se incrementan en una cantidad h y k, que pueden considerarse como las componentes de un vector $\vec{v}$ que, a su vez, indica la dirección y sentido en el que se incrementa el punto (a, b).

El vector $\vec{v}$ forma, con el semieje positivo de las x, un ángulo α que indica la dirección y sentido en el cual vamos a calcular la derivada direccional.

$$tg\,\alpha = \frac{k}{h} \Rightarrow \alpha = arctg\,\frac{k}{h}$$

Derivada Direccional

Definición

Al movernos de (a, b) a $(a + h, b + k)$ la función f se incrementa un valor Δz:

$$\Delta z = f(a + h, b + k) - f(a, b)$$

Por otro lado, el incremento entre (a, b) y $(a + h, b + k)$ es su distancia, es decir:

$$|\vec{v}| = \sqrt{h^2 + k^2}$$

Diremos que, la derivada direccional de f en la dirección del vector $\vec{v}$, en el punto (a, b), será el límite del cociente incremental cuando el módulo de $\vec{v}$ tiende a 0:

$$f'_{\vec{v}}(a, b) = \lim_{|\vec{v}| \to 0} \frac{\Delta z}{|\vec{v}|} \Rightarrow \boxed{f'_{\alpha}(a, b) = \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(a + h, b + k) - f(a, b)}{\sqrt{h^2 + k^2}}}$$

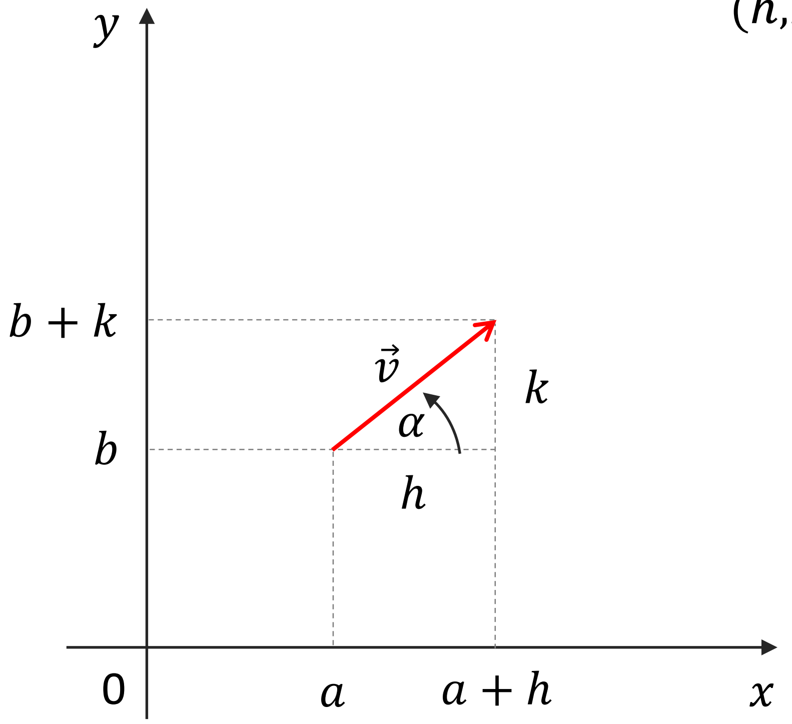
Se puede expresar también según el ángulo de dirección del vector $\vec{v}$

Cuando $|\vec{v}| \to 0$, $\sqrt{h^2 + k^2} \to 0$, es decir, $(h, k) \to (0,0)$

Derivada Direccional

Podemos entonces definir la derivada direccional, usando la expresión:

$$f'_\alpha(a,b) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} \qquad (1)$$



h y k varían simultáneamente y vimos que:

$$tg\ \alpha = \frac{k}{h} \ \Rightarrow\ k = h \cdot tg\ \alpha$$

Reemplazando en (1), obtendremos una expresión con una sola variable, ya que α es conocida y por lo tanto $tg\ \alpha$ también lo es. Luego calcularíamos el límite para $h \to 0$.

No obstante, en lugar de aplicar la definición, deduciremos una fórmula para el cálculo de la derivada direccional.

Derivada Direccional

Fórmula para el cálculo de la Derivada Direccional

Aplicaremos el teorema del valor medio para funciones de dos variables en el numerador de la expresión (1):

$$f'_\alpha(a,b) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h \cdot f'_x(a+\theta_1 h, b) + k \cdot f'_y(a+h, b+\theta_2 k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} 0 < \theta_1 < 1 \\ 0 < \theta_2 < 1 \end{matrix}$$

$$f'_\alpha(a,b) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left[f'_x(a+\theta_1 h, b) \cdot \underbrace{\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{cos\ \alpha} + f'_y(a+h, b+\theta_2 k) \cdot \underbrace{\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{sen\ \alpha} \right]$$

$$\boxed{f'_\alpha(a,b) = f'_x(a,b) \cdot cos\ \alpha + f'_y(a,b) \cdot sen\ \alpha}$$

$$\begin{cases} \text{Para } \alpha = 0° & \Rightarrow f'_\alpha(a,b) = f'_x(a,b) \\ \text{Para } \alpha = 90° & \Rightarrow f'_\alpha(a,b) = f'_y(a,b) \end{cases}$$

Las derivadas parciales son un caso particular de la derivada direccional.

Derivada Direccional

Ejemplo:

Calcular la derivada de $z = f(x,y) = 2x + y^2$ en el punto $(2,1)$ en la dirección $\alpha = 45°$

Usaremos la fórmula:

$$f'_\alpha(a,b) = f'_x(a,b) \cdot cos\ \alpha + f'_y(a,b) \cdot sen\ \alpha$$

Calculemos, primero, las derivadas parciales de primer orden en $(2,1)$:

$$f'_x(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 2 \qquad \Rightarrow f'_x(2,1) = 2$$

$$f'_y(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 2\mathrm{y} \qquad \Rightarrow f'_y(2,1) = 2$$

Sabiendo que $cos\ 45° = sen\ 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

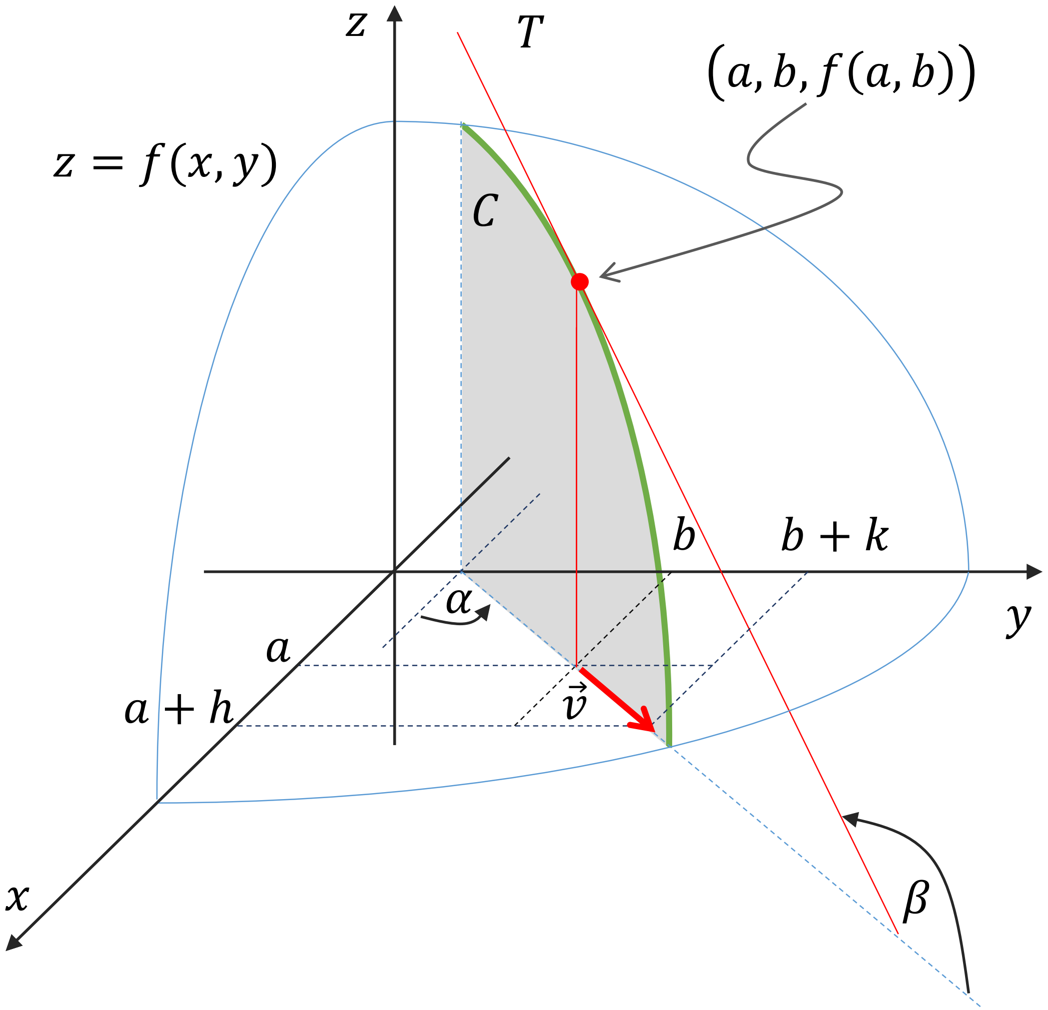
Entonces tendremos:

$$f'_{45°}(2,1) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

¿Y qué significa esto?

Derivada Direccional

Interpretación geométrica de la Derivada Direccional



Si trazamos un plano perpendicular al plano xy, que contiene al vector $\vec{v}$, la intersección de éste con la superficie $z = f(x, y)$ determinará la curva C.

Definimos la derivada de la función f en la dirección del vector $\vec{v}$ que forma un ángulo α con el semieje positivo de las x como:

$$f'_{\vec{v}}(a, b) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a + h, b + k) - f(a, b)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = tg\,\beta$$

Es decir que, la derivada direccional de $f(x, y)$ en la dirección de $\vec{v}$, en el punto (a, b), es igual al valor de la pendiente de la recta tangente T a la superficie $z = f(x, y)$ en $(a, b, f(a, b))$, en la dirección de $\vec{v}$.

Derivada Direccional

Variación de la Derivada Direccional

Sabemos que:

$$f'_\alpha(a,b) = f'_x(a,b)\cdot cos\ \alpha + f'_y(a,b)\cdot sen\ \alpha$$

Conocidas la derivadas parciales de la función en (a,b), la derivada direccional resulta ser una función de una única variable α:

$$g(\alpha) = \underbrace{f'_x(a,b)}_{} \cdot cos\ \alpha + \underbrace{f'_y(a,b)}_{} \cdot sen\ \alpha$$

$$\color{red}{constantes\ respecto\ a\ \alpha}$$

Puedo ahora calcular sus puntos críticos:

$$g'(\alpha) = -f'_x(a,b)\cdot sen\ \alpha + f'_y(a,b)\cdot cos\ \alpha = 0$$

$$f'_x(a,b)\cdot sen\ \alpha = f'_y(a,b)\cdot cos\ \alpha$$

$$tg\ \alpha = \frac{f'_y(a,b)}{f'_x(a,b)} \quad \Rightarrow \quad \alpha = arctg\ \frac{f'_y(a,b)}{f'_x(a,b)} \qquad (2)$$

La expresión (2) permite obtener dos valores distintos para α que corresponden a las direcciones de **mínima** y de **máxima** derivadas direccionales. Estos dos valores siempre indican sentidos opuestos de una misma recta. Valuando la derivada segunda, según su signo, se conoce si se trata de un máximo o un mínimo.

Derivada Direccional

Recordando el concepto de producto escalar de dos vectores, que se expresa como **suma de los productos de las componentes análogas**, se puede aplicar a la derivada direccional y expresarla como producto escalar de dos vectores:

$$f'_\alpha(a,b) = \left[f'_x(a,b); f'_y(a,b)\right] \cdot (cos\ \alpha; sen\ \alpha)$$

A este vector le llamaremos **Gradiente** de la función f en el punto (a,b) y es independiente de α. Lo denotaremos $\overrightarrow{grad}\ f(a,b)$

Este será un **versor** (un vector unitario) en la dirección del vector $\vec{v}$ y, claramente, depende de α. Lo denotaremos $\hat{v}$

Finalmente:

$$\boxed{f'_\alpha(a,b) = \overrightarrow{grad}\ f(a,b) \cdot \hat{v}}$$

Derivada Direccional

Supongamos que el vector gradiente forma un ángulo φ con el versor $\hat{v}$.

Podemos expresar el producto escalar como:

$$f'_\alpha(a,b) = \left|\overrightarrow{grad}\, f(a,b)\right| \cdot |\hat{v}| \cdot cos\ \varphi$$

$$f'_\alpha(a,b) = \underbrace{\left|\overrightarrow{grad}\, f(a,b)\right|}_{constantes} \cdot 1 \cdot cos\ \varphi$$

Proyección del vector gradiente sobre el vector unitario.

Luego $f'_\alpha(a,b)$ varía como $cos\ \varphi$

Cuando $\varphi = 0°, cos\ \varphi = 1$, luego:

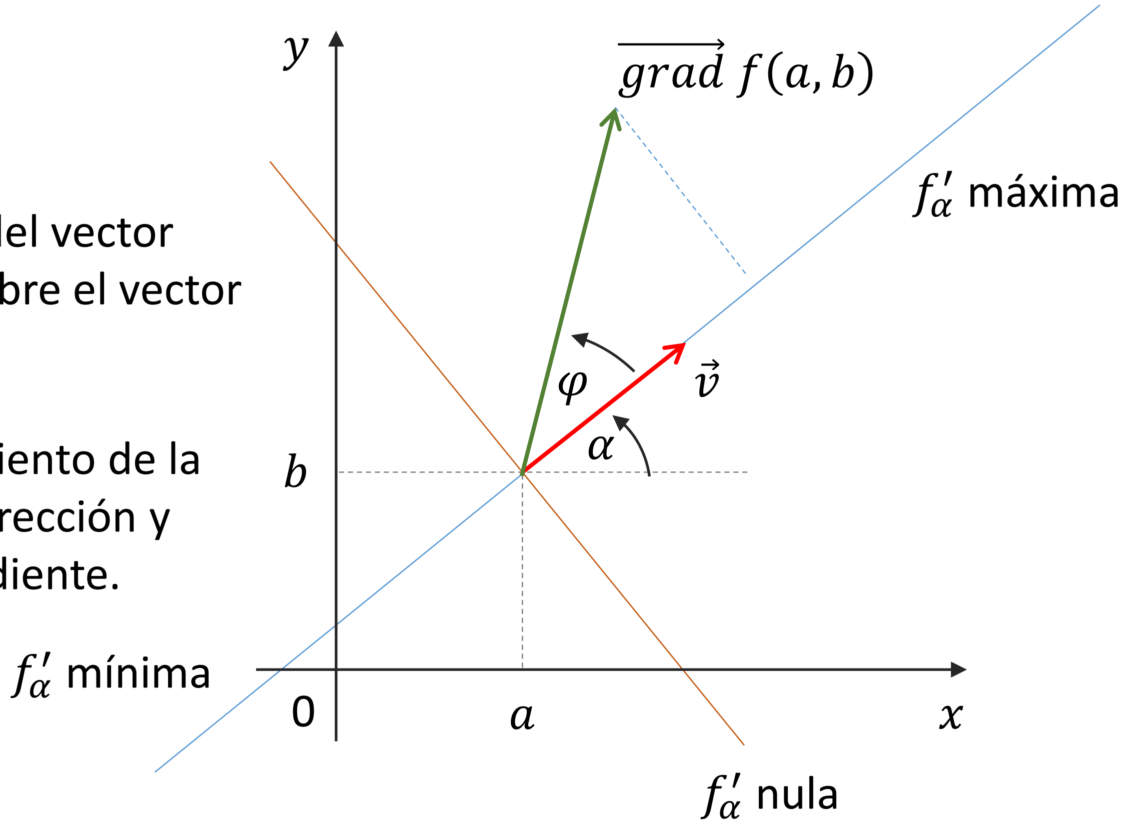
$$f'_\alpha(a,b) = \left|\overrightarrow{grad}\, f(a,b)\right|$$

Máximo crecimiento de la función en la dirección y sentido del gradiente.

Cuando $\varphi = 180°, cos\ \varphi = -1$, luego:

$$f'_\alpha(a,b) = -\left|\overrightarrow{grad}\, f(a,b)\right|$$

Mínimo crecimiento de la función en la dirección del gradiente per en sentido opuesto.



Derivada Direccional

Propiedades del Gradiente de una función

Lo antes dicho puede resumirse en la siguiente propiedad:

1. La derivada de la función $z = f(x, y)$ en el punto (a, b), según una dirección α, es igual al producto escalar del vector gradiente de f en (a, b), por un vector unitario $\hat{v}$ en la dirección de α. Es decir, es igual a la proyección del vector gradiente sobre el vector unitario $\hat{v}$.

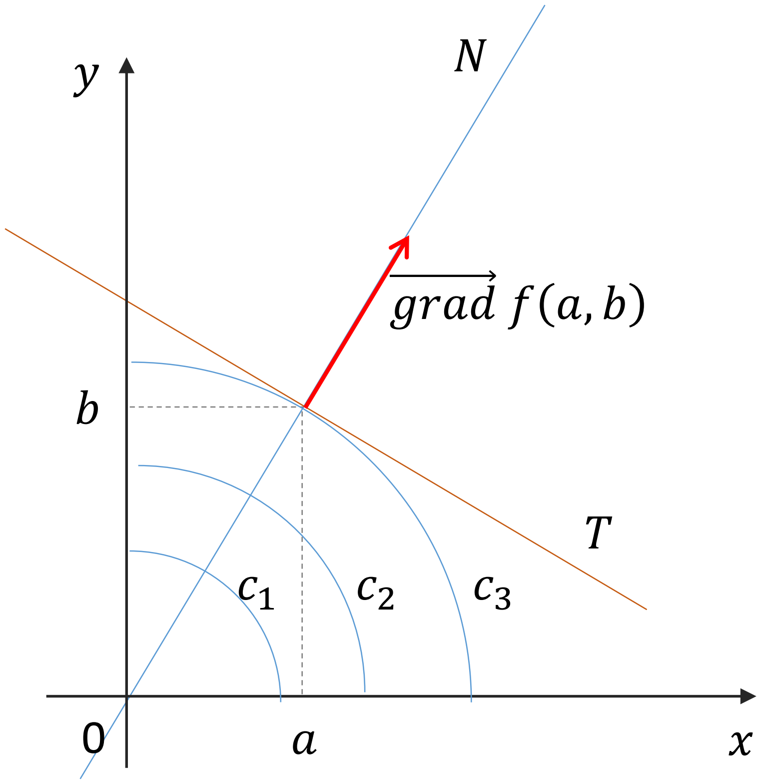
Podemos decir también que:

2. Dada $z = f(x, y)$, en cada punto (a, b) del dominio de f, el vector gradiente está dirigido según la normal, en ese punto, a la curva de nivel de la superficie.
3. Dada $z = f(x, y)$, la derivada de la función, en el punto (a, b), en la dirección de la recta tangente a la curva de nivel en dicho punto es igual a cero.

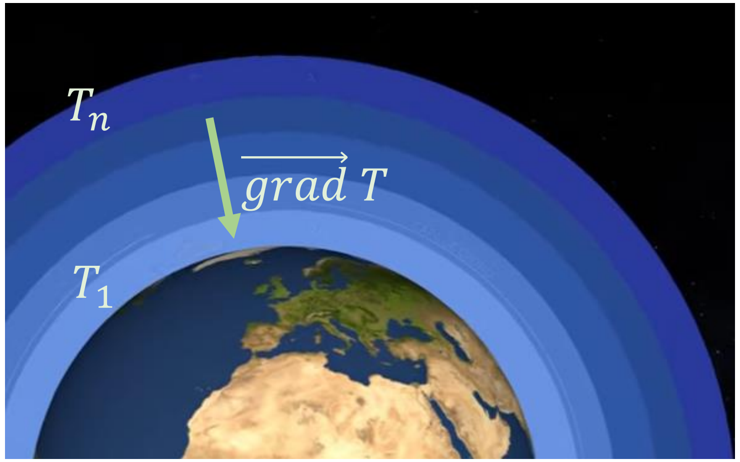
Derivada Direccional

Veamos esto gráficamente, el vector gradiente es perpendicular a la curva de nivel c_3, en el punto de coordenadas (a, b), suponiendo $c_1 < c_2 < c_3$.

En la dirección de T, la derivada direccional es nula.



Un ejemplo de aplicación del gradiente es el análisis de la variación de temperatura en las distintas capas de la atmósfera **T1 >… > Tn**



Derivada Direccional

Ejemplo:

Calcule las derivadas direccionales máxima y mínima de la función $z = f(x, y) = x^2 + xy + y$ en el punto $(3, 2)$ y represente gráficamente.

Resolveremos de dos formas:

a) Calculando máximos y mínimos de la función derivada direccional.

Calculemos la derivada direccional de la función en el punto $(3, 2)$:

Las derivadas parciales de primer orden orden en $(3, 2)$:

$$f'_x(x, y) = 2x + y \qquad \Rightarrow f'_x(3, 2) = 8$$

$$f'_y(x, y) = x + 1 \qquad \Rightarrow f'_y(3, 2) = 4$$

$$\boxed{f'_\alpha(3,2) = f'_x(3,2).cos\alpha + f'_y(3,2)sen\alpha}$$

Luego, la derivada direccional de la función en el punto (3,2) es una función que depende de una única variable α.

$$g(\alpha) = 8.cos\alpha + 4.sen\alpha$$

Calculemos los puntos críticos:

$$g'(\alpha) = -8.sen\alpha + 4.cos\alpha = 0$$

$$\alpha = arctg\frac{4}{8}$$

$$\alpha = arctg\ 0{,}5 \rightarrow \boxed{\alpha \cong 0{,}46 \rightarrow 26{,}6°}$$

Derivada Direccional

Calculamos la derivada segunda y la valuamos en el punto crítico para saber si corresponde a un máximo o un mínimo:

$g''(\alpha) = -8.\,cos\alpha - 4.\,sen\alpha$

$g''(26{,}6°) \cong -8.9 < 0 \ \rightarrow$ Hay máxima derivada direccional en $\alpha \cong 0{,}46 \rightarrow 26{,}6°$

Finalmente, sumando un ángulo de π radianes $= 180°$

Hay mínima derivada direccional en $\alpha \cong 3{,}61 \rightarrow 206{,}6°$

b) Aplicando las propiedades del vector gradiente.

$$\overrightarrow{grad}\, f(3,2) = \left[f'_x(3,2); f'_y(3,2)\right]$$

Las derivadas parciales de primer orden orden en $(3,2)$:

$$f'_x(x,y) = 2x + y \qquad \Rightarrow f'_x(3,2) = 8$$
$$f'_y(x,y) = x + 1 \qquad \Rightarrow f'_y(3,2) = 4$$

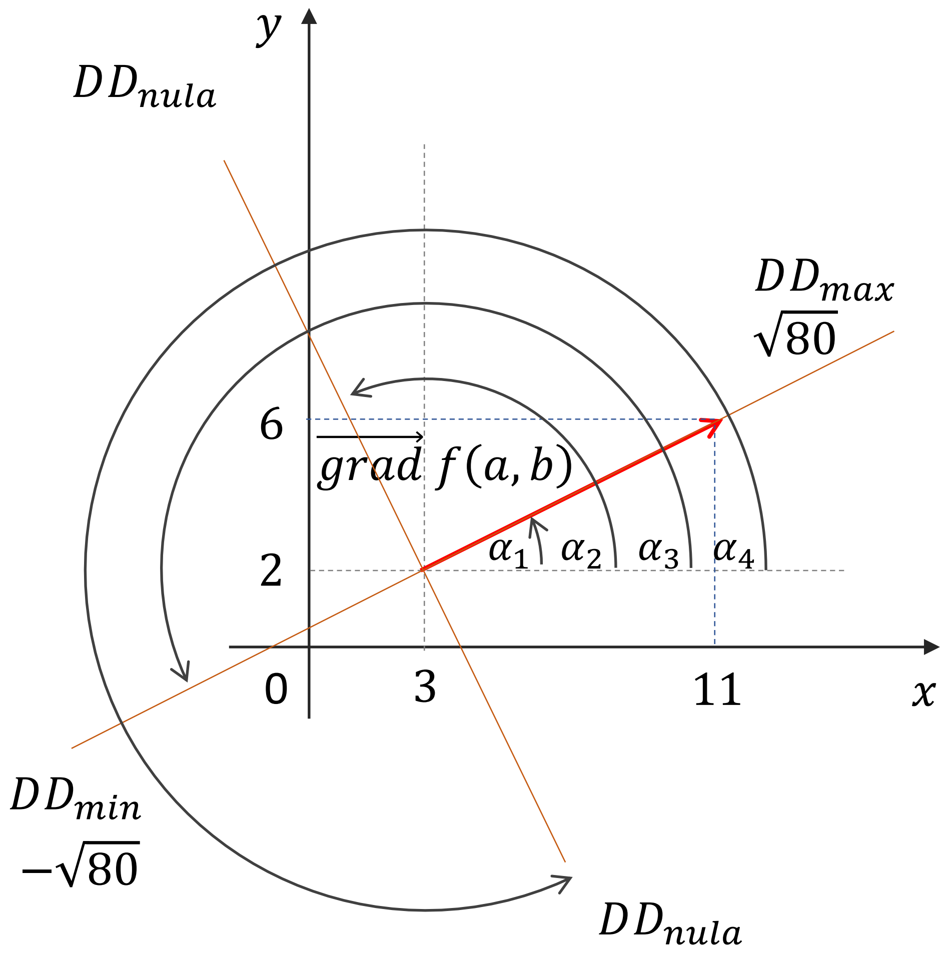
$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{grad}\, f(3,2) = (8,4)} \ \therefore \ \alpha = arctg\,\frac{4}{8}$$

$$\alpha_{c1} \cong 0{,}46 \rightarrow 26{,}6°$$

$$\left|\overrightarrow{grad}\, f(3,2)\right| = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80}$$

$$\alpha_{c2} \cong 3{,}61 \rightarrow 206{,}6°$$

Derivada Direccional



El gradiente apunta al primer cuadrante, α_{c1} es un ángulo del primer cuadrante, por lo tanto la derivada direccional máxima vale $\sqrt{80}$ cuando $\alpha_1 \cong 26{,}6°$ y vale $-\sqrt{80}$ cuando $\alpha_3 \cong 206{,}6°$.

En la dirección perpendicular a la dirección de máximo o mínimo, se obtienen las derivadas direccionales nulas, es decir, que la derivada direccional vale 0 cuando $\alpha_2 \cong 116{,}6°$ o también $\alpha_4 \cong 296{,}6°$.

Esta situación puede verse reflejada en el gráfico de la izquierda.

Análisis Matemático II

Diferencial

Diferencial

Infinitésimos

$y = f(x)$ es un infinitésimo para $x \to a$, si y sólo si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Por lo tanto, un infinitésimo **no** es un número, es una **variable** que tiende a cero.

Comparación entre infinitésimos

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos infinitésimos para $x = a$, entonces si:

1. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \;\Rightarrow$ $f(x)$ es un infinitésimo de orden superior a $g(x)$ o bien $g(x)$ es un infinitésimo de orden inferior. Esto significa que $f(x) \to 0$ más rápidamente que $g(x)$.

   $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty \;\Rightarrow$ $g(x)$ es un infinitésimo de orden superior a $f(x)$.

Diferencial

2. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = cte \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos del mismo orden.

3. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad \Rightarrow \quad$ $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos equivalentes del mismo orden.

> *Ejemplo:*
>
> $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, x}{x} = 1 \ \Rightarrow \quad$ $sen\, x$ y x son infinitésimos equivalentes para $x = 0$.
>
> Observe que este límite es un límite notable.
>
> Una función es un infinitésimo en las proximidades del punto a. Suele decirse, sencillamente, que es un infinitésimo en $x = a$.

Diferencial

Operaciones entre infinitésimos

1. Si $f(x)$ es un infinitésimo para $x = a$, entonces $k \cdot f(x)$ es otro infinitésimo del mismo orden para $x = a$.
2. Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos infinitésimos para $x = a$, entonces $f(x) \cdot g(x)$ es otro infinitésimo de mayor orden que $f(x)$ y $g(x)$ para $x = a$.
3. Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos infinitésimos para $x = a$ y $f(x)$ es de menor orden que $g(x)$, $f(x) \pm g(x)$ es otro infinitésimo para $x = a$ del mismo orden que $f(x)$. Además, el infinitésimo que es suma de dos o más infinitésimos, se llama **infinitésimo compuesto.** El que fija el orden del infinitésimo compuesto, es el infinitésimo de menor orden y por eso se llama **parte principal** del infinitésimo compuesto.

   En este caso: $\underbrace{f(x)}_{\text{Parte Principal}} + \underbrace{g(x)}_{\text{Término despreciable frente a la Parte Principal (por ser de mayor orden)}}$

Diferencial

Diferencial Total para campos escalares de dos variables

Dada $z = f(x, y)$, el incremento total Δz en un punto (a, b) es:

$$\Delta z = f(a + h, b + k) - f(a, b)$$

Por el Teorema del Valor Medio para funciones de dos variables:

$$\Delta z = f'_x(a + \theta_1 h, b) \cdot h + f'_y\,(a + h, b + \theta_2 k) \cdot k \qquad (1)$$

Calculemos los siguientes límites:

$$\lim_{h \to 0} f'_x(a + \theta_1 h, b) = f'_x(a, b) \iff f'_x(a + \theta_1 h, b) = f'_x(a, b) + \varepsilon_1$$

$$\lim_{(h,\,k) \to (0,0)} f'_y\,(a + h, b + \theta_2 k) = f'_y(a, b) \iff f'_y\,(a + h, b + \theta_2 k) = f'_y(a, b) + \varepsilon_2$$

$\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $h \to 0$ y $k \to 0$

Reemplazando en (1):

Diferencial

$$\Delta z = [f'_x(a,b) + \varepsilon_1] \cdot h + [f'_y(a,b) + \varepsilon_2] \cdot k$$

Aplicando propiedad distributiva:

$$\Delta z = \underbrace{f'_x(a,b) \cdot h + f'_y(a,b) \cdot k}_{\text{Esta es la Parte Principal del incremento } \Delta z.} + \overbrace{\varepsilon_1 \cdot h + \varepsilon_2 \cdot k}^{\text{Este es un infinitésimo para } (0,0) \text{ de orden superior a } h \text{ y } k.} \qquad (2)$$

$\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$
cuando $h \to 0$ y $k \to 0$

Se llama **diferencial total** de una función z a la parte principal de infinitésimo Δz (es decir, la parte principal del incremento de la función). Y la denotamos por dz.

Si consideramos un punto genérico y recordamos que $h = \Delta x$ y $k = \Delta y$ obtenemos la expresión analítica de la función diferencial:

$$\boxed{dz = f'_x(x,y) \cdot \Delta x + f'_y(x,y) \cdot \Delta y} \quad \neq \Delta z \qquad (3)$$

Diferencial

Propiedades de la Función Diferencial

1. La condición SUFICIENTE para que una función sea diferenciable en un punto es que tenga derivadas parciales continuas en el punto.
2. Si una función es diferenciable en un punto, entonces:
    a. Es derivable parcialmente en el punto.
    b. Tiene derivadas direccionales en todas las direcciones en el punto.
    c. Es continua en el punto.

Nota: observe que una posible aplicación del diferencial de una función es determinar la continuidad de una función en un punto, sin tener que calcular el límite doble usando la propiedad *2.c*

Diferencial

Sea $z = f(x, y)$ diferenciable en (a, b). Se puede demostrar que $\Delta x = dx$ y $\Delta y = dy$.

En efecto, según la expresión (3):

- Si $z = x$

$$dz = dx \to \quad dx = f_x'(x, y) \cdot \Delta x + f_y'(x, y) \cdot \Delta y \quad \Rightarrow \boxed{dx = \Delta x}$$

Es diferenciable con

$f_x'(x, y) = 1$

$f_y'(x, y) = 0$

- Si $z = y$

$$dz = dy \to \quad dy = f_x'(x, y) \cdot \Delta x + f_y'(x, y) \cdot \Delta y \quad \Rightarrow \boxed{dy = \Delta y}$$

Es diferenciable con

$f_x'(x, y) = 0$

$f_y'(x, y) = 1$

Reemplazando en (3):

Diferenciales parciales de la función respecto de x e y

Diferencial Total de la función

$$\boxed{dz = \overbrace{f_x'(x, y) \cdot dx}^{dz_x} + \overbrace{f_y'(x, y) \cdot dy}^{dz_y}}$$

Esta es otra expresión para el diferencial de una función

Diferencial

Podemos extender este resultado a funciones con un mayor número de variables independientes:

Sea $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un campo escalar con n variables independientes:

$$dy = f'_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot dx_1 + f'_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot dx_2 + \cdots + f'_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot dx_n$$

Ejemplo: Calculemos el diferencial de la función $z = 3xy - x^2$ en el punto $(1, 2)$:

$$dz = z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy$$

$$dz = (3y - 2x) \cdot dx + 3x \cdot dy$$

En el punto $(1, 2)$ tendremos:

$$dz(1, 2) = 4 \cdot dx + 3 \cdot dy$$

Supongamos que $dx = 0.01$ y que $dy = 0.02$, entonces:

$$dz(1, 2) = 4 \cdot 0.01 + 3 \cdot 0.02 = 0.1$$

*dz representa el incremento **aproximado** de la función z en el punto $(1,2)$ para los dx y dy dados.*

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

$$\Delta z = 3(a + \Delta x)(b + \Delta y) - (a + \Delta x)^2 - (3ab - a^2)$$

$$\Delta z = 3(1 + 0.01)(2 + 0.02) - (1 + 0.01)^2 - 3 \cdot 1 \cdot 2 + 1^2$$

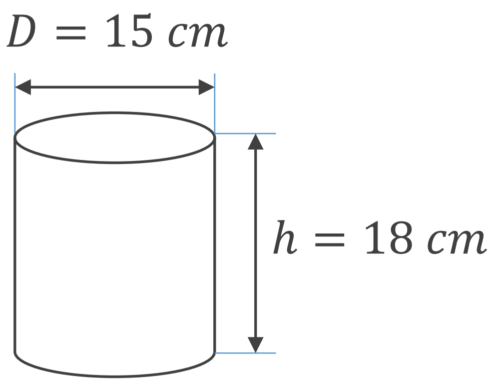
$$\Delta z = 0.1005$$

Podemos comparar el resultado obtenido al calcular el diferencial, con el incremento Δz.

Diferencial

Aplicación del Diferencial Total de una función

***Evaluar el error de cálculo*:**



Se desea construir un objeto cilíndrico de madera, con las dimensiones dadas. Estimar el error máximo que puede cometerse en el volumen si el error máximo aceptado en cada medición es de $0.1\ cm$.

$$V = \frac{\pi}{4}D^2h = 3180{,}9\ cm^3$$

$$e_{max} \cong dV = \left|\frac{\pi}{2}Dh\right| \cdot dD + \left|\frac{\pi}{4}D^2\right| \cdot dh$$

$$e_{max} \cong dV = \left|\frac{\pi}{2}15 \cdot 18\right| \cdot 0.1 + \left|\frac{\pi}{4}15^2\right| \cdot 0.1$$

$$e_{max} \cong dV = 42.4 + 17.7$$

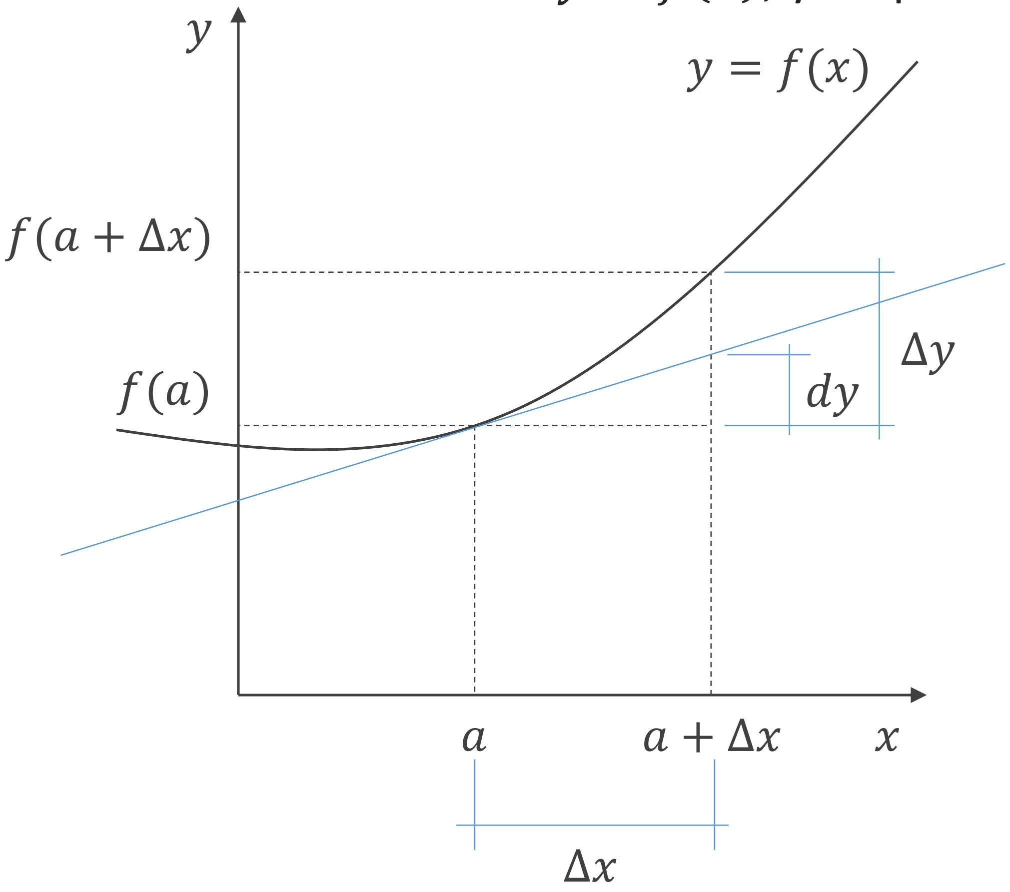
$$e_{max} \cong dV = 60.1\ cm^3$$

Estaríamos equivocándonos en poco menos del 2%

Diferencial

Interpretación gráfica del Diferencial (para una variable independiente)

Dada una función escalar $y = f(x)$, y un punto $a \in D_f$,



El $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$, implica que $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a) + \varepsilon$,

con $\varepsilon \to 0$, cuando $\Delta x \to 0$, luego:

$$\Delta y = \underbrace{f'(a) \cdot \Delta x}_{} + \overbrace{\varepsilon \cdot \Delta x}^{}$$

Es despreciable frente a la parte principal

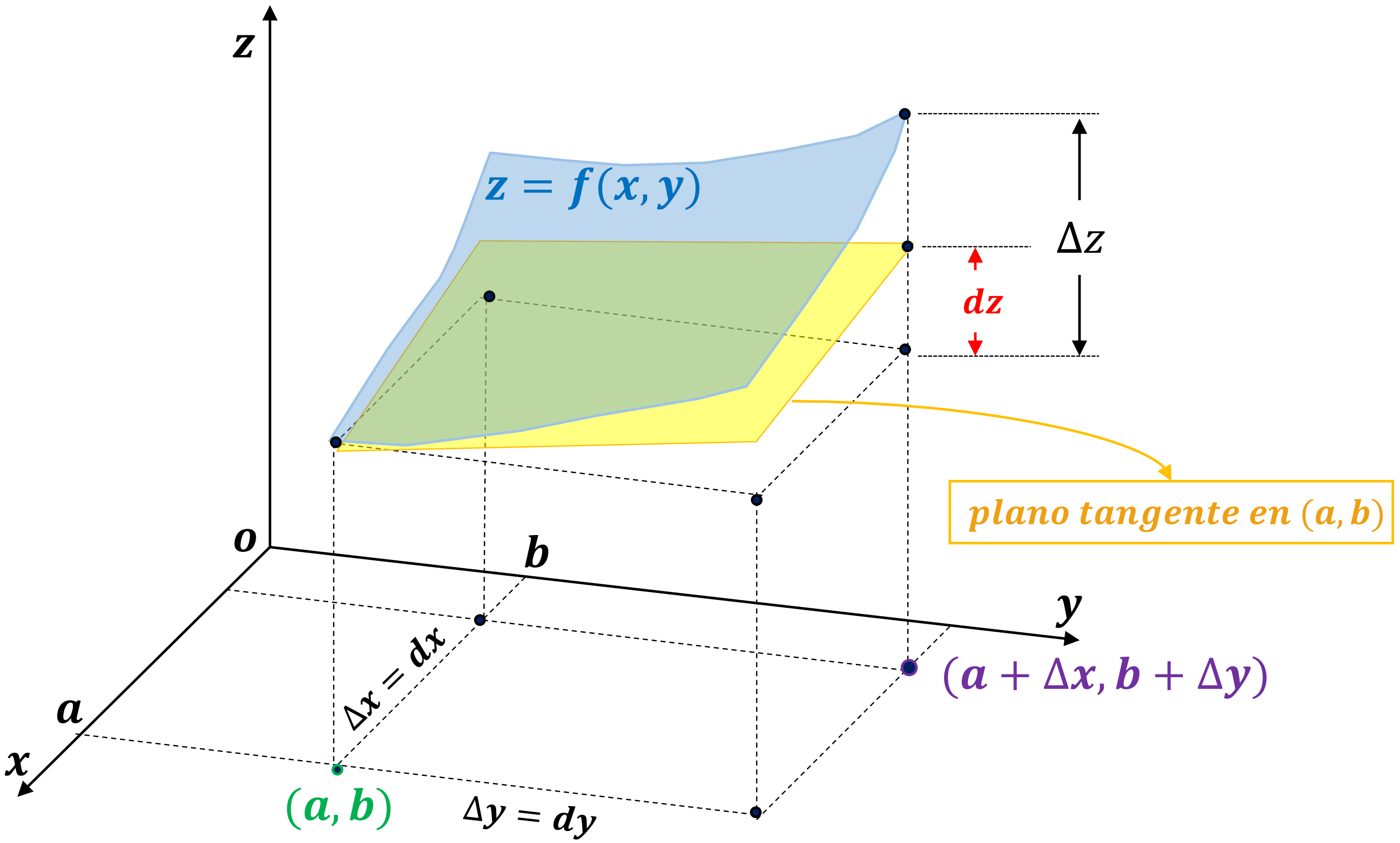
Este es el diferencial de la función f en a y lo denotamos por dy y es la parte principal del infinitésimo compuesto.

$\Delta y = dy + \varepsilon \cdot \Delta x$, con $\varepsilon \cdot \Delta x \to 0$, cuando $\Delta x \to 0$, es decir, para incrementos pequeños de x, $\Delta y \cong dy$.

Como puede verse en el gráfico, el diferencial mide la variación de la recta tangente al pasar del punto a al punto $a + \Delta x$. En a coinciden dy y Δy.

Diferencial

Interpretación gráfica del Diferencial (para dos variables independientes)



En forma análoga, como puede verse en el gráfico, el diferencial del campo escalar mide la variación del plano tangente al pasar del punto (a, b) al punto $(a + \Delta x, b + \Delta y)$.

Diferencial

Plano Tangente

Dada la función $z = f(x, y)$, consideremos el punto (x_0, y_0) y $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in E[(x_0, y_0), \delta]$. Si z es diferenciable en (x_0, y_0), podemos expresar el incremento de la función al pasar de (x_0, y_0) a $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ como dz en (x_0, y_0). Ya vimos que si $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$, $\Delta z \cong dz$. Entonces:

$\Delta z = z - z_0 \cong f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$, despejando z:

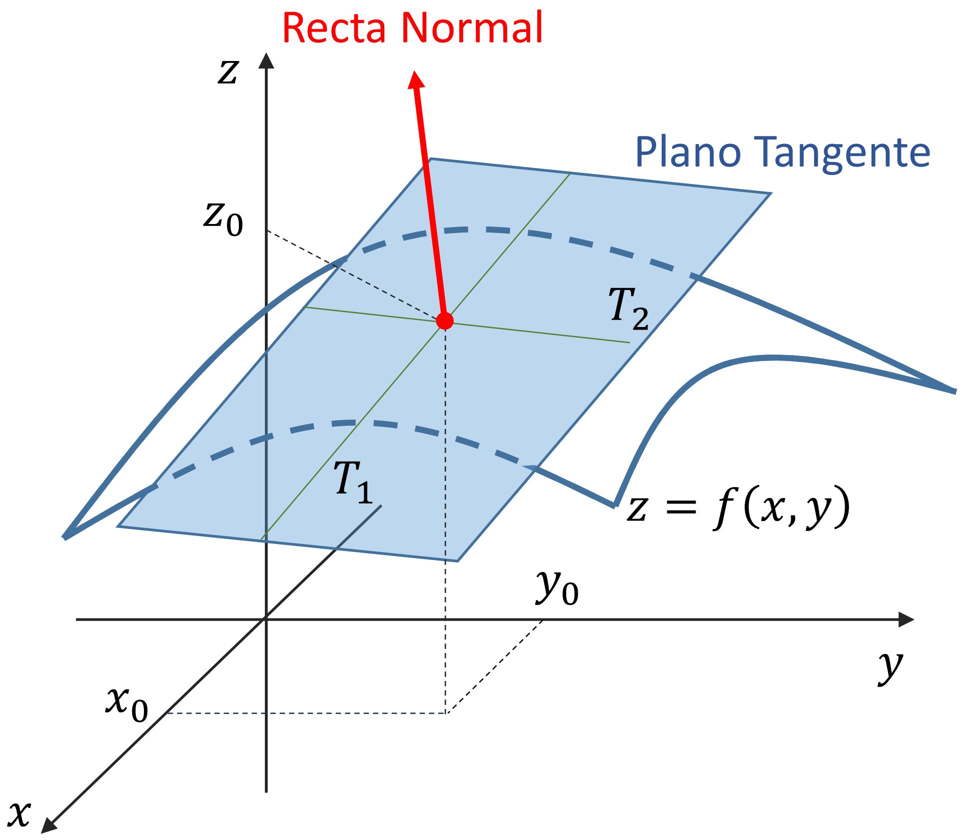
$$z \cong \underbrace{f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + z_0}$$

Esta es la ecuación de un plano que recibe el nombre de **plano tangente** a la superficie en (x_0, y_0, z_0)

En el punto (x_0, y_0) coinciden la imagen de la función z y del plano tangente.

El plano tangente contiene a todas las rectas tangentes a las curvas que pasan por el punto.

Diferencial



T_1: Recta tangente en la dirección de x

T_2: Recta tangente en la dirección de y

Cuando se sustituye el incremento Δz por el diferencial dz para aproximar una función, geométricamente se sustituye la superficie por el plano tangente. En realidad, se calcula la imagen del plano tangente y no de la superficie. Eso se denomina *aproximación lineal.*

La **recta normal** en un punto (x_0, y_0, z_0) es la recta perpendicular al plano tangente en dicho punto. Como los denominadores (número directores) de la ecuación de la recta perpendicular a un plano son los coeficientes de la ecuación del plano, tenemos:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Diferencial

Ejemplo:

Determinar la ecuación del plano tangente y la recta normal a la superficie $z = 9 - x^2 - y^2$ en el punto $(1, 2, 4)$

La ecuación del plano tangente es:

$$z = f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + \mathrm{z}_0$$

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = -2x \;\; \Rightarrow \;\; f'_x(1, 2) = -2 \\ f'_y(x, y) = -2y \;\; \Rightarrow \;\; f'_y(1, 2) = -4 \end{cases}$$

$$z = (-2) \cdot (x - 1) + (-4) \cdot (y - 2) + 4$$

$$z = -2x + 2 - 4y + 8 + 4$$

$$z = -2x - 4y + 14$$

La ecuación de la recta normal es:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{4} = z - 4$$

Diferencial

Diferenciales de orden superior

Sea $z = f(x, y)$ una función continua, con derivadas parciales también continuas, cuyo diferencial total es:

$$dz = z'_x\, dx + z'_y\, dy \quad \text{podemos expresarlo también:} \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy$$

Supondremos que x e y son independientes, que dx y dy son constantes y que las derivadas parciales de segundo orden son continuas. Diferenciemos este diferencial para obtener el **diferencial de segundo orden**:

$$d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy\right)$$

$$d^2 z = d_x\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy\right) + d_y\left(\frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)$$

Diferencial

$$d_x\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right)=\left(\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)}{\partial x}\right)dx=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,dy\right)dx$$

$$d_y\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)=\left(\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)}{\partial y}\right)dy=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\,dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy\right)dy$$

$$d^2z=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,dy\right)dx+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\,dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy\right)dy$$

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,dydx+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\,dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2$$

Diferencial de Segundo Orden:

$$\boxed{d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2+2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2}$$

Diferencial

El diferencial de segundo orden puede expresarse también mediante la siguiente fórmula simbólica:

$$d^2z = \left[\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right]^{[2]}$$

En general, podemos expresar el diferencial de orden n como:

$$d^nz = \left[\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right]^{[n]}$$

Para obtener el diferencial de orden n podemos diferenciar sucesivamente n veces y operar tal como se hizo para obtener el Diferencial de Segundo Orden, sin embargo, usando el concepto del Binomio de Newton, podemos hacer un cálculo más ágil y sencillo.

Ejemplo: Obtener la fórmula del Diferencial de Tercer Orden:

$$d^3z = \left[\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right]^{[3]} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\,dx^3 + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\,dx^2dy + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\,dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3$$

Se obtuvo siguiendo el método para el *cubo de un binomio*.

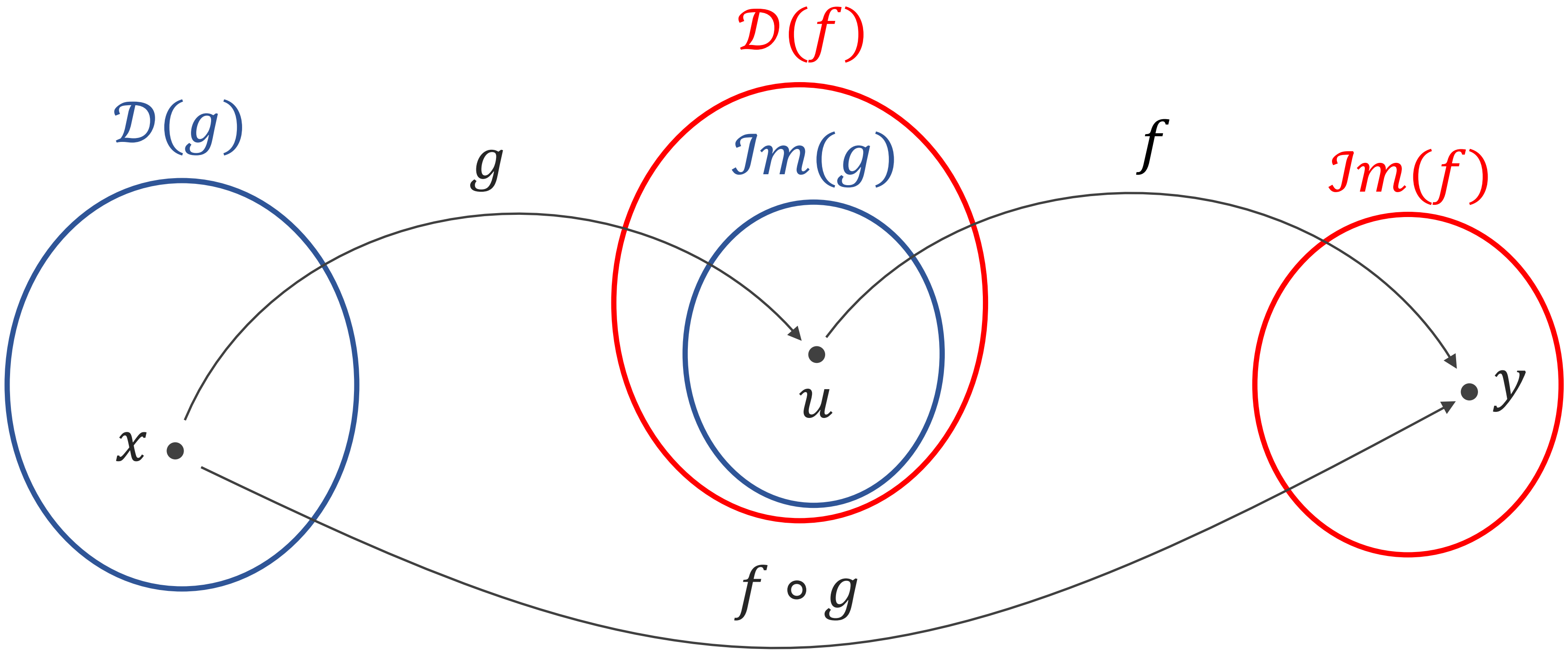
Análisis Matemático II

Derivada de la Función Compuesta
Derivada de la Función Implícita

Derivada de la Función Compuesta

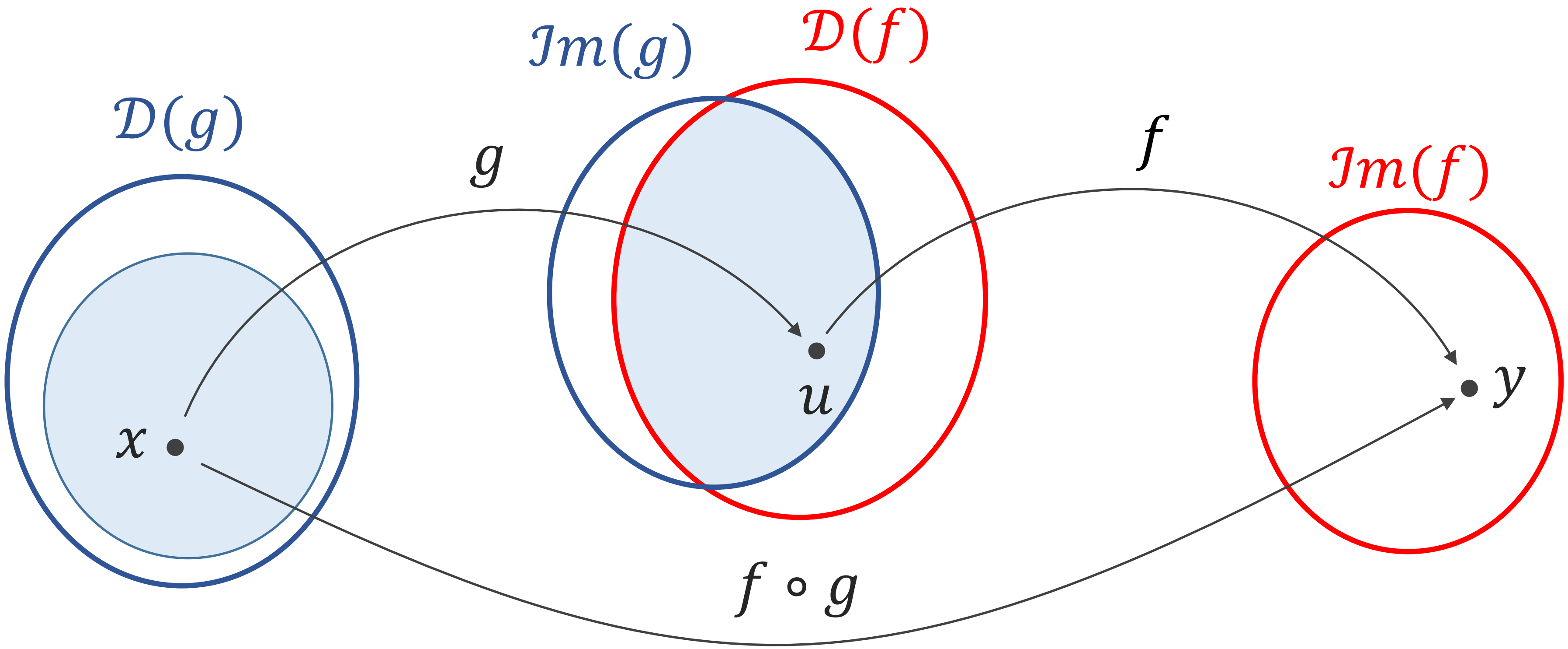
Para funciones de una variable (funciones escalares)

Dadas dos funciones escalares $y = f(u)$ y $u = g(x)$ se dice que y es una función compuesta de f y g y se expresa $y = (f \circ g)(x)$ o bien $y = f\big(g(x)\big)$.



Derivada de la Función Compuesta

Si no se cumple que $\mathcal{I}m(g) \subseteq \mathcal{D}(f)$ será necesario restringir el $\mathcal{D}(g)$ usando sólo aquellos elementos del $\mathcal{D}(g)$ cuya imagen pertenezca al $\mathcal{D}(f)$.



Derivada de la Función Compuesta

Para calcular la derivada de y aplicaremos la regla de la cadena.

Si $y = f(u)$ es una función derivable en u y si además $u = g(x)$ es una función derivable en x, entonces $y = f\big(g(x)\big)$ es una función derivable en x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[f\big(g(x)\big)\right] = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

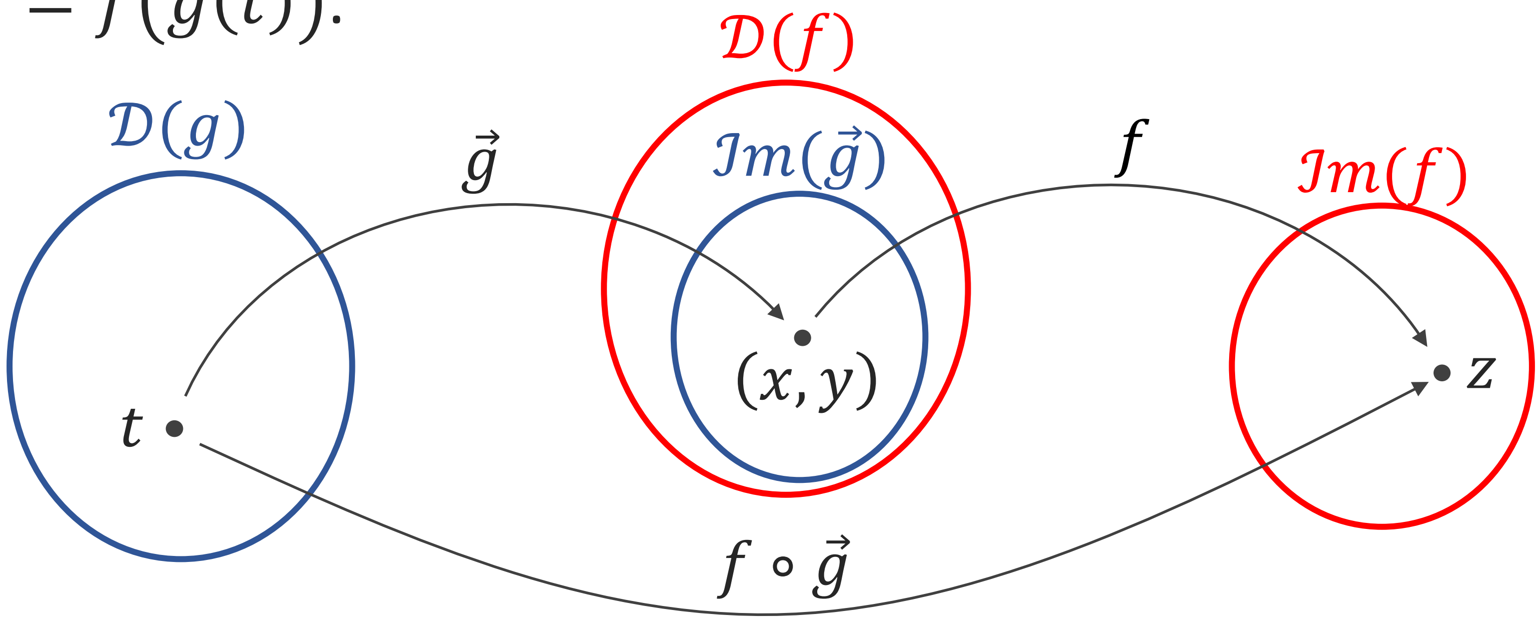
Alternativamente, en la notación de Leibniz, la regla de la cadena se expresa:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

Derivada de la Función Compuesta

Para funciones de dos variables (campos escalares)

Sea el campo escalar $z = f(x, y)$ y la función vectorial $\vec{g}(t) = [x(t), y(t)]$, donde x e y son funciones escalares de variable t. Si $\mathcal{Im}(\vec{g}) \subseteq \mathcal{D}(f)$ entonces existe una **única** función que es la compuesta de f y $\vec{g}$ denotada por $z = (f \circ \vec{g})(t)$ o bien $z = f\big(\vec{g}(t)\big)$.



Observemos la dependencia de z:

t: es una variable **independiente.**

z: es la variable **dependiente**.

x e y: son variables **intermedias**.

Derivada de la Función Compuesta

Usando la Regla de la Cadena, vamos a calcular:

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

Fijaremos las siguientes hipótesis:

1. f es continua y parcialmente derivable (para poder aplicar el TVM).
2. $\vec{g}$ es continua (para que $\Delta t \to 0 \Rightarrow \ \Delta x \to 0, \Delta y \to 0$).
3. $\vec{g}$ es derivable (para que existan $\dfrac{dx}{dt}$ y $\dfrac{dy}{dt}$).

Desarrollo:

Partimos escribiendo el incremento de la función z:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Derivada de la Función Compuesta

Aplicando el Teorema del Valor Medio:

$$\Delta z = f'_x(x+\theta_1\Delta x, y)\cdot\Delta x + f'_y(x+\Delta x, y+\theta_2\Delta y)\cdot\Delta y \quad \text{con} \quad \left[\begin{array}{l} 0<\theta_1<1 \\ 0<\theta_2<1 \end{array}\right.$$

Dividiendo ambos miembros por Δt:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = f'_x(x+\theta_1\Delta x, y)\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x+\Delta x, y+\theta_2\Delta y)\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Tomando el límite para $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} f'_x(x+\theta_1\Delta x, y)\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0} f'_y(x+\Delta x, y+\theta_2\Delta y)\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

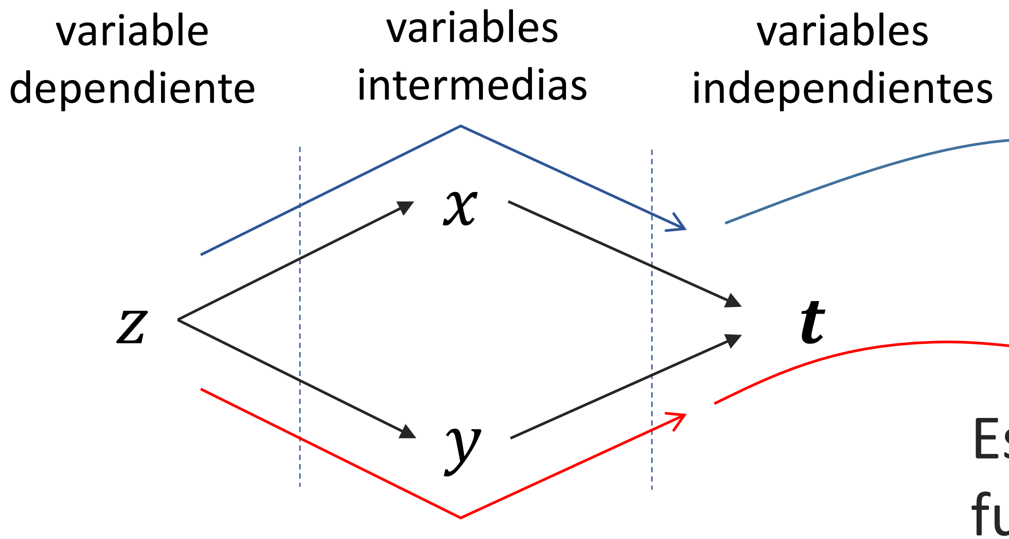
$$\frac{dz}{dt} = f'_x(x,y)\cdot\frac{dx}{dt} + f'_y(x,y)\cdot\frac{dy}{dt} \quad \text{o bien} \quad \boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}}$$

Derivada de la Función Compuesta

El resultado anterior se puede extender a funciones compuestas de varias variables intermedias y varias variables independientes.

Conviene construir un diagrama de dependencias:

1. Según el caso que acabamos de estudiar, $z = f(x, y)$ con $x = \varphi_1(t)$ e $y = \varphi_2(t)$



$$\frac{dz}{d\boldsymbol{t}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{d\boldsymbol{t}} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{d\boldsymbol{t}}$$

Es importante distinguir si se trata de derivadas de funciones de una única variable independiente o derivadas parciales.

Derivada de la Función Compuesta

Ejemplo:

Sea $z = x^2 + sen\, y$ con $\begin{cases} x = ln\, t \\ y = e^t \end{cases}$

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr] & \\ z \arrow[ur] \arrow[dr] & & t \\ & y \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \qquad (1)$$

Derivamos por separado:

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = cos\, y$

(c) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{t}$

(d) $\dfrac{dy}{dt} = e^t$

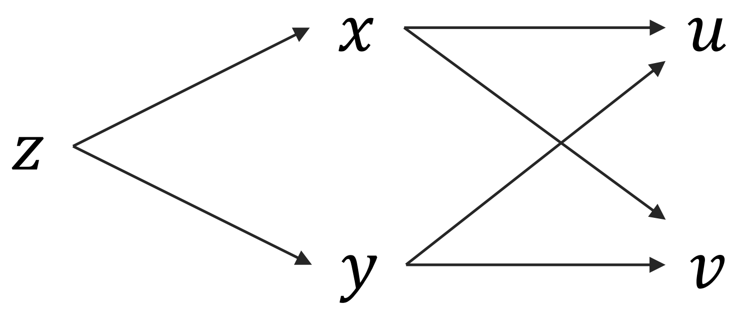
Reemplazaremos (a), (b), (c) y (d) en (1) y a las variables intermedias x e y por sus equivalencias:

$$\frac{dz}{dt} = 2x \cdot \frac{1}{t} + cos\, y \cdot e^t$$

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = 2 \cdot ln\, t \cdot \frac{1}{t} + cos(e^t) \cdot e^t}$$

Derivada de la Función Compuesta

2. Sea $z = f(x,y)$ con $x = \varphi_1(u,v)$ e $y = \varphi_2(u,v)$



Se han agregado ahora, al diagrama de dependencias, dos variables independientes: u y v. Esto implica que z depende, por la composición de funciones, de esas dos variables independientes, por lo tanto, precisaremos calcular dos derivadas:

$$\frac{\partial z}{\partial u} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial v}$$

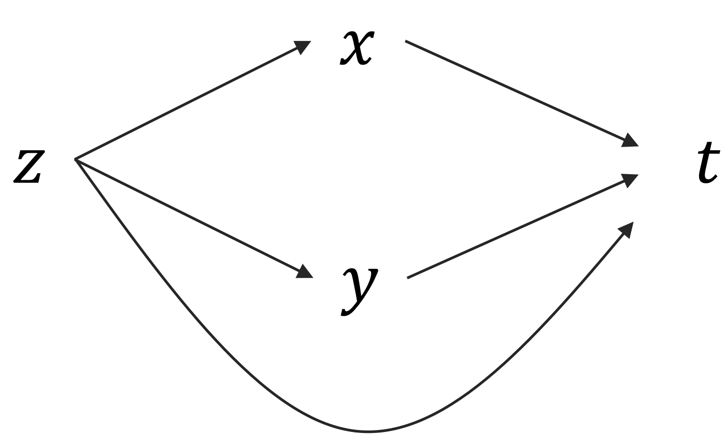
Además, todas las variables, tanto de z como de las variables intermedias x e y dependen de más de una variable. *Note que sólo aparecen derivadas parciales en las fórmulas*.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

Derivada de la Función Compuesta

3. Sea $z = f(x, y, t)$ con $x = \varphi_1(t)$ e $y = \varphi_2(t)$



$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \overbrace{\cancel{\frac{dt}{dt}}}^{=1}$$

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}}$$

Ejemplo:

Sea $z = x^2 + yt$ con $\begin{cases} x = t^2 \\ y = tg\ t \end{cases}$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\frac{dz}{dt} = 2x \cdot 2t + t \cdot sec^2\, t + y$$

$$\frac{dz}{dt} = 4t^3 + t \cdot sec^2\, t + tg\ t$$

Derivada de la Función Implícita

Para funciones de una variable

Según el Teorema de Cauchy-Dini (sin demostración), dada una ecuación $f(x,y)=0$ si se cumple:

1. $\exists\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 /\ f(a,b)=0$

   Es decir que existe al menos una solución de la ecuación.

2. $\exists\ f'_x(x,y)\ \wedge\ f'_y(x,y)$ en $E[(a,b),\delta]$

   Para poder calcular el diferencial.

3. $f'_y(a,b) \neq 0$

   Para que no se anule el denominador.

$$\Rightarrow \exists\ y = g(x)\ /\ f\big(x, g(x)\big) = 0,$$

$$\forall\ (x,y) \in E[(a,b),\delta]$$

Y además $y=g(x)$, que es la función definida en forma explícita por la ecuación $f(x,y)=0$, es **única**, **continua** y **derivable**.

Derivada de la Función Implícita

Calcularemos $\dfrac{dy}{dx}$ sin pasar por la forma explícita:

Sea $z = f(x, y) \Rightarrow dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$

Como $f(x, y) = 0 \Rightarrow dz = 0 \Rightarrow 0 = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$, despejando:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}}$$

Ejemplo:

Sea $sen(x + y) = xy$

$f(x, y) = sen(x + y) - xy = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f'_x(x, y) = cos(x + y) - y \\ f'_y(x, y) = cos(x + y) - x \end{array}\right. \Rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{dy}{dx} = -\frac{cos(x + y) - y}{cos(x + y) - x}}$$

Derivada de la Función Implícita

Para funciones de dos variables

Según el Teorema de Cauchy-Dini, dada una función $f(x, y, z) = 0$ si se cumple:

1. $\exists\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / \ f(a, b, c) = 0$

   Es decir que existe al menos una solución de la ecuación.

2. $\exists\ f'_x(x, y, z), f'_y(x, y, z) \wedge\ f'_z(x, y, z)$ en $E[(a, b, c), \delta]$

   Para poder calcular el diferencial.

3. $f'_z(a, b, c) \neq 0$

   Para que no se anulen los denominadores.

$$\Rightarrow \exists\ z = g(x, y) \ / \ f\big(x, y, g(x, y)\big) = 0,$$

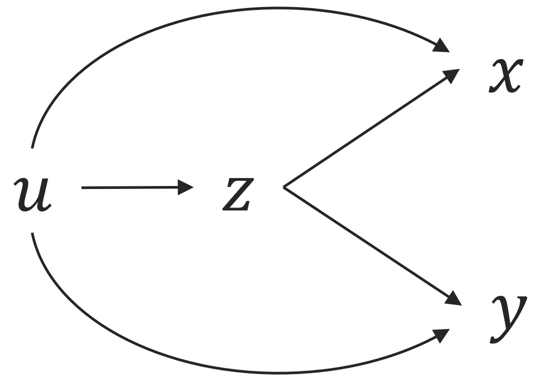
$$\forall\ (x, y, z) \in E[(a, b, c), \delta]$$

Y además $z = g(x, y)$, que es la función definida en forma explícita por la ecuación $f(x, y, z) = 0$, es **única**, **continua** y **derivable**.

Derivada de la Función Implícita

Calcularemos las derivadas parciales de $z = g(x, y)$, es decir de $f(x, y, z) = 0$, sin pasar por la forma explícita:

Sea $u = f(x, y, z)$ con $z = g(x, y)$



Entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

Pero $f(x, y, z) = 0$ entonces los primeros miembros resultan nulos.

Derivada de la Función Implícita

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}}$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}}$$

Esto se puede extender a campos escalares de n variables.

Atención:

- Todos los segundos miembros llevan un signo menos.
- Todos los denominadores son iguales.

Derivada de la Función Implícita

Ejemplo:

Dada $f(x,y,z) = z^{x-2} - x^2y - tg^2\dfrac{y}{z} = 0$. Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

$$\frac{\partial z}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \quad (I) \qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \quad (II)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z^{x-2}.Ln\,z - 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 - 2.\frac{1}{z}\,.tg\frac{y}{z}\,.sec^2\frac{y}{z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = (x-2).z^{x-3} + 2\,.\frac{y}{z^2}\,.tg\frac{y}{z}\,.sec^2\frac{y}{z}$$

Reeplazando en (I) y (II)

$$\boldsymbol{\frac{\partial z}{dx} = \frac{2xy - z^{x-2}.Ln\,z}{(x-2).z^{x-3} + \frac{2y}{z^2}\,.tg\frac{y}{z}\,.sec^2\frac{y}{z}}} \qquad\qquad \boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2 + \frac{2}{z}\,.tg\frac{y}{z}\,.sec^2\frac{y}{z}}{(x-2).z^{x-3} + \frac{2y}{z^2}\,.tg\frac{y}{z}\,.sec^2\frac{y}{z}}}$$

Derivada de la Función Implícita

Para sistemas de funciones implícitas (hay dos casos):

a. Única variable independiente

$$\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$$

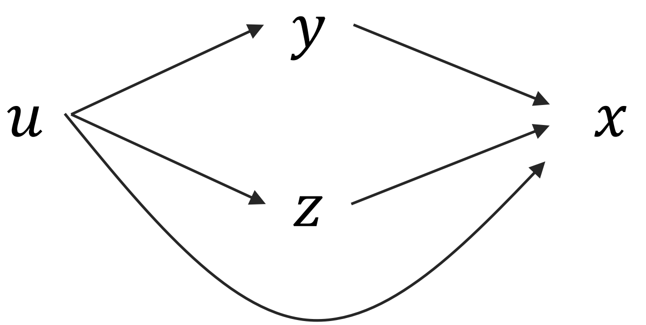
x es la variable independiente, y y z las variables dependientes.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x \\ y = \varphi_1(x) \\ z = \varphi_2(x) \end{cases}$$

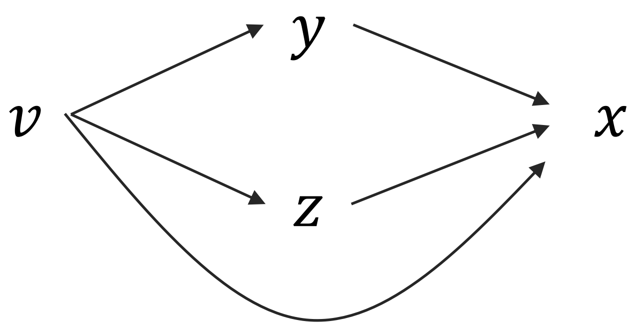
Derivando como función compuesta:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{dz}{dx} = \cancelto{0}{\dfrac{du}{dx}} \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial g}{\partial z}\dfrac{dz}{dx} = \cancelto{0}{\dfrac{dv}{dx}} \end{cases}$$

Siendo $u = f(x,y,z)$



Siendo $v = g(x,y,z)$



Derivada de la Función Implícita

Resolvemos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{bmatrix}} \qquad \frac{dz}{dx} = -\frac{\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial x} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{bmatrix}}$$

Determinante Jacobiano

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathcal{J}\left(\frac{f,g}{y,z}\right) = f'_y \cdot g'_z - g'_y \cdot f'_z$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\mathcal{J}\left(\frac{f,g}{x,z}\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{f,g}{y,z}\right)} \qquad \frac{dz}{dx} = -\frac{\mathcal{J}\left(\frac{f,g}{y,x}\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{f,g}{y,z}\right)}}$$

El determinante de los denominadores está formado por los coeficientes de las incógnitas y recibe el nombre de **Determinante Jacobiano** de las funciones f y g respecto de las variables y y z. En las filas se encuentran las funciones que se derivan parcialmente y en las columnas, las variables con respecto a las que se derivan estas funciones.

Derivada de la Función Implícita

Ejemplo:

Calcular $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dz}{dx}$ si $\begin{cases} f(x,y,z) = 4x^2z^3 - 3y^2 + 2 = 0 \\ g(x,y,z) = 5xy - z^2 + 1 = 0 \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\mathcal{J}\left(\frac{f,g}{x,z}\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{f,g}{y,z}\right)} = -\frac{f'_x \cdot g'_z - g'_x \cdot f'_z}{f'_y \cdot g'_z - g'_y \cdot f'_z} = -\frac{-16xz^4 - 60yx^2z^2}{12yz - 60x^3z^2} = \frac{4xz^3 + 15yx^2z}{3y - 15x^3z}$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\mathcal{J}\left(\frac{f,g}{y,x}\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{f,g}{y,z}\right)} = -\frac{f'_y \cdot g'_x - g'_y \cdot f'_x}{f'_y \cdot g'_z - g'_y \cdot f'_z} = -\frac{-30y^2 - 40x^2z^3}{12yz - 60x^3z^2} = \frac{15y^2 + 20x^2z^3}{6yz - 30x^3z^2}$$

Derivada de la Función Implícita

b. Varias variables independientes

$$\begin{cases} f(u,v,x,y)=0 \\ g(u,v,x,y)=0 \end{cases}$$ Siendo u y v las variables independientes, x e y las variables dependientes $$\Rightarrow \begin{cases} u=u \\ v=v \\ x=\varphi_1(u,v) \\ y=\varphi_2(u,v) \end{cases}$$

Sea desea calcular: $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ $\dfrac{\partial y}{\partial u}$ $\dfrac{\partial x}{\partial v}$ $\dfrac{\partial y}{\partial v}$

$$\frac{\partial x}{\partial u}=-\frac{\mathcal{J}\left(\dfrac{f,g}{u,y}\right)}{\mathcal{J}\left(\dfrac{f,g}{x,y}\right)} \qquad \frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{\mathcal{J}\left(\dfrac{f,g}{x,u}\right)}{\mathcal{J}\left(\dfrac{f,g}{x,y}\right)} \qquad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\mathcal{J}\left(\dfrac{f,g}{v,y}\right)}{\mathcal{J}\left(\dfrac{f,g}{x,y}\right)} \qquad \frac{\partial y}{\partial v}=-\frac{\mathcal{J}\left(\dfrac{f,g}{x,v}\right)}{\mathcal{J}\left(\dfrac{f,g}{x,y}\right)}$$

Derivada de la Función Implícita

Ejemplo: Calcular $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}$ si $\begin{cases} f(u,v,x,y) = uv - xy = 0 \\ g(u,v,x,y) = ux + vy = 0 \end{cases}$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{\mathcal{J}\left(\frac{f,g}{u,y}\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{f,g}{x,y}\right)} = -\frac{f'_u \cdot g'_y - g'_u \cdot f'_y}{f'_x \cdot g'_y - g'_x \cdot f'_y} = -\frac{v^2 + x^2}{-yv + ux} = \boldsymbol{\frac{v^2 + x^2}{yv - ux}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\mathcal{J}\left(\frac{f,g}{x,u}\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{f,g}{x,y}\right)} = -\frac{f'_x \cdot g'_u - g'_x \cdot f'_u}{f'_x \cdot g'_y - g'_x \cdot f'_y} = -\frac{-yx - uv}{-yv + ux} = \boldsymbol{\frac{xy + uv}{-yv + ux}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\mathcal{J}\left(\frac{f,g}{v,y}\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{f,g}{x,y}\right)} = -\frac{f'_v \cdot g'_y - g'_v \cdot f'_y}{f'_x \cdot g'_y - g'_x \cdot f'_y} = -\frac{uv + yx}{-yv + ux} = \boldsymbol{\frac{uv + xy}{yv - ux}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{\mathcal{J}\left(\frac{f,g}{x,v}\right)}{\mathcal{J}\left(\frac{f,g}{x,y}\right)} = -\frac{f'_x \cdot g'_v - g'_x \cdot f'_v}{f'_x \cdot g'_y - g'_x \cdot f'_y} = -\frac{-y^2 - u^2}{-yv + ux} = \boldsymbol{\frac{u^2 + y^2}{-yv + ux}}$$

Análisis Matemático II

Máximos y Mínimos: Fórmula de Taylor

Fórmula de Taylor

Fórmula de Taylor para una función de una variable independiente

Antes de plantear la Fórmula de Taylor para una función de dos variables independientes, recordaremos la Fórmula de Taylor para una función de una sola variable $y = f(x)$.

La Fórmula de Taylor permite aproximar la función $y = f(x)$ por un polinomio $y = P_n(x)$.

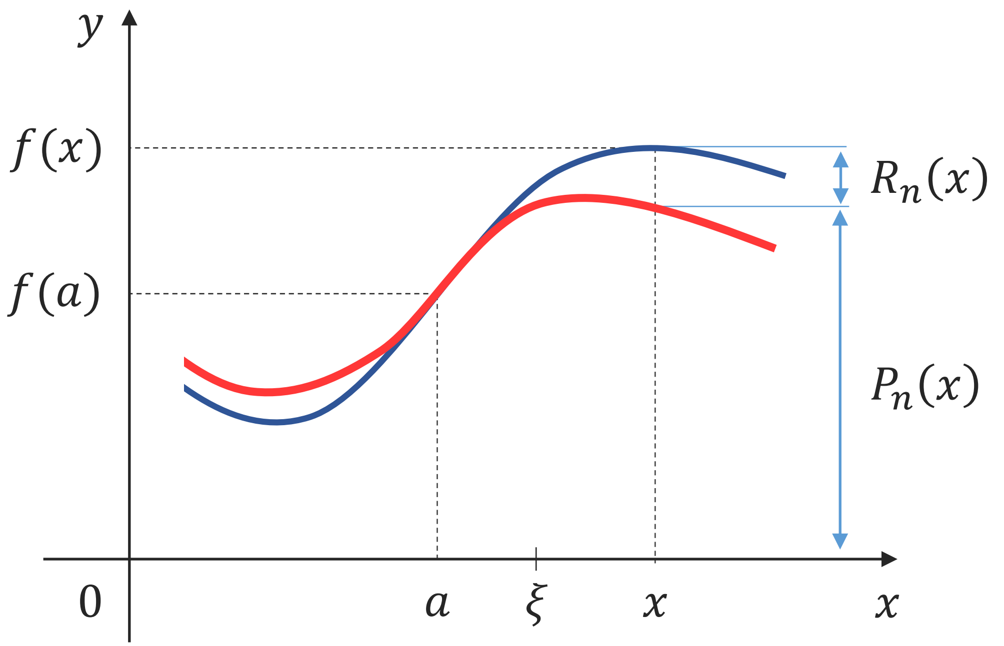
En cualquier punto próximo a a resultará:

$$f(x) = P_n(x) + R(x)$$

donde:

$P_n(x)$ es el Polinomio de Taylor.

$R_n(x)$ es un término complementario o Resto



Fórmula de Taylor

La Fórmula de Taylor para la función $y = f(x)$ es:

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + R_n(x)$$

Y teniendo en cuenta que $0! = 1$ y que $f^0 = f$ también se suele expresar:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i + R_n(x)$$

El término complementario o residuo $R_n(x)$ viene dado por la fórmula:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} \qquad \text{donde} \qquad \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

siendo ξ un punto comprendido en (a, x), es decir: $\xi = a + \theta(x-a)$ con $0 < \theta < 1$

Fórmula de Taylor

Para entender la Fórmula de Taylor, agreguemos uno a uno algunos términos:

Aproximación de orden cero:

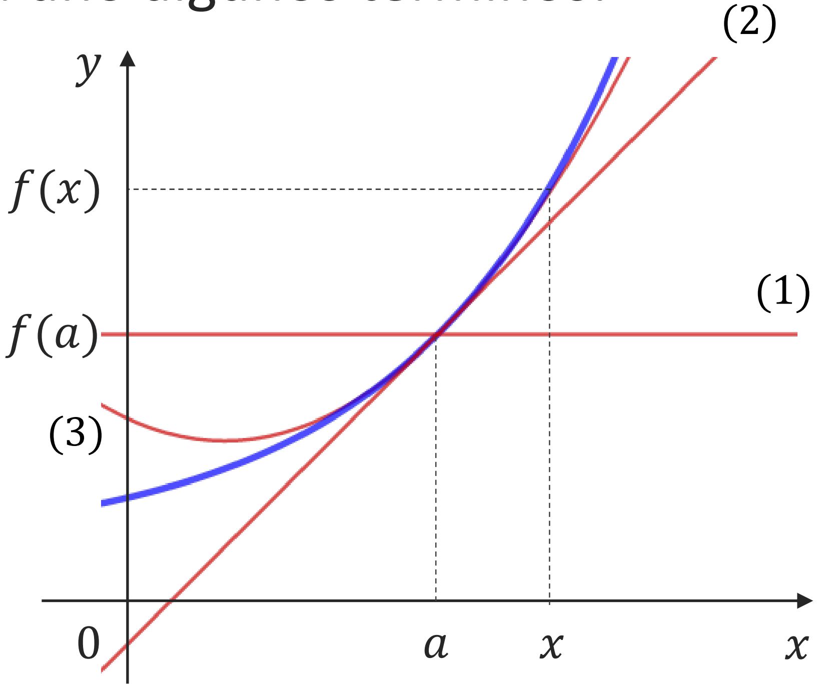
$$f(x) \cong f(a) \quad (1)$$

Aproximación de primer orden:

$$f(x) \cong f(a) + f'(a)(x-a) \quad (2)$$

Aproximación de segundo orden:

$$f(x) \cong f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f'`'(a)}{2!}(x-a)^2 \quad (3)$$



Si $a = 0$, la Fórmula de Taylor recibe el nombre de Fórmula de McLaurin y tiene la forma:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + R_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i + R_n(x)$$

Fórmula de Taylor

Fórmula de Taylor para una función de dos variables independientes

Teorema de Taylor

Dada una función $z = f(x, y)$ y un punto (a, b) interior al dominio de f, si:

a) $f(x, y)$ es continua y derivable parcialmente hasta orden 3 en (a, b).

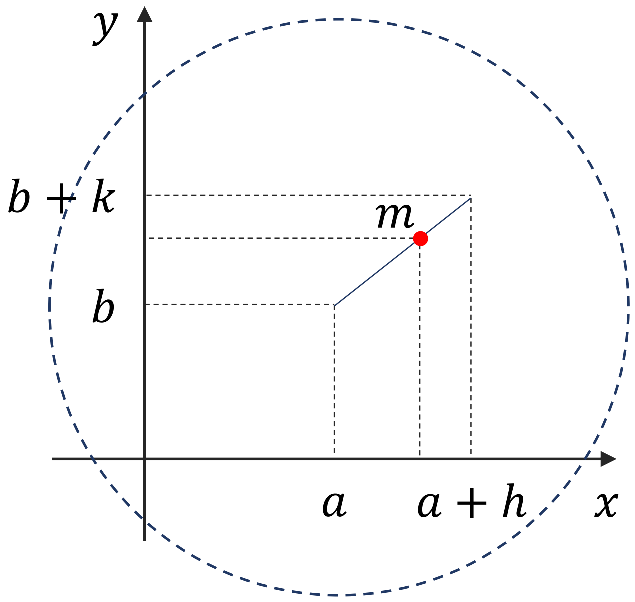
b) $f(x, y)$ es continua en $E[(a, b), \delta]$

entonces existe otro punto $(a + h, b + k) \in E[(a, b), \delta]$, para el cual se cumple:

$$\boxed{\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a,b) + f'_x(a,b) \cdot (x-a) + f'_y(a,b) \cdot (y-b) + \\ &+ \frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(a,b) \cdot (x-a)^2 + 2f''_{xy}(a,b) \cdot (x-a)(y-b) + f''_{yy}(a,b) \cdot (y-b)^2\right] + R_2 \end{aligned}}$$

Fórmula de Taylor

Demostración:



Consideremos un punto $m \in \mathcal{D}(f)$ y $m \in E[(a,b),\delta]$, siendo $m = (a+th; b+tk)$ con $0 \leq t \leq 1$.

Entonces, en el punto m:

$$f(x,y) = f(a+th, b+tk) \quad \text{con} \begin{cases} a,b,h,k & \text{constantes} \\ t & \text{variable} \end{cases}$$

Luego: $f(a+th, b+tk) = g(t) \qquad (I)$

$$f(x,y) = \underbrace{g(t)}$$

Es continua y derivable por hipótesis en $[0,1]$ porque f es continua y derivable entre (a,b) y $(a+h, b+k)$

Fórmula de Taylor

Aplicamos a $g(t)$ la Fórmula de McLaurin para funciones de una variable:

$$g(t) = g(0) + g'(0) \cdot t + \frac{1}{2!} g''(0) \cdot t^2 + \underbrace{R_2}$$

Es el resto del polinomio de infinitos términos, que sigue al término de segundo orden.

Para $t = 1$:

$$g(1) = g(0) + g'(0) \cdot 1 + \frac{1}{2!} g''(0) \cdot 1^2 + R_2$$

Además, según la expresión (I):

$$g(1) = f(a+h, b+k)$$

$$f(a+h, b+k) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2!} g''(0) + R_2 \qquad (II)$$

Fórmula de Taylor

Para $t = 0$:

Según la expresión (I): $g(0) = f(a,b)$ $\quad (*)$

Por otra parte vamos a calcular las derivadas del segundo miembro:

$$g'(t) = f'_x(x,y) \cdot \frac{dx}{dt} + f'_y(x,y) \cdot \frac{dy}{dt}$$

porque

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr] & \\ f \arrow[ur] \arrow[dr] & & t \\ & y \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$g'(0) = f'_x(a,b) \cdot h + f'_y(a,b) \cdot k \quad (**)$$

Porque según (I):

$x = a + th$

$y = b + tk$

Fórmula de Taylor

$$g''(t) = \left[f''_{xx}(x,y)\cdot\frac{dx}{dt} + f''_{xy}(x,y)\cdot\frac{dy}{dt}\right]\cdot\frac{dx}{dt} + \left[f''_{yx}(x,y)\cdot\frac{dx}{dt} + f''_{yy}(x,y)\cdot\frac{dy}{dt}\right]\cdot\frac{dy}{dt}$$

porque
$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr] & \\ f'_x \arrow[ur] \arrow[dr] & & t \\ & y \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & x \arrow[dr] & \\ f'_y \arrow[ur] \arrow[dr] & & t \\ & y \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$g''(t) = \left[f''_{xx}(x,y)\cdot h + f''_{xy}(x,y)\cdot k\right]\cdot h + \left[f''_{yx}(x,y)\cdot h + f''_{yy}(x,y)\cdot k\right]\cdot k$$

$$g''(t) = f''_{xx}(x,y)\cdot h^2 + \underbrace{f''_{xy}(x,y)}\cdot kh + \underbrace{f''_{yx}(x,y)}\cdot hk + f''_{yy}(x,y)\cdot k^2$$

Son iguales por el Teorema de Schwartz

$$g''(t) = f''_{xx}(x,y)\cdot h^2 + 2f''_{xy}(x,y)\cdot hk + f''_{yy}(x,y)\cdot k^2$$

$$g''(0) = f''_{xx}(a,b)\cdot h^2 + 2f''_{xy}(a,b)\cdot hk + f''_{yy}(a,b)\cdot k^2 \qquad (***)$$

Fórmula de Taylor

Reemplazando en (II) según $(*)$, $(**)$ y $(***)$:

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + f'_x(a,b)\cdot h + f'_y(a,b)\cdot k +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(a,b)\cdot h^2 + 2f''_{xy}(a,b)\cdot hk + f''_{yy}(a,b)\cdot k^2\right] + R_2$$

Pero $x = a + h \Rightarrow h = x - a$ y $y = b + k \Rightarrow k = y - b$

Reemplazando:

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + f'_x(a,b)\cdot (x-a) + f'_y(a,b)\cdot (y-b) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(a,b)\cdot (x-a)^2 + 2f''_{xy}(a,b)\cdot (x-a)(y-b) + f''_{yy}(a,b)\cdot (y-b)^2\right] + R_2$$

Fórmula de Taylor para dos variables independientes

Fórmula de Taylor

Se suele expresar:

$$f(x,y) = f(a,b) + f'_x(a,b)\cdot(x-a) + f'_y(a,b)\cdot(y-b) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(a,b)\cdot(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a,b)\cdot(x-a)(y-b) + f''_{yy}(a,b)\cdot(y-b)^2\right] + R_2$$

Si $(a,b) = (0,0)$ es decir, en un entorno del punto origen:

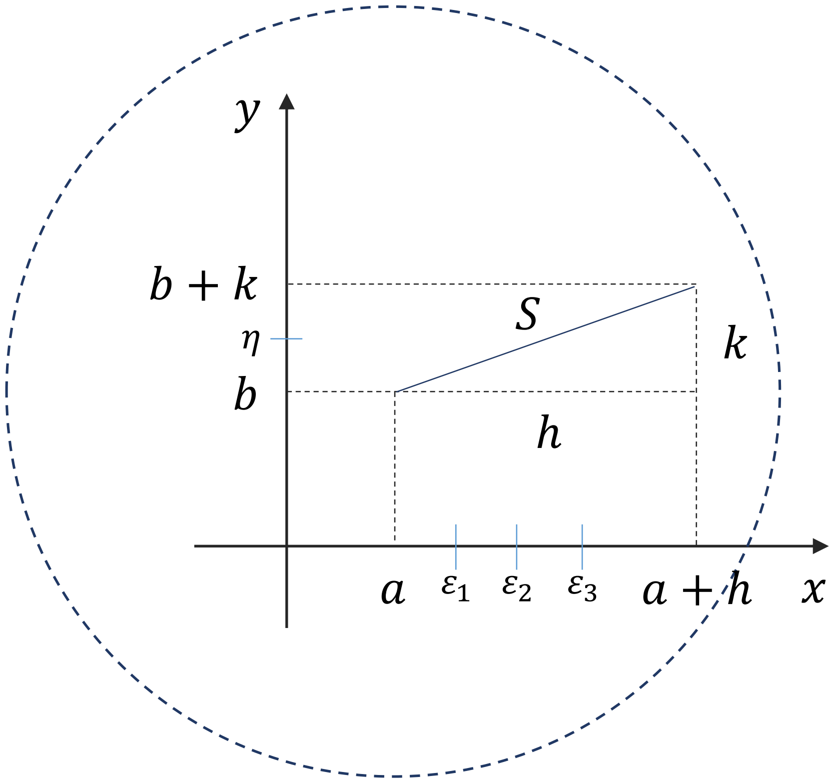
$$f(x,y) = f(0,0) + f'_x(0,0)\cdot x + f'_y(0,0)\cdot y +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(0,0)\cdot x^2 + 2f''_{xy}(0,0)\cdot xy + f''_{yy}(0,0)\cdot y^2\right] + R_2$$

Fórmula de McLaurin para dos variables independientes

Fórmula de Taylor

Daremos a continuación una demostración alternativa del Teorema de Taylor:



Dada una función $z = f(x, y)$, de dos variables independientes, definida en un dominio D, con derivadas parciales continuas hasta enésimo orden y (a, b) un punto interior del dominio de f. Si $(a+h, b+k)$ es un punto que pertenece a un entorno del punto (a, b), la fórmula de Taylor permite obtener un valor aproximado de $f(x, y)$ conociendo el valor de la función y sus derivadas parciales sucesivas en el punto (a, b).

Fórmula de Taylor

Consideremos a $z = f(x, y)$ como una función de una sola variable independiente "y" y apliquemos la Fórmula de Taylor hasta el término de tercer orden:

$$f(x,y) = f(x,b) + f'_y(x,b)(y-b) + \frac{1}{2!} f''_{yy}(x,b)(y-b)^2 + \frac{1}{3!} f'''_{yyy}(x,\eta)(y-b)^3 \quad \boldsymbol{b < \eta < b + k} \quad (1)$$

En la expresión (1) consideraremos a $f(x,b), f'_y(x,b), f''_{yy}(x,b)$ y $f'''_{yyy}(x,b)$ como funciones de una sola variable "x" y aplicaremos la Fórmula de Taylor hasta las derivadas parciales mixtas de tercer orden:

$$f(x,b) = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + \frac{1}{2!} f''_{xx}(a,b)(x-a)^2 + \frac{1}{3!} f'''_{xxx}(\varepsilon_1,b)(x-a)^3 \quad \boldsymbol{a < \varepsilon_1 < a + h} \quad (2)$$

$$f'_y(x,b) = f'_y(a,b) + f''_{yx}(a,b)(x-a) + \frac{1}{2!} f'''_{yxx}(\varepsilon_2,b)(x-a)^2 \quad \boldsymbol{a < \varepsilon_2 < a + h} \quad (3)$$

$$f''_{yy}(x,b) = f''_{yy}(a,b) + f'''_{yyx}(\varepsilon_3,b)(x-a) \quad \boldsymbol{a < \varepsilon_3 < a + h} \quad (4)$$

Fórmula de Taylor

Introduciendo las expresiones (2), (3) y (4) en la fórmula (1) obtenemos:

$$f(x,y) = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + \frac{1}{2!}f''_{xx}(a,b)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''_{xxx}(\varepsilon_1,b)(x-a)^3 +$$

$$+\left[f'_y(a,b) + f''_{yx}(a,b)(x-a) + \frac{1}{2!}f'''_{yxx}(\varepsilon_2,b)(x-a)^2\right](y-b) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{yy}(a,b) + f'''_{yyx}(\varepsilon_3,b)(x-a)\right](y-b)^2 + \frac{1}{3!}f'''_{yyy}(x,\eta)(y-b)^3$$

Reordenando los términos según potencias crecientes de $(x-a)$ y $(y-b)$, obtenemos:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b) + \\ &+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f''_{yx}(a,b)(x-a)(y-b) + f''_{yy}(a,b)(y-b)^2\right] + R_2 \end{aligned}}$$

Fórmula de Taylor

Además, R_2 es el residuo del Polinomio de Taylor de segundo orden y viene dado por:

$$R_2 = \frac{1}{3!}[f'''_{yyy}(x,\eta)(y-b)^3 + 3f'''_{yxx}(\varepsilon_2,b)(x-a)^2(y-b) + 3f'''_{yyx}(\varepsilon_3,b)(x-a)(y-b)^2 +$$
$$+f'''_{yyy}(x,\eta)(y-b)^3]$$

Análogamente a lo dicho para funciones de una única variable independiente, en general:

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left[\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} \cdot (x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} \cdot (y-b)\right]^{n+1}$$

Y además:

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

Fórmula de Taylor

También podemos expresar la Fórmula de Taylor de orden 2:

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}\cdot(x-a)+\frac{\partial f(a,b)}{\partial y}\cdot(y-b)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}\cdot(x-a)^2+2\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x\partial y}\cdot(x-a)\cdot(y-b)+\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}\cdot(y-b)^2\right]+R_2$$

Y tal como lo hicimos en Diferenciales de Orden Superior, podemos expresar la Fórmula de Taylor:

$$f(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\left[\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}\cdot(x-a)+\frac{\partial f(a,b)}{\partial y}\cdot(y-b)\right]^{(i)}+R_n$$

Con:

$$\left[\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}\cdot(x-a)+\frac{\partial f(a,b)}{\partial y}\cdot(y-b)\right]^{(0)}=f(a,b)\qquad \text{y}\qquad 0!=1$$

Fórmula de Taylor

Ejemplo 1:

Desarrolle por Taylor hasta el segundo orden inclusive, la función $z = e^{2x-y}$*, en un entorno de* $(1,2)$*:*

$f(x,y) = e^{2x-y} \to f(1,2) = 1$

$f'_x(x,y) = 2e^{2x-y} \to f'_x(1,2) = 2$

$f'_y(x,y) = -e^{2x-y} \to f'_y(1,2) = -1$

$f''_{xx}(x,y) = 4e^{2x-y} \to f''_{xx}(1,2) = 4$

$f''_{xy}(x,y) = -2e^{2x-y} \to f''_{xy}(1,2) = -2$

$f''_{yy}(x,y) = e^{2x-y} \to f''_{yy}(1,2) = 1$

$$f(x,y) = 1 + 2(x-1) - (y-2) + \frac{1}{2!}[4(x-1)^2 - 4(x-1)(y-2) + (y-2)^2] + R_2$$

$$\boxed{\boldsymbol{e^{2x-y} \cong 1 + 2(x-1) - (y-2) + \frac{1}{2!}\left[4(x-1)^2 - 4(x-1)(y-2) + (y-2)^2\right]}}$$

Fórmula de Taylor

Ejemplo 2:

Desarrolle por Taylor hasta el tercer orden inclusive, la función $z = e^{x}.cos\ y$*, en un entorno de* $(0,0)$*:*

$f(x, y) = e^{x}.cos\ y \rightarrow f(0,0) = 1$

$f'_{x}(x, y) = e^{x}.cos\ y \rightarrow f'_{x}(0,0) = 1$

$f'_{y}(x, y) = -e^{x}.sen\ y \rightarrow f'_{y}(0,0) = 0$

$f''_{xx}(x, y) = e^{x}.cos\ y \rightarrow f''_{xx}(0,0) = 1$

$f''_{xy}(x, y) = -e^{x}.sen\ y \rightarrow f''_{xy}(0,0) = 0$

$f''_{yy}(x, y) = -e^{x}.cos\ y \rightarrow f''_{yy}(0,0) = -1$

$f'''_{xxx}(x, y) = e^{x}.cos\ y \rightarrow f'''_{xxx}(0,0) = 1$

$f'''_{xxy}(x, y) = -e^{x}.sen\ y \rightarrow f'''_{xxy}(0,0) = 0$

$f'''_{xyy}(x, y) = -e^{x}.cos\ y \rightarrow f'''_{xyy}(0,0) = -1$

$f'''_{yyy}(x, y) = e^{x}.sen\ y \rightarrow f''_{yyy}(0,0) = 0$

Fórmula de Taylor

Ejemplo 2: (cont.)

$$f(x,y) \cong f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f''_{yx}(a,b)(x-a)(y-b) + f''_{yy}(a,b)(y-b)^2\right] +$$

$$+\frac{1}{3!}\left[f'''_{xxx}(a,b)(x-a)^3 + 3.\,f''_{xxy}(a,b)(x-a)^2(y-b) + 3.\,f'''_{yyx}(a,b)(x-a)(y-b)^2 + f'''_{yyy}(a,b)(y-b)^3\right]$$

$$f(x,y) = 1 + 1.\,(x-0) + 0.\,(y-0) + \frac{1}{2}[1(x-0)^2 + 2.0.\,(x-0)(y-0) - 1.\,(y-0)^2] +$$

$$+\frac{1}{6}[1(x-0)^3 + 3.0.\,(x-0)^2(y-0) - 3.1.\,(x-0)(y-0)^2 + 0.\,(y-0)^3] + R_3$$

$$\boxed{\boldsymbol{e^x.\cos y \cong 1 + x + \frac{1}{2}\left[x^2 - y^2\right] + \frac{1}{6}\left[x^3 - 3.x.y^2\right]}}$$

Análisis Matemático II

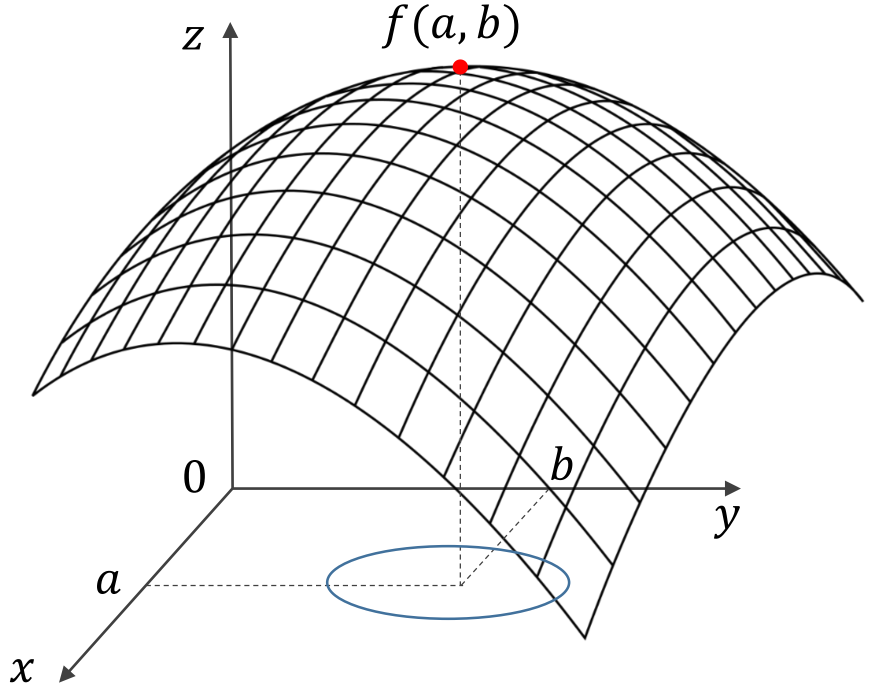
Máximos y Mínimos Relativos

Máximos y Mínimos Relativos

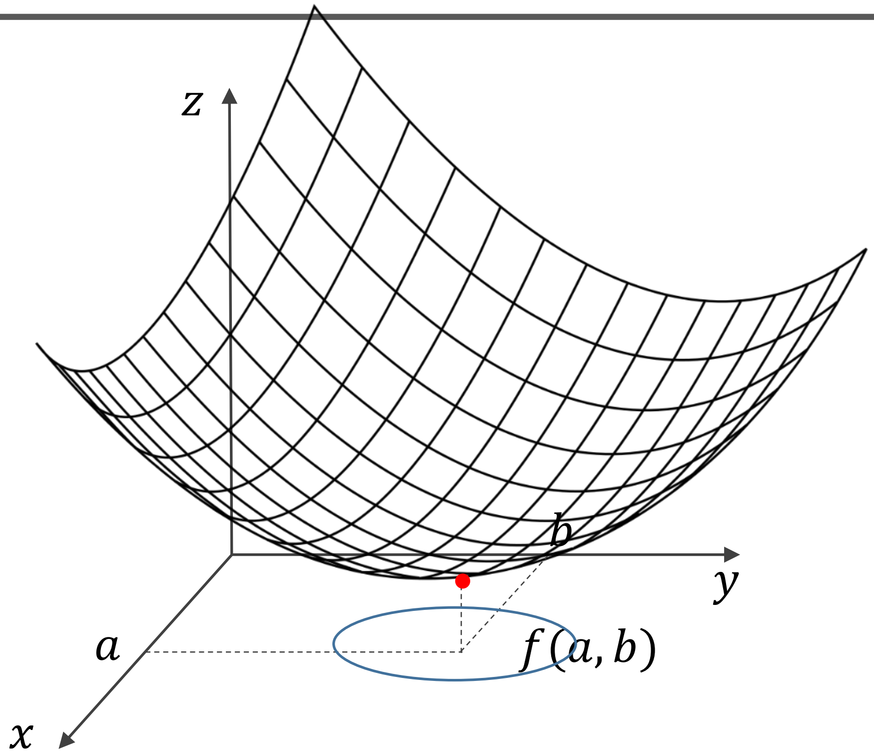
Máximos y mínimos relativos para funciones de dos variables

Sea $z = f(x, y)$ un campo escalar de dos variables independientes y un punto (a, b) que pertenece al dominio de la función. Si $f(x, y)$ es continua y derivable parcialmente hasta el tercer orden en (a, b) y es continua en un entorno $E[(a, b), \delta]$, entonces, existe otro punto $(a + h, b + k) \in E[(a, b), \delta]$, para el cual se cumple:

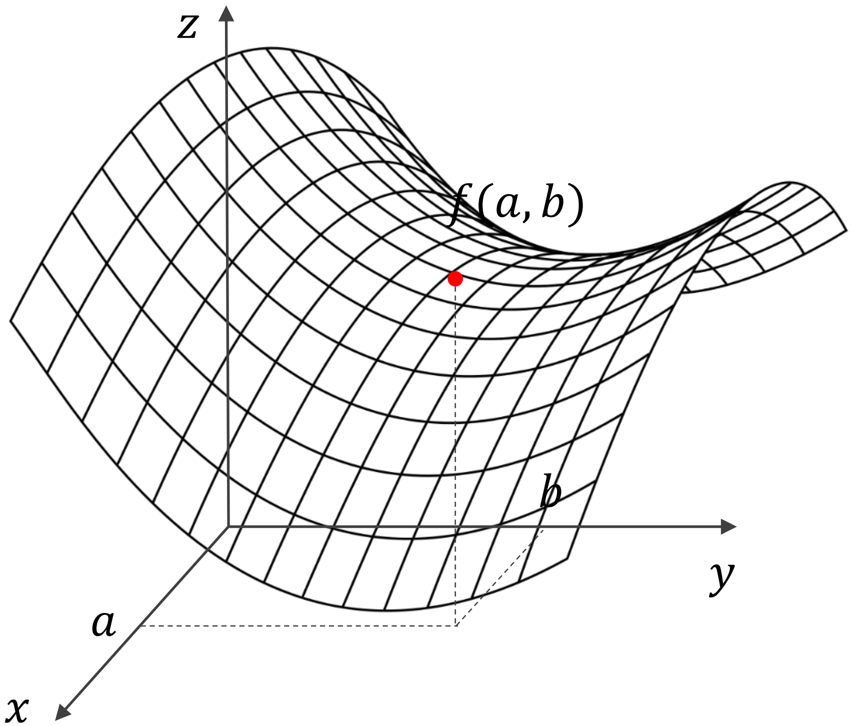
$f(x, y)$ presenta un máximo relativo en (a, b) si y solo si $\forall(h, k \neq 0)$: $f(a + h, b + k) - f(a, b) < 0$.
O bien $f(a, b)$ es un máximo relativo si y solo si $\forall(h, k \neq 0)$: $\boldsymbol{\Delta f(a, b) < 0}$.



Máximos y Mínimos Relativos



$f(x,y)$ presenta un mínimo relativo en (a,b) si y solo si $\forall(h,k \neq 0): f(a+h,b+k) - f(a,b) > 0$.
O bien $f(a,b)$ es un mínimo relativo si y solo si $\forall(h,k \neq 0)$: $\boldsymbol{\Delta f(a,b) > 0}$.



$f(x,y)$ presenta un punto de silla en (a,b) si y solo si $\forall(h,k \neq 0): f(a+h,b+k) - f(a,b) \lesseqgtr 0$. O bien $f(a,b)$ es un punto de ensilladura si y solo si $\forall(h,k \neq 0)$: $\boldsymbol{\Delta f(a,b) \lesseqgtr 0}$.

Máximos y Mínimos Relativos

Ejemplo:

La función $z = x^2 + y^2$, tiene un mínimo relativo en el punto $(0,0)$ puesto que $f(0,0) = 0$ y x^2 e y^2 son siempre positivos para $x \neq 0$ e $y \neq 0$, esto es:

$x^2 + y^2 > 0 \Rightarrow f(x,y) > f(0,0) \ \Rightarrow f(x,y) - f(0,0) > 0$

Pero como $x = 0 + h$ y $y = 0 + k$ entonces $f(0+h, 0+k) - f(0,0) > 0, \forall(h, k \neq 0)$

Es decir $\boldsymbol{\Delta f(0,0) > 0}$

En el caso en que la función presente extremos absolutos, de todos los máximos relativos (o locales), aquel en que la función toma el mayor valor, se denomina **máximo absoluto**. Y de igual manera, de todos los mínimos relativos (o locales), aquel en el que la función toma el menor valor, se denomina **mínimo absoluto**. De forma similar, se pueden definir extremos de funciones de más de dos variables independientes.

Máximos y Mínimos Relativos

Condición necesaria para la existencia de extremos relativos

Si la función $z = f(x, y)$ tiene un extremo en el punto (a, b), entonces sus derivadas parciales de primer orden, si existen, se anulan en ese punto (punto crítico). Es decir:

$$f'_x(a, b) = 0 \text{ y } f'_y(a, b) = 0$$

Para demostrarlo, consideremos a la función $g(x) = f(x, b)$ de una sola variable x. Si por hipótesis f tiene un extremo relativo en (a, b), entonces g tiene un extremo relativo en a, en este caso es $g'(a) = 0$ y como $g'(a) = f'_x(a, b)$, entonces resulta $f'_x(a, b) = 0$.

De forma similar se puede demostrar que se cumple que $f'_y(a, b) = 0$.

Esta condición, si bien es necesaria, no es suficiente para demostrar la existencia de extremos de la función, pues hay funciones en las cuales en algunos punto se anulan sus derivadas parciales de primer orden y sin embargo, no son extremos, este es el caso de los **puntos de silla** o **puntos de ensilladura.**

Máximos y Mínimos Relativos

Ejemplo:

Sea la función $z = x^2 - y^2$. Veamos qué ocurre en el punto $(0,0)$:

$f'_x(x,y) = 2x \quad \Rightarrow f'_x(0,0) = 0$

$f'_y(x,y) = -2y \Rightarrow f'_y(0,0) = 0$

En el punto crítico $(0,0)$ las derivadas parciales de primer orden se anulan.

Sin embargo, $f(1,0) = 1$ y $f(0,1) = -1$, luego $f(1,0) - f(0,0) > 0$ y $f(0,1) - f(0,0) < 0$. En general $\Delta f(0,0) \lesseqgtr 0 \ \forall (h,k \neq 0)$, entonces, existe un punto de silla en $(0,0)$.

Máximos y Mínimos Relativos

Condición suficiente para la existencia de extremos relativos

Sea $z = f(x, y)$ una función continua y con derivadas parciales también continuas en un dominio que contiene un punto (a, b), siendo (a, b) un punto crítico, es decir: $f'_x(a, b) = 0$ y $f'_y(a, b) = 0$.

La función tendrá un extremo relativo o un punto de silla en (a, b) si $\boldsymbol{d^2 f(a, b) \neq 0}$.

Análogamente al caso de funciones de una variable, habrá que determinar el signo de este diferencial de segundo orden, cosa que puede ser difícil y en algunos casos, imposible. Para resolver este problema, haremos un análisis de signos valiéndonos de la Fórmula de Taylor.

Usaremos la Fórmula de Taylor, despreciando R_2 porque nos bastará con una aproximación:

$$f(a+h, b+k) \cong f(a, b) + \underbrace{f'_x(a, b) \cdot h + f'_y(a, b) \cdot k}_{\text{Se anulan porque } (a,b) \text{ es un punto crítico}} +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(a, b) \cdot h^2 + 2f''_{xy}(a, b) \cdot kh + f''_{yy}(a, b) \cdot k^2\right]$$

Máximos y Mínimos Relativos

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)\cong\frac{1}{2!}[\underbrace{f''_{xx}(a,b)}_{A}\cdot h^2+2\underbrace{f''_{xy}(a,b)}_{B}\cdot kh+\underbrace{f''_{yy}(a,b)}_{C}\cdot k^2]$$

Llamamos A, B y C a las derivadas parciales segundas con el fin de facilitar la escritura:

$$\Delta f(a,b)\cong\frac{1}{2}[A\cdot h^2+2B\cdot hk+C\cdot k^2]$$

Multiplicamos y dividimos el segundo miembro por A:

$$\Delta f(a,b)\cong\frac{1}{2A}[A^2\cdot h^2+2AB\cdot hk+AC\cdot k^2]$$

Completamos el cuadrado:

$$\Delta f(a,b)\cong\frac{1}{2A}[(Ah)^2+2Ah\cdot Bk+(Bk)^2+AC\cdot k^2-(Bk)^2]$$

Máximos y Mínimos Relativos

$$\Delta f\,(a,b) \cong \frac{1}{2A}\left[(Ah+Bk)^2 + (AC-B^2)\cdot k^2\right]$$

El signo de la expresión entre corchetes sólo depende del signo de $AC - B^2$

Llamaremos a $AC - B^2$ determinante **Hessiano** o simplemente **Hessiano** y lo escribiremos:

$$H = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

Como $A = f''_{xx}(a,b)$, $B = f''_{xy}(a,b)$ y $C = f''_{yy}(a,b)$, entonces:

$$H(a,b) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(a,b) & f''_{xy}(a,b) \\ f''_{yx}(a,b) & f''_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$$

Veamos, entonces, cuál será el signo de $\Delta f\,(a,b)$ según sea el signo del Hessiano:

Máximos y Mínimos Relativos

- Si $\boldsymbol{H(a,b) > 0} \;\Rightarrow\;$ hay un extremo relativo en (a,b)
  - $A = f''_{xx}(a,b) > 0 \Rightarrow \Delta f(a,b) > 0 \Rightarrow$ hay un mínimo relativo en (a,b).
  - $A = f''_{xx}(a,b) < 0 \Rightarrow \Delta f(a,b) < 0 \Rightarrow$ hay un máximo relativo en (a,b).
- Si $\boldsymbol{H(a,b) < 0} \;\Rightarrow\; \Delta f(a,b) \lesseqgtr 0 \Rightarrow$ hay un punto de silla en (a,b).
- Si $\boldsymbol{H(a,b) = 0} \;\Rightarrow\; \Delta f(a,b) = nro + R_2 \Rightarrow$ hay un caso dudoso en (a,b).

En un caso dudoso hay que estudiar la derivadas de mayor orden ya que puede existir o no un extremo.

Máximos y Mínimos Relativos

Ejemplo:

Determinar los extremos relativos y/o puntos de ensilladura de la función: $\boldsymbol{z = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2}$

$$z = x^4 + y^4 - 2(x^2 - 2xy + y^2)$$

$$z'_x = 4x^3 - 4x + 4y \qquad \qquad \begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases}$$
$$z'_y = 4y^3 + 4x - 4y$$

Podemos resolver este sistema de ecuaciones sumando miembro a miembro la ecuaciones: $4x^3 + 4y^3 = 0 \ \Rightarrow \boldsymbol{x = -y}$ y luego sustituyendo $x = -y$ en cualquier ecuación. (En este caso sustituimos en la segunda)

$$4y^3 - 4y - 4y = 0 \rightarrow 4y^3 - 8y = 0$$

$$y.(4y^2 - 8) = 0 \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y = 0 \Rightarrow x = 0} \\ 4y^2 - 8 = 0 \rightarrow y^2 = 2 \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y = \sqrt{2} \ \Rightarrow x = -\sqrt{2}} \\ \boldsymbol{y = -\sqrt{2} \ \Rightarrow x = \sqrt{2}} \end{cases} \end{cases}$$

NO se debe dividir ambos miembros de una ecuación por una incógnita (por una letra) porque le "bajo" el grado a la ecuación y pierdo raíces en el camino (que en este caso son puntos críticos).

Máximos y Mínimos Relativos

Ejemplo: (cont.)

Obtenemos así los puntos críticos:$(\mathbf{0},\mathbf{0})$; $(\sqrt{\mathbf{2}},-\sqrt{\mathbf{2}})$ **y** $(-\sqrt{\mathbf{2}},\sqrt{\mathbf{2}})$

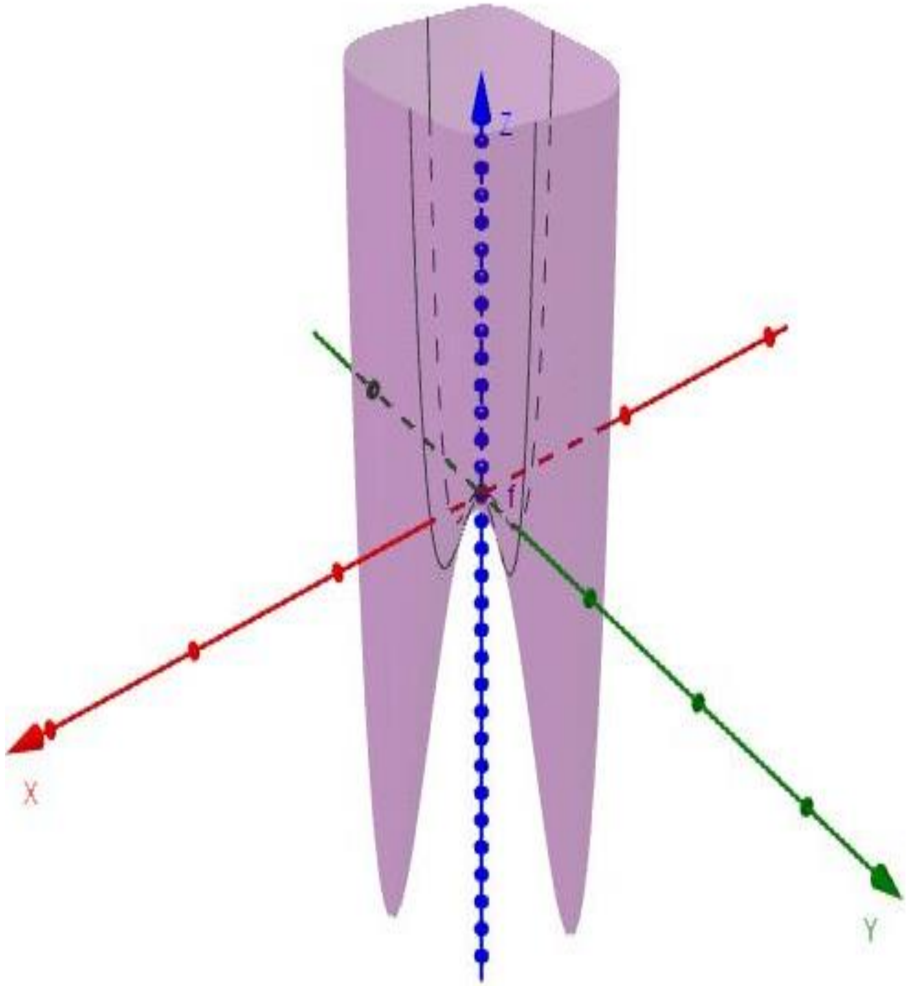
$$z''_{xx} = 12x^2 - 4$$
$$z''_{yy} = 12y^2 - 4$$
$$z''_{xy} = 4$$

$$H(x,y) = z''_{xx} \cdot z''_{yy} - \left(z''_{xy}\right)^2$$

$$\boldsymbol{H(x,y) = \left(12x^2 - 4\right) \cdot \left(12y^2 - 4\right) - 16}$$

$\boldsymbol{H(0,0) = 0}$ **hay un caso dudoso**.

Con un análisis más detallado, veríamos que hay un punto de silla en (0,0)



$\boldsymbol{H\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right) > 0 \Rightarrow z''_{xx}\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right) > 0}$ **hay un mínimo relativo.**

$\boldsymbol{H\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right) > 0 \Rightarrow z''_{xx}\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right) > 0}$ **hay un mínimo relativo**.

Máximos y Mínimos Relativos

Ejemplo: (cont.)

Calculo las alturas, $\boldsymbol{z}$, en los puntos críticos de la función.

$$\boldsymbol{z = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2}$$

$$z(0{,}0) = \mathbf{0}$$

$$z(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^4 + (-\sqrt{2})^4 - 2(2\sqrt{2})^2 = 4 + 4 - 16 = \mathbf{-8}$$

$$z(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^4 + (\sqrt{2})^4 - 2(-2\sqrt{2})^2 = 4 + 4 - 16 = \mathbf{-8}$$

Entonces

$(\,\mathbf{0}; \mathbf{0}: \mathbf{0}\,)$ **es punto dudoso**. Se necesitaría hacer un análisis más profundo de la función en ese punto que puede incluir analizar las derivadas de orden superior.

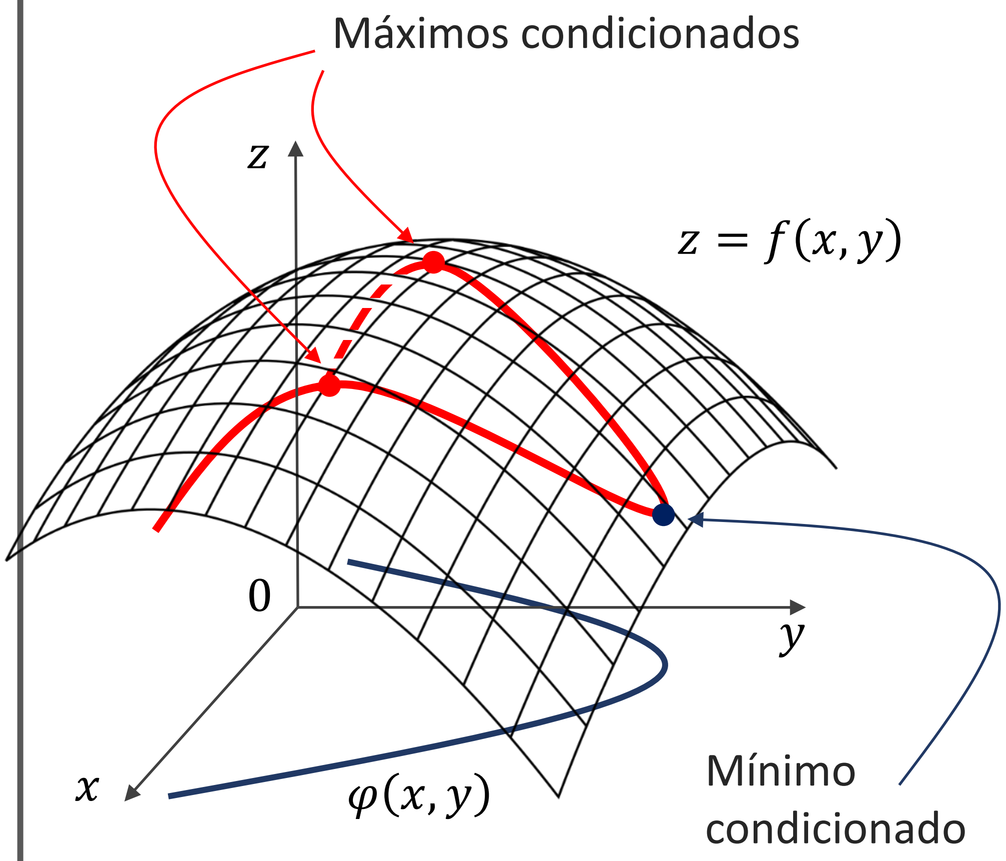
$(\sqrt{\mathbf{2}}, -\sqrt{\mathbf{2}}, -\mathbf{8})$ **es un mínimo relativo.**

$(-\sqrt{\mathbf{2}}, \sqrt{\mathbf{2}}, -\mathbf{8})$ **es un mínimo relativo.**

Análisis Matemático II

Máximos y Mínimos Condicionados

Máximos y Mínimos Condicionados



Se trata ahora de hallar los extremos de una función $z = f(x, y)$ sujetos a una restricción de su dominio dada por la expresión $\varphi(x, y) = 0$ que se denomina ecuación de condición.

Ahora las variables de f no son todas independientes, sino que están relacionadas entre sí mediante esta ecuación de condición.

Los problemas en los que es necesario encontrar máximos y/o mínimos de una función sujeta a una restricción (o más de una restricción), se conocen como problemas de optimización.

Máximos y Mínimos Condicionados

Si la ecuación de condición se puede llevar a la forma explícita $y = g(x)$ que se verifica para los mismos valores de x e y que, a su vez, verifican $\varphi(x, y) = 0$, se puede sustituir en z y obtendremos: $z = f\left(x, g(x)\right)$.

De esta forma el problema se reduce al de hallar los máximos y mínimos relativos de una función de una variable independiente.

A primera vista este método, conocido como *método de variables ligadas*, aparenta ser de fácil aplicación. Sin embargo, presenta dificultades que pueden ser insuperables. Por un lado, estamos limitados por la cantidad de variables, pues sólo sabemos calcular (de forma accesible) máximos y mínimos de hasta dos variables independientes. Y, por otro lado, aún cuando pueda explicitarse una de las variables en función de la otra en la ecuación de condición, la forma explícita puede ser mucho más compleja de lo que parece.

Máximos y Mínimos Condicionados

Ejemplo 1:

Dada la función $z = x^2 - y^2$ y la restricción: $x^2 + y^2 = 1$.

Podemos despejar y, de la ecuación de condición:

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

Reemplazando y en z, tendremos que hallar los máximos y mínimos relativos de:

$$z = x^2 - \left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2 \;\Rightarrow\; z = x^2 - 1 + x^2 \;\Rightarrow z = 2x^2 - 1$$

Si derivamos z, como una función de una variable independiente, tenemos: $z' = 4x$

Igualamos a cero para hallar los puntos críticos. En este caso si $z' = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$

La derivada segunda es: $z'' = 4$ que es positiva para todo x del dominio de z, en particular, para $x = 0$. Entonces hay un mínimo relativo en $x = 0$. Luego, según la forma explícita de la ecuación de condición, habrá un mínimo condicionado en $(0,1)$ y $(0,-1)$.

Pero, como veremos más adelante, hay más información que el método no ha revelado.

Máximos y Mínimos Condicionados

Si la ecuación de condición no se puede explicitar o su forma explícita resulta engorrosa, utilizaremos el método de los multiplicadores de Lagrange.

Permite calcular los puntos críticos de una función auxiliar, conocida como función de Lagrange que se construye:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \underbrace{\lambda}_{\text{Multiplicador de Lagrange}} \cdot \varphi(x,y)$$

La **condición necesaria** para la existencia de un extremo condicionado, como en el caso de extremos relativos, es que las derivadas parciales de primer orden de la función (llamada también Lagrangiana), sean simultáneamente nulas:

$$\begin{cases} L'_x = f'_x(x,y) + \lambda \cdot \varphi'_x(x,y) = 0 \\ L'_y = f'_y(x,y) + \lambda \cdot \varphi'_y(x,y) = 0 \\ L'_\lambda = \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$$

Máximos y Mínimos Condicionados

Una vez conocidos los puntos críticos, se pueden hacer varios análisis distintos para determinar, en cada caso, si corresponde a un extremo condicionado:

- Una posibilidad, es analizar cómo se comporta la función dada en los puntos críticos valuando dicha función y estudiando los resultados obtenidos.
- Otra posibilidad, similar al caso de extremos relativos, es considerar la condición suficiente: que el diferencial segundo de la función de Lagrange, sea no nulo, es decir:

$$d^2L(x,y,\lambda) \neq 0$$

Calculemos el diferencial segundo de la función de Lagrange: $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot \varphi(x,y)$

$$dL = L'_x\,dx + L'_y\,dy + L'_\lambda\,d\lambda$$

$$d^2L = \left(L''_{xx}\,dx + L''_{yx}\,dy + L''_{\lambda x}\,d\lambda\right)dx + \left(L''_{xy}\,dx + L''_{yy}\,dy + L''_{\lambda y}\,d\lambda\right)dy + \left(L''_{x\lambda}\,dx + L''_{y\lambda}\,dy + L''_{\lambda\lambda}\,d\lambda\right)d\lambda$$

$$d^2L = L''_{xx}\,dx^2 + L''_{yx}\,dydx + L''_{\lambda x}\,d\lambda dx + L''_{xy}\,dxdy + L''_{yy}\,dy^2 + L''_{\lambda y}\,d\lambda dy + L''_{x\lambda}\,dxd\lambda + L''_{y\lambda}\,dyd\lambda + L''_{\lambda\lambda}\,d\lambda^2$$

Asociamos los términos semejantes:

$$d^2L = L''_{xx}\,dx^2 + 2L''_{xy}\,dxdy + L''_{yy}\,dy^2 + 2L''_{x\lambda}\,dxd\lambda + 2L''_{y\lambda}\,dyd\lambda + \cancel{L''_{\lambda\lambda}\,(d\lambda)^2}$$

El último término vale siempre cero.

Máximos y Mínimos Condicionados

Entonces

$$d^2L = L''_{xx}\,dx^2 + 2L''_{xy}\,dxdy + L''_{yy}\,dy^2 + 2L''_{x\lambda}\,dxd\lambda + 2L''_{y\lambda}\,dyd\lambda$$

También podemos escribir los dos últimos términos como:

$$d^2L = L''_{xx}\,dx^2 + 2L''_{xy}\,dxdy + L''_{yy}\,dy^2 + 2\underbrace{\left[\varphi'_x(x,y)\,dx + \varphi'_y(x,y)\,dy\right]}_{d\varphi}\,d\lambda$$

Como $\varphi(x,y) = 0 \rightarrow \; d\varphi = 0$

Finalmente $\boxed{\boldsymbol{d^2L = L''_{xx}\,dx^2 + 2L''_{xy}\,dxdy + L''_{yy}\,dy^2}}$

Se debe analizar el signo de este diferencial segundo en cada punto crítico.

Sea (x_0, y_0, λ_0) un punto crítico de la función de Lagrange:

- $d^2L(x_0, y_0, \lambda_0) < 0 \;\; \rightarrow$ habrá un máximo condicionado en (x_0, y_0).
- $d^2L(x_0, y_0, \lambda_0) > 0 \;\; \rightarrow$ habrá un mínimo condicionado en (x_0, y_0).

Pero como en el caso de los máximos y mínimos relativos libres (sin condiciones), la determinación del signo de este diferencial segundo, puede resultar complicado y hasta imposible.

Máximos y Mínimos Condicionados

Ejemplo 2:

Volvamos al ejemplo anterior. Dada la función $z = x^2 - y^2$ y la restricción: $x^2 + y^2 = 1$.

La Lagrangiana es:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 1)$$

Recuerde que la ecuación de condición tiene la forma $\varphi(x, y) = 0$

Derivando:

$$\begin{cases} L'_x = 2x + 2x\lambda = 0 \\ L'_y = -2y + 2y\lambda = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ $2x(1+\lambda) = 0 \rightarrow x = 0, \quad \lambda = -1$

Para $x = 0$

$$\begin{cases} -2y + 2y\lambda = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \longrightarrow y = \pm 1 \end{cases}$$

Para $y = 1$

$-2 + 2\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 1$

Para $y = -1$

$2 - 2\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 1$

Para $\lambda = -1$

$$\begin{cases} -2y - 2y = 0 \longrightarrow y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Para $y = 0$

$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

Los puntos críticos de L son:

$(0,1,1)$

$(0,-1,1)$

$(1,0,-1)$

$(-1;0,-1)$

Máximos y Mínimos Condicionados

Calculemos d^2L

$L''_{xx} = 2 + 2\lambda$

$L''_{xy} = 0$

$L''_{yy} = -2 + 2\lambda$

$$d^2L = L''_{xx} \cdot dx^2 + 2L''_{xy} \cdot dxdy + L''_{yy} \cdot dy^2$$

$$d^2L = (2 + 2\lambda) \cdot dx^2 + (-2 + 2\lambda) \cdot dy^2$$

$d^2L(0,1,1) = 4 \cdot dx^2 > 0$ $\rightarrow$ hay un mínimo condicionado en $(0,1)$.

$d^2L(0,-1,1) = 4 \cdot dx^2 > 0$ $\rightarrow$ hay un mínimo condicionado en $(0,-1)$.

$d^2L(1,0,-1) = -4 \cdot dy^2 < 0$ $\rightarrow$ hay un máximo condicionado en $(1,0)$.

$d^2L(-1,0,-1) = -4 \cdot dy^2 < 0$ $\rightarrow$ hay un máximo condicionado en $(-1,0)$.

En contraste con la aplicación del método de variables ligadas, hemos encontrado dos puntos críticos más. Un máximo condicionado en $(1,0)$ y otro en $(-1,0)$.

Máximos y Mínimos Condicionados

Ejemplo 3:

Sea ahora $z = x^2 - y^2$ y la restricción: $3x - y = 0$.

La Lagrangiana es:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 + \lambda \cdot (3x - y)$$

Derivando:

$$\begin{cases} L'_x = 2x + 3\lambda = 0 \\ L'_y = -2y - \lambda = 0 \\ L'_\lambda = 3x - y = 0 \end{cases} \longrightarrow 2x + 3\lambda = 0 \rightarrow x = -\frac{3\lambda}{2}$$

$$\begin{cases} -2y - \lambda = 0 \longrightarrow y = -\frac{\lambda}{2} \\ -\frac{9\lambda}{2} - y = 0 \end{cases} \qquad -\frac{9\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = 0 \rightarrow \lambda = 0$$

En este caso, L tiene un punto crítico en: $(0,0,0)$

$$d^2L = L''_{xx} \cdot dx^2 + 2L''_{xy} \cdot dxdy + L''_{yy} \cdot dy^2$$

$d^2L = 2 \cdot dx^2 - 2 \cdot dy^2$ Pero en este caso, es imposible conocer el signo de $d^2L(0,0,0)$

Máximos y Mínimos Condicionados

- Para subsanar este problema, podemos citar una última posibilidad: valernos del estudio del Hessiano Orlado.

El Hessiano Orlado es una variante del Hessiano utilizado en problemas de optimización restringida (extremos condicionados). El determinante de sus principales menores se utiliza como criterio para determinar si un punto crítico de una función es un mínimo o un máximo. Si $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot \varphi(x,y)$, el Hessiano Orlado es:

$$\overline{H} = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{x\lambda} \\ L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{y\lambda} \\ L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} & L''_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} \Rightarrow \overline{H} = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & \varphi'_x \\ L''_{yx} & L''_{yy} & \varphi'_y \\ \varphi'_x & \varphi'_y & 0 \end{vmatrix} \text{ o } \overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{vmatrix}$$

Si $\overline{H}(x_0, y_0, \lambda_0) > 0 \;\rightarrow$ Habrá un máximo condicionado en (x_0, y_0).

Si $\overline{H}(x_0, y_0, \lambda_0) < 0 \;\rightarrow$ Habrá un mínimo condicionado en (x_0, y_0).

¡Atención al cambio de signo!

Máximos y Mínimos Condicionados

Ejemplo 4:

Volvamos al ejemplo 3. Donde $z = x^2 - y^2$ y la restricción: $3x - y = 0$.

Para su solución construimos la Lagrangiana:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 + \lambda \cdot (3x - y)$$

Derivando, igualando a cero y operando, obtuvimos el punto crítico: $(0,0,0)$.

El Hessiano Orlado es:

$$\overline{H} = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & \varphi'_x \\ L''_{yx} & L''_{yy} & \varphi'_y \\ \varphi'_x & \varphi'_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 18 - 2 > 0$$

Entonces hay un máximo condicionado en el punto $(0,0)$

$$L'_x = 2x + 3\lambda$$

$$L'_y = -2y - \lambda$$

$$L'_\lambda = 3x - y$$

$$L''_{xx} = 2$$

$$L''_{xy} = 0$$

$$L''_{x\lambda} = \varphi'_x = 3$$

$$L''_{yy} = -2$$

$$L''_{y\lambda} = \varphi'_y = -1$$

$$L''_{\lambda\lambda} = \varphi'_\lambda = 0$$

Observe que un máximo o un mínimo condicionado de la función $z = f(x, y)$, **NO** es un extremo, sino que se debe interpretar como el mayor o menor valor de la función que cumple (verifica) la ecuación de condición.

Máximos y Mínimos Condicionados

En resumen:

Dados un campo escalar de $\boldsymbol{n}$ variables $\boldsymbol{z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ y $\boldsymbol{m}$ funciones de restricción, tales como

$$\boldsymbol{\varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0,\ \varphi_2(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n) = 0}$$

Algoritmo de solución

1) Construimos la Lagrangiana para calcular los puntos críticos :

$$\boxed{\boldsymbol{L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 . \varphi_1(x_1, \dots, x_n) + \cdots + \lambda_m . \varphi_m(x_1, \dots, x_n)}}$$

2) Construimos un sistema de ecuaciones con las derivadas primeras de la Lagrangiana igualadas a cero.

3) Resolvemos el sistema para obtener los puntos críticos. Sean $\boldsymbol{P_1, P_2, \dots, P_k}$ los puntos críticos.

Analisis de signos en los puntos críticos:

En el caso más frecuente, que es un campo escalar de dos variables independientes $\boldsymbol{z = f(x, y)}$ con una única condición $\boldsymbol{\varphi(x, y) = 0}$:

4) Construyo el Hessiano Orlado de la Langrangiana con las derivadas $\boldsymbol{\overline{H} = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & \varphi'_x \\ L''_{yx} & L''_{yy} & \varphi'_y \\ \varphi'_x & \varphi'_y & 0 \end{vmatrix}}$

5) Valúo $\boldsymbol{\overline{H}}$ en los puntos críticos.

Se verifica que:

$$\overline{H}(\boldsymbol{P_i}) > 0 \to \textit{máximo condicionado en } \boldsymbol{el\ punto\ crítico\ P_i}$$
$$\overline{H}(\boldsymbol{P_i}) < 0 \to \textit{mínimo condicionado en } \boldsymbol{el\ punto\ crítico\ P_i}$$