CAPÍTULO 2

DERIVADAS Y DIFERENCIALES

DERIVADAS PARCIALES DE UNA FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES

Sea la función $z = f(x, y)$, de dos variables independientes, y consideremos que se mantiene a ***y*** constante, haciendo variar solamente a ***x***, entonces la función planteada se comporta como una función de una variable independiente ***x***. Si en esta condición derivamos a esta función obtendremos la **derivada parcial de la función con respecto a "*x*"**, que se expresa así:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

Esta derivada parcial se puede simbolizar también:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = z'_x = f'_x(x,y) = f'_x = f_x = D_x z = D_x f$$

Si ahora hacemos variar solamente a ***y***, manteniendo a ***x*** constante, la función se comporta como de una sola variable independiente ***y***. Y al derivarla obtendremos la **derivada parcial de la función con respecto a "y"**:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f(x,y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Esta derivada parcial se puede simbolizar también:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = z'_y = f'_y(x,y) = f'_y = f_y = D_y z = D_y f$$

De lo definido podemos deducir que la reglas para calcular derivadas parciales son las mismas que se utilizan para calcular la derivada de las funciones de una sola variable independiente; solo es preciso tener en cuenta con respecto a que variable se desea derivar y mantener la otra constante.

De forma similar se pueden definir las derivadas parciales de funciones de más de dos variables independientes.

Ejemplos:

1- Hallar las derivadas parciales de las siguientes funciones:

a) $z = y^3 \cos x$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -y^3 \operatorname{sen} x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 \cos x$$

b) $z = e^{2x-y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{2x-y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -e^{2x-y}$$

c) $z = y^x$ $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x} = y^x \ln y$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xy^{x-1}$$

d) $u = \dfrac{5x^3y^2}{z}$ $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{15x^2y^2}{z}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{10x^3y}{z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{5x^3y^2}{z^2}$$

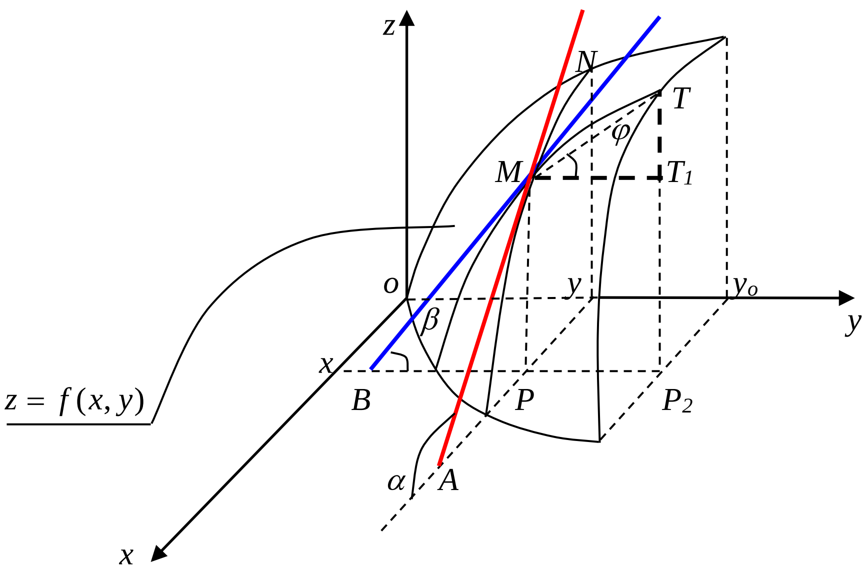
2- Calcular las derivadas parciales de la función $z = 3x^2y - y^2$ en el punto $P(1,2)$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 6xy \qquad \frac{\partial f(1,2)}{\partial x} = 12$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3x^2 - 2y \qquad \frac{\partial f(1,2)}{\partial y} = -1$$

Interpretación gráfica de las derivadas parciales

Consideremos la función $z = f(x,y)$ representada en el gráfico adjunto.



Veamos la interpretación gráfica de la $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. Para ello tracemos el plano $x = cte.$, la intersección de éste con la superficie nos determina la curva MT.

Al punto $P(x,y)$ del plano $0xy$ le corresponde el punto $M(x,y,z)$ de la superficie $z = f(x,y)$.

Si mantenemos $x = cte.$ e incrementamos ***y*** en $\Delta y = \overline{PP_2} = \overline{MT_1}$, la función se incrementará en $\Delta_y f(x, y) = \overline{TT_1}$. Pues al incrementar ***y***, tendremos que al punto $P_2(x, y + \Delta y)$ del dominio le corresponde el punto $T(x, y + \Delta y, z + \Delta_y z)$ de la superficie.

La razón $\dfrac{\Delta_y f(x, y)}{\Delta y}$ es igual a la tangente del ángulo formado por la secante $\overline{MT}$ con la dirección positiva del eje $0y$, que si lo llamamos φ , tendremos:

$$\frac{\Delta_y f(x, y)}{\Delta y} = tg T\hat{M}T_1 = tg\varphi$$

Por consiguiente por definición de derivada parcial:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f(x, y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} tg\varphi$$

Pero cuando $\Delta y \to 0$ entonces el punto $T \to M$ y el ángulo $\varphi \to \beta$, por lo tanto finalmente obtendremos:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f(x, y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} tg\varphi = tg\beta$$

$$\boxed{\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = tg\beta}$$

Es decir que la $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ es igual a la tangente del ángulo β , formado por la recta $\overline{MB}$ tangente a la curva MT en el punto $M(x, y, z)$, con la dirección positiva del eje *0y*. O sea que el valor numérico de la $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ es igual a la tangente del ángulo de inclinación de la recta tangente a la superficie, en el punto considerado, en la dirección del eje *0y*.

De igual modo se puede demostrar que:

$$\boxed{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = tg\alpha}$$

O sea que el valor numérico de la $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ es igual a la tangente del ángulo de inclinación de la recta tangente a la superficie, en el punto considerado, en la dirección del eje *0x*.

Función Derivable

Una función de varias variables independientes, se dice que es derivable en un punto si sus derivadas parciales son únicas y finitas en ese punto, en cuyo caso, al igual que en funciones de una sola variable independiente, la funciones derivadas son continuas en ese punto.

DERIVADAS PARCIALES SUCESIVAS

Las derivadas parciales de una función de varias variables son a su vez y por lo general funciones de esas mismas variables, en consecuencia admiten ser derivadas nuevamente y obtener así las denominadas derivadas parciales segundas, terceras, etc., con respecto a cada una de las variables consideradas.

Así para una función de dos variables independientes sus derivadas parciales son:

$$z = f(x,y) \qquad\qquad z = x^4 \operatorname{sen} 5y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x,y) \qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 \operatorname{sen} 5y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x,y) \qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 5x^4 \cos 5y$$

Estas pueden ser derivadas nuevamente y si estas derivadas existen obtendremos las **derivadas parciales de segundo orden** que son cuatro:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'_x(x+\Delta x, y) - f'_x(x,y)}{\Delta x} \qquad\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 \operatorname{sen} 5y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{xy}(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f'_x(x, y+\Delta y) - f'_x(x,y)}{\Delta y} \qquad\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 20x^3 \cos 5y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{yx}(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'_y(x+\Delta x, y) - f'_y(x,y)}{\Delta x} \qquad\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 20x^3 \cos 5y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f'_y(x, y+\Delta y) - f'_y(x,y)}{\Delta y} \qquad\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -25x^4 \operatorname{sen} 5y$$

Observemos que en la notación $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ el orden de derivación de indica de derecha a izquierda, en cambio en la notación $f''_{xy}(x,y)$ el orden es de izquierda a derecha.

Estas derivadas de segundo orden pueden ser a su vez derivadas con respecto a ***x*** o respecto a ***y***, obteniendo así las **derivadas parciales de tercer orden** que si existen son ocho:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = f'''_{xxx}(x,y) \qquad\qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 24x \operatorname{sen} 5y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = f'''_{xxy}(x,y) \qquad\qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = 60x^2 \cos 5y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = f'''_{xyx}(x,y) \qquad\qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = 60x^2 \cos 5y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = f'''_{xyy}(x,y) \qquad\qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = -100x^3 \operatorname{sen} 5y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = f'''_{yxx}(x,y) \qquad\qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 60x^2 \cos 5y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = f'''_{yxy}(x,y) \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = -100x^3 \mathrm{sen} 5y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = f'''_{yyx}(x,y) \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -100x^3 \mathrm{sen} 5y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = f'''_{yyy}(x,y) \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = -125x^4 \cos 5y$$

Y así siempre que existan las derivadas correspondientes, se puede seguir derivando en forma sucesiva. De igual manera se definen las derivadas parciales sucesivas de funciones con un mayor número de variables independientes.

Estas derivadas parciales sucesivas no son todas distintas entre si, pues: *Si las derivadas parciales sucesivas a calcular son continuas, el orden de derivación no altera la derivada, siempre que la cantidad de veces que se derive respecto a cada variable sea la misma.*

En base a ello resulta:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

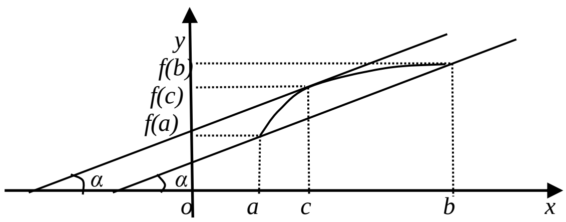
$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$$

Estas igualdades se demuestran por intermedio del Teorema de Schwarz (o de Clairaut).

Antes de enunciarlo, recordemos el Teorema del Valor Medio ó Teorema de Lagrange visto en Análisis Matemático I:
Si la función f(x) es continua en el intervalo [a,b] y derivable en un intervalo]a,b[, existirá un punto c que pertenece a]a,b[, en que se cumpla que:

f(b)-f(a)=f '(c).(b-a) *a<c<b*



<u>Teorema de Schwarz</u>
Dada la función $z = f(x,y)$ ***definida en un dominio D, tiene derivadas parciales continuas en un entorno del punto*** $P(x,y)$ ***interior al dominio, entonces en ese punto se verifica que:***

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) \qquad \text{ó} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

<u>Demostración</u>
Analicemos la expresión:

$$\mathrm{A} = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - f(x, y+\Delta y) + f(x,y) \qquad \textbf{(1)}$$

a) Expresemos la **(1)** de la siguiente manera:

$$A = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - \left[f(x, y+\Delta y) - f(x,y) \right]$$

A los dos primeros términos se los puede considerar como la diferencia entre dos valores de una función de una sola variable ***y*** (***x*** permanece constante) y le aplicamos el Teorema del Valor Medio.

Hacemos lo mismo con los dos últimos términos y obtenemos:

$$A = f'_y(x+\Delta x, y_1)\Delta y - f'_y(x, y_1)\Delta y \qquad \text{para} \qquad y \le y_1 \le y+\Delta y$$

$$A = [f'_y(x+\Delta x, y_1) - f'_y(x, y_1)]\Delta y$$

Apliquemos nuevamente el Teorema del Valor Medio:

$$\boxed{A = f''_{yx}(x_1, y_1)\Delta x \Delta y} \qquad \textbf{(2)} \qquad \text{para} \qquad \begin{cases} x \le x_1 \le x+\Delta x \\ y \le y_1 \le y+\Delta y \end{cases}$$

b) Ahora expresemos la **(1)** de la siguiente manera:

$$A = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) - \left[f(x+\Delta x, y) - f(x,y) \right]$$

Aplicando a esta última expresión el Teorema del Valor Medio obtendremos:

$$A = f'_x(x_2, y+\Delta y)\Delta x - f'_x(x_2, y)\Delta x \qquad \text{para} \qquad x \le x_2 \le x+\Delta x$$

$$A = \left[f'_x(x_2, y+\Delta y) - f'_x(x_2, y) \right]\Delta x$$

Apliquemos nuevamente el Teorema del Valor Medio:

$$\boxed{A = f''_{xy}(x_2, y_2)\Delta x \Delta y} \qquad \textbf{(3)} \qquad \text{para} \qquad \begin{cases} x \le x_2 \le x+\Delta x \\ y \le y_2 \le y+\Delta y \end{cases}$$

Las expresiones **(2)** y **(3)** obtenidas en **(a)** y **(b)** respectivamente son iguales a A, por lo tanto:

$$f''_{xy}(x_2, y_2)\Delta x \Delta y = f''_{yx}(x_1, y_1)\Delta x \Delta y$$

$$f''_{xy}(x_2, y_2) = f''_{yx}(x_1, y_1)$$

Tomamos límite para $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$, en ambos miembros:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy}(x_2, y_2) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{yx}(x_1, y_1)$$

Y finalmente resulta:

$$\boxed{f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)}$$

Lo demostrado se puede extender a derivadas parciales de orden superior al segundo, y también a funciones de más de dos variables independientes, siempre que se verifique la continuidad de las derivadas parciales correspondientes.

DIFERENCIAL TOTAL DE UNA FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES

Dada la función $z = f(x, y)$, recordemos que su incremento total es:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

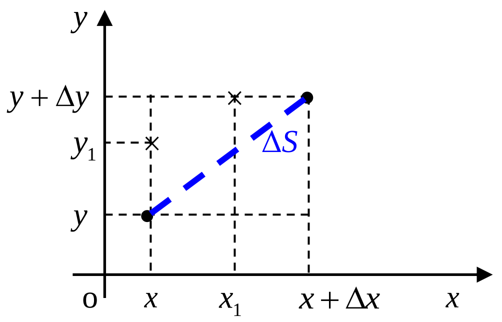
Consideraremos por hipótesis que la función es continua y tiene derivadas parciales también continuas en el punto considerado.

A la expresión del incremento total le sumamos y restamos $f(x, y + \Delta y)$:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

A los dos primeros términos se los puede considerar como la diferencia entre dos valores de una función de una sola variable "x" ("y" permanece constante) y le aplicamos el Teorema del Valor Medio. Hacemos lo mismo con los dos últimos términos pero considerándolas funciones de una sola variable "y", obteniendo:

$$\Delta z = f'_x(x_1, y + \Delta y)\Delta x + f'_y(x, y_1)\Delta y \qquad \text{para} \qquad \begin{cases} x \le x_1 \le x + \Delta x \\ y \le y_1 \le y + \Delta y \end{cases}$$



Pero por hipótesis la función es continua y tiene derivadas parciales también continuas, por lo tanto:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f'_x(x_1, y + \Delta y) = f'_x(x, y) \qquad \Rightarrow \qquad f'_x(x_1, y + \Delta y) = f'_x(x, y) + \varepsilon_1$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f'_y(x, y_1) = f'_y(x, y) \qquad \Rightarrow \qquad f'_y(x, y_1) = f'_y(x, y) + \varepsilon_2$$

Dado que $x \le x_1 \le x + \Delta x$ e $y \le y_1 \le y + \Delta y$, entonces $x_1 \to x$ e $y_1 \to y$ cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$ respectivamente.

Y también $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$ (es decir cuando $\Delta S \to 0$).

De esta manera el incremento total es un infinitésimo compuesto:

$$\boxed{\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y} \qquad \textbf{Incremento Total}$$

Los dos últimos términos nos representan un infinitesimal de orden superior respecto de ΔS.

La suma de los dos primeros términos recibe el nombre de parte principal del incremento y es una expresión lineal respecto de Δx y Δy.

Esta parte principal del incremento recibe el nombre de **Diferencial Total** de la función y se lo designa dz ó $df(x,y)$:

$$dz = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y$$

Podemos indicar la siguiente igualdad aproximada:

$$\Delta z \cong dz$$

Los incrementos Δx y Δy de las variables independientes se llaman diferenciales de las variables independiente ***x*** e ***y,*** y se los designan dx y dy respectivamente:

$$\boxed{dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy}$$ **Diferencial Total**

También se suele expresar:

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy}$$

Todo lo demostrado para funciones de dos variables independientes puede extenderse a funciones con un mayor número de variables. Por ejemplo para una función de tres variables independientes:

$$u = f(x,y,z)$$

Su diferencial total es:

$$\boxed{du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz}$$ **Diferencial Total**

Y en general para la función:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_n)$$

Su diferencial total es:

$$\boxed{dy = \frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial y}{\partial x_3}dx_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n}$$ **Diferencial Total**

Ejemplo1:
Calculemos el diferencial total de la función: $z = 3x^2\cos\pi y$

$$dz = 6x\cos\pi y dx - 3\pi x^2 \operatorname{sen}\pi y dy$$

Ejemplo 2:

Calculemos ahora el diferencial total de la función $z = 2x^3y^2$, en el punto $P(1,2)$, para cuando la variable independiente "x" se incrementa en $dx = 0{,}03$ y la variable independiente "y" se incrementa en $dy = 0{,}02$.

$$df(x,y) = 6x^2y^2dx + 4x^3ydy$$
$$df(1,2) = 6.1^2.2^2.0{,}03 + 4.1^3.2.0{,}02$$
$$df(1,2) = 0{,}88$$

Significa que cuando las variables independientes x e y se incrementan en $dx = 0{,}02$ y en $dy = 0{,}03$ respectivamente, la función se incrementa aproximadamente en $dz = 0{,}88$.

Calculemos el valor exacto del incremento total de la función:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)$$

$$\Delta z = 2.(1 + 0{,}03)^3.(2 + 0{,}02)^2 - 2.1^3.2^2 = 2.1{,}03^3.2{,}02^2 - 2.1^3.2^2 = 8{,}9175265 - 8$$

$\Delta z = 0.9175265$ se verifica que $\Delta z \cong dz$

Diferenciales Parciales de una Función de varias Variables Independientes

Vimos que dada la función:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_n)$$

Su diferencial total es:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial y}{\partial x_3}dx_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n$$

Si todas las variables independientes se consideran como constantes menos una de ellas, por ejemplo x_i, el diferencial que resulta se llama **Diferencial Parcial** de la función respecto a esa variable x_i, y se lo indica:

$$\boxed{d_{x_i}y = \frac{\partial y}{\partial x_i}dx_i}$$

Este **Diferencial Parcial** expresa aproximadamente la variación de la función causada por el incremento $\Delta x_i = dx_i$ de la variable independiente x_i, mientras que el **Diferencial Total** dy expresa aproximadamente la variación de la función causada por las variaciones $dx_1, dx_2, \ldots\ldots\ldots dx_n$ de todas las variables independientes. Puede observarse que el Diferencial Total es la suma de los Diferenciales Parciales.

Desde el punto de vista de la Física, este hecho corresponde al principio de superposición de los efectos: "Cuando un número de cambios ocurren simultáneamente en algún sistema, cada uno de ellos obra como si actuara independientemente de los otros, y el efecto total es la suma de los efectos parciales.

Ejercicios:
Calcular el Diferencial Total de las siguientes funciones:

1. $z = e^{xy^2} + 2$ Respuesta: $dz = y^2 e^{xy^2} dx + 2xye^{xy^2} dy$

2. $z = x^2 y \operatorname{sen} y$ Respuesta: $dz = 2xy \operatorname{sen} y.dx + (x^2 \operatorname{sen} y + x^2 y \cos y)dy$

3. $\omega = \frac{x^3}{3} + \ln \frac{y^2 u}{z}$ Respuesta: $d\omega = x^2 dx + \frac{2}{y} dy - \frac{1}{z} dz + \frac{1}{u} du$

Aplicaciones del Diferencial Total de una función

Cálculos aproximados
Dada la función $z = f(x, y)$ sabemos que el Incremento total es:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Y sabemos que:

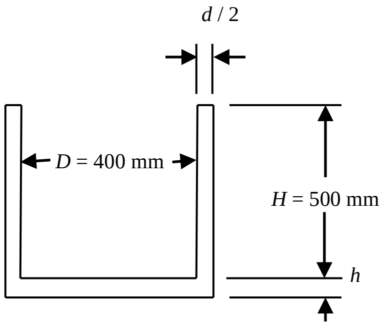
$$\Delta z \cong dz$$

Por lo tanto podemos expresar que:

$$dz \cong f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Donde la desigualdad está dada en infinitésimos de orden superior respecto a Δx y Δy .

Veamos como se pueden aplicar estas fórmulas al cálculo aproximado:



Ejercicio
Calcular el volumen de material necesario para construir un tanque de forma cilíndrica sin tapa y con un espesor de 2 mm y que tiene las siguientes dimensiones:
D : Diámetro interior del tanque
H : Altura interior del tanque
$d / 2$ y h: Espesor del tanque igual a 2 mm
v : Volumen total de material necesario.

Primero realizaremos el cálculo exacto y luego el aproximado aplicando diferencial total.

1. Cálculo exacto
2.

$$v = \frac{\pi(D + d)^2 (H + h)}{4} - \frac{\pi D^2 H}{4}$$

$$v = \frac{\pi .404^2 .502}{4} - \frac{\pi .400^2 .500}{4}$$

$\boxed{v = 1.519.299 mm^3}$ **Valor exacto**

3. <u>Cálculo aproximado</u>
   Podemos considerar la función $V = f(D,H)$ y los incrementos de las variables independientes son $\Delta D = d = 4mm$ y $\Delta H = h = 2mm$ y por lo tanto el volumen buscado será el Incremento Total de la función:

   $$v = \Delta V \cong dV$$

   $$V = \frac{\pi D^2 H}{4}$$

   $$dV = \frac{\pi DH}{2} \cdot dD + \frac{\pi D^2}{4} \cdot dH = \frac{\pi .400.500}{2} \cdot 4 + \frac{\pi .400^2}{4} \cdot 2$$

   $$dV = 1.507.968 mm^3$$

   $\boxed{v \cong 1.507.968 mm^3}$ **Valor aproximado**

   La diferencia entre el valor exacto y el valor aproximado es de $11.331 mm^3$. Si bien a primera vista parece una diferencia grande, el error que se está cometiendo es del 0,75 %.

   Por ejemplo si consideramos que el material con el que está construido el tanque es acero, pesaría aprox. 12 kg y el error que se cometería al considerar el diferencial en lugar del incremento sería de 88 gr.

<u>Evaluaciones de errores de cálculo</u>

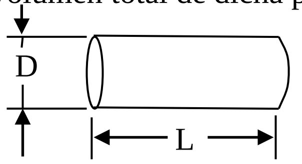
Sea la función $z = f(x,y)$ y supongamos que al evaluar los valores numéricos de ***x*** e ***y*** se cometen pequeños errores que llamaremos Δx y Δy respectivamente. Al calcular ***z*** con esos valores erróneos se cometerá un error total igual a Δz.

Si los errores Δx y Δy son suficientemente pequeños, podemos sustituir los incrementos por diferenciales y decir que el error total será:

$$\boxed{\Delta z \cong dz = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| \cdot |dx| + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \cdot |dy|}$$

Como los errores pueden ser positivos o negativos, se deben tomar los valores absolutos de las derivadas parciales y de los errores. De esta manera obtendremos aproximadamente el máximo error posible.

Ejemplo:
Se debe construir una pieza de forma cilíndrica de 120 mm de diámetro y de 80 mm de longitud. Si en cada medida se permite un error máximo de 0,02 mm, determinar el máximo error posible en el volumen total de dicha pieza.



Si llamamos D al diámetro, L a la longitud, dD y dL a los errores
En el diámetro y en la longitud respectivamente, Tendremos:

$V = \frac{\pi D^2 L}{4}$ y el máximo error posible:

$$e_{\max} \cong dV = \frac{\pi DL}{2} dD + \frac{\pi D^2}{4} dL = \frac{\pi .120.80}{2} \cdot 0{,}02 + \frac{\pi .120^2}{4} \cdot 0{,}02$$

$$e_{\max} \cong 527{,}78 mm^3$$

Ejercicios:

1. Dado un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6m y 8m respectivamente, si se permite un error máximo de 0,1 m en cada uno. Hallar un valor aproximado del máximo error al calcular con estas medidas: a) El Área y b) La Hipotenusa.

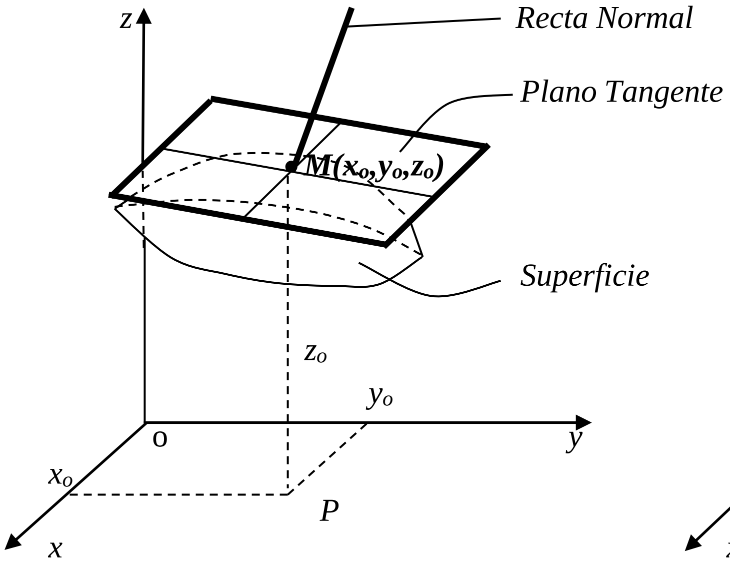
2. Los lados de un paralelepípedo rectángulo miden 4m, 7m y 9m con errores máximos de 0,02m en cada uno. Hallar el valor del máximo error al calcular con estas medidas: a) El Volumen, b) La Superficie Total de sus caras y c) La Diagonal.

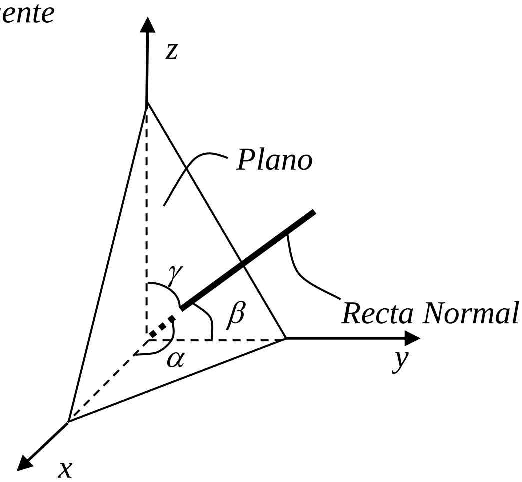
Resultados:

Ejercicio 1:
a) Error máximo al calcular el Área: $e_{\max} \cong 0{,}7 m^2$
b) Error máximo al calcular la Hipotenusa: $e_{\max} \cong 0{,}14 m$

Ejercicio 2:
a) Error máximo al calcular el Volumen: $e_{\max} \cong 2{,}54 m^3$
b) Error máximo al calcular la Superficie: $e_{\max} \cong 1{,}6 m^2$
c) Error máximo al calcular la Diagonal: $e_{\max} \cong 0{,}03 m$

PLANO TANGENTE Y RECTA NORMAL A UNA SUPERFICIE





Recordemos algunas ecuaciones conocidas:

$Ax + By + Cz = D$ Es la ecuación de un plano.

$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C}$ Es la ecuación de la recta normal a este plano y que pasa por el origen.

A, B, C Son los números directores de la recta.

α, β, γ Son los ángulos directores de la recta.

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \cos\beta &= \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \cos\gamma &= \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}\right\} \text{Son los cosenos directores de la recta.}$$

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ Es la ecuación de un plano que pasa por el punto $M(x_0, y_0, z_0)$

$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$ Es la ecuación de la recta normal a este plano y que pasa por $M(x_0, y_0, z_0)$

La ecuación de un plano también se puede expresar:

$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$ ó

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cdot x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cdot y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cdot z = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$ en la que

$p = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ es la distancia desde el origen de coordenadas al plano.

Dada la función $z = f(x,y)$ recordemos que su diferencial es:

$$dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy \qquad \text{ó}$$

$$dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y$$

Si se fija x_o e y_o queda determinado z_o por la función $z = f(x,y)$.

Si consideramos que $\Delta x = x - x_0$ y $\Delta y = y - y_0$ resultará $dz = z - z_0$.

Reemplazando en la expresión del diferencial tendremos:

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

que es la ecuación de un plano que pasa por el punto $M(x_0, y_0, z_0)$.

La intersección entre este plano y el plano $x = x_0$ es la recta:

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

Que es la recta tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $M(x_0, y_0, z_0)$ en la dirección del eje *0y*.

Análogamente la recta intersección entre el plano dado y el plano $y = y_0$ es la recta:

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0)$$

Que es la recta tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $M(x_0, y_0, z_0)$ en la dirección del eje *0x*.

Por lo tanto el plano definido es el **Plano tangente** a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $M(x_0, y_0, z_0)$

$$\boxed{z - z_0 = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0)}$$

Plano Tangente

La **Recta Normal** a la superficie en el punto $M(x_0, y_0, z_0)$ es:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{1}}$$

Recta Normal

$-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$; $-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$; 1 Son los números directores de la Recta Normal.

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{-\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right)^2+1}}\\
\cos\beta &= \frac{-\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right)^2+1}}\\
\cos\gamma &= \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right)^2+1}}
\end{aligned}\right\}\quad \text{Son los cosenos directores de la recta.}$$

Ejemplo:

Determinar las ecuaciones del Plano Tangente y la Recta Normal a la superficie $z = 9 - x^2 - y^2$ en el punto $M(1,2,4)$.

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cdot(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cdot(y-y_0)$$ **Plano Tangente**

$$z-4=\frac{\partial f(1,2)}{\partial x}\cdot(x-1)+\frac{\partial f(1,2)}{\partial y}\cdot(y-2)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=-2x \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial f(1,2)}{\partial x}=-2$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-2y \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial f(1,2)}{\partial y}=-4$$

$z-4=-2(x-1)-4(y-2)$ ó $\boxed{2x+4y+z=14}$ **Plano Tangente**

$$\frac{x-x_0}{-\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{-\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}}=\frac{z-z_0}{1}$$ **Recta Normal**

$$\boxed{\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-4}{1}}$$ **Recta Normal**

DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Consideremos que la función $z = f(x, y)$ es continua y tiene derivadas parciales también continuas, su Diferencial Total es:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad (1)$$

Si bien este Diferencial Total es válido aun si *x* e *y* no son variables independientes, para que tenga validez lo que veremos a continuación, consideraremos que *x* e *y* son variables independientes, y por lo tanto sus diferenciales, *dx* y *dy*, son constantes. Y también supondremos que las derivadas parciales de segundo orden de la función son continuas.

Diferenciando este Diferencial de la función obtendremos el Diferencial de Segundo Orden. Diferenciamos el diferencial (1):

$$d(dz) = d^2z = d\left[\frac{\partial z}{\partial x}dx\right] + d\left[\frac{\partial z}{\partial y}dy\right]$$

$$d^2z = d\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]dx + d\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]dy \qquad (2)$$

Como $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ son funciones de las variables independientes *x* e *y*, los diferenciamos:

$$d\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right] = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x}dx + \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dy$$

$$d\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right] = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}dx + \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y}dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy$$

Llevando lo obtenido a la expresión (2) resultará:

$$d^2z = \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dy\right]dx + \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right]dy$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

Como las Derivadas Parciales de Segundo Orden son continuas resulta $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, tendremos:

$$\boxed{d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2} \qquad \textbf{Diferencial de Segundo Orden} \qquad (3)$$

Este Diferencial de Segundo Orden puede representarse también mediante la siguiente formula simbólica:

$$\boxed{d^2 z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right)^{[2]}}$$

Diferencial de Segundo Orden

Diferenciando en forma sucesiva los Diferenciales de 2º Orden, 3º Orden, etc. obtendremos los Diferenciales de 3º Orden, 4º Orden, etc. respectivamente.

En general, cuando existen las correspondientes Derivadas Parciales, se verifica la siguiente fórmula simbólica:

$$\boxed{d^n z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right)^{[n]}}$$

Este exponente simbólico [n] indica orden de derivación para las Derivadas Parciales y exponente para los diferenciales.

Por ejemplo el Diferencial Total de Tercer Orden resulta:

$$\boxed{d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3}$$

<u>Ejemplo</u>:

Dada la función $z = x^4 \operatorname{sen} 5y$ tendremos que:

$$dz = 4x^3 \operatorname{sen} 5y dx + 5x^4 \cos 5y dy$$

$$d^2 z = 12x^2 \operatorname{sen} 5y dx^2 + 40x^3 \cos 5y dx dy - 25x^4 \operatorname{sen} 5y dy^2$$

$$d^3 z = 24x \operatorname{sen} 5y dx^3 + 180x^2 \cos 5y dx^2 dy - 300x^3 \operatorname{sen} 5y dx dy^2 - 125x^4 \cos 5y dy^3$$

DERIVACIÓN DE FUNCIONES COMPUESTAS

Supongamos que en la función escalar de variable vectorial:

$$z = f(x,y) \qquad (1) \qquad R^2 \xrightarrow{f} R$$

x e ***y*** son funciones vectoriales de variable vectorial cuyas variables independientes son ***u*** y ***v***:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u,v) \\ \\ y = \varphi_2(u,v) \end{cases} \qquad (2) \qquad R^2 \xrightarrow{\varphi} R^2$$

Es decir que ***z*** es una Función Compuesta de las variables independientes ***u*** y ***v***.
Las variables ***x*** e ***y*** reciben el nombre de variables intermedias.

Podemos expresar a ***z*** en función de las variables independientes ***u*** y ***v***:

$$z = f[\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)] \qquad (3) \qquad R^2 \xrightarrow{\varphi_o f} R$$

Calcularemos $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ a partir de las funciones (1) y (2), sin necesidad de recurrir a la función (3).

Consideremos que las funciones $f(x,y)$, $\varphi_1(u,v)$ y $\varphi_2(u,v)$ son continuas, al igual que sus derivadas parciales respecto a todas sus variables.

Si incrementamos a ***u*** en Δu, manteniendo constante la variable ***v***, en la función (2) tendremos que ***x*** e ***y*** resultarán incrementadas en $\Delta_u x$ y $\Delta_u y$ respectivamente.

Al resultar incrementadas ***x*** e ***y***, tendremos que en la función (1), ***z*** también recibirá un incremento Δz cuya expresión será:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta_u x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta_u y + \varepsilon_1 \Delta_u x + \varepsilon_2 \Delta_u y$$

Si dividimos todos los términos por Δu resultará:

$$\frac{\Delta z}{\Delta u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta_u x}{\Delta u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta_u y}{\Delta u} + \varepsilon_1 \frac{\Delta_u x}{\Delta u} + \varepsilon_2 \frac{\Delta_u y}{\Delta u}$$

Como consideramos continuas a las funciones $f(x,y)$, $\varphi_1(u,v)$ y $\varphi_2(u,v)$, tendremos que si $\Delta u \to 0$ también $\Delta_u x \to 0$ y $\Delta_u y \to 0$. Y en este caso también $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$.
Tomamos límite para $\Delta u \to 0$:

$$\lim_{\Delta u \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot \lim_{\Delta u \to 0}\frac{\Delta_u x}{\Delta u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot \lim_{\Delta u \to 0}\frac{\Delta_u y}{\Delta u} + \lim_{\Delta u \to 0}\varepsilon_1 \cdot \lim_{\Delta u \to 0}\frac{\Delta_u x}{\Delta u} + \lim_{\Delta u \to 0}\varepsilon_2 \cdot \lim_{\Delta u \to 0}\frac{\Delta_u y}{\Delta u}$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}}$$

De forma similar pero incrementando a ***v*** en Δv, manteniendo constante la variable ***u***, podremos obtener:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}}$$

Esta forma de derivar se conoce como **Regla de la Cadena**, y se puede generalizar para la derivación de funciones con un mayor número de variables.

En general dada la siguiente función compuesta:

$$z = f(y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, y_m) \qquad (1') \qquad R^m \xrightarrow{f} R$$

Donde $(y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, y_m)$ son funciones de las variables independientes $(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n)$:

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n) \\ y_2 = g_2(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n) \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ y_m = g_m(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n) \end{cases} \qquad (2') \qquad R^n \xrightarrow{G} R^m$$

En conclusión ***z*** es una función compuesta de las variables independientes $(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n)$ es decir $R^n \xrightarrow{Gof} R$.

Aplicando la Regla de la Cadena podemos calcular las derivadas parciales de la función con respecto a todas sus variables independientes:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial z}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{\partial z}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{\partial z}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial z}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{\partial z}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_2}$$

$$\bullet$$
$$\bullet$$
$$\bullet$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_n} = \frac{\partial z}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_n} + \frac{\partial z}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_n} + \cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{\partial z}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_n}$$

Puede suceder que una o más variables sean independientes e intermedias a la vez.

Consideremos a continuación como ejemplo el caso particular en que ***x*** es variable independiente e intermedia a la vez:

$$\omega = f(x, y, z) \qquad (1'') \qquad \qquad \begin{cases} y = g_1(x) \\ \\ z = g_2(x) \end{cases} \qquad (2'')$$

Finalmente ω es función de una sola variable independiente ***x***:

$$\omega = f[x, g_1(x), g_2(x)] \qquad (3")$$

Podemos calcular su derivada aplicando la Regla de la Cadena:

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{dz}{dx}$$

Y como resulta $\frac{dx}{dx} = 1$, entonces:

$\boxed{\frac{d\omega}{dx} = \frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{dz}{dx}}$ En esta expresión, $\frac{d\omega}{dx}$ y $\frac{\partial\omega}{\partial x}$ nos representan respectivamente:

$\frac{d\omega}{dx} =$ Derivada de la Función Compuesta (3").

$\frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$ Derivada de la función (1'').

<u>Ejemplos</u>:
Calcular las derivadas de las siguientes Funciones Compuestas

1. $z = x\cos 2y \qquad \begin{cases} x = uv \\ y = u^2 \operatorname{sen} v \end{cases}$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = v\cos 2y - 4xu\operatorname{sen} 2y . senv$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = u\cos 2y - 2xu^2 \operatorname{sen} 2y . \cos v$$

2. $\omega = (x - y)\operatorname{sen} z \qquad \begin{cases} y = \ln\frac{2}{x} \\ z = (3 - x)^2 \end{cases}$

$$\frac{d\omega}{dx} = \operatorname{sen} z + \frac{\operatorname{sen} z}{x} - 2(x - y)(3 - x)\cos z$$

DERIVACIÓN DE FUNCIONES IMPLÍCITAS

Sea la función:

$$g(x, y) = 0 \qquad (1)$$

Decimos que esta función (1) define implícitamente a la función:

$$y = f(x) \qquad (2)$$

Si:

$$g[x, f(x)] = 0$$

Teorema de existencia y derivabilidad de Funciones Implícitas

Si $g(x, y) = 0$ es una función continua en cierto dominio que contiene un punto (x_0, y_0), donde se verifica que:

- $g(x_0, y_0) = 0$
- $\frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial g}{\partial y}$ existen y son continuas en un entorno de dicho punto.
- $\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$

Entonces la función $g(x, y) = 0$ define implícitamente que ***y*** es función de ***x***, y además $g(x, y) = 0$ es derivable.

Lo definido se cumple también para las condiciones de existencia y derivabilidad de Funciones Implícitas con un mayor número de variables.

El problema a resolver consiste en calcular las derivadas de la función (2) pero a partir de la (1), ya que disponiendo de esta última no siempre será posible explicitarla.

De acuerdo al tipo de funciones y a la cantidad de variables que se pueden presentar, dividimos el tema en cuatro casos:

1º CASO

Sea la función $\qquad g(x, y) = 0 \qquad R^{1+1} \xrightarrow{g} R \qquad (1)$

Que define implícitamente a la función:

$$y = f(x) \qquad R \xrightarrow{f} R \qquad (2)$$

Calcularemos la derivada de la función (2), es decir $\frac{dy}{dx}$, a partir de la Función Implícita (1).

Consideremos a las funciones (1) y (2) como Funciones Compuestas y derivemos con respecto a "x" aplicando la Regla de la Cadena:

$$g(x, y) = 0 \qquad \begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

Dado que $\frac{dx}{dx}=1$, entonces:

$$\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

Las derivadas parciales $\frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial g}{\partial y}$ se pueden calcular utilizando la Función Implícita (1), por lo tanto despejando nuestra incógnita $\frac{dy}{dx}$ tendremos:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}}$$

Debiendo comprobarse como condición que $\frac{\partial g}{\partial y}\neq 0$.

Ejercicios

Calcular $\frac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones:

1. $6y^2-y-x^2=0$ Rta.: $\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{12y-1}$
2. $y(x^2-3)-x=0$ Rta.: $\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy-1}{x^2-3}$
3. $x^2\operatorname{sen} y+y^3=0$ Rta.: $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x\operatorname{sen} y}{x^2\cos y+3y^2}$

2º CASO

Sea la función $g(x,y,z)=0$ $R^{2+1}\xrightarrow{g}R$ (1)

Que define implícitamente a la función:

$z=f(x,y)$ $R^2\xrightarrow{f}R$ (2)

Calcularemos las derivadas de la función (2), es decir $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, a partir de la Función Implícita (1).

Consideremos a las funciones (1) y (2) como Funciones Compuestas y derivemos aplicando la Regla de la Cadena:

$$g(x,y,z)=0 \qquad \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y) \end{cases}$$

a) Calculamos $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ derivando con respecto a "*x*":

$$\frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

Dado que $\dfrac{dx}{dx}=1$ y $\dfrac{dy}{dx}=0$ entonces:

$$\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

Las derivadas parciales $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial g}{\partial z}$ se pueden calcular utilizando la Función Implícita (1), por lo tanto despejando nuestra incógnita $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ tendremos:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x}}{\dfrac{\partial g}{\partial z}}}$$

b) Calculamos ahora $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ repitiendo el procedimiento pero derivando con respecto a "*y*":

$$\frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dy}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dy}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

Dado que $\dfrac{dx}{dy}=0$ y $\dfrac{dy}{dy}=1$ entonces:

$$\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

Las derivadas parciales $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial g}{\partial z}$ se pueden calcular utilizando la Función Implícita (1), por lo tanto despejando nuestra incógnita $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ tendremos:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial g}{\partial y}}{\dfrac{\partial g}{\partial z}}}$$

Debiendo comprobarse en ambos casos como condición que $\dfrac{\partial g}{\partial z}\neq 0$.

Y en general para Funciones Implícitas con un mayor número de variables independientes será:

Dada la función $g(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n, y) = 0$ $\quad R^{n+1} \xrightarrow{g} R$ (1)

Que define implícitamente a la función:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n) \qquad R^n \xrightarrow{f} R \qquad (2)$$

Tendremos que las derivadas parciales de la función (2) con respecto a sus variables independientes $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots x_n)$ serán de la forma:

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial g}{\partial y}}}$$

Debiendo comprobarse en todos los casos como condición que $\dfrac{\partial g}{\partial y} \neq 0$.

<u>Ejemplo</u>

Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ en la siguiente Función Implícita:

$$y^2 z + xz + xy = 0$$

Rta.: $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{z+y}{y^2+x} \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{2yz}{y^2+x} \end{cases}$

<u>3º CASO</u>

Sea el sistema de funciones: $\begin{cases} g_1(x,y,z) = 0 \\ \\ g_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$ (1)

Que define implícitamente a las funciones:

$$\begin{cases} y = f_1(x) \\ \\ z = f_2(x) \end{cases} \qquad R \longrightarrow R^2 \qquad (2)$$

Calcularemos las derivadas de las funciones (2), es decir $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{dz}{dx}$, a partir de la Función Implícita (1).

Consideremos a las funciones (1) y (2) como Funciones Compuestas y derivemos con respecto a “*x*” aplicando la Regla de la Cadena:

$$\begin{cases} g_1(x,y,z)=0 \\ \\ g_2(x,y,z)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=x \\ y=f_1(x) \\ z=f_2(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_1}{\partial x}\dfrac{dx}{dx}+\dfrac{\partial g_1}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial g_1}{\partial z}\dfrac{dz}{dx}=0 \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x}\dfrac{dx}{dx}+\dfrac{\partial g_2}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial g_2}{\partial z}\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $\dfrac{dx}{dx}=1$ y reordenando términos obtendremos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_1}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial g_1}{\partial z}\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{\partial g_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial g_2}{\partial z}\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{\partial g_2}{\partial x} \end{cases}$$

Nos queda formado un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas ($\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{dz}{dx}$), pues las derivadas parciales de las funciones g_1 y g_2 pueden ser calculadas utilizando las Funciones Implícitas (1).
Podemos resolver este sistema aplicando la Regla de Cramer:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\begin{vmatrix} -\dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial z} \\ -\dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y} & \dfrac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y} & \dfrac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix}}$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & -\dfrac{\partial g_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y} & -\dfrac{\partial g_2}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y} & \dfrac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y} & \dfrac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix}}$$

El determinante de los denominadores está formado por los coeficientes de las incógnitas, y recibe el nombre de **Determinante Jacobiano** de las funciones g_1 y g_2 respecto de las variables y y z.

Este Determinante Jacobiano es el determinante que está formado por las derivadas parciales de las funciones cuyas filas están definidas por las funciones y sus columnas por las variables con respecto a las que se derivan estas funciones.

Y se lo simboliza así:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix} = J\left(\frac{g_1, g_2}{y, z}\right) = \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(y, z)}$$

Si este determinante no se anula, entonces el sistema de ecuaciones tiene solución única.

Podemos utilizar una notación similar para los otros jacobianos:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix} = J\left(\frac{g_1, g_2}{x, z}\right) = \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x, z)} \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial x} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial x} \end{vmatrix} = J\left(\frac{g_1, g_2}{y, x}\right) = \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(y, x)}$$

Finalmente las derivadas de las Funciones Implícitas se pueden expresar en forma resumida:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{J\left(\frac{g_1, g_2}{x, z}\right)}{J\left(\frac{g_1, g_2}{y, z}\right)}}$$

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = -\frac{J\left(\frac{g_1, g_2}{y, x}\right)}{J\left(\frac{g_1, g_2}{y, z}\right)}}$$

Debiendo comprobarse como condición que $J\left(\frac{g_1, g_2}{y, z}\right) \neq 0$

<u>Ejemplo</u>

Calcular $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dz}{dx}$ si:

$$\begin{cases} 3x^3z^2 - 6y^2 - 5 = 0 \\ 9xy + z^3 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{J\left(\frac{g_1, g_2}{x, z}\right)}{J\left(\frac{g_1, g_2}{y, z}\right)} = -\frac{\begin{vmatrix} 9x^2z^2 & 6x^3z \\ 9y & 3z^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -12y & 6x^3z \\ 9x & 3z^2 \end{vmatrix}} = -\frac{27x^2z^4 - 54x^3yz}{-36yz^2 - 54x^4z} = \frac{3x^2z^3 - 6x^3y}{4yz + 6x^4}$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{J\left(\frac{g_1, g_2}{y, x}\right)}{J\left(\frac{g_1, g_2}{y, z}\right)} = -\frac{\begin{vmatrix} -12y & 9x^2z^2 \\ 9x & 9y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -12y & 6x^3z \\ 9x & 3z^2 \end{vmatrix}} = -\frac{-108y^2 - 81x^3z^2}{-36yz^2 - 54x^4z} = -\frac{12y^2 + 9x^3z^2}{4yz + 6x^4}$$

4º CASO

Sea el sistema de funciones: $\begin{cases} g_1(x,y,u,v)=0 \\ \\ g_2(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ (1)

Que define implícitamente a las funciones:

$$\begin{cases} u = f_1(x,y) \\ \\ v = f_2(x,y) \end{cases} \qquad R^2 \longrightarrow R^2 \qquad (2)$$

Debemos calcular las derivadas de las funciones (2), es decir $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$, a partir de la Función Implícita (1).

Consideramos a las funciones (1) y (2) como Funciones Compuestas y derivamos aplicando la Regla de la Cadena:

$$\begin{cases} g_1(x,y,u,v)=0 \\ g_2(x,y,u,v)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x \\ y = y \\ u = f_1(x,y) \\ v = f_2(x,y) \end{cases}$$

a) Calculamos $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial x}$ derivando con respecto a "x":

$$\begin{cases} \frac{\partial g_1}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial g_1}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial g_1}{\partial u}\frac{\partial u}{dx} + \frac{\partial g_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial g_2}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial g_2}{\partial u}\frac{\partial u}{dx} + \frac{\partial g_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $\frac{dx}{dx}=1$ y $\frac{dy}{dx}=0$, y reordenando términos obtendremos:

$$\begin{cases} \frac{\partial g_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial g_1}{\partial x} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial g_2}{\partial x} \end{cases}$$

Nos queda formado un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas ($\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial x}$), pues las derivadas parciales de las funciones g_1 y g_2 pueden ser calculadas utilizando las Funciones Implícitas (1').
Resolviendo este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas obtenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix} -\dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v} \\ -\dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial v}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & \dfrac{\partial g_2}{\partial v}\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial v}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & \dfrac{\partial g_2}{\partial v}\end{vmatrix}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{J\left(\dfrac{g_1,g_2}{x,v}\right)}{J\left(\dfrac{g_1,g_2}{u,v}\right)}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial u} & -\dfrac{\partial g_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & -\dfrac{\partial g_2}{\partial x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & \dfrac{\partial g_2}{\partial v}\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & \dfrac{\partial g_2}{\partial v}\end{vmatrix}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{J\left(\dfrac{g_1,g_2}{u,x}\right)}{J\left(\dfrac{g_1,g_2}{u,v}\right)}}$$

b) Calculamos ahora $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ repitiendo el procedimiento pero derivando con respecto a "*y*":

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_1}{\partial x}\dfrac{dx}{dy}+\dfrac{\partial g_1}{\partial y}\dfrac{dy}{dy}+\dfrac{\partial g_1}{\partial u}\dfrac{\partial u}{dy}+\dfrac{\partial g_1}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x}\dfrac{dx}{dy}+\dfrac{\partial g_2}{\partial y}\dfrac{dy}{dy}+\dfrac{\partial g_2}{\partial u}\dfrac{\partial u}{dy}+\dfrac{\partial g_2}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $\dfrac{dx}{dy}=0$ y $\dfrac{dy}{dy}=1$, y reordenando términos obtendremos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_1}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial g_1}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{\partial g_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial g_2}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{\partial g_2}{\partial y} \end{cases}$$

Nos queda formado un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas ($\dfrac{\partial u}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial v}{\partial y}$), pues las derivadas parciales de las funciones g_1 y g_2 pueden ser calculadas utilizando las Funciones Implícitas (1').
Resolviendo este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas obtenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix}-\frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial v}\\ -\frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial v}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v}\\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v}\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial v}\\ \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial v}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v}\\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v}\end{vmatrix}}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{J\left(\frac{g_1,g_2}{y,v}\right)}{J\left(\frac{g_1,g_2}{u,v}\right)}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial u} & -\frac{\partial g_1}{\partial y}\\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & -\frac{\partial g_2}{\partial y}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v}\\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v}\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial y}\\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial y}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v}\\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v}\end{vmatrix}}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{J\left(\frac{g_1,g_2}{u,y}\right)}{J\left(\frac{g_1,g_2}{u,v}\right)}}$$

Debiendo comprobarse en todos los casos como condición que $J\left(\frac{g_1,g_2}{u,v}\right)\neq 0$.

Y en general para el caso de Funciones Implícitas con un mayor número de variables sus derivadas parciales correspondientes se obtienen de forma similar.

Ejemplo

Calcular $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$, siendo:
$$\begin{cases} 2uv^2-x^4y^2+8=0\\ 4x^2u+2v-5=0\end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{J\left(\frac{g_1,g_2}{x,v}\right)}{J\left(\frac{g_1,g_2}{u,v}\right)}=-\frac{\begin{vmatrix}-4x^3y^2 & 4uv\\ 8xu & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2v^2 & 4uv\\ 4x^2 & 2\end{vmatrix}}=-\frac{-8x^3y^2-32xu^2v}{4v^2-16x^2uv}=\frac{4x^3y^2+16xu^2v}{2v^2-8x^2uv}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{J\left(\frac{g_1,g_2}{y,v}\right)}{J\left(\frac{g_1,g_2}{u,v}\right)}=-\frac{\begin{vmatrix}-2x^4y & 4uv\\ 0 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2v^2 & 4uv\\ 4x^2 & 2\end{vmatrix}}=-\frac{-4x^4y}{4v^2-16x^2uv}=\frac{2x^4y}{2v^2-8x^2uv}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{J\left(\frac{g_1,g_2}{u,x}\right)}{J\left(\frac{g_1,g_2}{u,v}\right)}=-\frac{\begin{vmatrix}2v^2 & -4x^3y^2\\ 4x^2 & 8xu\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2v^2 & 4uv\\ 4x^2 & 2\end{vmatrix}}=-\frac{16xuv^2+16x^5y^2}{4v^2-16x^2uv}=\frac{4xuv^2+4x^5y^2}{4x^2uv-v^2}$$

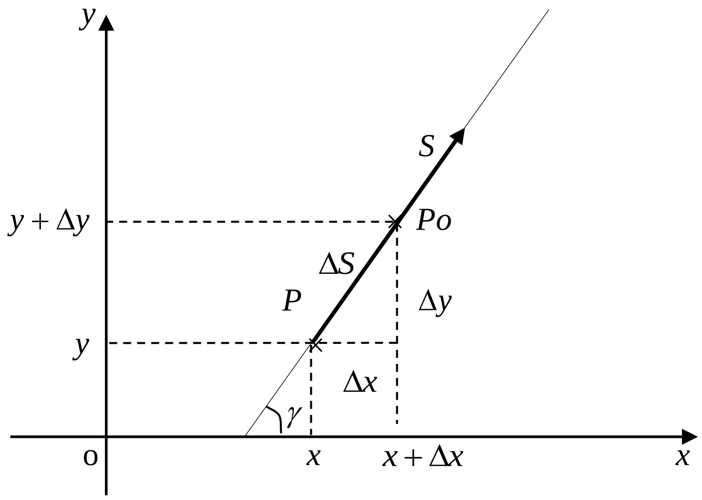
$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{J\left(\frac{g_1,g_2}{u,y}\right)}{J\left(\frac{g_1,g_2}{u,v}\right)}=-\frac{\begin{vmatrix}2v^2 & -4x^4y\\ 4x^2 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2v^2 & 4uv\\ 4x^2 & 2\end{vmatrix}}=-\frac{16x^6y}{4v^2-16x^2uv}=\frac{4x^6y}{4x^2uv-v^2}$$

DERIVADA DIRECCIONAL

Consideremos la función $z = f(x, y)$ definida en un dominio *D* que contiene al punto $P(x, y)$. Por este punto tracemos un vector *S* que forma con el eje 0*x* un ángulo γ.

Tomemos otro punto $P_0(x + \Delta x, y + \Delta y)$ sobre la dirección del mismo vector *S* a una distancia ΔS de su origen.

$$\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$



Consideremos que la función $z = f(x, y)$ es continua y tiene Derivadas Parciales también continuas en el dominio *D*. El Incremento Total de la función será:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

Donde $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$ (es decir cuando $\Delta S \to 0$).

Dividamos ambos miembros por ΔS:

$$\frac{\Delta z}{\Delta S} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta S} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta S} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta S} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta S}$$

Si analizamos el gráfico comprobamos que:

$$\frac{\Delta x}{\Delta S} = \cos\gamma \qquad \text{y} \qquad \frac{\Delta y}{\Delta S} = \operatorname{sen}\gamma \qquad \text{reemplazamos:}$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta S} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\gamma + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}\gamma + \varepsilon_1 \cos\gamma + \varepsilon_2 \operatorname{sen}\gamma$$

Tomamos límite en ambos miembros para $\Delta S \to 0$:

$$\lim_{\Delta S \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \to 0}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\gamma + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}\gamma + \varepsilon_1 \cos\gamma + \varepsilon_2 \operatorname{sen}\gamma\right)$$

El límite de la razón $\dfrac{\Delta z}{\Delta S}$ para $\Delta S \to 0$ es la derivada de la función $z = f(x, y)$ en el punto $P(x, y)$ siguiendo la dirección del vector S y se simboliza $\dfrac{\partial z}{\partial S}$, es decir:

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta S} = \frac{\partial z}{\partial S} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial S} = \frac{\partial f}{\partial S} = f'_\gamma(x, y) = f'_\gamma = D_\gamma f(x, y)$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial S} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\gamma + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}\gamma} \qquad \text{ó} \qquad \boxed{f'_\gamma(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\cos\gamma + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\operatorname{sen}\gamma}$$

Como vemos, conociendo las Derivadas Parciales, resulta fácil hallar la derivada siguiendo cualquier dirección.

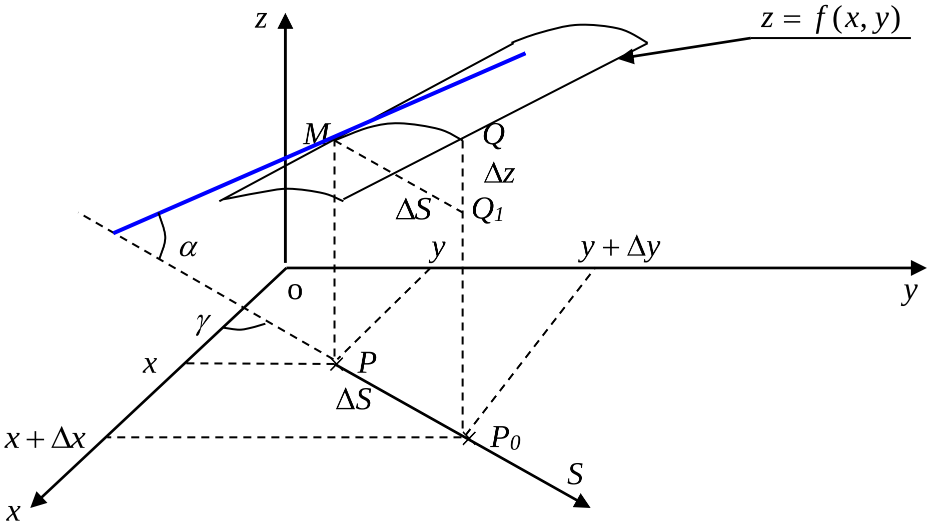
Las propias Derivadas Parciales se presentan como casos particulares de Derivada Direccional.
Si derivamos en la dirección $\gamma = 0^\circ$ tendremos:

$$f'_{0^\circ}(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}\cos 0^\circ + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen} 0^\circ = \frac{\partial z}{\partial x}$$

Y si derivamos en la dirección $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$ tendremos:

$$f'_{\frac{\pi}{2}}(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Interpretación Geométrica de la Derivada Direccional



$$f'_\gamma(x, y) = \frac{\partial z}{\partial S} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta S} = \operatorname{tg}\alpha$$

La derivada de la función $z = f(x, y)$ en el punto $P(x, y)$ siguiendo la dirección del vector S es igual a la pendiente de la recta tangente a la superficie, en el punto considerado, en la dirección de dicho vector.

Ejemplo 1

Sea la función $z = x^2 + y^2 + xy$, hallar su derivada en el punto $P(1,2)$ según la dirección $\gamma = \frac{\pi}{4}$.

$$f'_{\frac{\pi}{4}}(x,y) = (2x+y)\cos\frac{\pi}{4} + (2y+x)\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$$

$$f'_{\frac{\pi}{4}}(x,y) = (2x+y)\frac{\sqrt{2}}{2} + (2y+x)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

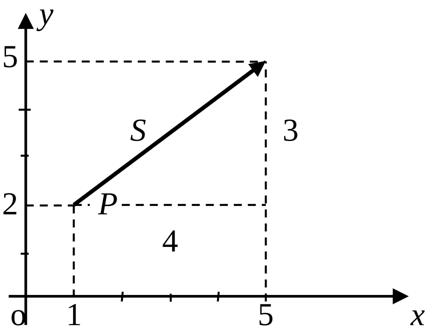
Y en el punto $P(1,2)$ la derivada resultará:

$$f'_{\frac{\pi}{4}}(1,2) = (2+2)\frac{\sqrt{2}}{2} + (4+1)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{f'_{\frac{\pi}{4}}(1,2) = \frac{9\sqrt{2}}{2}}$$

Ejemplo 2

Dada la función $z = x^5 - 5y^2$, hallar su derivada en el punto $P(1,2)$ según la dirección del vector $S = 4i + 3j$



$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial S} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cos\gamma + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\operatorname{sen}\gamma$$

$$\cos\gamma = \frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{4}{5}$$

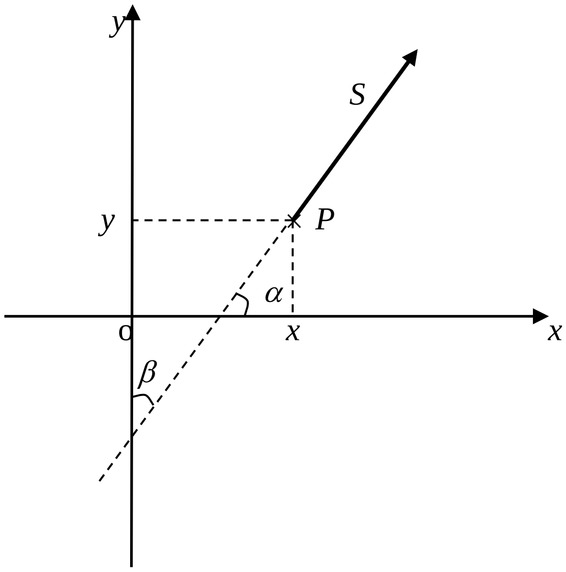
$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{3}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial S} = 5x^4\frac{4}{5} + (-10y)\frac{3}{5} = 4x^4 - 6y$$

Y en el punto $P(1,2)$:

$$\boxed{\frac{\partial f(1,2)}{\partial S} = -8}$$

También podemos expresar la Derivada Direccional en función de los cosenos directores.
La derivada de la función $z = f(x, y)$,
en el punto P(x,y) en la dirección del vector S indicado en el gráfico, es igual a:



$$\frac{\partial z}{\partial S} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}\alpha$$

Si analizamos el gráfico veremos que:

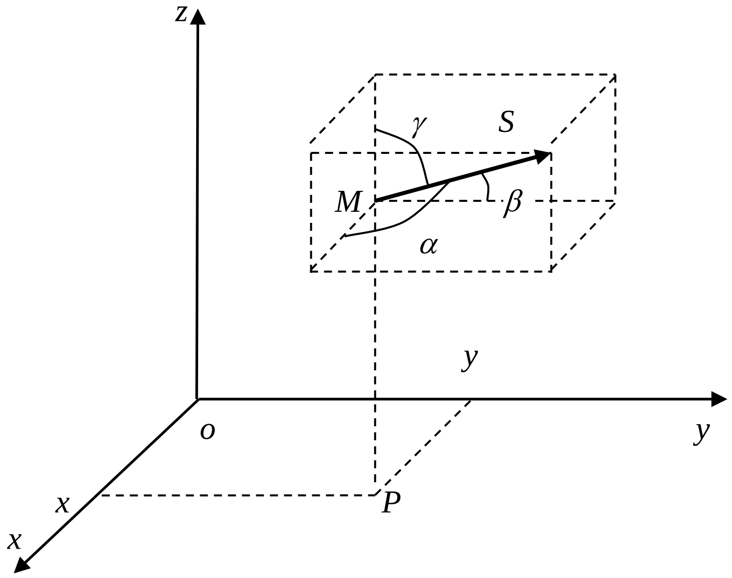
$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$$

y reemplazando en la expresión de la
Derivada Direccional tendremos:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial S} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta}$$

Y en el caso de una función de tres variables independientes:

$$u = f(x, y, z)$$



La derivada de esta función en el punto $M(x, y, z)$ en la dirección del vector S será:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma}$$

α, β, γ son los ángulos directores de la dirección y $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ los cosenos directores correspondientes.

Ejemplo:

Calculemos la derivada de la función $u = 2x^2 + y^2 - 3z^2$ en el punto $M(7,2,1)$, en la dirección del vector $S = 6i + 3j + 2k$.

Determinemos los cosenos directores del vector S

$$\cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{6}{7}$$

$$\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{3}{7}$$

$$\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = 4x \cdot \frac{6}{7} + 2y \cdot \frac{3}{7} - 6z \cdot \frac{2}{7}$$

Y en el punto $M(7,2,1)$:

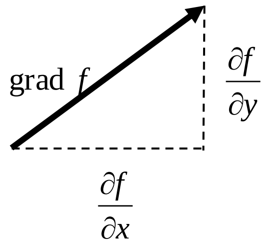
$$\frac{\partial u(7,2,1)}{\partial S} = 28 \cdot \frac{6}{7} + 4 \cdot \frac{3}{7} - 6 \cdot \frac{2}{7} = 24$$

$$\frac{\partial u(7,2,1)}{\partial S} = 24$$

GRADIENTE

En cada punto del dominio *D* en el que está definida la función $z = f(x,y)$, determinemos un vector cuyas proyecciones sobre los ejes coordenados son los valores de las Derivadas Parciales de la función en el punto correspondiente:

$$\boxed{\text{grad} f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} i + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} j} \qquad \text{o} \qquad \boxed{\text{grad } z = \frac{\partial z}{\partial x} i + \frac{\partial z}{\partial y} j = \left[\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right]}$$



Este vector recibe el nombre de **Gradiente** de la función $z = f(x,y)$ en el punto de coordenadas (x,y), y se lo simboliza de la siguiente manera:

$$\text{grad} f(x,y) = \text{grad } f = \text{grad } z = \nabla . f(x,y) = \nabla . f = \nabla . z$$

Ejemplo

Dada la función $z = x^2 + xy + y$, calcular su Gradiente en el punto $P(3,2)$.

$$\text{grad} f(x,y) = (2x + y)i + (x+1)j$$

$$\text{grad} f(3,2) = 8i + 4j$$

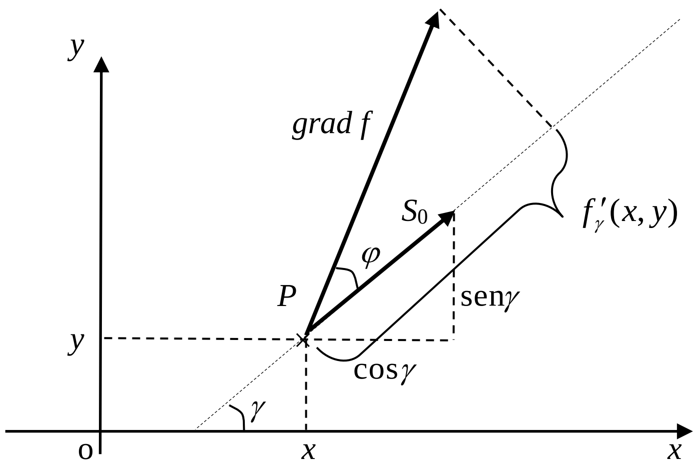
Propiedades del Gradiente de una función

Las propiedades que definiremos a continuación establecen la relación existente entre la Derivada Direccional y el Gradiente de una función:

1. *"La Derivada de la función $z = f(x,y)$ en el punto $P(x,y)$ según la dirección γ, es igual al producto escalar del vector Gradiente de esta función en el punto dado por el vector unitario S_0 correspondiente a esta dirección. Es decir, es igual a la proyección del vector Gradiente sobre el vector S_0".*

$$|S_0| = 1$$

$$S_0 = \cos\gamma \, i + \text{sen}\gamma \, j$$



Realicemos ahora el producto escalar enunciado:

$$\text{grad} f(x,y).S_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j\right)(\cos\gamma\, i + \text{sen}\gamma\, j)$$

$$\text{grad} f(x,y).S_0 = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\gamma + \frac{\partial f}{\partial y}\text{sen}\gamma$$

El segundo miembro es la expresión de la derivada de la función $z = f(x,y)$ en la dirección γ, con lo que queda demostrada la primera parte de la propiedad:

$$\boxed{f'_\gamma(x,y) = \text{grad} f(x,y).S_0}$$

Demostremos ahora la segunda parte de la propiedad, es decir que la Derivada Direccional es igual a la proyección del vector Gradiente sobre el vector S_0.

$$f'_\gamma(x,y) = \text{grad} f(x,y) S_0 = |\text{grad } f(x,y)| \cdot |S_0| \cos\varphi$$

y como $|S_0| = 1$ finalmente resulta:

$$\boxed{f'_\gamma(x,y) = |\text{grad } f(x,y)|\cos\varphi} \qquad (1)$$

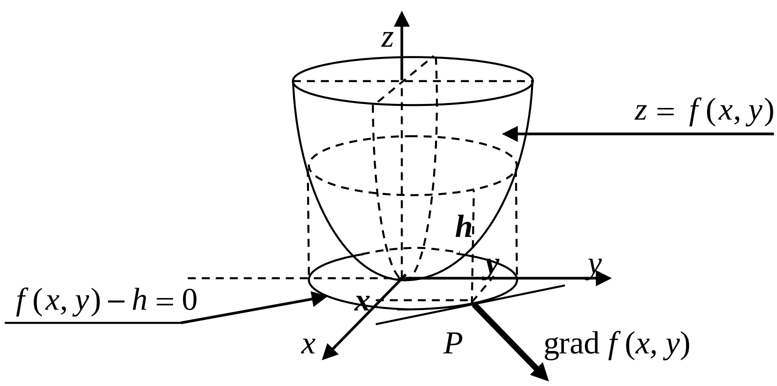
Con lo que queda demostrada la segunda parte de esta propiedad. De esta igualdad podemos deducir la propiedad fundamental del Gradiente de una función:

"En cada punto P(x,y) el vector Gradiente de la función $z = f(x,y)$ indica la dirección según la cual la Derivada Direccional $f'_\gamma(x,y)$ es máxima".

En efecto, se observa en la igualdad (1) que si la dirección γ coincide con la del vector Gradiente (es decir $\varphi = 0$, o sea $\cos\varphi = 1$) el segundo miembro de la expresión toma el valor máximo. En conclusión el valor máximo de la Derivada Direccional resulta:

$$\boxed{f'_\gamma(x,y) = |\text{grad } f(x,y)|} \qquad \text{o} \qquad f'_\gamma(x,y) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

2. *"En cada punto $P(x,y)$ el vector Gradiente está dirigido según la Normal en ese punto a la Línea de Nivel de la superficie $z = f(x,y)$".*
   En efecto, consideremos que en el punto $P(x,y)$ la función $z = f(x,y)$ toma el valor *h*.



La Línea de Nivel correspondiente estará definida por :

$h = f(x, y)$ o $f(x, y) - h = 0$

Si la derivamos, considerándola como función implícita:
$f(x, y) - h = 0$ siendo $y = g(x)$ tendremos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Por lo tanto la pendiente de la recta tangente a la Línea de Nivel será:

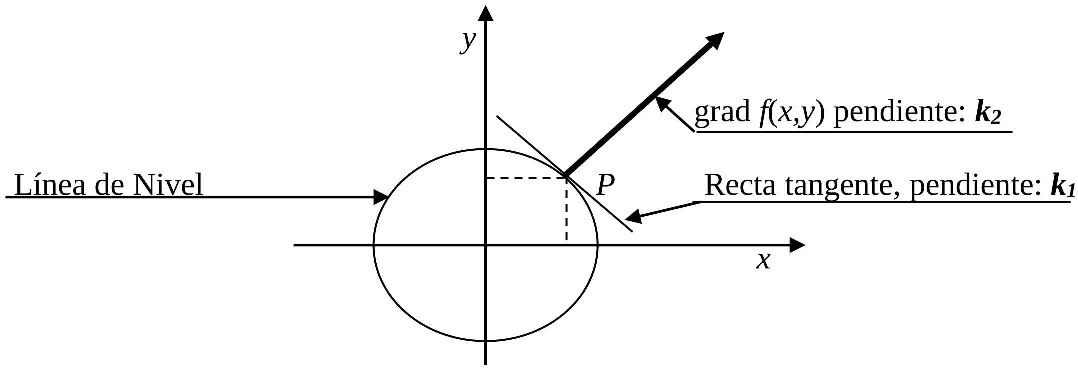
$$\boxed{k_1 = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}}$$

En tanto que el coeficiente angular del Gradiente es:

$$\boxed{k_2 = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}}$$

Por lo tanto resulta: $k_1 \cdot k_2 = -1$

Con lo que queda demostrado que el vector Gradiente es normal a la recta tangente a la Línea de Nivel en el punto considerado.



3. *"La derivada de la función , en el punto* $P(x, y)$ *, en la dirección de la recta tangente a la Línea de Nivel en dicho punto, es igual a cero".*

En efecto, recordemos la igualdad (1):

$$f'_\gamma(x,y) = |\text{grad } f(x, y)| \cos\varphi$$

Si calculamos la derivada en la dirección de la recta tangente a la Línea de Nivel será:

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ es decir $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ por lo tanto resulta:

$$f'_\gamma(x,y) = 0$$

Ejemplo:
En el ejemplo anterior calculamos el gradiente de la función $z = x^2 + xy + y$, en el punto $P(3,2)$ y resultó:

$$\text{grad} f(3,2) = 8i + 4j$$

Ahora bien obtendremos el máximo valor de la Derivada Direccional de esta función en el punto considerado si la derivamos en la dirección del Vector Gradiente:

Valor máximo de la Derivada Direccional: $f'_\gamma(3,2) = |\text{grad} f(3,2)| = \sqrt{8^2 + 4^2} \cong 8{,}944$

Gradiente de una función de tres variables independientes

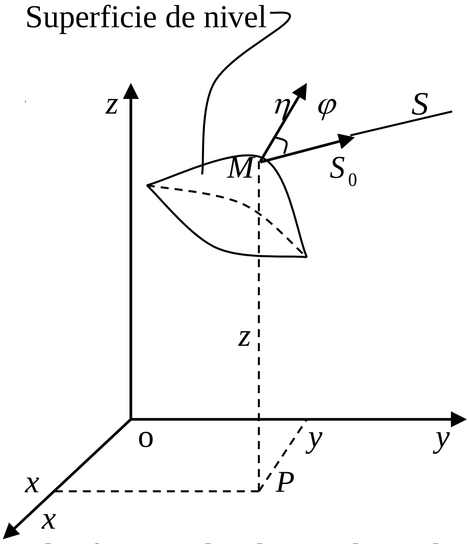
Para la función: $u = f(x, y, z)$

Su Gradiente resulta:

$$\boxed{\text{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k = \left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right]}$$

Todo lo demostrado para funciones de dos variables independientes puede ser ampliado para el Gradiente de funciones de tres variables independientes.

En este caso tendremos que:
En cada punto M(x, y, z) el vector Gradiente de la función $u = f(x, y, z)$ indica la dirección en la cual la Derivada Direccional es máxima. Y está dirigido según la Normal en ese punto a la Superficie de Nivel de la función $u = f(x, y, z)$.



Recordemos que la derivada de $u = f(x, y, z)$ en el punto $M(x, y, z)$ en la dirección S es:

$$\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

α, β, γ son los ángulos directores de la dirección S.

$$\frac{\partial u}{\partial S} = \text{grad}\, u.S_0 = \nabla u.S_0$$

S_0 es el vector unitario en la dirección S.

El máximo valor de esta derivada es en la dirección de la normal a la superficie de nivel en este punto. Si llamamos η al versor que señala esa dirección resultará:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \text{grad}\, u.\eta = |\text{grad}\, u|.|\eta|\cos\varphi = |\text{grad} u|$$

Siendo: $|\eta| = 1$; $\varphi = 0$ y $\cos\varphi = 1$

Y el valor máximo de la derivada será:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = |\text{grad}\, u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

Retomaremos este tema en el Capítulo nº 7.