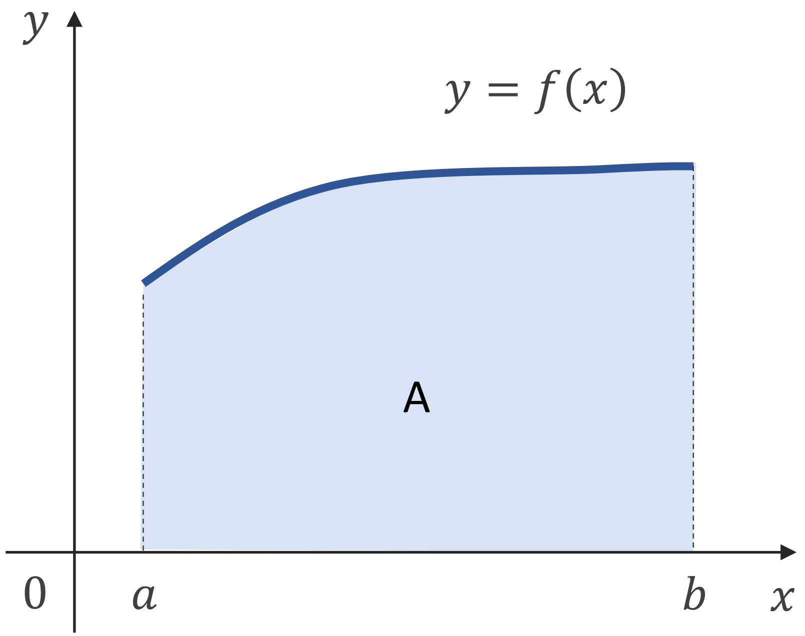
Análisis Matemático II

Integrales Múltiples

Integrales múltiples



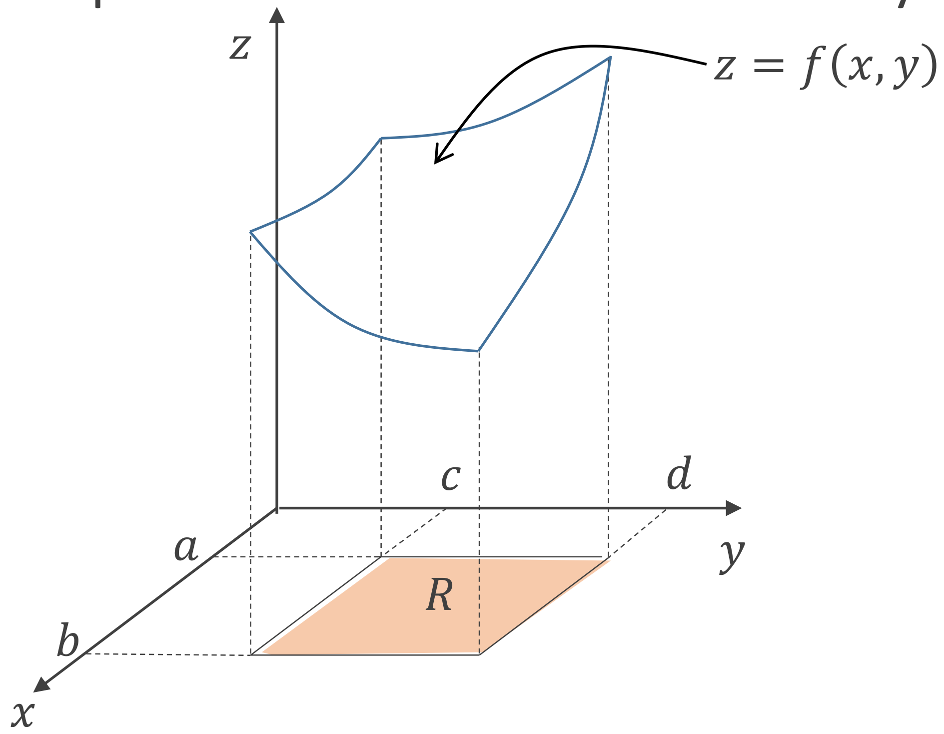
$$A = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

El concepto de Integral Definida, aplicada a funciones escalares, es un concepto que puede extenderse fácilmente a campos escalares. Así como las integrales definidas permiten calcular áreas, por medio de integrales múltiples podremos obtener volúmenes, centros de gravedad, centros de masa, momentos de inercia, etc.

Integrales múltiples

Integrales Dobles en dominios rectangulares

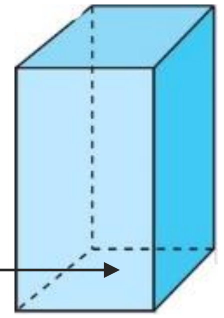
Vamos a obtener el volumen total de una función $z = f(x, y)$ definida sobre una región rectangular de integración $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$ como una integral doble. Si la superficie de la cara superior del cuerpo fuese un plano horizontal $(z = cte)$, el cuerpo tendría una altura constante y su volumen se expresaría:



$$V = S_B \cdot h$$

altura

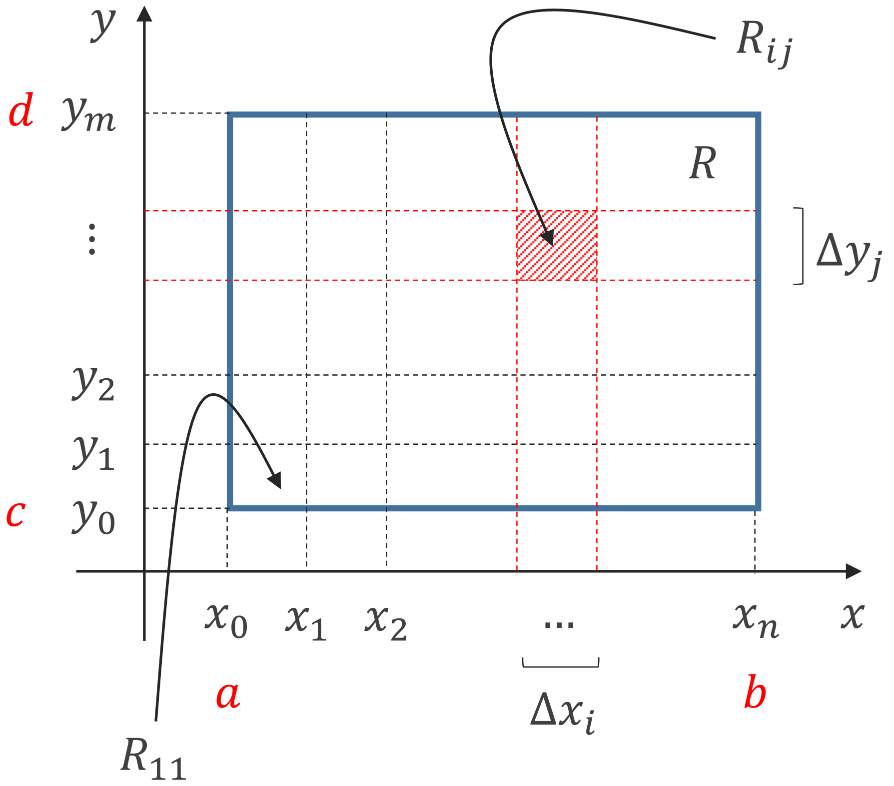
superficie de la base



Pero, si observamos la gráfica, la altura es variable y corresponde al valor de la función $z = f(x, y)$

Integrales múltiples

Subdividamos el intervalo $[a, b]$ en n partes (particiones) $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ y el intervalo $[c, d]$ en m partes $c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$.



Si $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, el área del subrectángulo R_{ij} vendrá dada por $\Delta x_i \cdot \Delta y_j = \Delta A_{ij}$.

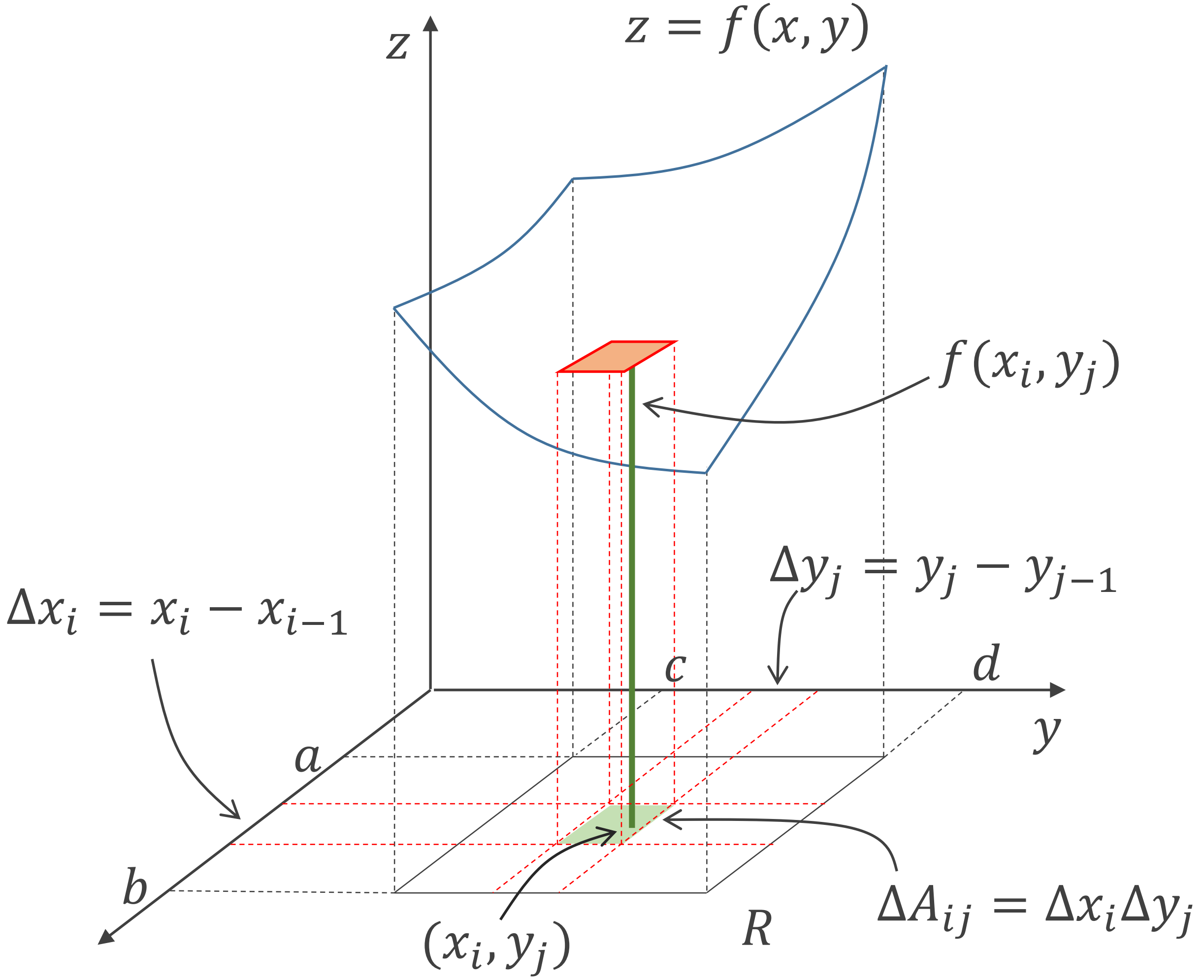
Sea (x_i, y_j) un punto interior al subrectángulo R_{ij} que tiene una **altura promedio** $f(x_i, y_i)$ en el subrectángulo, entonces:

$V_{ij} = f(x_i, y_i) \cdot \Delta A_{ij}$

es el volumen del cuerpo de base ΔA_{ij} y altura $f(x_i, y_i)$.

Gráficamente:

Integrales múltiples



Formemos la **Suma Doble de Riemann**:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j) \cdot \Delta A_{ij}$$

Cada término de la suma es el volumen de un sólido de base ΔA_{ij} y altura $f(x_i, y_j)$ y el valor de esta suma es el volumen aproximado del cuerpo.

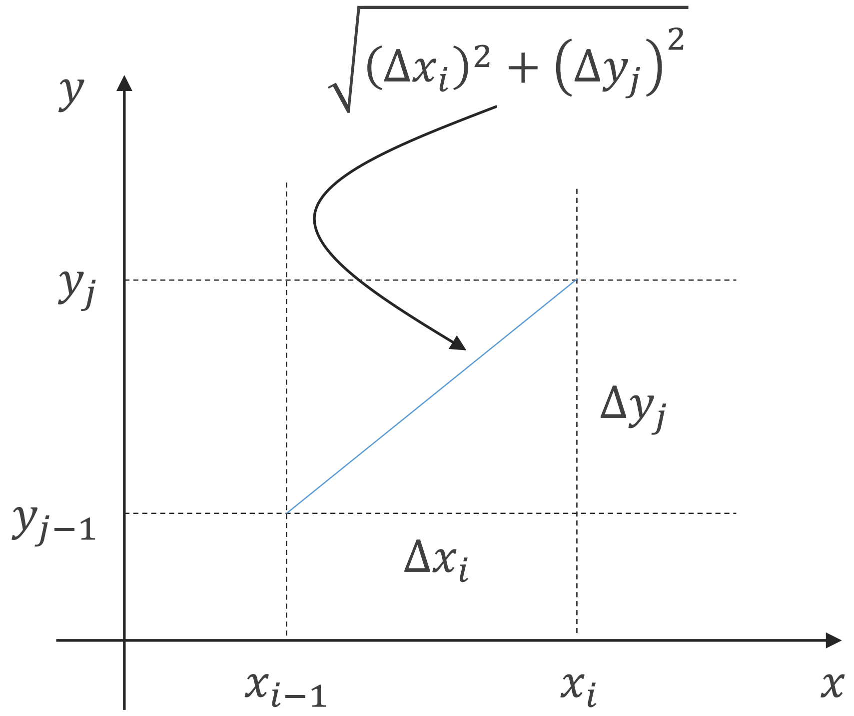
Para cada subrectángulo, como se puede ver en la siguiente figura, la diagonal mide

$$\sqrt{(\Delta \boldsymbol{x}_i)^2 + (\Delta \boldsymbol{y}_j)^2}$$

Definiremos el concepto de norma:

Integrales múltiples

Se llama norma de la partición y se designa $\|P\|$ a la mayor diagonal de los subrectángulos:



$$\|P\| = \max \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2}$$

Pero si

$$\left.\begin{array}{l} m \to \infty \\ n \to \infty \end{array}\right] \Rightarrow \|P\| \to 0$$

Entonces podemos dar la siguiente definición:

$$V = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j) \cdot \Delta A_{ij}$$

Si este límite existe, es la integral doble de la función $f(x, y)$ sobre la región de integración R.

Integrales múltiples

Es decir:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)\,\Delta A_{ij}$$

En este caso se dice que $f(x,y)$ es integrable sobre la región rectangular R y esta integral es el volumen encerrado entre la superficie de la función y el plano xy, sobre el dominio R.

Teniendo en cuenta de que $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$, la **Integral Doble** también se expresa:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dy\,dx$$

Condición suficiente de integrabilidad

Si $f(x,y)$ es continua sobre R, entonces $f(x,y)$ es integrable sobre R.

Integrales múltiples

Cálculo de la Integral Doble

Se puede demostrar que, para calcular la Integral Doble, podemos aplicar dos integrales simples sucesivas, es decir:

$$I_R = \iint_R f(x,y)\, dy\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\, dy\right] dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dy\, dx \qquad (1)$$

$$I_R = \iint_R f(x,y)\, dy\, dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\, dx\right] dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dx\, dy \qquad (2)$$

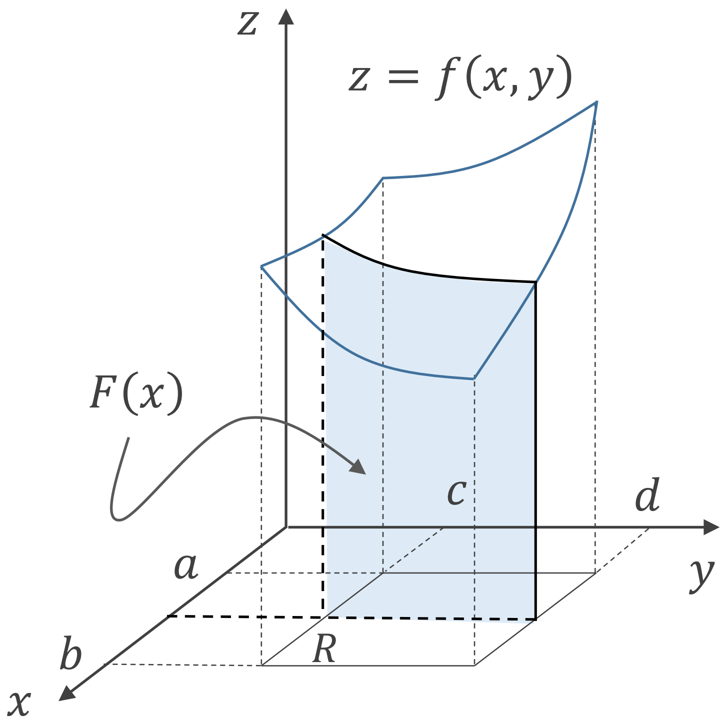
Estas integrales reciben el nombre de *integrales iteradas* o *sucesivas* en el recinto rectangular $R = [a,b] \times [c,d]$.

La expresión (1), por ejemplo, indica que primero debemos realizar una *integración parcial respecto* a y:

Integrales múltiples

En este sentido, el volumen total de una función $z = f(x, y)$ definida sobre una región de integración R, vendrá dado por:

$$V = \int_a^b F(x) \cdot dx$$



Siendo $F(x)$ el área de una sección transversal del cuerpo, obtenida mediante un corte efectuado en una dirección perpendicular al eje x.

Para calcular el volumen del cuerpo comprendido entre la función $z = f(x, y)$ y la región de integración R, podemos dividir el intervalo $[a, b]$ en n partes o particiones:

$$a = x_0 < x_1 < \ \dots < x_n = b.$$

Integrales múltiples

Para un punto ε_i tal que $x_{i-1} \leq \varepsilon_i \leq x_i$ el área de la sección en ese punto es $F(\varepsilon_i)$ y el volumen de la sección entre los puntos x_{i-1} y x_i es, aproximadamente: $V_i \cong F(\varepsilon_i) \cdot \Delta x_i$, donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ es el espesor de la «rebanada». Entonces, el volumen total será:

$$V \cong \sum_{i=1}^{n} F(\varepsilon_i) \cdot \Delta x_i$$

El valor exacto del volumen se obtiene tomando el límite para $n \to \infty$ o $\max \Delta x \to 0$

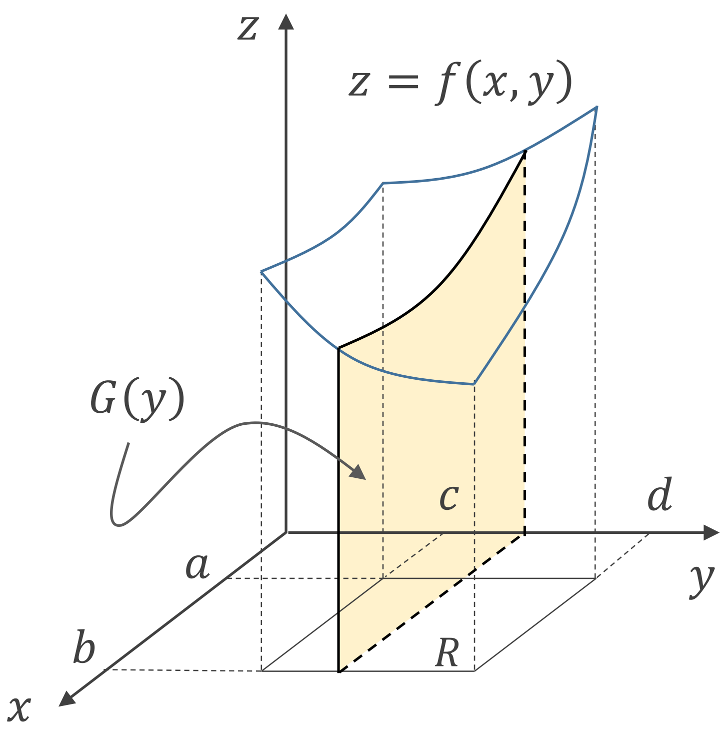
$$V \cong \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\varepsilon_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b F(x) \cdot dx$$

De forma análoga, la expresión (2), indica que primero debemos realizar una *integración parcial respecto* a x:

Integrales múltiples

El volumen total de una función $z = f(x, y)$ definida sobre la región de integración R, vendrá dado ahora por:

$$V = \int_c^d G(y) \cdot dy$$



Siendo $G(y)$ el área de una sección transversal del cuerpo, obtenida mediante un corte efectuado en una dirección perpendicular al eje y.

Para calcular el volumen del cuerpo comprendido entre la función $z = f(x, y)$ y la región de integración R, podemos dividir el intervalo $[\mathrm{c}, \mathrm{d}]$ en m partes o particiones:

$$c < y_1 < \ \dots < y_m = d.$$

Integrales múltiples

Para un punto δ_j tal que $y_{j-1} \leq \delta_j \leq y_j$ el área de la sección en ese punto es $G(\delta_j)$ y el volumen de la sección entre los puntos y_{j-1} y y_j es, aproximadamente: $V_j \cong G\left(\delta_j\right) \cdot \Delta y_j$, donde $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ es el espesor de la «rebanada». Entonces, el volumen total será:

$$V \cong \sum_{j=1}^{m} G\left(\delta_j\right) \cdot \Delta y_j$$

El valor exacto del volumen se obtiene tomando el límite para $m \to \infty$ o $\max \Delta y \to 0$

$$V \cong \lim_{\max \Delta y \to 0} \sum_{j=1}^{m} G\left(\delta_j\right) \cdot \Delta y_j = \int_c^d G(y) \cdot dy$$

Integrales múltiples

Ejemplo 1:

Sea $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \wedge 2 \leq x \leq 3 \wedge 1 \leq y \leq 2\}$ obtener:

$$I_R = \iint_R (x + y)\, dxdy$$

$G(y)$

$$I_R = \int_1^2 \int_2^3 (x + y)\, dx\, dy = \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} + yx\right]_2^3 dy = \int_1^2 \left(\frac{9}{2} + 3y \ - 2 - 2y\right) dy = \int_1^2 \left(\frac{5}{2} + y\right) dy$$

$$= \left[\frac{5}{2}\mathrm{y} + \frac{\mathrm{y}^2}{2}\right]_1^2 = 5 + 2 - \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 4$$

$F(x)$

$$I_R = \int_2^3 \int_1^2 (x + y)\, dy\, dx = \int_2^3 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_1^2 dx = \int_2^3 \left(2x + 2 \ - x - \frac{1}{2}\right) dx = \int_2^3 \left(x + \frac{3}{2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x\right]_2^3 = \frac{9}{2} + \frac{9}{2} - 2 - 3 = 4$$

Integrales múltiples

Propiedades de las Integrales Dobles

1. La Integral Doble de la suma de dos funciones, sobre una región de integración D*, es igual a la suma de las Integrales Dobles, sobre* D*, de cada una de las dos funciones:*

$$\iint_D [f_1(x,y) + f_2(x,y)]\, dy\, dx = \iint_D f_1(x,y)\, dy\, dx + \iint_D f_2(x,y)\, dy\, dx$$

2. El factor constante se puede extraer fuera del símbolo integral doble

$$\iint_D c\, f(x,y)\, dy\, dx = c \iint_D f(x,y)\, dy\, dx$$

3. Si el dominio D *está dividido en dos dominios parciales* D_1 *y* D_2 *sin poseer puntos interiores comunes y* $f(x,y)$ *es continua en todos los puntos del dominio* D *entonces:*

$$\iint_D f(x,y)\, dy\, dx = \iint_{D_1} f(x,y)\, dy\, dx + \iint_{D_2} f(x,y)\, dy\, dx$$

Integrales múltiples

Propiedades de las Integrales Dobles

4. Si $f_1(x,y) \geq f_2(x,y)$ en todos los puntos del dominio D, tendremos que :

$$\iint_D f_1(x,y)\,dy\,dx \geq \iint_D f_2(x,y)\,dy\,dx$$

5. Si $f(x,y) = 1$ en todos los puntos del dominio D, entonces, la integral doble de $f(x,y)$ sobre el dominio D, nos da el área de ese dominio (lo vamos a demostrar más adelante).

$$A_D = \iint_D 1\,dy\,dx$$

6. Si C_1 y C_2 son dos constantes tales que $C_1 \leq f(x,y) \leq C_2$ en todo el dominio D, entonces se cumple que :

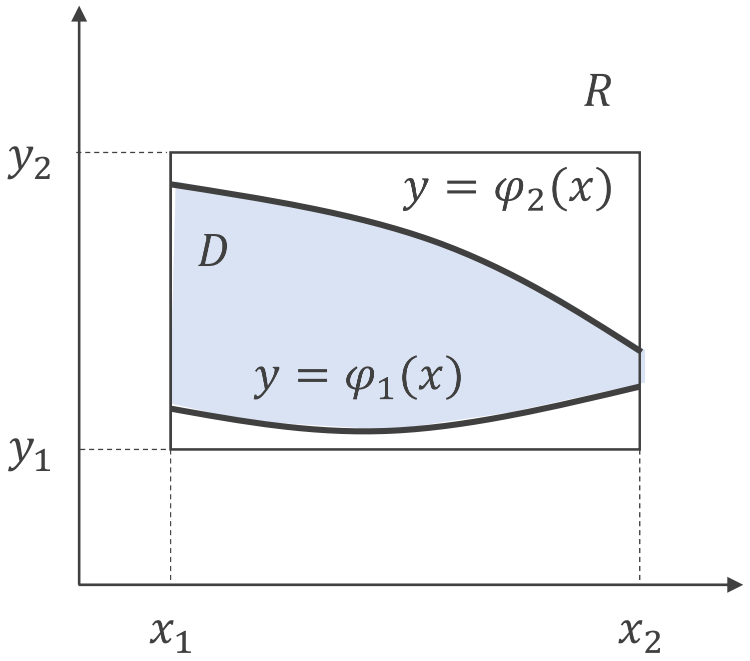
$$C_1\,A_D \leq \iint_D f(x,y)dy\,dx \leq C_2\,A_D$$

Integrales múltiples

Integrales Dobles en Dominios no Rectangulares

Puede ocurrir que el dominio de integración D sea no rectangular. Para estos casos podemos distinguir dos tipos de integrales:

Tipo I



Sea $z = f(x, y)$ una función definida sobre un dominio D, limitado por dos segmentos de rectas $x = x_1$ y $x = x_2$ y por las curvas $y = \varphi_1(x)$ y $y = \varphi_2(x)$, continuas.

Sea un rectángulo $R = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ que incluye a D.

Sea finalmente $f(x, y): D \rightarrow \mathbb{R}$ integrable.

Definimos una nueva función auxiliar:

$$G(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \in R - D \end{cases}$$

$f(x, y)$ y $G(x, y)$ encierran el mismo volumen.

Integrales múltiples

$G(x,y)$ es integrable sobre R y se cumple que:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_R G(x,y)\,dxdy$$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{x_1}^{x_2}\left[\int_{y_1}^{y_2} G(x,y)\,dy\right]dx$$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{x_1}^{x_2}\left[\int_{y_1}^{y=\varphi_1(x)} G(x,y)\,dy + \int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} G(x,y)\,dy + \int_{y=\varphi_2(x)}^{y_2} G(x,y)\,dy\right]dx$$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{x_1}^{x_2}\left[0 + \int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} G(x,y)\,dy + 0\right]dx$$

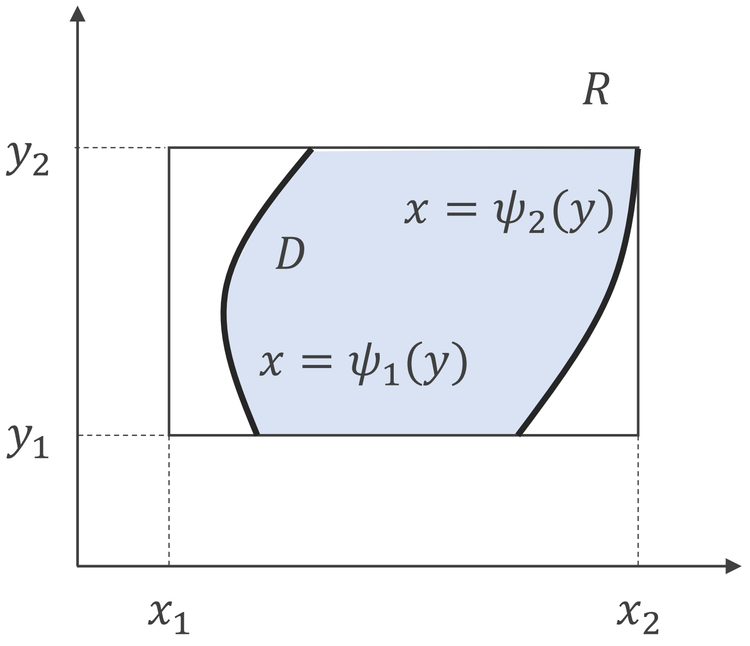
Pero entre $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ se cumple que $f(x,y) = G(x,y)$, luego

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x,y)\,dydx$$

En las regiones TIPO 1 se debe integrar siempre primero respecto de y y luego respecto a x.

Integrales múltiples

Análogamente, pueden calcularse las integrales **Tipo 2:**



Sea $z = f(x, y)$ una función definida sobre un dominio D, limitado por dos segmentos de rectas horizontales $y = y_1$ y $y = y_2$ y por las curvas que corresponden a las funciones $x = \psi_1(y)$ y $x = \psi_2(y)$, continuas, (con x despejada en cada una).

Sea un rectángulo $R = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ que incluye a D.

Sea finalmente $f(x, y): D \to \mathbb{R}$ integrable.

Definimos una nueva función auxiliar:

$$G(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \in R - D \end{cases}$$

$f(x, y)$ y $G(x, y)$ encierran el mismo volumen.

Integrales múltiples

$G(x, y)$ es integrable sobre R y se cumple que:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_R G(x,y)\,dxdy$$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{y_1}^{y_2}\left[\int_{x_1}^{x_2} G(x,y)\,dx\right]dy$$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{y_1}^{y_2}\left[\int_{x_1}^{\psi_1(y)} G(x,y)\,dx + \int_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} G(x,y)\,dx + \int_{x=\psi_2(y)}^{x_2} G(x,y)\,dx\right]dy$$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{y_1}^{y_2}\left[0 + \int_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} G(x,y)\,dx + 0\right]dy$$

Pero entre $\psi_1(y)$ y $\psi_2(y)$ se cumple que $f(x,y) = G(x,y)$, luego

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{y_1}^{y_2}\int_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

En las regiones TIPO 2 se debe integrar siempre primero respecto de x y luego respecto a y.

Análisis Matemático II

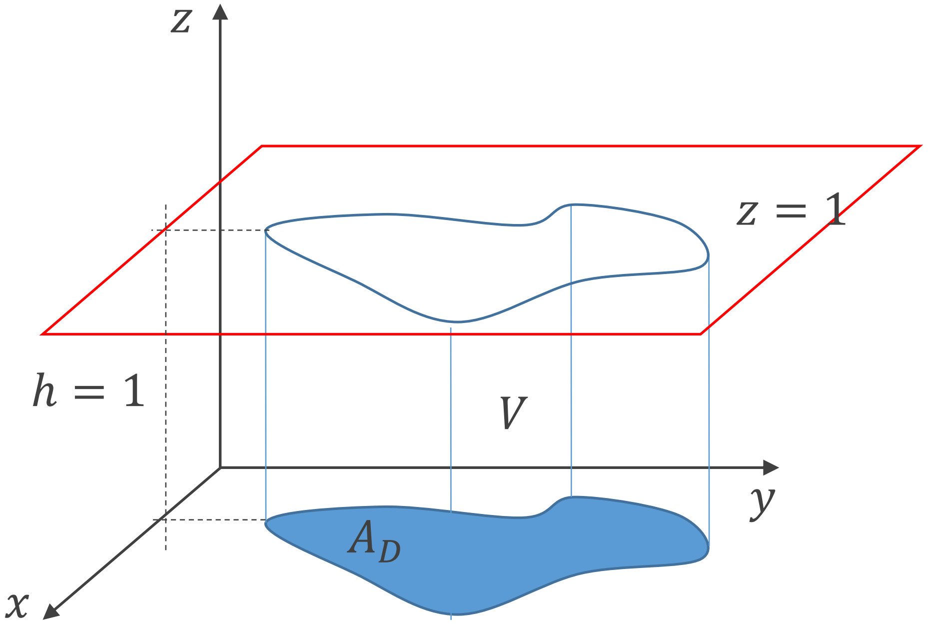
Integrales Múltiples

Cálculo de Áreas Planas con Integrales Dobles

Sabemos que:

$$V = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy$$

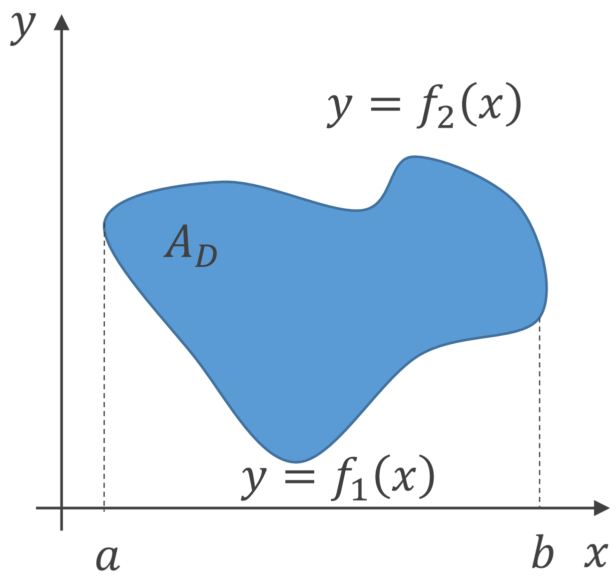
Si consideramos la función $f(x,y) = 1$ es decir $z = 1$, entonces:



$$V = \iint_D 1\, dx\, dy \quad (I)$$

Además $V = A_D \cdot 1 \quad (II)$

De (I) y (II):



$$\boxed{A_D = \iint_D dx\, dy} \longrightarrow \boxed{A_D = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy dx}$$

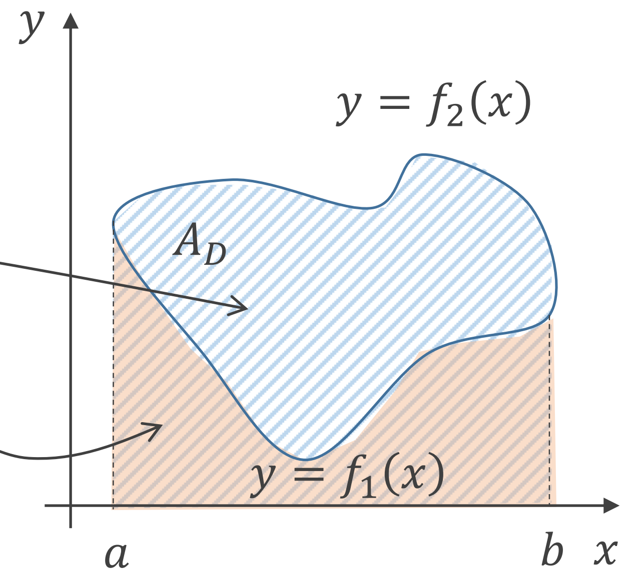
Cálculo de Áreas Planas con Integrales Dobles

La propiedad 5 decía: *Si* $f(x, y) = 1$ *en todos los puntos del dominio* D*, entonces la integral doble de* $f(x, y)$ *sobre el dominio* D*, nos dará el área de ese dominio.*

$$A_D = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dydx$$

$$A_D = \int_a^b [y]_{f_1(x)}^{f_2(x)} \, dx$$

$$A_D = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] \, dx = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx$$

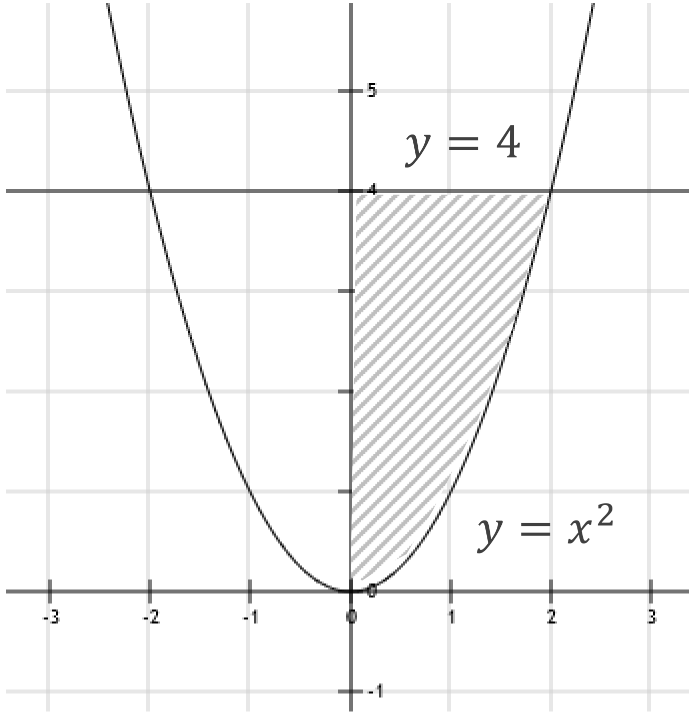


Igual que hacíamos en Análisis Matemático I.

Cálculo de Áreas Planas con Integrales Dobles

Ejemplo:

Hallar el área indicada en la figura.



Sabemos que el área a calcular se encuentra en el primer cuadrante.
Determinemos el punto de intersección de las dos funciones:

Igualamos $y = 4$ y $y = x^2 \;\rightarrow\; 4 = x^2$. Luego el punto de intersección que estamos buscando es $(2, 4)$.

Ahora podemos definir dos integrales dobles (TIPO 1 y TIPO 2):

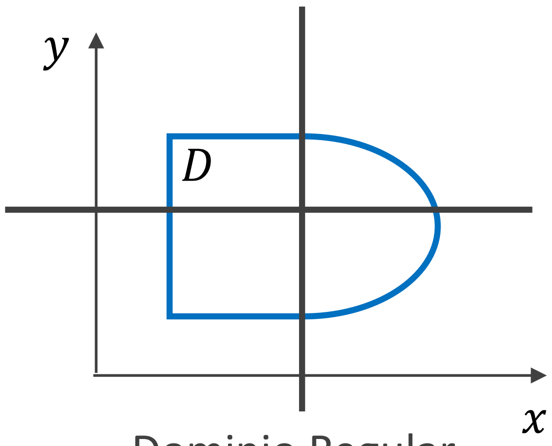
$$A_D = \int_0^2 \int_{y=x^2}^{y=4} dy\, dx \quad o \quad A_D = \int_0^4 \int_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dx\, dy$$

$$A_D = \int_0^2 \int_{y=x^2}^{y=4} dy\, dx = \int_0^2 [y]_{x^2}^{4}\, dx = \int_0^2 (4 - x^2)\, dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{3}$$

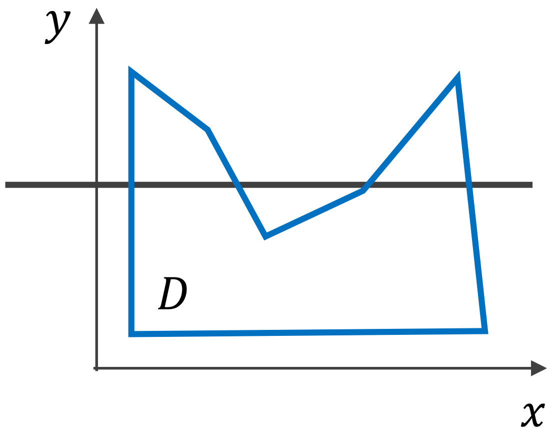
Lo mismo podemos hacer con la otra integral.

Cálculo de Áreas de Superficies

Dominio Regular



Dominio Regular



Dominio No Regular en x

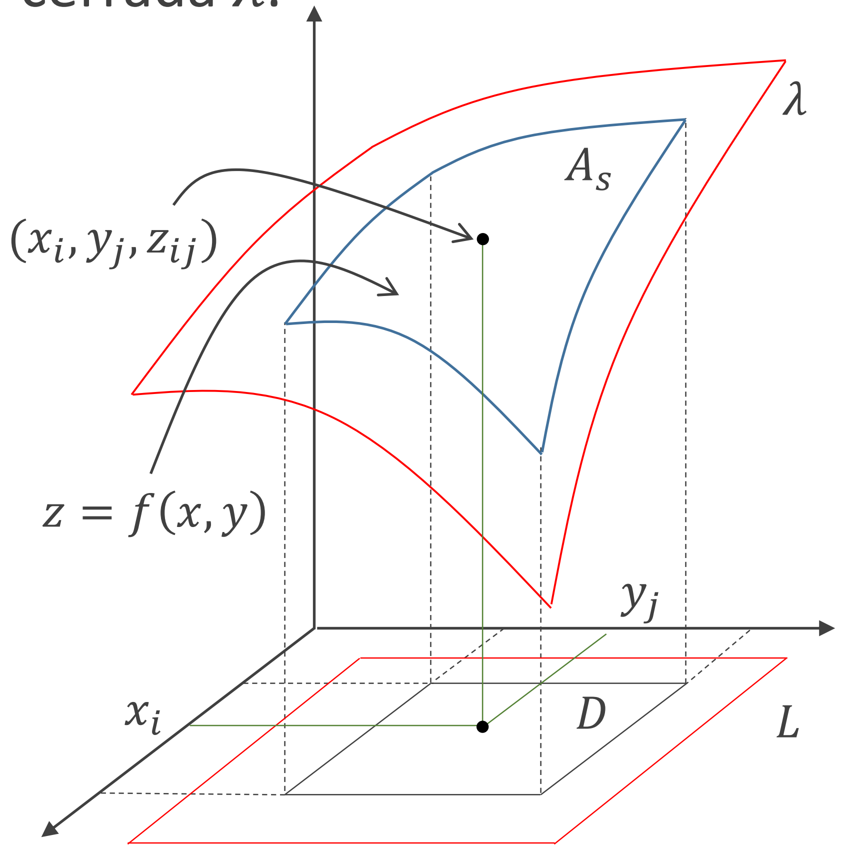
Un dominio es regular en la dirección del eje x si toda recta paralela a dicho eje y que pasa por un punto interior del dominio, corta a su frontera solo en dos puntos. (La definición de dominio regular en la dirección de y es análoga). Si un dominio es regular en la dirección de los dos ejes, se dice, simplemente, que el dominio es regular.

Si el dominio no es regular ni en la dirección de x, ni en la dirección de y, entonces para poder integrar se lo debe subdividir en subdominios regulares, aplicando la propiedad vista.

De igual forma, si alguno de los límites de integración no puede ser expresado con una sola expresión algebraica, también se debe subdividir el dominio para poder integrar.

Cálculo de Áreas de Superficies

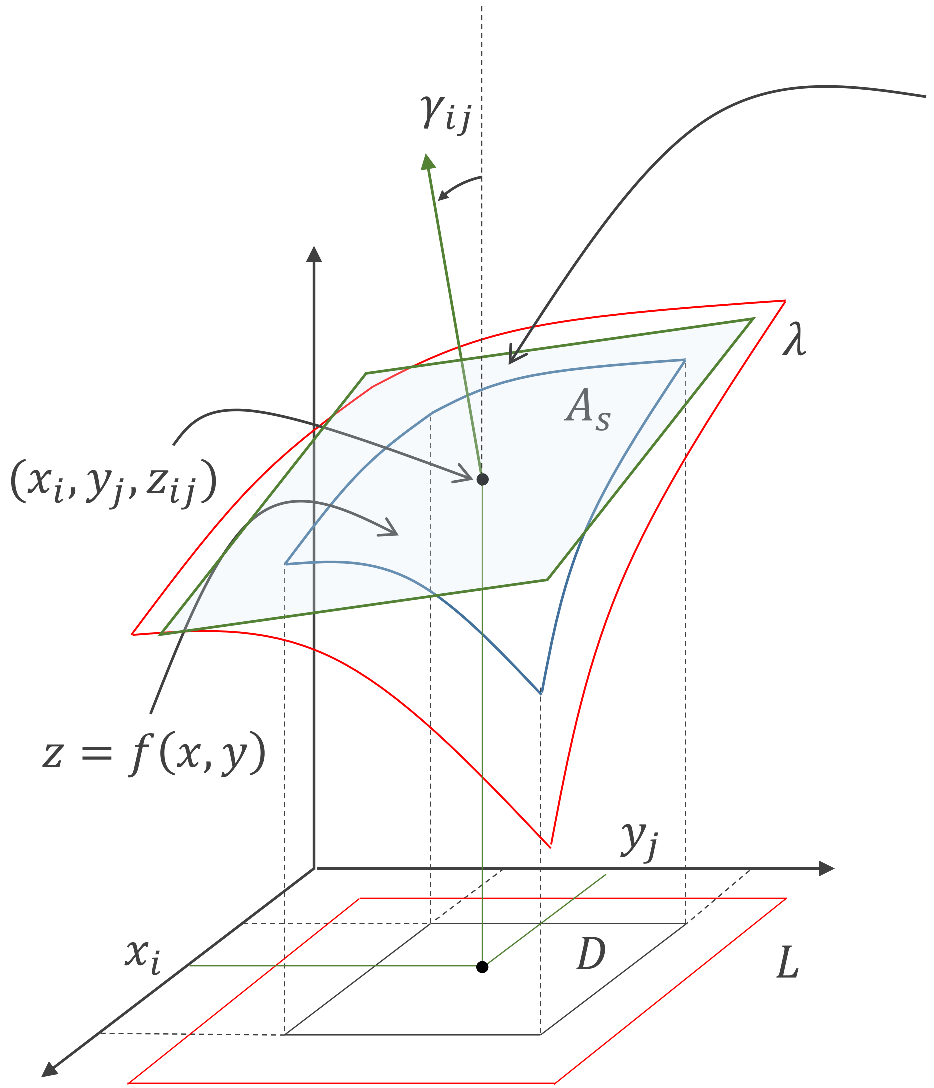
Consideremos la función $z = f(x, y)$ definida sobre un dominio regular D limitado por la curva cerrada L. Calculemos es área A_s de la superficie $z = f(x, y)$ limitada por la curva cerrada λ.



Consideremos la función $z = f(x, y)$ continua, con derivadas parciales también continuas en el dominio D.

Dividamos el dominio D en subdominios tal que R_{ij} es el rectángulo de área $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j$. Elijamos un punto (x_i, y_j) interior al rectángulo. A este punto le corresponderá el punto (x_i, y_j, z_{ij}). Por este punto trazaremos el plano tangente a la superficie, cuya ecuación viene dada por:

Cálculo de Áreas de Superficies



$$z - z_{ij} = \frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial x}(x - x_i) + \frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y}(y - y_j)$$

Sobre este plano tomemos un rectángulo de área $\Delta\sigma_{ij}$ cuya proyección en el plano xy es el rectángulo R_{ij} de área ΔA_{ij}.

Consideremos la suma de todos los rectángulos:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_{ij}$$

Siendo m el número total de pariciones de D en la dirección de y y n el número total de particiones en la dirección de x.

Definamos el área mayor de todos los rectángulos $\Delta\sigma_{ij}$ de la subdivisión de la superficie $z = f(x,y)$ como el $\max \Delta\sigma_{ij}$.

Cálculo de Áreas de Superficies

Cuando $n \to \infty$ y $m \to \infty$, es decir, cuando $\max \Delta\sigma_{ij} \to 0$, el límite de la suma doble es el área de la superficie que estamos buscando:

$$A_s = \lim_{\max \Delta\sigma_{ij} \to 0} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_{ij} \qquad (*)$$

Si llamamos γ_{ij} al ángulo formado por el Plano Tangente y el plano xy, tendremos:

$$\Delta A_{ij} = \Delta\sigma_{ij} \cdot \cos\gamma_{ij} \qquad o \qquad \Delta\sigma_{ij} = \frac{\Delta A_{ij}}{\cos\gamma_{ij}}$$

El ángulo γ_{ij} es también el ángulo director formado por la Recta Normal a la superficie en el punto $\left(x_i, y_j, z_{ij}\right)$ con el eje z. Por esta razón, en virtud del Plano Tangente, podemos escribir el coseno director (respecto del eje z) de la Recta Normal:

Cálculo de Áreas de Superficies

$$\cos\gamma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y}\right]^2 + 1}}$$

Por lo tanto, resulta:

$$\Delta\sigma_{ij} = \sqrt{\left[\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y}\right]^2 + 1} \quad .\Delta A_{ij}$$

Y reemplazando en $(*)$, A_s es:

$$A_s = \lim_{\max \Delta\sigma_{ij} \to 0} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left[\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y}\right]^2 + 1} \quad \cdot \Delta A_{ij}$$

Cálculo de Áreas de Superficies

El límite de aquella suma doble es por definición la siguiente integral:

$$A_s = \iint_D \sqrt{\left[\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y}\right]^2 + 1} \cdot dx\, dy$$

De manera más simplificada:

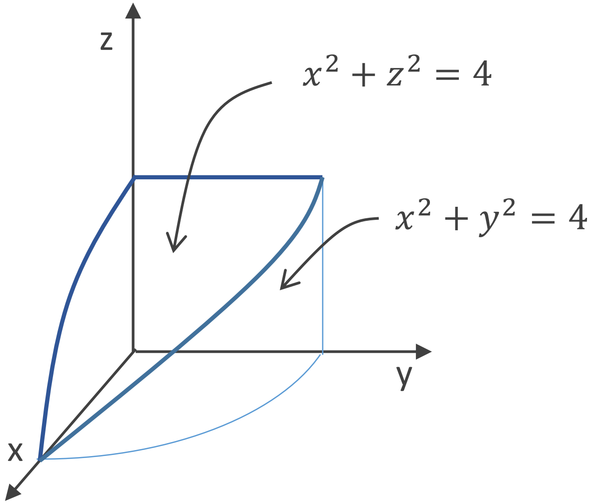
$$\boldsymbol{A_s = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \cdot dx\, dy}$$

Debemos tener en cuenta que las variables independientes, en este caso, son x e y; no obstante, hay que cambiar las derivadas parciales respecto de las variables de integración según sea el caso.

Cálculo de Áreas de Superficies

Ejemplo:

Hallar el área de la parte de la superficie del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ comprendida en el primer octante y limitada por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$



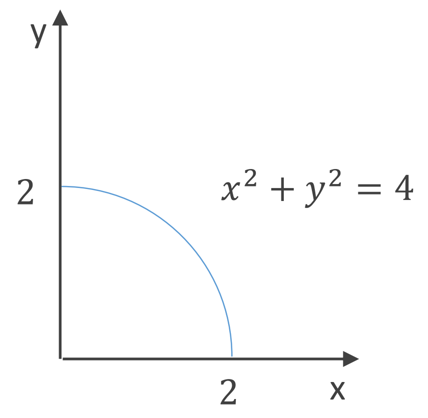
La ecuación de la superficie es $z = \sqrt{4 - x^2}$ por lo tanto, sus derivadas parciales son:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

El área entonces será:

$$A_s = \iint_D \left[\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\right] \cdot dx\, dy = \iint_D \left(\sqrt{\frac{x^2}{4 - x^2} + 1}\right) \cdot dx\, dy = \iint_D \left(\sqrt{\frac{4}{4 - x^2}}\right) \cdot dx\, dy$$

Cálculo de Áreas de Superficies



$$A_s = \iint_D \left(\sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\right) \cdot dx\, dy = \iint_D \left(\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\right) \cdot dx\, dy$$

$$A_s = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\, dy\, dx$$

$$A_s = \int_0^2 \left[\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\, y\right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$A_s = \int_0^2 2\ dx$$

$$A_s = [2x]_0^2$$

$$A_s = 4$$

También podríamos haber resuelto la integral como TIPO 2.

Por otro lado, podríamos haber proyectado la superficie sobre el plano yz, resolviendo:

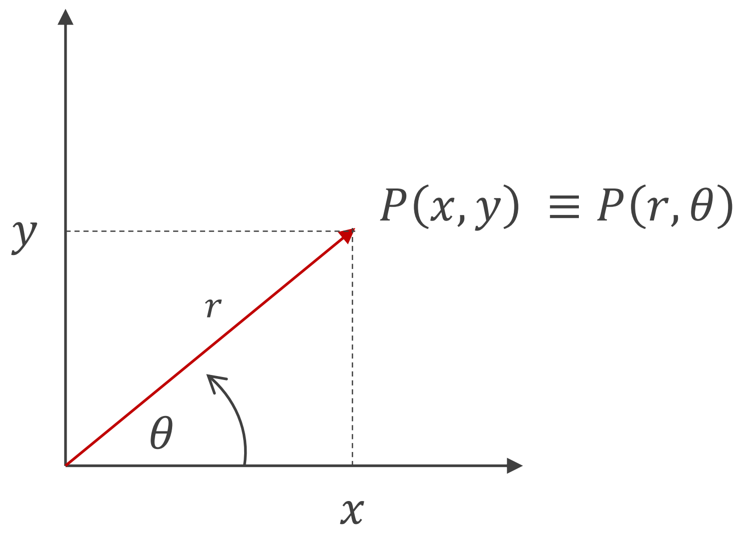
$$A_s = \iint_D \left[\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 1}\right] \cdot dy\, dz$$

Con: $x = \sqrt{4-z^2}$ e integrar sobre el dominio:

$R = \{(z, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge 0 \leq z \leq 2\ \wedge 0 \leq y \leq 2\}$

Integrales Dobles en Coordenadas Polares

El cálculo de una integral se puede simplificar mediante un conveniente cambio de variables. Hay integrales dobles en las que el cálculo en coordenadas rectangulares es más bien complejo y que, sin embargo, pueden fácilmente resolverse en coordenadas polares.



Relación entre coordenadas rectangulares y polares

$x = r\cos\theta$

$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$

con $0 \leq r < \infty$ y $0 \leq \theta < 2\pi$

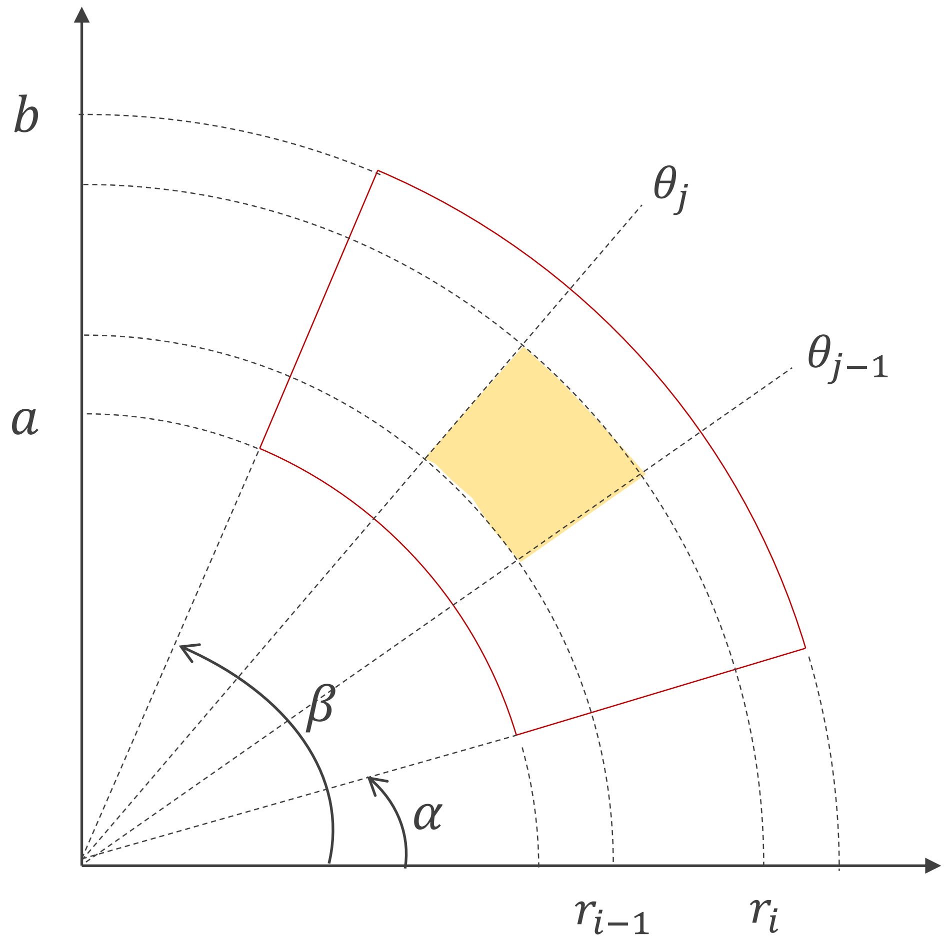
Calculemos ahora la integral doble:

$$\iint_R f(x,y)\cdot dA$$

Donde $R = \{(r,\theta): a \leq r \leq b \ \wedge \alpha \leq \theta \leq \beta\}$

Integrales Dobles en Coordenadas Polares

Dividamos el intervalo $[a, b]$ en n partes por los puntos $a = r_0, < r_1 < \; ... < r_n = b$ y el intervalo $[\alpha, \beta]$ en m partes, por los puntos $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_m = \beta$. Tomemos un dominio parcial ΔA_{ij} limitado por r_{i-1}, r_i y θ_{j-1}, θ_j.



Recordemos que el área de un sector circular de radio r y ángulo θ es:

$A = \frac{1}{2}r^2\theta$, el área del dominio ΔA_{ij} será:

$$\Delta A_{ij} = \frac{1}{2}r_i^2(\theta_j - \theta_{j-1}) - \frac{1}{2}r_{i-1}^2(\theta_j - \theta_{j-1})$$

$$\Delta A_{ij} = \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)(\theta_j - \theta_{j-1})$$

$$\Delta A_{ij} = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\Delta\theta_j \to \Delta A_{ij} = \frac{r_i + r_{i-1}}{2}\Delta r_i \Delta\theta_j$$

Integrales Dobles en Coordenadas Polares

Sea (r_i, θ_j) las coordenadas polares de un punto interior del dominio parcial ΔA_{ij}, entonces $(r_i \cos\theta_j, r_i \operatorname{sen}\theta_j)$ son las coordenadas rectangulares de dicho punto.

Escribamos la doble suma de Riemann:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_j)\,\Delta A_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(r_i\cos\theta_j, r_i \operatorname{sen}\theta_j)\,\frac{r_i + r_{i-1}}{2}\,\Delta r_i\,\Delta\theta_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} g(r_i, \theta_j)\,\frac{r_i + r_{i-1}}{2}\,\Delta r_i\,\Delta\theta_j$$

Definamos como $\max \Delta A$ al área del mayor de los rectángulos polares de la subdivisión de R.

Tomemos el límite para $n \to \infty$, $m \to \infty$, es decir cuando $\max \Delta A \to 0$ y $r_i \to r_{i-1}$

$$\lim_{\max \Delta A \to 0} \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_j)\,\Delta A_{ij} = \iint_R f(x, y)\,dA = \iint_R f(r\cos\theta\,, r\operatorname{sen}\theta)\ r\,dr\,d\theta = \iint_R g(r, \theta)\ r\,dr\,d\theta$$

Podemos calcular esta integral escribiendo: $\displaystyle\int_\alpha^\beta \int_a^b g(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta$

Lo demostrado es válido también para dominios de forma complicada.

Cambio de Variables

En Análisis Matemático I, para funciones de una única variable independiente, se estudió que a veces, un cambio de variables simplifica el cálculo integral. Recordemos entonces que si $y = f(x)$ con $x = g(t)$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f\big(g(t)\big) \cdot g'(t) \cdot dt$$

Para funciones de varias variables se complica porque intervienen las derivadas parciales que son tantas como las variables independientes. Entonces, en el integrando, se debe introducir, además de la función expresada en las nuevas variables, un factor que involucre las derivadas parciales respecto de las nuevas variables **en valor absoluto**.

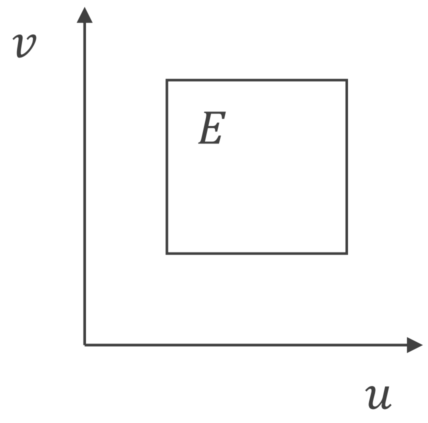
Este factor se conoce como el **Jacobiano de la transformación**.

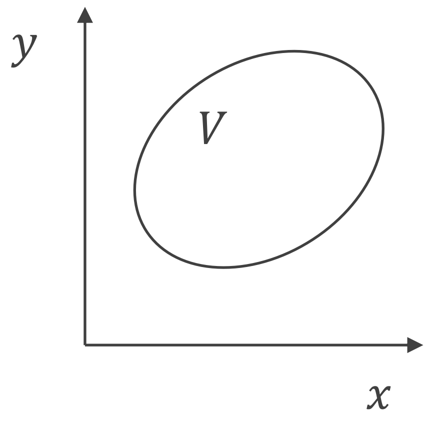
Cambio de Variables

Supongamos que las funciones

$$\begin{cases} x = g_1(u, v) \\ y = g_2(u, v) \end{cases}$$

Definen una correspondencia biunívoca entre los puntos del dominio E del plano uv y los puntos del dominio V del plano xy:





El Jacobiano de la transformación será:

Cambio de Variables

$$\mathcal{J}\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\iint_V f(x,y)\, dxdy = \iint_E f[g_1(u,v), g_2(u,v)] \left|\mathcal{J}\left(\frac{x,y}{u,v}\right)\right| dudv$$

Ejemplo: En coordenadas polares, $x = r\cos\theta, y = r\,sen\,\theta$

$$\mathcal{J}\left(\frac{x,y}{r,\theta}\right) = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\,.\,r\cos\theta + r\,sen\,\theta\,.\,sen\,\theta = r$$

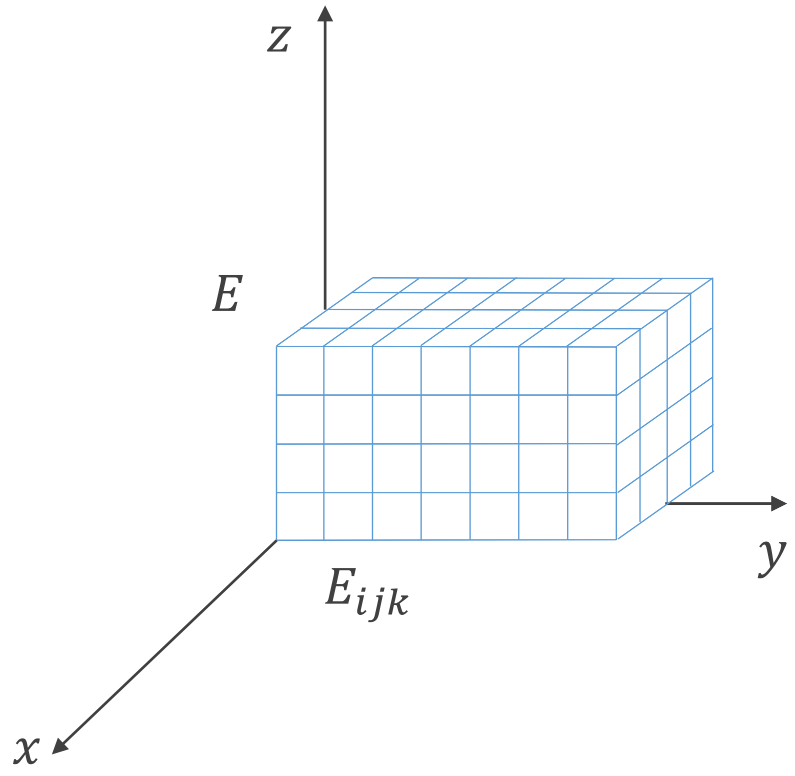
$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \iint_D f[r\cos\theta\,, r\,sen\,\theta]\, r\, drd\theta = \iint_D g(r,\theta)\, r\, drd\theta$$

Análisis Matemático II

Integrales Múltiples

Integrales Triples

Ampliaremos ahora el concepto de Integrales Dobles a Integrales Triples, adaptando lo definido para funciones de dos variables a funciones de tres variables.



Consideremos la función $w = f(x, y, z)$, continua en el dominio con forma de paralelepípedo rectangular, $E = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$.

Dividimos los intervalos:

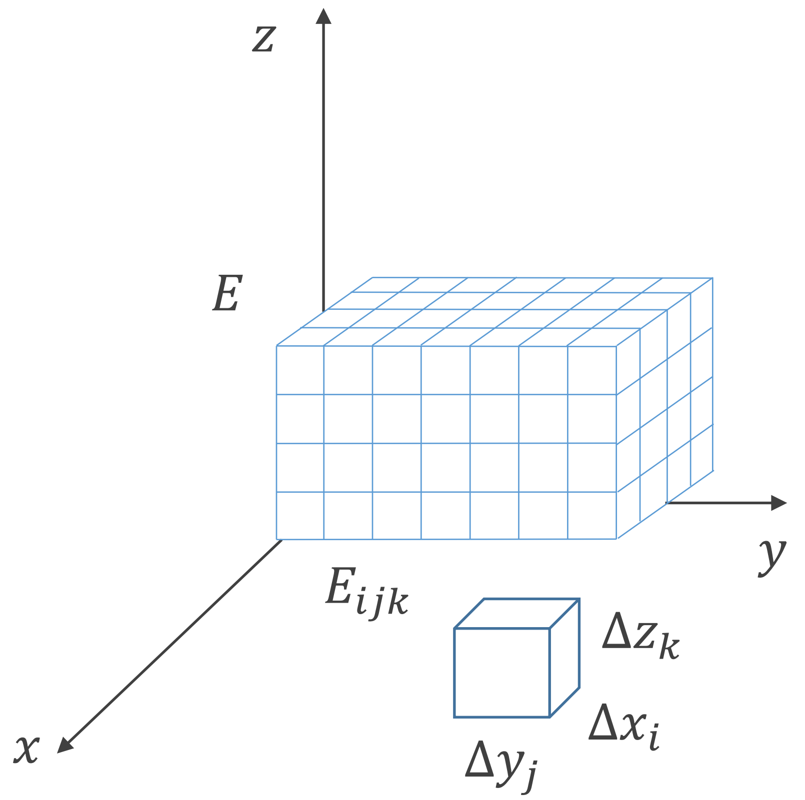
$[a, b]$ en n partes, $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$

$[c, d]$ en m partes, $c = y_1 < y_2 < \cdots < y_m = d$

$[p, q]$ en l partes, $p = z_1 < z_2 < \cdots < z_l = q$

Integrales Triples

Consideremos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ y $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. El volumen del subdominio E_{ijk} será $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j \cdot \Delta z_k$.



Elijamos un punto (x_i, y_j, z_k) interior al subdominio E_{ijk} y formemos la Suma Triple de Riemnann:

$$\sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_j, z_k) \cdot \Delta V_{ijk}$$

Definimos como $\max \Delta V$ al volumen del mayor de los subdominios de la división de E. El límite de la Suma Triple cuando $n \to \infty, m \to \infty$ y $l \to \infty$ es decir cuando $\max \Delta V \to 0$ es la Integral Triple de f en el dominio E.

Integrales Triples

$$\lim_{\max \Delta V \to 0} \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_j, z_k\right) \cdot \Delta V_{ijk} = \iiint_E f(x,y,z)\, dV$$

Si este límite existe, decimos que la función $f(x,y,z)$ es integrable sobre el dominio de integración E.

Teniendo en cuenta que $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$, la Integral Triple también se expresa como:

$$\iiint_E f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \int_c^d \int_p^q f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$$

O en el caso de dominios con formas no regulares (igual que lo hicimos con Integrales Dobles):

$$\iiint_E f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$$

Cambio de Variables en Integrales Triples

Consideremos las funciones:
$$\begin{cases} x = g_1(u, v, w) \\ y = g_2(u, v, w) \\ z = g_3(u, v, w) \end{cases}$$

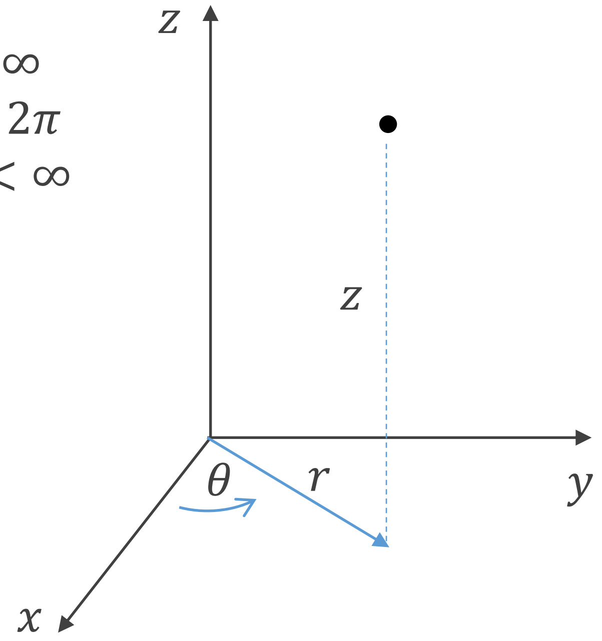
El Jacobiano de la transformación es:
$$\mathcal{J}\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Y el cambio de variables en Integrales Triples resulta:
$$\iiint_E f(x, y, z)\, dx\ dy\, dz = \iiint_E f[g_1(u, v, w), g_2(u, v, w), g_3(u, v, w)]\ \left|\mathcal{J}\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right)\right| du\, dv\, dw$$

Cambio de Variables en Integrales Triples

En coordenadas cilíndricas, tenemos:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,sen\,\theta \\ z = z \end{cases} \quad con \begin{cases} 0 \le r < \infty \\ 0 \le \theta < 2\pi \\ -\infty < z < \infty \end{cases}$$



El Jacobiano de la Transformación es:

$$\mathcal{J}\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,z}\right) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,sen\,\theta & 0 \\ sen\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

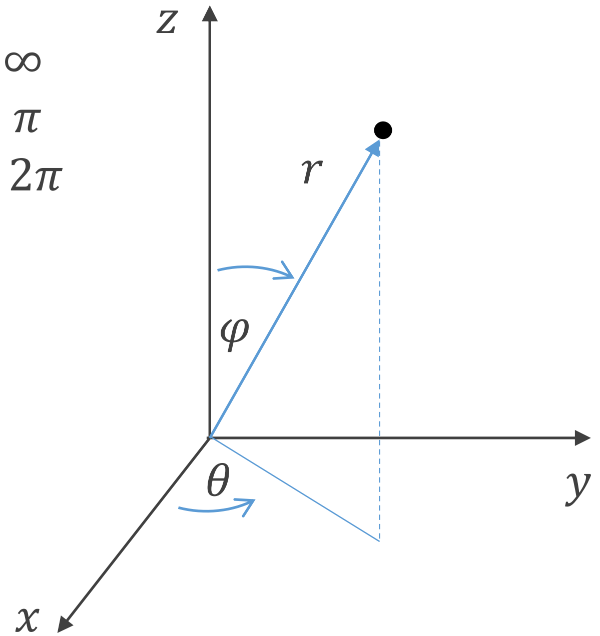
Y el cambio de variables en Integrales Triples resulta:

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\;dy\,dz = \iiint_E f[r\cos\theta\,, r\,sen\,\theta\,, z]\,\left|\mathcal{J}\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,z}\right)\right| dr\,d\theta\,dz$$

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\;dy\,dz = \iiint_E g(r,\theta,z)\,r\,dr\,d\theta\,dz$$

Cambio de Variables en Integrales Triples

En coordenadas esféricas, tenemos: $\begin{cases} x = r\, sen\,\varphi\, cos\,\theta \\ y = r\, sen\,\varphi\, sen\,\theta \\ z = r\, cos\,\varphi \end{cases}$ con $\begin{cases} 0 \leq r < \infty \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$



El Jacobiano de la Transformación es:

$$\mathcal{J}\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,\varphi}\right) = \begin{vmatrix} sen\,\varphi\, cos\,\theta & -r\, sen\,\varphi\, sen\,\theta & r\, cos\,\varphi\, cos\,\theta \\ sen\,\varphi\, sen\,\theta & r\, sen\,\varphi\, cos\,\theta & r\, cos\,\varphi\, sen\,\theta \\ cos\,\varphi & 0 & -r\, sen\,\varphi \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{J}\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,\varphi}\right) = cos\,\varphi\,[-r^2 sen\varphi\; cos\varphi\; sen^2\theta - r^2 sen\varphi\; cos\varphi\; cos^2\theta] - r\; sen\varphi[r.\,sen^2\varphi\; cos^2\theta + r sen^2\varphi\; sen^2\theta]$$

$$\mathcal{J}\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,\varphi}\right) = cos\,\varphi\,[-r^2 sen\varphi\; cos\varphi\;(sen^2\theta + cos^2\theta)] - r\; sen\varphi\;[r.\,sen^2\varphi(\,cos^2\theta +\; sen^2\theta)]$$

$$\mathcal{J}\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,\varphi}\right) = -r^2 sen\varphi\; cos^2\varphi - r^2 sen^3\varphi$$

Cambio de Variables en Integrales Triples

$$\mathcal{J}\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,\varphi}\right) = -r^2 sen\varphi\, cos^2\varphi - r^2 sen^3\varphi$$

$$\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,\varphi}\right) = -r^2\, sen\varphi[cos^2\varphi + sen^2\varphi\,]$$

$$\boldsymbol{\mathcal{J}\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,\varphi}\right) = -r^2\, sen\varphi}$$

Luego, el Jacobiano de la Transformación **en valor absoluto** es: $\left|\mathcal{J}\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,\varphi}\right)\right| = \boldsymbol{r^2\, sen\,\varphi}$

Y el cambio de variables en Integrales Triples resulta:

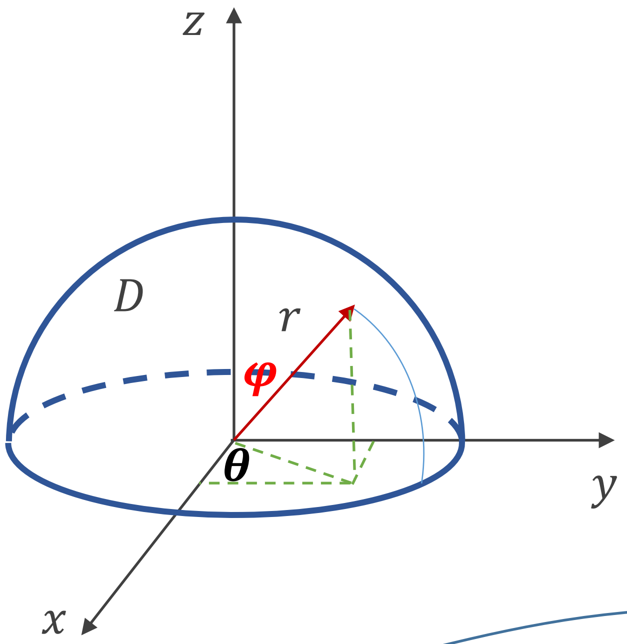
$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\;dy\,dz = \iiint_E f[r\,sen\,\varphi\,cos\,\theta\,, r\,sen\,\varphi\,sen\,\theta\,, r\,cos\,\varphi]\,\left|\mathcal{J}\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,\varphi}\right)\right| dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\;dy\,dz = \iiint_E g(r,\theta,\varphi)\,r^2\,sen\,\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

Cambio de Variables en Integrales Triples

Ejemplo:

Hallar el volumen de una semiesfera de radio $r = 4$.



En coordenadas esféricas tenemos: $\begin{cases} x = r\,sen\,\varphi\,cos\,\theta \\ y = r\,sen\,\varphi\,sen\,\theta \\ z = r\,cos\,\varphi \end{cases}$ $con \begin{cases} 0 \le r < \infty \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \theta < 2\pi \end{cases}$

Para una semiesfera de radio $r = 4$: $\begin{cases} 0 \le r \le 4 \\ 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ 0 \le \theta < 2\pi \end{cases}$

Entonces, la integral triple en coordenadas esféricas es:

$$V_D = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{4} 1 \cdot r^2\,sen\,\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^4 sen\,\varphi\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/2}\frac{64}{3}\,sen\,\varphi\,[\theta]_0^{2\pi}\,d\varphi = \frac{128}{3}\,\pi\,[-\,cos\,\varphi]_0^{\pi/2} = \frac{128}{3}\pi$$

Como calculamos un volumen en tres dimensiones, la función $g(r,\theta,\varphi) = 1$

Compare este valor, con el que hubiese obtenido por fórmula.

Análisis Matemático II

Funciones y Campos Vectoriales

Funciones y Campos Vectoriales

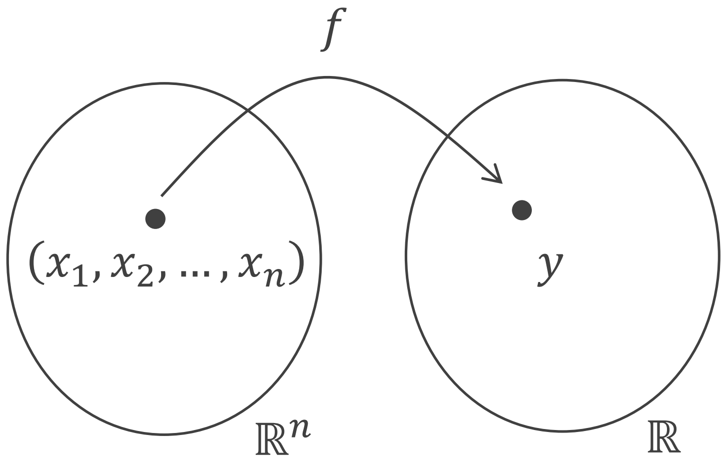
Hasta ahora hemos estudiado:

Funciones escalares (en Análisis Matemático I) donde $\dim(\mathcal{D}) = \dim(\mathcal{I}m) = 1$. Es decir, funciones que transforman un número real (escalar) en otro número real (escalar).

$$f: x \in \mathbb{R} \rightarrow y \in \mathbb{R}$$

Campos escalares (en Análisis Matemático II) donde $\dim(\mathcal{D}) > 1$ y $\dim(\mathcal{I}m) = 1$. Es decir, funciones que transforman una *n-upla* de números reales (escalares) en otro número real (escalar).

$$f: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow z \in \mathbb{R}$$



En general, se trata de funciones $f: \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \rightarrow \mathbb{R}$

Funciones y Campos Vectoriales

Ahora vamos a extender estos concepto a Funciones y Campos Escalares:

Función vectorial: En este caso, la $\dim(\mathcal{D}) = 1$ y $\dim(\mathcal{Im}) > 1$, es decir que se trata de funciones a las que a un número real le hace corresponder una *m-upla* de número reales que identificaremos como las componentes de un vector.

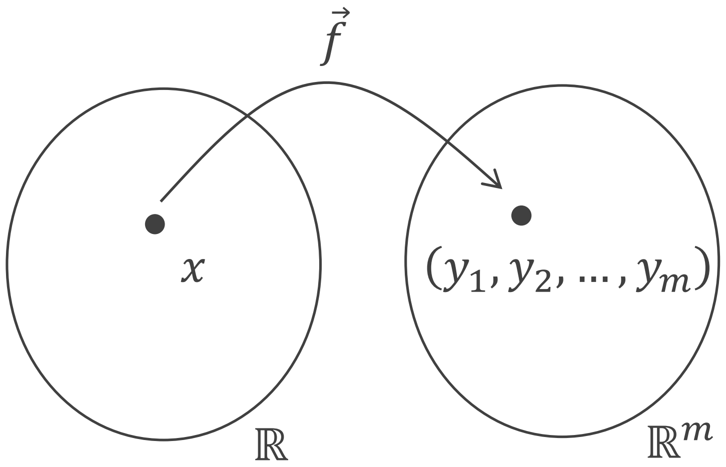
$$\vec{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$$

La definición de función vectorial, equivale a la definición de m funciones escalares.

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x) \\ y_2 = f_2(x) \\ \quad\vdots \\ y_m = f_m(x) \end{cases}$$

Considerando $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$,
resulta $\vec{y} = \vec{f}(x)$

$$\vec{f}: x \in \mathbb{R} \to [y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)] \in \mathbb{R}^m$$



Funciones y Campos Vectoriales

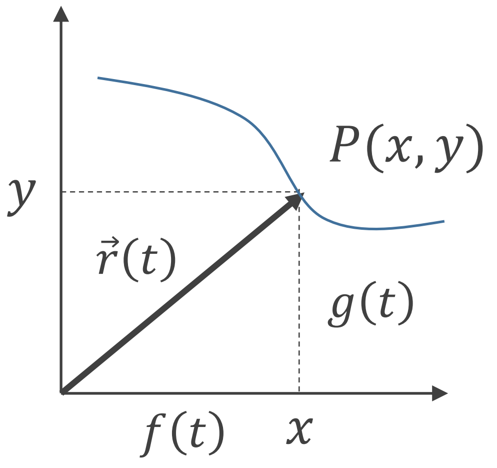
Nos interesan aquellas funciones vectoriales cuyas imágenes son vectores de dos o tres dimensiones y se utilizan para describir curvas, movimiento de partículas, etc.

Ejemplo 1:

Si $m = 2$, una función vectorial asigna, a cada numero real, un vector de dos componentes en $\mathbb{R}^2$ o un par ordenado de números reales (x, y), dicho de otro modo, un punto del plano.

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$



En forma **paramétrica** podemos simbolizarla como dos funciones f y g dependientes de una variable t (porque suele asociarse al tiempo en el estudio de las sucesivas posiciones de P que ocupa una partícula en movimiento). Es decir, a cada valor t le corresponde un par (x, y), un punto en R^2. A t se lo denomina **parámetro**.

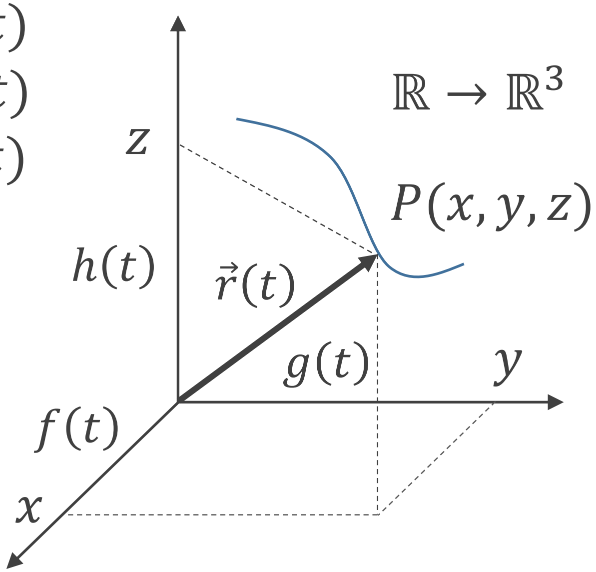
En forma **vectorial**: $\vec{r}(t) = [f(t), g(t)] = f(t)\hat{\imath} + g(t)\hat{\jmath}$, es decir, $\vec{r}(t)$ es un vector de componentes $f(t)$ y $g(t)$.

Funciones y Campos Vectoriales

Ejemplo 2:

Si $m = 3$, una función vectorial asigna, a cada numero real, un vector de tres componentes en $\mathbb{R}^3$ o una terna ordenada de números reales (x, y, z), dicho de otro modo, un punto en el espacio.

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$



Ahora, la forma **paramétrica** podemos simbolizarla como tres funciones f, g y h dependientes de la variable t. A cada valor t le corresponderá una terna (x, y, z), un punto en R^3.

En forma **vectorial**:

$\vec{r}(t) = [f(t), g(t), h(t)] = f(t)\hat{\imath} + g(t)\hat{\jmath} + h(t)\hat{k}$, es decir que $\vec{r}(t)$ será un vector de componentes $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$.

Como se trata de componentes que son funciones escalares, podemos extender los conceptos de Dominio, Límite, Continuidad, Derivadas e Integrales.

Funciones y Campos Vectoriales

Dominio:

Dada la función vectorial $\vec{r}(t) = [f(t), g(t), h(t)]$ su **dominio** es el conjunto de valores t para los que la función está definida. El dominio resulta de la intersección de los dominios de las funciones escalares componentes $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$.

> **Ejemplo**:
>
> Sea la función vectorial $\vec{r}(t) = \left[\sqrt{2-t}, t^{-1},\ ln(2t)\right]$
>
> Las funciones componentes son: $f(t) = \sqrt{2-t}$, $g(t) = t^{-1}$ y $h(t) = ln(2t)$
>
> Estas funciones están definidas para $t \leq 2$, $t \neq 0$ *y* $t > 0$ respectivamente.
>
> Luego, el dominio de $\vec{r}(t)$ puede definirse como $\{t \ \in \mathbb{R} : 0 < t \leq 2\}$

Funciones y Campos Vectoriales

Límite:

Dada la función vectorial $\vec{r}(t) = [f(t), g(t), h(t)]$ su **límite** se obtiene tomando el límite de las funciones escalares componentes $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$.

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \left[\lim_{t \to t_0} f(t), \lim_{t \to t_0} g(t), \lim_{t \to t_0} h(t)\right]$$

El límite de la función vectorial existirá, siempre que los límites de las funciones escalares componentes existan.

Ejemplo:

Sea la función vectorial $\vec{r}(t) = [ln(e^2 + t), t^2, (2 + t)^2]$

$$\lim_{t \to 0} \vec{r}(t) = \left[\lim_{t \to 0} ln(e^2 + t), \lim_{t \to 0} t^2, \lim_{t \to 0} (2 + t)^2\right] = (2, 0, 4)$$

Funciones y Campos Vectoriales

Continuidad:

Dada la función vectorial $\vec{r}(t) = [f(t), g(t), h(t)]$ la función $\vec{r}(t)$ es **continua** en un punto $t = t_0$ si sus funciones componentes son continuas en t_0 y se cumple:

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$$

Derivada:

Dada la función vectorial $\vec{r}(t) = [f(t), g(t), h(t)]$ definiremos su **derivada**, de la misma forma que lo hicimos con funciones escalares:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Funciones y Campos Vectoriales

Y, aplicando la definición de derivada de las funciones escalares componentes del vector:

$$\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\frac{df}{dt}, \frac{dg}{dt}, \frac{dh}{dt}\right] = \frac{df}{dt}\hat{\imath} + \frac{dg}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dh}{dt}\hat{k}$$

Es decir, la derivada de $\vec{r}(t)$ se obtiene derivando cada una de sus componentes y su módulo:

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{df}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dg}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dh}{dt}\right)^2}$$

Las derivadas sucesivas de las funciones vectoriales, de igual manera, se obtienen calculando las derivadas sucesivas de las componentes.

Funciones y Campos Vectoriales

Ejemplo:

Sea la función vectorial $\vec{r}(t) = [t^3 - 3, sen(2t), ln(t)]$

$$\vec{r}'(t) = \left[3t^2, 2\, cos(2t), \frac{1}{t}\right] = 3t^2\, \hat{\imath} + 2\, cos(2t)\, \hat{\jmath} + \frac{1}{t}\hat{k}$$

$$\vec{r}''(t) = \left[6t, -4\, sen(2t), -\frac{1}{t^2}\right] = 6t\, \hat{\imath} - 4\, sen(2t)\, \hat{\jmath} - \frac{1}{t^2}\hat{k}$$

Es decir, si el parámetro t es el tiempo, mientras que la curva que se obtiene al mover el vector $\vec{r}(t)$ describe la posición del extremo de dicho vector en un tiempo t, $\vec{r}'(t)$ describe la velocidad y $\vec{r}''(t)$ la aceleración con que se mueve el extremo de dicho vector.

Funciones y Campos Vectoriales

Integral:

Dada la función vectorial $\vec{r}(t) = [f(t), g(t), h(t)]$ definiremos su **integral**, como la integral de las funciones escalares componentes:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{r}(t)\, dt = \left[\int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt, \int_{t_1}^{t_2} g(t)\, dt, \int_{t_1}^{t_2} h(t)\, dt\right]$$

Ejemplo:

Sea la función vectorial $\vec{r}(t) = [t^3, e^t, 2 - t]$

$$\int_0^1 \vec{r}(t)\, dt = \left[\int_0^1 t^3\, dt, \int_0^1 e^t\, dt, \int_0^1 (2 - t)\, dt\right] = \left[\left.\frac{t^4}{4}\right|_0^1, \left. e^t\right|_0^1, \left.\left(2t - \frac{t^2}{2}\right)\right|_0^1\right] = \left[\frac{1}{4}, e - 1, \frac{3}{2}\right]$$

Funciones y Campos Vectoriales

Campo vectorial: En este caso, la $\dim(\mathcal{D}) > 1$ y $\dim(\mathcal{J}m) > 1$, es decir que se trata de funciones a las que a una *n-upla* de número reales, se le hace corresponder una *m-upla* de número reales.

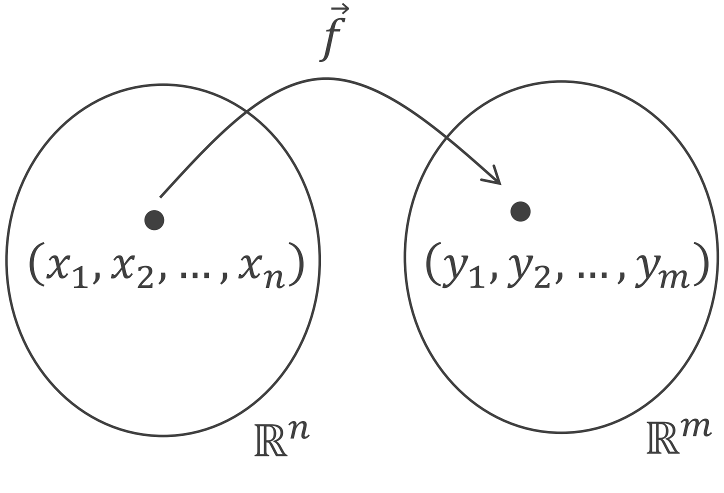
$$\vec{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

La definición de función vectorial, equivale a la definición de m campos escalares.

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \quad\vdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Considerando $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, resulta $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$

$$\vec{f}: (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \to [y_1(\vec{x}), y_2(\vec{x}), \dots, y_m(\vec{x})] \in \mathbb{R}^m$$



Funciones y Campos Vectoriales

En particular, nos interesan los campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$.

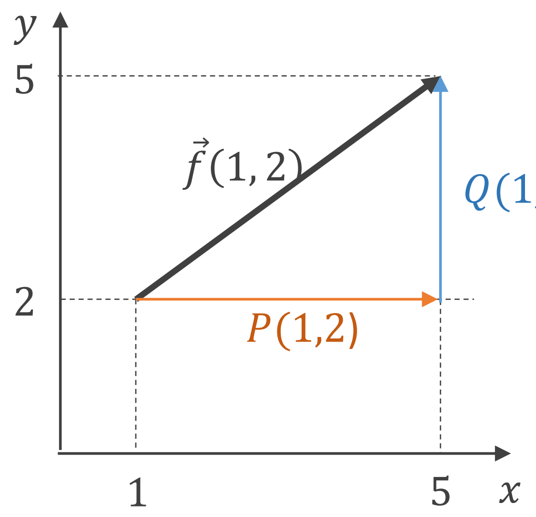
Sea $\mathcal{D}$ una región plana en $\mathbb{R}^2$. Un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ es una función $\vec{f}$ que asigna a cada punto (x, y) en $\mathcal{D}$ un vector bidimensional $\vec{f}(x, y)$.

$$\vec{f}(x,y) = [P(x,y), Q(x,y)] = P(x,y)\hat{\imath} + Q(x,y)\hat{\jmath} \qquad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

Ejemplo:

Sea $\vec{f}(x,y) = [2xy, x^3 + y] = 2xy\,\hat{\imath} + (x^3 + y)\,\hat{\jmath}$

$\vec{f}(1,2) = (4,3)$



Funciones y Campos Vectoriales

Derivada de un Campo Vectorial

Como se trata de m funciones de n variables, obtendremos $m \times n$ derivadas parciales que se agrupan en la denominada **Matriz Jacobiana** de la función. Y Se define:

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \;\; \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \frac{\partial f_m}{\partial x_3} \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \vec{f}_1 \\ \nabla \vec{f}_2 \\ \nabla \vec{f}_3 \\ \vdots \\ \nabla \vec{f}_m \end{bmatrix}$$

Observen que las filas de la Matriz Jacobiana son los vectores gradiente de las componentes.

- Si se trata de un **campo escalar**, el Jacobiano coincide con el gradiente. En este caso es una matriz fila.
- Si se trata de una **función vectorial**, el Jacobiano resulta una matriz columna.

Funciones y Campos Vectoriales

Gradiente de un Campo Escalar

Como ya se estudió, el gradiente de un campo escalar es un vector cuyas componentes son las derivadas parciales respecto de cada variable independiente:

$$\overrightarrow{grad\ f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

El gradiente en un punto mide el máximo crecimiento (en dirección, sentido y módulo) del campo en dicho punto. Se trata de un operador vectorial. Es decir un operador que al aplicarlo a una función o a un campo escalar da por resultado un vector y se suele representar por ∇ (nabla) y se lo denomina, **operador nabla**:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

Por ejemplo: Si $f(x,y) \to z$ entonces $\overrightarrow{\nabla f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

Funciones y Campos Vectoriales

Divergencia de un Campo Vectorial

La divergencia de un campo vectorial es ***un escalar*** que se calcula como la traza de la matriz Jacobiana (cabe aclarar que debe tratarse de una matriz cuadrada, es decir que se trata de campos vectoriales $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$).

Recordemos que la traza es la suma de los elementos de la diagonal principal de la matriz:

Sea $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$ entonces $\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial V_1}{\partial x} & \dfrac{\partial V_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial x} & \dfrac{\partial V_2}{\partial y} \end{vmatrix}$ por lo que resulta: $\boxed{div\,\vec{V} = \dfrac{\partial V_1}{\partial x} + \dfrac{\partial V_2}{\partial y}}$

Si pensamos al campo vectorial como el movimiento de un fluido (pudiendo dibujar en cada punto un vector que representa su velocidad), la divergencia mide el cambio de densidad del fluido en dicho punto.

Funciones y Campos Vectoriales

La notación de divergencia usa el símbolo ∇ (nabla) que como ya se dijo, representa un vector de derivadas parciales.

$$div\,\vec{V} = \underbrace{\nabla \cdot \vec{V}}_{\textit{Producto escalar}}$$

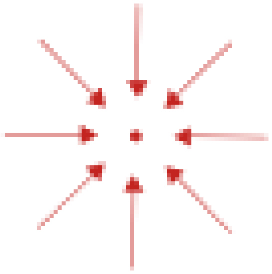
Suma de los productos de la componentes análogas.
Es decir: Suma de la derivada de la primera componente, respecto de la primera variable, más la derivada de la segunda componente, respecto de la segunda variable, etc.

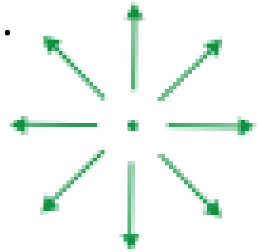
Interpretación del signo de la divergencia en un punto:

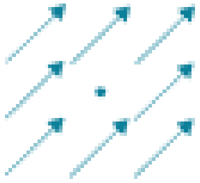
a. $\nabla \cdot \vec{V}(x_0, y_0) < 0 \;\Rightarrow$ la densidad en el punto aumenta.
El punto se comporta como un sumidero.

b. $\nabla \cdot \vec{V}(x_0, y_0) > 0 \;\Rightarrow$ la densidad en el punto disminuye.
El punto se comporta como una fuente.

c. $\nabla \cdot \vec{V}(x_0, y_0) = 0 \;\Rightarrow$ el fluido se mueve libremente con velocidad constate.
Se trata de un fluido incompresible, como el agua en una corriente.

a.


b.


c.


Funciones y Campos Vectoriales

Vale la pena aclarar que la divergencia no sólo se aplica al estudio de fluidos sino en otros contextos como la electrodinámica por ejemplo.

Ejemplo 1

Dado el campo vectorial: $\vec{V}(x,y) = (x^2 - y^2)\,\hat{\imath} + 2xy\hat{\jmath}$ calcular la divergencia y analizar el comportamiento de la densidad en el punto $(1,2)$

$\nabla.\vec{V} = 2x + 2x = 4x$

$\nabla.\vec{V}(1,2) = 4 > 0 \rightarrow$ el punto $(1,2)$ se comporta como fuente, es decir, su densidad disminuye.

Ejemplo 2

Dado el campo vectorial: $\vec{V}(x,y,z) = (xyz, y^2z^3, x^2 - 2xz)$ calcular la divergencia y analizar el comportamiento de la densidad en el punto $(1,0,-2)$

$\nabla.\vec{V} = yz + 2yz^3 - 2x$

$\nabla.\vec{V}(1,0,-2) = -2 < 0 \rightarrow$ el punto $(1,0,-2)$ se comporta como un sumidero, es decir, su densidad aumenta.

Funciones y Campos Vectoriales

Rotacional o Rotor de un Campo Vectorial

Dado un campo vectorial $\vec{V}$ se define como rotacional de $\vec{V}$ al vector que resulta del producto vectorial entre ∇ (nabla), que es el vector de las derivadas parciales, y $\vec{V}$:

$$rot\,\vec{V} = \nabla \times \vec{V}$$

Sea $\vec{V} = \begin{cases} V_1(x,y,z) \\ V_2(x,y,z) \\ V_3(x,y,z) \end{cases}$ entonces $\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$ por lo que resulta:

$$\boxed{\nabla \times \vec{V} = \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right)\hat{\imath} - \left(\frac{\partial V_3}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial z}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\hat{k}}$$

El rotor mide la tendencia del campo vectorial a rotar alrededor de un punto.

Funciones y Campos Vectoriales

En cada punto, su módulo resulta ser el doble de la rapidez angular de rotación y su sentido horario o antihorario, se puede determinar con la regla de la mano derecha.

Ejemplo

Sea $\vec{V}(x,y,z) = (x^3 + y^2 + z, z\,e^x, xyz - 4xz)$ calcular el rotacional de $\vec{V}$ en $(0,1,2)$ y analizar el resultado.

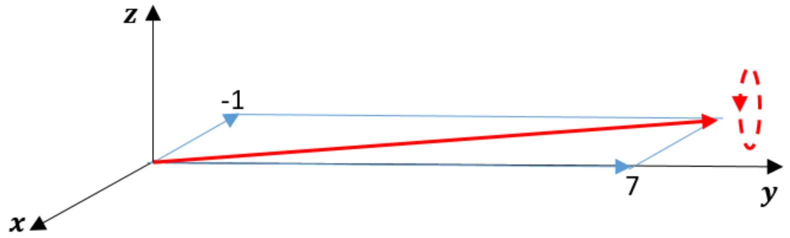
$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^3 + y^2 + z & z\,e^x & xyz - 4xz \end{vmatrix} = (xz - e^x)\,\hat{\imath} - (yz - 4z - 1)\,\hat{\jmath} + (ze^x - 2y)\,\hat{k}$$

$$\nabla \times \vec{V}(0,1,2) = (0\cdot 2 - e^0)\,\hat{\imath} - (1\cdot 2 - 4\cdot 2 - 1)\,\hat{\jmath} + (2\,e^0 - 2\cdot 1)\,\hat{k} = -\hat{\imath} + 7\,\hat{\jmath}$$

$$\left|\nabla \times \vec{V}(0,1,2)\right| = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = \sqrt{50} \cong 7.07$$

$$|\omega| \cong \frac{7.07}{2} \cong 3.54\,\frac{rad}{seg}$$

Rota en un plano vertical (la componente $\hat{k}$ es nula) con eje de rotación casi coincidente con yy' y sentido antihorario si lo miramos desde el sentido positivo hacia el origen, porque la componente $\hat{\jmath}$ es mucho mayor que la $\hat{\imath}$, usando la regla de la mano derecha.



Análisis Matemático II

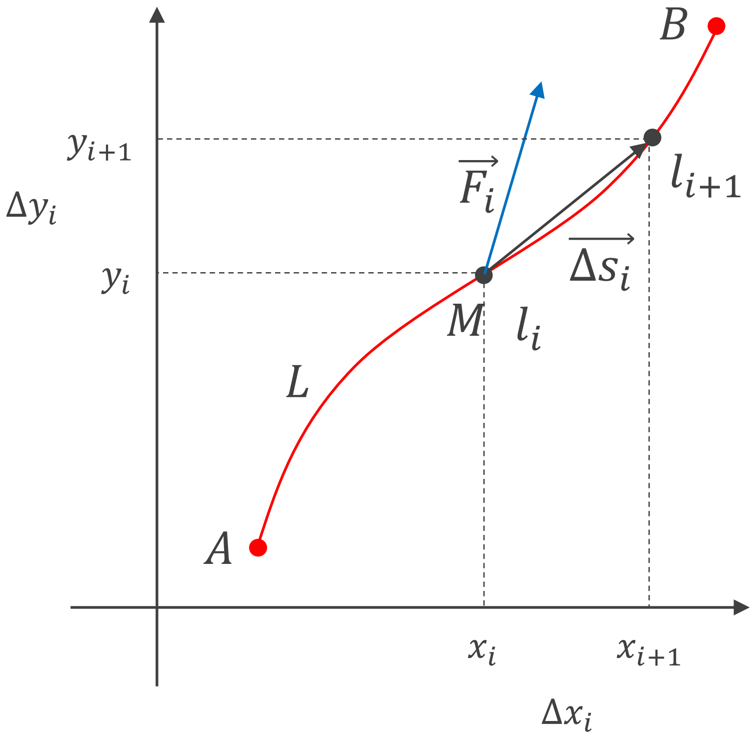
Integrales Curvilíneas

Integrales curvilíneas

Podemos generalizar el concepto de Integral Curvilínea a partir de lo estudiado para Integral Simple, reemplazando el intervalo de integración por una curva plana o una curva alabeada.

Sea un campo vectorial $\vec{F}$ definido a lo largo de una curva plana L tal que:

$\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}^3$



$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\hat{\imath} + Q(x,y)\hat{\jmath}$$

Podríamos suponer que $\vec{F}$ es la fuerza aplicada sobre un punto M que se desplaza a lo largo de la curva L y que dicha fuerza varía en magnitud y dirección a medida que el punto se desplaza, es decir:

$$\vec{F} = \vec{f}(M)$$

Calcularemos el trabajo T que realiza la fuerza $\vec{F}$ al desplazar el punto M desde A hasta B.

Integrales curvilíneas

Dividamos la curva L en n arcos por los puntos $A = l_0, l_1, \dots, l_{i-1}, l_i, l_{i+1}, \dots, l_n = B$, siendo $max\,\Delta l$ la longitud del arco más largo de la subdivisión. El trabajo que realiza la fuerza $\vec{F}$ a lo largo del arco $\widehat{l_i l_{i+1}}$ es, aproximadamente: $T_i \cong \overrightarrow{F_i} \cdot \overrightarrow{\Delta s_i}$.

Donde $\overrightarrow{F_i} = P(x_i, y_i)\hat{\imath} + Q(x_i, y_i)\hat{\jmath}$ es el valor de la fuerza $\vec{F}$ en l_i y $\overrightarrow{\Delta s_i} = \Delta x_i\,\hat{\imath} + \Delta y_i\,\hat{\jmath}$ el vector $\overrightarrow{l_i l_{i+1}}$. Entonces:

$$T_i \cong \overrightarrow{F_i}.\overrightarrow{\Delta s_i} = P(x_i, y_i)\,\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\,\Delta y_i$$

Y el trabajo total T de la fuerza $\vec{F}$ a lo largo de la curva L es, aproximadamente:

$$T \cong \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i}.\overrightarrow{\Delta s_i} = \sum_{i=1}^{n} [P(x_i, y_i)\,\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\,\Delta y_i]$$

El trabajo T de la fuerza $\vec{F}$ a lo largo de la curva L entre los puntos A y B está dado por el límite de esta suma cuando $n \to \infty$, es decir, cuando $max\,\Delta s \to 0$

Integrales curvilíneas

$$T = \lim_{max\,\Delta s \to 0} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} . \overrightarrow{\Delta s_i} = \lim_{max\,\Delta s \to 0} \sum_{i=1}^{n} [P(x_i, y_i)\,\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\,\Delta y_i]$$

Si $\vec{F}$ es una función continua, este límite existe y recibe el nombre de **Integral Curvilínea** de $\vec{F}$ a lo largo de la curva L.

$$\int_L \vec{F} \, . \, \overrightarrow{ds} = \lim_{max\,\Delta s \to 0} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} . \overrightarrow{\Delta s_i}$$

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \lim_{max\,\Delta s \to 0} \sum_{i=1}^{n} [P(x_i, y_i)\,\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\,\Delta y_i]$$

Esta última integral, se escribe usualmente especificando las coordenadas de los extremos de C.

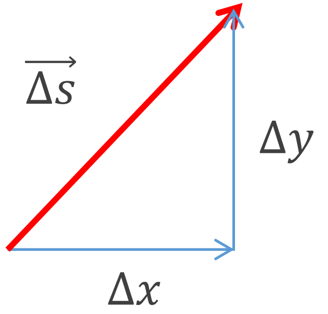
$$\boxed{\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{(A)}^{(B)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy}$$

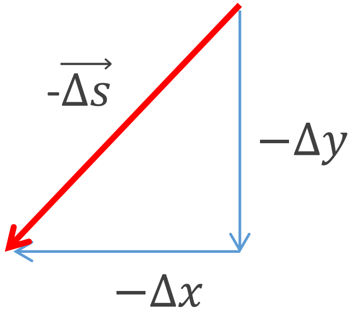
Integrales curvilíneas

Propiedades

1. *Al cambiar el sentido de integración, cambia el signo de la Integral Curvilínea (pues al invertir el sentido de integración cambia el signo del vector $\overrightarrow{\Delta s}$, por lo tanto cambia el signo de sus proyecciones Δx y Δy.*

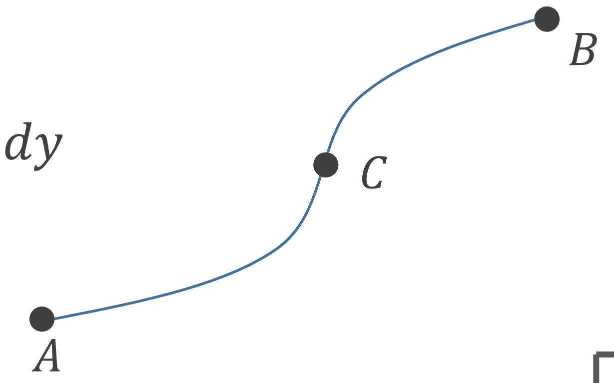
$$\int_{(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy = -\int_{(B)}^{(A)} P\,dx + Q\,dy$$





2. *Si dividimos la curva L por algún punto intermedio C, entonces:*

$$\int_{(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy = \int_{(A)}^{(C)} P\,dx + Q\,dy + \int_{(C)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy$$

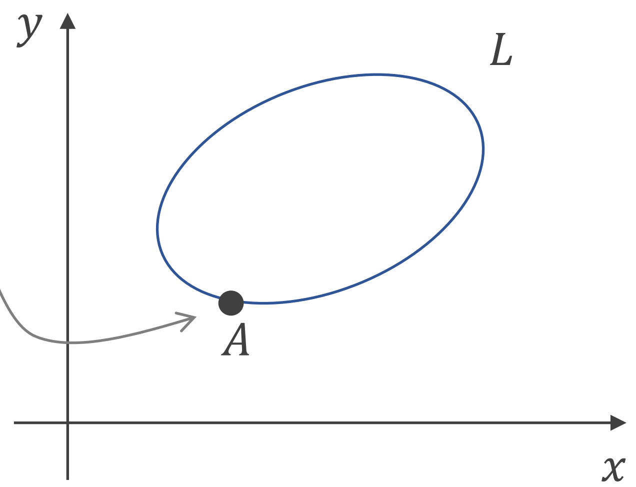


Esta última propiedad es válida para un mayor número de divisiones.

Integrales curvilíneas

Lo definido para la Integral Curvilínea es válido también cuando la curva L es cerrada. Se dice Integral Curvilínea a lo largo de una curva cerrada $\underbrace{\text{positivamente orientada}}_{\text{en sentido antihorario}}$ y se indica:

$$\int_L P\,dx + Q\,dy \quad o \quad \oint_L P\,dx + Q\,dy$$



El origen y el extremo de la curva coinciden, por lo tanto para integrar se debe subdividir la curva y debe indicarse el sentido de integración.

Integrales curvilíneas

Cálculo de la Integral Curvilínea

Evidentemente, el valor de la integral depende de la curva L.

- Si la curva L está dada en la forma $y = f(x)$, entonces, $dy = f'(x)\,dx$, sustituyendo:

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{x_1}^{x_2} \big(P[x,f(x)] + Q[x,f(x)]\,f'(x)\big)\,dx$$

- Si la curva L está dada en la forma $x = g(y)$, entonces, $dx = g'(y)\,dy$, sustituyendo:

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{y_1}^{y_2} (P[g(y),y]\,g'(y) + Q[g(y),y]\,)\,dy$$

Integrales curvilíneas

Ejemplo 1

Calcular la integral curvilínea: $\int_{(0,3)}^{(1,2)} (2x^4 + 2yx^2)\, dx + 4xy\, dy$, a lo largo de la curva: $y = \frac{1}{2}x^2$

La ecuación de la curva L viene dada por $y = \frac{1}{2}x^2$, por lo tanto, $dy = x\, dx$, sustituyendo en la integral:

$$\int_{(0,3)}^{(1,2)} (2x^4 + 2yx^2)\, dx + 4xy\, dy = \int_0^1 (2x^4 + x^4)\, dx + 2x^3\, x\, dx = \int_0^1 5x^4\, dx = x^5\Big|_0^1 = 1$$

Ejemplo 2

Calcular la integral curvilínea: $\int_{(4,0)}^{(5,1)} y\, dx + x\, dy$, a lo largo de la curva: $x = 5y - 1$

La ecuación de la curva L viene dada por $x = 5y - 1$, por lo tanto, $dx = 5\, dy$, sustituyendo en la integral:

$$\int_{(4,0)}^{(5,1)} y\, dx + x\, dy = \int_0^1 5y\, dy + (5y - 1)\, dy = \int_0^1 (10y - 1)\, dy = (5y^2 - y)\Big|_0^1 = 4$$

Integrales curvilíneas

- Si la curva L está dada en la forma vectorial $\vec{r}(t) = [f(t), g(t)]$:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} dx = f'(t)dt \\ dy = g'(t)dt \end{cases} \quad \text{con} \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{t_1}^{t_2} \big(P[f(t),g(t)]\,f'(t) + Q[f(t),g(t)]\,g'(t)\big)\,dt$$

Ejemplo 3

Calcular la integral curvilínea: $\displaystyle\int_L y\,dx + x\,dy$, siendo L: $\begin{cases} x = 2t \\ y = t+1 \end{cases}$ $\quad 2 \leq t \leq 3$

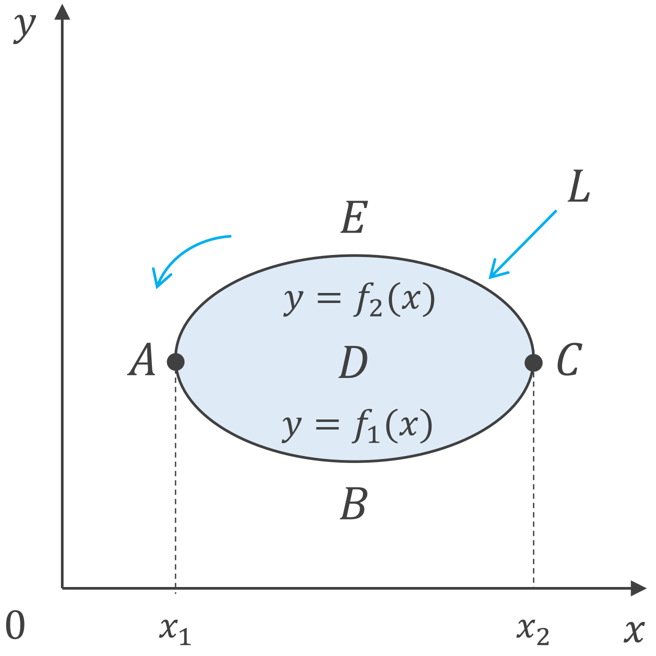
Entonces $dx = 2\,dt$ y $dy = dt$, sustituyendo en la integral:

$$\int_2^3 (t+1)\,2\,dt + 2t\,dt = \int_2^3 (2t+2)\,dt + 2t\,dt = \int_2^3 (4t+2)\,dt = (2t^2+2t)\Big|_2^3 = 24 - 12 = 12$$

Integrales curvilíneas

Área de un dominio limitado por una curva cerrada

Consideremos el Dominio D limitado por la curva cerrada L, tal como se indica en la figura:



Recordemos cómo calcular el área del dominio D:

$$A_D = \iint_D dydx = \int_{x_1}^{x_2} [f_2(x) - f_1(x)]\, dx = \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} f_2(x)\, dx}_{(a)} - \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} f_1(x)\, dx}_{(b)}$$

La integral (a) es una integral curvilínea a lo largo de la curva $\widehat{AEC}$ cuya ecuación es $y = f_2(x)$:

$$\int_{x_1}^{x_2} f_2(x)\, dx = \int_{\widehat{AEC}} y\, dx = -\int_{\widehat{CEA}} y\, dx$$

Integrales curvilíneas

La integral (b) es una integral curvilínea a lo largo de la curva $\widehat{ABC}$ con ecuación $y = f_1(x)$:

$$\int_{x_1}^{x_2} f_1(x)\, dx = \int_{\widehat{ABC}} y\, dx$$

Reemplazando en la fórmula de área lo obtenido en (a) y (b) tenemos:

$$A_D = -\int_{\widehat{CEA}} y\, dx - \int_{\widehat{ABC}} y\, dx = -\left(\int_{\widehat{CEA}} y\, dx + \int_{\widehat{ABC}} y\, dx\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_D = -\int_L y\, dx}$$

Nótese que se integró en sentido anti-horario.

Análogamente, con un procedimiento similar, podemos demostrar que: $\boxed{A_D = \int_L x\, dy}$

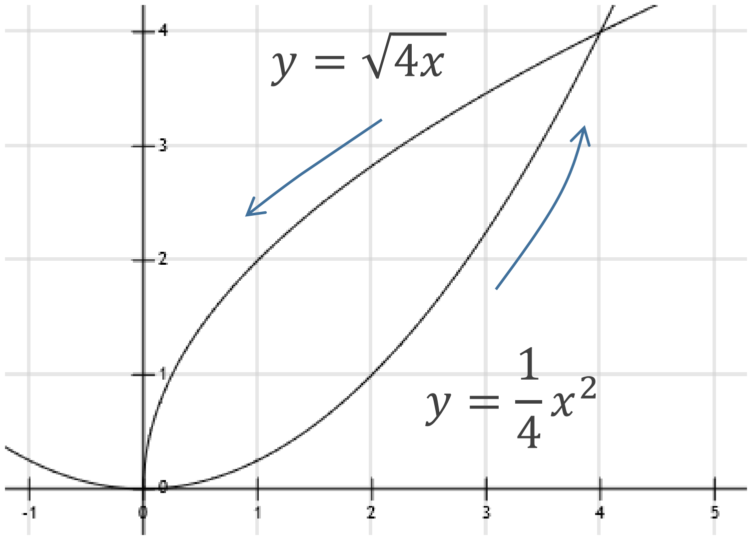
La fórmula mas frecuentemente usada es la semisuma de las dos expresiones anteriores:

$$\boxed{A_D = \frac{1}{2}\int_L (-y)\, dx + x\, dy}$$

Integrales curvilíneas

Ejemplo 4

Calcular el área comprendida entre la curva: $4y = x^2$ y la curva: $4x = y^2$



$$\mathrm{L}_1\!: \; 4y = x^2 \;\rightarrow\; y = \frac{1}{4}x^2, \qquad dy = \frac{1}{2}x\,dx$$

$$\mathrm{L}_2\!: \; 4x = y^2 \;\rightarrow\; x = \frac{1}{4}y^2, \qquad dx = \frac{1}{2}y\,dy$$

$$A = \frac{1}{2}\int_L (-y)\,dx + x\,dy = \frac{1}{2}\int_{L_1} (-y)\,dx + x\,dy + \frac{1}{2}\int_{L_2} (-y)\,dx + x\,dy$$

$$A = \frac{1}{2}\left[\int_0^4 \left(-\frac{1}{4}x^2\right)dx + \int_0^4 x\cdot\frac{1}{2}x\,dx\right] + \frac{1}{2}\left[\int_4^0 (-y)\cdot\frac{1}{2}\,y\,dy + \frac{1}{4}y^2\,dy\right]$$

$$A = \frac{1}{2}\left[-\frac{x^3}{12} + \frac{x^3}{6}\right]_0^4 + \frac{1}{2}\left[-\frac{y^3}{6} + \frac{y^3}{12}\right]_4^0 = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{12}\right]_0^4 + \frac{1}{2}\left[-\frac{y^3}{12}\right]_4^0 = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

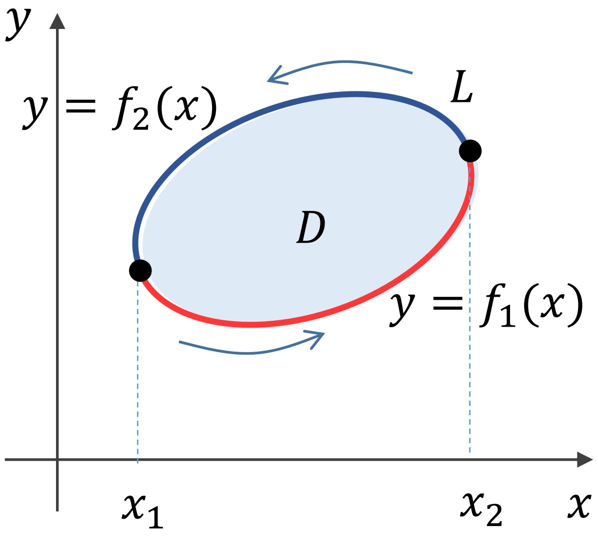
Integrales curvilíneas

Fórmula de Green (Teorema de Green)

La Fórmula de Green establece la relación existente entre la Integral Doble, extendida sobre un dominio D y la Integral Curvilínea a lo largo de la frontera L de dicho dominio.

Enunciado: Sea L una trayectoria cerrada simple, positivamente orientada, diferenciable a trozos en el plano xy y sea D el dominio limitado por L.

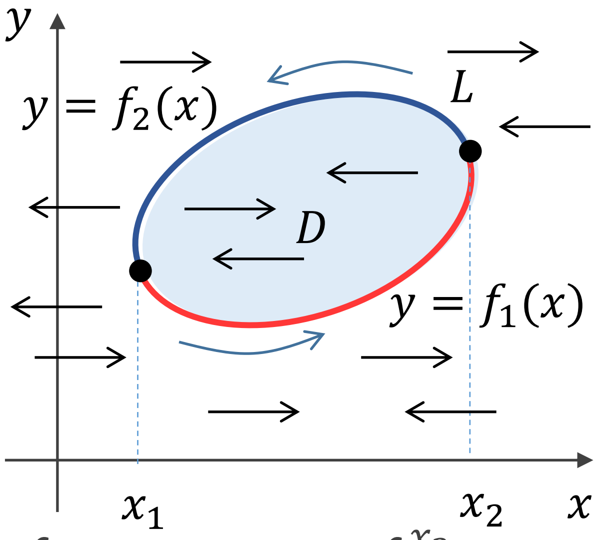
Si $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\,\hat{\imath} + Q(x,y)\,\hat{\jmath}$ es un campo vectorial con derivadas parciales continuas en el dominio D, y $\overrightarrow{dr} = dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath}$, entonces:



$$\oint_{L} [P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy] = \iint_{D} \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right] dxdy$$

Integrales curvilíneas

Demostración: Para demostrar el Teorema, supongamos primero que $\vec{F}(x,y)$ es un campo vectorial que sólo tiene componente en la dirección del versor $\hat{\imath}$. Es decir $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\,\hat{\imath}$



$$\oint_L \vec{F}(x,y)\cdot\overrightarrow{dr} = \oint_L P(x,y)\,dx$$

$$\oint_L P(x,y)\,dx = \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} P\big(x,f_1(x)\big)\,dx}_{} + \underbrace{\int_{x_2}^{x_1} P\big(x,f_2(x)\big)\,dx}_{}$$

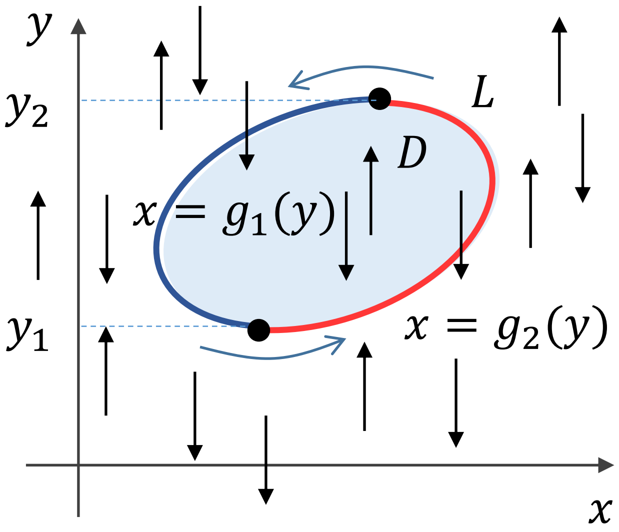
$$\oint_L P(x,y)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} P\big(x,f_1(x)\big)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} P\big(x,f_2(x)\big)\,dx$$

$$\oint_L P(x,y)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \Big[\underbrace{P\big(x,f_1(x)\big)}_{} - \underbrace{P\big(x,f_2(x)\big)}_{}\Big]\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} \Big[\underbrace{P\big(x,f_2(x)\big)}_{} - \underbrace{P\big(x,f_1(x)\big)}_{}\Big]\,dx$$

$$= -\int_{x_1}^{x_2} \big[P(x,y)\big]_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)}\,dx = -\int_{x_1}^{x_2}\int_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\;dy\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\;dA \qquad (1)$$

Integrales curvilíneas

Análogamente, supongamos ahora que $\vec{F}(x,y)$ es un campo vectorial que sólo tiene componente en la dirección del versor $\hat{j}$. Es decir $\vec{F}(x,y) = Q(x,y)\,\hat{j}$



$$\oint_L \vec{F}(x,y)\cdot\overrightarrow{dr} = \int_L Q(x,y)\,dy$$

$$\oint_L Q(x,y)\,dy = \underbrace{\int_{y_1}^{y_2} Q(g_2(y),y)\,dy}_{} + \underbrace{\int_{y_2}^{y_1} Q(g_1(y),y)\,dy}_{}$$

$$\oint_L Q(x,y)\,dy = \int_{y_1}^{y_2} Q(g_2(y),y)\,dy - \int_{y_1}^{y_2} Q(g_1(y),y)\,dy$$

$$\oint_L Q(x,y)\,dy = \int_{y_1}^{y_2} [\underbrace{Q(g_2(y),y)}_{} - \underbrace{Q(g_1(y),y)}_{}]\,dy$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} [Q(x,y)]_{x=g_1(y)}^{x=g_2(y)}\,dy = \int_{y_1}^{y_2}\int_{x=g_1(y)}^{x=g_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\;dx\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\;dA \qquad (2)$$

Integrales curvilíneas

Sea ahora cualquier campo vectorial $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\,\hat{\imath} + Q(x,y)\,\hat{\jmath}$,

$$\oint_L \vec{F}(x,y)\cdot\overrightarrow{dr} = \oint_L [P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy] = \oint_L P(x,y)\,dx + \oint_L Q(x,y)\,dy$$

De (1) y (2):

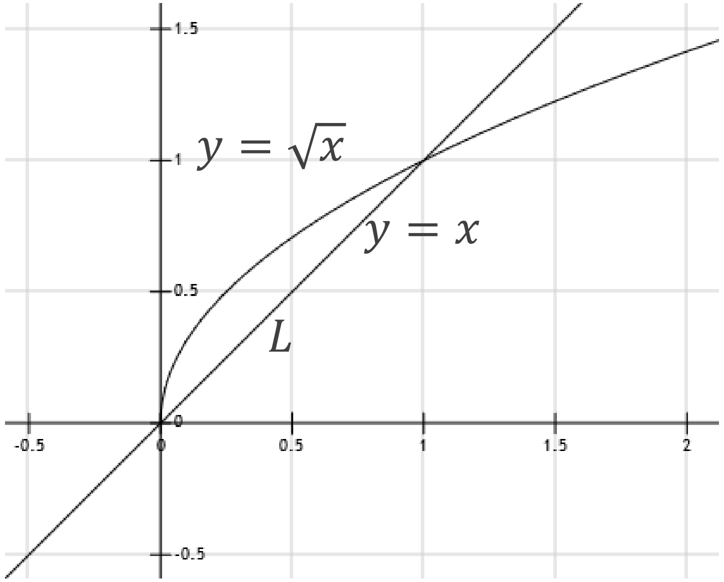
$$\oint_L [P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy] = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\;dA + \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\;dA$$

$$\boxed{\oint_{\boldsymbol{L}} [\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{dx} + \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{dy}] = \iint_{\boldsymbol{D}} \left[\frac{\boldsymbol{\partial Q}}{\boldsymbol{\partial x}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \frac{\boldsymbol{\partial P}}{\boldsymbol{\partial y}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right]\boldsymbol{dxdy}}$$

Integrales curvilíneas

Ejemplo 5

Usando la fórmula de Green calcular la integral curvilínea: $\oint_{\boldsymbol{L}} -\boldsymbol{x^2 y\, dx + y\, dy}$ a lo largo de la curva L.



$$P(x,y) = -x^2 y, \qquad Q(x,y) = y$$

$$\oint_L P\,dx + Q dy = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dxdy$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -x^2, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 0$$

$$\oint_L -x^2 y\, dx + y\, dy = \iint_D x^2 \; dxdy$$

$$\iint_D x^2\, dxdy \; = \int_0^1 \int_{y^2}^{y} x^2\, dxdy = \int_0^1 \frac{x^3}{3}\bigg|_{y^2}^{y} dy = \int_0^1 \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^6}{3}\right) dy = \left(\frac{y^4}{12} - \frac{y^7}{21}\right)\bigg|_0^1 = \frac{1}{12} - \frac{1}{21} = \frac{3}{84} = \frac{1}{28}$$

Integrales curvilíneas

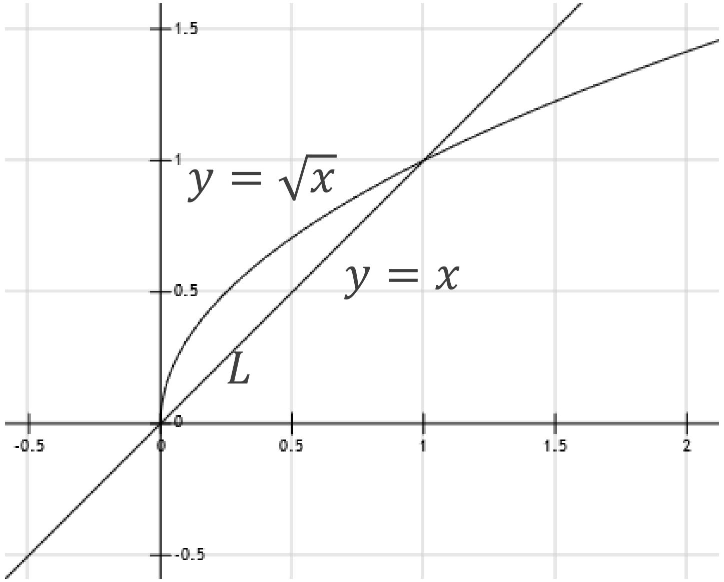
Ejemplo 5 (cont.)

La integral doble del segundo miembro de la igualdad, se resolvió como integral doble Tipo II, es decir integrando primero según $\boldsymbol{x}$, y luego según $\boldsymbol{y}$. Observe que, en este caso, se podría haber resuelto como integral doble Tipo I, es decir integrando primero según $\boldsymbol{y}$, y luego según $\boldsymbol{x}$, y el resultado es el mismo, como se muestra a continuación:

$$\oint_L -x^2 y\, dx + y\, dy = \iint_D x^2\ dxdy = \int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} x^2\, dy\, dx$$

$$\int_0^1 x^2 .\ y\Big|_x^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 x^2 .\ (\sqrt{x} - x)dx = \int_0^1 (x^{\frac{5}{2}} - x^3)dx$$

$$= \left(\frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{7} - \frac{1}{4} = \frac{8-7}{28} = \frac{1}{28}$$



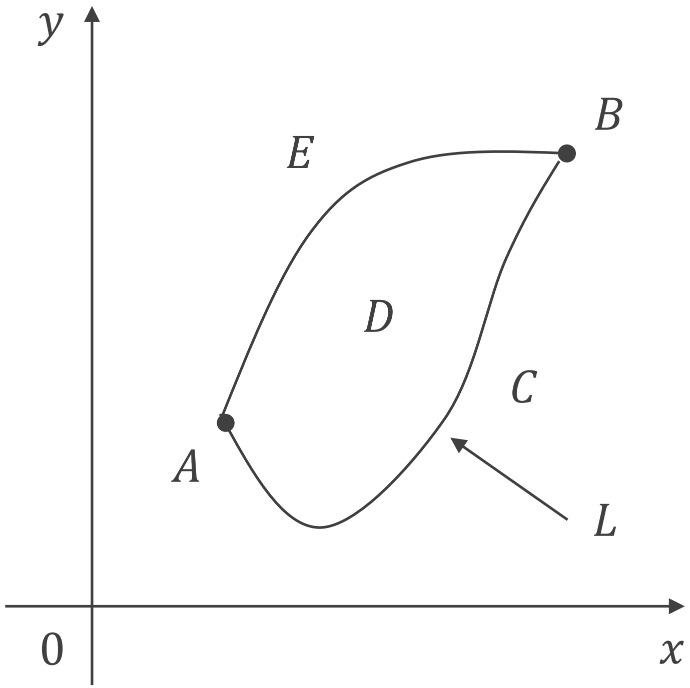
Análisis Matemático II

Integrales Curvilíneas

Integrales curvilíneas

Condición para que la integral curvilínea no dependa de la trayectoria

Analicemos la integral curvilínea:



$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \qquad (1)$$

Siendo $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ funciones continuas, con derivadas parciales también continuas en un dominio arbitrario D.

Si la integral (1) no depende de la trayectoria de integración, sino que sólo depende de los extremos, entonces debe cumplirse que:

$$\int_{\widehat{ACB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{\widehat{AEB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

Integrales curvilíneas

Igualamos a cero:

$$\int_{\widehat{ACB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy - \int_{\widehat{AEB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

Cambiamos el sentido de integración de la segunda integral:

$$\int_{\widehat{ACB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy + \int_{\widehat{BEA}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

Luego, la integral curvilínea a lo lago del contorno L es:

$$\int_{L} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \qquad (2)$$

Es evidente que el contorno cerrado L, compuesto por las curvas $\widehat{ACB}$ y $\widehat{BEA}$ es arbitrario.

Integrales curvilíneas

Si la integral curvilínea no depende de la forma de la curva que une los puntos A y B, sino de la posición de estos, resulta que esta integral a lo largo de un contorno cerrado cualquiera L es nula.

La conclusión recíproca también es válida. Si la integral curvilínea a lo largo de cualquier contorno cerrado L es nula, ésta no depende de la forma de la curva que une los puntos A y B sino de la posición de estos.

Veamos ahora qué condiciones deben satisfacer las funciones $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ para que la integral curvilínea (2) sea nula. Recordemos la Fórmula de Green correspondiente a la trayectoria dada:

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dxdy$$

Integrales curvilíneas

Si la integral curvilínea del primer miembro es nula, también lo será la integral doble del segundo miembro y, para que ello ocurra, se debe cumplir:

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}}$$

Esta es la condición necesaria y suficiente para que la Integral Curvilínea (1) sea independiente de la trayectoria de integración.

Ejemplo 1:

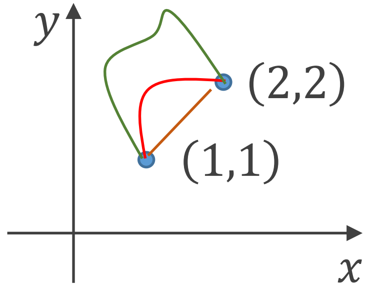
La integral curvilínea $\int_{(1,1)}^{(2,2)} xy^2dx + (x^2y - 2y)\,dy$ es independiente de la trayectoria de integración pues:

$$P(x,y) = xy^2 \rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2xy$$

$$Q(x,y) = (x^2y - 2y) \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

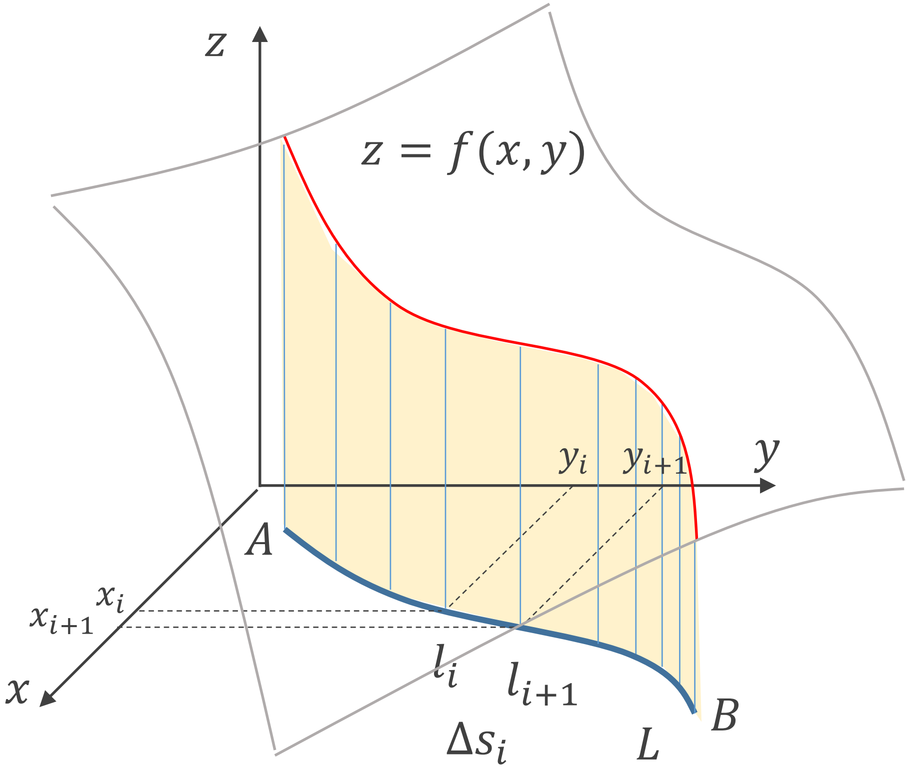
Cualquiera sea la trayectoria de integración que elijamos para integrar entre los puntos $(1,1)$ y $(2,2)$, siempre obtendremos el mismo resultado.



Integrales curvilíneas

Integral curvilínea de un campo escalar

Definiremos la integral curvilínea de la función $z = f(x, y)$ a lo largo de una curva L como:



$$\int_L f(x, y)\, ds = \lim_{max\ \Delta s \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta s_i$$

Donde Δs_i es la longitud del arco $\widehat{l_i l_{i+1}}$ y ds el diferencial de arco.

- La curva L, en forma paramétrica, viene dada como:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t) \\ y = \varphi_2(t) \end{cases}$$

con φ_1 y φ_2 continuas con derivadas también continuas.

Integrales curvilíneas

Como $dx = \varphi_1'(t)\,dt,\ dy = \varphi_2'(t)\,dt$ y $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ $\Rightarrow ds = \sqrt{[\varphi_1{}'(t)]^2 + [\varphi_2{}'(t)]^2}\,dt$

La integral curvilínea se calcula como:

$$\int_L f(x,y)\,ds = \int_{(A)}^{(B)} f[\varphi_1(t), \varphi_2(t)]\sqrt{[\varphi_1{}'(t)]^2 + [\varphi_2{}'(t)]^2}\,dt$$

Una interpretación gráfica de esta integral curvilínea es que nos da el área de la lámina perpendicular al plano xy, bajo la superficie $z = f(x,y)$, cuya base es la curva L.

- Por ejemplo, si la curva L se da en la forma $y = g(x)$ la longitud del diferencial de arco es:

$$ds = \sqrt{1 + [g'(x)]^2}\,dx$$

$$\begin{cases} x = x \\ y = g(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} dx = dx \\ dy = g'(x)\,dx \end{matrix}$$

Y la integral curvilínea se calcula:

$$\int_L f(x,y)\,ds = \int_{(A)}^{(B)} f[x, g(x)]\sqrt{1 + [g'(x)]^2}\,dx$$

Integrales curvilíneas

- También podemos considerar la integral curvilínea de la función $w = f(x, y, z)$ a lo largo de la curva alabeada L como:

$$\int_L f(x,y,z)\, ds = \int_{(t_1)}^{(t_2)} f[\,\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)]\sqrt{[\varphi_1{}'(t)]^2 + [\varphi_2{}'(t)]^2 + [\varphi_3{}'(t)]^2}\, dt \quad \begin{cases} x = \varphi_1(t) \\ y = \varphi_2(t) \\ z = \varphi_3(t) \end{cases}$$

$$\text{con } t_1 \leq t \leq t_2$$

Ejemplo 2:

Sea el campo escalar $z = xy$ y la curva L dada por: $\begin{cases} x = 4t \\ y = 3t \end{cases} \rightarrow 0 \leq t \leq 1$

Tenemos $dx = 4\, dt,\ dy = 3\, dt$ y $ds = \sqrt{16+9}\, dt = \sqrt{25}\, dt = 5\, dt$

La integral curvilínea:

$$\int_L f(x,y)\, ds = \int_0^1 f(4t, 3t)\, 5\, dt = \int_0^1 12\, t^2\, 5\, dt = \int_0^1 60\, t^2\ dt = 20\, t^3 \Big|_0^1 = 20$$

Integrales curvilíneas

Integral curvilínea de un campo vectorial

De manera análoga, podemos definir la integral curvilínea de un campo vectorial. Sea el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\hat{\imath} + Q(x,y,z)\hat{\jmath} + R(x,y,z)\hat{k}$ y la curva alabeada L dada por la función vectorial $\vec{r}(x,y,z) = x.\hat{\imath} + y.\hat{\jmath} + z.\hat{k}$

O en su forma paramétrica: $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$ continuas en un intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$

Entonces la integral curvilínea del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)$ a lo largo de la curva L es:

$$\int_L \vec{F}(x,y,z) \cdot \overrightarrow{dr} = \int_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

$$\int_{(t_1)}^{(t_2)} \big(P[f(t),g(t),h(t)]f'(t) + Q[f(t),g(t),h(t)]g'(t) + R[f(t),g(t),h(t)]h'(t)\big)\,dt$$

Integrales curvilíneas

Función potencial y campo vectorial conservativo

Si un campo vectorial $\vec{F} = P(x,y)\hat{\imath} + Q(x,y)\hat{\jmath}$ es el gradiente de alguna función $\boldsymbol{u(x,y)}$, se dice que es un **campo vectorial conservativo** y la función $\boldsymbol{u}$ se llama **función potencial** de $\vec{F}$.

De acuerdo a lo definido, si $\vec{F}$es el gradiente de una función $u(x,y)$ tenemos:

$$\vec{F} = P(x,y)\,\hat{\imath} + Q(x,y)\,\hat{\jmath} = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\,\hat{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,\hat{\jmath}$$

Por lo tanto:

$$P = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad\qquad Q = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Si derivamos la primera igualdad con respecto a «y» y la segunda respecto a «x», tenemos:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \qquad\qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

Integrales curvilíneas

Si las derivadas segundas son continuas, por el teorema de Schwartz se verifica que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (3)$$

Luego podemos afirmar que si $\vec{F} = P(x,y)\,\hat{\imath} + Q(x,y)\,\hat{\jmath}$ es un **campo vectorial conservativo** entonces se verifica (3) es decir que la integral curvilínea del campo es nula.

La inversa de esta afirmación se cumple solo si $\vec{F}$ es un campo vectorial conservativo definido sobre una región simplemente conexa D.

Entonces, podemos decir que si $\vec{F} = P(x,y)\,\hat{\imath} + Q(x,y)\,\hat{\jmath}$ es un campo vectorial definido en una región simplemente conexa D, con $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ continuas y con derivadas parciales también continuas, si se verifica que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ en toda la región, entonces $\vec{F}$ es un **campo vectorial conservativo.**

Integrales curvilíneas

Diferencia de potencial

Si $\boldsymbol{u(x,y)}$ es la función potencial del campo vectorial conservativo $\vec{F} = P(x,y)\,\hat{\imath} + Q(x,y)\,\hat{\jmath}$ entonces, la integral curvilínea $\int_{(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy$ mide la diferencia de potencial entre los puntos A y B.

Demostración:

Recordemos que si $u(x,y)$ es la función potencial de $\vec{F}$, entonces $P = \partial u/\partial x$ y $Q = \partial u/\partial y$, en cuyo caso la expresión $P\,dx + Q\,dy$ es:

$$P\,dx + Q\,dy = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy$$

Y la integral curvilínea resulta:

$$\int_{(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy = \int_{(A)}^{(B)} \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy$$

Integrales curvilíneas

Ahora escribamos la ecuación paramétrica de la trayectoria L que une los puntos A y B

$u(x, y)\ \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ $\quad t_A \leq t \leq t_B$, con t_A que corresponde al punto A y t_B al punto B.

Entonces:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} \ \rightarrow \ du = \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right] dt \ \rightarrow du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

Finalmente, la integral curvilínea resulta:

$$\int_{(A)}^{(B)} \frac{\partial u}{\partial x}\ dx + \frac{\partial u}{\partial y}\ dy = \int_{(A)}^{(B)} du = u(B) - u(A)$$

Integrales curvilíneas

Obtención de la función potencial

Dado un campo vectorial conservativo $\vec{F} = P(x,y)\,\hat{\imath} + Q(x,y)\,\hat{\jmath}$, entonces: $P = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ y $Q = \dfrac{\partial u}{\partial y}$

Luego podemos obtener $u(x,y)$ integrando a P con respecto a x o a Q con respecto a y.

Integremos P con respecto a x:

$$u(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \varphi(y) \quad (1)$$

Como estamos integrando respecto a x y P es una derivada parcial respecto e x, podemos expresar la constante de integración en función de y.

$u(x,y)$ es la función potencial buscada, sólo nos resta obtener el valor de $\varphi(y)$ y para ello derivaremos (1) con respecto a y:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \int P(x,y)dx}{\partial y} + \varphi'(y)$$

pero como $Q = \partial u \,/\, \partial y$

$$\varphi'(y) = Q - \frac{\partial \int P(x,y)dx}{\partial y}$$

$$\varphi(y) = \int \left[Q - \frac{\partial \int P(x,y)dx}{\partial y}\right] dy$$

Sólo resta reemplazar $\varphi(y)$ en (1)

Integrales curvilíneas

Ejemplo 3:

Sea $\vec{F} = (x + y^2)\,\hat{\imath} + 2xy\,\hat{\jmath}$

Primero, verifiquemos que se trata de un campo vectorial conservativo:

$$P = x + y^2 \;\Rightarrow\; \frac{\partial P}{\partial y} = 2y \qquad Q = 2xy \;\Rightarrow\; \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y \qquad \therefore \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Entonces, la expresión $(x + y^2)\,dx + 2xy\,dy$ es el diferencial total de una función $u(x, y)$, es decir:

$$du(x, y) = (x + y^2)\,dx + 2xy\,dy$$

$$u(x, y) = \int P\,dx + \varphi(y) = \int (x + y^2)\,dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{2} + y^2x + \varphi(y)$$

$$Q = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2xy + \varphi'(y) \to 2xy = 2xy + \varphi'(y) \quad \therefore \quad \varphi(y) = C$$

$$\boxed{u(x, y) = \frac{x^2}{2} + y^2x + C}$$

Análisis Matemático II

Integrales de Superficie

Integrales de Superficie

Las integrales de superficie son la generalización de las integrales dobles.

Se trata de calcular una integral sobre un dominio que no es plano sino una superficie σ en el espacio, limitada por una curva cerrada λ y cada punto de dicha superficie lleva asociado un valor que mide, por ejemplo, la velocidad de las partículas de un líquido y en ese caso se tratará de la medida de cuánto líquido pasa a través de una superficie (que se llama **flujo**).

Si se trata de una superficie cerrada que es el límite de una región, el flujo será también una medida de la masa cambiante en esa región.

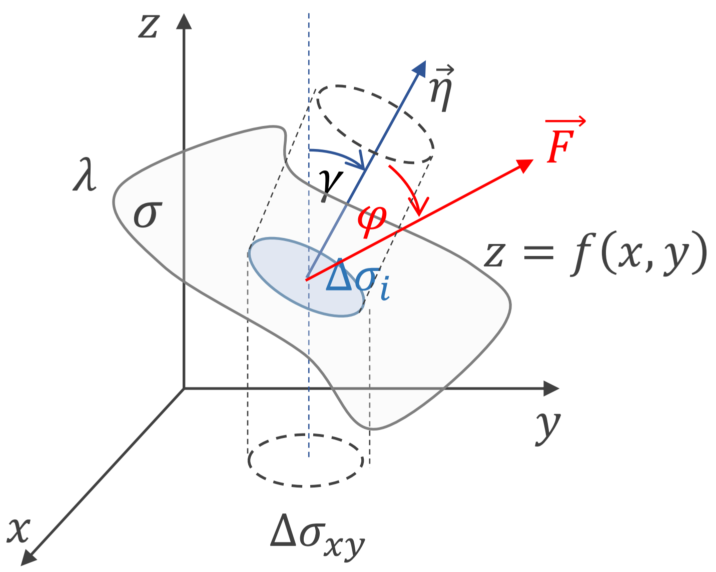
En general, cada partícula estará sometida a un campo vectorial $\vec{F}$.

En principio, el flujo que atraviesa es algo que se puede calcular para cualquier superficie, cerrada o no.

En física muchas cosas pueden considerarse como un flujo de algún tipo, no solo los líquidos sino también el calor, las fuerzas y los campos electromagnéticos pueden considerarse como flujos a través del espacio.

Integrales de Superficie

Sean una superficie σ limitada por una curva cerrada λ y en cada punto de dicha superficie un versor normal $\vec{\eta}$. Si los puntos de esta superficie, son puntos de un campo vectorial $\vec{F}$, se define la **Integral de Superficie**:



$$\iint_\sigma \vec{F}.\vec{\eta}\, d\sigma = \lim_{máx\ \Delta\sigma_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\,.\vec{\eta}_i\ \Delta\sigma_i$$

Siendo el campo $\vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\ \hat{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\ \hat{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\ \hat{\boldsymbol{k}}$ y el versor normal $\vec{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{cos\,\alpha}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{cos\,\beta}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{cos\,\gamma}\,\hat{\boldsymbol{k}}$ con $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ y $\boldsymbol{\gamma}$ los ángulos que forma el versor normal con los ejes coordenados.

$$\iint_{\boldsymbol{\sigma}} \vec{\boldsymbol{F}}.\vec{\boldsymbol{\eta}}\, \boldsymbol{d\sigma} = \iint_{\boldsymbol{\sigma}} (\boldsymbol{P\,cos\,\alpha} + \boldsymbol{Q\,cos\,\beta} + \boldsymbol{R\,cos\,\gamma})\ \boldsymbol{d\sigma}$$

Observe que se trata del producto escalar de dos vectores $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{i}}\,.\vec{\boldsymbol{\eta}}_{\boldsymbol{i}}\ \Delta\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}}.\boldsymbol{1}.\boldsymbol{cos\varphi}.\ \Delta\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{i}}$

Y el segundo miembro es el volumen de un cilindro de base $\Delta\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{i}}$ y altura $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}}.\boldsymbol{cos\varphi}$

Luego, si $\vec{\boldsymbol{F}}$ por ejemplo, representa la velocidad de un líquido, este producto, la integral de superficie, corresponde a la cantidad total de líquido que atraviesa $\boldsymbol{\sigma}$ en la dirección de $\vec{\boldsymbol{\eta}}$.

Integrales de Superficie

Cálculo de la Integral de Superficie

Supongamos que la superficie $\boldsymbol{\sigma}$ limitada por la curva $\boldsymbol{\lambda}$ viene dada por una expresión de la forma: $\boldsymbol{z = f(x, y)}$

Recordemos además que los cosenos directores del versor normal $\vec{\boldsymbol{\eta}}$ son:

$$\cos\alpha = \frac{-\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}, \quad \cos\beta = \frac{-\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

$\Delta\boldsymbol{\sigma_{xy}}$ es la proyección en el plano $\boldsymbol{xy}$ de $\Delta\boldsymbol{\sigma}$, es decir:

$$\Delta\boldsymbol{\sigma_{xy}} = \Delta\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\cos\gamma} \;\Rightarrow\; \Delta\boldsymbol{\sigma} = \frac{\Delta\boldsymbol{\sigma_{xy}}}{\boldsymbol{\cos\gamma}} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{d\sigma} = \frac{\boldsymbol{dxdy}}{\boldsymbol{\cos\gamma}}$$

Reemplazando en la definición de Integral de Superficie $\iint_{\boldsymbol{\sigma}} \vec{\boldsymbol{F}}.\vec{\boldsymbol{\eta}}\, \boldsymbol{d\sigma} = \iint_{\boldsymbol{\sigma}} (\boldsymbol{P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma})\, \boldsymbol{d\sigma}$ en el segundo miembro a $\boldsymbol{d\sigma}$ obtenemos:

Integrales de Superficie

$$\iint_\sigma \vec{F}.\vec{\eta}\, d\sigma \;= \iint_\sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\frac{dxdy}{\cos\gamma}$$

$$= \iint_\sigma \left(P\,\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} + Q\,\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} + R\,\frac{\cos\gamma}{\cos\gamma}\right) dxdy$$

$$\boxed{\iint_{\boldsymbol{\sigma}} \vec{\boldsymbol{F}}.\vec{\boldsymbol{\eta}}\, \boldsymbol{d\sigma} = \iint_{\boldsymbol{\sigma}} \left(-\frac{\boldsymbol{\partial z}}{\boldsymbol{\partial x}}\boldsymbol{P} - \frac{\boldsymbol{\partial z}}{\boldsymbol{\partial y}}\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{R}\right)\boldsymbol{dxdy}}$$

donde P, Q y R están evaluadas en $[x, y, f(x, y)]$.

Si la superficie $\boldsymbol{\sigma}$ limitada por la curva $\boldsymbol{\lambda}$, viene dada por una expresión de la forma: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ o de la forma $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$, se procede de manera análoga pero proyectando sobre los planos $\boldsymbol{yoz}$ o sobre el plano $\boldsymbol{xoz}$, respectivamente y en esos casos diremos que:

$$\Delta\sigma_{yz} = \Delta\sigma \cdot \cos\alpha \;\Rightarrow\; \Delta\sigma = \frac{\Delta\sigma_{yz}}{\cos\alpha} \qquad \text{o bien} \qquad \Delta\sigma_{xz} = \Delta\sigma \cdot \cos\beta \;\Rightarrow\; \Delta\sigma = \frac{\Delta\sigma_{xz}}{\cos\beta}$$

Integrales de Superficie

Teorema de Stokes

El Teorema de Stokes establece la relación entre la Integral Curvilínea a lo largo de la curva λ y la Integral de Superficie sobre la superficie σ cuya frontera es la curva λ.
Puede considerarse como una versión en el espacio del Teorema de Green.

Sea σ una superficie positivamente orientada limitada por la curva λ y $\vec{F}$ un campo vectorial con derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a σ, entonces:

$$\iint_{\sigma} rot\,\vec{F}\cdot\vec{\eta}\,d\sigma = \int_{\lambda}\vec{F}\cdot\overrightarrow{ds}$$

con $\vec{\eta}$ un versor normal a la superficie σ.

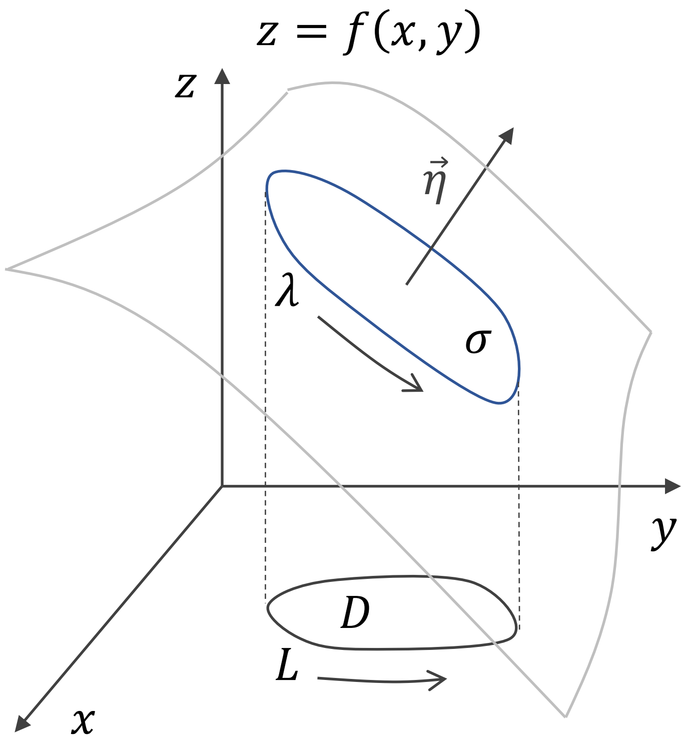
O, de otra manera:

$$\iint_{\sigma}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]d\sigma=\int_{\lambda}P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

Integrales de Superficie

Demostración

Supongamos que $\boldsymbol{\sigma}$ viene dada por la ecuación $\boldsymbol{z = f(x,y)}$ y es tal que toda recta paralela al eje $\boldsymbol{z}$, que la atraviesa, la corta en un punto y la proyección de esta superficie en el plano es el domino D.



Considerando que $\boldsymbol{z = f(x,y)}$ es continua y tiene derivadas hasta segundo orden también continuas, **resolveremos las integrales del teorema por separado**. Recordemos que:

$$\vec{F} = P(x,y,z)\,\hat{\imath} + Q(x,y,z)\,\hat{\jmath} + R(x,y,z)\,\hat{k}$$

Recordemos que:

$$rot\,\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\hat{k}$$

$$\iint_{\sigma} \vec{F}.\vec{\eta}\,d\sigma = \iint_{\sigma}\left(-\frac{\partial z}{\partial x}P - \frac{\partial z}{\partial y}Q + R\right)dxdy$$

donde P, Q y R se evalúan en $[x, y, f(x,y)]$.

Integrales de Superficie

Comencemos resolviendo la **Integral de Superficie** aplicando la fórmula de cálculo anterior a $rot\ \vec{F}$:

$$\iint_{\sigma} rot\ \vec{F} \cdot \vec{\eta}\ d\sigma = \iint_{\sigma} \left[-\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] dxdy \qquad (1)$$

donde P, Q y R están evaluados en $[x, y, f(x, y)]$.

Ahora resolveremos la **Integral Curvilínea**:

$$\int_{\lambda} \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_{\lambda} P\ dx + Q\ dy + R\ dz$$

Recordemos que

$$\boldsymbol{\vec{F} = P(x, y, z)\ \hat{\imath} + Q(x, y, z)\ \hat{\jmath} + R(x, y, z)\ \hat{k}}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{ds} = dx\ \hat{\imath} + dy\ \hat{\jmath} + dz\ \hat{k}}$$

La curva λ está dada por la función $\boldsymbol{z = f(x, y)}$, donde $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ son las coordenadas de los puntos de la curva $\boldsymbol{L}$ que es la proyección de $\boldsymbol{\lambda}$ sobre el plano $\boldsymbol{xy}$. Por lo tanto como:

$$z = f(x, y) \ \Rightarrow \ dz = \frac{\partial z}{\partial x}\ dx + \frac{\partial z}{\partial y}\ dy$$

Integrales de Superficie

Entonces:

$$\int_\lambda \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_\lambda P[x,y,f(x,y)]dx + Q[x,y,f(x,y)]dy + R[x,y,f(x,y)] \left(\frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy\right)$$

O más breve:

$$\int_\lambda \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_\lambda P\, dx + Q\, dy + R \left(\frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy\right)$$

Aplicando propiedad distributiva en el 3er término y sacando factor común dx y dy obtenemos:

$$\int_\lambda \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_\lambda P\, dx + Q\, dy + R\frac{\partial z}{\partial x}\, dx + R\frac{\partial z}{\partial y}\, dy$$

$$\int_\lambda \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_\lambda \left(P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy$$

Integrales de Superficie

Al segundo miembro le aplicamos el Teorema de Green, obtendremos:

$$\int_{\lambda} \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \iint_{D} \left[\frac{\partial \left(Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\partial y} \right] dxdy \qquad (2)$$

Calculemos estas derivadas parciales como funciones compuestas, teniendo en cuenta que P, Q y R son funciones de x, y, z y que $z = f(x, y)$

$$\frac{\partial \left(Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right)}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} \underbrace{\frac{dx}{dx}}_{1} + \frac{\partial Q}{\partial y} \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{0} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial R}{\partial x} \underbrace{\frac{dx}{dx}}_{1} + \frac{\partial R}{\partial y} \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{0} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial z}{\partial y} + R \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + R \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

Integrales de Superficie

$$\frac{\partial\left(P + R\,\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}\underbrace{\frac{dx}{dy}}_{0} + \frac{\partial P}{\partial y}\underbrace{\frac{dy}{dy}}_{1} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\underbrace{\frac{dx}{dy}}_{0} + \frac{\partial R}{\partial y}\underbrace{\frac{dy}{dy}}_{1} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + R\,\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$= \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + R\,\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Restando ambas expresiones de las derivadas parciales y reduciendo términos semejantes:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + R\,\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \left[\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + R\,\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right] =$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}} + \cancel{R\,\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}} - \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} - \cancel{\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}} - \cancel{R\,\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}}$$

$$= -\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Integrales de Superficie

Reemplazando en (2):

$$\int_{\lambda} \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \iint_{D} \left[\frac{\partial \left(Q + R\, \frac{\partial z}{\partial y} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(P + R\, \frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\partial y} \right] dxdy$$

$$\int_{\lambda} \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \iint_{D} \left[-\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] dxdy \quad (3)$$

Finalmente, comparando los resultados de ambas integrales (1) y (3):

$$\iint_{\sigma} rot\, \vec{F} \cdot \vec{\eta}\, d\sigma = \iint_{\sigma} \left[-\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] dxdy \;\; (1)$$

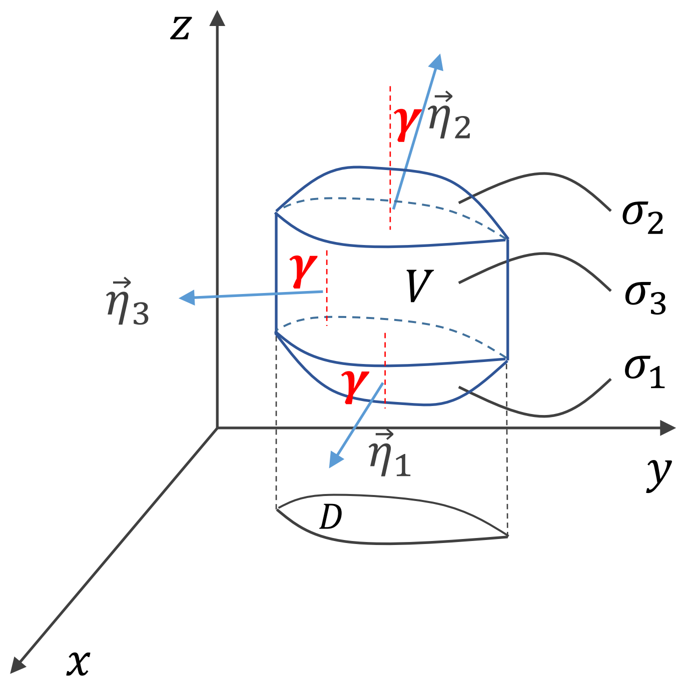
Se verifica lo que queríamos demostrar:

$$\boxed{\iint_{\sigma} rot\, \vec{F} \cdot \vec{\eta}\, d\sigma = \int_{\lambda} \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds}}$$

Integrales de Superficie

Teorema de la Divergencia.

Sea V un volumen definido en $\mathbb{R}^3$, limitado por una superficie cerrada σ, que puede ser proyectada sobre los tres planos coordenados. Y sea $\vec{F}$ un campo vectorial continuo y con derivadas parciales también continuas en una región que contiene a V, entonces:



$$\iiint_V div\,\vec{F}\,dv = \iint_\sigma \vec{F}\cdot\vec{\eta}\,d\sigma$$

El Teorema de la Divergencia nos dice que la Integral Triple extendida en el dominio V de la divergencia del campo vectorial $\vec{F}$ es igual al flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie cerrada σ que limita a este dominio.

Por ejemplo, si $\vec{F}$ representa la velocidad de un fluido que corre en el volumen V, la integral del primer miembro puede interpretarse como la cantidad de fluido que sale a través de la superficie σ, en caso de ser positiva. Si la integral es negativa lo que entra través de la superficie cerrada σ que limita a este dominio y si fuera nula indica que la cantidad de fluido que entra, es igual a la que sale.

Integrales de Superficie

Demostración

Recordemos que:

$$\vec{F} = P(x,y,z)\,\hat{\imath} + Q(x,y,z)\,\hat{\jmath} + R(x,y,z)\,\hat{k}$$

$$\vec{\eta} = cos\,\alpha\ \hat{\imath} + cos\,\beta\,\hat{\jmath} + cos\,\gamma\,\hat{k}$$

$$div\ \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Por lo tanto resulta:

$$\iiint_V div\ \vec{F}\,dv = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv = \iint_\sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma = \iint_\sigma \vec{F}\cdot\vec{\eta}\,d\sigma$$

Es decir que si deseamos demostrar que $\iiint_V div\ \vec{F}\,dv = \iint_\sigma \vec{F}\cdot\vec{\eta}\,d\sigma$, debemos demostrar 3 igualdades:

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}\,dv = \iint_\sigma P\cos\alpha\,d\sigma \quad (I)\,, \qquad \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}\,dv = \iint_\sigma Q\cos\beta\,d\sigma \quad (II)\,, \qquad \boldsymbol{\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dv = \iint_\sigma R\cos\gamma\,d\sigma \quad (III)}$$

Integrales de Superficie

Comencemos por la tercera igualdad: $$\boldsymbol{\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dv = \iint_\sigma R\cos\gamma\, d\sigma}$$

V está limitado por la superficie σ y su proyección sobre el plano xy es el dominio D.

Considerando que σ puede dividirse en σ_1, σ_2 y σ_3, entonces σ_1 está dada por $z = f_1(x,y)$, que corresponde a la superficie de la cara inferior, σ_2 está dada por $z = f_2(x,y)$ que corresponde a la superficie de la cara superior y σ_3 es una superficie cilíndrica de generatrices paralelas al eje z.

Resolvamos la integral del primer miembro:

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dv = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dz\, dy\, dx$$

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dv = \iint_D \left[\int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz\right] dydx = \iint_D \{R[x,y,f_2(x,y)] - R[x,y,f_1(x,y)]\}\, dydx \quad (1)$$

Integrales de Superficie

Resolvamos la integral del segundo miembro:

$$\iint_{\sigma} R\cos\gamma\, d\sigma = \iint_{\sigma_1} R\cos\gamma\, d\sigma + \iint_{\sigma_2} R\cos\gamma\, d\sigma + \iint_{\sigma_3} R\cos\gamma\, d\sigma$$

Si consideramos los vectores normales exteriores a la superficie σ resulta:

$\cos\gamma < 0$ en σ_1

$\cos\gamma > 0$ en σ_2

$\cos\gamma = 0$ en σ_3

Recordemos además que: $\cos\gamma\, \Delta\sigma = \Delta\sigma_{xy} \;\Rightarrow\; \cos\gamma\, d\sigma = dydx$

Reemplazando en las integrales:

$$\begin{aligned}
\iint_{\sigma} R\cos\gamma\, d\sigma &= -\iint_{D} R[x,y,f_1(x,y)]\, dydx + \iint_{D} R[x,y,f_2(x,y)]\, dydx + 0 \\
&= \iint_{D} R[x,y,f_2(x,y)]\; dydx - \iint_{D} R[x,y,f_1(x,y)]\, dydx \\
&= \iint_{D} \{\, R[x,y,f_2(x,y)] \; - R[x,y,f_1(x,y)]\,\}\, dydx \qquad (2)
\end{aligned}$$

Comparando (1) y (2) se demuestra la tercera igualdad: $\displaystyle\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dv = \iint_{\sigma} R\cos\gamma\, d\sigma$

Se procede análogamente con las otras dos igualdades y así queda demostrado el teorema.

Análisis Matemático II

Ecuaciones Diferenciales

Ecuaciones Diferenciales

Una **ecuación diferencial** es toda ecuación que establece una relación entre una función desconocida, su variable independiente (o variables independientes) y una o más, de sus derivadas.

Si la función desconocida depende de una sola variable la ecuación diferencial se llama **ordinaria**, por el contrario, si la función desconocida depende de más una variable, se llama **parcial** o **a derivadas parciales**.

En general representaremos una **ecuación diferencial ordinaria** de la forma:

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

El **ORDEN** de la ecuación diferencial estará dado por el orden de la **derivada de mayor orden** de la ecuación.

El **GRADO** de la ecuación diferencial estará dado por el **mayor exponente** con el que aparece **la derivada que da el orden** a la ecuación.

Ecuaciones Diferenciales

Se llama **SOLUCIÓN** o **INTEGRAL** de una ecuación diferencial a cualquier función que la verifica, es decir, que introducida en la ecuación diferencial la transforma en una identidad.

- Llamaremos **SOLUCIÓN GENERAL** a la solución que satisface la ecuación y contiene n constantes arbitrarias, siendo n el orden de la ecuación.
- Llamaremos **SOLUCIÓN PARTICULAR** a la solución que se obtiene asignando valor a las constantes arbitrarias. Para ello hace falta información adicional que suele denominarse **condiciones iniciales** o **condiciones de entorno.**

Resolver una ecuación diferencial es calcular la Solución General (luego, si se pide, a partir de ella calcular la Solución Particular).

¿Qué vamos a estudiar en este curso?

Ecuaciones Diferenciales

Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden Ordinarias

A variables separables.

Homogéneas.

Lineales.

De Bernoulli.

Totales o exactas.

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden Ordinarias

Homogéneas

No Homogéneas *métodos* → Coeficientes Indeterminados.

Variación de Parámetros.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

Por lo visto, en general, son de la forma:

$$F(x, y, y') = 0$$

La Solución General será de la forma:

$$y = f(x, C)$$

Siendo C una constante arbitraria. Al fijar una condición inicial $y = y_0$ para $x = x_0$, se puede encontrar un valor $C = C_0$ tal que:

$$y = f(x, C_0)$$

Desde un punto de vista geométrico, la Solución General representa **una familia de curvas** en el plano de coordenadas. Estas curvas se llaman **curvas integrales** de la EDO dada y cada solución particular está representa por **una** curva de esta familia.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

A Variables Separables

En su **forma diferencial** se expresa como: $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ siendo

$$M(x,y) = m_1(x) \cdot m_2(y)$$

$$N(x,y) = n_1(x) \cdot n_2(y)$$

Es decir que $M(x,y)$ y $N(x,y)$ deben ser productos de funciones de x e y.

En su **forma explícita** se expresan como $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$ y separando las variables:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) \cdot dx$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

Integrando ambos miembros:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) \cdot dx$$

$$F_2(y) = F_1(x) + C$$

Donde la constante C resulta de asociar las constantes de integración de ambas integrales.

Ejemplo 1

Calcular la solución particular de $2y\ln(x)\ dx - x\sqrt{1+\ln(x)}\ dy = 0$ sabiendo que $y(1) = 1$.

$$2y\ln(x)\ dx - x\sqrt{1+\ln(x)}\,dy = 0$$

$$2y\ln(x)\ dx = x\sqrt{1+\ln(x)}\ dy$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

$$x\sqrt{1+\ln(x)}\ dy = 2y\ln(x)\ dx$$

$$\frac{1}{y}\ dy = \frac{2\ \ln(x)}{x\sqrt{1+\ln(x)}}dx$$

$$\int \frac{1}{y}\ dy = \int \frac{2\ \ln(x)}{x\sqrt{1+\ln(x)}}dx$$

Solución General Implícita

$$\boxed{\ln y = \frac{4}{3}\sqrt{1+\ln(x)}\ (\ln(x)-2)\ + C}$$

$$\ln 1 = \frac{4}{3}\sqrt{1+\ln(1)}\ (\ln(1)-2)\ + C \to C = \frac{8}{3}$$

$$\boxed{\ln y = \frac{4}{3}\sqrt{1+\ln(x)}\ (\ln(x)-2)\ + \frac{8}{3}}$$

Solución Particular Implícita

Cálculos auxiliares:

$$\int \frac{2\ \ln(x)}{x\sqrt{1+\ln(x)}}dx \ \to \ s = \ln(x), \qquad ds = \frac{1}{x}dx$$

$$2\int \frac{s}{\sqrt{1+s}}ds \ \to \ t^2 = 1+s, \qquad 2\ t\ dt = ds$$

$$s = t^2 - 1$$

$$2\int \frac{t^2-1}{t}\ 2t\ dt$$

$$4\int (t^2-1)\ dt$$

$$4\left(\frac{1}{3}t^3 - t\right) \to 4t\left(\frac{1}{3}t^2 - 1\right)$$

$$4\sqrt{1+s}\left(\frac{1+s-3}{3}\right)$$

$$\frac{4}{3}\sqrt{1+\ln(x)}\ (\ln(x)-2)$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

Homogéneas

En su **forma explícita**, $y' = f(x,y)$ es una **ecuación diferencial ordinaria de primer homogénea** si y sólo si $f(x,y)$ es una función homogénea de grado cero.

En su **forma diferencial** $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$, tanto $N(x,y)$ como $M(x,y)$ son funciones homogéneas de igual grado.

Recordemos que una función $f(x,y)$ es homogénea de grado m si y sólo si:

$$f(tx,ty) = t^m\, f(x,y)$$

es decir que, si sustituyo a x por tx y a y por ty, la función queda multiplicada por t^m.

Para poder resolverlas, se las convierte en ecuaciones diferenciales a variables separables usando una función auxiliar $\boldsymbol{y = ux}$ siendo u una función de la variable independiente x.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

Sea $y' = f(x,y)$ con $f(x,y)$ una función homogénea de grado cero, podemos escribir:

$$y' = f(tx,ty) = f(x,y)$$

Si hacemos $t = \dfrac{1}{x}$, entonces:

$$y' = f\left(1,\frac{y}{x}\right) = f(x,y)$$

Es decir que y' es una función de $\dfrac{y}{x}$ que llamaremos φ, es decir: $y' = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) \qquad (1)$

Además $y = ux \;\rightarrow y' = u'x + u \qquad (2)$

Igualando (1) y (2): $u'x + u = \varphi(u)$ es a variables separables. Separamos las variables:

$$\frac{du}{dx}x + u = \varphi(u) \;\longrightarrow\; \frac{du}{dx}x = \varphi(u) - u \;\longrightarrow\; du = (\varphi(u) - u).\frac{dx}{x}$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x} \quad \rightarrow \int \frac{du}{\varphi(u)-u}=\int \frac{dx}{x}$$

$$G(u)=\ln(x)+C$$

Finalmente, reemplazando u por su igual:

$$\boxed{G\left(\frac{y}{x}\right)=\ln(x)+C}$$

Ejemplo 2:

Calcular la solución general de la siguiente ecuación diferencial $\boldsymbol{y'=\frac{x+y}{x-y}}$

Primero, verificamos que es EDO de 1er Orden Homogénea:

$$\frac{tx+ty}{tx-ty}=\frac{t(x+y)}{t(x-y)}=t^0\frac{x+y}{x-y} \quad \Rightarrow$$ Es función homogénea de grado **<u>0</u>**

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

$$y' = \frac{x+y}{x-y}$$

$$\boldsymbol{y = ux} \rightarrow y' = u'x + u$$

$$u'x + u = \frac{x+ux}{x-ux}$$ Ahora es una EDO a variables separables

$$\frac{du}{dx}x = \frac{x+ux}{x-ux} - u$$

$$\frac{du}{dx}x = \frac{x(1+u)}{x(1-u)} - u$$

$$\frac{du}{dx}x = \frac{1+u}{1-u} - u \quad \rightarrow \quad \frac{du}{dx}x = \frac{1+u-u+u^2}{1-u}$$

$$\frac{du}{dx}x = \frac{1+u^2}{1-u} \rightarrow \frac{1-u}{1+u^2}du = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \frac{1-u}{1+u^2}du = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{1+u^2}du - \int \frac{u}{1+u^2}du = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$arctg(u) - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln(x) + C$$

$$\boxed{arctg\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = \ln(x) + C}$$

Solución General Implícita

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

Lineales

Son de la forma $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$ con $\left| \begin{array}{l} P(x) \neq 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{array} \right.$ (por que si no, es a variables separables)

Se usa una función auxiliar $\boldsymbol{y = uv}$ donde u y v son funciones de x continuas y derivables.

Derivando: $y = uv \;\rightarrow\; y' = u'v + uv'$

Sustituyendo en la ecuación: $u'v + uv' + P(x)\,uv = Q(x)$

Extraemos factor común, por ejemplo v, en el 1° y 3° término:

$$[u' + P(x)u]v + uv' = Q(x) \qquad (1)$$

Resolvemos $u' + P(x)u = 0$ que suele llamarse **ecuación diferencial lineal incompleta**.
(Observe que resulta ser a Variables Separables)

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

$$u' + P(x)u = 0 \rightarrow \frac{du}{dx} = -P(x)u \rightarrow \frac{du}{u} = -P(x)dx$$

$$\int \frac{du}{u} = -\int P(x)dx \rightarrow \ln(u) = -\int P(x)\,dx + \underbrace{C}$$

Calculo la solución particular más sencilla con $C = 0$.

$$\boxed{u = e^{-\int P(x)\,dx}}$$

Sustituyendo en (1):

$$e^{-\int P(x)\,dx}\, v' = Q(x)$$

Calculo la solución particular. (Observe que resulta ser a Variables Separables)

$$\frac{dv}{dx} = \frac{Q(x)}{e^{-\int P(x)\,dx}} \rightarrow dv = Q(x) \,.\, e^{\int P(x)\,dx}\,dx \rightarrow \int dv = \int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}\,dx$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

$$v = \int Q(x)\, e^{\int P(x)\, dx}\, dx + C$$

Como $y = uv$

$$y = e^{-\int P(x)\, dx} \left[\int Q(x)\, e^{\int P(x)\, dx}\, dx + C \right]$$

Solución General Explícita

Ejemplo 3:

Calcular la solución general de la siguiente ecuación diferencial:

$$(x+1)[sen(x) - y'] = y$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

$$(x+1)[sen(x) - y'] = y$$

$$sen(x) - y' = \frac{y}{x+1}$$

$$y' + \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{P(x)} y = \underbrace{sen(x)}_{Q(x)}$$

$y = uv$ con $\quad u = e^{-\int P(x)\,dx}$

$$v = \int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}\, dx + C$$

$$u = e^{-\int \frac{1}{x+1} dx}$$

$$u = e^{-\ln(x+1)}$$

$$u = e^{\ln(x+1)^{-1}}$$

$$u = (x+1)^{-1} \rightarrow \boxed{u = \frac{1}{x+1}}$$

$$v = \int sen(x)\, e^{\int \frac{1}{x+1} dx}\, dx + C$$

$$v = \int sen(x)\, e^{\ln(x+1)}\, dx + C$$

$$v = \int (x+1)\, sen(x)\; dx + C$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

$$v = \int (x+1)\,\mathrm{sen}(x)\ dx + C$$

Resolvemos la integral por partes. Recuerde que $\int t\,.\,ds = t.s\ - \int s\,.\,dt$

Hacemos

$$t\ = x + 1\ \rightarrow\ \ dt = dx$$

$$ds = sen(x)\,dx\ \rightarrow s = -cos(x)$$

$$v = -(x+1)\,cos(x) + \int cos(x)\ dx + C$$

$$\boxed{v = -(x+1)\,cos(x) + sen(x) + C}$$

Finalmente $\boldsymbol{y = uv}$

$$\boxed{y = \frac{1}{x+1}\left[-(x+1)\cos(x) + \mathrm{sen}(x) + C\right]}$$

Solución General Explícita

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

De Bernoulli

Son de la forma $y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n$ con $n \neq 0$ (por que si no, sería lineal)
$n \neq 1$ (por que si no, sería a variables separables)

Para resolverla la convertimos en una Ecuación Diferencial Lineal usando la función auxiliar:

$$\boldsymbol{z = y^{1-n}}$$

$$z' = (1-n) \cdot y^{1-n-1} \cdot y'$$

$$z' = (1-n) \cdot y^{-n} \cdot y'$$

$$\frac{z'}{1-n} = \frac{y'}{y^n}$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

En la ecuación de Bernoulli, dividiendo ambos miembros por y^n

$$\frac{y'}{y^n} + P(x) \cdot \frac{y}{y^n} = Q(x)$$

Reemplazando

$$\frac{z'}{1-n} + P(x) \cdot z = Q(x)$$

$$z' + \underbrace{(1-n)P(x)}_{p(x)} \cdot z = \underbrace{(1-n)Q(x)}_{q(x)}$$ Ecuación diferencial Lineal en z

Resuelvo como lineal:

$z = uv$ con $\begin{cases} u = e^{-\int p(x)\,dx} \\ v = \int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\, dx + C \end{cases}$

z

$$\boxed{y^{1-n} = e^{-\int p(x)\,dx}\left[\int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\, dx + C\right]}$$

Solución General Implícita

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

Ejemplo 4

Calcular la solución general de la siguiente ecuación diferencial: $y' + xy = 6x\sqrt{y}$

$$y' + \underbrace{x}_{p(x)}\, y = \underbrace{6x}_{q(x)}\, y^{\frac{1}{2}} \qquad n = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; z = y^{1-\frac{1}{2}}$$

$$z = y^{\frac{1}{2}} \;\rightarrow\; z' = \frac{1}{2}\, y^{-\frac{1}{2}}\, y' \;\rightarrow\; 2z' = y^{-\frac{1}{2}}\, y'$$

Multiplicamos ambos miembros por $\boldsymbol{y^{-\frac{1}{2}}}$ y reemplazando: $\boldsymbol{y'.y^{-\frac{1}{2}} + x.y.y^{-\frac{1}{2}} = 6x\, y^{\frac{1}{2}}.y^{-\frac{1}{2}}}$

$$2z' + xz = 6x$$

$$z' + \underbrace{\frac{x}{2}}_{P(x)}\, z = \underbrace{3x}_{Q(x)}$$ Ecuación diferencial Lineal en $\boldsymbol{z}$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

$z = uv$ con $\quad u = e^{-\int p(x)\,dx}$

$$v = \int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\, dx + C$$

$$u = e^{-\int \frac{1}{2} x\,dx} \rightarrow \boxed{u = e^{-\frac{1}{4}x^2}}$$

$$v = \int 3x\ e^{\frac{1}{4}x^2} dx + C \qquad s = \frac{1}{4}x^2 \rightarrow ds = \frac{1}{2}x\,dx \rightarrow 2\,ds = x\,dx$$

$$v = 3\int 2\,e^{s} ds + C$$

$$v = 6\,e^{s} + C \rightarrow \boxed{v = 6\,e^{\frac{1}{4}x^2} + C}$$

Finalmente:

Solución General Implícita

$$z = e^{-\frac{1}{4}x^2}\left[6\,e^{\frac{1}{4}x^2} + C\right] \rightarrow \boldsymbol{y^{\frac{1}{2}} = \left[6 + C.e^{-\frac{1}{4}x^2}\right]}$$

Solución General Explícita

O bien:

$$\boldsymbol{y = \left[6 + C.e^{-\frac{1}{4}x^2}\right]^2}$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

Totales o Exactas

Su forma diferencial $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$ indica que es ecuación diferencial exacta si se cumple:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Recordando lo que ya estudiamos en Integrales Curvilíneas con referencia a Campos Vectoriales Conservativos, podemos afirmar que existe una función, llamada Función Potencial, que llamaremos $\varphi(x, y)$ tal que:

$$M(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad N(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

Luego:

$$\overbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy}^{d\varphi = 0 \quad \rightarrow} = 0 \qquad \boxed{\varphi(x,y) = cte}$$

Solución general implícita

Para calcular $\varphi(x,y)$ un camino es:

$$\varphi(x,y) = \int M(x,y)\,dx + C(y) \quad (*)$$

Una constante que **puede** depender de y.
Debo calcular esta constante.

$$\varphi(x,y) = F(x,y) + C(y)$$

Derivamos ambos miembros respecto de y

$$\varphi'_y(x,y) = F'_y(x,y) + C'(y) \;\rightarrow\; \frac{\partial\varphi}{\partial y} = F'_y(x,y) + C'(y)$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

$$N(x,y) - F'_y(x,y) = C'(y) \;\; \rightarrow \;\; C(y) = \int \left[N(x,y) - F'_y(x,y)\right] dy$$

Sustituyendo en $(*)$

$$\boxed{\varphi(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \int \left[N(x,y) - F'_y(x,y)\right] dy = cte}$$

Solución General Implícita

Para calcular $\varphi(x,y)$ el otro camino es:

$$\varphi(x,y) = \int N(x,y)\,dy + C(x) \quad (**)$$

Una constante que **puede** depender de x.
Debo calcular esta constante.

$$\varphi(x,y) = G(x,y) + C(x)$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

Derivamos ambos miembros respecto de x

$$\varphi'_x(x,y) = G'_x(x,y) + C'(x) \;\; \rightarrow \;\; \frac{\partial \varphi}{\partial x} = G'_x(x,y) + C'(x)$$

$$M(x,y) - G'_x(x,y) = C'(x) \;\; \rightarrow \;\; C(x) = \int [M(x,y) - G'_x(x,y)]\, dx$$

Sustituyendo en $(**)$

$$\boxed{\varphi(x,y) = \int N(x,y)\, dy + \int [M(x,y) - G'_x(x,y)]\, dx = cte}$$

Solución General Implícita

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

Ejemplo 5

Calcular la solución general de la EDO: $\underbrace{(xy^2 - 3x^2y)}_{M(x,y)}\,dx + \underbrace{(x^2y - x^3 + y^3)}_{N(x,y)}\,dy = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 3x^2$$ La ecuación diferencial es Exacta… (Observe que también es Homogénea)

Si seguimos el primer camino mencionado:

$$\varphi(x,y) = \int (xy^2 - 3x^2y)\,dx + C(y) \rightarrow \varphi(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 - x^3y + C(y) \qquad (1)$$

$$\varphi'_y(x,y) = x^2y - x^3 + C'(y)$$

$$x^2y - x^3 + y^3 = x^2y - x^3 + C'(y) \;\rightarrow\; C'(y) = y^3 \;\rightarrow\; C(y) = \int y^3\,dy \;\rightarrow\; C(y) = \frac{1}{4}y^4$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

Reemplazando en (1):

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2}x^2y^2-x^3y+\frac{1}{4}y^4 \quad \rightarrow \boxed{\frac{1}{2}x^2y^2-x^3y+\frac{1}{4}y^4=\mathrm{C}}$$ Solución General Implícita

Si seguimos el segundo camino:

$$\varphi(x,y)=\int (x^2y-x^3+y^3)\,dy+C(x)\rightarrow \varphi(x,y)=\frac{1}{2}x^2y^2-x^3y+\frac{1}{4}y^4+C(x) \qquad (2)$$

$$\varphi'_x(x,y)=xy^2-3x^2y+C'(x)$$

$$xy^2-3x^2y=xy^2-3x^2y+C'(x)\rightarrow \quad C'(x)=0 \quad\rightarrow\quad C(x)=cte$$

Reemplazando en (2):

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2}x^2y^2-x^3y+\frac{1}{4}y^4+cte \quad\rightarrow \boxed{\frac{1}{2}x^2y^2-x^3y+\frac{1}{4}y^4=\mathrm{C}}$$ Solución General Implícita

Se verifica que ambos caminos son iguales.

Análisis Matemático II

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Como habíamos estudiado, una EDO de orden n es de la forma:

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

Y su **Solución General** es de la forma:

$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, con $C_1, C_2, \dots, C_n$ constantes arbitrarias.

Una EDO de orden n es **Lineal**, si es de 1° grado respecto de la variable dependiente y sus derivadas y, su expresión general es:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-2} y'' + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

con $a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, f(x)$ son funciones de x o constantes, $a_0 \neq 0$ y, en particular, $a_0 = 1$.

Si $f(x) = 0$, se dice que la EDO es **Homogénea** y si $f(x) \neq 0$, que es **no Homogénea**.

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas de Segundo Orden

Son de la forma: $y'' + a_1\, y' + a_2\, y = 0$ (1) También se la llama *incompleta*.

Propiedad 1:

Si y_1 e y_2 son dos soluciones particulares de la EDO lineal homogénea de segundo orden, entonces $y_1 + y_2$ es también solución de esta ecuación.

Demostración:

Si y_1 e y_2 son soluciones de la EDO lineal homogénea de segundo orden, entonces:

$$\begin{aligned} y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 &= 0 \\ y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Poniendo en la ecuación (1) la suma $y_1 + y_2$ y tomando en consideración las identidades (2), tenemos:

$$(y_1 + y_2)'' + a_1(y_1 + y_2)' + a_2(y_1 + y_2) =$$
$$= y_1'' + y_2'' + a_1 y_1' + a_1 y_2' + a_2 y_1 + a_2 y_2$$
$$= \underbrace{y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1}_{0} + \underbrace{y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2}_{0} = 0$$ es decir, $y_1 + y_2$ es solución de la ecuación.

Propiedad 2:

Si y_1 es una solución particular de la EDO lineal homogénea de segundo orden y C es una constante, el producto Cy_1 es, también, una solución de esta ecuación.

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Demostración:

Poniendo en la ecuación (1) la expresión Cy_1, tenemos:

$$(Cy_1)'' + a_1(Cy_1)' + a_2(Cy_1)$$
$$= C\underbrace{(y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1)}_{0} = 0$$ es decir, Cy_1 es solución de la ecuación.

Algunas definiciones:

- Dos funciones y_1 e y_2 son linealmente dependientes en un intervalo $[a, b]$ si su cociente es constante en dicho intervalo.

- **Dos funciones y_1 e y_2 son linealmente independientes en un intervalo $[a, b]$ si su cociente no es constante sino una función de x.**

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

- Dos funciones no pueden ser linealmente independientes si una de ellas es nula
- Dos funciones y_1 e y_2 son linealmente independientes si:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

Este determinante se conoce como Wronsquiano.

Propiedad 3:

Si y_1 e y_2 son soluciones particulares linealmente independientes de la EDO lineal de segundo orden, su solución general será:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Siendo C_1 y C_2 dos constantes arbitrarias.

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Demostración:

En efecto, $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ es solución por las propiedades 1 y 2 y además, es solución general porque tiene dos constantes arbitrarias (2° orden $\rightarrow$ 2 constantes arbitrarias).

Por otra parte, si y_1 e y_2 **no** son linealmente independientes, entonces:

$$\frac{y_1}{y_2} = k \quad \Rightarrow \quad y_1 = k y_2$$

La solución quedaría: $y = C_1 k y_2 + C_2 y_2 = \underbrace{(C_1 k + C_2)}_{C\,=\,cte} y_2 = C y_2$

$C y_2$ es solución por la propiedad 2 pero no es solución general porque tiene una sola constate arbitraria. Luego y_1 e y_2 deben ser linealmente independientes.

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas de Segundo Orden

En resumen:

- El conjunto de soluciones es un espacio vectorial y el conjunto formado por y_1 e y_2 forman una base de dicho espacio.
- Para construir la solución general, se deben calcular dos soluciones particulares (y_1 e y_2) linealmente independientes.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas de Segundo Orden a Coeficientes Constantes

Son de la forma $y'' + py' + qy = 0 \quad (3)$, donde p y q son número reales.

Para obtener su solución general será suficiente con encontrar dos soluciones particulares linealmente independientes.

Supongamos que $y = e^{mx}$ es solución, con $y' = me^{mx}$ e $y'' = m^2e^{mx}$

Entonces se debe cumplir que: $m^2e^{mx} + p\,me^{mx} + q\,e^{mx} = 0$

$$e^{mx}\,(m^2 + pm + q) = 0$$

Como $e^{mx} \neq 0, \forall x$. Luego es $\boxed{m^2 + pm + q = 0}$ Ecuación Característica

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

La ecuación característica $m^2 + pm + q = 0$ es una ecuación de segundo grado que tiene dos raíces m_1 y m_2. Se pueden presentar 3 casos:

1° CASO: Dos raíces reales distintas ($m_1 \neq m_2$ con $p^2 - 4q > 0$)

Tendremos dos soluciones particulares:

$$y_1 = e^{m_1 x}, \qquad y_2 = e^{m_2 x}$$

Estas dos soluciones resultan ser linealmente independientes pues: $W(y_1, y_2) \neq 0$. Otra forma es ver que su cociente no es constante:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{m_1 x}}{e^{m_2 x}} = e^{(m_1 - m_2)x}$$ $\rightarrow$ Es función de x (no es constante).

Por lo tanto, la Solución General de la EDO será: $\boxed{y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}}$

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

2° CASO: Dos raíces reales iguales ($m_1 = m_2 = m$ con $p^2 - 4q = 0$)

Como $m = -\frac{p}{2}$ una solución particular es $y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}$

Propondremos otra solución particular (necesitamos 2) $y_2 = x.e^{-\frac{p}{2}x}$

Veamos si y_2 es solución:

$$y_2 = x.e^{-\frac{p}{2}x}, \qquad y_2' = e^{-\frac{p}{2}x} - \frac{p}{2}x.e^{-\frac{p}{2}x}, \qquad y_2'' = -\frac{p}{2}e^{-\frac{p}{2}x} - \frac{p}{2}e^{-\frac{p}{2}x} + \frac{p^2}{4}xe^{-\frac{p}{2}x}$$

$$y_2'' = -pe^{-\frac{p}{2}x} + \frac{p^2}{4}xe^{-\frac{p}{2}x}$$

Reemplazando en (3):

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = \left(-pe^{-\frac{p}{2}x} + \frac{p^2}{4}xe^{-\frac{p}{2}x}\right) + p\left(e^{-\frac{p}{2}x} - \frac{p}{2}xe^{-\frac{p}{2}x}\right) + q\left(xe^{-\frac{p}{2}x}\right)$$

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = \left(-pe^{-\frac{p}{2}x} + \frac{p^2}{4}xe^{-\frac{p}{2}x}\right) + p\left(e^{-\frac{p}{2}x} - \frac{p}{2}xe^{-\frac{p}{2}x}\right) + q\left(xe^{-\frac{p}{2}x}\right)$$

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = \cancel{-pe^{-\frac{p}{2}x}} + \frac{p^2}{4}xe^{-\frac{p}{2}x} + \cancel{pe^{-\frac{p}{2}x}} - \frac{p^2}{2}xe^{-\frac{p}{2}x} + qxe^{-\frac{p}{2}x}$$

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = -\frac{p^2}{4}xe^{-\frac{p}{2}x} + qxe^{-\frac{p}{2}x}$$

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = xe^{-\frac{p}{2}x}\left(-\frac{p^2}{4} + q\right)$$

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = -\frac{1}{4}xe^{-\frac{p}{2}x}\underbrace{(p^2 - 4q)}_{=0} = 0$$

y_2 verifica la EDO, por lo tanto, es una solución particular.

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Además, las dos soluciones son linealmente independientes ya que su cociente:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\cancel{e^{-\frac{p}{2}x}}}{x.\cancel{e^{-\frac{p}{2}x}}} = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \text{Es función de } x \text{ (no es constante).}$$

Luego, la solución general es: $y = C_1 e^{-\frac{p}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{p}{2}x} \quad \rightarrow \quad \boxed{y = (C_1 + C_2 x)\, e^{-\frac{p}{2}x}}$

3° CASO: Dos raíces complejas conjugadas ($m_1 = \alpha + \beta i, m_2 = \alpha - \beta i$ con $p^2 - 4q < 0$)

Tendremos dos soluciones particulares:

$y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x}, \qquad y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}$

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Son funciones linealmente independientes ya que su cociente:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{(\alpha+\beta i)x}}{e^{(\alpha-\beta i)x}} = \frac{\cancel{e^{\alpha x}} e^{\beta i x}}{\cancel{e^{\alpha x}} e^{-\beta i x}} = e^{2\beta i x}$$ → Es función de x (no es constante).

Luego, la solución general es: $\boxed{y = C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 e^{(\alpha-\beta i)x}}$

Sin embargo, se prefiere trabajar con funciones reales y no con exponenciales complejas.

Con este fin aplicaremos la fórmula de Euler:

$$e^{+i\beta} = cos\,\beta + i\,sen\,\beta$$

$$e^{-i\beta} = cos\,\beta - i\,sen\,\beta$$

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Podemos expresar la solución particular así:

$$y = C_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + C_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x}$$

$$y = e^{\alpha x}(C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x})$$

$$y = e^{\alpha x}[C_1\,(cos\,\beta x + i\,sen\,\beta x) + C_2\,(cos\,\beta x - i\,sen\,\beta x)]$$

$$y = e^{\alpha x}[(C_1{+}C_2)\,cos\,\beta x + i(C_1{-}C_2)\,sen\,\beta x]$$

Llamemos $A = C_1 + C_2, \;\; B = i(C_1 - C_2)$

Se puede demostrar que C_1 y C_2, en este caso son complejos conjugados por lo tanto $(C_1{+}C_2)\; \in\; \mathbb{R}$ y $i(C_1 - C_2)\; \in\; \mathbb{R}$, es decir A y B son números reales.

Luego

$$\boxed{y = e^{\alpha x}(A\,cos\,\beta x + B\,sen\,\beta x)}$$

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

EDO Lineales No Homogéneas de Segundo Orden a Coeficientes Constantes

Son de la forma $y'' + py' + qy = r(x)$, donde p y q son número reales.

$y'' + py' + qy = 0$ se llama **homogénea asociada**.

Propiedad:

Si Y_{GH} es la solución general de la homogénea asociada, se cumple que:

$$Y_{GH}'' + pY_{GH}' + qY_{GH} = 0$$

Si Y_P es una solución particular de la no homogénea, se cumple que:

$$Y_P'' + pY_P' + qY_P = r(x)$$

Entonces $\boxed{Y_{GNH} = Y_{GH} + Y_P}$ es una solución general de la no homogénea.

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

En efecto, si sustituimos en la **no homogénea**:

$$y'' + py' + qy = (Y_{GH} + Y_P)'' + p(Y_{GH} + Y_P)' + q(Y_{GH} + Y_P)$$

$$y'' + py' + qy = Y''_{GH} + Y''_P + pY'_{GH} + pY'_P + qY_{GH} + qY_P$$

$$y'' + py' + qy = \underbrace{Y''_{GH} + pY'_{GH} + qY_{GH}}_{0} + \underbrace{Y''_P + pY'_P + qY_P}_{r(x)} = r(x)$$

Porque Y_{GH} es solución general de la homogénea asociada

Porque Y_P es solución particular de la no homogénea

Luego $Y_{GNH} = Y_{GH} + Y_P$ es solución de la no homogénea porque la verifica.

Además, es solución general porque tiene dos constantes arbitrarias en Y_{GH}.

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Métodos para encontrar la solución particular de la no homogénea

Hemos demostrado que la solución general de la EDO lineal de 2° Orden No Homogénea, viene dada por la suma de la solución general de la homogénea asociada y una solución particular de la no homogénea $Y_{GNH} = Y_{GH} + Y_P$

Siendo la homogénea asociada $y'' + py' + qy = 0$ y $m^2 + pm + q = 0$, su ecuación característica, sabemos que se pueden presentar tres casos:

- Dos raíces reales distintas $\rightarrow$ $Y_{GH} = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$
- Dos raíces reales iguales $\rightarrow$ $Y_{GH} = (C_1 + xC_2)e^{-\frac{p}{2}x}$
- Dos raíces complejas conjugadas $\rightarrow$ $Y_{GH} = e^{\alpha x}(A\,cos\,\beta x + B\,sen\,\beta x)$

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Entonces, conocidas las soluciones generales de la homogénea asociada, Y_{GH}, lo que falta es encontrar una solución particular de la no homogénea Y_P.

Estudiaremos para esto dos métodos:

- Método de coeficientes indeterminados.
- Método de variación de parámetros.

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Métodos de los Coeficientes Indeterminados

Sea la EDO de la forma $y'' + py' + qy = r(x)$

La solución particular propuesta ***Y_P debe tener la misma forma de $r(x)$.***

Distinguiremos 5 casos:

$r(x)$	Y_P	Condición
Constante A	k	Si 0 **no** es raíz de la ecuación característica.
	$k \cdot x$	Si 0 es **1** raíz de la ecuación característica.
	$k \cdot x^2$	Si 0 es **2 veces** raíz de la ecuación característica.

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

<table>
<tr><th>$r(x)$</th><th>Y_P</th><th>Condición</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Polinomio en x de grado n
$P_n(x)$</td><td>$Q_n(x)$</td><td>Si 0 **no** es raíz de la ecuación característica.</td></tr>
<tr><td>$Q_n(x) \cdot x$</td><td>Si 0 es **1** raíz de la ecuación característica.</td></tr>
<tr><td>$Q_n(x) \cdot x^2$</td><td>Si 0 es **2 veces** raíz de la ecuación característica.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>$r(x)$</th><th>Y_P</th><th>Condición</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$A \cdot e^{\alpha x}$</td><td>$k \cdot e^{\alpha x}$</td><td>Si α **no** es raíz de la ecuación característica.</td></tr>
<tr><td>$k \cdot x \cdot e^{\alpha x}$</td><td>Si α es **1** raíz de la ecuación característica.</td></tr>
<tr><td>$k \cdot x^2 \cdot e^{\alpha x}$</td><td>Si α es **2 veces** raíz de la ecuación característica.</td></tr>
</table>

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

$r(x)$	Y_P	Condición
$sen\ \beta x$ o $cos\ \beta x$	$A \cdot cos\ \beta x + B \cdot sen\ \beta x$	Si βi **no** es raíz de la ecuación característica.
	$(A \cdot cos\ \beta x + B \cdot sen\ \beta x) \cdot x$	Si βi **es** raíz de la ecuación característica.

$r(x)$	Y_P	Condición
$e^{\alpha x} sen\ \beta x$ o $e^{\alpha x}\ cos\ \beta x$	$e^{\alpha x}(A \cdot cos\ \beta x + B \cdot sen\ \beta x)$	Si $\alpha \pm\ \beta i$ **no** es raíz de la ecuación característica.
	$e^{\alpha x}(A \cdot cos\ \beta x + B \cdot sen\ \beta x) \cdot x$	Si $\alpha \pm\ \beta i$ **es** raíz de la ecuación característica.

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

En los cinco casos, ya que se trata de una solución particular, es necesario calcular el valor de las constantes, (sólo tenemos la forma de la solución particular). Para ello derivamos y sustituimos la solución particular en la ecuación no homogénea. Igualamos coeficientes en ambos miembros y obtenemos el valor de las constantes indeterminadas (a veces será necesario resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas).

Además de los cinco casos, están los que son suma o producto de ellos, cuyas soluciones particulares son las sumas o productos de las respectivas soluciones.

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Métodos de Variación de Parámetros

Para calcular Y_P con este método, reemplazamos en la solución general de la homogénea asociada a las constantes C_1 y C_2 por funciones de x:

$$Y_{GH} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Las funciones y_1 e y_2 dependen de las raíces de la ecuación característica.

$$Y_P = v_1(x) y_1(x) + v_2(x) y_2(x)$$

En Y_P, tanto y_1 e y_2 como v_1 y v_2 son funciones que dependen de x.

v_1 y v_2 serán las incógnitas.

Por simplicidad, escribiremos:

$$Y_P = v_1\, y_1 + v_2\, y_2$$

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

En Y_P hay dos incógnitas, entonces se necesitarán **dos condiciones**:

1. Que Y_P verifique la EDO no homogénea (que sea solución).
2. En la derivada de Y_P: $Y_P' = v_1'\, y_1 + v_1\, y_1' + v_2'\, y_2 + v_2\, y_2'$, para simplificar los cálculos, se introduce una condición arbitraria: $v_1'\, y_1 + v_2'\, y_2 = 0$

Resumiendo:

$Y_P = v_1\, y_1 + v_2\, y_2$

$Y_P' = v_1\, y_1' + v_2\, y_2'$ (por la segunda condición).

$Y_P'' = v_1'\, y_1' + v_1\, y_1'' + v_2'\, y_2' + v_2\, y_2''$

Sustituyendo en la EDO no homogénea y, por la primera condición:

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

$$v_1' y_1' + v_1 y_1'' + v_2' y_2' + v_2 y_2'' + p(v_1 y_1' + v_2 y_2') + q(v_1 y_1 + v_2 y_2) = r(x)$$

$$v_1' y_1' + v_1 y_1'' + v_2' y_2' + v_2 y_2'' + pv_1 y_1' + pv_2 y_2' + qv_1 y_1 + qv_2 y_2 = r(x)$$

$$v_1 y_1'' + pv_1 y_1' + qv_1 y_1 + v_2 y_2'' + pv_2 y_2' + qv_2 y_2 + v_1' y_1' + v_2' y_2' = r(x)$$

$$v_1 \underbrace{(y_1'' + p y_1' + q y_1)}_{0} + v_2 \underbrace{(y_2'' + p y_2' + q y_2)}_{0} + v_1' y_1' + v_2' y_2' = r(x)$$

$$\begin{cases} v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Por la segunda condición} \\ v_1' y_1' + v_2' y_2' = r(x) \end{cases}$$

Y tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: v_1' y v_2'

ATENCIÓN: son las derivadas de v_1 y v_2

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Resolviendo:

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ r(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}, \qquad v_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & r(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

Determinante Wronsquiano $\neq 0$ ya que y_1 e y_2 son linealmente independientes.

El sistema, entonces tiene solución única:

$$v_1' = -\frac{y_2 \cdot r(x)}{W} \rightarrow \boxed{v_1 = -\int \frac{y_2 \cdot r(x)}{W}\, dx}, \qquad v_2' = \frac{y_1 \cdot r(x)}{W} \rightarrow \boxed{v_2 = \int \frac{y_1 \cdot r(x)}{W} dx}$$

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Sustituyendo en $Y_P = v_1\, y_1 + v_2\, y_2$ obtenemos la solución particular.

Luego, sumando Y_{GH}, obtenemos la solución general de la no homogénea.

IMPORTANTE:

- El método de **coeficientes indeterminados** se aplica sólo en los casos en los que $r(x)$ es constante, polinómica, exponencial, sinusoidal o una combinación de sumas y productos de ellas.
- El método de **variación de parámetros** sirve para cualquier caso de $r(x)$ pero si $W \neq 1$, las funciones a integrar suelen resultar muy complicadas.

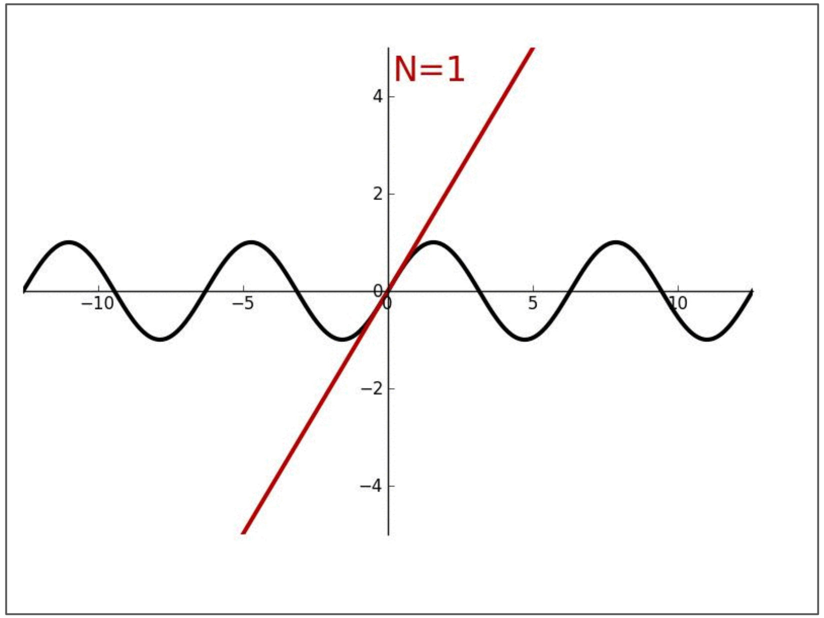
Análisis Matemático II

Series de Fourier

Series de Fourier

Introducción

Vimos que muchas funciones pueden desarrollarse en series de potencias de acuerdo a la Fórmula de Taylor.



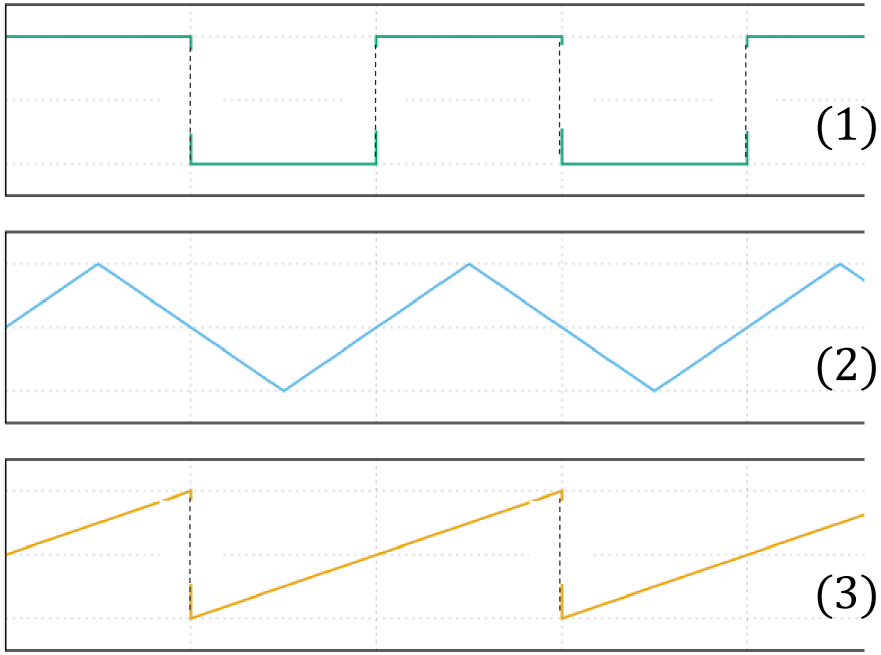
Los coeficientes de la Serie de Taylor de una función f, son derivadas sucesivas de dicha función en un punto a. Por lo tanto, será condición que f sea continua y sucesivamente derivable en el punto a.

Gráficamente, se trata de curvas continuas y «suaves» sin picos, vértices o saltos bruscos (discontinuidades).

¿Y qué pasa si f es discontinua o al menos no derivable?

Series de Fourier

El pulso rectangular (1), triangular (2) y dientes de sierra (3), entre otros, no pueden ser desarrollados en series de potencias. No obstante hay una característica común: se trata de funciones periódicas.



Sobre las funciones periódicas y continuas a trozos podemos aplicar desarrollos en series de senos y cosenos conocidos como **Series Trigonométricas de Fourier**.

Jean-Baptiste Joseph Fourier fue un matemático y físico francés conocido por sus trabajos sobre estos desarrollos con los que consiguió resolver la ecuación del calor.

Series de Fourier

Sabemos que una función $f(t)$ es continua en un punto $a \in \mathcal{D}_f$, si y solo si:

1. Existe $f(a)$
2. Existe $\lim_{t \to a} f(t)$
3. $\lim_{t \to a} f(t) = f(a)$

$f(t)$ es continua en un intervalo, si y sólo si es continua en todos los puntos del intervalo.

Las funciones rectangular (1) y dientes de sierra (3) no son continuas en todos sus puntos. La función triangular (2), lo es (aunque no es derivable en sus vértices).

Una función $f(t)$ es periódica, de período T, si y sólo si, $f(t) = f(t + T)$ para todo t.

Las funciones rectangular (1), triangular (2) y dientes de sierra (3) son periódicas (se comportan de una manera cíclica o repetitiva sobre un intervalo determinado T).

Series de Fourier

Fourier obtuvo experimentalmente la siguiente expresión:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nw_0 t) + b_n \operatorname{sen}(nw_0 t)]$$

Donde:

$$(*) \begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\ dt \\ a_n = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \cos(nw_0 t)\ dt \\ b_n = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \operatorname{sen}(nw_0 t)\ dt \end{cases}$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Se denomina **frecuencia fundamental** y los múltiplos de ella, nw_0, se denominan **armónicos**.

Los límites de integración deben incluir un período completo si el período va de 0 a π, por ejemplo, podemos integrar entre $-\pi/2$ y $\pi/2$)

Series de Fourier

Toda función periódica $f(t)$ que cumple que:

1. $f(t)$ es periódica de período T.
2. $f(t)$ es continua a trozos en $[-T/2,\ T/2]$.
3. $|f(t)|$ está acotada en $[-T/2,\ T/2]$.

$\Big\}$ Condiciones de Dirichlet

se puede desarrollar en una serie trigonométrica llamada **Serie de Fourier** y, en cualquier punto t en el intervalo $[-T/2,\ T/2]$, resulta:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n w_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n w_0 t)]$$

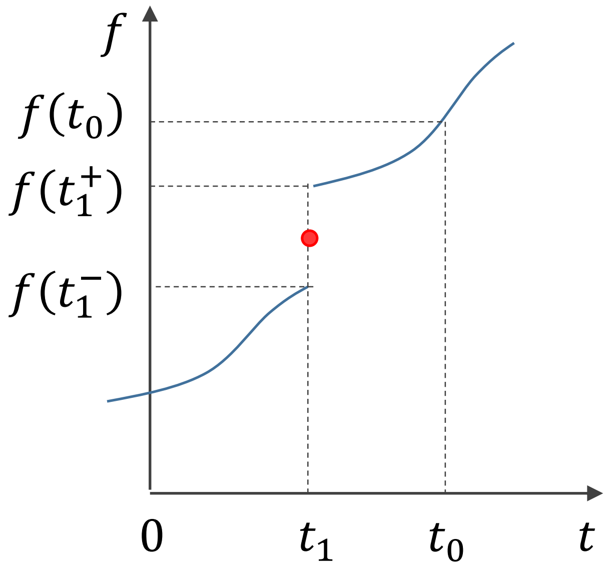
con los coeficientes dados en $(*)$.

Series de Fourier

Si la función $f(t)$ cumple con las condiciones de Dirichlet la serie trigonométrica es convergente y converge a:

$f(t_0)$ si t_0 es un punto de continuidad de la función.

$$\frac{f(t_1^-) + f(t_1^+)}{2}$$ si t_1 es un punto de discontinuidad de la función.



Cuando se trata de funciones no periódicas, podemos estudiarlas en un intervalo de amplitud T, definiéndolas fuera del intervalo como periódica. Las Series de Fourier son aplicables a un grupo amplio de funciones: vibraciones sonoras o mecánicas, propagación de corriente eléctrica y ondas telegráficas, conducción de calor, etc.

Series de Fourier

Determinación de los coeficientes de la Serie

Usando las identidades en el recuadro, se puede demostrar que:

$$\int_{-T/2}^{T/2} sen\, nx \cos kx\, dx = 0 \qquad \int_{-T/2}^{T/2} \cos nx \cos kx\, dx = 0\,, \quad n \neq k$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos nx\, sen\, kx\, dx = 0 \qquad \int_{-T/2}^{T/2} sen\, nx\, sen\, kx\, dx = 0\,, \quad n \neq k$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos nx \cos kx\, dx = \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2 nx\, dx = \frac{T}{2}, \quad n = k$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} sen\, nx\, sen\, kx\, dx = \int_{-T/2}^{T/2} sen^2\, nx\, dx = \frac{T}{2}, \quad n = k$$

$^{(**)}$ Usaremos estas fórmulas (no vamos a demostrarlas).

Podríamos probar estas fórmulas usando:

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$sen\,\alpha\, sen\,\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$sen\,\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[sen(\alpha+\beta) + sen(\alpha-\beta)]$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$sen^2\,\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

Series de Fourier

1. Cálculo del coeficiente a_0: integremos $f(t)$ en el intervalo $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$

$$\boxed{a_0=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt=\int_{-T/2}^{T/2}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nw_0t)+b_n\operatorname{sen}(nw_0t)]\right]dt$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt=\int_{-T/2}^{T/2}\frac{a_0}{2}\,dt+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-T/2}^{T/2}a_n\cos(nw_0t)\,dt+\int_{-T/2}^{T/2}b_n\operatorname{sen}(nw_0t)\,dt\right]$$

Recordemos que $w_0=\frac{2\pi}{T}$ y calculemos las tres integrales:

$$\int_{-T/2}^{T/2}\frac{a_0}{2}\,dt=\frac{a_0}{2}\cdot t\Big|_{-T/2}^{T/2}=a_0\cdot\frac{T}{2}$$

finalmente

$$\int_{-T/2}^{T/2}a_n\cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)dt=\frac{a_nT}{2n\pi}\,sen\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)\Big|_{-T/2}^{T/2}=0,\ \int_{-T/2}^{T/2}b_n\,sen\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)dt=-\frac{b_nT}{2n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)\Big|_{-T/2}^{T/2}=0$$

Series de Fourier

2. Cálculo del coeficiente a_n

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nw_0 t) + b_n \operatorname{sen}(nw_0 t)]$$

Multipliquemos ambos miembros por $cos(nw_0 t)$ e integremos $f(t) \cdot cos(nw_0 t)$en el intervalo $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$

$$f(t) \cdot cos(nw_0 t) = \frac{a_0}{2} \cdot cos(nw_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nw_0 t)\, cos(nw_0 t) + b_n \operatorname{sen}(nw_0 t)\, cos(nw_0 t)]$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot cos(nw_0 t)\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{a_0}{2} \cdot \underbrace{cos(nw_0 t)}_{=\ 0} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{[\underbrace{a_n \cos^2(nw_0 t)}_{= a_n \frac{T}{2}} + \underbrace{b_n \operatorname{sen}(nw_0 t)\, cos(nw_0 t)}_{=\ 0}]}_{\text{por las fórmulas } (**)} \right] dt$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot cos(nw_0 t)\, dt}$$

Series de Fourier

3. Cálculo del coeficiente b_n

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nw_0 t) + b_n \operatorname{sen}(nw_0 t)]$$

Multiplicamos ambos miembros por $sen(nw_0 t)$ e integremos $f(t) \cdot sen(nw_0 t)$en el intervalo $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$

$$f(t) \cdot sen(nw_0 t) = \frac{a_0}{2} \cdot sen(nw_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nw_0 t)\, sen(nw_0 t) + b_n \operatorname{sen}(nw_0 t)\, sen(nw_0 t)]$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot sen(nw_0 t)\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} \left[\underbrace{\frac{a_0}{2} \cdot sen(nw_0 t)}_{=\ 0} + \sum_{n=1}^{\infty} [\underbrace{a_n \cos(nw_0 t)\, sen(nw_0 t)}_{=\ 0} + \underbrace{b_n \operatorname{sen}^2(nw_0 t)}_{=\ b_n \frac{T}{2}}] \right] dt$$

por las fórmulas $^{(**)}$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot sen(nw_0 t)\, dt}$$

Series de Fourier

Cuando se trata de funciones pares o impares, la expresión y el cálculo de los coeficientes de la Serie se simplifica significativamente.

Recordemos algunas propiedades

1. Las gráficas de las funciones pares son simétricas respecto al eje de las ordenadas.
2. Las gráficas de las funciones impares son simétricas respecto al origen.
3. La suma de dos o más funciones pares, es otra par.
4. La suma de dos o más funciones impares, es otra impar.
5. El producto de dos funciones pares o impares, es otra función par.
6. El producto de una función par y una impar, es otra función impar.

Series de Fourier

Si $f(x)$ es una función **par**, resulta $f(-x) = f(x)$, entonces:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

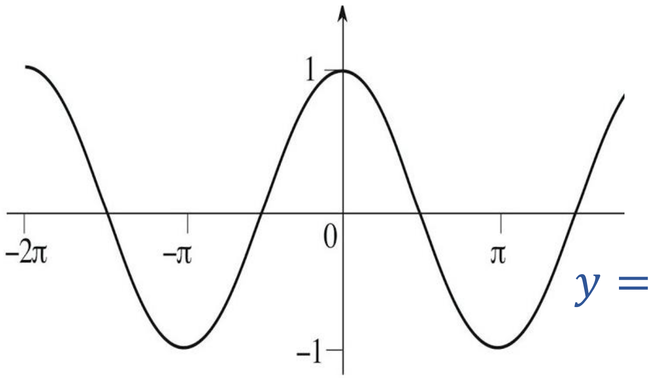
Hacemos un cambio de variable en la primera integral del segundo miembro ($x = -x,\ dx = -\,dx$) y luego invertimos los límites.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Porque $f(x)$ es par

Luego, si $f(x)$ es par, resulta:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$



$y = \cos(x)$

Series de Fourier

Si $f(x)$ es una función **impar**, resulta $f(-x) = -f(x)$, entonces:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx$$

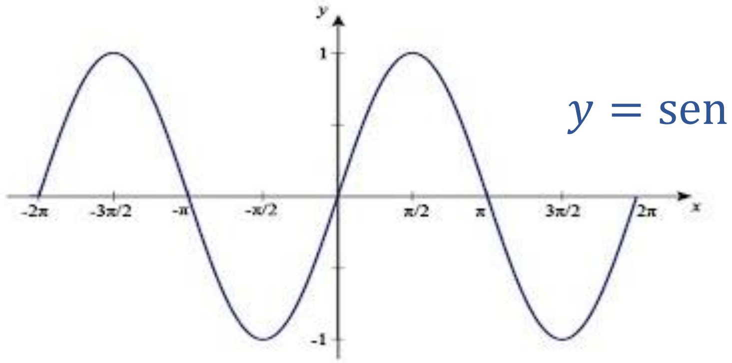
Hacemos un cambio de variable en la primera integral del segundo miembro ($x = -x,\ dx = -\,dx$) y luego invertimos los límites.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{0}^{a} f(-x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx = -\int_{0}^{a} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx = 0$$

Porque $f(x)$ es impar

Luego, si $f(x)$ es impar, resulta:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$$



$y = \text{sen}(x)$

Series de Fourier

En conclusión, para funciones pares tenemos:

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\ dt$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cdot\cos(nw_0t)\ dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot\operatorname{sen}(nw_0t)\ dt = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nw_0t)}$$

Los coeficientes b_n se anulan.

Series de Fourier

Para funciones impares tenemos:

Los coeficientes a_n se anulan.

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\ dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot\cos(nw_0t)\ dt\ = 0$$

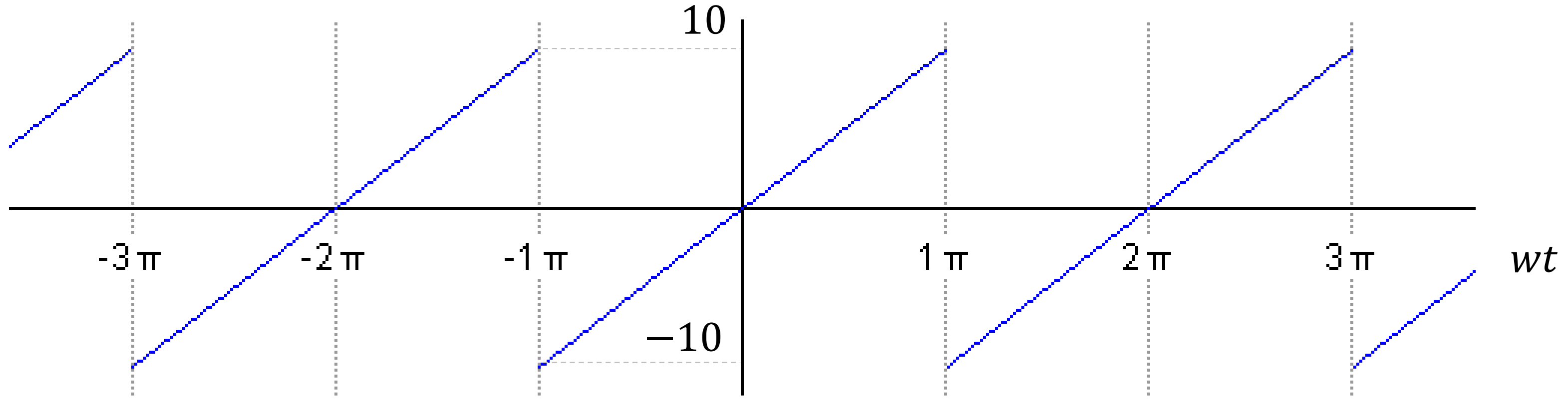
$$b_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cdot\operatorname{sen}(nw_0t)\ dt$$

$$\Rightarrow \boxed{f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nw_0t)}$$

Series de Fourier

Ejemplo:

Desarrollar en Serie de Fourier la onda representada en la figura:



La onda es periódica de período 2π y es continua en $(-\pi, \pi)$. Presenta discontinuidades en $wt = (2n+1)\pi$, siendo $n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ Satisface las condiciones de Dirichlet y:

$f(wt) = \dfrac{10}{\pi} wt$ además, $f(t)$ es impar. Luego:

Series de Fourier

Como $f(t)$ es una función **impar**:

Se integra por partes

Recordemos que $\omega_0 = 1$

$$f(\omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)$$

$$\int x \cdot \operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{\operatorname{sen}(nx) - nx\cos(nx)}{n^2}$$

Calcularemos entonces sólo los coeficientes b_n:

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(\omega t)\cdot \operatorname{sen}(n\omega t)\; d(\omega t) \rightarrow \quad b_n = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{10}{\pi}\omega t \cdot \operatorname{sen}(n\omega t)\; d(\omega t)$$

$$b_n = \frac{20}{\pi^2}\int_0^{\pi} \omega t \cdot \operatorname{sen}(n\omega t)\,d(\omega t)$$

Son todos cero

$$b_n = \frac{20}{\pi^2}\left[\frac{sen(n\omega t) - n\omega t\,cos(n\omega t)}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$b_n = -\frac{20}{n\pi^2}[\pi\,cos(n\pi) - 0\,cos(n0)] \quad \rightarrow \quad \boxed{b_n = (-1)^{n+1}\frac{20}{n\pi}}$$

Series de Fourier

Escribamos algunos términos de la Serie de Fourier:

$$f(\omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\mathrm{sen}(nt)\,, \qquad b_n = (-1)^{n+1}\frac{20}{n\pi}$$

$$f(\omega t) = \frac{20}{\pi}\mathrm{sen}(t) - \frac{20}{2\pi}\mathrm{sen}(2t) + \frac{20}{3\pi}\mathrm{sen}(3t) - \frac{20}{4\pi}\mathrm{sen}(4t) + \frac{20}{5\pi}\mathrm{sen}(5t) - \cdots$$

Amplitudes de los términos de la serie

$$f(\omega t) \cong \frac{20}{\pi}\mathrm{sen}(t) - \frac{10}{\pi}\mathrm{sen}(2t) + \frac{20}{3\pi}\mathrm{sen}(3t) - \frac{5}{\pi}\mathrm{sen}(4t) + \frac{4}{\pi}\mathrm{sen}(5t)$$

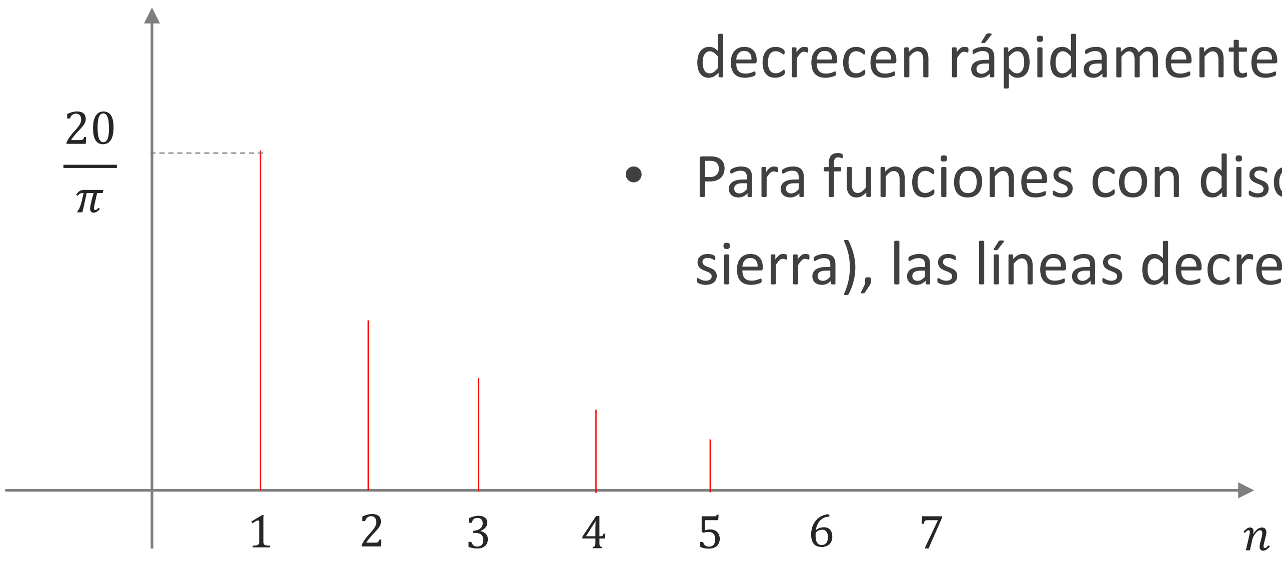
2°, 3°,… armónicos de la serie

Series de Fourier

El Espectro de Líneas

Es la representación gráfica de las amplitudes de los distintos armónicos de la serie.

Sirve como indicador de la rapidez con la que converge la serie.



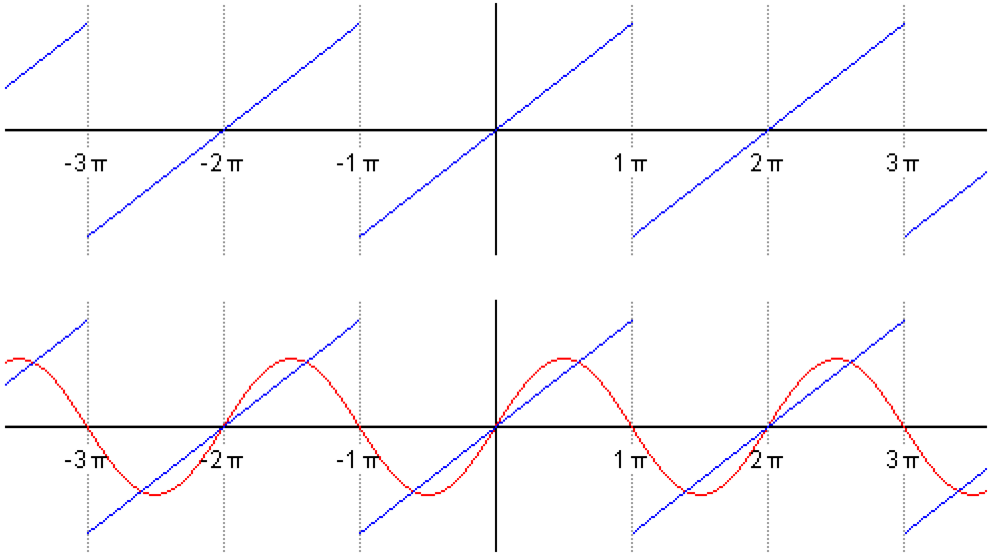
- Para funciones sin discontinuidades («suaves»), las líneas decrecen rápidamente.
- Para funciones con discontinuidades (por ejemplo, dientes de sierra), las líneas decrecen lentamente.

Series de Fourier

Síntesis de ondas

Es la reconstrucción de la función de onda a partir de los primeros términos de la serie.

Podemos ver que la serie representa realmente la función periódica, construyendo la tabla correspondiente y volcando dichos valores en un gráfico.



Series de Fourier

Forma Exponencial de la Serie de Fourier

Otra forma de escribir la expresión de la Serie de Fourier es en forma exponencial. En la descripción de muchos problemas, esta forma resulta conveniente:

Usando las fórmulas de Euler:

$$\cos u = \frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2}, \quad i\, sen\, u = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2}, \quad e^{iu} = \cos u + i\, sen\, u, \quad e^{-iu} = \cos u - i\, sen\, u$$

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n\, e^{inw_0 t}, \qquad c_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-inw_0 t}\, dt}$$

Series de Fourier

Demostración:

Para $n > 0$

$$c_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\left(cos\, nw_0 t - i\; sen\, nw_0 t\right)\; dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, cos\, nw_0 t\;\; dt - i\,\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, sen\, nw_0 t\;\; dt$$

$$= \frac{a_n}{2} - i\,\frac{b_n}{2}$$

Para $n < 0$

$$c_n = \frac{a_n}{2} + i\,\frac{b_n}{2}$$

Series de Fourier

De donde deducimos que, para $n = 0$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n\, e^{inw_0t} = c_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n\, e^{inw_0t} + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_{-n}\, e^{-inw_0t}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{a_n}{2} - i\,\frac{b_n}{2}\right) e^{inw_0t} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{a_n}{2} + i\,\frac{b_n}{2}\right) e^{-inw_0t}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n\, \frac{e^{inw_0t} + e^{-inw_0t}}{2} - i \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n\, \frac{e^{inw_0t} - e^{-inw_0t}}{2}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos nw_0t - i \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n\; i\, sen\, nw_0t = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cos nw_0t + b_n\, sen\, nw_0t)$$

Análisis Matemático II

Ecuaciones Diferenciales a Derivadas Parciales

Ecuaciones Diferenciales a Derivadas Parciales

Introducción

Son aquellas ecuaciones que contienen una función de varias variables independientes y al menos alguna de sus derivadas parciales.

Por ejemplo, en el caso de una función de dos variables independientes, la expresión general implícita de una EDP de Primer Orden es de la forma:

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

Y la de una EDP de Segundo Orden es de la forma:

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0$$

Ecuaciones Diferenciales a Derivadas Parciales

Resolver estas ecuaciones diferenciales se complica mucho más que resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, pues la Solución General de las EDO contiene constantes arbitrarias; en cambio, la Solución General de las EDP contiene **funciones arbitrarias**.

Por ser de uso muy habitual en fenómenos que interesan a la ingeniería, centraremos nuestro estudio en las EDP Lineales de Segundo Orden y de primer grado, que tienen como solución una función $u(x, y)$ con 2 variables independientes.

En su forma más general, estas EDP se representan:

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

Lo que permite clasificarlas en tres tipos:

Ecuaciones Diferenciales a Derivadas Parciales

ELÍPTICAS si $B^2 - 4AC < 0$

Modelan sistemas en estado estacionario (no dependen del tiempo).

Ejemplo: problemas sobre campos eléctricos y magnéticos, problemas térmicos estacionarios.

Ecuación típica: Ecuación de Laplace.

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

PARABÓLICAS si $B^2 - 4AC = 0$

Modelan sistemas en estado transitorio (dependen de t), pero se estabilizan para $t \to \infty$.

Ejemplo: problemas de propagación de calor, filtración de líquidos y gases en medios porosos.

Ecuaciones Diferenciales a Derivadas Parciales

Ecuación típica: Ecuación de Conducción de Calor o Ecuación de Fourier.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - c^2 \ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

HIPERBÓLICAS si $B^2 - 4AC > 0$

Modelan sistemas en estado transitorio oscilatorio (dependen de t) y nunca se estabilizan.

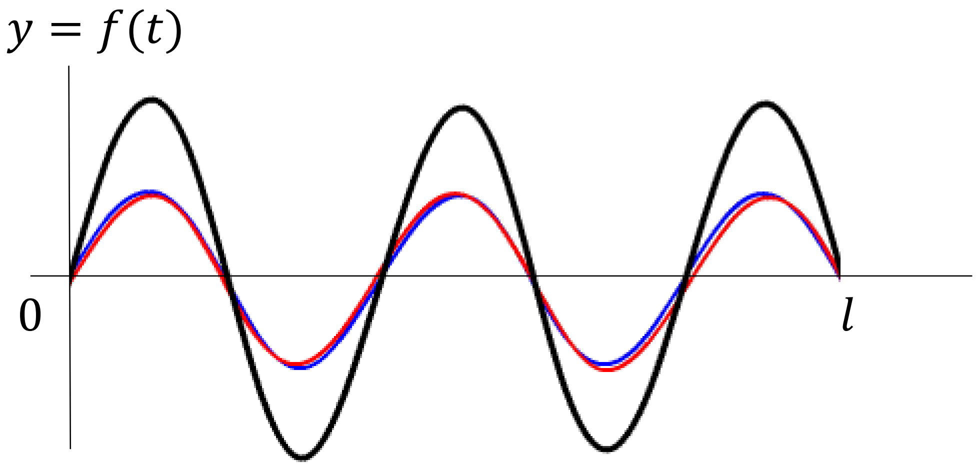
Ejemplo: vibraciones transversales de una cuerda, oscilaciones eléctricas en un conductor.

Ecuación típica: Ecuación de Ondas de D'Alembert.

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

Ecuaciones Diferenciales a Derivadas Parciales

Estudiemos un ejemplo típico de este último tipo: una *cuerda vibrante.*

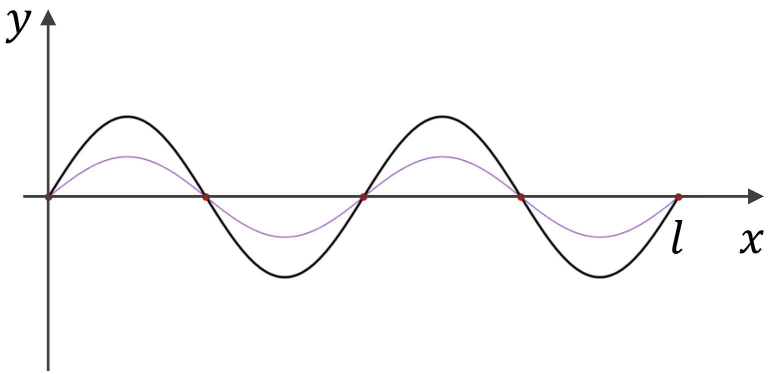


Como cuerda entendemos un hilo o alambre flexible y elástico. Consideremos una cuerda de longitud l extendida entre dos puntos del eje x que se aparta de su posición de equilibrio haciéndola tomar la forma de cierta curva $y = f(x)$ y en el instante $t = 0$ se la deja en libertad, comenzando ésta a oscilar.

Una cuerda al vibrar, produce **ondas estacionarias.**

Ecuaciones Diferenciales a Derivadas Parciales

Llamaremos **onda estacionaria** al fenómeno vibratorio de un punto, resultante de la superposición de dos ondas progresivas, de igual frecuencia e igual amplitud, pero que se propagan en sentidos opuestos (la de color rojo y azul en la imagen).
El problema consiste en determinar la posición de cada punto P de la cuerda en cada instante de tiempo $t > 0$.



Consideremos a los puntos moverse en el plano xy y sólo en la dirección de y (la función de color negro en la imagen). Vamos a despreciar las fuerzas de amortiguamiento, considerar que la tensión T es tangencial a la cuerda en todo punto y que la densidad ρ de la cuerda es uniforme y c depende de la elasticidad de la cuerda.

Es interesante mencionar, que las ondas estacionarias se producen en medios acotados.

Ecuaciones Diferenciales a Derivadas Parciales

Para la determinación completa del movimiento de la cuerda, la función buscada $y(x,t)$ debe satisfacer además las condiciones de frontera, que describen lo que sucede en $x = 0$ y $x = l$ y las condiciones iniciales que describen el estado de la cuerda en $t = 0$.

Supongamos los extremos fijos para cualquier valor de tiempo, es decir:

$$y(0,t) = y(l,t) = 0$$

Y en el instante $t = 0$ la cuerda tiene la forma dada por:

$$y(x,0) = f(x)$$

Y que se imprime una velocidad $g(x)$ a cada punto en el instante inicial, es decir:

$$\frac{\partial y(x,0)}{\partial t} = g(x)$$

Ecuaciones Diferenciales a Derivadas Parciales

Solución por el Método de Separación de Variables (método de Fourier)

Para hallar la solución buscamos, en un principio, soluciones particulares de la EDP que satisfagan las condiciones de frontera en la forma de dos funciones $X(x)$ y $T(t)$, es decir:

$$y(x,t) = X(x)\,T(t)$$

Derivemos a $y(x,t)$ dos veces respecto de x y respecto de t y la reemplacemos en la EDP:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = X''T, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = XT''$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \;\; \rightarrow \;\; XT'' - c^2X''T = 0 \;\; \rightarrow \frac{T''}{c^2T} = \frac{X''}{X}$$

El primer miembro no depende de x y el segundo no depende de t. La igualdad se verifica sólo si ambos miembros son iguales a una constante que llamaremos $-\lambda^2$.

Ecuaciones Diferenciales a Derivadas Parciales

$$\frac{T''}{c^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

De esta manera, podemos obtener las siguientes ecuaciones:

$T'' + \lambda^2 c^2 T = 0$

$X'' + \lambda^2 X = 0$

Estas son dos EDO Lineales Homogéneas de Segundo Orden a coeficientes constantes y las raíces de sus ecuaciones característica son complejas conjugadas, por lo tanto:

$T = A\cos(c\lambda t) + B\,\mathrm{sen}(c\lambda t)$

$X = C\cos(\lambda x) + D\,\mathrm{sen}(\lambda x)$

Donde A, B, C y D son constantes arbitrarias. Determinemos C y D aplicando condiciones de frontera: $y(0,t) = y(l,t) = 0$

Ecuaciones Diferenciales a Derivadas Parciales

$X(0) = C \cdot 1 + D \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$

$X(l) = C \cdot \cos(\lambda l) + D \operatorname{sen}(\lambda l) \;\; \Rightarrow \;\; D \operatorname{sen}(\lambda l) = 0$

$D \neq 0$ puesto que, de lo contrario sería $X(x) = 0$, es decir $y(x,t) = 0$ que es una cuerda en reposo y esto contradice la hipótesis. Entonces debe verificarse que:

$$\operatorname{sen}(\lambda l) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{n\pi}{l} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Los valores de λ se llaman **valores propios** del problema de frontera y las correspondientes **funciones propias** son: $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

Reemplazando en la Solución para $X(x)$ obtenemos:

$$\boxed{X(x) = D_n\, sen\left(\frac{n\pi}{l}x\right)}$$

Ecuaciones Diferenciales a Derivadas Parciales

Conociendo λ la reemplacemos en la Solución para $T(t)$:

$$\boxed{T(t) = A_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi}{l}t\right)}$$

Luego:

$$y_n(x,t) = D_n\, sen\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left[A_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi}{l}t\right)\right] \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$y_n(x,t) = sen\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left[a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi}{l}t\right)\right] \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Como la EDP es lineal y homogénea, la suma de las soluciones es también solución:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} sen\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left[a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l}t\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi}{l}t\right)\right] \qquad (I)$$

Ecuaciones Diferenciales a Derivadas Parciales

Para determinar a_n y b_n debemos tener en cuenta las condiciones iniciales:

$$y(x,0) = f(x), \qquad \frac{\partial y(x,0)}{\partial t} = g(x)$$

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} sen\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left[a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l}0\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi}{l}0\right)\right] = f(x)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, sen\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$\frac{\partial y(x,0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} sen\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\frac{cn\pi}{l}\right)\left[-a_n \operatorname{sen}\left(\frac{cn\pi}{l}0\right) + b_n \cos\left(\frac{cn\pi}{l}0\right)\right] = g(x)$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, sen\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\frac{cn\pi}{l}\right)$$

Ecuaciones Diferenciales a Derivadas Parciales

Según el desarrollo en Serie de Fourier:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, sen\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \quad \rightarrow \quad \boxed{a_n = \frac{1}{l}\int_{-l/2}^{l/2} f(x)\ sen\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, sen\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(\frac{cn\pi}{l}\right)$$

$$g(x)\left(\frac{l}{cn\pi}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, sen\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \rightarrow \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l/2}^{l/2} g(x)\left(\frac{l}{cn\pi}\right) sen\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{cn\pi}\int_{-l/2}^{l/2} g(x)\, sen\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx}$$

Reemplazando en (I) se obtiene la solución buscada.

Ecuaciones Diferenciales a Derivadas Parciales

En forma análoga, se puede aplicar el método de separación de variables de Fourier, para calcular las soluciones generales en los casos de las ecuaciones Ecuación de Laplace:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0}$$

haciendo $u(x,y) = X(x).Y(y)$ para posteriormente aplicar las condiciones de frontera.

Y también para la Ecuación de Conducción de Calor o Ecuación de Fourier.

$$\boxed{\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - c^2 \, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0}$$

haciendo $u(x,t) = X(x).T(t)$ para posteriormente aplicar las condiciones iniciales y de frontera.