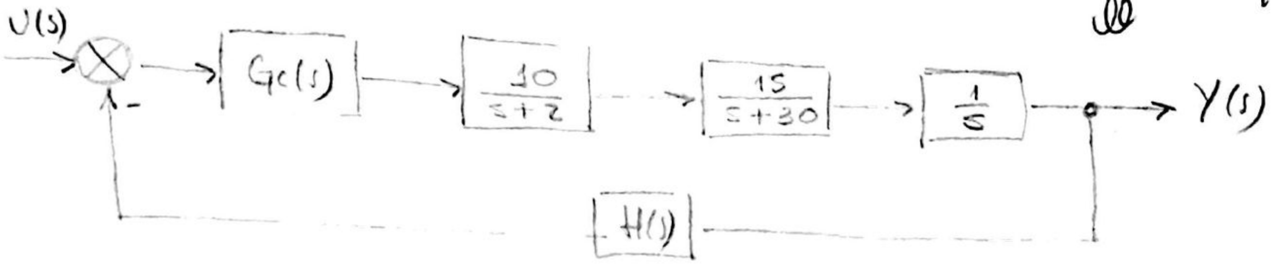
Examen Final - Sistemas de Control 07/10/10 (1)

Tema 1



$$H(s) = 1 \qquad G(s) = \frac{150}{s(s+2)(s+30)}$$

Puntos de diseño

$$s_{1,2} = -2 \pm 2j$$

El punto de diseño no forma parte del lugar de raíces. No se puede compensar con ajuste de ganancia. Usamos un compensador

$$\phi_c - \phi_0 - \phi_2 - \phi_{30} = \pm 180(2k+1)$$

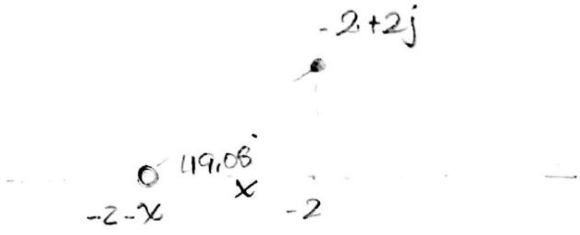
$$\phi_c - 135^\circ - 90^\circ - 4,08 = \pm 180(2k+1)$$

$$\phi_c - 229,08 = -180^\circ$$

$$\boxed{\phi_c = 49,08^\circ} \rightarrow \text{Aporte angular del compensador}$$

- Como se pide que no haya cero de lazo cerrado, se usa compensación por realimentación de posición y velocidad. H(s) pasa a ser de la forma $(Ts+1)$ y con $G_c = K$ se ajusta la ganancia

Para aportar $49{,}08°$, el cero debe estar en $-3{,}733$ ②



$$tg(49{,}08) = \frac{2}{x} \qquad x = 1{,}733$$

$$H(s) = (0{,}267\, s + 1)$$

$$G(s)H(s) = K \cdot \frac{150}{s(s+2)(s+30)} \cdot 0{,}267\,(s+3{,}73)$$

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$K = \left.\frac{|s|\,|s+2|\,|s+30|}{150\;0{,}267\,|s+3{,}73|}\right|_{s=-2+2j}$$

$$K = \frac{2\sqrt{2}\cdot 2 \cdot 2\sqrt{197}}{150\;0{,}267\;2{,}64} = 1{,}50$$

$$H(s) = (0{,}267\, s + 1) \quad G_c(s) = 1{,}5 \quad G(s) = \frac{150}{s(s+2)(s+30)}$$

b) El sistema compensado es de tipo 1

$$K_v = \lim_{s \to 0} s\, G_c(s) H(s) G(s) = \frac{1{,}5 \cdot 150}{2\;\;30} = 3{,}75$$

$e_{ss} = 0{,}267$ para una entrada rampa unitaria

c) Función de Transferencia de lazo cerrado (3)

Lazo Directo $G(s)\,G_c(s) = \dfrac{225}{s(s+2)(s+30)}$

Lazo Realimentado $H(s) = (0{,}267\,s + 1)$

$$FTLC = \frac{\dfrac{225}{s(s+2)(s+30)}}{1 + \dfrac{225(0{,}267s+1)}{s(s+2)(s+30)}}$$

$$s(s+2)(s+30) = s(s^2+32s+60) = s^3+32s^2+60s$$

$$FTLC = \frac{225}{s^3+32s^2+60s+60{,}075s+225}$$

$$FTLC = \frac{225}{s^3+32s^2+120{,}075s+225}$$

d) Respuesta al escalón unitario

$\beta = 45° \therefore \xi = 0{,}707$ $\quad \sigma = 2 = \xi\omega_n$

$\omega_n = 2\sqrt{2}$

Tiempo de pico $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_d} = 1{,}57$ seg

La resp. es Correcta

Sobrepico $M_p\% = e^{-\frac{\sigma\pi}{\omega_d}} = 0{,}043$

El sistema también se podría haber compensado por (4)
el método de cancelación

Si ponemos un cero en 2, se cancela ese polo. El polo del compensador tiene que dar $49{,}08^\circ - 90^\circ = -40{,}92$

$$tg(40{,}92) = \frac{2}{x}$$

$$x = 2{,}31$$

$$G_c = K\frac{(s+2)}{(s+4{,}31)}$$

$$1 + K\frac{\cancel{(s+2)}}{(s+4{,}31)} \cdot \frac{150}{s\cancel{(s+2)}(s+30)} = 0$$

$$K = \frac{|s+4{,}31||s+30|}{150} = \frac{3{,}055 \cdot 2\sqrt{197}}{150}$$

$$K = 0{,}5$$

$$H(s) = 1 \qquad G_c(s) = 0{,}57\frac{(s+2)}{(s+4{,}31)} \qquad G(s) = \frac{150}{s(s+2)(s+30)}$$

Tema 2

a)

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{150}{s^3+32s^2+60s} \cdot \frac{X(s)}{X(s)}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$x = \dot{x}_3$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{150\, s^{-3}}{1+32s^{-1}+60s^{-2}} \cdot \frac{X(s)}{X(s)}$$

$$C(s) = 150\, s^{-3} X(s)$$

$$R(s) = X(s) + 32\, s^{-1} X(s) + 60\, s^{-2} X(s)$$

$$X(s) = R(s) - 32\, s^{-1} X(s) - 60\, s^{-2} X(s)$$

$$C(s) = 150\, x_1$$

$$X(s) = \dot{x}_3 = R(s) - 32\, x_3 - 60\, x_2$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -60 & -32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 150 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

b) Autovalores del sistema

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -60 & -32 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 60 & s+32 \end{vmatrix}$$

Scanned by CamScanner

$$|sI - A| = s\left[s(s+32)+60\right] = s\left(s^2+32s+60\right)$$

Se comprueba que los autovalores son las raíces de la ecuación característica

$$s_1 = 0 \quad s_2 = -2 \quad s_3 = -30$$

c) Comprobamos Controlabilidad

$$W_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -32 \\ 1 & -32 & 964 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc|c}
 & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & 0 & -60 & -32 & 1 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -60 & -32 & -32 \\
0 & -60 & -32 & 0 & 1920 & 964 & 964
\end{array}$$

$|M_c| = -1$ Rango$\{M_c\} = 3$ La matriz es controlable

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & 0 & 0 & 1 \\
 & & & 0 & -60 & -32 \\
 & & & 0 & 1920 & 964 \\
\hline
150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 150
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & -60 & -32 \\ \hline 150 & 0 & 0 & 0 & 150 & 0 \end{array}$$

$$W_o = \begin{bmatrix} 150 & 0 & 0 \\ 0 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 150 \end{bmatrix} \qquad |W_o| = 150^3 \qquad \text{Rango}\{W_o\} = 3$$

Observable

d) $\xi = 0{,}707 \quad \omega_n = \sqrt{8} \quad S = -28$

Polos deseados

$S_{1,2} = -2 \pm j2 \quad S_3 = -28$

$(s+2-j2)(s+2+j2) = s^2 + 4s + 8$

$$(s^2+4s+8)(s+28) = s^3 + 4s^2 + 8s + 28s^2 + 112s + 224$$
$$= s^3 + 32s^2 + 120s + 224$$

$u = -Kx$

$\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x$

$$|sI - A + BK| = \left|\begin{matrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -60 & -32 \end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right| \left| K_1 \; K_2 \; K_3 \right|$$

$$|sI - A + BK| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 60 & s+32 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ K_1 & K_2 & K_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ K_1 & 60+K_2 & s+32+K_3 \end{vmatrix}$$

$$= s\left[s^2 + (32+K_3)s + (60+K_2)\right] + K_1$$

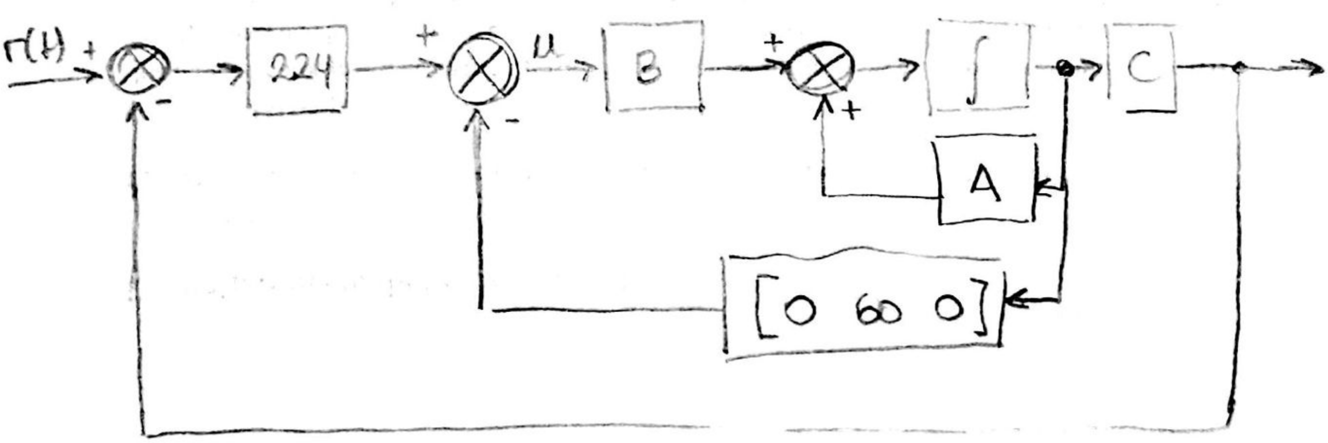
$$= s^3 + (32+K_3)s^2 + (60+K_2)s + K_1$$

$32 + K_3 = 32$ $\quad$ $60 + K_2 = 120$ $\quad$ $K_1 = 224$

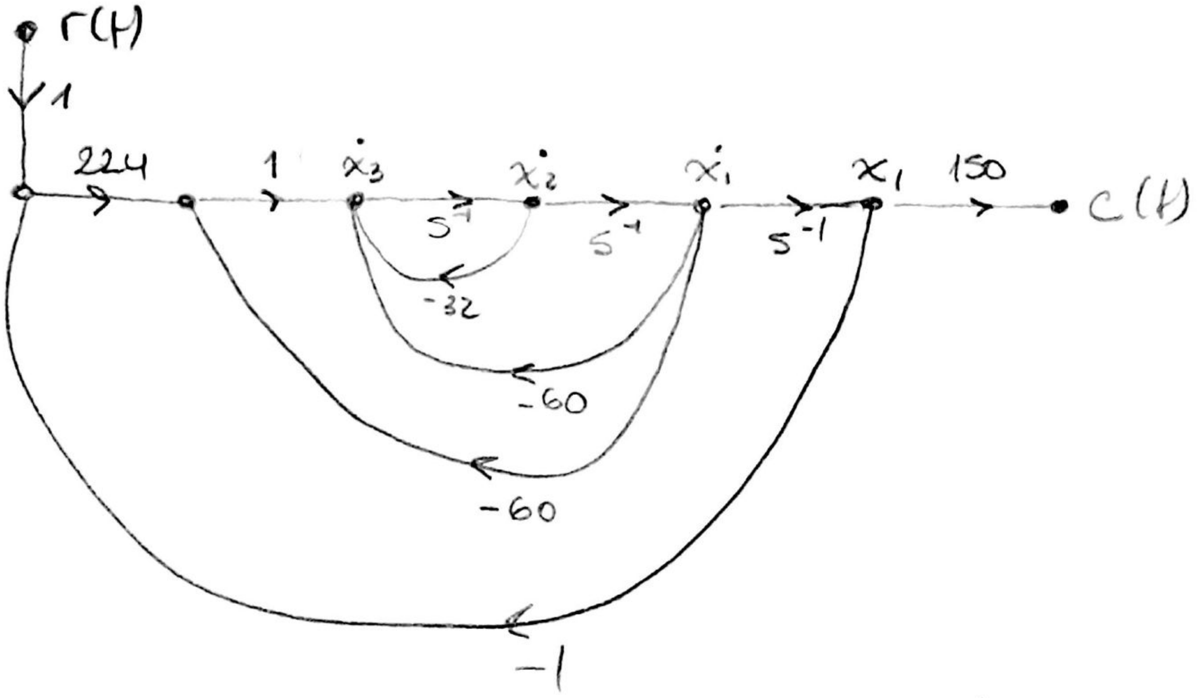
$K_3 = 0$ $\quad$ $K_2 = 60$

$$\begin{bmatrix} 224 & 60 & 0 \end{bmatrix}$$

Diagrama en bloques



(9)



Examen Final de Control 22/02/10

Tema 1

a) La función de transferencia de un sistema es el cociente entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada, con todas las condiciones iniciales iguales a cero.

Otra forma de definirlo es decir que representa la transformada de Laplace de la respuesta temporal del sistema a un impulso unitario. La función de transferencia y la respuesta al impulso de un SLIT contiene la misma información sobre la dinámica del sistema.

b) El tipo de un sistema indica la cantidad de integradores (polos en el origen) que tiene la función de transferencia en lazo abierto. El tipo es una medida de la capacidad de un sistema para seguir una entrada determinada.

c) El margen de fase es la cantidad de retardo de fase adicional en la frec. de cruce de ganancia (frec. para la cual $|G(j\omega)| = 1$) requerido para llevar al sistema al borde de la inestabilidad.

Junto con el margen de ganancia, son una medida de la estabilidad relativa del sist. (siempre que sea de fase mínima). Si el MG o el MF son negativos, el sist. es inestable.

d) El margen de ganancia es el recíproco de la magnitud $|G(j\omega)|$ en la frecuencia en la cual la fase es $-180°$. Para un sistema de fase mínima, el MG indica cuánto puede incrementarse la ganancia antes que el sist. se vuelve inestable

11

Para obtener un rendimiento satisfactorio, el margen de fase debe estar entre 30° y 60°, y el margen de ganancia debe ser mayor que 6 dB.

e) Se dice que un sistema es controlable en el tiempo t_0 si se puede transferir desde cualquier estado inicial $x(t_0)$ a cualquier otro estado, mediante un vector de control sin restricciones, en un intervalo finito de tiempo.

Se dice que un sistema es observable si el estado $x(t_0)$ se determina a partir de la observación de $y(t)$ durante un intervalo de tiempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$

f) El rango de una matriz es la dimensión del espacio formado por las columnas o las filas de la matriz. Es decir, es la cant. de columnas o filas linealmente independientes.

g) Los autovalores de un sistema son las raíces de la ecuación $|\lambda I - A| = 0$ que corresponden a las raíces de la ecuación característica o a los polos de la función de transferencia de lazo abierto.

h) La traza de una matriz es la suma de los elementos de la diagonal principal

i) La traza de la matriz A es igual a la suma de sus autovalores

Scanned by CamScanner

Tema 2

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -18 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 18 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \rightarrow \quad sX_1 = X_2$$

$$\dot{x}_2 = -18x_1 - 9x_2 + u \quad \rightarrow \quad sX_2 = -18X_1 - 9X_2 + U(s)$$

$$y = 18x_1 \quad \rightarrow \quad Y = 18X_1$$

$$s^2 X_1 = -18X_1 - 9X_1 s + U(s)$$

$$(s^2 + 9s + 18)X_1 = U(s)$$

$$X_1 = \frac{U(s)}{s^2+9s+18}$$

$$Y = \frac{18U(s)}{s^2+9s+18}$$

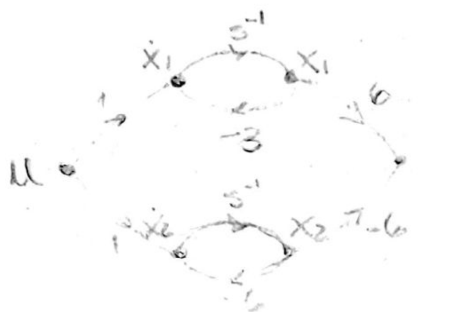
$$\boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{18}{s^2+9s+18}}$$

$$\frac{18}{s^2+9s+18} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+6}$$

$$A = \lim_{s \to -3} \frac{18}{(s+6)} = 6 \qquad B = \lim_{s \to -6} \frac{18}{(s+3)} = -6$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6}{s+3} - \frac{6}{s+6}$$

a)



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 6 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

b) El sistema es estable porque todos los polos de la FdeT tienen parte real negativa ($s_1 = -3$, $s_2 = -6$), es decir, se encuentran en el semiplano izquierdo del plano s.

c) $W_c = [B \;\; AB]$

$$\begin{array}{cc|c} & & 1 \\ & & 1 \\ \hline -3 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & -6 \end{array}$$

$$W_c = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$$

$|W_c| = -3 \neq 0$ Rango$\{W_c\} = 2$

Controlable

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|cc} & & -3 & 0 \\ & & 0 & -6 \\ \hline 6 & -6 & -18 & 36 \end{array}$$

$$W_o = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -18 & 36 \end{bmatrix}$$

$|W_o| = 108$ Rango$\{W_o\} = 2$

Observable

1) Sea T la matriz por la que hay que multiplicar A ara obtener la forma canónica diagonal.

Suponiendo

$$x = Tz$$

$$\dot{x} = T\dot{z} \quad \text{donde } T^{-1} \text{ existe}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T\dot{z} = ATz + Bu \\ y = CTz + Du \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \\ y = CTz + Du \end{cases}$$

Los autovalores del sistema son:

$$|\lambda I - T^{-1}AT| = 0$$

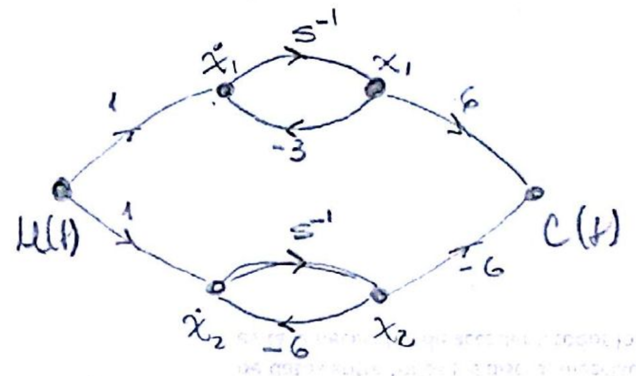
$$|\lambda T^{-1}T - T^{-1}AT| = 0$$

$$|T^{-1}|\,|\lambda I - A|\,|T| = 0 \quad \text{Como } |T^{-1}| = \frac{1}{|T|} \quad \text{ó } |T^{-1}||T| = |T^{-1}T| = |I| = 1$$

$$|\lambda I - A| = 0$$

Los autovalores son los mismos que antes de realizar la transformación, lo que demuestra su invariancia ante transformaciones lineales.

e)



$$\frac{C(s)}{U(s)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{M_i \Delta_i}{\Delta} \qquad N=2$$

$$M_1 = 6s^{-1} \quad \Delta_1 = 1 + 6s^{-1}$$

$$M_2 = -6s^{-1} \quad \Delta_2 = 1 + 3s^{-1}$$

$$\Delta = 1 + 3s^{-1} + 6s^{-1} + 18s^{-2}$$

$$\Delta = 1 + 9s^{-1} + 18s^{-2}$$

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{6s^{-1} + 36s^{-2} - 6s^{-1} - 18s^{-2}}{1 + 9s^{-1} + 18s^{-2}} = \frac{18s^{-2}}{1 + 9s^{-1} + 18s^{-2}}$$

$$\boxed{\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{18}{s^2 + 9s + 18}}$$

f) $\dot{X} = AX + Bu$

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = Bu(t)$$

$$e^{-At}\left[\dot{x}(t) - Ax(t)\right] = e^{-At}Bu(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-At}x(t)\right] = e^{-At}Bu(t)$$

$$e^{-At}x(t) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)\,d\tau + x(0)$$

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{At} e^{-A\tau} B \, u(\tau) d\tau$$

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \, u(\tau) d\tau$$

$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$ Aplicando Laplace

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$ Como $\mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\} = e^{At}$

$$X(s) = (sI-A)^{-1}x(0) + (sI-A)^{-1}BU(s)$$

$$X(s) = \mathcal{L}\{e^{At}\}x(0) + \mathcal{L}\{e^{At}\}BU(s)$$

Antitransformando y teniendo en cuenta que $\mathcal{L}^{-1}\{A \cdot B\} = A \circledast B$

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \, u(\tau) d\tau$$

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-6t} \end{bmatrix}$$

$u(t) = 1$

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \, d\tau$$

$$e^{A(t-\tau)} = \begin{bmatrix} e^{-3(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-6(t-\tau)} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e^{A(t-\tau)} B = \begin{bmatrix} e^{-3(t-\tau)} \\ e^{-6(t-\tau)} \end{bmatrix}$$

$$\int_0^t e^{-3(t-\tau)}\,d\tau = e^{-3t}\int_0^t e^{3\tau}\,d\tau = e^{-3t}\left[\frac{e^{3t}-1}{3}\right] = \frac{1-e^{-3t}}{3}$$

$$\int_0^t e^{-6(t-\tau)}\,d\tau = e^{-6t}\int_0^t e^{6\tau}\,d\tau = e^{-6t}\left[\frac{e^{6t}-1}{6}\right] = \frac{1-e^{-6t}}{6}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{1-e^{-3t}}{3} \\[2mm] \dfrac{1-e^{-6t}}{6} \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 6 & -6 \end{bmatrix} x = 2 - 2e^{-3t} - 1 + e^{-6t}$$

$$\boxed{y = 1 - 2e^{-3t} + e^{-6t}}$$

Comprobamos con la F de T

$$C(s) = \frac{18}{s(s+3)(s+6)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s+6}$$

$$A = \lim_{s\to 0} \frac{18}{s^2+9s+18} = 1 \qquad B = \lim_{s\to -3} \frac{18}{s^2+6s} = -2$$

$$C = \lim_{s\to -6} \frac{18}{s(s+3)} = 1 \qquad C(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+3} + \frac{1}{s+6}$$

$$c(t) = 1 - 2e^{-3t} + e^{-6t}$$

Scanned by CamScanner

g) $x_1(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} e^{-3t}$ $\quad x_2(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} e^{-6t}$

h) $\xi = 0{,}707 \quad \omega_n = 7{,}071$

Polos deseados $s_{1,2} = -5 \pm j5$

Polinomio característico deseado

$$(s+5-j5)(s+5+j5) = 0$$

$$\boxed{s^2 + 10s + 50 = 0}$$

Si consideramos $u = -KX$

$$\dot{x} = (A - BK)x$$

$$|sI - A + BK| = \begin{vmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K_1 & K_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} s+3 & 0 \\ 0 & s+6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K_1 & K_2 \\ K_1 & K_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s+3+K_1 & K_2 \\ K_1 & s+6+K_2 \end{vmatrix}$$

$$(s+3+K_1)(s+6+K_2) - K_1 K_2 = 0$$

$$s^2 + 6s + K_2 s$$
$$+ 3s + 18 + 3K_2$$
$$+ K_1 s + 6K_1 + K_1 K_2$$

$$s^2 + (9 + K_1 + K_2)s + 18 + 6K_1 + 3K_2 + 2K_1K_2 = 0$$

$$9 + K_1 + K_2 = 10 \qquad 18 + 6K_1 + 3K_2 + 2K_1 K_2 = 0$$

$$K_1 = 1 - K_2$$

$$\cancel{18 + 6 - 6K_2 + 3K_2 + 2K_2 - 2K_2^2 = 0}$$

$$\cancel{24 - K_2 - 2K_2^2 = 0}$$

$$\cancel{\boxed{K_2 = 3{,}22} \qquad K_2 = -3{,}72}$$

~~No me da si trabajo con la forma diagonal~~

$$s^2 + (9 + K_1 + K_2)s + 18 + 6K_1 + 3K_2 = 0$$

$$9 + K_1 + K_2 = 10 \qquad 18 + 6K_1 + 3K_2 = 50$$

$$K_1 = 1 - K_2 \qquad 18 + 6 - 6K_2 + 3K_2 = 50$$

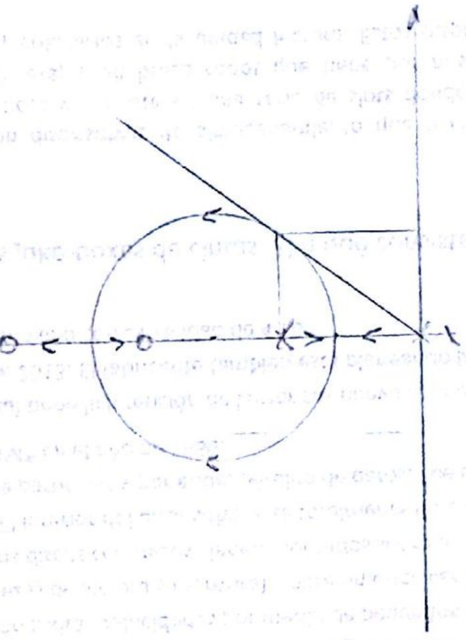
$$K_1 = 9{,}66 \qquad K_2 = -8{,}66$$

$$K = \begin{bmatrix} 9{,}66 & -8{,}66 \end{bmatrix}$$

Tema 3

$$G_c(s)\,G_p(s) = \frac{K\,(s+2)(s+3)}{s\,(s+1)}$$

a)



- No tiene asíntotas
- Punto de bifurcación

$$1 + K\,\frac{(s+2)(s+3)}{s\,(s+1)} = 0$$

$$K = -\frac{s(s+1)}{(s+2)(s+3)} = -\frac{s^2+s}{s^2+5s+6}$$

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{(2s+1)(s^2+5s+6)-(s^2+s)(2s+5)}{(s^2+5s+6)^2} = 0$$

$$\cancel{2s^3}+10s^2+12s+s^2+\cancel{5s}+6-\cancel{2s^3}-5s^2-2s^2-\cancel{5s}=0$$

$$4s^2+12s+6=0 \qquad s_1=-0{,}63 \qquad s_2=-2{,}37$$

• Criterio de Routh

$$1 + K\frac{(s^2+5s+6)}{s^2+s} = 0$$

$$s^2(1+K) + s(1+5K) + 6K = 0$$

$$\begin{array}{lll} s^2 & 1+K & 6K \\ s^1 & 1+5K & \\ s^0 & 6K & \end{array}$$

El sistema es estable para todo $K > 0$

b) $\xi = \cos\beta = 0{,}5 \rightarrow \beta = 60^\circ$

No hay ningún punto del lugar de raíces con $\xi = 0{,}5$

Con $\xi = 0{,}82 \rightarrow \beta = 35^\circ$

Punto de diseño $p_0 = -1{,}1 + j0{,}75$

$$|K| = \left.\frac{|s|\,|s+1|}{|s+2|\,|s+3|}\right|_{s=-1{,}1+j0{,}75} = \frac{1{,}33 \quad 0{,}76}{1{,}71 \quad 2{,}04}$$

$$\boxed{|K| = 0{,}29}$$

c) El controlador es tipo proporcional derivativo (PD)

$$K_P + sK_D = K_D\left(s + \frac{K_P}{K_D}\right) = 10(s+2)$$

$$K_P(1 + T_D s)$$

$$T_D = \frac{K_D}{K_P} = 0{,}5$$

$$\boxed{\begin{array}{l} K_D = 10 \\ K_P = 20 \end{array}}$$

Tema 4

$$H(s) = 1 \qquad G(s) = \frac{(s+10)(s^2+9s+81)}{s(s+4)(s^2+14{,}4s+64)}$$

$K_v = 50 \qquad M\phi = 50^\circ$

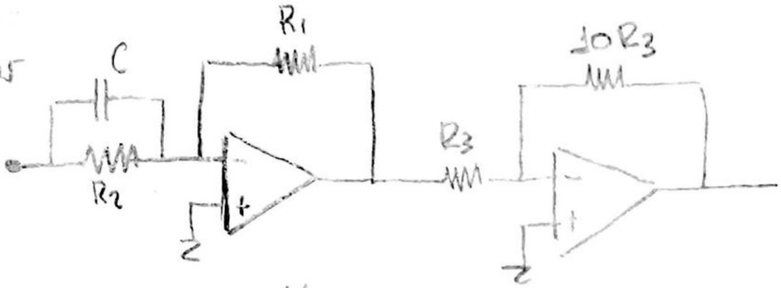
$$K_v = \lim_{s\to 0} s\,G(s)H(s) = \lim_{s\to 0} \frac{(s+10)(s^2+9s+81)}{(s+4)(s^2+14{,}4s+64)} = 3{,}16$$

$$K = \frac{50}{K_v} = 15{,}8$$

Tema 3

d) Síntesis del controlador

$G_c(s) = 1\,0(s+2)$



$$\frac{\frac{R_2}{sC}}{R_2 + \frac{1}{sC}} = \frac{R_2}{sCR_2+1} = \frac{1/C}{s + 1/CR_2}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{R_2} + sC} = \frac{1/C}{s + \frac{1}{CR_2}}$$

$$\frac{E_a}{E_i} = -\frac{R_1}{\frac{1/C}{s + 1/CR_2}} = -R_1C\left(s + \frac{1}{CR_2}\right)$$

$$1 = R_1C \qquad 2 = \frac{1}{CR_2}$$

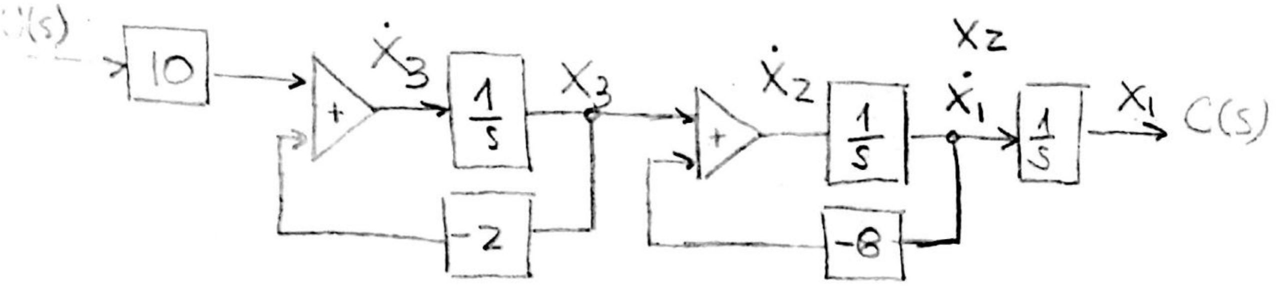
$\boxed{C = 1\,\mu F}$ $\boxed{R_2 = 500\,K\Omega}$

$\boxed{R_1 = 1\,M\Omega}$ $\boxed{R_3 = 10\,K\Omega}$

Examen Final de Control 01/02/2010

23

Tema 1



a) $\dot{x}_3 = -2x_3 + 10u$

$\dot{x}_2 = -8x_2 + x_3$

$\dot{x}_1 = x_2$

$y = x_1$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -8 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 10\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

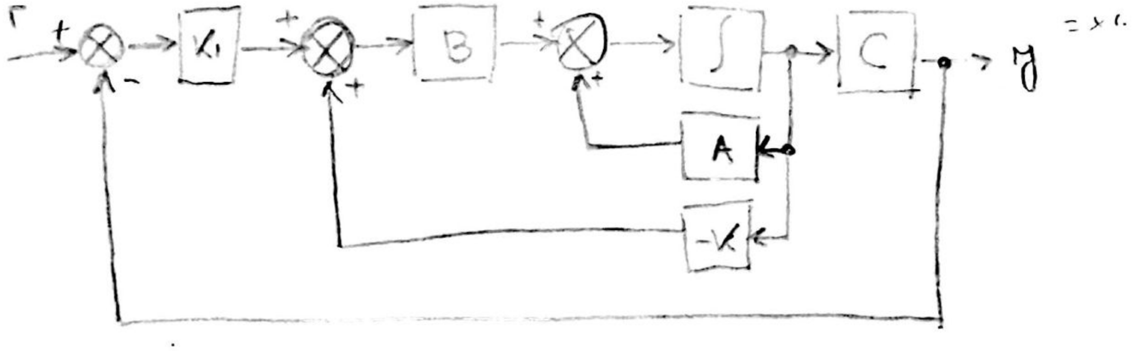
b) Polinomio Característico deseado

$(s^2+3s+[illegible])(s+20) = s^3 + [illegible] + 20s^2 + 60s + 120$

$= s^3 + [illegible]s^2 + [illegible]s + 120$

$$u = -\begin{bmatrix}0 & k_1 & k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + k_1(r - x_1)$$

$u = -k'x + k_1 r \qquad k' = \begin{bmatrix}k_1 & k_2 & k_3\end{bmatrix}$



Como la planta ya tiene un integrador, no es necesario agregar otro, sólo se realimentan los estados como se muestra en el diagrama. 24

Se corrobora controlabilidad y observabilidad

$$Mc = [B \quad AB \quad A^2B]$$

$$\begin{array}{ccc|ccc|c}
 & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & -8 & 1 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & -2 & 10 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 0 & -8 & 1 & 10 \\
0 & -8 & 1 & 0 & 64 & -10 & -100 \\
0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 4 & 40
\end{array}$$

$$Mc = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & -100 \\ 10 & -20 & 40 \end{bmatrix}$$

$$|Mc| = -1000 \neq 0$$

Controlable

$$Mo = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \end{bmatrix} \quad |Mo| = 1 \quad \text{Observable}$$

$$|SI - A + BK| = \left|\begin{matrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{matrix}\right| \left|K_1 \quad K_2 \quad K_3\right|$$

$$= \left|\begin{matrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+8 & -1 \\ 0 & 0 & s+2 \end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10K_1 & 10K_2 & 10K_3 \end{matrix}\right|$$

$$= \left|\begin{matrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+8 & -1 \\ 10K_1 & 10K_2 & s+2+10K_3 \end{matrix}\right|$$

(25)

$$(s+15-j1{,}93)(s+15+j1{,}93)=(s^2+30s+228{,}72)$$

$$(s+200)(s^2+30s+228{,}72)=s^3+230s^2+6228{,}72s+45749$$

$$|sI-A+LC|=\begin{vmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+8 & -1 \\ 0 & 0 & s+2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ L_2 & 0 & 0 \\ L_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} s+L_1 & -1 & 0 \\ L_2 & s+8 & -1 \\ L_3 & 0 & s+2 \end{vmatrix}$$

$$=(s+L_1)\left[(s+8)(s+2)\right]+L_2(s+2)+L_3$$

$$=(s+L_1)(s^2+10s+16)+L_2s+2L_2+L_3$$

$$=s^3+10s^2+16s+L_1s^2+10L_1s+16L_1+L_2s+2L_2+L_3$$

$$=s^3+s^2(10+L_1)+s(16+10L_1+L_2)+(16L_1+2L_2+L_3)$$

$10+L_1=230$ $\quad 16+10L_1+L_2=6228{,}72$ $\quad 16L_1+2L_2+L_3=45749$

$\boxed{L_1=220}$ $\quad L_2=4012{,}7$ $\quad \boxed{L_3=37719{,}6}$

$$|sI-A+BK| = s\left[(s+8)(s+2+10K_3)+10K_2\right]+10K_1$$

$$= s\left[s^2+s(2+10K_3)+8s+8(2+10K_3)+10K_2\right]+10K_1$$

$$= s\left[s^2+s(10+10K_3)+16+10K_2+80K_3\right]+10K_1$$

$$= s^3+s^2(10+10K_3)+s(16+10K_2+80K_3)+10K_1$$

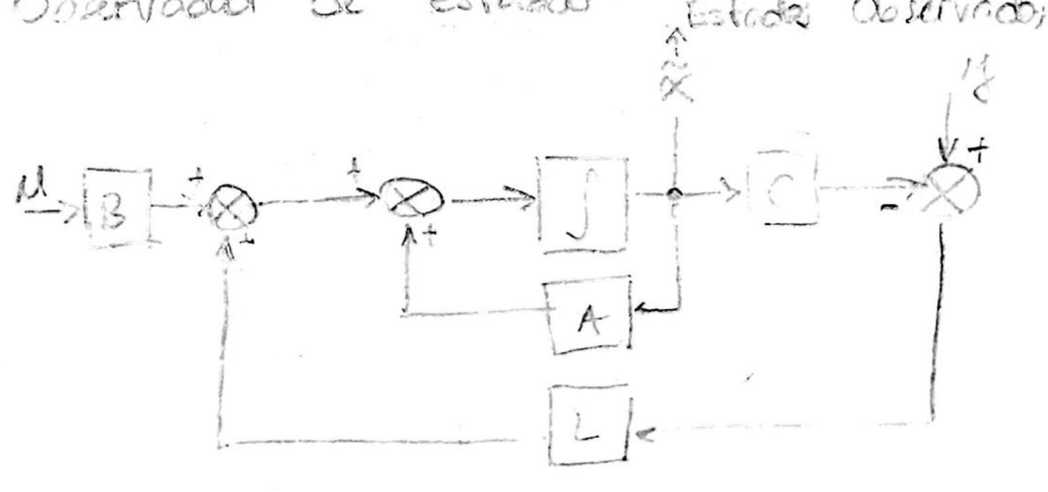
$10+10K_3=23$ $\quad$ $16+10K_2+104=66$ $\quad$ $10K_1=120$

$K_3=1{,}3$ $\quad$ $K_2=-5{,}4$ $\quad$ $K_1=12$

$$K'=\begin{bmatrix}12 & -54 & 1{,}3\end{bmatrix}$$

$$K=\begin{bmatrix}0 & -54 & 1{,}3\end{bmatrix} \quad K_1=12$$

c) Observador de estado



03533-15684693

Recordamos que los polos del sist. original compensado por realimentación de estados están en

$s=-20$ $\quad$ $s=-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{15}}{2}j$

Elegimos

$s=-200$ $\quad$ $s=-15\pm1{,}93j$ como polos del observador

$s = -200 \quad s_{1,2} = -15 \pm 1{,}93j$

$(s+15-j1{,}93)(s+15+j1{,}93) = (s^2+30s+228{,}72)$

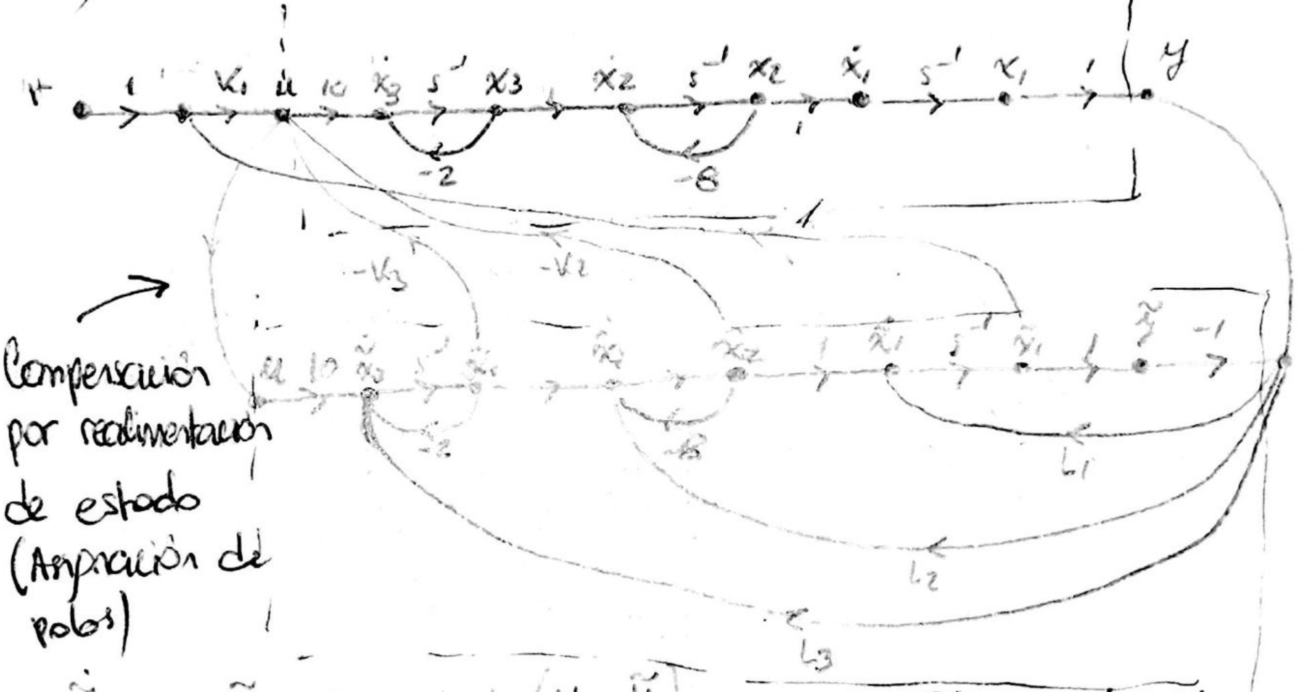
$(s+200)(s^2+30s+228{,}72) = s^3+30s^2+228{,}78s$

$200s^2+6000s+45744$

$= s^3+230s^2+6228{,}72s+45744$

d)

sist. Original



Compensación por realimentación de estado (Asignación de polos)

$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + L(y-\tilde{y})$

Observador de Estado

~~Método 2~~ Tema 2

a) Sistema estable $MF = 56^\circ$ $MG = \infty$

b) Como la pendiente inicial es de -40 dB/dec tiene dos polos en el origen por lo que es un sistema de tipo 2

$Ka = 1$

c) Para un sistema de tipo 2, el Kv es igual a ∞, por lo que el Ess para una entrada rampa, por lo que la mejor podría ser la resp. del sist. a una entrada rampa

Tema 3

Motor de CC controlado por inducido

Tensión de alimentación 24 Vcc

$R = 2,5\ \Omega$ Resistencia de inducido

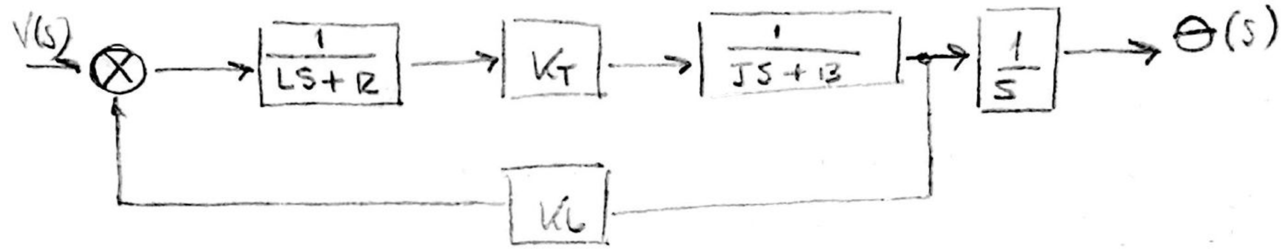
$L = 0,008$ Hy Inductancia del circuito de inducido

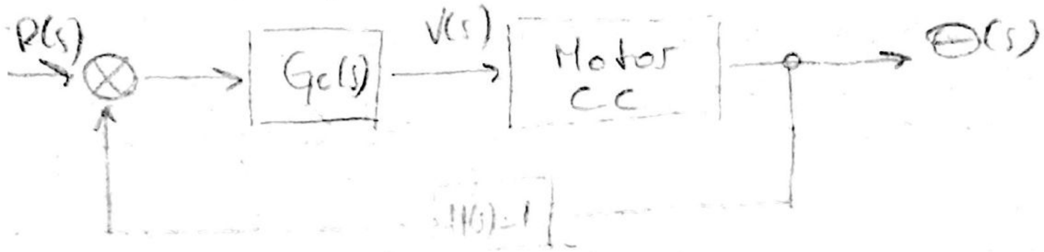
$K_T = 1$ Nm/A Constante de par motor

$J = 1$ Kgm^2 Momento de inercia del rotor y carga acoplada

$B = 0,5 \frac{N\,s}{rad}$ Coef. de fricción viscosa

$Kb = 1 \frac{V\,s}{rad}$





a) El polo del circuito electrico está en $s=-312{,}5$ y el polo del circuito mecánico está en $s=-0{,}5$. Esto quiere decir que la cte. de tiempo del circuito eléctrico es mucho mas rapida que la mecánica

b) Si $L=0$

$$\frac{1}{R}\cdot K_T\cdot\frac{1}{Js+B}=\frac{0{,}4}{s+0{,}5}$$

$$FT_{mcc}=\frac{\frac{0{,}4}{s+0{,}5}}{1+\frac{0{,}4}{s+0{,}5}}=\frac{0{,}4}{s+0{,}9}$$

$$\frac{\Theta(s)}{V(s)}=\frac{0{,}4}{(s+0{,}9)s}$$

Punto de diseño $\xi=0{,}7$ $\omega_n=1{,}2728$ $s=-0{,}9\pm j\,0{,}91$

Corroboramos si pertenece al lugar de raíces

Gráfico del lugar de raíces

$p - z = 2 - 0 = 2$

$\varphi_0 = \frac{180}{2}(2K+1) = 90°$ $\quad \varphi_1 = 270°$

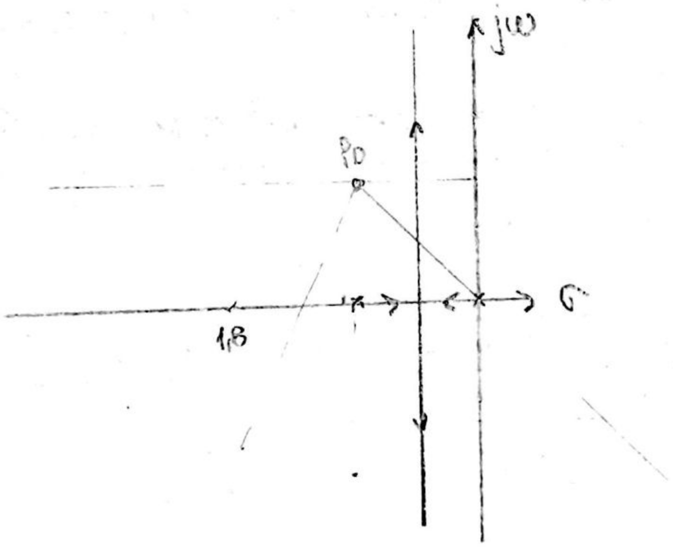
$\sigma_c = \frac{-0,9}{2} = -0,45$

Punto de bifurcación

$1 + \frac{Kc}{s(s+0,9)} = 0$ $\quad Kc = -(s^2+0,9s)$

$\frac{dKc}{ds} = -(2s+0,9) = 0$

$\boxed{s = -0,45}$



Como el punto de diseño no pertenece al lugar de raíces hay que compensar en adelanto (se aplica el método de la bisectriz)

El compensador debe aportar

$-\phi_0 - \phi_{0,9} + \phi_c = \pm 180(2K+1)$ $\quad -135° - 90° + \phi_c = \pm 180$ $\quad \phi_c = 45°$

Scanned by CamScanner

El cero del compensador se coloca en $-0,9$ y el polo en $-1,8$

$$G_c = K_c \frac{(s+0,9)}{(s+1,8)}$$

$$1 + \frac{K_c\, 0,4\,(s+0,9)}{s(s+0,9)(s+1,8)} = 0$$

$$|K_c| = \frac{|s|\,|s+1,8|}{0,4} = \frac{1,27 \cdot 1,28}{0,4} = 4,03$$

$$G_c(s)\, G_H(s) = \frac{1,69}{s\,(s+1,8)}$$

c) $$K_v = \lim_{s \to 0} s\, G_c(s)\, G_H(s) = \frac{1,69}{1,8} = 0,94$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 1,06$$

Examen Final de Control 19/07/10 (32)

Tema 1

$$G_c(s) = K(s+12) \qquad G_p(s) = \frac{s+10}{s^2(s+2)}$$

$$G_c(s)\,G_p(s) = \frac{K(s+12)(s+10)}{s^2(s+2)} \qquad P-Z=1$$

$$\varphi_k = \frac{180^\circ}{1}(2k+1) \qquad \varphi_0 = 180^\circ$$

- Punto de bifurcación

$$1 + \frac{K(s+12)(s+10)}{s^2(s+2)} = 0$$

$$K = -\frac{s^2(s+2)}{(s+12)(s+10)} = -\frac{s^3+2s^2}{s^2+22s+120}$$

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{(3s^2+4s)(s^2+22s+120)-(s^3+2s^2)(2s+22)}{(s^2+22s+120)^2} = 0$$

$$3s^4+66s^3+360s^2+4s^3+88s^2+480s-(2s^4+22s^3+4s^3+44s^2)$$

$$s^4+44s^3+404s^2+480s=0$$

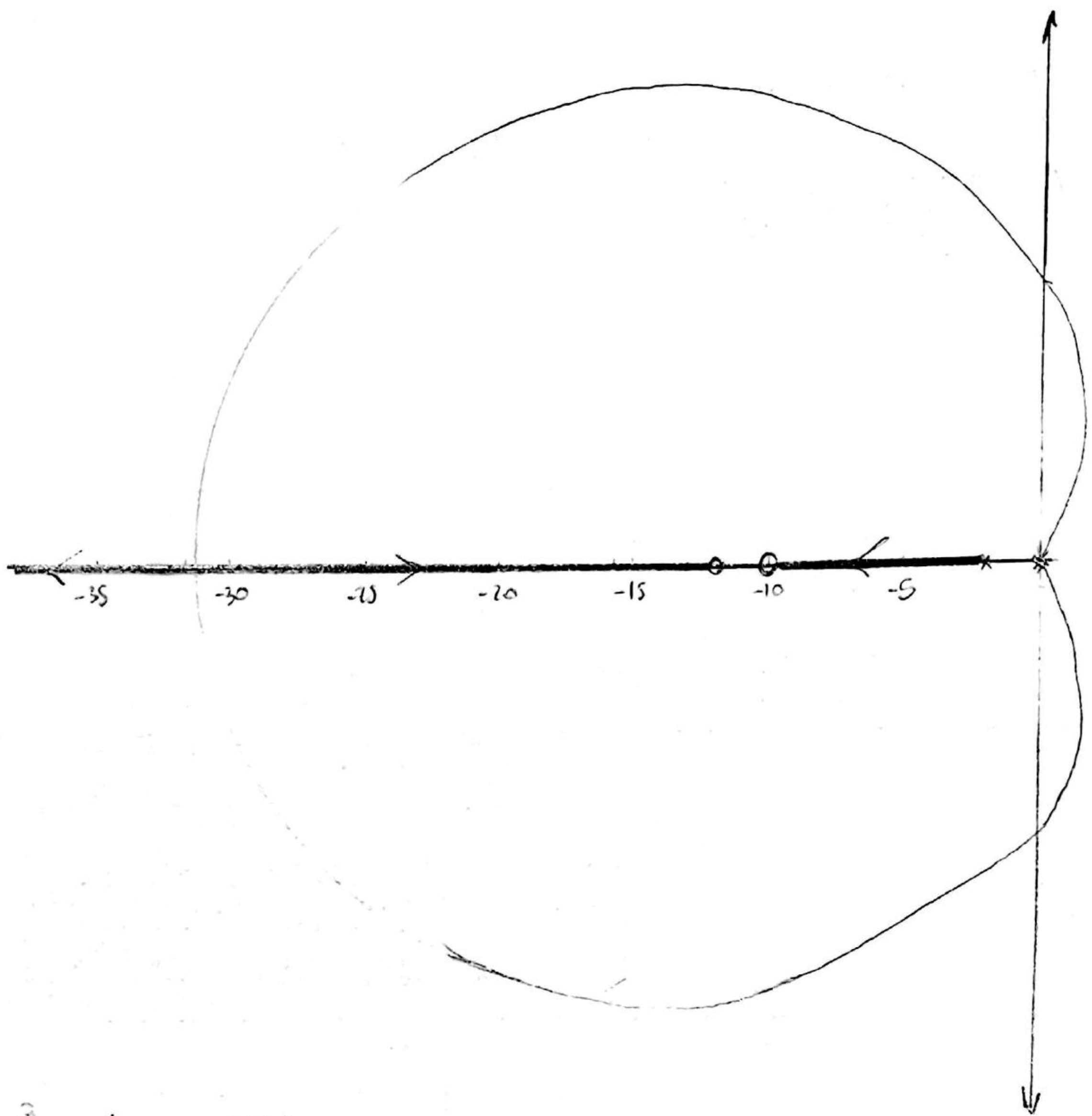
$$s(s^3+44s^2+404s+480)=0$$

$s=0$ ✓ $s=-31{,}75$ ✓ $s=-1{,}39$ x $s=-10{,}85$ x

- Routh

$$s^2(s+2)+K(s+12)(s+10) = s^3+2s^2+Ks^2+22Ks+120K=0$$

$$s^3+s^2(2+K)+s(22K)+(120K)=0$$



s^3	1	$22K$
s^2	$2+K$	$120K$
s^1	$\frac{(2+K)22K-120K}{(2+K)}$	
s^0	$120K$	

$$(2+K)22K-120K=0$$

$$44K+22K^2-120K=0$$

$$K(22K-76)=0$$

$$\boxed{K=0} \quad \boxed{K=3{,}45}$$

∘ Corte con el eje img.

$$(2+K_c)s^2+120K_c=0$$

$$5{,}45s^2+414=0$$

$$s=\pm j\,8{,}71$$

Para $K>3{,}45$ el sistema es estable

c) Probando con Matlab veo que el punto pedido tiene que estar entre $39 < K < 44$. Una verga hacer este ej en un final a mano.

$$s^3 + s^2(2+K) + s(22K) + 120K = 0$$

$K = 40 \rightarrow S_{1,2} = -17{,}08 \pm j\,17{,}9$

$K = 41 \rightarrow S_{1,2} = -17{,}56 \pm j\,17{,}8$

$K_2 = 42 \rightarrow S_{1,2} = -18{,}06 \pm j\,17{,}69$

$\boxed{K = 41{,}5 \rightarrow -17{,}81 + 17{,}75\,j}$

Como la recta $\xi = 0{,}707 = cte$ corta el LR una sola vez, éste es el punto deseado. Si cortara en dos puntos, se debe elegir el de la izq. para tener el menor tiempo de establecimiento.

d) Controlador proporcional derivativo

$$K_P + K_D S = K_D\left(S + \frac{K_P}{K_D}\right) = 33\,(S+12)$$

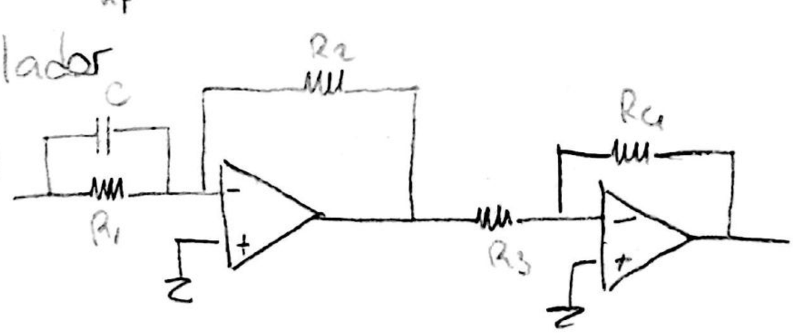
$K_D = 33 \qquad K_P = 12 \cdot K_D$

$K_P = 396$

$$T_D = \frac{K_D}{K_P} = 0{,}083 \text{ seg}$$

e) Síntesis del controlador

$$G_C(s) = 41{,}5\,(S+12)$$



$$G_1 = \frac{R_2}{R_1 \,//\, \frac{1}{sC}} \qquad R_1 \,//\, \frac{1}{sC} = \frac{\frac{R}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{R}{sCR + 1} = \frac{\frac{1}{C}}{s + \frac{1}{RC}}$$

Tema 2

a) El sistema sin compensar es inestable porque el margen de fase es negativo $MF \simeq -40°$

c) $MG = 23{,}2\ dB$ $MF = 60°$

$K_a = 2454$

b) • Datos que se observan sobre la planta en el Bode:

- Tiene 2 polos en el origen porque su fase arranca con $-180°$
- El den es dos grados mayor que el num, porque la fase es $-180°$ cuando $\omega \to \infty$
- La cte total tiene que ser $25\ dB = 17{,}78$

• Datos que se observan sobre el sist. compensado en el Bode:

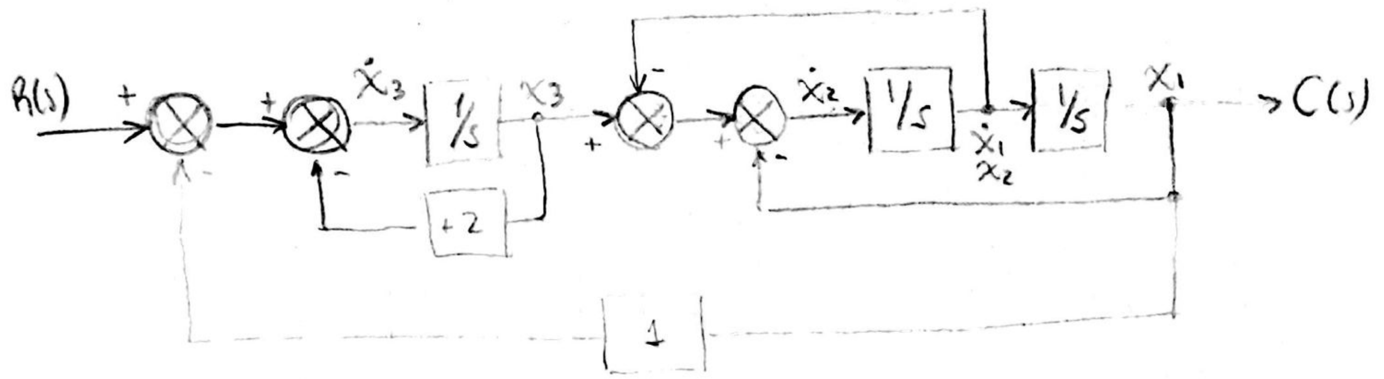
- Tiene dos polos en el origen porque su fase arranca con $180°$
- El den es un grado mayor que el num, porque la fase tiende a -90 cuando $\omega \to \infty$
- La cte total tiene que ser $67{,}8\ dB = 2454{,}71$

Se observa que el compensador ha aportado un cero y una ganancia de 138,06 veces. El compensador más simple que produce este efecto es el PD

$$G_C(s) = K_P (T_D s + 1) = K_D s + K_p \qquad \frac{1}{T_D} = 7{,}8\ \frac{rad}{seg}$$

Por lo tanto $\boxed{K_P = 138{,}06}$ $\boxed{T_D = 0{,}13}$

Tema 3



a)

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_3 \qquad c = x_1$$

$$\dot{x}_3 = -x_1 - 2x_3 + r$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

b) $M_C = \begin{bmatrix} B & A^1B & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{ccc|ccc|c}
 & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & -1 & -1 & 1 & 0 \\
 & & & -1 & 0 & -2 & 1 \\
\hline
0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -3 & -3 \\
-1 & 0 & -2 & 2 & -1 & 4 & 4
\end{array}$$

$|M_C| = -1 \quad$ Rango$\{M_C\} = 3$

Completamente Controlable

$$Mo = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$ $|Mo| = 1$ Rango$\{Mo\} = 3$

Completamente Controlable

37

c) No sé qué hay que hacer. Obtengo la FdeT por las dudas

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \rightarrow \begin{cases} sX(s) = A\,X(s) + BU(s) \\ Y(s) = C\,X(s) + DU(s) \end{cases}$$

$$(sI - A)X(s) = BU(s)$$

$$X(s) = (sI-A)^{-1} B\,U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI-A)^{-1}B$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 1 & s+1 & -1 \\ 1 & 0 & s+2 \end{bmatrix}$$

No, ya fue ... es muy largo

d) $s_{1,2} = -1{,}5 \pm 1{,}5j \quad s_3 = -15$

Polinomio Característico Deseado

$$(s + 1{,}5 + j1{,}5)(s + 1{,}5 - j1{,}5) = s^2 + 3s + 4{,}5$$

$$(s+15)(s^2+3s+4{,}5) = s^3 + 3s^2 + 4{,}5s + 15s^2 + 45s + 67{,}5$$

$$\boxed{s^3 + 18s^2 + 49{,}5s + 67{,}5 = 0}$$

Scanned by CamScanner

$$u = -Kx \qquad \dot{x} = Ax + Bu = Ax - BKx$$

$$\dot{x} = (A - BK)x$$

$$|sI - A + BK| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 1 & s+1 & -1 \\ 1 & 0 & s+2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ K_1 & K_2 & K_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+1 & -1 \\ 1+K_1 & K_2 & s+2+K_3 \end{vmatrix}$$

$$= s\left[(s+1)(s+2+K_3) + K_2\right] + (1+K_1)$$

$$= s\left[s^2 + s(2+K_3) + s + (2+K_3) + K_2\right] + (1+K_1)$$

$$= s^3 + s^2(3+K_3) + s(2+K_2+K_3) + (1+K_1)$$

$$3 + K_3 = 18 \qquad 2 + 15 + K_2 = 49{,}5 \qquad 1 + K_1 = 67{,}5$$

$$\boxed{K_3 = 15} \qquad \boxed{K_2 = 32{,}5} \qquad \boxed{K_1 = 66{,}5}$$

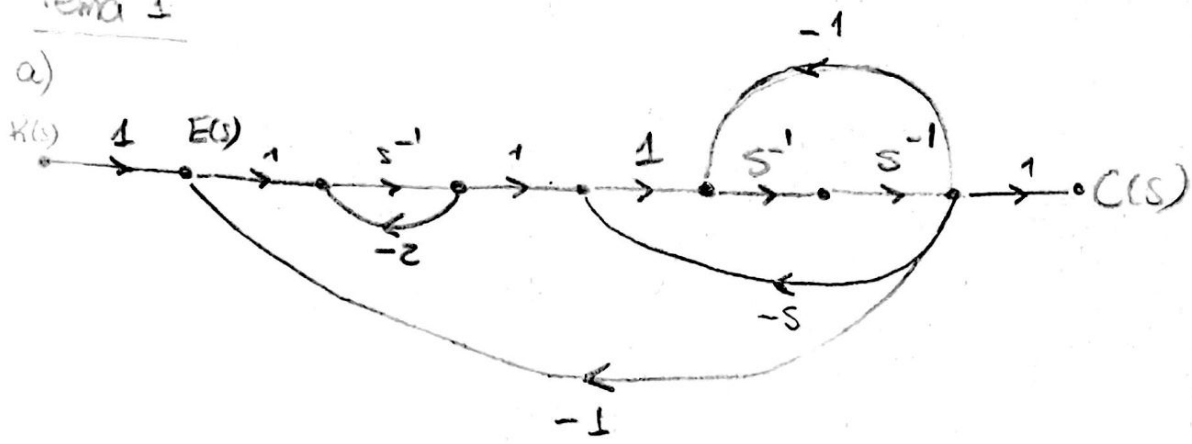
$$K = \begin{bmatrix} 66{,}5 & 32{,}5 & 15 \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

Examen Final de Control - 23/08/10

Tema 1

a)



N = 1 Trayectoria directa

$$M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta} \qquad M_1 = s^{-3} \qquad \Delta_1 = 1$$

$$\Delta = 1 - \left(-2s^{-1} - s^{-1} - s^{-2} - s^{-3}\right) + \left[\left(-2s^{-1}\right)\left(-s^{-2}\right) + \left(-2s^{-1}\right)\left(-s^{-1}\right)\right]$$

$$\Delta = 1 + 3s^{-1} + s^{-2} + s^{-3} + 2s^{-3} + 2s^{-2} = 1 + 3s^{-1} + 3s^{-2} + 3s^{-3}$$

$$M(s) = \frac{s^{-3}}{1 + 3s^{-1} + 3s^{-2} + 3s^{-3}} = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 3}$$

Compruebo operando el diagrama de bloque

$$F_1(s) = \frac{\frac{1}{s^2}}{1 + \frac{1}{s^2}} = \frac{1}{1 + s^2} \qquad F_2(s) = \frac{\frac{1}{1+s^2}}{1 + \frac{s}{1+s^2}} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

$$F_3(s) = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{2}{s}} = \frac{1}{s+2}$$

$$F_4(s) = F_2(s) \cdot F_3(s) = \frac{1}{(s+2)(s^2+s+1)}$$

$$s^3 + s^2 + s + 2s^2 + 2s + 2$$

$$s^3 + 3s^2 + 3s + 2$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 3}$$

c) La función de transferencia de lazo abierto es

$$G'(s) = \frac{1}{s^3+3s^2+3s+2} \qquad \text{Sistema de tipo 0}$$

$$K_p = \lim_{s \to 0} G'(s) = \frac{1}{2} \qquad e_{ss} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} = 0{,}667$$

d) Los polos en lazo cerrado están en

$$s_1 = -2{,}25 \qquad s_{2,3} = -0{,}37 \pm j\,1{,}09$$

Los polos imaginarios son dominantes

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 2{,}88\ seg \qquad M_p = e^{-\frac{\sigma\pi}{\omega_d}} = 0{,}34 = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)}$$

$$c(\infty) = 1 - e_{ss} = 0{,}67$$

$$c(t_p) = 0{,}89$$

Como el error es estado estacionario, el tiempo de pico y la sobreelongación máxima son muy parecidos, la curva podría ser la respuesta a $r(t) = \mu(t)$.

Tema 2

$$P - Z = 3 \quad \varphi_0 = 60^\circ \quad \varphi_1 = 180^\circ \quad \varphi_2 = 300^\circ \quad \sigma_c = \frac{-2{,}25 - 2 \times 0{,}37}{3}$$

$s_1 = -2{,}25$ $\qquad \sigma_c = -1$

$s_{2,3} = -0{,}37 \pm j\,1{,}09$

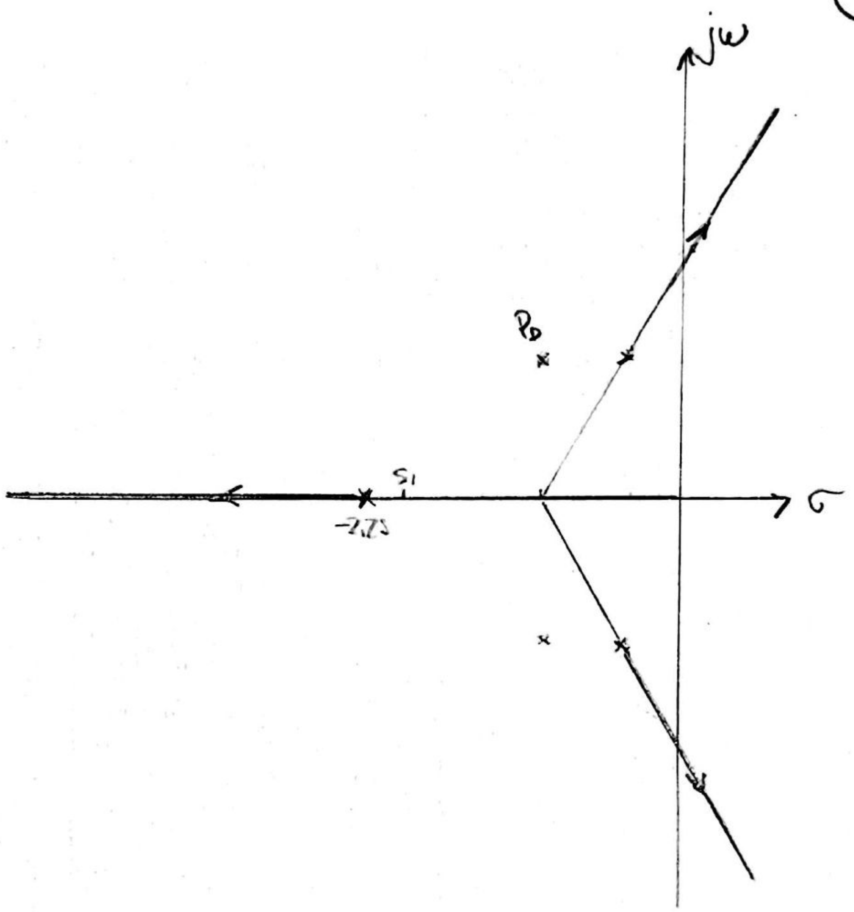
- Punto de bifurcación

$$1 + \frac{K}{s^3+3s^2+3s+3} = 0$$

$$K = -\left(s^3+3s^2+3s+3\right)$$

$$\frac{dK}{ds} = -\left(3s^2+6s+3\right) = 0$$

$s_{1,2} = -1 \rightarrow$ No es lugar de raíces



- Routh

$s^3+3s^2+3s+3+K=0$

Cruce con el eje imag

s^3	1	3
s^2	3	3+K
s^1	$\frac{9-3-K}{3}$	
s^0	3+K	

$9-3-K=0$

$\boxed{K=6}$

$3s^2+9=0$

$s=\pm\sqrt{3}\,j$

- Ángulo de salida

$-(\phi_{s2}+90^\circ+30{,}1^\circ)=\pm 180$

$-\phi_{s2}=-60$

- Punto de diseño

$\xi=0{,}707 \quad W_n=1{,}41 \qquad P_D=-1\pm j1$

Aporte angular del compensador

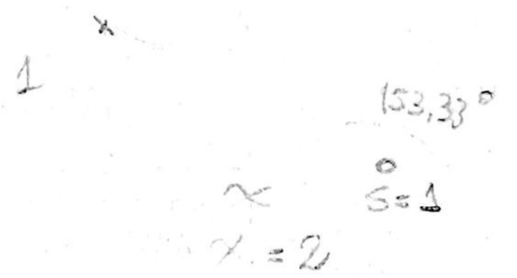
$$\phi_C + \phi_{S1} + \phi_{S2} + \phi_{S3} = \pm 180\,(2k+1)$$

$$\phi_C - 38{,}43^\circ - 188{,}13 - 106{,}77 = \pm 180\,(2k+1)$$

$$\phi_C = 153{,}33^\circ$$

Como se pide que el compensador esté en la realimentación, se usa compensación por realimentación de posición y velocidad.

$H(s) = (Ts+1)$ El cero debe estar en $\boxed{(s-1) = H(s)}$



Cálculo del K necesario $G_c(s) = K$

$$|K| = \frac{|s+2{,}25|\,|s+0{,}37-j1{,}09|\,|s+0{,}37+j1{,}09|}{|s-1|}$$

$$K = \frac{1{,}6 \;\; 0{,}64 \;\; 2{,}18}{2{,}23} = 1$$

b) Como se pide $e_{ss}=0$ para $r(t)=\mu(t)$ hay que agregar un integrador de la forma $G_{c1} = K_P + \frac{K_i}{s} = \frac{sK_P + K_i}{s} = K_P\frac{\left(s + K_P/K_i\right)}{s}$

Para que el aporte del cero se cancele con el del polo se lo coloca cerca del polo, y para que sea despreciable con el polo dominante, se elige $\frac{K_P}{K_i} = \frac{0{,}37}{10} = 0{,}037$. Como $K_P = 1$ (no se necesita ganancia)

$K_i = 27{,}02$ $\quad G_{c1} = \frac{1}{s}\left(s + 0{,}037\right)$

Tema 3

a) $$|sI-A| = \begin{vmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 3 & 3 & s+3 \end{vmatrix} = s\left[s(s+3)+3\right]+3$$

$$= s\left(s^2+3s+3\right)+3 = s^3+3s^2+3s+3$$

Autovalores

$s_1 = -2,25 \quad s_2 = -0,37 + j1,09 \quad s_3 = -0,37 - j1,09$

b) $M_C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow |M_C| = -1$

$\text{Rango}\{M_C\} = 3$

Controlable

$$\begin{array}{ccc|ccc|c} & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & -3 & -3 & -3 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 & 9 & 6 & 6 & 6 \end{array}$$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$M_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$|M_O| = 1$

$\text{Rango}\{M_O\} = 3$

Observabilidad

Scanned by CamScanner

c)- $s_{1,2} = -1 \pm 1j$ $\quad s_3 = -10 \quad s_4 = -12$ (44)

Polinomio Característico Deseado

$s_1 = -1 - 1j \quad s_2 = -1 + 1j \quad s_3 = -10 \quad s_4 = -12$

$(s+1+j)(s+1-j) = s^2 + 2s + 2 \qquad (s+10) \qquad (s+12)$

$(s^2+2s+2)(s+10) = s^3 + 2s^2 + 2s + 10s^2 + 20s + 20$

$= s^3 + 12s^2 + 22s + 20$

$(s^3+12s^2+22s+20)(s+12) = s^4 + 12s^3 + 22s^2 + 20s$

$+12s^3 + 144s^2 + 264s + 240$

$$\boxed{0 = s^4 + 24s^3 + 166s^2 + 284s + 240}$$

Como la planta no posee integrador, hay que agregarlo para cumplir con la condición de $e_{ss} = 0$ para $r(t) = \mu(t)$

$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{K} = \begin{bmatrix} K & -K_i \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix}$

$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{K} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 & -K_i \end{bmatrix}$

Se controla primero que $P = \begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}$ sea controlable para asegurar que sea posible ubicar los polos donde se ha pedido

Scanned by CamScanner

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$|P| = +1$ Rango $\{P\} = 4$

Se pueden ubicar los polos

$$\hat{B}\hat{K} = \begin{array}{c|cccc} & K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$|sI - \hat{A} + \hat{B}\hat{K}| = \begin{vmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_1 & K_2 & K_3 & K_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 \\ 3+K_1 & 3+K_2 & s+3+K_3 & K_4 \\ 1 & 0 & 0 & s \end{vmatrix}$$

$$= s \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 3+K_2 & s+3+K_3 & K_4 \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3+K_1 & s+3+K_3 & K_4 \\ 1 & 0 & s \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 3+K_2 & s+3+K_3 & K_4 \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix} = s\left[s(s+3+K_3) + 3 + K_2\right] = s^3 + s^2(3+K_3) + s(3+K_2)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3+K_1 & s+3+K_3 & K_4 \\ 1 & 0 & s \end{vmatrix} = s(3+K_1) - K_4$$

$$|sI - \hat{A} + \hat{B}\hat{K}| = s^4 + s^3(3+K_3) + s^2(3+K_2) + s(3+K_1) - K_4$$

$24 = 3+K_3$ $\quad$ $166 = 3+K_2$ $\quad$ $284 = 3+K_1$ $\quad$ $240 = -K_4$

$\boxed{K_3 = 21}$ $\quad$ $\boxed{K_2 = 163}$ $\quad$ $\boxed{K_1 = 281}$ $\quad$ $K_4 = \boxed{-240 = -K_1'}$

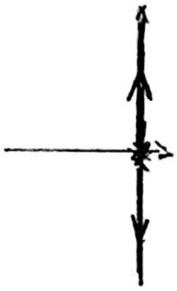
$\boxed{K_1' = 240}$

$K = [281 \ \ 163 \ \ 21] \quad -K_1' = -240 \quad \hat{K} = [281 \ \ 163 \ \ 21 \ \ -240]$

Examen Final de Control - 08/02/10

Tema 1

$$G(s) = \frac{1}{2s^2}$$



$\xi = 0{,}5 \qquad t_{s2\%} = \frac{4}{\sigma} \leqslant 2 \qquad\qquad \xi = \cos(\beta) \rightarrow \beta = 60°$

$\frac{\sigma}{4} > \frac{1}{2} \qquad\qquad tg\, 60° = \frac{\omega d}{\sigma} \rightarrow \omega d = 3{,}46 \ \frac{rad}{seg}$

$\boxed{\sigma \geqslant 2}$

$\boxed{P_D = -2 \pm j\,3{,}46}$

Aporte angular del compensador

$\varphi_c - 2\,\varphi_{polo} = \pm 180\,(2k+1)$

$\varphi_c - 240° = -180°$

$\boxed{\varphi_c = 60°}$

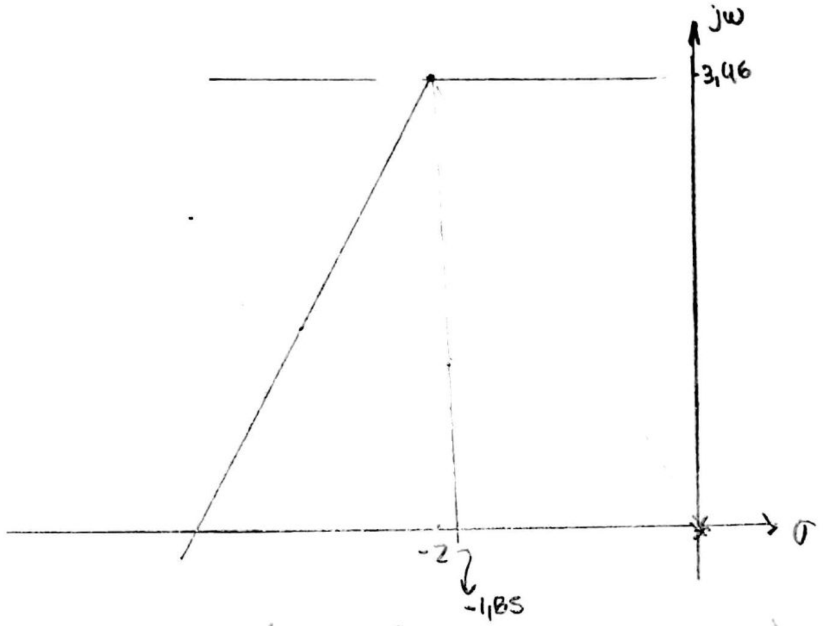
a) $G_c(s) = K_P + K_D\,s = K_D\left(s + \frac{K_P}{K_D}\right) = K_D\left(s + \frac{1}{T_D}\right)$

$\sigma = 2 \qquad \frac{K_P}{K_D} = 4 \qquad\qquad K_D = 8 \quad K_P = 32$

$T_D = 0{,}25$

$$\frac{K_D\,(s+4)}{2\,s^2} + 1 = 0 \qquad K_D = \left.\frac{2\,|s|^2}{|s+4|}\right|_{s=-2\pm j3{,}46} = \frac{2 \cdot 16}{4} = 8$$

b) Utilizamos método de la bisectriz



Aporte del cero $(s+1{,}85)$ $\quad \arctg\left(\frac{3{,}46}{2-1{,}85}\right) = 87{,}51°$

El polo debe aportar $-27{,}51°$

$$\tg(-27{,}51°) = \frac{3{,}46}{x} \qquad x = 6{,}64$$

El polo debe estar a $(s+8{,}64)$

$$G_c(s) = k_c \frac{(s+1{,}85)}{(s+8{,}64)}$$

$$1 + k_c \frac{(s+1{,}85)}{(s+8{,}64)} \frac{1}{2s^2} \qquad |k_c| = \frac{|s+8{,}64|\, 2\, |s|^2}{|s+1{,}85|}$$

$$|k_c| = \frac{2 \cdot 16 \cdot 7{,}49}{3{,}46}$$

$$k_c = 69{,}27$$

$$G_c(s) = 69{,}27 \frac{(s+1{,}85)}{(s+8{,}64)}$$

Si pongo el cero en $(s+2)$, el aporte es $+90°$ y el polo tiene que dar $-30°$

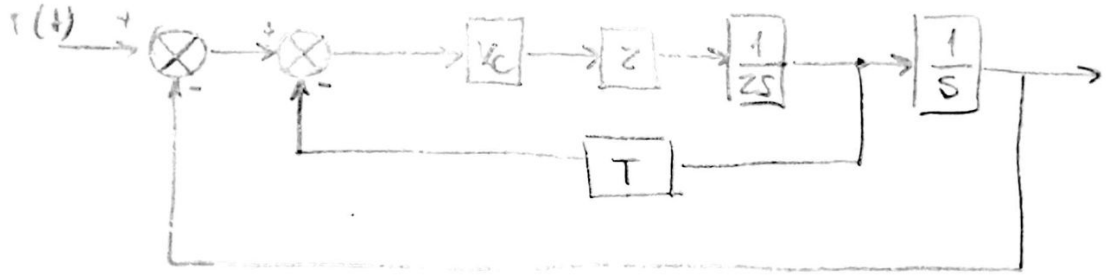
$$x = \frac{3{,}46}{tg(30°)} = 6 \qquad \text{Polo } (s+8)$$

$$K_c = \frac{|s+8|\,2\,|s|^2}{|s+2|} = \frac{2 \cdot 16 \cdot 6{,}92}{3{,}46} = 64$$

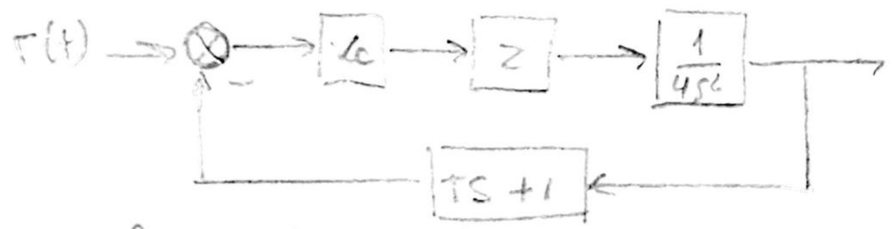
$$G_c(s) = 64\,\frac{(s+2)}{(s+8)}$$

Esta compensación da mucho mejor que la calculada por el método de la bisectriz (comprobado con Matlab)

c) El caso de realimentación de posición y velocidad sería



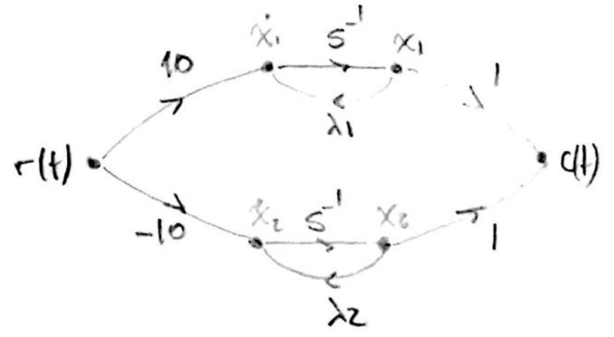
Que se puede dibujar como



La función de transferencia de lazo abierto es la misma que en el apartado a) por lo que el compensador será el mismo. $G_c(s) = 8(s+4)$

La ventaja de este método es que no aparece un cero en la ~~F~~ F de T de lazo cerrado

Tema 2



$$\dot{x}_1 = 10\ r(t) + \lambda_1\ x_1$$

$$\dot{x}_2 = -10\ r(t) + \lambda_2\ x_2$$

$$C(t) = x_1 + x_2$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \end{bmatrix} r(t)$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_1 = 10\ r(t) + \lambda_1 x_1$$

$$sX_1 - x(0) = 10\ R(s) + \lambda_1 X_1(s)$$

$$X_1(s-\lambda_1) = 10\ R(s) + x_1(0)$$

$$X_1(s) = \frac{\frac{10}{s} + 0}{s - \lambda_1} = \frac{10}{s + 5}$$

$$\left(\frac{10}{s} + 10\right)(s+5) = 10s - 10\lambda_1$$

$$10 + 10s + \frac{50}{s} + 50 = 10s - 10\lambda_1$$

$$10s^2 + 60s + 50 = 10s^2 - 10\lambda_1 s$$

Por acá no ...

$c(t) = 10\,e^{-5t} - 10\,e^{-10t}$

$$C(s) = \frac{10}{s+5} - \frac{10}{s+10} = \frac{\cancel{10s}+100-\cancel{10s}-50}{(s+5)(s+10)}$$

$$C(s) = \frac{50}{(s+5)(s+10)} \qquad R(s) = 1$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{50}{(s+5)(s+10)} \qquad \boxed{K = 50} \quad \boxed{\lambda_1 = -5} \quad \boxed{\lambda_2 = -10}$$

$$s^2 + 15s + 50 = s^2 + bs + c$$

$$\boxed{b = 15} \quad \boxed{c = 50}$$

b) $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T} \qquad T = \dfrac{2}{3}$ seg

$\omega = 3\pi \dfrac{\text{rad}}{\text{seg}} \qquad f = \dfrac{3}{2}\ Hz = 1{,}5\ Hz$

Para $R(s) = \dfrac{A}{s} \qquad C(s) = \dfrac{50 \cdot A}{s(s+5)(s+10)}$

$c(\infty) = \lim_{s \to 0} s\,C(s) = \dfrac{50A}{50} = 1 \qquad \boxed{A = 1}$

c) El sistema produce una atenuación de $20\log(0{,}32) = -10$dB

Scanned by CamScanner

Tema 3

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{12}{s^3+9s^2+20s+12}$$

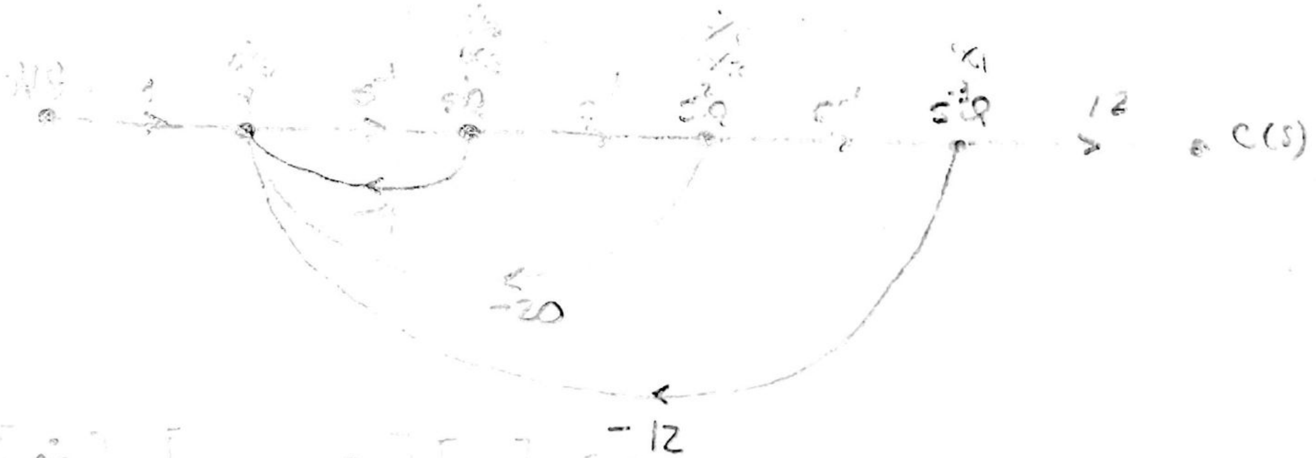
a) $$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{12}{s^3+9s^2+20s+12} \; \frac{Q(s)}{Q(s)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{12s^{-3}}{1+9s^{-1}+20s^{-2}+12s^{-3}} \; \frac{Q(s)}{Q(s)}$$

$$R(s) = Q(s) + 9s^{-1}Q(s) + 20s^{-2}Q(s) + 12s^{-3}Q(s)$$

$$Q(s) = R(s) - 9s^{-1}Q(s) - 20s^{-2}Q(s) - 12s^{-3}Q(s)$$

$$C(s) = 12s^{-3}Q(s)$$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -20 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} R$$

$$C = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

b) $Mc = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -9 \\ 1 & -9 & 61 \end{bmatrix}$ $|Mc| = -1$ Controlable

$$\begin{array}{ccc|ccc|c}
 & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & -12 & -20 & -9 & 1 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & -12 & -20 & -9 & -9 \\
-12 & -20 & -9 & 108 & 168 & 61 & 61
\end{array}$$

$Mo = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$ $|Mo| = 12^3$ Observable

c) $\Phi_A = e^{At}$ $\qquad e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{-6t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$

$D = P^{-1} A P$

$PDP^{-1} = A$ $\rightarrow e^{At} = P e^{Dt} P^{-1}$

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -6 & -1 & -2 \\ 36 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ $\qquad P^{-1} = \frac{1}{|P|} \mathrm{Adj}(P)$ $\qquad \mathrm{Cof}(P) = \begin{bmatrix} -2 & -48 & 30 \\ -3 & -32 & 35 \\ -1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

$|P| = 1 \cdot (-4+2) - 1(-24+72) + 1(-6+36)$

$|P| = -20$

$\mathrm{Adj}(P) = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -48 & -32 & -4 \\ 30 & 35 & 5 \end{bmatrix}$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 2{,}4 & 1{,}6 & 0{,}2 \\ -1{,}5 & -1{,}75 & -0{,}25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & e^{-6t} & 0 & 0 \\ & & & 0 & e^{-t} & 0 \\ & & & 0 & 0 & e^{-2t} \\ \hline 1 & 1 & 1 & e^{-6t} & e^{-t} & e^{-2t} \\ -6 & -1 & -2 & -6e^{-6t} & -e^{-t} & -2e^{-2t} \\ 36 & 1 & 4 & 36e^{-6t} & e^{-t} & 4e^{-2t} \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} e^{-6t} & e^{-t} & e^{-2t} \\ -6e^{-6t} & -e^{-t} & -2e^{-2t} \\ 36e^{-6t} & e^{-t} & 4e^{-2t} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ & & & 2{,}4 & 1{,}6 & 0{,}2 \\ & & & -1{,}5 & -1{,}75 & -0{,}25 \\ \hline e^{-6t} & e^{-t} & e^{-2t} & 0{,}1e^{-6t}+2{,}4e^{-t}-1{,}5e^{-2t} & 0{,}15e^{-6t}+1{,}6e^{-t}-1{,}75e^{-2t} & \\ -6e^{-6t} & -e^{-t} & -2e^{-2t} & -0{,}6e^{-6t}-2{,}4e^{-t}+3e^{-2t} & -0{,}9e^{-6t}-1{,}6e^{-t}+3{,}5e^{-2t} & \\ 36e^{-6t} & e^{-t} & 4e^{-2t} & 3{,}6e^{-6t}+2{,}4e^{-t}-6e^{-2t} & 5{,}4e^{-6t}+1{,}6e^{-t}-7e^{-2t} & \end{array}$$

$$0{,}05e^{-6t}+0{,}2e^{-t}-0{,}25e^{-2t}$$

$$-0{,}3e^{-6t}-0{,}2e^{-t}+0{,}5e^{-2t}$$

$$1{,}8e^{-6t}+0{,}2e^{-t}-e^{-2t}$$

c) $S_1 = -8 \qquad S_{2,3} = -1{,}5 \pm j\,2{,}598$

$$(s+1{,}5+j\,2{,}598)(s+1{,}5-j\,2{,}598) = s^2+3s+9$$

$$(s+8)(s^2+3s+9) = s^3+3s^2+9s \qquad = s^3+11s^2+33s+72$$
$$8s^2+24s+72$$

$\alpha_1 = 11 \quad \alpha_2 = 33 \quad \alpha_3 = 72$

Como A está en FCC, T = I

$$K = \begin{bmatrix} 72-12 & 33-20 & 11-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & 13 & 2 \end{bmatrix}$$

d)

$$C(s) = \frac{12}{s\,(s+8)\,(s^2+3s+9)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+8} + \frac{Cs+D}{(s^2+3s+9)}$$

$$A(s^3+11s^2+33s+72) + B(s^3+3s^2+9s) + (Cs+D)(s^2+8s)$$

$$As^3+11As^2+33As+72A+Bs^3+3Bs^2+9Bs+Cs^3+8Cs^2+Ds^2+8Ds$$

$A+B+C=0 \qquad B+C=-6 \qquad B = \frac{18}{5} \quad C = -\frac{48}{5}$

$11A+3B+8C=0 \qquad 3B+8C=-66$

$33A+9B+8D=0 \qquad 9B+8D=-198 \qquad D = -\frac{144}{5}$

$72A = 12$

$A = 6$

$$K_p = \lim_{s\to 0} \frac{12}{(s+8)(s^2+3s+9)} = \frac{1}{6} = 0{,}166 \qquad e_{ss} = 0{,}86$$

Realimentación de estado con un integrador

Examen final de Control - 6/04/09

Tema 1

a)

$$\frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

$$G(s)\,Q(s) = P(s) + G(s)\,P(s)$$

$$G(s)\left[Q(s) - P(s)\right] = P(s)$$

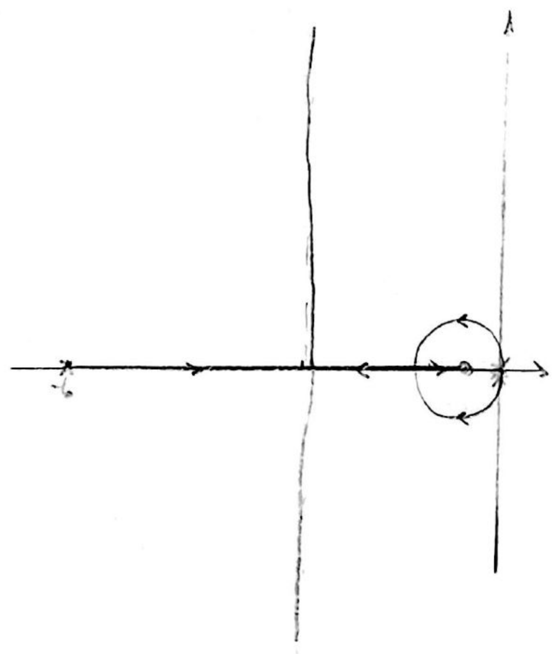
$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s) - P(s)}$$

$$G(s) = \frac{12s+6}{s^3+6s^2+12s+6-(12s+6)}$$

$$G(s) = \frac{12s+6}{s^3+6s^2}$$

b) $G(s) = \dfrac{12\,(s+0{,}5)}{s^2(s+6)}$ $\quad p - z = 2$

$\varphi_0 = \frac{180}{2}(2\cdot 0+1) = 90^\circ \quad \varphi_1 = 270^\circ$



$$\sigma_c = \frac{-6+0,5}{2} = -2,75$$

- Punto de bifurcación

$$1 + \frac{K(s+0,5)}{s^2(s+6)} = 0 \qquad K = -\frac{s^3+6s^2}{s+0,5}$$

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{(3s^2+12s)(s+0,5)-(s^3+6s^2)}{s+0,5} = 0$$

$$3s^3+12s^2+1,5s^2+6s-s^3-6s^2=0$$

$$2s^3+7,5s^2+6s=0$$

$$s=0 \qquad s=-2,59 \qquad s=-1,15$$

- Routh

$$s^3+6s^2+Ks+0,5K=0$$

$$\begin{array}{l|ll} s^3 & 1 & K \\ s^2 & 6 & 0,5K \\ s^1 & & \\ s^0 & 0,5K & \end{array}$$

$$\frac{6K-0,5K}{6}=0$$

$$5,5K=0$$

$$K=0$$

El sist. es estable para todo $K>0$

Cero de lazo cerrado $s+0,5$ Polos de lazo cerrado

$s+0,74$ $\quad s+2,63 \pm j1,09$

$$|K| = \left.\frac{|s|^2|s+6|}{|s+0,5|}\right|_{s=-0,74} = 12 \qquad \boxed{K=12}$$

$$s^3+6s^2+Ks+0,5K = s^3+6s^2+12s+6 \quad ✓$$

c) $\rho(t) = t\,\mu(t)$ Sistema tipo 2

$$K_V = \lim_{s \to 0} sG(s) = \lim_{s \to 0} \frac{12(s+0{,}5)}{s(s+6)} = \infty \qquad e_{ss} = 0$$

Tema 2

a) El sistema es estable

$MG \sim \infty \qquad Mf = 55^\circ$

b) La pendiente inicial es -40 dB/dec por lo que es un sist. de tipo 2

$20 \log Ka = 5$ dB

$Ka = 1{,}77$

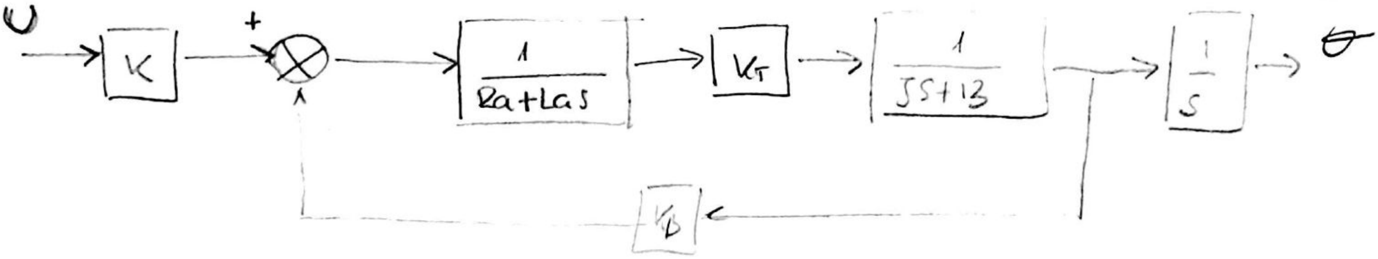
c) Sí, podría ser la respuesta porque el sist. es de tipo 2 y tiene un error en estado estacionario cero para una entrada rampa

Tema 3

$$KU - K_b\dot\theta = Ra\,Ia + La\frac{dIa}{dt} \qquad \ddot\theta J = K_T\,Ia - B\dot\theta J$$

$$KU - K_b\Omega = (R_a + sL_a)\,Ia \qquad (Js + B)\Omega = K_T\,Ia$$

$$\frac{Ia}{KU - K_b\Omega} = \frac{1}{Ra + sLa} \qquad \frac{\Omega}{Ia} = \frac{K_T}{Js + B}$$



$$\frac{K_T}{(Ra+S\,La)(JS+B)} = \frac{1}{(2+0{,}01s)(2s+1)} = \frac{50}{(s+200)(s+1/2)} = \frac{50}{s^2+200{,}5\,s+100}$$

$$G_M = \frac{50}{s^2+200{,}5\,s+150} \qquad G_T = \frac{50}{s^3+200{,}5\,s^2+150s}$$

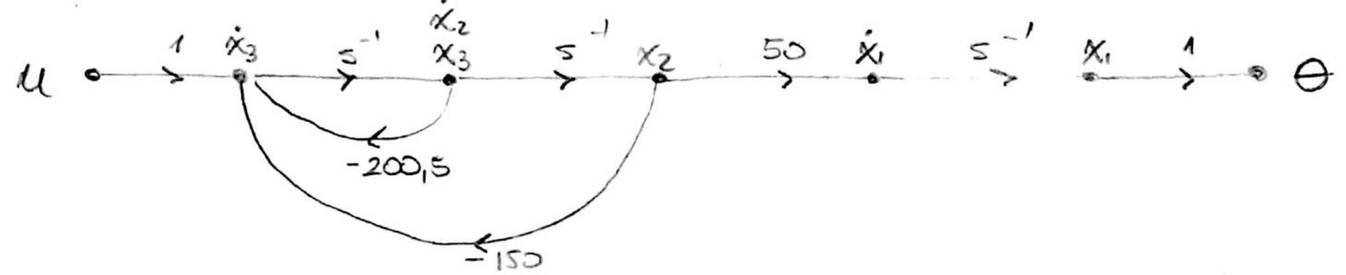
$$\frac{\theta}{U} = \frac{50\,Q(s)}{(s^3+200{,}5\,s^2+150\,s)\,Q(s)} = \frac{50\,s^{-3}Q(s)}{Q(s)+200{,}5\,Q(s)s^{-1}+150\,Q(s)s^{-2}}$$

$$U = Q + 200{,}5\,Q\,s^{-1} + 150\,Q\,s^{-2}$$

$$Q = U - 200{,}5\,Q\,s^{-1} - 150\,Q\,s^{-2}$$

$$\theta = 50\,s^{-3}\,Q$$

Hacemos un pequeño cambio para que $\theta = x_1$



Ecuaciones dinámicas

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -150 & -200,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$|sI - A| = \left| \begin{matrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{matrix} - \begin{matrix} 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -150 & -200,5 \end{matrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} s & -50 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 150 & s+200,5 \end{vmatrix} = s\left[s^2 + 200,5\,s + 150\right]$$

$$= s^3 + 200,5\,s^2 + 150\,s$$

$\downarrow$

La ecuación característica (y por lo tanto los autovalores) no cambian con la modificación hecha en el diagrama.

$s_1 = -0,75 \quad s_2 = -200 \quad s_3 = 0$

d) $M_C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & -200 \\ 1 & -200{,}5 & 40050 \end{bmatrix}$ $|M_C| = -50$ Completamente Controlable

$M_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$ $|M_O| = 50^2$

Completamente Observable

e) Con $K = 2$ el vector B queda $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

Polos deseados

$s_1 = -20 \quad s_{2,3} = -2 \pm j2$

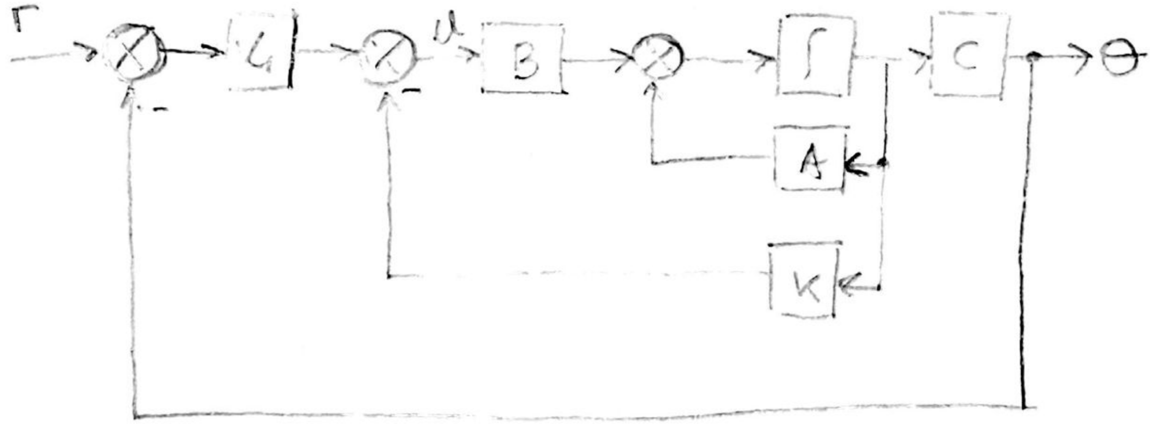
$(s+2+2j)(s+2-2j) = s^2 + 4s + 8$

$(s^2+4s+8)(s+20) = s^3 + 4s^2 + 8s + 20s^2 + 80s + 160 = s^3 + 24s^2 + 88s + 160$

↓

Polinomio Característico Deseado

Como el sist. ya tiene integrador, no es necesario agregar otro. Se aplica la sig realimentación



$\dot{x} = AX + Bu \qquad u = -KX + K_1(r - x_1)$

$u = -KX + K_1 r$

$\dot{x} = (A - BK)x + K_1 r$

$$|sI - A + BK| = \begin{vmatrix} s & -50 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 150 & s+200{,}5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2K_1 & 2K_2 & 2K_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} s & -50 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ K_1 \cdot 2 & 150+K_2 \cdot 2 & s+200{,}5+K_3 \cdot 2 \end{vmatrix}$$

$$= s\left[s(s+200{,}5+K_3 2) + 150 + K_2 2\right] + 50\,K_1 . 2$$

$$= s\left[s^2 + s(200{,}5+K_3 2) + (150+K_2 2)\right] + 50\,K_1 . 2$$

$$= s^3 + s^2(200{,}5+K_3 2) + s(150+K_2 2) + 50\,K_1 . 2$$

$160 = 50\,K_1 . 2 \qquad 150 + K_2 2 = 88 \qquad 200{,}5 + K_3 2 = 24$

$2K_1 = 3{,}2 \qquad 2K_2 = -62 \qquad 2K_3 = -176{,}5$

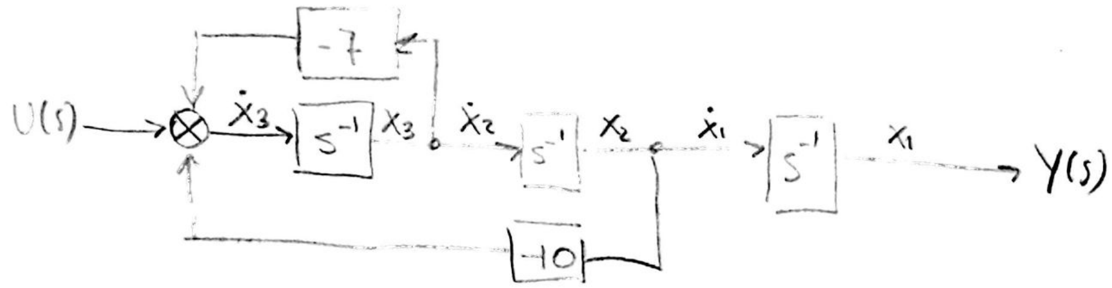
$2K_1 = 3{,}2 \qquad 2K = \left[0 \quad -62 \quad -176{,}5\right]$

$K_1 = 1{,}6 \qquad K = \left[0 \quad -31 \quad -88{,}25\right]$

Me había olvidado del 2 de B

Examen Final de Control - 27/06/2012

Tema 1



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -10 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

b) $$|sI-A| = \begin{vmatrix}s & 0 & 0\\ 0 & s & 0\\ 0 & 0 & s\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -10 & -7\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}s & -1 & 0\\ 0 & s & -1\\ 0 & 10 & s+7\end{vmatrix}$$

$$= s\left[s(s+7)+10\right] = s^3+7s^2+10s$$

Autovalores $s=-2$ $s=-5$ $s=0$

$$M_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -7 \\ 1 & -7 & 39 \end{bmatrix}$$

$|M_c| = -1$ Controlable

$$\begin{array}{ccc|ccc|c} & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & -10 & -7 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -10 & -7 & -7 \\ 0 & -10 & -7 & 0 & 70 & 39 & 39 \end{array}$$

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$|M_o| = 1$ Observable

c) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ 4 & 25 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad P^{-1} = \dfrac{1}{|P|} \mathrm{Adj}(P)$ $\quad \cancel{|P| =}$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}33 & -0{,}167 \\ 0 & 0{,}13 & 0{,}067 \\ 1 & 0{,}7 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P^{-1}B = \begin{bmatrix} -0{,}167 \\ 0{,}067 \\ 0{,}1 \end{bmatrix}$$

$$CP = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

d) $\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-5t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) $S_{1,2} = -3 \pm 3j \quad S_3 = -18$

$(s+3+3j)(s+3-3j) = s^2 + 6s + 18$

$(s^2+6s+18)(s+18) = s^3 + 6s^2 + 18s$ $= s^3 + 24s + 126s + 324$

$18s^2 + 108s + 324$

deseada

$s^3 + 24s^2 + 126s + 324 = 0$

$a_1 = 24 \quad \alpha_2 = 126 \quad \alpha_3 = 324$

$s^3 + 7s^2 + 10s + 0 = 0$

$a_1 = 7 \quad a_2 = 10 \quad a_3 = 0$

$K = [324 \; 116 \; 17] \, T^{-1}$ Como el sist. está en FCC, $T = I$

$K = [324 \; 116 \; 17]$

f) Lo controlé con Matlab, pero se puede hacer igual por igualación de coeficientes

Tema 2

$G_p(s) = \dfrac{1}{(s+2)(s+5)s}$ Se pide: $MF = 40°$

$e_{ss} = 0{,}5$

a) Compensación en adelanto

$$G_c(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} = K_c \alpha \frac{sT+1}{s\alpha T+1}$$

$$e_{ss} = 0{,}5 = \frac{1}{K_v} \rightarrow K_v = 2$$

$$K_v = 2 = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \, K_c \alpha \frac{(sT+1)}{(\alpha T s+1)} \cdot \frac{1}{(s+2)(s+5)\cancel{s}} = \frac{K_c \alpha}{10} = 2$$

$$\boxed{K_c \alpha = 20}$$

$20 \log 20 = 26\,dB$

El margen de fase deseado es de 40°. Se elige un aporte de fase un poco mayor ya que el compensador tiende a desplazar a la derecha la frec de cruce de ganancia, disminuyendo el MF.

$$\phi = MF - MF_i + 10^\circ$$

Desplazamos el Bode 26 dB hacia arriba (yo lo dibujé con Matlab, pero en el examen cambiaría la escala del eje)

$$\phi = 40^\circ - 35^\circ + 10^\circ = 15^\circ$$

$$\operatorname{sen} \phi = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \qquad \boxed{\alpha = 0{,}589}$$

En la frec de $\phi_{máx} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\,T}$ el compensador produce una ganancia de

$$\frac{|1 + j\omega T|}{|1+j\omega\alpha T|} = \frac{\left|1 + j\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right|}{|1+j\sqrt{\alpha}|} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\alpha}}{1+\alpha}} = \sqrt{\frac{\frac{\alpha+1}{\alpha}}{1+\alpha}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \rightarrow 20 \log \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = 10 \log \frac{1}{\alpha} = 2{,}3 \text{ dB}$$

La frec cuya ganancia es $-2{,}3$ dB es $1{,}8 \frac{rad}{seg}$. Se define como $\omega_{\phi max} = 1{,}8 \frac{rad}{seg}$

$$\omega_{\phi max} = 1{,}8 \frac{rad}{seg} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\, T} \qquad T = 0{,}72 \qquad K_c = \frac{20}{\alpha} = 33{,}95$$

$$\alpha T = 0{,}43$$

$$G_c(s) = 33{,}95 \frac{(s + 1{,}39)}{(s + 2{,}32)}$$

Dibujándolo con Matlab obtengo $MF = 43°$

b) Compensador en atraso

$$G_c(s) = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T}\right)}{\left(s + \frac{1}{\beta T}\right)} \qquad \beta > 1$$

$$G_c(s) = K_c \beta \frac{(Ts+1)}{(\beta Ts + 1)}$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} \cancel{s}\, K_c \beta \frac{(Ts+1)}{(\beta Ts+1)} \cdot \frac{1}{(s+2)(s+5)\cancel{s}} = \frac{K_c \beta}{10} = 2$$

$$K_c \beta = 20$$

Trabajo nuevamente con la curva original desplazada 26 dB hacia arriba

Busco un punto que tenga un MF igual al deseado más 10°

La frec 1,06 tiene un MF = +50°. Defino ésta como la nueva frec. de cruce de ganancia. La ganancia en este punto es de 4,24 dB, por lo que el compensador debe aportar − 4,24 dB

$$-4{,}24\ dB = 20 \log \frac{1}{\beta}$$

$$\beta = \frac{1}{\left(10^{\frac{-4{,}24}{20}}\right)} = 0{,}21$$

0,616

$$\beta = 1{,}63$$

Se coloca el cero del compensador en la frec igual a la décima parte de la nueva frec. de cruce de ganancia

$$s + \frac{1}{T} = s + 0{,}1 \qquad T = 10 \qquad K_c \beta = 20$$

$$s + \frac{1}{\beta T} = s + 0{,}06 \qquad K_c = 12{,}27$$

$$G_c(s) = 12{,}27 \, \frac{(s+0{,}1)}{(s+0{,}06)}$$

En el compensador de adelanto, se utiliza su característica de adelanto de fase para aumentar el MF del sistema. Este compensador desplaza la frecuencia de cruce de ganancia hacia un valor mayor, lo que implica un aumento del ancho de banda. Si el ancho de banda es mayor, el sist. es más rápido y el tiempo de resp. del sistema será menor. Tener un ancho de banda más grande tamb. tiene la contra que aumenta la sensibilidad del sist. ante señales de ruido

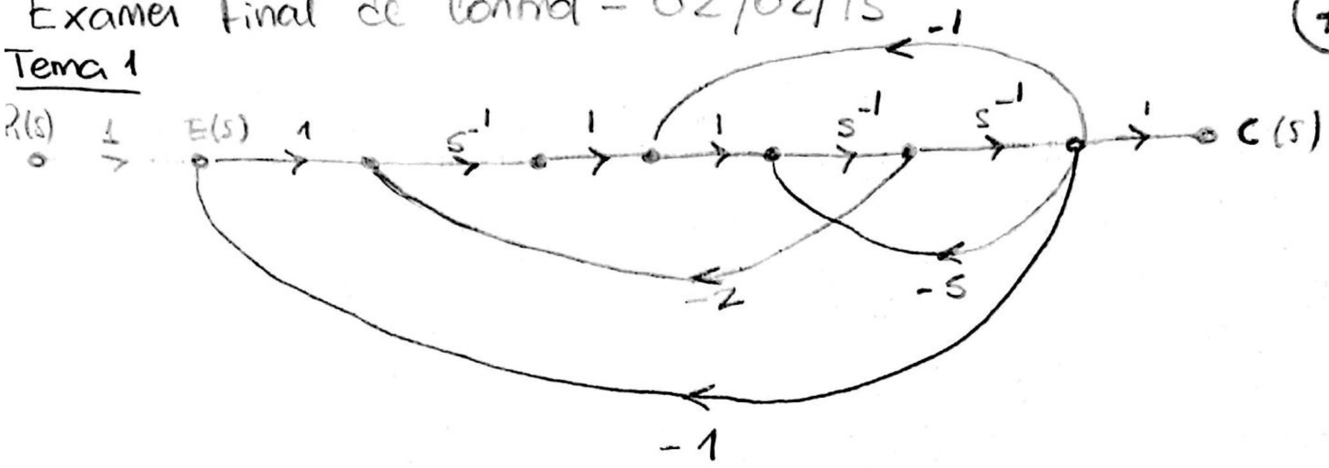
En un compensador en atraso, la característica usada para mejorar el MF es su atenuación a alta frecuencia. 69

Este compensador reduce el ancho de banda del sistema, por lo que aumenta el tiempo de estabilización. Sin embargo, se mejora el rechazo de señales de ruido.

Este compensador produce un par polo-cero de lazo cerrado muy cerca del origen, que produce una cola de pequeña amplitud que disminuye lentamente

Examen final de Control - 02/02/15

Tema 1

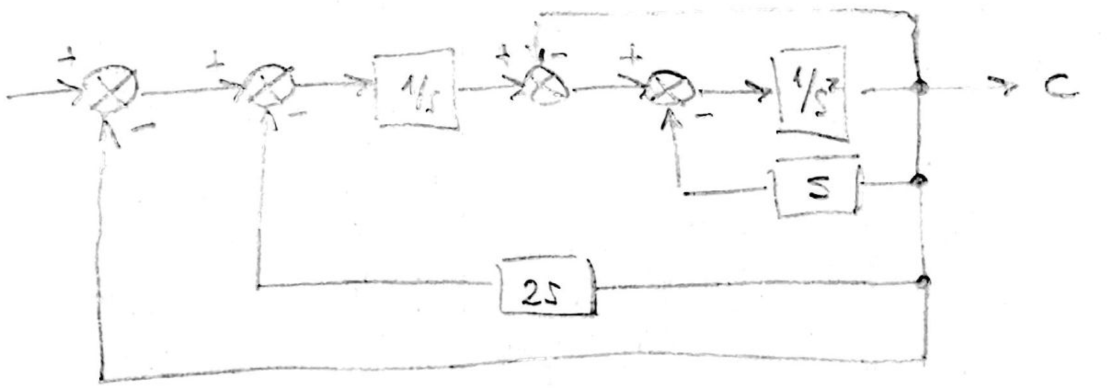


b) $N=1$ $\quad \dfrac{C(s)}{R(s)} = M(s) = \dfrac{M_1 \Delta_1}{\Delta}$ $\quad M_1 = s^{-3}$ $\quad \Delta_1 = 1$

$$\Delta = 1 + s^{-3} + 2s^{-2} + s^{-2} + s^{-1}$$

$$M(s) = \frac{1}{s^3 + s^2 + 3s + 1}$$

Compruebo por diagrama en bloque



71

$$F_1 = \frac{\frac{1}{s^2}}{1+\frac{s}{s^2}} = \frac{1}{s^2+s} \qquad F_2 = \frac{\frac{1}{s^2+s}}{1+\frac{1}{s^2+s}} = \frac{1}{s^2+s+1}$$

$$F_3 = \frac{1}{s^3+s^2+s} \qquad F_4 = \frac{\frac{1}{s^3+s^2+s}}{1+\frac{2s}{s^3+s^2+s}} = \frac{1}{s^3+s^2+3s}$$

$$F_4 = \frac{1}{s^3+s^2+3s+1} \checkmark$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{R(s)-C(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = 1 - \frac{1}{s^3+s^2+3s+1} = \frac{s^3+s^2+3s}{s^3+s^2+3s+1}$$

c) La T^a de T^a de lazo abierto es $\boxed{G = \frac{1}{s^3+s^2+3s}}$ $\quad H = 1$

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1+GH} = \frac{\frac{1}{s^3+s^2+3s}}{1+\frac{1}{s^3+s^2+3s}} = \frac{1}{s^3+s^2+3s+1}$$

Como el sistema es de tipo 1, el ess para una entrada escalón es cero y $K_p = \infty$

Tema 2

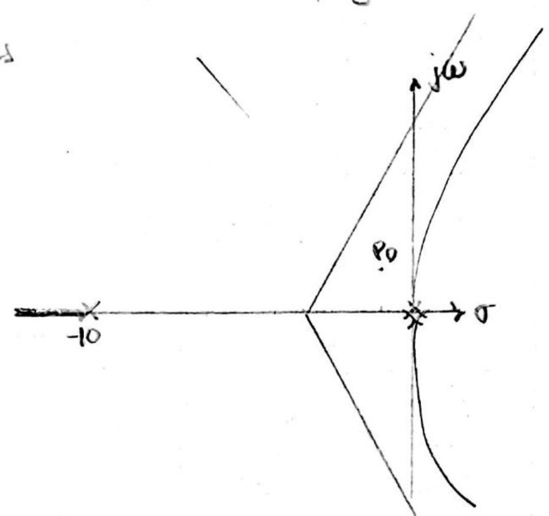
$$G_p = \frac{1000}{s^2(s+10)} \qquad M_0 = 10\% = 0{,}1 = e^{-\frac{\sigma\pi}{\omega d}}$$

$$t_{s2\%} = 4 = \frac{4}{\sigma} \qquad \sigma = 1$$

$\ln 0,1 = -\frac{\pi}{wd}$ $\quad wd = \frac{-\pi}{\ln 0,1} = 1,365 \frac{rad}{seg}$

Punto de diseño $s = -1 \pm 1,365 j$

Lugar de raíces



$p - z = 3$ $\quad \phi_0 = 60°$ $\quad \phi_1 = 180°$ $\quad \phi_3 = -60°$

$\sigma = \frac{-10}{3} = -3,33$

- Puntos de bif.

$1 + \frac{K}{s^3 + 10s^2} = 0$ $\quad K = -(s^3 + 10s^2)$

$\frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 20s) = 0$

$\boxed{s = 0}$ $\quad 3s + 20 = 0$

$s = -6,67 \rightarrow$ No es LR

Routh

$s^3 + 10s^2 + K = 0$

Es inestable para cualquier K.

Scanned by CamScanner

$$\varphi_c - \varphi_0 \cdot 2 - \varphi_{-10} = \pm 180(2k+1)$$

$$\varphi_c - 252,45^\circ - 8,62^\circ = \pm 180(2k+1)$$

$$\varphi_c = 81,07^\circ$$

El cero debe aportar 81,07°.

$$tg(81,07^\circ) = \frac{1,365}{x}$$

$$x = 0,2144$$

El cero se ubica en $(s+1,2144)$

$$1 + \frac{K(s+1,2144)}{s^2(s+10)} = 0 \qquad |K| = \left.\frac{|s|^2\,|s+10|}{|s+1,2144|}\right|_{s=-1+j1,365}$$

$18,79 = K_D \cdot 1000$

$$|K| = \frac{2,85 \cdot 9,10}{1,38} = 18,79$$

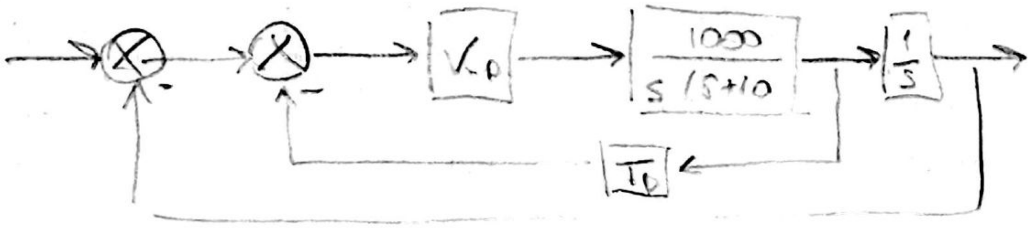
$K_D = 0,0187$

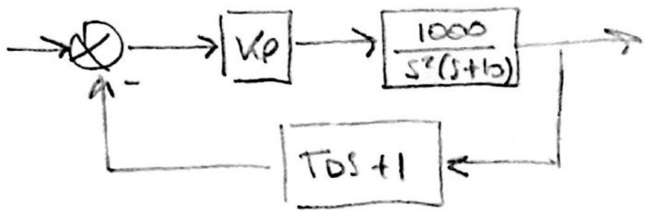
$$0,0187(s+1,2144) = K_D\left(s + \frac{K_P}{K_D}\right) \qquad K_P = 0,0227$$

$$T_D = 0,823 \text{ seg}$$

b) Como el sist. es de tipo 2, el ess para una entrada rampa es cero.

c) Se podría realizar compensación por realimentación y velocidad





Como la función de transferencia de lazo abierto es la misma, los valores de Kp y TD son iguales. Con esta compensación no tenemos cero en lazo cerrado

Examen Final de Control - 15/02/16 (75)

a) - La planta tiene un polo en el origen porque su fase arranca con -90° y la pendiente inical del módulo es -20

- El denominador es de orden 3

- No tengo el examen en mano, pero parece que la ganancia para $\omega = 1$ es 0dB (o muy cerquita). Como tengo un polo en 1, voy a tener un error de 3 dB = 1,412 en esta frec, por lo que se lo podría agregar a la cte.

$$G_p(s) = \frac{14{,}12}{s(s+1)(s+10)} \rightarrow K_v = 1{,}412 \quad e_{ss} = 0{,}71$$

Más o menos coincide con lo que se ve en la Fig 3. Probablemente podría ser menor el error y mayor K_v

Hice gráficos reales y asintóticas con Matlab y da muy parecido (no exactamente igual, pero sí muy parecido). No sé si me estaré olvidando de algo.

c) Para que el error en estado estacionario sea cero para una entrada rampa el sist tiene que ser de tipo 2, por lo que es necesario agregar un integrador. Se usa un compensador PI.

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{sK_p + K_i}{s} = K_p \frac{(s + K_i/K_p)}{s}$$

Para modificar lo menos posible la resp. transitoria, K_p debe ser 1 y el cero debe estar muy cerca del polo, para que el aporte angular del compensador sea mínimo. Se ubica el cero en 0,1, que es la décima parte del polo más pequeño de la planta, que no está en el origen

$$G_c(s) = \frac{(s+0{,}1)}{s} \quad K_p = 1 \quad \frac{K_i}{K_p} = 0{,}1 \quad K_i = 0{,}1 \quad T_i = 10 \text{ seg}$$

c) Buscamos la función de transferencia de lazo cerrado $\frac{C(s)}{R(s)}$ para $P(s) = 0$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)H(s)}$$ considerando $G_c(s)\,G_p(s)H(s) \gg 1$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\cancel{G_c(s)\,G_p(s)}}{\cancel{G_c(s)\,G_p(s)}\,H(s)} = \frac{1}{H(s)} = 1$$

Para el caso de la perturbación, con $R(s) = 0$

$$\frac{C(s)}{P(s)} = \frac{G_p(s)}{1 + G_p(s)G_c(s)H(s)} \cong \frac{\cancel{G_p(s)}}{\cancel{G_p(s)}G_c(s)\,H(s)} = \frac{1}{G_c(s)H(s)} = \frac{1}{G_c(s)}$$

El efecto de la perturbación está dividido por la función de transferencia del compensador (No se me ocurre otra cosa por hacer con esto)

Tema 2

$$G_p(s) = \frac{K(s^2 + 16s + 64)}{s(s+4)(s+6)}$$

a) $$1 + \frac{K(s^2 + 16s + 64)}{s^3 + 10s^2 + 24s} = 0$$

$$s^3 + (10 + K)s^2 + (24 + 16K)s + 64K = 0$$

Routh

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 24+16K \\ s^2 & 10+K & 64K \\ s^1 & \longrightarrow \dfrac{(10+K)(24+16K)-64K}{10+K} = 0 & \\ s^0 & 64K & \end{array}$$

$$240+160K+24K+16K^2-64K=0$$

$$16K^2+120K+240=0$$

$$K_{1,2} = -3{,}75 \pm j\,0{,}97$$

$10+K>0$ $\quad$ $64K>0$ $\quad$ El sist es estable para

$K>-10$ $\quad$ $K>0$ $\quad$ cualquier valor positivo de K

$$0<K<\infty$$

b) $P_{D_1} = -2{,}48 \pm j\,2{,}48$ (lo busqué con Matlab)

$P_{D_2} = -7{,}34 \pm j\,7{,}34$

$$|K_1| = \left.\frac{|s|\,|s+4|\,|s+6|}{|s+8|^2}\right|_{s=-2{,}48+j2{,}48} = \frac{3{,}51 \;\; 2{,}91 \;\; 4{,}3}{36{,}6}$$

$$|K_1| = 1{,}2$$

$$|K_2| = \left.\frac{|s|\,|s+4|\,|s+6|}{|s+8|^2}\right|_{s=-7{,}34+j7{,}34} = \frac{10{,}38 \;\; 8{,}06 \;\; 7{,}46}{54{,}31}$$

$$|K_2| = 11{,}5$$

c) El punto que corresponde al menor tiempo de establecimiento es $P_D = -7{,}34 \pm j\,7{,}34$

$$t_{s_{2\%}} = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{7{,}34} = 0{,}55 \text{ seg}$$

e) $r = \mu(t)$ Como el sistema es de tipo 1, el ess es cero y $K_p = \infty$

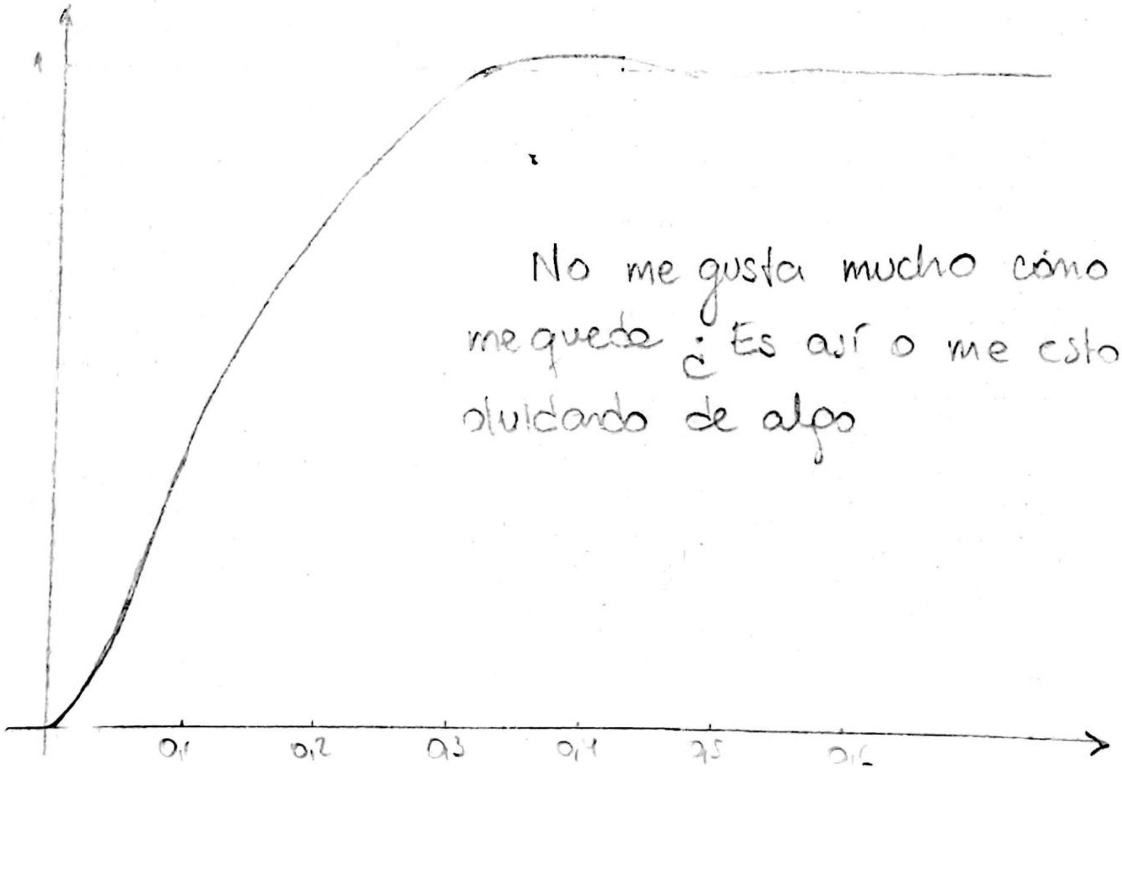
f) $r = t\,\mu(t)$ $$K_v = \lim_{s \to 0} s\,G_p(s) = \frac{64}{24} = 2{,}67$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 0{,}375$$

d) $\sigma = 7{,}34$ $\omega_d = 7{,}34$ $\zeta = 0{,}707$ $\omega_n = 10{,}36$

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = 0{,}32 \qquad t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 0{,}43 \qquad t_{s_{5\%}} = \frac{3}{\sigma} = 0{,}41$$

$$M_p = e^{\frac{\sigma\pi}{\omega_d}} = 0{,}04 \qquad t_{s_{2\%}} = \frac{4}{\sigma} = 0{,}55$$



No me gusta mucho cómo me quedó ¿Es así o me estoy olvidando de algo

Scanned by CamScanner

Tema 3

$$G(s) = \frac{s^2+16s+64}{s(s+4)(s+6)} = \frac{s^2+16s+64}{s^3+10s^2+24s}$$

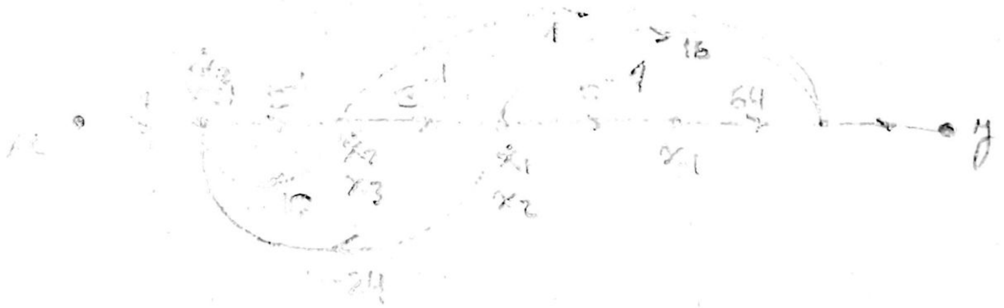
a) $$G(s) = \frac{s^2+16s+64}{s^3+10s^2+24s}\,\frac{X(s)}{X(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^{-1}+16s^{-2}+64s^{-3}}{1+10s^{-1}+24s^{-2}}\,\frac{X(s)}{X(s)}$$

$$Y(s) = s^{-1}X(s) + 16s^{-2}X(s) + 64s^{-3}X(s)$$

$$U(s) = X(s) + 10s^{-1}X(s) + 24s^{-2}X(s)$$

$$X(s) = U(s) - 10s^{-1}X(s) - 24s^{-2}X(s)$$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -24 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 64 & 16 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

b) $|sI-A| = \begin{vmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -24 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 24 & s+10 \end{vmatrix}$

$|sI-A| = s\left[s(s+10)+24 \right] = s^3 + 10s^2 + 24s$

Autovalores $s=0$ $s=-4$ $s=-6$

$M_C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -10 \\ 1 & -10 & 76 \end{bmatrix}$ $|M_C| = -1$

Completamente Controlable

			0	1	0		0
			0	0	1		0
			0	-24	-10		1
0	1	0	0	0	1		1
0	0	1	0	-24	-10		-10
0	-24	-10	0	240	76		76

$M_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 & 16 & 1 \\ 0 & 40 & 6 \\ 0 & -144 & -20 \end{bmatrix}$ $|M_O| = 64\left[-800 + 864\right]$

$= 4096$

Completamente Observable

c) $s_{1,2} = -5 \pm 5j$ $s_3 = -30$

$(s+5+5j)(s+5-5j) = s^2 + 10s + 50$

$(s^2+10s+50)(s+30) = s^3 + 10s^2 + 50s$

$30s^2 + 300s + 1500$

$\boxed{0 = s^3 + 40s^2 + 350s + 1500}$

$K = \begin{bmatrix} 0 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} \qquad K_1 \qquad K' = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix}$

$$|SI - A + BK| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 24 & s+10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ K_1 & K_2 & K_3 \end{vmatrix}$$

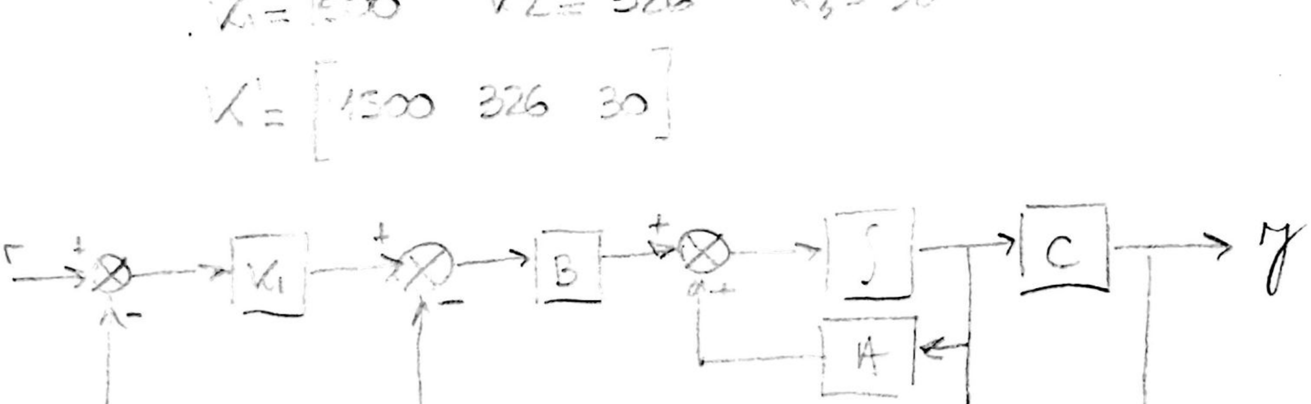
$$= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ K_1 & 24+K_2 & s+10+K_3 \end{vmatrix}$$

$$= s\left[s(s+10+K_3) + 24 + K_2\right] + K_1$$

$$= s^3 + s^2(10+K_3) + s(24+K_2) + K_1$$

$K_1 = 1500 \qquad K_2 = 326 \qquad K_3 = 30$

$K' = \begin{bmatrix} 1500 & 326 & 30 \end{bmatrix}$



$$K = \begin{bmatrix} 0 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} \qquad K_1 \qquad K' = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix}$$

$$|SI - A + BK| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 24 & s+10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ K_1 & K_2 & K_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ K_1 & 24+K_2 & s+10+K_3 \end{vmatrix}$$

$$= s\left[s\left(s+10+K_3\right) + 24 + K_2\right] + K_1$$

$$= s^3 + s^2\left(10+K_3\right) + s\left(24+K_2\right) + K_1$$

$K_1 = 1500 \qquad K_2 = 326 \qquad K_3 = 30$

$$K' = \begin{bmatrix} 1500 & 326 & 30 \end{bmatrix}$$