Alumna: BIOLATO, LAURA MARÍA *
Legajo: 54120
Curso: 5R2

SISTEMAS DE CONTROL
PRÁCTICO

CONTROL ①

PROFESOR: Ing. Salguero. gustavo.salguero@ypf.com 1532956f6

Preparar carpeta. (13.03.13)

2 parciales

16 prácticos

Libros: Ogata y Kuo

Imprimir tabla de transformadas y guía de prácticos

Bajar prácticos de autogestión todos los días.

Práctico 1.1 - Transformada de Laplace - Convolución

Ejercicio 1. Resolver la siguiente ecuación diferencial y una vez obtenida la solución demostrar la validez de la igualdad.

$$y'(t) + 2y(t) = 0 \qquad CI: y(0) = 3$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$$

$$sY(s) - 3 + 2Y(s) = 0$$

$$Y(s) = \frac{3}{s+2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$$

$$y(t) = 3e^{-2t} \qquad y(0) = 3$$

$$y'(t) = -6e^{-2t} \qquad y'(0) = -6$$

$$\left.\begin{matrix} y(0)=3 \\ y'(0)=-6 \end{matrix}\right\} \; y'(0) + 2y(0) = 0.$$

Ejercicio 2: resolver la siguiente ecuación si la entrada es constante: 8.

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x(t)$$

donde

$$x(t) = 8$$

CI: nulas

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = \frac{8}{s}$$

$$Y(s) = \frac{8}{s(s^2+3s+2)} = \frac{8}{s(s+1)(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{(s+1)} + \frac{A_2}{(s+2)} = \frac{4}{s} - \frac{8}{(s+1)} + \frac{4}{(s+2)}$$

$$A_0 = \lim_{s\to 0} \frac{\cancel{s}\, 8.}{\cancel{s}(s+1)(s+2)} = 4$$

$$A_1 = \lim_{s\to -1} \frac{8}{s(s+2)} = -8$$

$$A_2 = \lim_{s\to -2} \frac{8}{s(s+1)} = 4$$

$y(0) = 0 \quad ; \; y(\infty) = 4$

$$y(t) = 4 - 8e^{-t} + 4e^{-2t}$$

T.V.I $\quad y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{8}{s^2+3s+2} = 0$

T.V.F. $\quad y(\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{8}{s^2+3s+2} = 4.$

Para senoidales o cosenoidales puras el TVF da el valor medio. Carece de sentido físico.

Ejercicio 3: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales aplicando transformada de Laplace.

$$x'(t) = 2x(t) - 3y(t) \qquad \text{C.I.} \quad x(0) = 8$$

$$y'(t) = -2x(t) + y(t) \qquad y(0) = 3$$

$sX(s) - 8 = 2X(s) - 3Y(s)$

$sY(s) - 3 = -2X(s) + Y(s)$

$$\left.\begin{aligned} (s-2)X(s) + 3Y(s) &= 8 \\ 2X(s) + (s-1)Y(s) &= 3 \end{aligned}\right\} \quad \Delta p = \begin{vmatrix} (s-2) & 3 \\ 2 & (s-1) \end{vmatrix} = s^2 - 3s - 4$$

$$\Delta s_{X(s)} = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 3 & (s-1) \end{vmatrix} = 8s - 17 \qquad X(s) = \frac{\Delta s_{X(s)}}{\Delta p} = \frac{8s-17}{s^2-3s-4}$$

CONTROL p (2)

creo que hay un número mal

$$\Delta S_{y(s)} = \begin{vmatrix} (S-2) & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3S-22 \qquad Y(s) = \frac{\Delta S_{y(s)}}{\Delta p} = \frac{3S-22}{S^2-3S-4}$$

$$X(s) = \frac{8s-17}{S^2-3s-4} = \frac{8s-17}{(s-4)(s+1)} = \frac{A}{(S-4)} + \frac{B}{(S+1)} = \frac{5}{(S-4)} + \frac{5}{(S+1)}$$

$$A = \lim_{s \to 4} \frac{8s-7}{s+1} = \frac{25}{5} = 5 \qquad B = \lim_{s \to -1} \frac{8s-17}{(s-4)} = \frac{-25}{-5} = 5$$

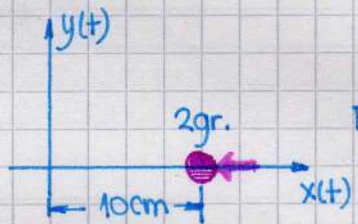
$$Y(s) = \frac{3S-22}{S^2-3S-4} = \frac{3S-22}{(s-4)(s+1)} = \frac{A}{(S-4)} + \frac{B}{(S+1)} = \frac{-2}{(S-4)} + \frac{5}{(S+1)}$$

$$A = \lim_{s \to 4} \frac{3s-22}{(s+1)} = \frac{-10}{5} = -2 \qquad B = \lim_{s \to -1} \frac{3s-22}{s-4} = \frac{-25}{-5} = 5$$

$$x(t) = 5e^{4t} + 5e^{-t}$$

$$y(t) = 2e^{4t} + 5e^{-t}$$

Ejercicio 4.



$F = 8.10^{-5} x(t)\ N$

$$\mathcal{L}[\ddot{x}(t)] = S^2 X(s) - s\,X(0) - X'(0)$$

$$\Sigma F(t) = m.\ddot{x}(t)$$

$$-8.10^{-5} x(t) = 2\,10^{-3}\, \ddot{x}(t) \Rightarrow \ddot{x}(t) + 4.10^{-2} x(t) = 0$$

$$S^2 X(s) - 0{,}1s - 0 + 4{,}10^{-2} X(s) = 0$$

$$\mathcal{L}[\cos(t)] = \frac{s}{S^2+\omega^2}$$

$$X(s) = \frac{0{,}1s}{S^2 + 4.10^{-2}}$$

$$\mathcal{L}[\operatorname{sen}(t)] = \frac{\omega}{S^2+\omega^2}$$

$$x(t) = 0{,}1 \cos(0{,}2t)$$

$$\dot{x}(t) = -0{,}02 \operatorname{sen}(0{,}2t)$$

$$\ddot{x}(t) = -0{,}004 \cos(0{,}2t)$$

Ejercicio 5.

$F(t) = m\ddot{x}(t) + f\dot{x}(t) + k\,x(t)$

$m = 1kg$

$f = 4$

$k = 2\,N.m$

$CI = 0$

$$4 = \ddot{x}(t) + 0{,}2\dot{x}(t) + 2x(t)$$

$$\frac{4}{s} = X(s)\left[s^2 + 0{,}2s + 2\right]$$

$$X(s) = \frac{4}{s\,(s^2 + 0{,}2s + 2)}$$

$$X(s) = \frac{4}{s\,(s+0{,}1-j1{,}41)\,(s+0{,}1+j1{,}41)} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{(s+0{,}1-j1{,}41)} + \frac{\overline{A_1}}{(s+0{,}1+j1{,}41)}$$

$$A_0 = \lim_{s\to 0} \frac{4}{s^2+0{,}2s+2} = 2$$

$$A_1 = \lim_{s\to -0{,}1+j1{,}41} \frac{4}{s\,(s+0{,}1+j1{,}41)} = \frac{\cancel{4}\,2}{(-0{,}1+j1{,}41)\,(\cancel{2}j1{,}41)} =$$

$$= \frac{-j\cancel{2}}{1{,}41} \cdot \frac{-0{,}1-j1{,}41}{\cancel{2}}$$

$$A_1 = -1 + j\frac{0{,}1}{1{,}41} = -1 + j0{,}07$$

$$\overline{A_1} = -1 - j0{,}07$$

$$X(s) = \frac{2}{s} + \frac{(-1+j0{,}07)}{(s+0{,}1-j1{,}41)} + \frac{(-1-j0{,}07)}{(s+0{,}1+j1{,}41)}$$

$$x(t) = 2 + (-1+j0{,}07)\,e^{-(0{,}1-j1{,}41)t} + (-1-j0{,}07)\,e^{-(0{,}1+j1{,}41)t}$$

Usando Euler:

$$\left.\begin{aligned} e^{j\theta} &= \cos\theta + j\,\text{sen}\,\theta \\ e^{-j\theta} &= \cos\theta - j\,\text{sen}\,\theta \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} e^{j\theta} + e^{-j\theta} &= 2\cos\theta \\ e^{j\theta} - e^{-j\theta} &= j2\,\text{sen}\,\theta \end{aligned}$$

$$x(t) = 2 + e^{-0{,}1t}\left[(-1+j0{,}07)\,e^{j1{,}41t} + (-1-j0{,}07)\,e^{-j1{,}41t}\right] =$$

$$x(t) = 2\ \ e^{-0{,}1t}\left[(-1)2\cos(1{,}41t) + j0{,}07\ j2\,\text{sen}\,1{,}41t\right] =$$

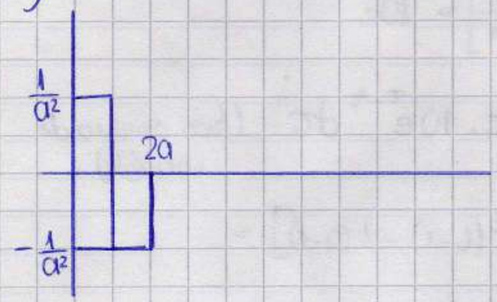
$$x(t) = 2 - 2e^{-0{,}1t}\left[\cos(1{,}41t) + 0{,}07\,\text{sen}\,1{,}41t\right]$$

Partiendo de la identidad

$$A\cos\phi + B\,\mathrm{sen}\,\phi = \sqrt{A^2+B^2}\,\cos\left(\phi - \mathrm{arctg}\,\frac{B}{A}\right)$$
$$= \sqrt{A^2+B^2}\,\mathrm{sen}\left(\phi + \mathrm{arctg}\,\frac{A}{B}\right)$$ TERMINAR

$$x(t) = 2 - 2e^{-0,1t}\left[\sqrt{1,49}\,\cos(1,41t - \mathrm{arctg}\,0,07)\right]$$
$$x(t) = 2 - 2e^{-0,1t}\left[1,22\cos(1,41t - 0,07)\right]$$

Ejercicio 6.



$$f(t) = \frac{1}{a^2}\mu(t) - \frac{2}{a^2}\mu(t-a) + \frac{1}{a^2}\mu(t-2a)$$
$$F(s) = \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{s} - \frac{2e^{-as}}{s} + \frac{e^{-2as}}{s}\right]$$

$$F(s) = \frac{1}{a^2 s}\left[1 - 2e^{-as} + e^{-2as}\right]$$

$$\lim_{a\to 0} F(s) = \frac{0}{0} \quad \text{Indeterminada}$$

$$\lim_{a\to 0} F(s) = \lim_{a\to 0}\frac{\frac{\partial}{\partial a}(1-2e^{-as}+e^{-2as})}{\frac{\partial}{\partial a}(a^2 s)}$$

$$\lim_{a\to 0} F(s) = \lim_{a\to 0}\frac{\cancel{2s}e^{-as} - \cancel{2s}e^{-2as}}{\cancel{2}a\cancel{s}} = \frac{0}{0} \quad \text{Indeterminada.}$$

$$\lim_{a\to 0} F(s) = \lim_{a\to 0}\frac{e^{-as} - e^{-2as}}{a} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{a\to 0} F(s) = \lim_{a\to 0}\frac{\frac{\partial}{\partial a}(e^{-as}-e^{-2as})}{\frac{\partial}{\partial a}(a)} = \lim_{a\to 0}\frac{-se^{-as}+2se^{-2as}}{1} = -s+s = \boxed{s}$$

19. Marzo. 2013

Ejercicio 7

$$Y(s) = \frac{10}{s^2(s+1)} = \frac{A_0}{s^2} + \frac{B_0}{s} + \frac{A_1}{(s+1)}$$

$$A_0 = \lim_{s\to 0} \frac{10}{s+1} = \boxed{10} \quad ; \quad B_0 = \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}\left(\frac{10}{s+1}\right) = \lim_{s\to 0} -\frac{10}{(s+1)^2} = \boxed{-10}$$

$$A_1 = \lim_{s\to -1} \frac{10}{s^2} = \boxed{10}$$

$$Y(s) = \frac{10}{s^2} - \frac{10}{s} + \frac{10}{s+1} \Rightarrow y(t) = 10t - 10 + 10e^{-t} = 10(t-1+e^{-t})$$

$$r(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = t \quad ; \quad g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10}{s+1}\right] = 10e^{-t}$$

$$y(t) = r(t) * g(t) = \int_0^t r(\tau)\cdot g(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t \tau \cdot 10e^{\tau - t}\,d\tau$$ (hice cambio de variable)

$$y(t) = 10e^{-t}\int_0^t \tau e^{\tau}\,d\tau = 10e^{-t}\left[e^{\tau}(\tau-1)\right]_0^t = 10e^{-t}\left[e^t(t-1) - 1(0-1)\right] =$$

$$\boxed{\int x e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x - \frac{1}{a}\right)}$$
NOTA

$$= 10e^{-t}\left[te^t - e^t + 1\right] = 10\left[t - 1 + e^{-t}\right]$$

Práctico 1.2. Función de transferencia

Ejercicio 1. Determinar la transformada de la función pulso de la figura.

$$F.T \; ; \; F.T|_{t_0\to 0} \; ; \; \delta(t)$$

$$f(t) = \frac{A}{t_0}\mu(t) - \frac{A}{t_0}\mu(t-t_0)$$

$$F(s) = \frac{A}{t_0}\cdot\frac{1}{s} - \frac{A}{t_0}\cdot\frac{1}{s}\cdot e^{-t_0 s} = \frac{A}{t_0 s}\cdot\left(1 - e^{-t_0\cdot s}\right)$$

$$\lim_{t_0\to 0} F(s) = \lim_{t_0\to 0} \frac{A}{t_0}\cdot\frac{1}{s}\left(1 - e^{-t_0\cdot s}\right) = \frac{0}{0}$$

Aplicamos L'Hospital $\left(\frac{\text{der. num}}{\text{der. den.}}\right)$

$$\lim_{t_0\to 0} F(s) = \lim_{t_0\to 0} \frac{A\cancel{s}e^{-t_0 s}}{\cancel{s}} = A$$

A = 1 función impulso o delta de Dirac.

$$\begin{cases} \delta(t-t_0) = 0 & \forall\ t \neq t_0 \\ \delta(t-t_0) = \infty & \forall\ t = t_0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) = 1$$

Estamos considerando $t \to t_0$ ($t_0 \to 0$) creo.

por eso no hacemos el corrimiento

$$\mathcal{L}[\delta(t-t_0)] = 1$$

Ejercicio 2

$$T(t) = J\ddot{\theta}(t) + B\,\dot{\theta}(t) + k\,\theta(t)$$

$J = 20\,[kg \times m^2]$ momento de inercia.

$B = 1\,\frac{N.m.seg}{rad}$ Coeficiente de fricción viscosa rotacional

$k = 5\,\frac{N \times m}{rad}$ cte elástica rotacional.

Cuando obtenemos F.T. las CI son nulas, por lo que $\mathcal{L}[T(t)] = T(s)$ y voy a tener 1 solo término por cada término del segundo miembro

$$T(s) = \left(J.s^2 + Bs + k\right)\theta(s)$$

$$\frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{1/J}{s^2 + \frac{B}{J}s + \frac{k}{J}} = \frac{1/20}{s^2 + \frac{1}{20}s + \frac{5}{20}} = \frac{0{,}05}{s^2 + 0{,}05s + 0{,}25}$$

Ejercicio 3

CI nulas (Siempre que busco la F.T)

$$y(t) + 2\int y(t)\,dt = x(t) + \int x(t)\,dt$$

$$Y(s) + 2\frac{Y(s)}{s} = X(s) + \frac{X(s)}{s}$$ (Multiplico ambos miembros por s)

$$Y(s)(s+2) = X(s)(s+1)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+1}{s+2}$$

$x(t) = \delta(t)$ $\mathcal{L}[x(t)] = 1 = X(s)$ ($x(t)$ es el delta de Dirac)

$$Y(s) = \frac{s+1}{s+2} = 1 + \frac{A}{s+2}$$

$$s + 2 + A = s + 1 \Rightarrow A = -1$$

$$Y(s) = 1 - \frac{1}{s+2}$$

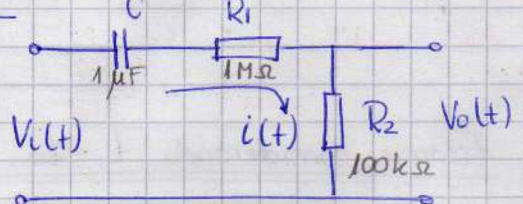
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \delta(t) - e^{-2t}$$

Ejercicio 4

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s+1}{s^2+s+1} \Rightarrow (s^2+s+1)\,Y(s) = (2s+1)\,X(s)$$

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = 2\dot{x}(t) + x(t)$$

Ejercicio 5



$$V_i(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt + (R_1+R_2)\,i(t)$$

$$V_0(t) = R_2\, i(t)$$

$$V_i(s) = \left(\frac{1}{sC} + R_1 + R_2\right) I(s) \quad ; \quad V_0(s) = R_2\, I(s)$$

$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{R_2}{\frac{1}{sC} + R_1 + R_2} = \frac{sCR_2}{1 + sC(R_1+R_2)} = \left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)\frac{s}{s + \frac{1}{(R_1+R_2)C}}$$ Red pasa alto

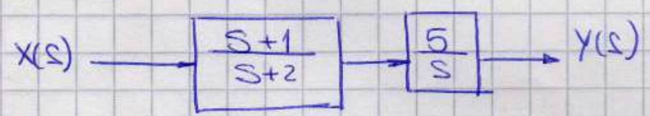
Tiene un polo en $\frac{1}{(R_1+R_2)C}$ y la cte de tiempo es $C(R_1+R_2)$

Si tengo una continua $V_0 = 0$ $\quad (s = j\omega)$

Si tengo alta frecuencia $V_0 \approx \frac{R_2}{R_1+R_2}$

REEMPLAZAR CON VALORES

Ejercicio 6



$$x(t) = 6\,\mu(t) \Rightarrow X(s) = \frac{6}{s}$$

$$F.T = \frac{5(s+1)}{s(s+2)} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$Y(s) = 30\,\frac{(s+1)}{s^2(s+2)} = \frac{A_0}{s^2} + \frac{B_0}{s} + \frac{A_1}{s+2}$$

$$A_0 = \lim_{s\to 0} 30\frac{(s+1)}{(s+2)} = \frac{1}{2}\cdot 30 = 15$$

$$B_0 = \lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\left(30\,\frac{s+1}{s+2}\right) = 30\lim_{s\to 0}\frac{s+2-s-1}{(s+2)^2} = \frac{30}{4} = 7{,}5$$

DESCARGAR MATERIAL COMPLEMENTARIO !

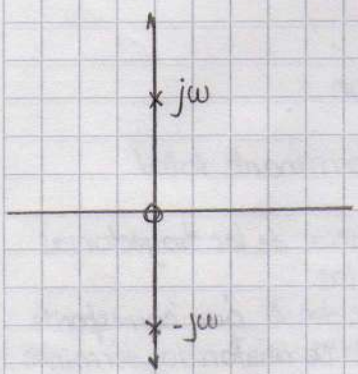
$$A_1 = \lim_{s \to -2} 30 \frac{(s+1)}{s^2} = -7{,}5$$

$$Y(s) = \frac{15}{s^2} + \frac{7{,}5}{s} - \frac{7{,}5}{s+2}$$

$$y(t) = 15t + 7{,}5 - 7{,}5e^{-2t}$$ → El profe dio alguna explicación sobre esto cuando se aplica una continua.

Ejercicio 7

Pongo una ganancia genérica constante k (si no está el dato de ganancia)



$$\frac{Y(s)}{X(s)} = k\frac{(s-0)}{(s-j\omega)(s+j\omega)} = k\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

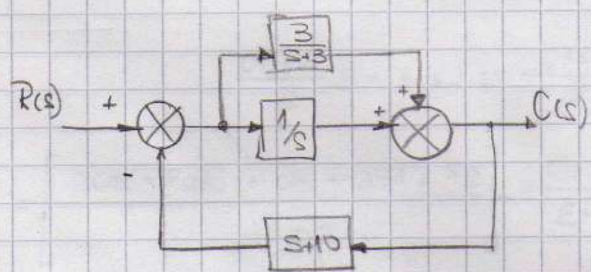
$$x(t) = \delta(t) \Rightarrow X(s) = 1$$

$$Y(s) = 1 \cdot k \cdot \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$y(t) = k \cos \omega t$$

Práctico 13 — Introducción a los sistemas de control 26.03.2012

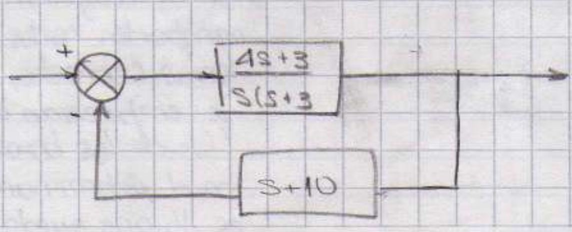
Ejercicio 1



$$\frac{C(s)}{R(s)} = ?$$

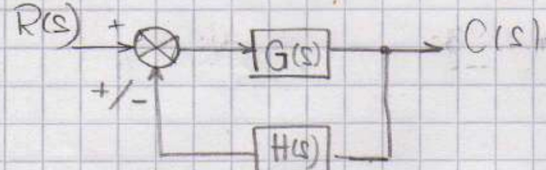
* Eliminación de bloques en paralelo:

$$\frac{1}{s} + \frac{3}{s+3} = \frac{s+3+3s}{s(s+3)} = \frac{4s+3}{s(s+3)}$$



$*\quad \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)}$

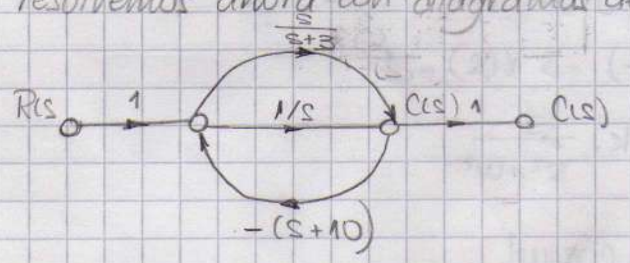
(+) si el lazo de realimentación es negativo
(−) si el lazo de realimentación es positivo.



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{4s+3}{s(s+3)}}{1 + \frac{4s+3}{s(s+3)}(s+10)} = \frac{4s+3}{s^2+3s+4s^2+43s+30} = \frac{4s+3}{5s^2+46s+30}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = 0{,}8\ \frac{s+0{,}75}{s+9{,}2s+6}$$

Lo resolvemos ahora con diagramas de flujo → Mason



Δ = determinante total

P_k = ganancias de las trayectorias directas

Δ_k = parte de Δ que corresponde a P_k, donde se anulan los términos de los lazos con los que comparte nodo

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta}\sum_k P_k \Delta_k$$

Productos de lazos DISJUNTOS tomados de 2 en 2, 3 en 3, etc

$$\Delta = 1 - \sum_a L_a + \sum_{b,c} L_b L_c - \sum_{d,e,f} L_d L_e L_f + \dots$$

$$P_1 = \frac{1}{s} \quad P_2 = \frac{3}{s+3} \quad L_1 = -\frac{s+10}{s}\ ; \ L_2 = -3\,\frac{s+10}{s}$$

$$\sum_a L_a = L_1 + L_2 = -\frac{s+10}{s} - 3\frac{(s+10)}{s+3} = -\left[\frac{s^2+13s+30+3s^2+30s}{s(s+3)}\right] =$$

$$= -\left[\frac{4s^2+43s+30}{s(s+3)}\right]$$

$$\Delta = 1 + \frac{4s^2+43s+30}{s(s+3)} = \frac{s^2+3s+4s^2+43s+30}{s(s+3)} = \frac{5s^2+46s+30}{s(s+3)}$$

$$\sum P_k \Delta_k = P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2$$

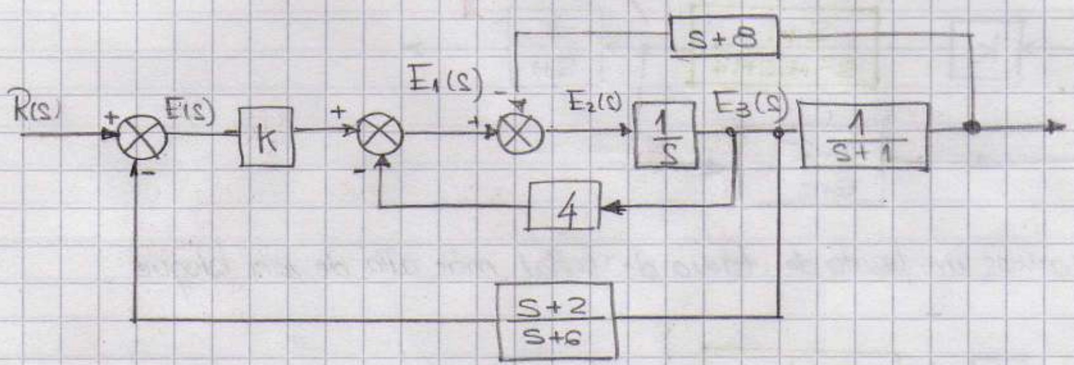
$$\Delta_1 = 1 \quad , \quad \Delta_2 = 1$$

Si las trayectorias directas comparten nodos con los lazos cerrados, esos términos se empiezan a hacer cero (los de los lazos cerrados) en el determinante Δ. El Δ_k es lo que queda después de anular todos los lazos que toca la trayectoria directa P_k.

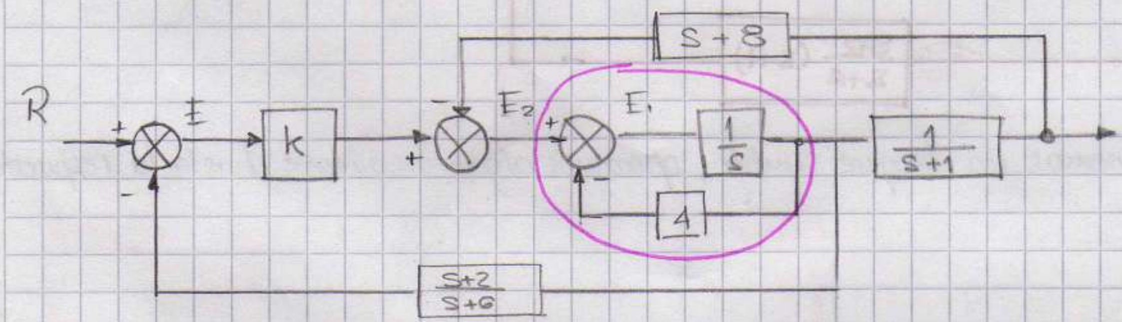
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s(s+3)}{5s^2+46s+30}\cdot\left(\frac{1}{s}+\frac{3}{s+3}\right) = \frac{s+3+3s}{5s^2+46s+30} = \frac{4s+3}{5s^2+46s+30}$$

llevando a la canónica da igual que con la otra resolución

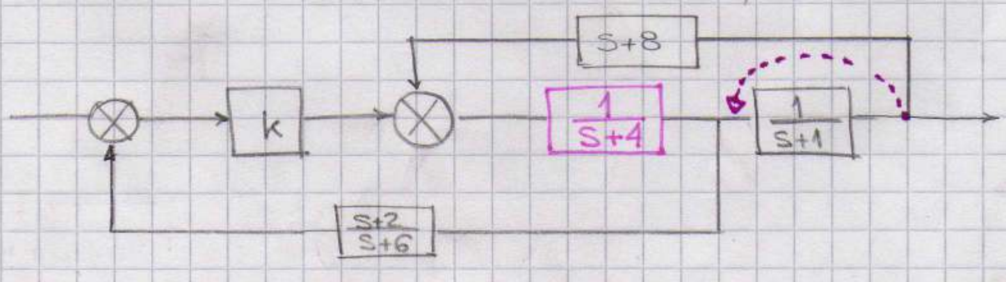
Ejercicio 2



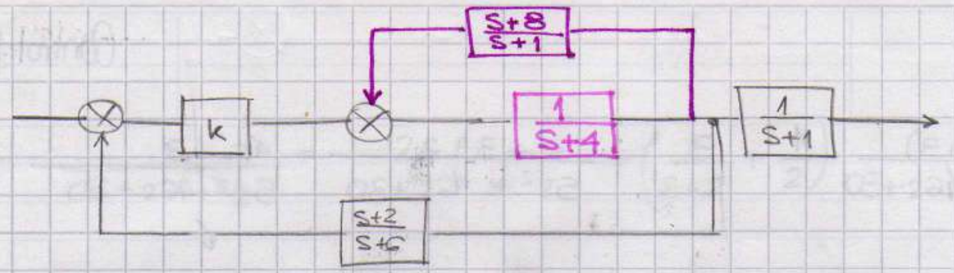
Redistribución de puntos de suma → los puntos de suma se pueden conmutar.



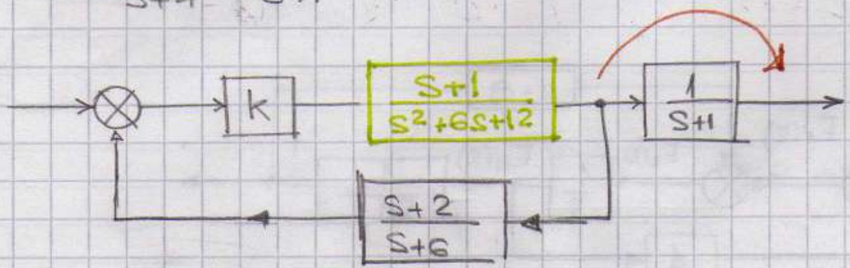
$$\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}\cdot 4} = \frac{1}{s+4}$$



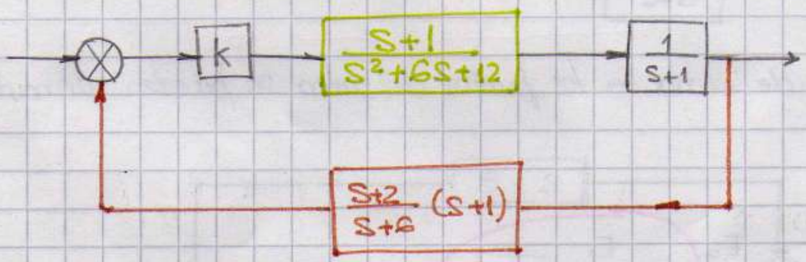
Ahora hacemos desplazamiento de un punto de toma de señal hacia delante de un bloque:



$$\frac{\frac{1}{S+4}}{1+\frac{1}{S+4}\cdot\frac{S+8}{S+1}} = \text{DESARROLLANDO} = \frac{S+1}{S^2+6S+12}$$

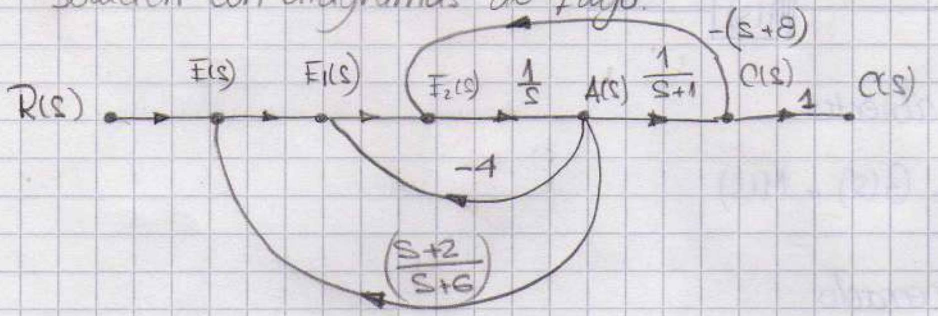


Ahora desplazamos un punto de toma de señal más allá de un bloque



Ahora tenemos un bloque simple, operamos algebraicamente hasta la respuesta.

Solución con diagramas de flujo. 09/04/2013



$$P_1 = k\frac{1}{s(s+1)}\ ;\quad L_1 = -k\frac{s+2}{s(s+6)}\ ;\quad L_2 = -\frac{4}{s}\ ;\quad L_3 = -\frac{s+8}{s(s+1)}$$

$$P = \frac{1}{\Delta}\sum_k P_k \Delta_k$$

$$\Delta = 1 - \sum_a L_a + \sum_{b,c} L_b L_c - \sum_{d,e,f} L_d L_e L_f + \dots$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3)$$

$$\Delta_1 = 1 - (0+0+0) = 1$$

$$\Delta = 1 + k\cdot\frac{s+2}{s(s+6)} + \frac{4}{s} + \frac{s+8}{s(s+1)} = \frac{s(s+1)(s+6) + k(s+2)(s+1) + 4(s+1)(s+6) + (s+8)(s+6)}{s(s+1)(s+6)}$$

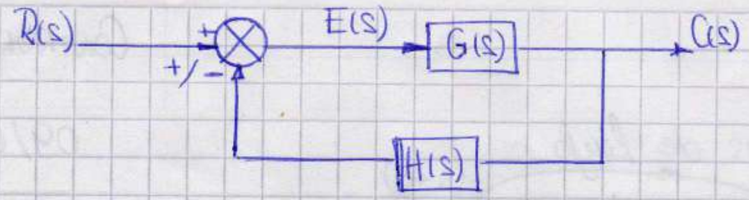
$$\frac{s^3 + 7s^2 + 6s + ks^2 + 3ks + 2k + 4s^2 + 28s + 24 + s^2 + 14s + 48}{s(s+1)(s+6)} =$$

$$= \frac{s^3 + (12+k)s^2 + (48+3k)s + 72 + 2k}{s(s+1)(s+6)}$$

$$\frac{C}{R} = \frac{\cancel{s}\cancel{(s+1)}(s+6)}{s^3 + (12+k)s^2 + (48+3k)s + 72 + 2k}\cdot\frac{k}{\cancel{s}\cancel{(s+1)}} =$$

$$\frac{C}{R} = \frac{k(s+6)}{s^3 + (12+k)s^2 + (48+3k)s + 72 + 2k}$$

Ejercicio 3



Sistema A — Lazo abierto

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G(s) = M(s)$$

Sistema B → Lazo cerrado

$$E(s) = R(s) \pm C(s)\,H(s) \quad ; \quad C(s) = G(s)\,H(s)$$

$$C(s) = R(s)\,G(s) \pm C(s)\,H(s)\,G(s)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G(s) \pm \frac{G(s)\,H(s)\,C(s)}{R(s)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)}\left[1 \mp G(s)H(s)\right] = G(s)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 \mp G(s)\,H(s)} = M(s)$$

Si la realimentación es positiva el signo del denominador es (−), y si la realimentación es negativa el signo es (+).

Definimos la sensibilidad de ambos sistemas valiéndonos de la variación del parámetro común a ~~ambas~~ ellas.

$$S_G^M = \frac{\partial M(s)/M(s)}{\partial G(s)/G(s)} = \frac{G(s)}{M(s)} \cdot \frac{\partial M(s)}{\partial G(s)}$$

Para el sistema A:

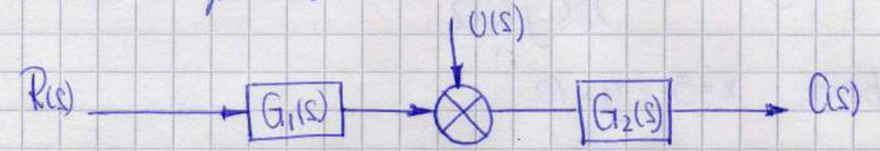
$$S_G^M = 1 \cdot 1 = 1$$

La función de transferencia varía completamente igual que G(s) porque es G(s).

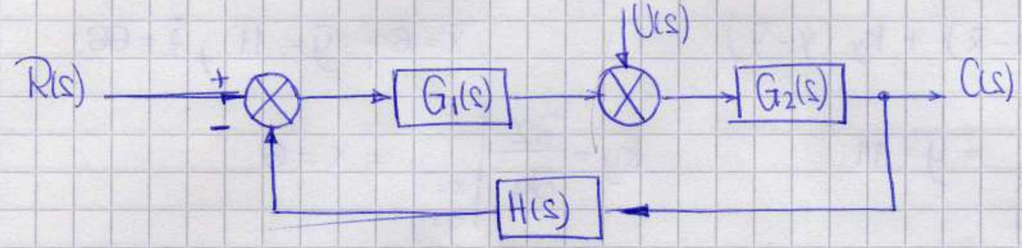
Para el sistema B

$$S_G^M = \left[\cancel{1 \mp G(s)H(s)}\right] \frac{1 \cancel{\mp G(s)H(s)} \cancel{\pm G(s)H(s)}}{\left(1 \mp G(s)H(s)\right)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{1 \mp G(s)\,H(s)}$$

Ejercicio 4: Determinar la salida en función de la entrada de referencia y de la señal de perturbación.



SISTEMA A



SISTEMA B.

Análisis del sistema A ⟶ Usamos superposición

* Para $U(s) = 0$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

* Para $R(s) = 0$

$$\frac{C(s)}{U(s)} = G_2(s)$$

Aplicando superposición

$$C(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot R(s) \pm G_2(s) U_s$$

Análisis del sistema B

* Para $U(s) = 0$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)\, G_2(s)}{1 + G_1(s) G_2(s) H(s)}$$

Porque es realimentación negativa.

* Para $R(s) = 0$

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s) G_1(s) H(s)}$$

Aplicando superposición.

$$C(s) = \frac{G_1(s) G_2(s)}{1 + G_1(s) G_2(s) H(s)} R(s) \pm \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s) G_1(s) H(s)} U(s)$$

El efecto de $G_2(S)$ sobre la perturbación $U(S)$ se ve minimizado cuando se aplica el lazo cerrado, amplificando menos la señal no deseada.

Ejercicio 5 : Linealización

$$z = xy \qquad 5 \leqslant x \leqslant 7 \qquad 10 \leqslant y \leqslant 12$$

error para $x=5$; $y=10$.

$$(z_{lin} - \bar{z}) = k_x(x-\bar{x}) + k_y(y-\bar{y}) \qquad \bar{x}=6 \; ; \; \bar{y}=11 \; ; \; \bar{z}=66$$

$$k_x = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}} = y = 11 \qquad k_y = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}} = x = 6$$

$$(z_{lin} - 66) = 11(x-6) + 6(y-11)$$

$$z_{lin} = 11x - 66 + 6y - 66 + 66 \Rightarrow \boxed{z_{lin} = 11x + 6y - 66}$$

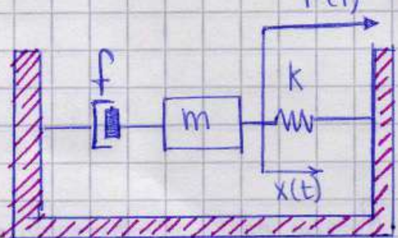
Evaluación del error.

$$z = xy = 5 \cdot 10 = 50$$

$$z_{lin} = 11 \cdot 5 + 6 \cdot 10 - 66 = 49$$

TRABAJO PRÁCTICO N° 21 Sistemas mecánicos de traslación
Modelización.

Ejercicio 1 :



f — constante del amortiguador viscoso

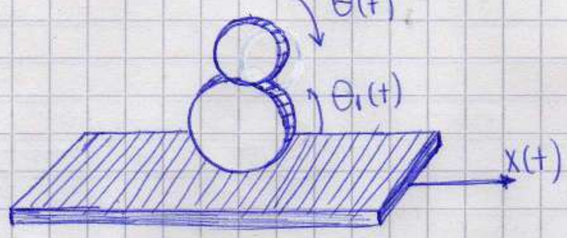
k — constante del resorte

$$\sum F(t) = m\ddot{x}(t)$$

$$F(t) - kx(t) - f\dot{x}(t) = m\ddot{x}(t)$$

$$\boxed{F(t) = m\ddot{x}(t) + f\dot{x}(t) + kx(t)}$$

Ejercicio 2



$C = 10 \frac{\text{dientes}}{\text{mm}}$

$N_1 = 40$ dientes

$N_2 = 10$ dientes.

$N_2 \theta(t) - N_1 \theta_1(t)$

$x(t) = \frac{N}{C}$

Paso $= P = \frac{1}{C} \rightarrow$ distancia entre dientes.

$N = \frac{N_1}{2\pi} \theta_1(t)$

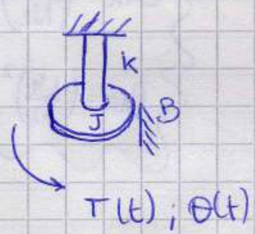
$C\, x(t) = \frac{N_1}{2\pi} \theta_1(t) = \frac{N_2}{2\pi} \theta(t)$

$x(t) = \frac{N_2}{2\pi C} \theta(t) = \frac{N_2 P_c}{2\pi} \theta(t)$

Si no estuviera el engranaje del medio sólo cambia la dirección del movimiento de la cremallera, pero la relación no.

16. Abril. 2013

Ejercicio 3

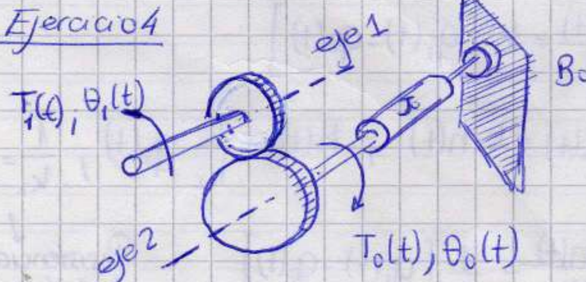


$\Sigma T(t) = J\ddot{\theta}(t)$

$T(t) - k\theta(t) - B\dot{\theta}(t) = J\ddot{\theta}(t)$

$T(t) = J\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t) + k\theta(t)$

Ejercicio 4



engranage 1 : n_1 dientes

engranage 2 : n_2 dientes.

Consideramos un sistema mecánico ideal donde toda la potencia se transfiere del eje 1 al eje 2.

$w = \int F\,dx$ — Hacemos una analogía con el sistema traslacional para encontrar la expresión de la potencia:

$dw = F\,dx$

$p(t) = \frac{dw}{dt} = F\frac{dx}{dt}$

$p(t) = F(t) \cdot \dot{x}(t)$

$p(t) = T(t) \cdot \dot{\theta}(t)$

par. — velocidad rotacional.

$T_1(t)\dot{\theta}_1(t) = T_0(t) \cdot \dot{\theta}_0(t)$

$N_1\theta_1(t) = N_2\theta_0(t)$

$N_1\dot{\theta}_1(t) = N_2\dot{\theta}_0(t)$

$N_1\ddot{\theta}_1(t) = N_2\ddot{\theta}_0(t)$

$T_1\cancel{\dot{\theta}_1(t)} = T_0(t)\frac{N_1}{N_2}\cancel{\dot{\theta}_1(t)}$

$T_1(t) = \frac{N_1}{N_2}T_0(t)$

$T_0(t) = J_0\ddot{\theta}_0(t) + B_0\dot{\theta}_0(t)$

$\frac{N_2}{N_1}T_1(t) = J_0\frac{N_1}{N_2}\ddot{\theta}_1(t) + B_0\frac{N_1}{N_2}\dot{\theta}_1(t)$

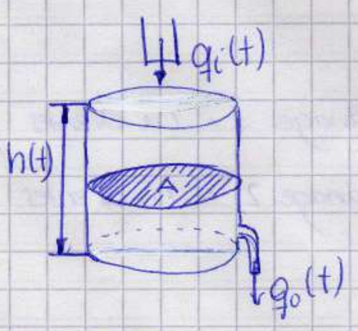
$T_1(t) = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_0\ddot{\theta}_1(t) + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 B_0\dot{\theta}_1(t)$

Reflejados.

$J_{1R} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_0$

$B_{1R} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 B_0$

Ejercicio 5



$A = 2m^2$

$\frac{dh(t)}{dt} = k_1\left[q_1(t) - q_0(t)\right]$

$q_0(t) = k_2h(t)$; $h(t) = \frac{1}{k_2}q_0(t)$; $\frac{1}{k_2} = R_H$

Resistencia hidráulica

$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{A}\left[q_1(t) - q_0(t)\right]$

$$q_o(t) = \frac{1}{R_H}\, h(t) \qquad (1)$$

$$A\,\frac{dh(t)}{dt} = q_i(t) - \frac{1}{R_H}\, h(t)$$

$$q_i(t) = A\,\frac{dh(t)}{dt} + \frac{1}{R_H}\, h(t) \qquad (2)$$

Cuando se cierra la entrada $q_i = 0$.

$$0 = A\,\frac{dh(t)}{dt} + \frac{1}{R_H}\, h(t)$$ Transformando con Laplace:

$$0 = A\left[sH(s) - h(0)\right] + \frac{1}{R_H}\, H(s)$$

$$0 = AsH(s) - Ah(0) + \frac{1}{R_H}\, H(s)$$

$$H(s) = \frac{A\,h(0)}{A\left(s + \frac{1}{AR_H}\right)} = \frac{h(0)}{s + \frac{1}{AR_H}}$$

$$h(t) = h(0)\, e^{-\frac{1}{A \cdot R_H} \cdot t}$$

$$2{,}96 = 4\, e^{-\frac{1}{2R_H} \cdot 30} \Rightarrow \frac{2{,}96}{4} = e^{-\frac{15}{2R_H}}$$

Aplicando logaritmo miembro a miembro:

$$\ln \frac{2{,}96}{4} = -\frac{15}{R_H} \Rightarrow R_H = -\frac{15}{\ln \frac{2{,}96}{4}} = 49{,}82 \left[\frac{seg}{m^2}\right]$$

Ahora calculamos función de transferencia → C.I. = 0.

a) $$Q_i(s) = A \cdot s\, H(s) + \frac{1}{R_H}\, H(s) \qquad \leftarrow \text{de } (2) \qquad (3)$$

$$H(s) = \frac{Q_i(s)}{A \cdot s + \frac{1}{R_H}}$$

$$Q_o(s) = \frac{1}{R_H}\, H(s) \Rightarrow H(s) = R_H \cdot Q_o(s) \qquad \leftarrow \text{de } (1) \qquad (4)$$

$$\frac{R_H\, Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{A\left(s + \frac{1}{AR_H}\right)} \Rightarrow \frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{A \cdot R_H} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{AR_H}} \quad [adim]$$

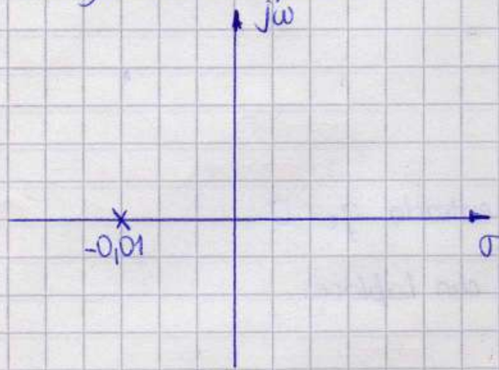
↳ saqué factor común A.

b) La constante de tiempo del sistema es:

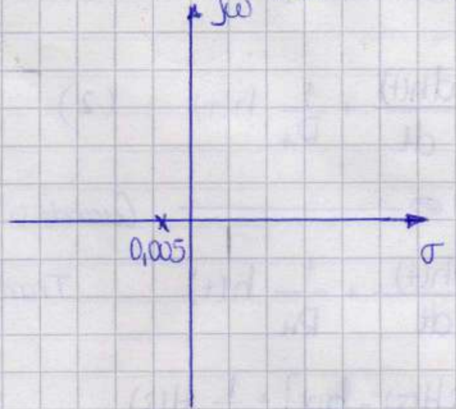
$$A \cdot R_H \ [seg]$$

$$\tau = 99{,}64 \ [seg]$$

c) Diagrama cero polar.



Sistema más lento



$$\frac{1}{\tau} = 0{,}01$$

d) Respuesta temporal → Agregar: para un caudal de entrada constante. $q_i(t) = cte.$

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{AR_H}}$$

$$q_i(t) = Q_i \, \mu(t) \ [m^3/seg]$$

$$Q_i(s) = \frac{Q_i}{s}$$

$$H(s) = \frac{Q_i}{A} \cdot \frac{1}{s\left[s + \frac{1}{AR_H}\right]} \Rightarrow H(s) = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s + \frac{1}{AR_H}}$$

$$A_0 = \lim_{s \to 0} \frac{Q_i}{A} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{AR_H}} = Q_i R_H$$

$$A_1 = \lim_{s \to -\frac{1}{R_H A}} = \frac{1}{s} \cdot \frac{Q_i}{A} = -Q_i R_H$$

$$H(s) = R_H Q_i \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{AR_H}} \right) \Rightarrow h(t) = R_H Q_i \left[1 - e^{-\frac{1}{AR_H} t} \right]$$

~~$h(t) = R_H Q_i$~~

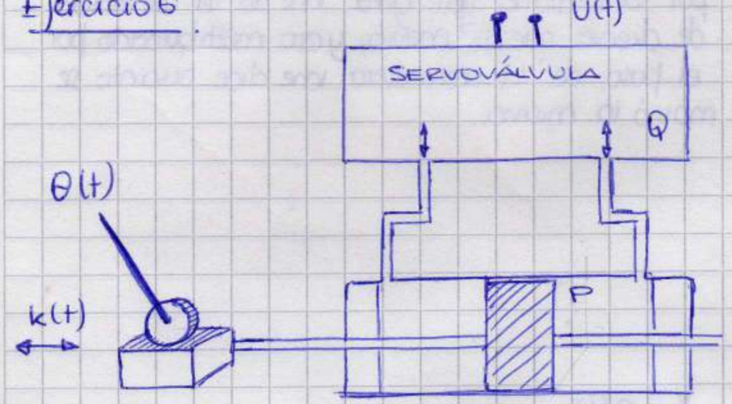
e) $Q_i = 50 \frac{litros}{seg}$

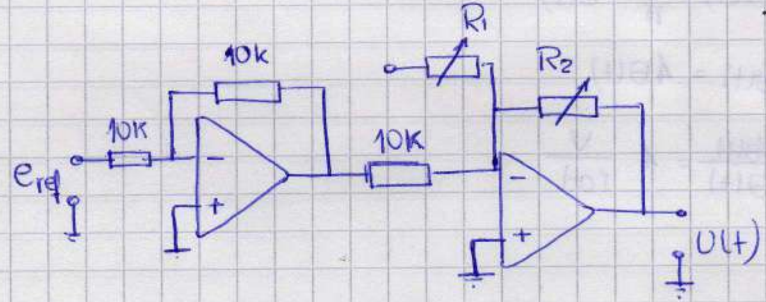
$$h(\infty) = R_H Q_i = 49{,}82 \frac{seg}{m^2} \cdot 50 \frac{lit}{seg} \cdot \frac{1 m^3}{1000 lit} = 2{,}49 m$$

TP 2.1 · SISTEMAS HIDRÁULICOS

30/04/2013

Ejercicio 6

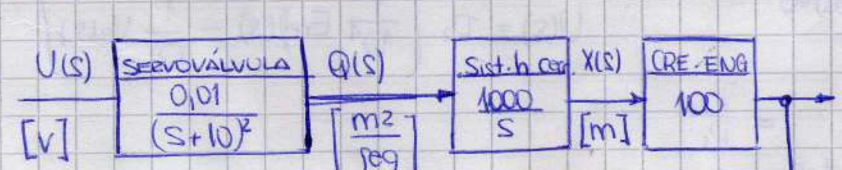




a) Servoválvula

$$\frac{Q(s)}{U(s)} = \frac{0{,}01}{(s+10)^2} \left[\frac{m^3}{V \cdot seg}\right]$$

continuado al final



b) Sistema hidráulico

$$q(t) = \frac{dV(t)}{dt} = A \frac{dx(t)}{dt}$$

$$dx(t) = \frac{1}{A} q(t)\, dt$$

$$x(t) = \frac{1}{A} \int q(t)\, dt$$

$$X(s) = \frac{1}{A} \cdot \frac{Q(s)}{s} \qquad A = \pi r^2 = \pi \frac{\phi^2}{4} = 10^{-3}\, m^2$$

$$\boxed{\frac{X(s)}{Q(s)} = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1000}{s} \left[\frac{seg}{m^2} \right]}$$

Sistema hidráulico cerrado.

c) Cremallera - engranaje.

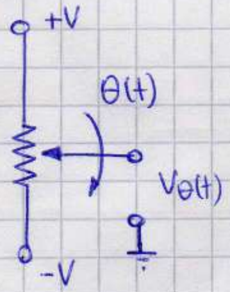
$$x(t) = \frac{N \cdot P}{2\pi} \theta(t)$$

$$x(t) = 0{,}01\, \theta(t)$$

$$\frac{\theta(s)}{X(s)} = 100 \left[\frac{rad}{m} \right]$$

Por cada radián que gira el engranaje, la cremallera se mueve $N/2\pi$ dientes. Eso multiplicado por los radianes que gira me da la cantidad de dientes que se movió, y eso multiplicado por el paso de la cremallera me dice cuanto se movió la misma.

d) Potenciómetro.



$$V_\theta(t) = \frac{V}{\pi} \theta(t)$$

$$V_\theta(t) = 4\theta(t)$$

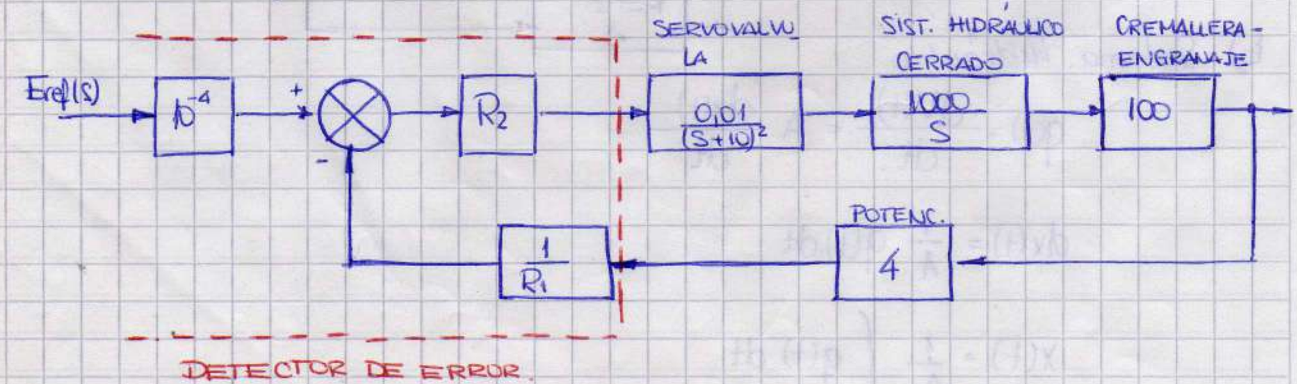
$$\frac{V_\theta(t)}{\theta(t)} = 4 \frac{V}{rad}$$

e) Detector de error.

$$\left. \frac{U(s)}{E_{ref}(s)} \right|_{V_\theta(s)=0} = \frac{R_2}{10^4}$$

$$U(s) = R_2 \left(\frac{1}{10^4} E_{ref}(s) - \frac{1}{R_1} V_\theta(s) \right)$$

$$\left. \frac{U(s)}{V_\theta(s)} \right|_{E_{ref}=0} = \frac{R_2}{R_1}$$



$$\frac{\Theta(s)}{Eref(s)} = \frac{\overbrace{\frac{0{,}1 R_2}{s(s+10)^2}}^{G(s)}}{1 + \frac{0{,}1 R_2}{s(s+10)^2} \cdot \frac{4 \cdot 10^4}{R_1}}$$ Realimentación

$$\frac{\Theta(s)}{Eref(s)} = \frac{0{,}1 R_2}{s^3 + 20 s^2 + 100 s + 4 \cdot 10^3 \frac{R_2}{R_1}} \left[\frac{Rad}{V}\right]$$

Ejercicio 7: Sistema hidráulico abierto - régimen turbulento

Para un sistema turbulento linealizado podemos usar el mismo modelo que el lineal con la salvedad que la resistencia se calcula como el doble.

En estado estacionario

$$\bar{Q} = q_i(t) = q_o(t)$$

En estado turbulento

$$\bar{Q} = K \cdot \sqrt{\bar{H}}$$

Cuando se incrementa el caudal de entrada:

$$Q_i(t) = \bar{Q} + q_i(t)$$

$$H(t) = \bar{H} + h(t)$$

$$Q_o(t) = \bar{Q} + q_o(t)$$

$$Q_i(t) - Q_o(t) = A \frac{dH(t)}{dt}$$

$$\frac{dH(t)}{d(t)} = \frac{1}{A} Q_i(t) - \frac{K}{A}\sqrt{H(t)}$$ ← función diferencial no lineal.

linealizamos:

$$z = f(x,y)$$

$$z - \bar{z} = \left.\frac{dz}{dx}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}} (x-\bar{x}) + \left.\frac{dz}{dy}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}} (y-\bar{y})$$

$$\frac{dH(t)}{dt} - \overbrace{\left.\frac{dH(t)}{dt}\right|_{\substack{Q_i(t)=\bar{Q}\\ H(t)=\bar{H}}}}^{=0} = \frac{dH(t)}{dt}$$

b)

$$\frac{dH(t)}{dt} = f\left[Q_i(t); H(t)\right]$$

$$\frac{df[Q_i(t), H(t)]}{dH(t)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{k}{A} \cdot \frac{1}{\sqrt{H(t)}}$$

$$\left.\frac{df\,[Q_i(t), H(t)]}{dH(t)}\right|_{\substack{Q_i(t)=\bar{Q} \\ H(t)=\bar{H}}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{\bar{Q}}{\sqrt{\bar{H}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\bar{H}}} = -\frac{1}{2} \frac{\bar{Q}}{A\,\bar{H}}$$

$R_{HT} = \frac{2\bar{H}}{\bar{Q}}$ Resistencia hidráulica en régimen turbulento

$$\frac{df[Q_i(t); H(t)]}{dH(t)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{\bar{Q}}{\bar{H}} = -\frac{1}{A\,R_{TH}}.$$

Vemos ahora la otra derivada

$$\left.\frac{\partial f\,[Q_i(t), H(t)]}{\partial Q_i(t)}\right|_{\substack{Q_i(t)=\bar{Q} \\ H(t)=\bar{H}}} = \frac{1}{A}$$

Escribimos toda la linealización

$$\frac{dH(t)}{dt} = \frac{1}{A}\underbrace{\left[Q_i(t)-\bar{Q}\right]}_{q_i(t)} - \frac{1}{A R_{HT}}\underbrace{\left[H(t)-\bar{H}\right]}_{h(t)}$$

(Fórmula de Taylor valuada)

$q_i(t)$: Pequeño incremento a la entrada

$h(t)$: Pequeño incremento de altura.

$H(t) = \bar{H} + h(t)$

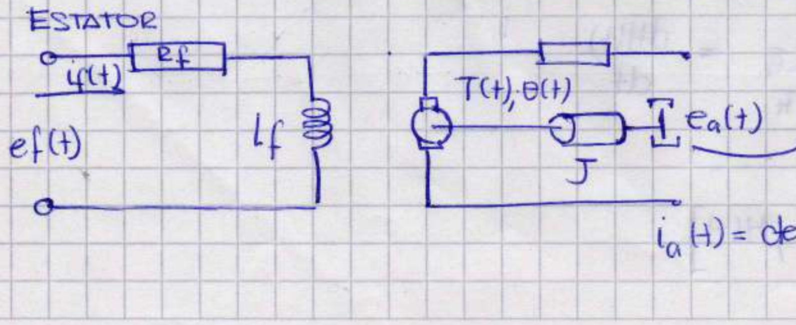
$$\frac{d[\bar{H}+h(t)]}{dt} = \cancel{\frac{d\bar{H}}{dt}}^{\,=0} + \frac{dh(t)}{dt} = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{A}\, q_i(t) - \frac{1}{A R_{TH}}.h(t)$$

$$q_i(t) = \left[\frac{dh(t)}{dt} + \frac{1}{A R_{Th}}.h(t)\right].A$$

Ecuación diferencial para un sist. hidráulico abierto en régimen turbulento.

Uno puede usar un modelo lineal sólo calculando la resistencia turbulenta como el doble de la resistencia laminar.

TP2-2 Motor de C.C. controlado por campo y por armaduras



tensión que le aplico al motor

$i_a(t) =$ de·

$-\ T(t) = k\,\Phi(t)\,.\,i_a(t)$

$\Phi(t) = k'\,i_f(t)$ *flujo de campo en el estator.*

$-\ i_a(t) = k''$

$\therefore$

$T(t) = k k'\,i_f(t)\,k''$ $\qquad k_T = k.k'.k''$

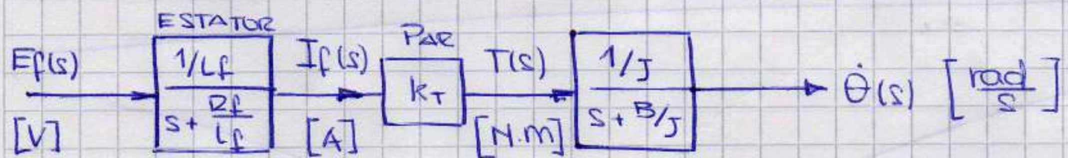
$$T(t) = k_T\,.\,i_f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{T(s)}{I_f(s)} = k_T \left[\frac{N.m}{A}\right]$$

$$e_f(t) = R_f\,.\,i_f(t) + L_f\,\frac{di_f(t)}{dt}$$

$$\mathcal{L}\left[e_f(t)\right] = E_f(s) = R_f\,.\,i_f(s) + L_f\,.\,i_f(s)\,.\,s$$

$$\frac{I_f(s)}{E_f(s)} = \frac{1/L_f}{s + \frac{R_f}{L_f}} \left[\Omega^{-1}\right]$$

Diagrama en bloques



$T(t) = J\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t)$	$T(s) = (Js + B)\,\overbrace{s\,\theta(s)}^{\text{transformada de la velocidad angular.}}$
$T(s) = Js^2\,\theta(s) + Bs\,\theta(s)$	$T(s) = (Js + B)\,\dot{\theta}(s)$
$T(s) = \theta(s)\left[Js^2 + Bs\right]$	$\dfrac{\dot{\theta}(s)}{T(s)} = \dfrac{1}{Js + B}\left[\dfrac{rad}{N.m.seg}\right]$

Función de transferencia

$$\frac{\dot{\theta}(s)}{E_f(s)} = \frac{1/L_f}{s + R_f/L_f}\,.\,k_T\,.\,\frac{1/J}{s + B/J} = \frac{k_T}{J L_f}\,.\,\frac{1}{s^2 + \left(\frac{R_f}{L_f} + \frac{B}{J}\right)s + \frac{B R_f}{J L_f}}\left[\frac{rad}{V.seg}\right]$$

continuación del anterior... 07/05/2012

$$\frac{\dot{\theta}(s)}{E_f(s)} = \frac{k_i}{JL_f} \cdot \frac{1}{s^2 + \left(\frac{R_f}{L_f} + \frac{B}{J}\right)s + \frac{BR_f}{JL_f}} \left[\frac{rad}{V.seg}\right]$$

$$e_f(t) = E\,\mu(t) \qquad \dot{\theta}(\infty) = 1200\ RPM$$

Aplicamos el teorema del valor final

$$E_f(s) = \frac{E_f}{s}$$

$$\dot{\theta}(s) = \frac{k_i E_f}{JL_f} \cdot \frac{1}{s\left[s^2 + \left(\frac{R_f}{L_f} + \frac{B}{J}\right)s + \frac{BR_f}{JL_f}\right]}$$

$$\dot{\theta}(\infty) = \lim_{s \to 0} s\dot{\theta}(s) = \frac{k_i E_f}{JL_f} \cdot \frac{1}{\frac{BR_f}{JL_f}} = \frac{k_i E_f}{BR_f} \;;\; k_i = \frac{BR_f\,\dot{\theta}(\infty)}{E_f}$$

$$k_i = 0{,}667\ \frac{N.m.\cancel{seg}}{\cancel{rad}} \cdot 120\,\Omega \cdot \cancel{1200}^{\,2}\ \frac{\cancel{rev}}{\cancel{min}} \cdot \frac{2\pi\ \cancel{rad}}{1\ \cancel{rev}} \cdot \frac{1\ \cancel{min}}{\cancel{60}\ \cancel{seg}} \cdot \frac{1}{11\cancel{0}\,V} =$$

$$= 91{,}42\ \frac{Nm}{A}$$

$$\frac{k_i}{JL_f} = \frac{91{,}42}{0{,}667 \cdot 20} = 1{,}35$$

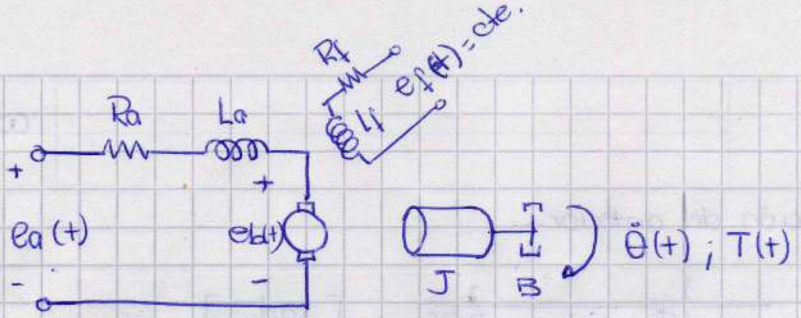
$$\frac{R_f}{L_f} + \frac{B}{J} = \frac{120}{20} + \frac{0{,}667}{1{,}35} = 6{,}49$$

$$\frac{BR_f}{JL_f} = \frac{0{,}667 \cdot 12}{1{,}35 \cdot 20} = 2{,}96$$

$$\frac{\dot{\theta}(s)}{E_f(s)} = 6{,}85 \cdot \frac{1}{s^2 + 6{,}49s + 2{,}96} \left(\frac{rad}{V \cdot seg}\right)$$

TP2.2 Motor C.C. controlado por armadura (inducido)

del otro lado →



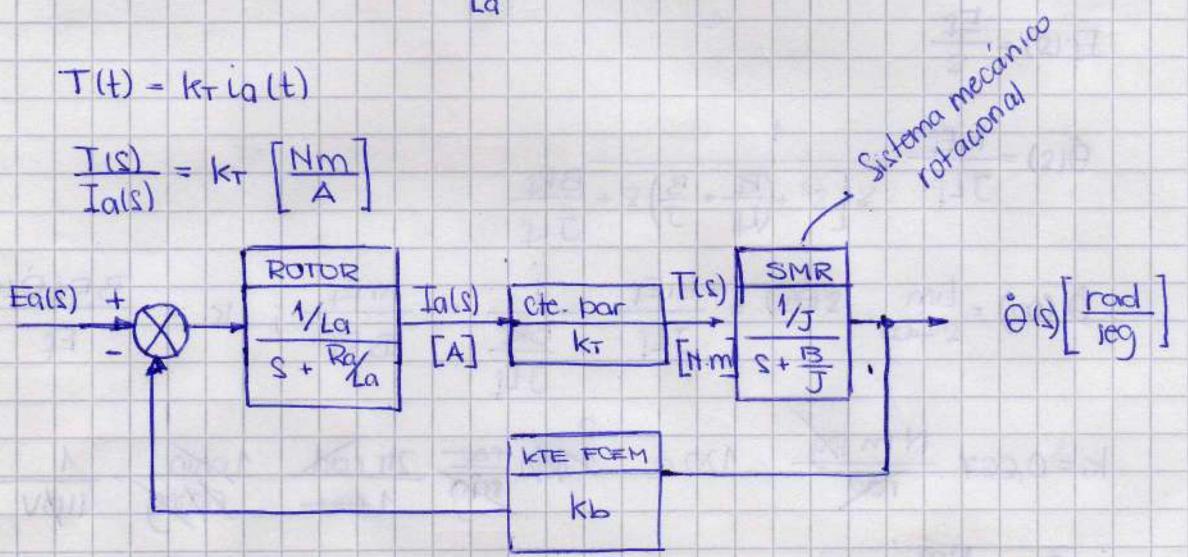
$$e_a(t) - e_b(t) = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt}$$

$$E_a(s) - E_b(s) = (R_a + sL_a)\, I_a(s)$$

$$\frac{I_a(s)}{E_a(s) - E_b(s)} = \frac{1/L_a}{s + \frac{R_a}{L_a}} \quad [\Omega^{-1}]$$

$$T(t) = k_T\, i_a(t)$$

$$\frac{T(s)}{I_a(s)} = k_T \left[\frac{Nm}{A}\right]$$



$$T(t) = J\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t)$$

$$e_b(t) = k_b \dot{\theta}(t)$$

$$\frac{E_b(s)}{\dot{\theta}(s)} = k_b \left[\frac{V \cdot seg}{rad}\right]$$

$$\frac{\dot{\theta}(s)}{E_a(s)} = \frac{\frac{k_T}{JL_a} \cdot \frac{1}{(s + R_a/L_a)(s + B/J)}}{1 + \frac{k_T k_b}{JL_a} \cdot \frac{1}{(s + R_a/L_a)(s + B/J)}} = \frac{k_T}{JL_a} \cdot \frac{1}{s^2 + \left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{B}{J}\right)s + \frac{BR_a + k_T k_b}{JL_a}} \left[\frac{rad}{V \cdot seg}\right]$$

De la hoja de datos ⟶ (buscarla, está el nombre del motor en la guía) TT4023

$k_T = 0{,}89 \frac{Nm}{A}$ $\qquad J_M = J = 0{,}016\ kg\,m^2$ $\qquad L_a = L_M = 4\ mHy$

$R_a = R_M = 0{,}57\ \Omega$ $\qquad B = 0{,}15 \frac{N.m}{krpm} \cdot \frac{1\,kRPM}{10^3 \frac{rev}{min}} \cdot \frac{1\,rev}{2\pi\,rad} \cdot \frac{60\,seg}{1\,min} = 1{,}43 \cdot 10^{-3} \left[\frac{N\,m\,seg}{rad}\right]$

$k_b = 93.7 \frac{V}{kRPM} = 0{,}89 \frac{V \cdot seg}{rad}$

(21. Junio → Parcial de medidas) 18 de Junio → Parcial!
(hasta lo que de el 4 de Junio).

CONTROL P (15)

$$e_a(t) = E_a\,\mu(t) \quad [V]$$

$$E_a(s) = \frac{E_a}{s}$$

$$\dot{\Theta}(s) = \frac{k_T E_a}{J L_a}\,\frac{1}{s\left[s^2 + \left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{B}{J}\right)s + \frac{BR_a + k_T k_B}{J L_a}\right]}$$

$$\dot{\Theta}(\infty) = \lim_{s\to\infty} s\dot{\Theta}(s) = \frac{k_T E_a}{J L_a}\cdot\frac{1}{\frac{BR_a + k_T k_B}{J L_a}} = \frac{k_T E_a}{BR_a + k_T k_B} = 168{,}98\ \frac{rad}{seg}$$

$$\dot{\Theta}(\infty) = 168{,}98\ \frac{rad}{seg}\cdot\frac{1\,rev}{2\pi\,rad}\cdot\frac{60\,seg}{1\,min} = \boxed{1614\ RPM}$$

b) $$\frac{I_a(s)}{E_a(s)} = \frac{\frac{1}{L_a}\cdot\frac{1}{s + R_a/L_a}}{1 + \frac{k_T k_B}{J L_a}\,\frac{1}{(s + R_a/L_a)(s + B/J)}} = \frac{1}{L_a}\,\frac{(s + B/J)}{s^2 + \left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{B}{J}\right)s + \frac{BR_a + k_T k_B}{J L_a}}\ [\Omega^{-1}]$$

$$I_a(s) = \frac{E_a(s)}{L_a}\cdot\frac{(s + B/J)}{s\left[s^2 + \left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{B}{J}\right)s + \frac{R_aB + k_T k_b}{J L_a}\right]}\ ;\quad i_a(\infty) = \lim_{s\to\infty} s\,I_a(s) =$$

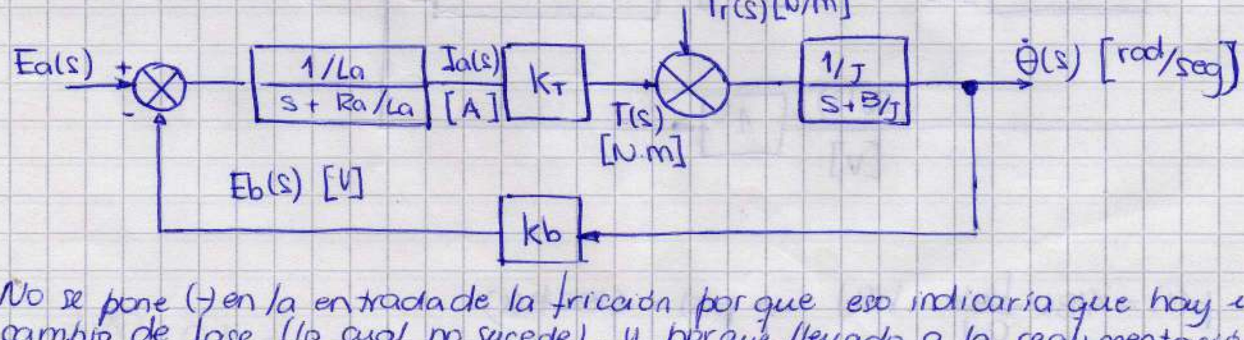
$$= \frac{E_a}{\cancel{L_a}}\cdot\frac{B/J}{\frac{R_aB + k_T k_b}{J L_a}}$$

$$i_a(\infty) = \frac{BE_a}{R_aB + k_T k_B} = 0{,}27\,A \qquad p(\infty) = i_a(\infty)\cdot E_a = 0{,}27\,A\cdot 150\,V = 40{,}67\,W$$

Cuando el motor está sin carga consume esta energía por pérdidas mecánicas y eléctricas. (pérdidas por Joule en la bobina y por la fricción cuando gira).

14. Mayo. 2013

Considerando la fricción estática el diagrama queda:



No se pone (-) en la entrada de la fricción porque eso indicaría que hay un cambio de fase (lo cual no sucede), y porque llevado a la realimentación daría positiva, que tampoco es correcto.

18 de Junio — Parcial 1 (24 junio - Parcial de módulo)
(Hasta lo que dé el 4 de junio)

Se lo inserta como positivo y después el efecto sí se considera como negativo, ya que conocemos su naturaleza.

$$\left.\frac{\dot{\theta}(s)}{Ea(s)}\right|_{Tr(s)=0} = \frac{k_T}{J\,La}\,\frac{1}{s^2+\left(\frac{Ra}{La}+\frac{B}{J}\right)s+\frac{BRa+k_bk_T}{J\,La}}$$

$$\left.\frac{\dot{\theta}(s)}{Tr(s)}\right|_{Ea(s)} = \frac{\frac{1/J}{s+B/J}}{1+\frac{k_Tk_b}{J\,La}\cdot\frac{1}{(s+B/J)(s+Ra/La)}} = \frac{1}{J}\,\frac{s+Ra/La}{s^2+\left(\frac{Ra}{La}+\frac{B}{J}\right)s+\frac{BRa+k_bk_T}{J\,La}} =$$

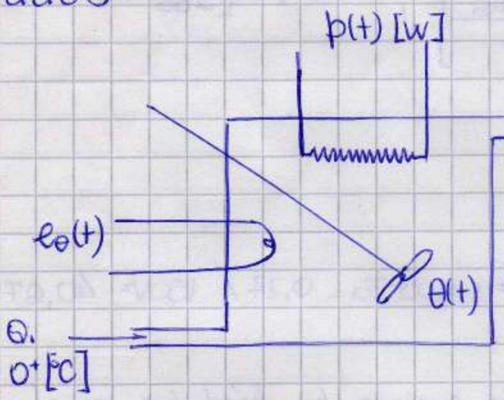
$$\dot{\theta}(s) = \frac{k_T}{J\,La}\cdot\frac{Ea/s}{s^2\left(\frac{Ra}{La}+\frac{B}{J}\right)s+\frac{BRa+k_bk_T}{J\,La}} - \frac{1}{J}\,\frac{s+Ra/La}{s^2+\left(\frac{Ra}{La}+\frac{B}{J}\right)s+\frac{BRa+k_bk_T}{J\,La}}\cdot\frac{T_F}{s}$$

$$\dot{\theta}(s) = 168{,}98\,\frac{rad}{s} - 1{,}08\,\frac{rad}{s} = 167{,}9\,\frac{rad}{s} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{Para } ea(t) = 150\,\mu(t)\\ T_F = 0{,}65\,\mu(t)\end{array}\right)$$

0,64%.

TP2-2 MOTOR DE CC. CONTROLADO POR CAMPO. SISTEMA TÉRMICO.

Ejercicio 3



V = 100 l

$Q = 1\,\frac{dm^3}{seg}$

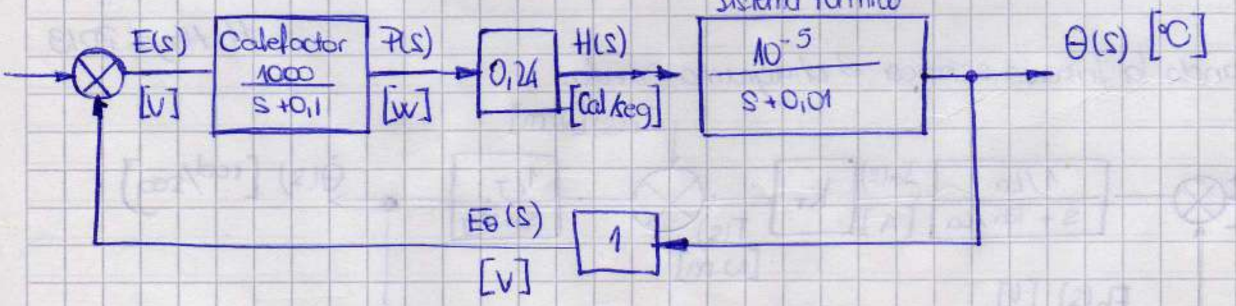
- Calefactor

$$\frac{P(s)}{E(s)} = \frac{1000}{s+0{,}1}\left[\frac{W}{V}\right]$$

- 1 Cal = 4.186 Joules

$$W(t) = \frac{4{,}186\text{ Joules}}{1\text{ Cal}}\cdot Q(t)$$

$$\frac{dW(t)}{dt} = p(t) = 4{,}186\,\frac{\text{Joule}}{\text{Cal}}\cdot\frac{dQ(t)}{dt}$$ ◎



◎ $p(t) = 4{,}186\,\frac{\text{Joule}}{\text{Cal}}\cdot h(t) \Rightarrow p(s) = 4{,}186\,H(s)$

$$\frac{H(s)}{P(s)} = 0{,}24\left[\frac{\text{Cal}}{\text{Joule}}\right]$$

COPIAR LO QUE FALTA.

- Sistema térmico: hacemos un sistema análogo: la diferencia de temperatura es la diferencia de potencial, entonces como todos los elementos tienen la misma diferencia de temp., es un circuito paralelo.

Nota — extraído de "Modern control Engineering" (ogata).

$$h(t) = \frac{\theta(t)}{R_T} + C_T \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$H(s) = \left(\frac{1}{R_T} + sC_T\right)\theta(s)$$

$$\frac{\theta(s)}{H(s)} = \frac{1/C_T}{s + \frac{1}{R_T C_T}}$$

$$R_T = \frac{1}{\rho . Ce . Q} = \frac{1}{1\frac{kg}{dm^3} \cdot 1\frac{cal}{g°C} \cdot 1\frac{dm^3}{seg} \cdot \frac{1000g}{1kg}} = 10^{-3}\left[\frac{°C . seg}{cal}\right]$$

$$C_T = mCe = \rho V Ce = 1\frac{kg}{dm^3} \cdot 100dm^3 \cdot 1\frac{cal}{g°C} \cdot \frac{1000g}{1kg} = 10^5 \frac{cal}{°C}$$

$$\frac{\theta(s)}{Eref(s)} = \frac{\frac{2{,}4\times10^{-3}}{(s+0{,}1)(s+0{,}01)}}{1 + \frac{2{,}4\times10^{-3}}{(s+0{,}01)(s+0{,}1)}} = \frac{2{,}4\times10^{-3}}{(s+0{,}01)(s+0{,}1) + 2{,}4\times10^{-3}} =$$

$$= \frac{2{,}4\times10^{-3}}{s^2 + 0{,}11s + 3{,}4\times10^{-3}}\left[\frac{°C}{V}\right]$$

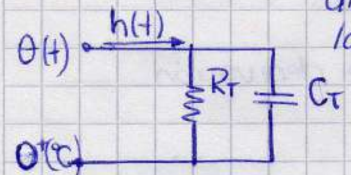
$$Eref(t) = 10 . \mu(t) [V]$$

$$Eref(s) = \frac{10}{s}$$

$$\theta(\infty) = \lim_{s\to0} s\theta(s) = \frac{10 . 2{,}4\times10^{3}}{3{,}4\times10^{3}} = 7{,}06°C$$

(Temperatura a la cual se estabiliza el agua adentro del tanque).

- Sistema térmico: hacemos un sistema análogo: la diferencia de temperatura es la diferencia de potencial, entonces como todos los elementos tienen la misma diferencia de temp., es un circuito paralelo.



$$h(t) = \frac{\theta(t)}{R_T} + C_T \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$H(s) = \left(\frac{1}{R_T} + sC_T\right) \Theta(s)$$

$$\frac{\Theta(s)}{H(s)} = \frac{1/C_T}{s + \frac{1}{R_T C_T}}$$

$q = k \Delta\theta$

donde q: velocidad de flujo del calor [kcal/seg]

$\Delta\theta$: diferencia de temperatura [°C]

k: coeficiente $\left[\frac{kcal}{s.°C}\right]$

Resistencia térmica

$$R_T = \frac{\text{cambio en la diferencia de temperatura}}{\text{cambio en la velocidad de flujo del calor}}$$

$$R_T = \frac{d(\Delta\theta)}{dq} = \frac{1}{k}$$

Capacidad térmica

$$C_T = \frac{\text{cambio en el calor almacenado}}{\text{cambio en la temperatura.}}$$

$C = mc$ (masa · calor específico).

$$R_T = \frac{1}{\rho . Ce . Q} = \frac{}{1 \frac{kg}{dm^3} \ldots}$$

$$C_T = mCe = \rho V Ce = 1 \frac{kg}{dm^3} \ldots$$

$$\frac{\Theta(s)}{Eref(s)} = \frac{\frac{2,4 \times 10^{-3}}{(s+0,1)(s+0,01)}}{1 + \frac{2,4 \times 10^{-3}}{(s+0,01)(s+0,1)}} = \frac{2,4 \times 10^{-3}}{(s+0,01)(s+0,1) + 2,4 \times 10^{-3}} =$$

$$= \frac{2,4 \times 10^{-3}}{s^2 + 0,11s + 3,4 \times 10^{-3}} \left[\frac{°C}{V}\right]$$

$$Eref(t) = 10 . \mu(t) \, [V]$$

$$Eref(s) = \frac{10}{s}$$

$$\theta(\infty) = \lim_{s \to 0} s\Theta(s) = \frac{10 . \; 2,4 \times 10^{3}}{3,4 \times 10^{3}} = 7,06 °C$$

(Temperatura a la cual se estabiliza el agua adentro del tanque).

TP3 - Simulación Analógica 21.05.2013

Ejercicio 1

$F(t) = m\ddot{x}(t) + f\dot{x}(t) + kx(t)$

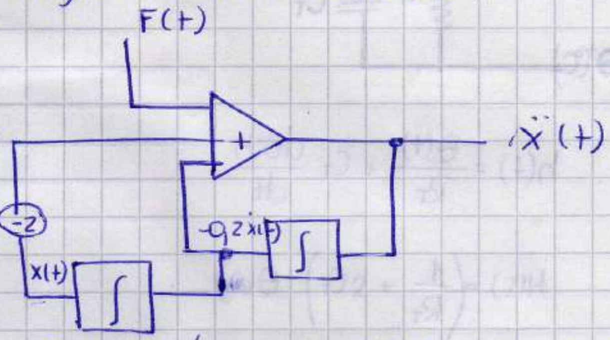
Se despeja la variable de salida en su mayor orden de derivación.

$m\ddot{x}(t) = F(t) - f\dot{x}(t) - kx(t)$

$\ddot{x}(t) = \frac{1}{m}F(t) - \frac{f}{m}\dot{x}(t) - \frac{k}{m}x(t)$

$m = 1$, $f = 0{,}2$; $k = 2$

$\ddot{x}(t) = F(t) - 0{,}2\dot{x}(t) - 2x(t)$



Entrada fuerza y salida velocidad.

P/armar.

Blocks — Aritmetic — Sum functions.

Función de transferencia

$F(s) = (ms^2 + fs + k)X(s)$

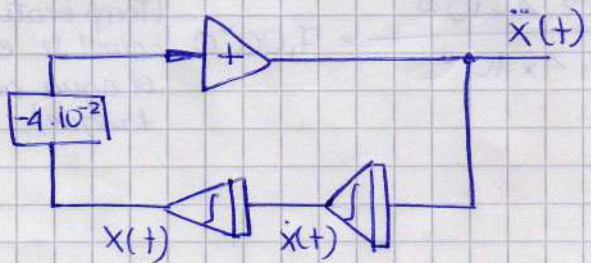
$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{f}{m}s + \frac{k}{m}} = \frac{1}{s^2 + 0{,}2s + 2} = \frac{X(s)}{F(s)}$$

Ejercicio 2

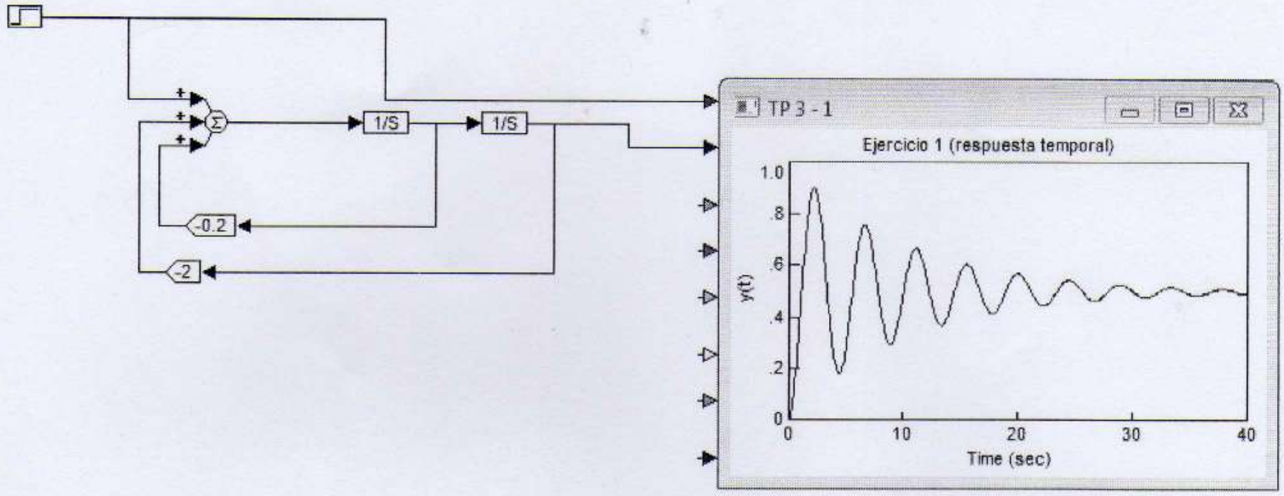
$-8.10^{-5}\,x(t) = 2.10^{-3}\ddot{x}(t)$

$\ddot{x}(t) = \frac{-8.10^{-5}}{2.10^{-3}}\,x(t) = -4.10^{-2}\,x(t)$

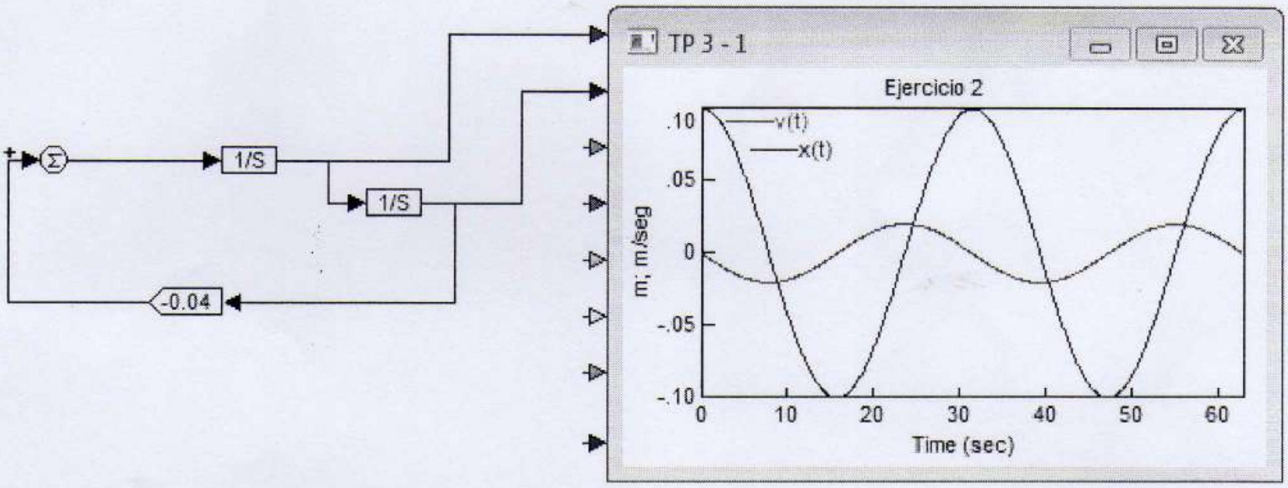
$\ddot{x}(t) = -4.10^{-2}x(t)$



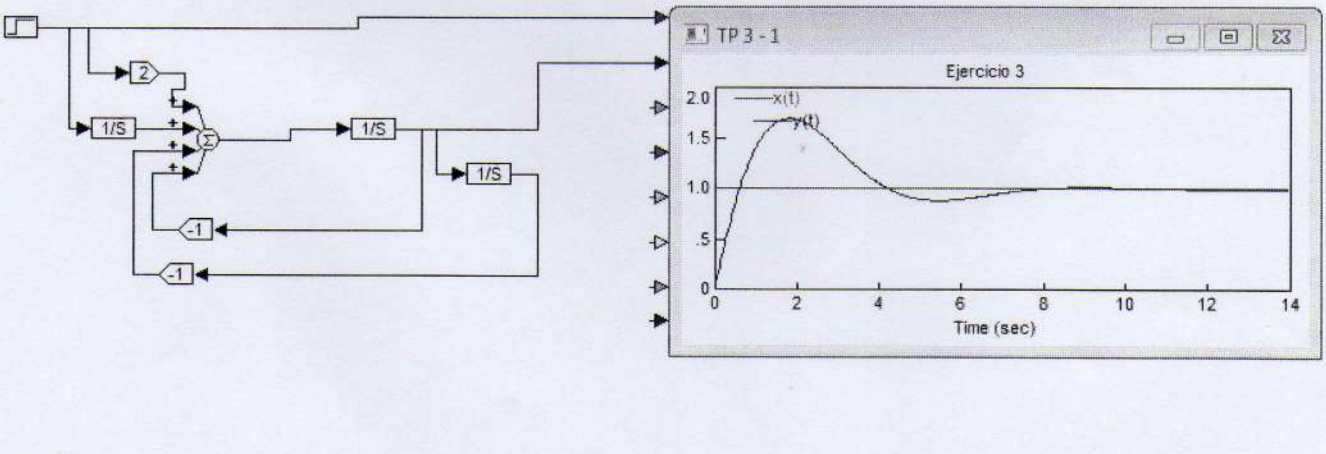
Ejercicio 1



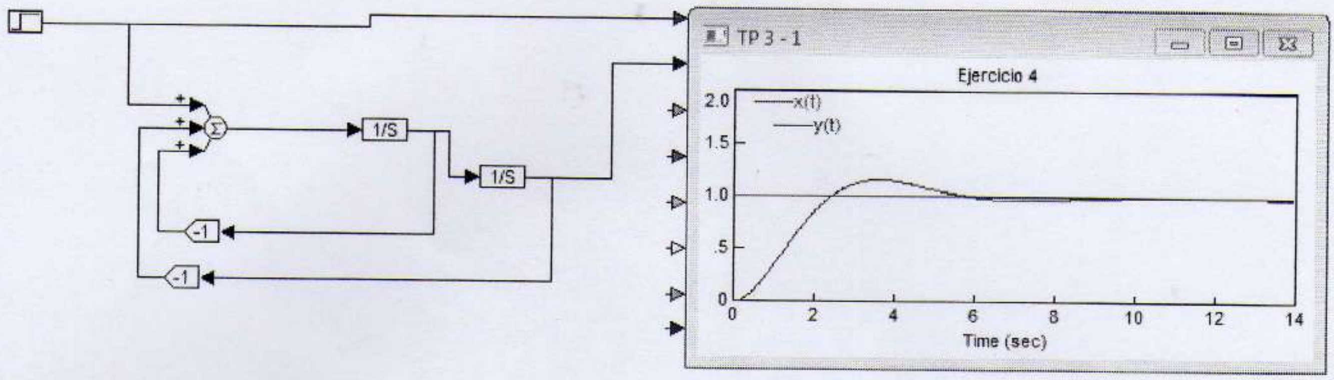
Ejercicio 2



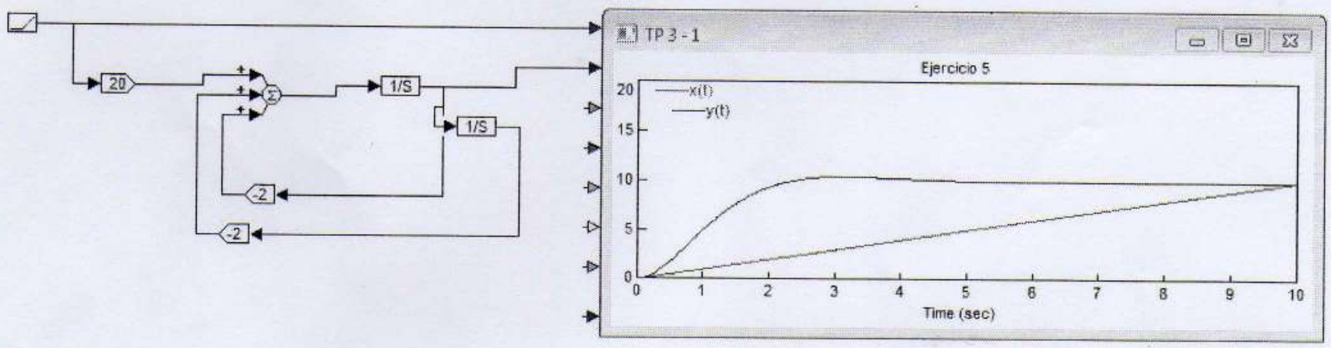
Ejercicio 3



Ejercicio 4



Ejercicio 5



Ejercicio 3

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s^2+1}{s^2+s+1}$$

$$Y(s)\cdot s^2 + Y(s)\cdot s + Y(s) = X(s)\cdot s^2 + X(s)$$

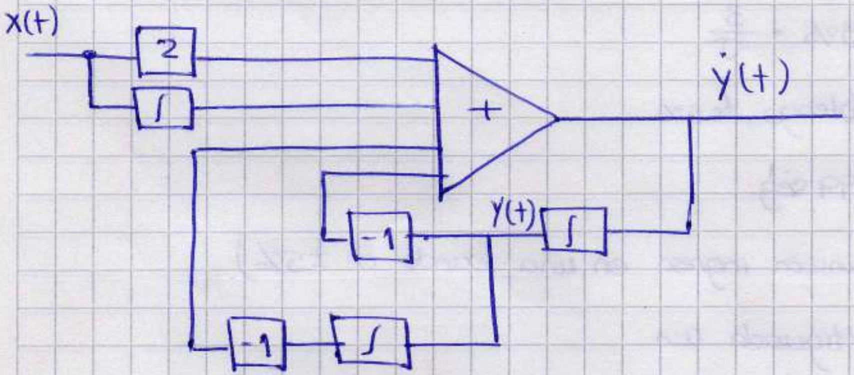
$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = 2\dot{x}(t) + x(t)$$

$$\ddot{y}(t) = 2\dot{x}(t) + x(t)$$

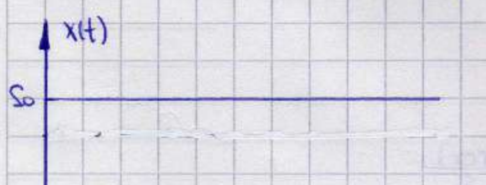
$$\ddot{y}(t) = 2\dot{x}(t) + x(t) - \dot{y}(t) - y(t)$$

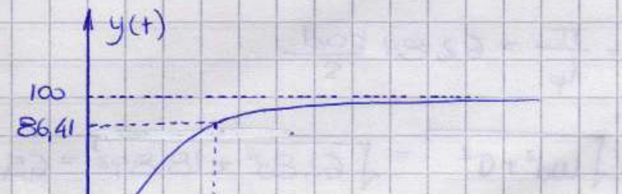
Integrando miembro a miembro

$$\dot{y}(t) = 2x(t) + \int x(t)\,dt - y(t) - \int y(t)\,dt.$$



TP4-1 — Análisis de respuesta transitoria 28.05.2013





$x(t) = 50\mu(t)$

$y(t) = 100\,(1-e^{-t/\tau})$

$y(t) = 100\,(1-e^{-2t})$

$\mathcal{L}[x(t)] = \frac{50}{s} = X(s)$

$\mathcal{L}[y(t)] = 100\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right) = Y(s)$

$86{,}41 = 100\,(1-e^{-\frac{1}{\tau}})$

$86{,}41/100 = 1-e^{-1/\tau}$

$e^{-1/\tau} = 1 - 86{,}41/100$

$-1/\tau = \ln\,(1-86{,}41/100)$

$\tau = -\dfrac{1}{\ln\left(1-\frac{86{,}41}{100}\right)} = 0{,}5$

·VER

$Y(s) = 100\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right)$

$Y(s) = 100\left[\frac{s+2-s}{s(s+2)}\right]$

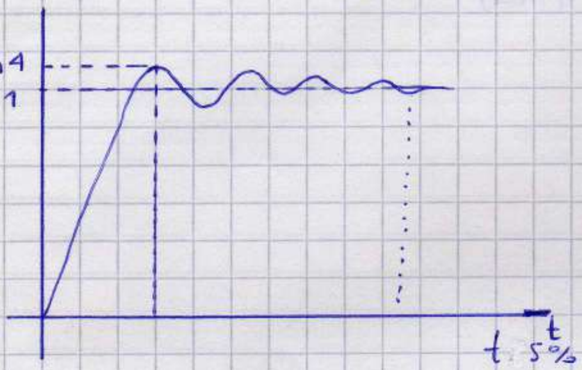
$Y(s) = \frac{200}{s(s+2)}$

$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{4}{(s+2)}$

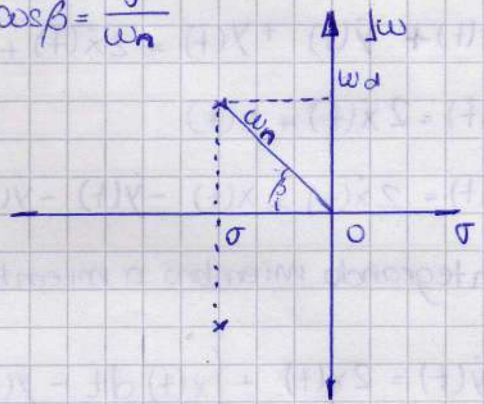
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \cancel{100}^{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right)\cdot\frac{s}{\cancel{50}} = 2s\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right) = 2 - \frac{2}{s+2} = \frac{2s+4-2}{s+2} =$$

$$\frac{2s+2}{s+2}$$

Ejercicio 2 - Sistema de segundo orden.



$$\xi = \cos\beta = \frac{\sigma}{\omega_n}$$



a. Cuánto es sigma.

tiempo de establecimiento: $5\% = \frac{3}{\sigma}$

Viendo el listado de valores obtengo $t_{s\,5\%}$

$$0,158 = \frac{3}{\sigma} \therefore \sigma = 18,99\ seg^{-1}$$

(Valor para el cual una función ingresa en una banda de ±5%).

b. Frecuencia natural no amortiguada ω_n.

Tiempo de Pico = $t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 50ms$

$$\omega_d = \frac{\pi}{t_p} = 62,83\ \frac{rad}{s}$$

$$\omega_n = \sqrt{\omega_d^2 + \sigma^2} = \sqrt{62,83^2 + 18,89^2} = 65,60\ \frac{rad}{s}$$

c. $\omega_d = 62,83\ \frac{rad}{seg.}$

d. $\xi = \frac{\sigma}{\omega_n} = \frac{18,89}{65,60} = 0,29$

e. Tiempo de retardo t_d = es el tiempo para el cual la función pasa por primera vez por el 50% de su valor final.

$t_d = 0,018\ seg = 18\ ms.$

f.- tr · del 0% al 100%, la primera vez que la función pasa por su valor final. tr cuando pasa por 1 es 30ms.

$$tr = \frac{\pi - \beta}{\omega d} = \frac{\pi - \arccos \xi}{\omega d} = \frac{\pi - \arccos 0{,}29}{62{,}83} = 0{,}0297.$$

g.- $tp = 0{,}05\ seg$

h.- Tiempo de establecimiento al $\pm 2\%$ $= \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{18{,}89} = 211{,}75\ ms$

i.- Sobrepico ~~natural~~ porcentual: es el valor máximo de la función menos el valor de régimen sobre el valor de régimen por 100. Es lo que se excede respecto de su valor final.

$$Mp\ \% = \frac{y(tp) - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100 = 38{,}23\ \%$$ La función no llega a 1,4, llega a 1,3823

$$Mp\ \% = e^{-\pi\sigma/\omega d} \cdot 100\% = e^{-\pi/63{,}83} \cdot 100\% = 38{,}69\%$$

j.- $$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\omega n^2}{s^2 + 2\xi\omega n s + \omega n^2}$$

TERMINAR!

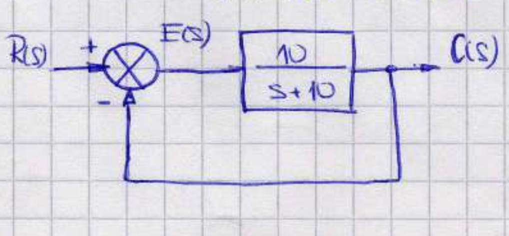
04.06.2013

Unidad temática nº 5 (Respuesta transitoria. Teoría de errores)

TP5-1 Análisis de estado permanente.

Ejercicio 1.

SISTEMA A. (TIPO Ø) → sin integraciones al origen.



i.- sobrepico ~~máximo~~ porcentual: es el valor máximo de la función menos el valor de régimen sobre el valor de régimen por 100. Es lo que se excede respecto de su valor final.

$$M_p\,\% = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100 = 38{,}23\,\%$$ La función no llega a 1,4, llega a 1,3823

$$M_p\,\% = e^{-\pi\sigma/\omega_d} \cdot 100\% = e^{-\pi/63{,}83} \cdot 100\% = 38{,}69\%$$

j.- $$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$ TERMINAR!

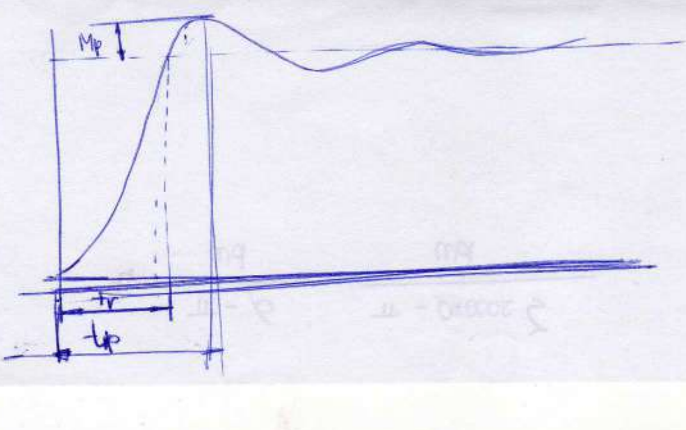
σ: coeficiente de atenuación.
ω_n: frecuencia natural no amortiguada.
ξ = factor de amortiguación.
} $\xi\omega_n = \sigma$

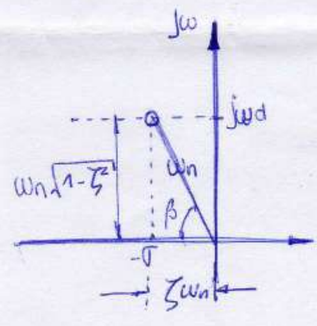
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$0 < \xi < 1$ — sistema subamortiguado — RCC.
$\xi = 0$ — sistema oscilatorio
$\xi = 1$ — sistema críticamente amortiguado
$\xi > 1$ — Sobreamortiguado

t_d — tiempo de retardo (tiempo que tarda en alcanzar por primera vez 1/2 del valor final).
t_r — rise time
t_p → Peak time (primer pico)
M_p — Maximum overshoot. $M_p = \frac{C(t_p) - C(\infty)}{C(\infty)} \cdot 100\%$
t_s — setting time. (hasta ±5% o ±2% del valor final).

t_r: tiempo para crecer del 0% al 100% — subamortiguados
10% al 90% — sobreamortiguados





h.- Tiempo de establecimiento al 2% $= \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{18,89} = 211,75\ ms$

i.- Sobrepico ~~natural~~ porcentual: es el valor máximo de la función menos el valor de régimen sobre el valor de régimen por 100. Es lo que se excede respecto de su valor final.

$$M_p\% = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100 = 38,23\%$$ La función no llega a 1,4, llega a 1,3823

$$M_p\% = e^{-\pi\sigma/\omega_d} \cdot 100\% = e^{-\pi/63,83} \cdot 100\% = 38,69\%$$

j.- $\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ TERMINAR!

σ = coeficiente de atenuación.
ω_n: frecuencia natural no amortiguada.
ξ = factor de amortiguación.

$\xi\omega_n = \sigma$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$0 < \xi < 1$ — sistema subamortiguado — RCC.
$\xi = 0$ — sistema oscilatorio
$\xi = 1$ — sistema criticamente amortiguado
$\xi > 1$ — Sobreamortiguado

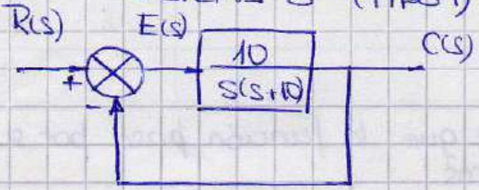
2013

Uni
TP
Eje
R

t_d — tiempo de retardo (tiempo que tarda en alcanzar por primera vez 1/2 del valor final).
t_r — rise time

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{\pi - \arccos\xi}{\omega_d}$$

SISTEMA "B" (TIPO 1) — 1 integración al origen



* Para r(t) = μ(t) kp = coeficiente estático de error de posición.

SISTEMA "A"

$$k_p = \lim_{S \to 0} G(s)H(s)$$

$$k_p = \lim_{S \to 0} \frac{10}{S+10} = 1$$

SISTEMA "B"

$$k_p = \lim_{S \to 0} \frac{10}{S(S+10)} = \infty$$

* Para r(t) = tμ(t) kv = coeficiente estático de error de velocidad (rampa)

$$k_v = \lim_{S \to 0} sG(s)H(s)$$

SISTEMA A

$$k_v = \lim_{S \to 0} s \frac{10}{S+10} = 0$$

SISTEMA B

$$k_v = \lim_{S \to 0} \frac{S \cdot 10}{S(S+10)} = 1$$

* Para $r(t) = \frac{1}{2}t^2\mu(t)$ (rampa) ka = coeficiente estático de error de aceleración

$$k_a = \lim_{S \to 0} s^2 G(s)H(s)$$

SISTEMA "A"

$$k_a = \lim_{S \to 0} \frac{S^2\, 10}{(S+10)} = 0$$

SISTEMA "B"

$$K_a = \lim_{S \to 0} \frac{S^2 \cdot 10}{S(S+1)} = 0.$$

Ejercicio 2 : Errores

* Para $r(t) = \mu(t)$

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \frac{1}{1+K_p}$$

SISTEMA "A" $= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

SISTEMA "B" $= \frac{1}{1+\infty} = 0$

* Para $r(t) = t\,\mu(t)$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$$

SISTEMA A $= \frac{1}{0} = \infty$

SISTEMA B $= \frac{1}{1} = 1$

* Para $r(t) = \frac{1}{2} t^2 \mu(t)$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a}$$

SISTEMA A $= \frac{1}{0} = \infty$

SISTEMA B $= \frac{1}{0} = \infty$

Ejercicio 3

SISTEMA "A"

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{10}{S+10}}{1 + \frac{10}{S+10}} = \frac{10}{S+20}$$

$r(t) = t\,\mu(t) \therefore R(s) = \frac{1}{S^2}$

$$C(s) = \frac{10}{s^2(s+20)} = \frac{A_0}{s^2} + \frac{B_0}{s} + \frac{A_1}{(s+20)}$$

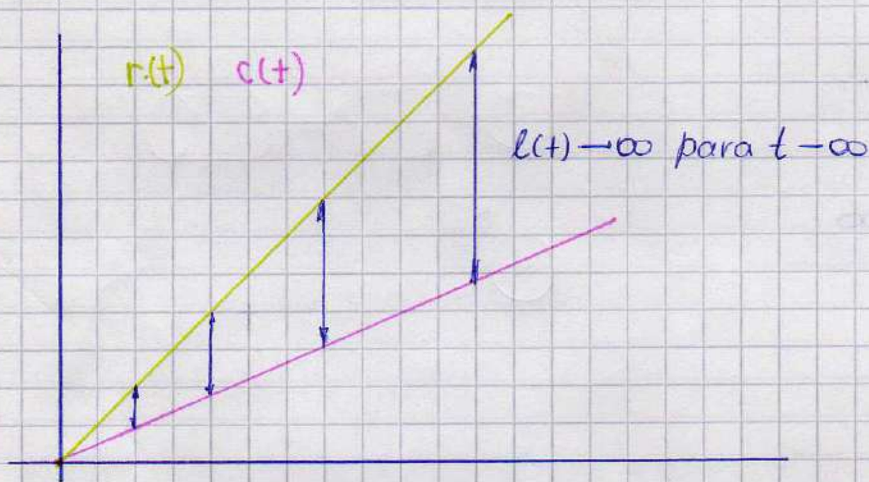
$$A_0 = \lim_{s \to 0} \frac{\cancel{s^2}\,10}{\cancel{s^2}(s+20)} = \frac{1}{2}$$

$$B_0 = \lim_{s \to 0} \frac{d}{ds} \frac{\cancel{s^2}\,10}{\cancel{s^2}(s+20)} = \lim_{s \to 0} -\frac{10}{(s+20)^2} = -0{,}025$$

$$A_1 = \lim_{s \to -20} \frac{(s+20)\,10}{s^2(s+20)} = \frac{10}{400} = 0{,}025$$

$$C(s) = \frac{0{,}5}{s^2} - \frac{0{,}025}{s} + \frac{0{,}025}{(s+20)}$$

$$c(t) = 0{,}5t - 0{,}025 + 0{,}025\,e^{-20t}$$



SISTEMA "B"

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{10}{s(s+10)}}{1 + \frac{10}{s(s+10)}} = \frac{10}{s^2+10s+10} = \frac{10}{(s+1{,}13)(s+8{,}87)} \;;$$

$$R(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$C(s) = \frac{10}{s^2(s+1{,}13)(s+8{,}87)} = \frac{A_0}{s^2} + \frac{B_0}{s} + \frac{A_1}{(s+1{,}13)} + \frac{A_2}{(s+8{,}87)}$$

$$A_0 = \lim_{s \to 0} \frac{10}{s^2+10s+10} = 1$$

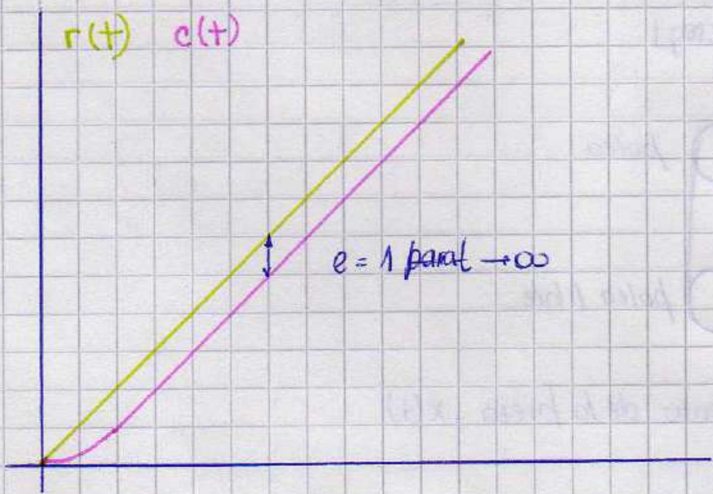
$$B_0 = \lim_{s \to 0} \frac{d}{dt}\left[\frac{10}{s^2+10s+10}\right] = \lim_{s \to 0} \frac{-10(2s+10)}{(s^2+10s+10)^2} = -\frac{100}{100} = -1$$

$$A_1 = \lim_{s \to -1{,}13} \frac{10}{s^2(s+8{,}87)} = 1{,}01$$

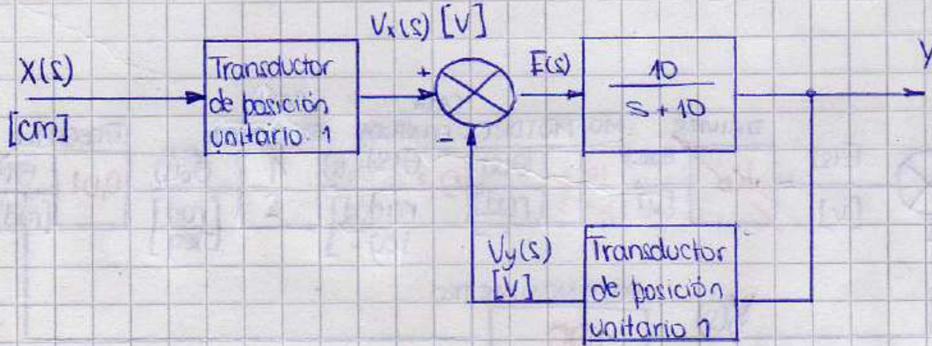
$$A_2 = \lim_{s \to -8{,}87} \frac{10}{s^2(s+1{,}13)} = -0{,}01$$

$$C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1{,}01}{(s+1{,}13)} - \frac{0{,}01}{(s+8{,}87)}$$

$$c(t) = t - 1 + 1{,}01\,e^{-1{,}13t} - 0{,}01\,e^{-8{,}87t}$$



Ejercicio 4



del potenciómetro

Como el cursor a la entrada se va moviendo a una velocidad constante, la entrada es una rampa

$$E(s) = V_x(s) - V_y(s) = X(s) - Y(s)$$

$$e(t) = x(t) - y(t)$$

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \infty$$

$$e(t) = \underbrace{t}_{x(t)} \underbrace{- \frac{1}{2}t + 0{,}025 - 0{,}025\,e^{-20t}}_{y(t)\ \text{(de un ejercicio anterior que tenía este mismo resultado)}}$$

La expresión obtenida es el error de posición. El error de velocidad se obtiene integrando el de posición.

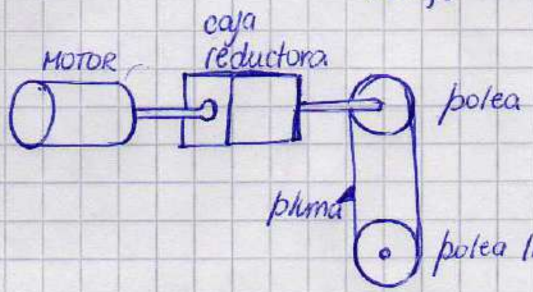
$$\dot{e}(t) = \frac{1}{2} + 0{,}5e^{-20t}$$

El cursor de entrada en régimen tiene una velocidad de $1 \frac{cm}{seg}$ y el de salida de $0{,}5\ cm/seg$

11.06.2013

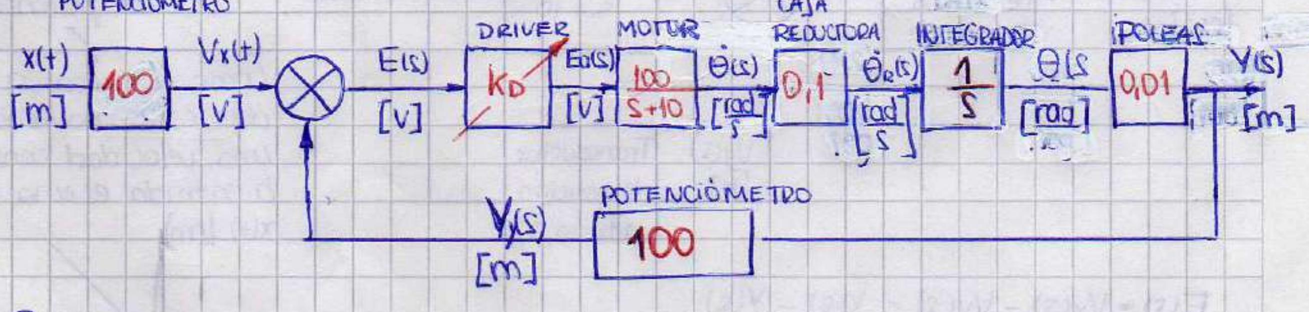
TP 5-1 Análisis de estado permanente

El pote lineal sensa la posición y produce una tensión. Se amplifica y mueve el motor.

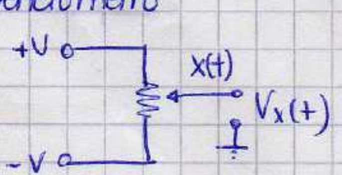


posición de entrada: desplazamiento de la pieza x(t)

potenciómetro: 10 cm de carrera.



a) Potenciómetro



$$V_x(t) = \frac{10V}{0{,}1m} \cdot x(t)$$

$$V_x(S) = 100\, X(s)$$

$$\boxed{V_x(s) / X(s) = 100}$$

21

b - Amplificador de C.C.

$$\frac{E_a(s)}{E(s)} = k_D$$

c.- Motor C.C.

$$\dot{\theta}(t) = 100\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$39,34 = 100\left(1 - e^{-\frac{0,05}{\tau}}\right)$$

$$0,3934 = 1 - e^{-\frac{0,05}{\tau}}$$

$$e^{-\frac{0,05}{\tau}} = 1 - 0,3934$$

$$-\frac{0,05}{\tau} = \ln(1 - 0,3934) \Rightarrow \tau = \frac{0,05}{\ln(1-0,3934)} = 0,1s$$

$$\dot{\theta}(t) = 100\left(1 - e^{-10t}\right) \quad [rad/s]$$ — respuesta del sistema electromecánico completo (velocidad del motor).

$$E_a(t) = 10\mu(t) \quad [V]$$

$$\dot{\theta}(s) = 100\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+10}\right) = 100\left(\frac{s+10-s}{s(s+10)}\right) = \frac{1000}{s(s+10)}$$

$$E_a(s) = \frac{10}{s}$$

$$\frac{\dot{\theta}(s)}{E_a(s)} = \frac{100}{s+10} \left[\frac{rad}{V.seg}\right]$$

d. Caja reductora

$$\frac{\dot{\theta}_R(s)}{\dot{\theta}(s)} = 0,1$$

e. Integrador

$$\frac{\theta(s)}{\dot{\theta}_R(s)} = \frac{1}{s} \quad [seg]$$

f. Polea - pluma.

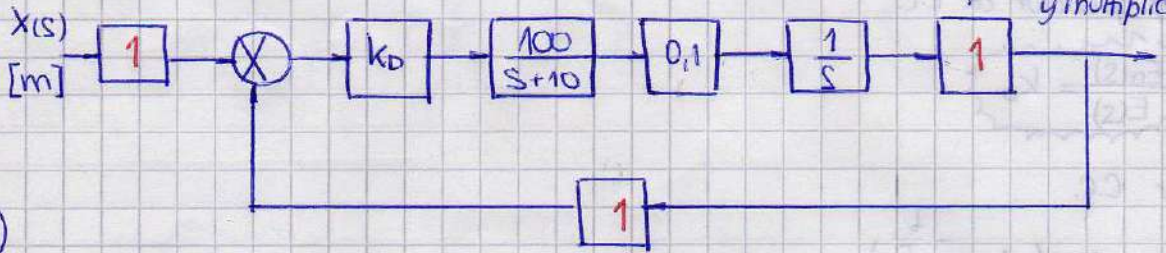
$$y(t) = r.\theta(t)$$

$$Y(s) = r.\theta(s)$$

$$\frac{Y(s)}{\theta(s)} = r = 1cm = 0,01 \left[\frac{m}{rad}\right]$$

Para meter el 100 dentro del lazo tengo que multiplicar por 100 la trayectoria directa y dividir por 100 la rama de realimentación.

Aprovecho este bloque y multiplico x100 : 0,01 x 100 = 1



a)

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{10k_D}{s(s+10)}}{1+\frac{10k_D}{s(s+10)}} = \frac{10k_D}{s^2+10s+10k_D}$$

Suponemos que en un instante la pieza se mueve 1cm : como un escalón

$x(t) = 0{,}01\,\mu(t)$ [m]

$X(s) = \frac{0{,}01}{s}$

$$Y(s) = \frac{10k_D}{s^2+100s+10k_D}\cdot\frac{0{,}01}{s} = \frac{k_D}{s(s^2+100s+10k_D)}$$

Según TVF

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} s\,Y(s) = 0{,}01\,[m]$$

b) Con $k_D = 2{,}5$

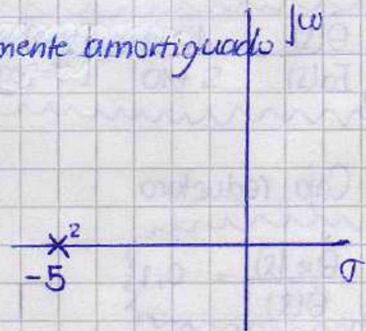
Sólo tiene sobrepico si es subamortiguado.

El denominador es $s^2+10s+25 = s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2$

Vemos si es subamortiguado:

$2\xi\omega_n = 10 \Rightarrow \xi\omega_n = 5 \Rightarrow \xi = \frac{5}{\omega_n} = \frac{5}{5} = 1$ — críticamente amortiguado

$s^2+10s+25 = (s+5)^2$ — críticamente amortiguado



c) $G(s)H(s) = G(s)$ (realimentación unitaria)

$$= \frac{10k_D}{s(s+10)}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{k_v}$$

$$k_v = \lim_{s\to 0} s\,G(s)H(s) = \lim_{s\to 0}\frac{25}{(s+10)} = 2{,}5 = k_D \Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{2{,}5} = 0{,}4$$

d) Multiplicamos por 10 ko y disminuimos el error. Esto nos produce un cambio en las características dinámicas

e) $\xi = \dfrac{5}{\omega_n} =$

$\omega_n^2 = 250 \Rightarrow \omega_n = 15{,}81$

$\xi = \dfrac{5}{15{,}81} = 0{,}316$ — Subamortiguado

El sobrepico porcentual:

$Mp\% = e^{-\pi\sigma/\omega_d} \cdot 100\%$

$\sigma = \xi\omega_n = 5$

$\omega_d = \sqrt{250 - 25} = 15$

$Mp\% = e^{-\frac{\pi}{3}} \cdot 100\% = 35{,}09\%$

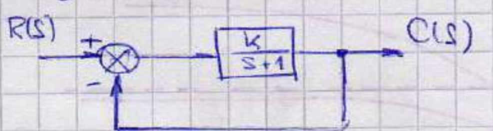
Con la respuesta críticamente amortiguada tarda mucho tiempo en llegar a 1.
Con subamortiguado se pasa 35,09%. Va a marcar 1,3509 cm.

Estamos mejorando la dinámica pero el comportamiento en régimen se ve perjudicado. Se hace una solución de compromiso (se usa un compensador con adelanto de fase.)

25.06.2013

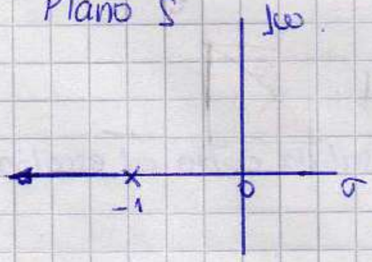
TP 6.1 Lugar de Raíces

$\boxed{Ej\ 1}$



$G(s)H(s) = \dfrac{k}{s+1}$ $\qquad 0 \leq k \leq \infty$

Plano S



Regla de Evans: existe lugar de raíces en el eje real en aquellos puntos en los cuales el número de singularidades a su derecha es impar.
El diagrama del lugar de raíces inicia en los polos de lazo abierto.
Para $k=0$ los polos de lazo abierto son iguales a los de lazo cerrado. El diagrama del lugar de raíces culmina en $k=0$ o siguiendo la pendiente de asíntotas.

Fórmula de las asíntotas

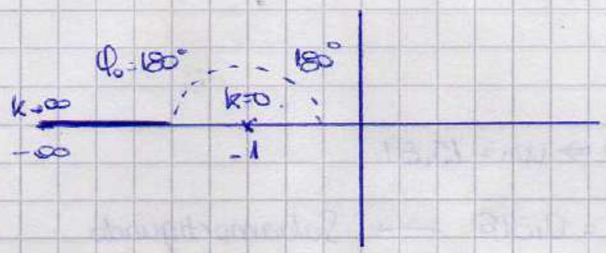
$\varphi_k = \dfrac{(2k+1)\,180°}{P - Z}$ $\qquad k = 0, 1, 2, \dots P-Z-1$

Z: nº ceros
P: nº polos.

$$\varphi_0 = \frac{(2 \cdot 0 + 1)}{1 - 0} \cdot 180^\circ = 180^\circ$$ — Pendiente angular de la asíntota.

Varicentro de las asíntotas, punto de trazado de las asíntotas sobre el eje $\mathbb{R}$.

$$\sigma_c = \frac{\sum \mathrm{Re}[p] - \sum \mathrm{Re}[z]}{P - Z}$$



$$\sigma = \frac{-1 - 0}{1 - 0} = -1$$

2) $$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{k}{s+1}}{1 + \frac{k}{s+1}} = \frac{k}{s + (1+k)}$$

Al cerrar el lazo la posición del polo depende del valor de k, varío la ganancia del sistema y varía el lugar del polo.

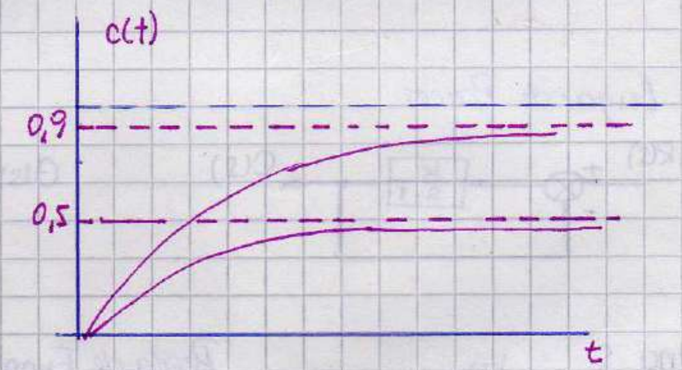
Para $r(t) = \mu(t) \longrightarrow R(s) = \frac{1}{s}$

$$C(s) = \frac{k}{s(s+1+k)} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s+k+1}$$

$$A_1 = \lim_{s \to -1-k} \frac{k}{s} = -\frac{k}{1+k}$$

$$A_0 = \lim_{s \to 0} \frac{k}{s+1+k} = \frac{k}{1+k}$$

$$C(s) = \frac{k}{(k+1)} \cdot \frac{1}{s} - \frac{k}{(k+1)} \cdot \frac{1}{(s+1+k)}$$



$$c(t) = \frac{k}{k+1} - \frac{k}{k+1} e^{-(1+k) \cdot t}$$

$$c(t) = \frac{k}{k+1} \left[1 - e^{-(1+k)t} \right]$$

$k = 1 \rightarrow c(\infty) = 0,5$; $k = 9 \rightarrow c(\infty) = 0,9$

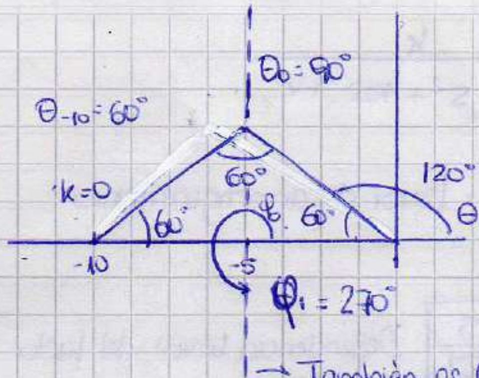
En el límite cuando el sistema es tan rápido $\rightarrow \infty$, la salida copia al escalón.

3)

$$\tau = \frac{1}{1+k}$$ a mayor k, menor τ.

Ejercicio 2

$$G(s)\,H(s) = \frac{k}{s(s+10)}$$



$\varphi_0 : 90°$

→ También es lugar por simetría.

$k = 0;1$

$$\varphi_k = \frac{(2k+1)}{(P-Z)} \cdot 180°$$

$$\varphi_0 = \frac{(2 \cdot 0+1)}{2-0} \cdot 180° = 90°$$

$$\varphi_1 = \frac{(2 \cdot 1+1)}{2-0} \cdot 180° = 270°.$$

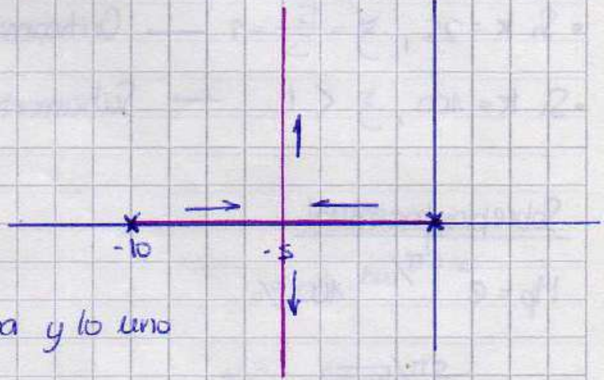
Si no tiene zeros termina siguiendo las pendientes de las asintotas.

$$\sigma_C = \frac{-10}{2-0} = -5 = \frac{\sum Re[P] - \sum Re[Z]}{P-Z}$$

Regla de Evans.

$1 + G(s)\,H(s) = 0$ // Denominador de $C(s)/R(s)$

$G(s)\,H(s) = -1 + j0 = 1 \underline{|180°}$.



Tomo un punto en la asintota que va para arriba y lo uno con los polos. Formo un triángulo equilatero.

$\theta_0 = 120°$ $\theta_{10} = 60°$

Aporte de fase

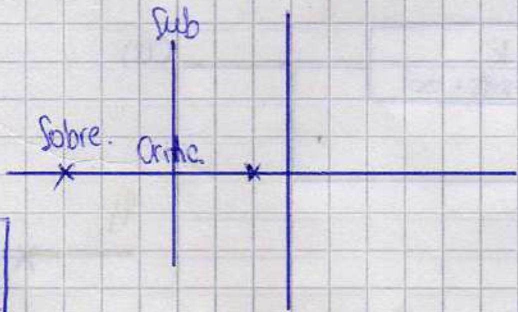
$-\theta_0 - \theta_{10} = -120° - 60° = -180°$ Por lo tanto ese punto es lugar de raices.

Elijo un punto más arriba formando un triangulo isósceles.

Toda la asintota coincide con la asintota.

Punto de Bifurcación: es el punto del cual los polos de lazo cerrado salen del eje real.

$$1 + \frac{k}{s(s+10)} = \frac{s(s+10)+k}{s(s+10)} = 0 \quad \Rightarrow k = -1\,[s(s+10)]$$



$$\frac{\partial k}{\partial s} = -2s - 10$$

Hago $\frac{\partial k}{\partial s} = 0$.

$$-2s - 10 = 0 \Rightarrow \boxed{s = \frac{10}{-2} = -5}$$

Este método da los puntos de bifurcación probables. Para serlo, deben ser además lugar de raíces.

Análisis de los puntos

No hay ningún valor que haga inestable al sistema, todo el lugar de raíces está en el semiplano izquierdo.

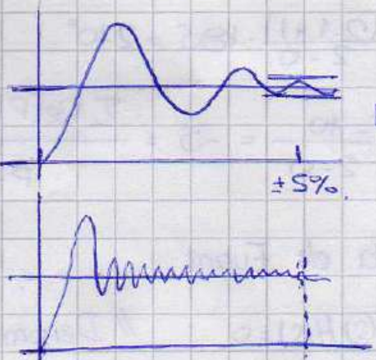
$k(\text{P.Bifurc.}) = -(25-50) = 25$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\dfrac{k}{s(s+10)}}{1+\dfrac{k}{s(s+10)}} = \frac{k}{s^2+10s+k}$$

$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$ — ξ = factor de amortiguamiento.

$2\xi\omega_n = 10$

$\xi\omega_n = 5 \Rightarrow \boxed{\xi = \frac{5}{\omega_n} = \frac{5}{\sqrt{k}}}$ Dependencia lineal del factor de amortiguamiento con la ganancia.



- Si $k=4$, $\xi = \frac{5}{2} = 2{,}5$ — Sobreamortiguado.
- Si $k=25$, $\xi = \frac{5}{5} = 1$ — Críticamente amortiguado.
- Si $k=100$, $\xi < 1$ — Subamortiguado.

Sobrepico porcentual

$$M_p = e^{-\sigma\pi/\omega_d}\cdot 100\,\%$$

$\sigma = \xi\omega_n = \frac{5}{\sqrt{k}}\cdot\sqrt{k} = 5$

$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2-\sigma^2} = \sqrt{\sqrt{k}^2-25} = \sqrt{k-25}$

$$M_p = e^{-5\pi/\sqrt{k-25}}\cdot 100\,\%$$

A mayor ganancia, mayor sobrepico.

$\omega_d = \sqrt{k-25}$

$t_{s\,50\%} = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{5} = 0{,}6\text{ seg}$ — Tiempo de establecimiento. Depende de σ. Es siempre igual porque depende sólo de σ.

Ejercicio 3

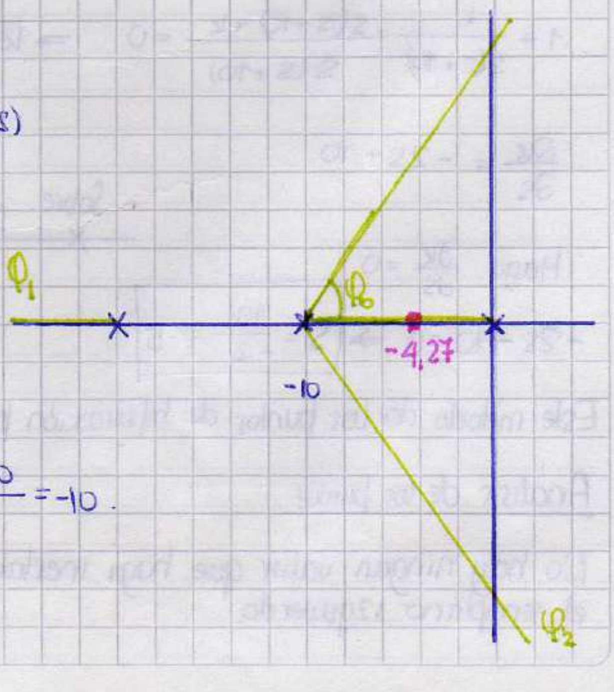
$k = 0, 1, 2$

$$\varphi_0 = \frac{(2\cdot 0+1)}{(3-0)}\cdot 180° = 60°$$

$$\varphi_1 = \frac{(2\cdot 1+1)}{(3-0)}\cdot 180° = 180°$$

$$\sigma_c = \frac{0-10-20}{3-0} = -10$$

$$\varphi_2 = \frac{(2\cdot 2+1)}{(3-0)}\cdot 180° = 300°$$



Punto de bifurcación:

$$P_B = \frac{k}{s(s+10)(s+20)} + 1 = 0 \Rightarrow k = -(s^3 + 30s^2 + 200s) \Rightarrow \frac{\partial k}{\partial s} = -(3s^2 + 60s + 200) = 0$$

$$s^2 + 20s + 66{,}67 = 0 \begin{cases} s_1 = -4{,}23 \text{ — Es lugar de raíces.} \\ s_2 = -15{,}77 \text{ — No es lugar de raíces} \end{cases}$$

Para saber cuándo se hace inestable hay que aplicar el criterio de Routh igualando a cero el numerador del denominador de la función de lazo cerrado (?).

- $s^3 + 30s^2 + 200s + k = 0$

Si quisiera trazar punto a punto el lugar de raíces hay que usar esta función, se pone un valor de k y se sacan los 3 puntos que hacen cero.

s^3	1	200
s^2	30	k
s^1	$\frac{30 \cdot 200 - k}{30}$	
s^0	k	

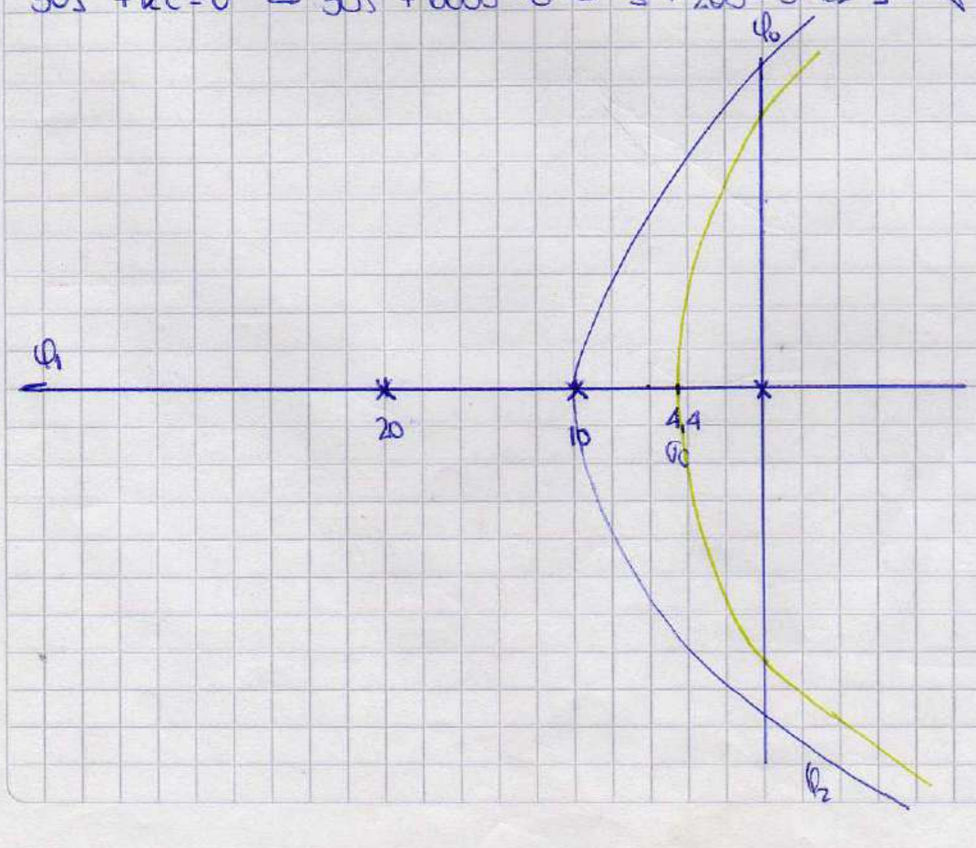
k crítico $= 6000$ → Para $k > 6000$ → inestable.

$k < k_c$ → No hay cambio de signo, entonces no hay raíces de parte real positiva.

$k > k_c$ → 2 cambios de signo → 2 raíces en el semiplano derecho.

Para el punto de cruce uso la fila de s^2 y k crítico.

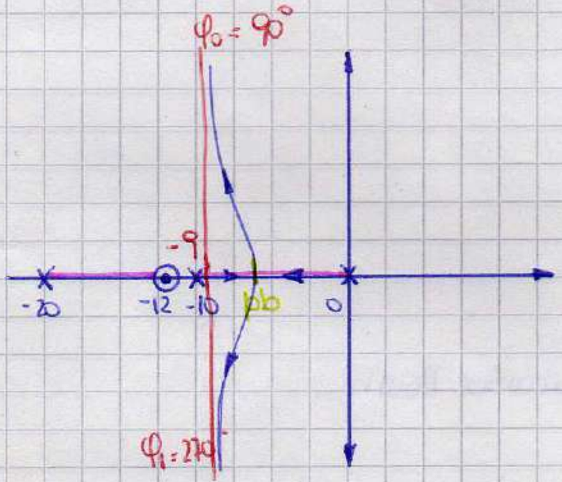
$$30s^2 + k_c = 0 \Rightarrow 30s^2 + 6000 = 0 \Rightarrow s^2 + 200 = 0 \Rightarrow s = \sqrt{-200} = \pm j14{,}14$$



TP6.1 Método del LR

30-Julio-2013

Ej. 4



Existe lugar de raíces cuando a la derecha del ~~lug~~ punto en cuestión hay número impar de singularidades.

Existen P-Z asintotas.

Hay lugar de raíces entre -20 y -12, y entre -10 y 0.

Asintotas: hay 2: $P-Z = 3-1 = 2$

$$\varphi_k = \frac{180°(2k+1)}{p-z}$$

El punto de bifurcación es donde las raíces salen del eje real y se hacen complejas conjugadas

$$\varphi_0 = \frac{180°}{2} = 90°$$

$$\varphi_1 = \frac{180°(3)}{2} = 270°$$

$$\sigma_c = \frac{\sum Re[p] - \sum Re[z]}{p-z}$$

$$\sigma_c = \frac{-10-20+12}{3-1} = -9$$

Punto de bifurcación

$$1 + k\frac{s+12}{s(s+20)(s+10)} = 0$$

$$k = -\frac{s(s+10)(s+20)}{(s+12)} = \frac{s^3+30s^2+200s}{(s+12)}$$

$$\frac{\partial k}{\partial s} = \frac{(3s^2+60s+200)(s+12)-(s^3+30s^2+200s)}{(s+12)^2}$$

$$\frac{\partial k}{\partial s} = \frac{2s^3+66s^2+720s+2400}{(s+12)^2} = 0$$

$$s^3+33s^2+360s+1200=0.$$

$\boxed{s_1 = -6{,}17} \longrightarrow$ pb.

$s_{2,3} = -13{,}41 \pm j\,3{,}8$

Cortes al eje $j\omega$. Estabilidad.

Partimos de la función característica y aplicamos Routh.

$$1+\frac{k\,(s+12)}{s(s+10)(s+20)} = 0$$

Hacemos que el numerador sea igual a cero.

$$s^3+30s^2+200s+ks+12k=0$$

$$s^3+30s^2+(200+k)s+12k=0.$$

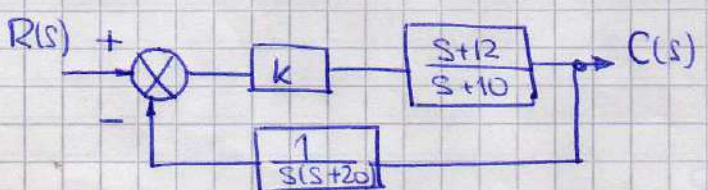
s^3	1	$(200+k)$
s^2	30	$12k$
s^1	$200+0{,}6k$	$0..$
s^0	$12k$	

$$s_1^1 = \frac{30(200+k)-12k}{30} = \frac{6000+30k-12k}{30} = 200+0{,}6k$$

Para $k>0$ no hay cambio de signo en la primer columna, por lo tanto el sistema es ESTABLE, no hay cruce en el eje $j\omega$.

Agregar el cero le da estabilidad al sistema. Ver ejercicio anterior.

Ejercicio 5

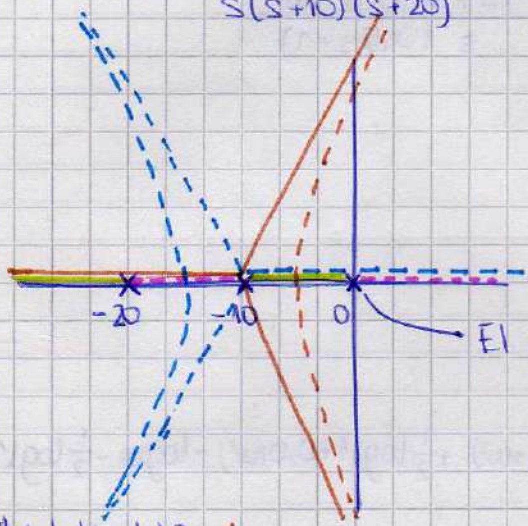


El diagrama del lugar de raices se traza a partir de la función de transferencia de lazo abierto G(S) H(S).
Como el G(S).H(S) de ambos sistemas es el mismo que en el ej. 4, es el mismo lugar de raices (notar que G(S) y H(S) separadas no necesariamente son iguales).

Ejercicio 6.

$-\infty < k < +\infty$

$$G(s)H(s) = k\frac{1}{s(s+10)(s+20)}$$



Para k>0 el lugar de raices es *

Para valores de k negativo el lugar de raices es *
O sea que para cualquier valor negativo esto se hace inestable (tiene lugar de raices en el eje real positivo).

Asintotas k>0 *

$$\varphi_k = \frac{180°(2k+1)}{p-z}$$

$\varphi_0 = 60°$; $\varphi_1 = 180°$; $\varphi_2 = 300°$.

$$\sigma_c = \frac{\sum Re[p] - \sum Re[z]}{p-z} = \frac{-30}{3-0} = -10$$

Asintotas k<0 *

$$\varphi_k = 180° \frac{2k}{p-z}$$

$\varphi_0 = 0°$; $\varphi_1 = 120°$; $\varphi_2 = 240° = -120°$

TP7 - 1 Gráficas de respuesta en frecuencia. BODE. 6.8.2013

Ejercicio 1: $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) = \ddot{x}(t) + 11\dot{x}(t) + 10x(t)$

$$X(s) \longrightarrow \boxed{G(s)H(s)} \longrightarrow Y(s)$$

$$Y(s)\,[s^2 + 2s] = X(s)\,[s^2 + 11s + 10]$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 + 11s + 10}{s(s+2)} = G(s).H(s)$$ (Función de transferencia a lazo abierto).

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(s+1)(s+10)}{s(s+2)} = \frac{(s+1).10(0,1s+1)}{(s).2(0,5s+1)} = 5\,\frac{(s+1)(0,1s+1)}{s\,(0,5s+1)}$$

$s = j\omega$

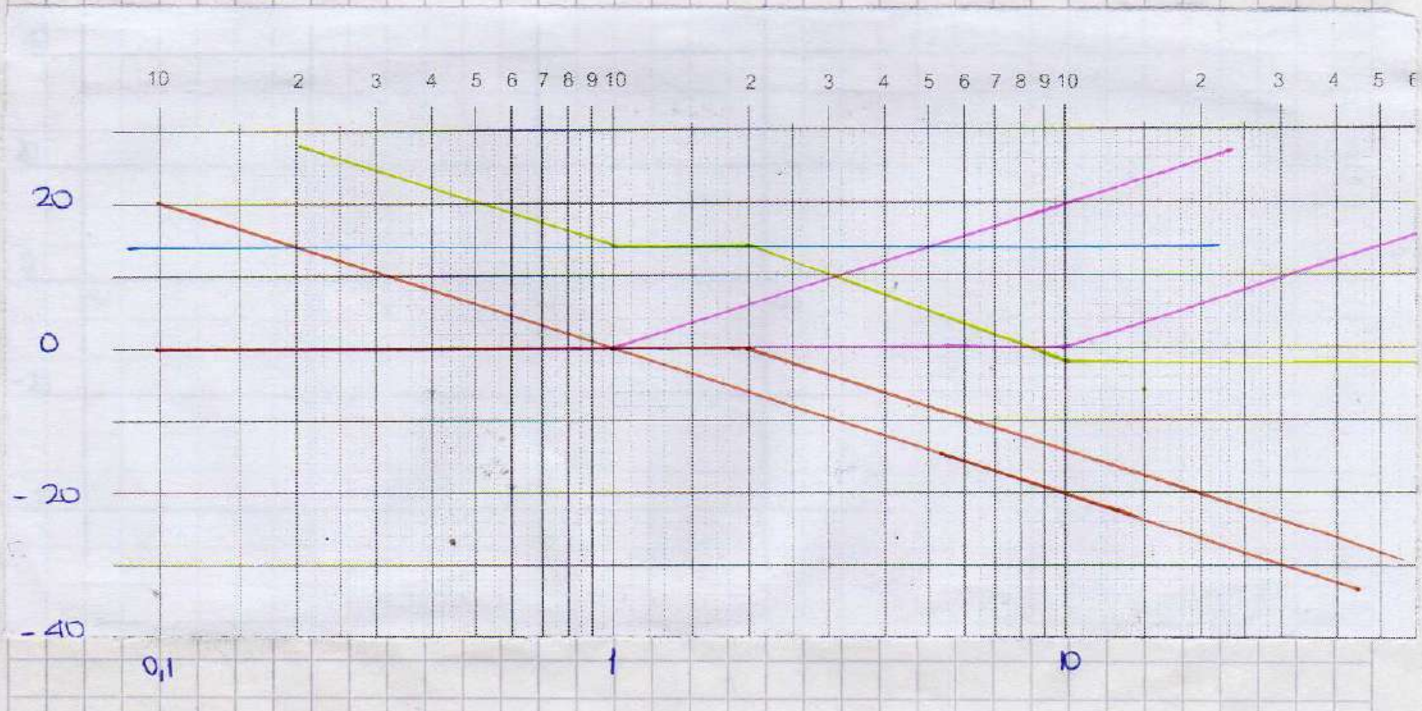
$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = G(j\omega).H(j\omega) = \frac{5\,(1+j\omega)(1+0,1j\omega)}{j\omega\,(0,5j\omega+1)}$$

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = \frac{5\sqrt{1+\omega^2}\,\sqrt{1+0,1^2\omega^2}}{\omega\sqrt{1+0,5^2\omega^2}}$$

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = 20\log|G(j\omega)H(j\omega)| = 20\left[\log 5 + \tfrac{1}{2}\log(1+\omega^2) + \tfrac{1}{2}\log(1+0,01\omega^2) - \log\omega - \tfrac{1}{2}\log(1+0,25\omega^2)\right]$$

$|G(j\omega)H(j\omega)| =$

Miro las singularidades y comienzo una década menos y termino una década después. Comienzo en 0,1 y termino en 100.



2

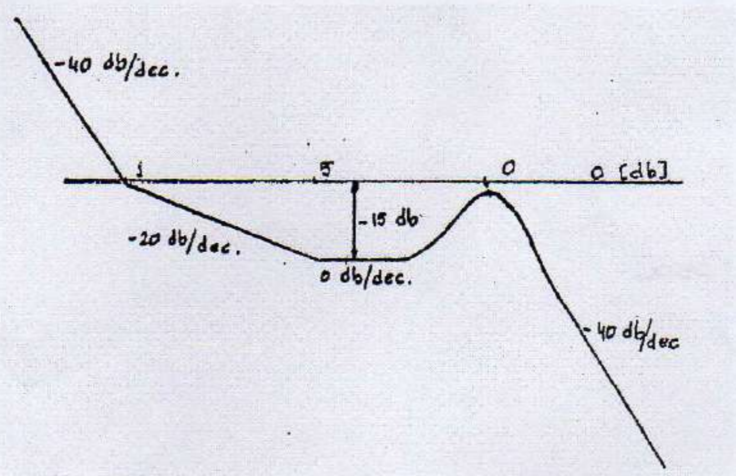
6/8

Unidad temática 7: MÉTODO DE RESPUESTA EN FRECUENCIA
Trabajo Práctico 7-1: Gráficos de respuesta en frecuencia, diagramas de Bode. Sistemas de fase mínima y no mínima.

Ejercicio 1: dado el sistema de la figura y la relación entre las variables de entrada y salida, obtener el diagrama de Bode correspondiente.

$$y''(t) + 2y'(t) = x''(t) + 11x'(t) + 10x(t)$$

Ejercicio 2: El siguiente diagrama de Bode que se muestra en la figura corresponde a sistema de lazo cerrado:



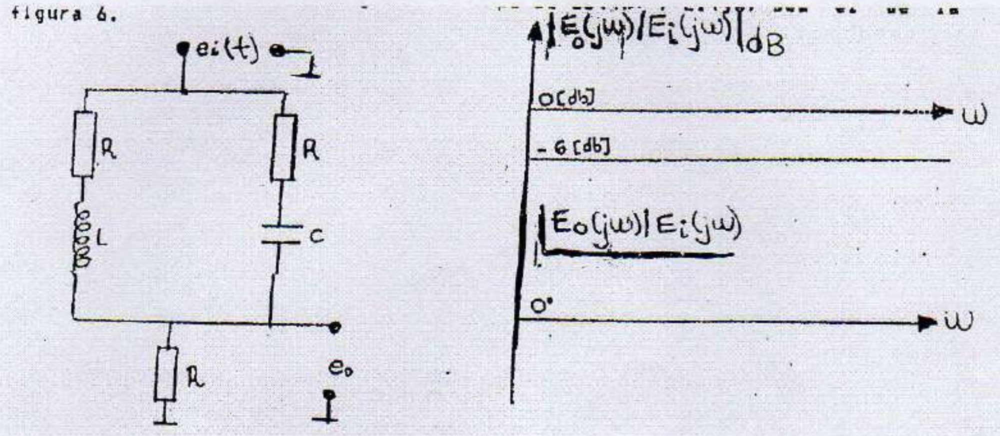
Del mismo se destaca que en la representación del término cuadrático se da un módulo de resonancia igual a $|M_r|_{dB} = 14{,}02dB$ que se da para una frecuencia de resonancia $\omega_r = 19{,}8 \frac{rad}{seg}$. Sabiendo que la función de transferencia de realimentación es:

$$H(s) = \frac{s+5}{s^2 + 4s + 400}$$

Se pide determinar $G(s)$.

Ejercicio 3: Dada la red de la figura se pide determinar las relaciones necesarias entre R, L y C de manera que el diagrama de Bode de $\dfrac{E_o(j\omega)}{E_i(j\omega)}$ sea en módulo y fase el que se muestra:

figura 6.



Ejercicio 4: Realizar para los siguientes sistemas (el primero de fase mínima y el segundo de fase no mínima) el diagrama de Bode.

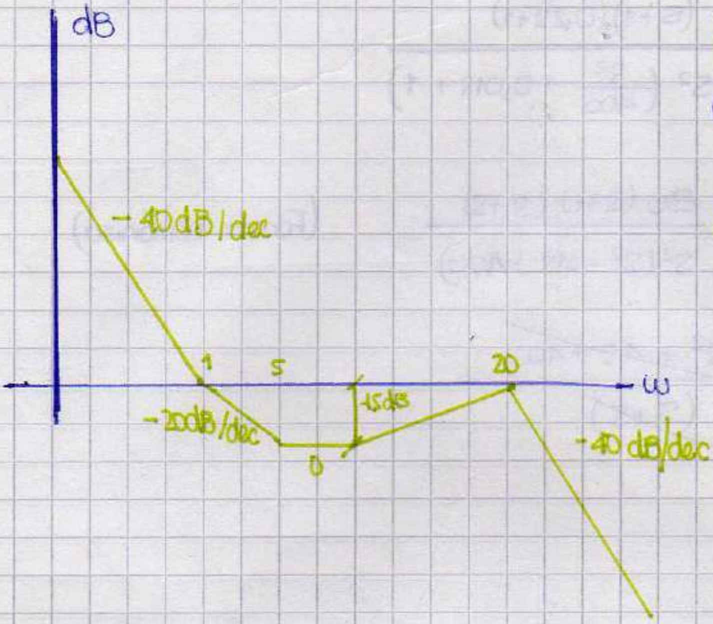
- sistema a:

$$G(s)H(s) = 2\frac{s+1}{s^2(s+2)}$$

- sistema b:

$$G(s)H(s) = 2\frac{s-1}{s^2(s+2)}$$

Ejercicio 2



$|M_r|_{dB} = 14{,}02$

$\omega_r = 19{,}8 \text{ rad/seg}$

$H(s) = \dfrac{s+5}{s^2+4s+400}$ Determinar $G(s)$.

$$G(s).H(s) = \frac{(s+1)(0{,}2s+1)}{s^2\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1\right)}$$ Todo dividido por ω_n^2

Con $|M_r|$ y ω_r calculo ω_n

- El módulo de resonancia depende de ξ.

$M_r = \dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ $\wedge$ $|M_r|_{dB} = 20\log M_r = 14{,}02 dB$.

$\log M_r = \dfrac{14{,}02}{20}$

$M_r = 10^{14{,}02/20} = 5{,}02$

$5{,}02 = \dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$

$10{,}04\,\xi\sqrt{1-\xi^2} = 1$

$10{,}04^2\,\xi^2(1-\xi^2) = 1$

$\xi^2 - \xi^4 = (10{,}04)^{-2} = 0{,}01$

$\xi^4 - \xi^2 + 0{,}01 = 0$ $\xi^2 = \beta$ $\xi^4 = \beta^2$ $\beta^2 - \beta + 0{,}01 = 0$

$\beta_1 = 0{,}99$ $\beta_2 = 0{,}01$

$\xi_{1,2} = \pm\sqrt{\beta_1} = \pm 0{,}99$

$\xi_{3y4} = \pm\sqrt{\beta_2} = \pm 0{,}1$ $\boxed{\xi = 0{,}1}$

Suponemos que el sistema es estable y descartamos los valores negativos de ξ. Me quedo con $\xi = 0{,}1$ porque el Bode es subamortiguado.

Consideramos la frecuencia de resonancia.

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \qquad \omega_n = \frac{\omega_r}{\sqrt{1-\xi^2}} = 20 \ \frac{rad}{s}$$

$$G(s)H(s) = \frac{(s+1)\ (0{,}2\ s+1)}{s^2\left(\frac{s}{400} + \frac{2\cdot 0{,}1}{20}s + 1\right)} = \frac{(s+1)(0{,}2s+1)}{s^2\left(\frac{s^2}{400} + 0{,}01s + 1\right)}$$

$$G(s)H(s) = \frac{400(s+1)\cdot 0{,}2(s+5)}{s^2(s^2+4s+400)} = \frac{80(s+1)(s+5)}{s^2(s^2+4s+400)}$$ (Forma canónica)

$$G(s) = \frac{80(s+1)\cancel{(s+5)}}{s^2\cancel{(s+4s+400)}} \cdot \frac{1\cancel{(s^2+4s+400)}}{\cancel{(s+5)}}$$

$$G(s) = 80\ \frac{s+1}{s^2}$$

10.09.2013

Trabajo Práctico nº 7-2. Diagrama Polar.

Ejercicio 1

$$G(s)H(s) = \frac{k}{s(s+10)(s+20)}$$

Para $k = 1000$ y $k = 10000$

- Análisis de bajo frecuencia. ($k = 1000$)

$$\lim_{s\to 0} G(s)H(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1000}{s(s+10)(s+20)} = \lim_{s\to 0} \frac{1000}{s\cdot 200} = \frac{5}{s}$$

$$\lim_{s\to 0} G(s)H(s) = \lim_{s\to 0} \frac{5}{s}$$ Ahora hacemos $s - j\omega$.

$$\lim_{\omega\to 0} G(j\omega)H(j\omega) = \lim_{\omega\to 0} \frac{5}{j\omega} \rightarrow -j\infty$$

- Analisis de alta frecuencia

$$\lim_{s\to\infty} G(s)H(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{1000}{s^3}$$

$s = j\omega$

$$\lim_{\omega\to\infty} G(j\omega)H(j\omega) = \lim_{\omega\to\infty} \frac{1000}{-j\omega^3} \rightarrow j0.$$

Buscamos el cruce de los ejes, planteamos la función ($j\omega$) y vemos si cruza o no los ejes.

$$G(s)H(s) = \frac{k}{s(s+10)(s+20)} = \frac{k}{s^3+30s^2+200s}$$

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{1000}{-j\omega^3-30\omega^2+j200\omega} = \frac{1000}{-30\omega^2+j(200\omega-\omega^3)} = \frac{1000\,[-30\omega^2+j(\omega^3-200\omega)]}{900\omega^4+(200\omega-\omega^3)}$$

No hay cortes para valores finitos del eje imaginario $(Re=0)$
Hay cortes en el eje real $(Im=0)$.

Corte al eje real.

$$\omega^3-200\omega=0 \rightarrow \omega^2=200 \Rightarrow \omega=\pm\sqrt{200}= 14{,}14\ \frac{rad}{seg}.$$

$$G(j14{,}14)\,H(j14{,}14) = -1000\cdot\frac{1}{30\omega^2} = -1000\cdot\frac{1}{30\cdot 200}$$

$$G(j14{,}14)\cdot H(j14{,}14) = -0{,}67+j0\Big|_{k=1000}$$

$$G(j14{,}14)\cdot H(j14{,}14) = -6{,}7+j0\Big|_{k=10000}$$

Ejercicio 2: Bode

$$G(s)H(s) = \frac{1000}{s(s+10)(s+20)} \quad (1)$$

Determinar k_v del gráfico

$$G(s)\cdot H(s) = \frac{1000}{s\cdot 10(0{,}1s+1)(0{,}05s+1)\cdot 20} = \frac{5}{s\,(0{,}1s+1)(0{,}05s+1)}$$

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{5}{j\omega(1+j0{,}1\omega)(1+j0{,}05\omega)}$$

$$5\Big|_{dB} = 20\log 5 = 13{,}98\ dB$$

Comenzamos en 1 (una década menos que la más chica de (1)) y terminamos con una década más grande de 1000.

Hacer el bode a continuación (módulo y fase)

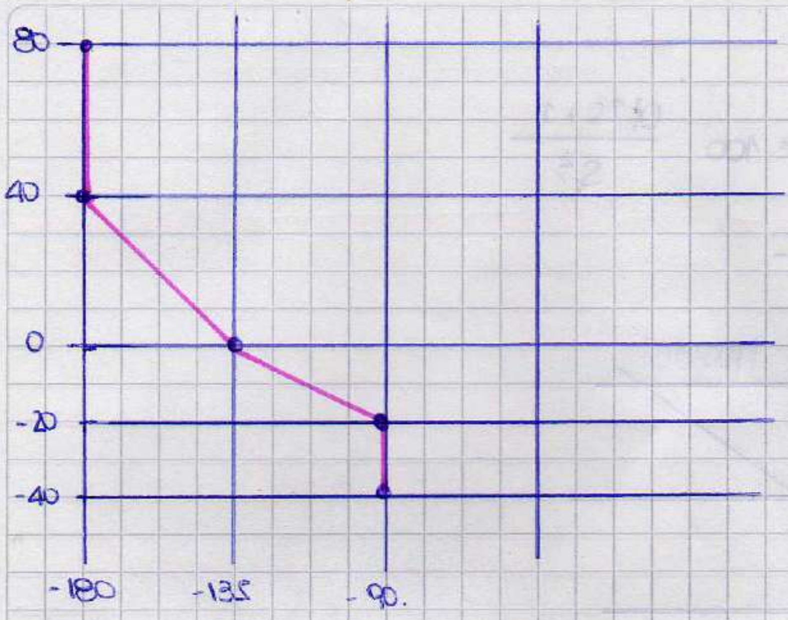
Para sacar el kv de un Bode se toma el punto donde corta en 0dB la pendiente de -20dB/dec.

→ Tabla y gráfico

Esto va al final del ejercicio 3 (me equivoqué y lo puse más adelante) *

ω	$\lvert G(j\omega)H(j\omega)\rvert_{dB}$	$\angle G(j\omega)H(j\omega)$
0,1	80	-180°
1	40	-180°
10	0	-135°
100	-20	-90°
1000	-40	-90°

Me fijo en el Bode.



Ejercicio 4

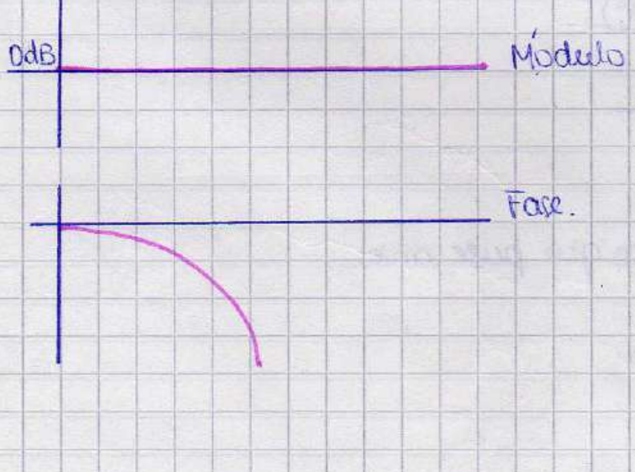
$$G(s)\,H(s) = e^{-0{,}8s}$$

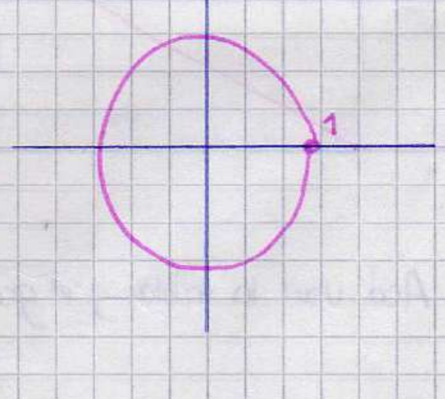
$$G(j\omega)\,H(j\omega) = e^{-j0{,}8\omega} = \cos 0{,}8\omega - j\,\mathrm{sen}\,0{,}8\omega.$$

$$|G(j\omega)\,H(j\omega)| = 1 \qquad // \text{Módulo}$$

$$\underline{/G(j\omega)\,H(j\omega)} = \mathrm{arctg}\left(\frac{-\mathrm{sen}\,0{,}8\omega}{\cos 0{,}8\omega}\right) = \mathrm{arctg}\left(-\mathrm{tg}\,0{,}8\omega\right) = -0{,}8\omega\ \frac{\text{rad}}{\text{seg}} =$$

$$= -45{,}84\omega\ [°]$$





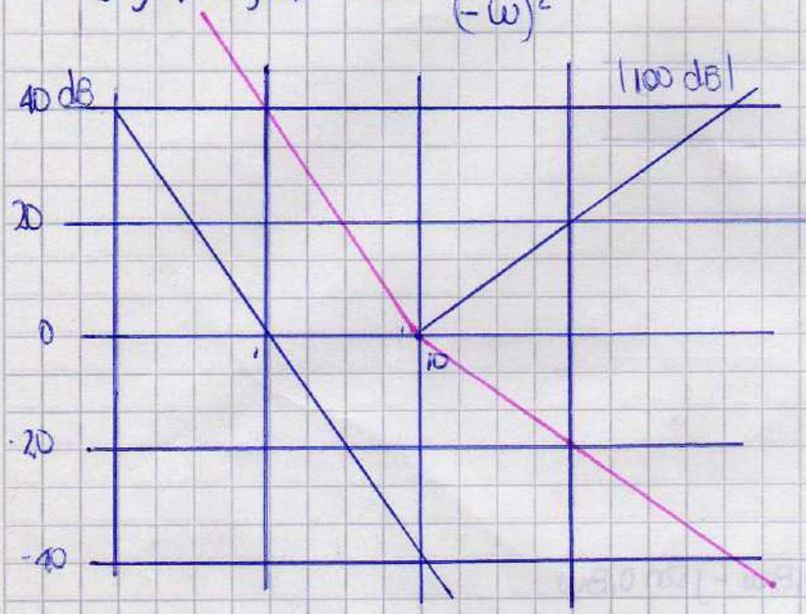
Me equivoqué de orden!.

Ejercicio 3. Bode, kv y diagrama del log de la magnitud en función de la fase.

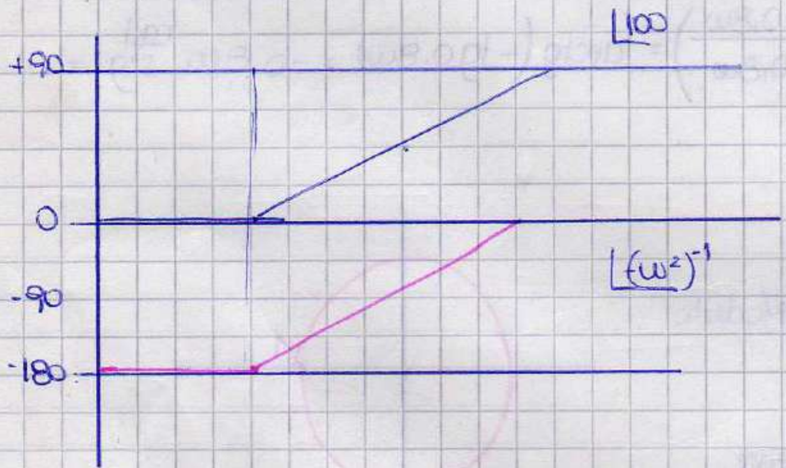
$$G(s)H(s) = 10\ \frac{s+10}{s^2}$$

$$G(s)H(s) = \frac{10 \cdot 10\,(0{,}1s+1)}{s^2} = 100\ \frac{0{,}1s+1}{s^2}$$

$$G(j\omega)\ H(j\omega) = 100\ \frac{1+j0{,}1\omega}{(-\omega)^2}$$



$\sqrt{k_v} = 10 \therefore k_v = 10^2 = 100$.



(*) Acá van la tabla y el gráfico que puse antes.

TP8: Margen de ganancia y fase. Niquist. 17.09.2013

(Copiado).

Ejercicio 1 $G(s)H(s) = \dfrac{k}{s(s+5)(s+10)}$

con $k = 100$ y $k = 1000$

$$G(s)H(s) = \frac{k}{s(5)(0{,}2\,s+1)(20)(0{,}1s+1)}$$

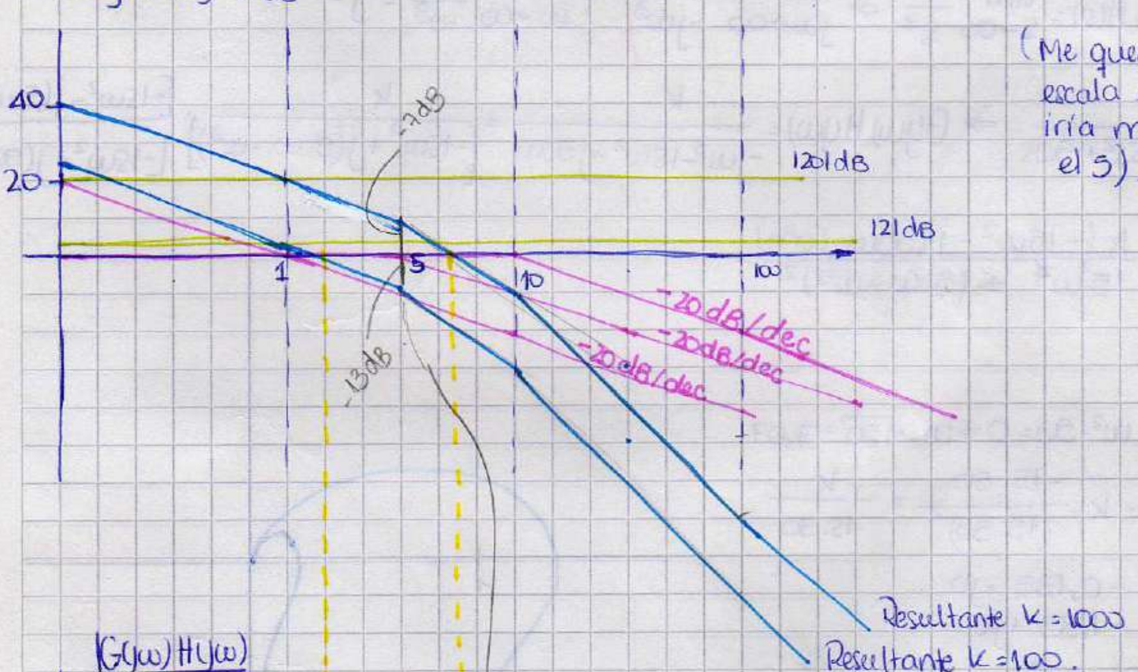
$$G(s)H(s) = \frac{k}{50}\,\frac{1}{s(0{,}2\,s+1)(0{,}1s+1)}$$

$k = 100$

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{2}{j\omega(1+j0{,}2\omega)(1+j0{,}1\omega)}$$

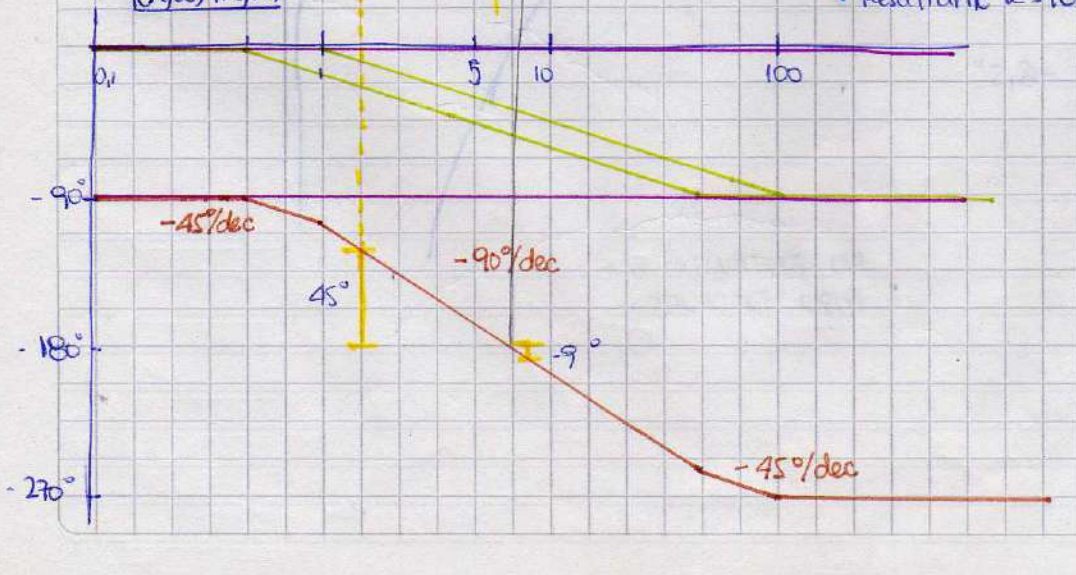
$|2|_{dB} = 6{,}02\,dB$?

$|G(j\omega)H(j\omega)|_{dB}$



(Me quedó lineal la escala entre 1 y 10... iría más a la derecha el 5).

$\angle G(j\omega)H(j\omega)$



(Puse el margen de fase corrido porque usé mal las escalas!) (y el de ganancia).

Resultante $k = 100$ y $k = 1000$.

Diagrama del logaritmo de la magnitud en función de la fase.

	$\lvert G(j\omega)H(j\omega)\rvert_{dB}$		$\lvert G(j\omega)H(j\omega)\rvert$
[illegible]	k=100	k=1000	
0,1	26,02	46,02	-90°
0,5	12	32	-90°
1	6,02	26,02	-103,5°
5	-9	11	-171°
10	-21	-1	-198°
50	-63	-43	-261°
100	-81	-61	-270°

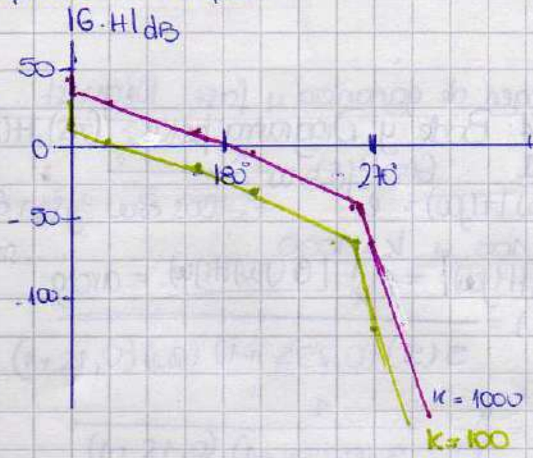


Diagrama polar

$$G(s)H(s) = \frac{k}{s(s+5)(s+10)}$$

$$BF = \lim_{s\to 0} G(s)H(s) = \lim_{s\to 0} \frac{k}{50s} \Rightarrow \lim_{j\omega\to 0} \frac{k}{50j\omega} = \lim_{\omega\to 0} \frac{-jk}{50\omega} = -j\infty.$$

$$AF = \lim_{s\to\infty} G(s)H(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{k}{s^3} \Rightarrow \lim_{j\omega\to\infty} \frac{k}{-j\omega^3} = \lim_{\omega\to\infty} \frac{jk}{\omega^3} = j0.$$

$$G(s)H(s) = \frac{k}{s^3+15s^2+50s} \Rightarrow G(j\omega)H(j\omega) = \frac{k}{-j\omega^3-15\omega^2+j50\omega} = \frac{k}{[-15\omega^2+j(50\omega-\omega^3)]} \cdot \frac{[-15\omega^2-j(50\omega-\omega^3)]}{[-15\omega^2-j(50\omega-\omega^3)]} =$$

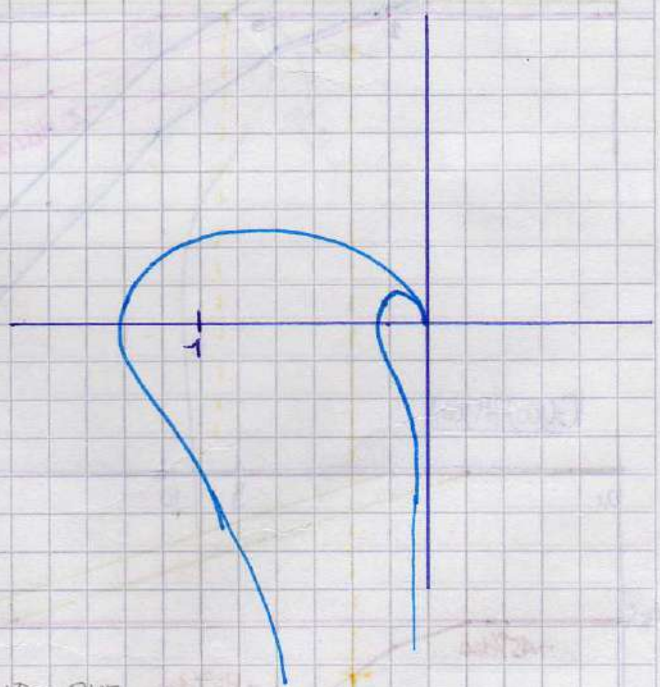
$$= G(j\omega)H(j\omega) = \frac{k(-15\omega^2-j(50\omega-\omega^3))}{15^2\omega^4+(50\omega-\omega^3)^2}$$

Corte al eje real

$$\omega^3-50\omega=0 \Rightarrow \omega^2-50=0 \Rightarrow \omega=\sqrt{50}=7{,}07$$

$$G(j7{,}07)H(j7{,}07) = k \cdot \frac{-15 \cdot 50}{(15 \cdot 50)^2} = -\frac{k}{15 \cdot 50}$$

Para $k=100 \rightarrow -0{,}133+j0.$
Para $k=1000 \rightarrow -1{,}33+j0.$



$$180°-\gamma \left| \begin{array}{l} 180°-108°=72° \\ 180°-186{,}5°=-6{,}5° \end{array} \right.$$

$$Mg = \frac{1}{kg} = -2{,}48\ dB$$

NO ENTIENDO QUE HIZO DESPUES -

$$Mg = \frac{1}{kg} = -17{,}13\ dB$$

Falta s
17/9 y 24/9

Unidad temática 8: ESTABILIDAD EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA
Trabajo Práctico 8-1: Criterio de estabilidad de Nyquist. Interpretación del diagrama de Nyquist: baja y alta frecuencia. Estabilidad relativa: margen de ganancia y margen de fase en los diagramas de Bode y Polar.

Ejercicio 1: determinar mediante los diagramas de Bode, polar y del logaritmo de la magnitud en función de la fase, los márgenes de ganancia y de fase del siguiente sistema de lazo abierto:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+5)(s+10)}$$

Dar a la ganancia el valor 100 y 1.000.

Ejercicio 2: mediante el diagrama de Bode determinar los márgenes de ganancia y de fase del siguiente sistema:

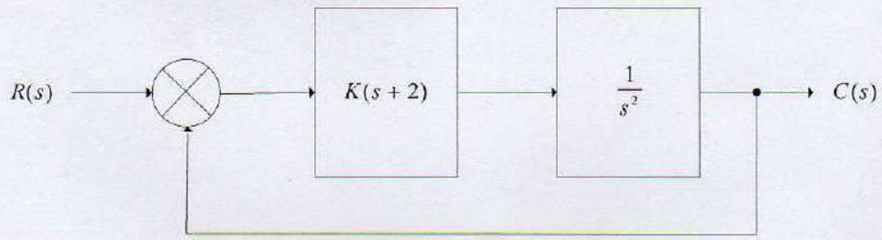
$$G(s)H(s) = \frac{10}{(s-1)(s+5)(s+10)}$$

Luego mediante el uso del diagrama Polar y criterio de Nyquist determinar la estabilidad del sistema a lazo cerrado.

Ejercicio 3: Mediante el uso del criterio de estabilidad de Nyquist determinar la estabilidad a lazo cerrado del siguiente sistema:

$$G(s)H(s) = \frac{10000}{s(s+10)(s+20)}$$

Ejercicio 4: dado el siguiente sistema:



Determinar k para un margen de fase de 50°.

(31)

24.09.2013

TP8-1 Estabilidad en el dominio de la frecuencia.

Ejercicio 2 - Parte B.

$$G(s)H(s) = 10\,\frac{(s+2)}{(s+1)(s+5)(s+10)}$$

Análisis en baja frecuencia

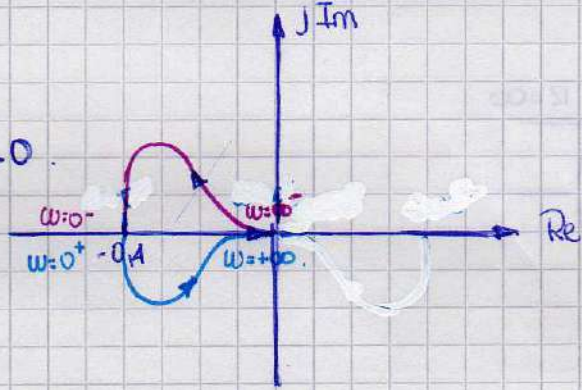
$$\lim_{s\to 0} G(s)\,H(s) = \lim_{s\to 0} 10\,\frac{(s+2)}{(s+1)\,(s+5)(s+10)} = -0{,}4 + j0.$$

Análisis en alta frecuencia.

$$\lim_{s\to\infty} G(s)H(s) = \lim_{s\to\infty} 10\,\frac{(s+2)}{(s-1)(s+5)(s+10)} = \lim_{s\to\infty} \frac{10\,s}{s^3} = \lim_{s\to\infty} \frac{10}{s^2}$$

$s = j\omega$

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{10}{-\omega^2} = -0.$$



$$G(s)\,H(s) = 10\,\frac{(s+2)}{(s-1)(s^2+15s+50)} = 10\,\frac{(s+2)}{s^3+14s^2+35s-50}$$

Cruce a los ejes

$$G(j\omega)\,H(j\omega) = 10\,\frac{(j\omega+2)}{-j\omega^3-14\omega^2+j35\omega-50} = 10\,\frac{(j\omega+2)}{-(14\omega^2+50)+j(35\omega-\omega^3)}$$

$$= \frac{10\,(j\omega+2)\left[-(14\omega^2+50)-j(35\omega-\omega^3)\right]}{+(14\omega^2+50)^2+(35\omega-\omega^3)^2} =$$

$$= 10\,\frac{-28\omega^2-100-\omega^4+35\omega^2+j\left[2\omega^3-70\omega-14\omega^3-50\omega\right]}{(14\omega^2+50)^2+(35\omega-\omega^3)^2}$$

$$= 10 \frac{-\omega^4 + 7\omega^2 - 100 + j(-12\omega^3 - 120\omega)}{(14\omega^2+50)^2 + (35\omega - \omega^3)^2}$$

$-12\omega^2 - 120 = 0 \Rightarrow -\omega^2 - 10 = 0 \Rightarrow \omega^2 = -10 \rightarrow$ no hay valores reales de ω. no hay corte al eje ~~imaginario~~ real.

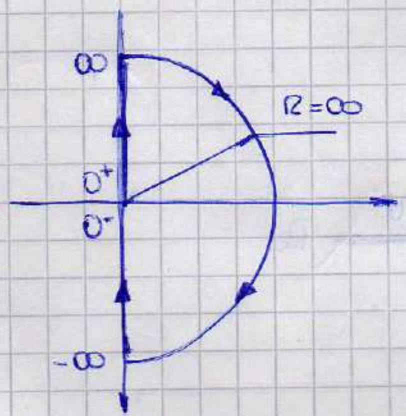
Corte al eje ~~real~~: imaginario.

$-\omega^4 + 7\omega^2 - 100 \rightarrow -\alpha^2 + 7\alpha - 100 = 0$

$\alpha_{1,2} = 3,5 \pm j9,36 \rightarrow$ tampoco hay corte al eje imaginario.

La parte imaginaria es siempre negativa, por lo que el gráfico queda en el tercer cuadrante.

No hay rodeos al origen. Si tuviéramos que cerrarlo usamos el contorno de Nyquist:



$N = 0$
$N = Z - P$.

Como estoy analizando el denominador examino los ceros.

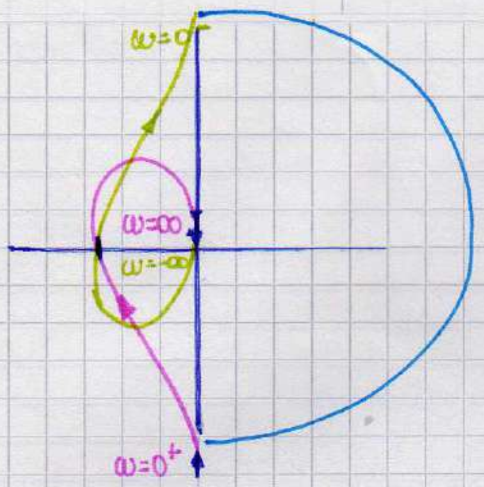
La función de transferencia tiene un polo con parte real positiva en +1. Por esto $P = 1$, por lo tanto $Z = N + P = 1$. y el sistema es inestable a lazo cerrado.

Ejercicio 3.

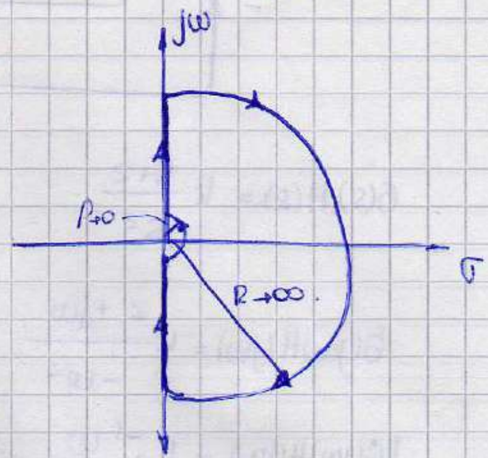
$$G(s)\,H(s) = \frac{10000}{s(s+10)(s+20)}.$$

$$BF: \lim_{s\to 0} \frac{100\cancel{00}}{s \cdot 1\cancel{0} \cdot 2\cancel{0}} = \lim_{s\to 0} \frac{50}{s} \rightarrow \lim_{\omega\to 0} \frac{50}{j\omega} = -j\infty.$$

$$AF = \lim_{s\to\infty} \frac{10000}{s^3} \Rightarrow \lim_{\omega\to\infty} \frac{10000}{-j\omega^3} = j0$$



Contorno de Nyquist.



Análisis de corte a los ejes.

$$G(s)H(s) = \frac{10000}{s^3+30s^2+200s} \Rightarrow G(j\omega)H(j\omega) = \frac{10000}{-30\omega^2+j(200\omega-\omega^3)} = 10000\,\frac{-30\omega^2+j(\omega^3-200\omega)}{(30\omega^2)^2+(200\omega-\omega^3)^2}$$

$$\omega^3-200\omega=0 \Rightarrow \omega=\sqrt{200}=14{,}14\ \frac{rad}{s}$$

$$G(j14{,}14)H(j14{,}14) = 10000\cdot\frac{-30\cdot 200}{(-30\cdot 200)^2} = 10000\cdot\frac{1}{-30\cdot 200} = -\frac{10}{6} = -1{,}67+j0.$$

Para ver en qué sentido se cierra el diagrama vemos el análisis en baja frecuencia reemplazando s por su notación polar

$$s=\rho e^{j\theta}$$

$$\frac{50}{s} \rightarrow \frac{50}{\rho e^{j\theta}} \rightarrow \infty e^{-j\theta}$$

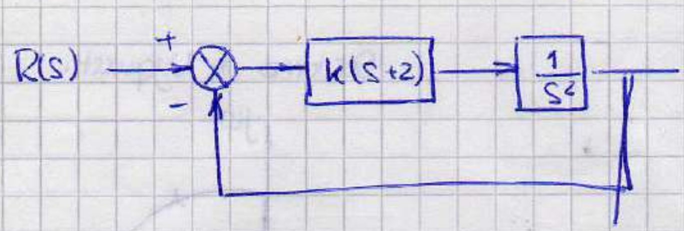
Como tengo que cerrar en sentido contrario y en el contorno de Nyquist voy de 0^- a 0^+ en sentido antihorario, debo cerrar en sentido horario.

$N = Z - P = 2$

$Z = N + P = 2 + 0 = 2$ → Sistema inestable.

(No entiendo muy bien lo del lugar de raíces)
BUSCAR

Ejercicio 4: Determinar k para un margen de fase de 50°.



$$G(s)H(s) = k\,\frac{s+2}{s^2}$$

$$G(j\omega)H(j\omega) = k\,\frac{2+j\omega}{-\omega^2}$$

$$\underline{|G(j\omega)H(j\omega)} = tg^{-1}\frac{\omega}{2} - 180° = 130°$$

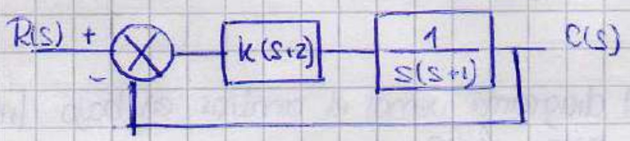
$$\text{arctg}\,\frac{\omega}{2} = 50° \qquad \omega_c = 2\,tg\,50° = 2{,}38\ \frac{rad}{s}$$

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = k\,\frac{\sqrt{4+\omega_c^2}}{\omega_c^2} = 1 \Rightarrow k = 1{,}82.$$

08.10.2013

TP9 - 1. Compensación

Ejercicio 1. Compensación por ajuste de ganancia.

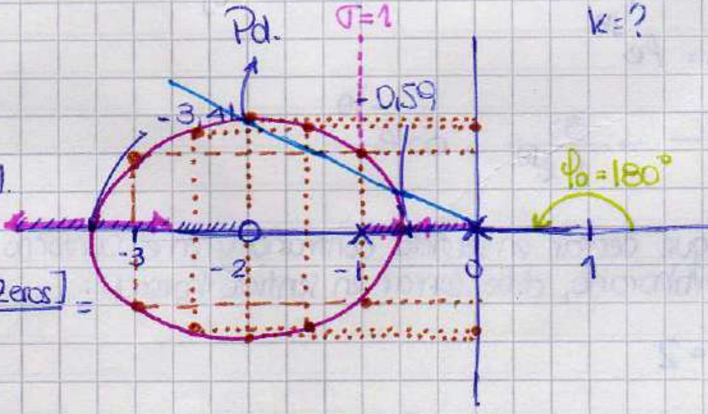


$\xi = 0{,}866$

$t_{estab\,5\%} < 3s$

$k = ?$

$$G(s)H(s) = k\,\frac{(s+2)}{s(s+1)}$$



Asíntotas = 2 Polos - 1 Zero = 1.

$\varphi_0 = 180°$

$$\sigma_c = \frac{\sum Re[polos] - \sum Re[zeros]}{p-z} = \frac{-1+2}{2-1} = 1$$

$$PB = k\,\frac{(s+2)}{s(s+1)} + 1 = 0$$

$$k = -\frac{s(s+1)}{(s+2)} = -\frac{s^2+s}{s+2}$$

(Es un círculo (medio elipse por distinta escala))

$$\frac{\partial k}{\partial s} = -\frac{(2s+1)(s+2)-(s^2+s)}{(s+2)^2} = 0$$

$$\frac{\partial k}{\partial s} = -\frac{2s^2+4s+s+2-s^2-s}{(s+2)^2} = 0$$

$$\frac{\partial k}{\partial s} = \frac{s^2+4s+2}{(s+2)^2} = 0$$

$pb_1 = s_1 = -0{,}59$

$pb_2 = s_2 = -3{,}41$

Aplicar criterio de Ruth-Hourwitz (me va a dar que no hay valor de k que haga inestable la función.)

$k(s+2) + s(s+1) = ks + 2k + s^2 + s$ → usando esta ecuación para Ruth

$s^2 + (k+1)s + 2k = 0$

Obtenemos k para $s = -0{,}59$ y $s = -3{,}41$

$k(-0{,}59) = 0{,}17$

$k(-3{,}41) = 5{,}83$

Trazamos el L.R. punto a punto.
Hay un punto entre 0,17 y 5,83 donde $k = 1$. $s^2 + 2s + 2$

Lo calculamos y da $-1 \pm j1 = s_{1\text{-}2}$

Otro valor es $k = 2$. $s^2 + 3s + 4$

$s_{1\text{-}2} = -1{,}5 \pm j1{,}32$.

$k=3$ $s^2 + 4s + 6 = 0$

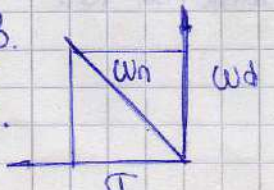
$s_{1\text{-}2} = -2 \pm j1{,}41$

$k=4$ $s^2 + 5s + 8$ $s_{1,2} = -2{,}5 \pm j1{,}32$

$k=5$ $s^2 + 6s + 10 = 0$ $s_{1,2} = -3 \pm j1$

$\xi = 0{,}866 = \cos\beta$.

$\beta = \arccos 0{,}866 = 30°$.



Debo compensar por el punto que está por encima de $|v| = 1$. me queda que es el punto de corte de más a la izquierda.

Del gráfico: $p_d = -2,4 \pm j\,1,35$ (método gráfico).

$$k = -\frac{s(s+1)}{s+2}$$

$$|k| = \frac{|s|\,|s+1|}{|s+2|} = \frac{2,75 \cdot 1,94}{1,41} = \boxed{3,78}$$

Esto se hace midiendo en el gráfico.

El módulo de s es el módulo del segmento que une el punto de diseño con el polo en el origen.

$$|s| = \sqrt{(2.4)^2 + (1,35)^2} = 2,75$$

$$|s+1| = \sqrt{(1,4)^2 + (1,35)^2} = 1,94$$ (segmento entre polo $= -1$ y pd)

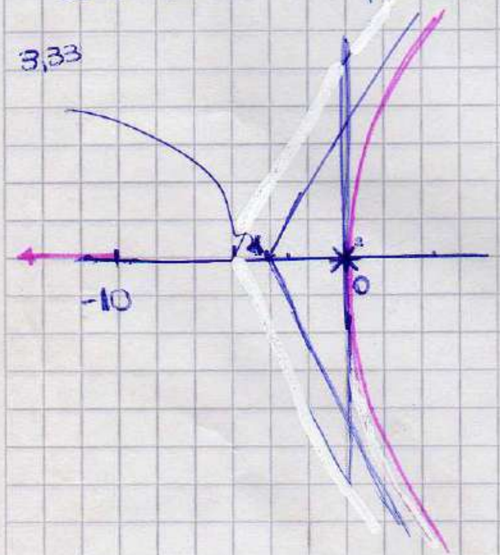
$$|s+2| = 1,41$$ (radio del círculo).

Ej. 2: Compensación por adelanto de fase por método de lugar de raíces.

$$G(s)H(s) = \frac{100}{s^2(s+10)}$$

Se pide
- estabilidad
- $\xi = 0,5$
- $\omega_d = 5\ rad/s$
- $e_{ss} = 0$ para $r(t) = t\,\mu(t)$.

Es un sistema de tipo 2. El error para una entrada rampa es 0.



Asíntotas = 3
$P - Z = 3$

$\varphi_0 = 60°$

$\varphi_1 = 180°$

$\varphi_2 = 300°$.

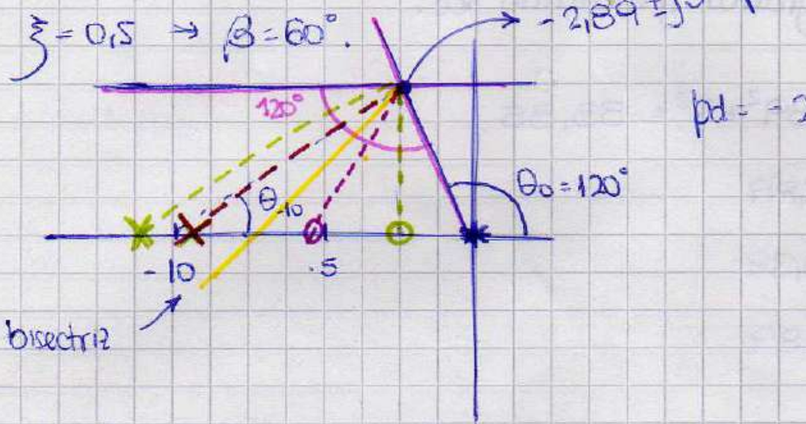
$$\sigma_c = \frac{-10}{3} = -3,33$$

$p_b = 0$.

Este sistema para cualquier k es inestable. No se puede lograr lo condición dinámica por ajuste de ganancia, usamos compensación por adelanto de fase.

Para compensar por adelanto de fase tengo que buscar el punto de diseño.
$\omega d = 5$ rad/seg.

$\xi = 0{,}5 \rightarrow \beta = 60°$.



$pd = -2{,}89 \pm j5$

Verificamos la contribución de fase.

$$\left.\begin{aligned}\theta_0 &= 120° \\ \theta_{-10} &= 35{,}12°\end{aligned}\right\} \text{fase del sistema} = -2\theta_0 - \theta_{-10} = -240 - 35{,}12 = -275{,}12°$$

El compensador en adelanto de fase debe aportar la fase para que ese punto sea lugar de raíces. $(1 \angle 180°$

$-275{,}12° + \varphi_c = \pm 180°$ → uso el que me de el ángulo más chico.

$$\boxed{\varphi_c = 95{,}12°}$$

Vamos a poner compensadores por adelanto de fase pero que ninguno de ellos supere los 60° para que no se aproxime a un derivador puro.

Como $95{,}12 > 60$, pongo 2 compensadores, uno de 60 y uno de 35,12.

Método de la bisectriz: uno el pd con el origen y trazo una paralela al eje σ que pase por el punto de diseño: se forma un ángulo. A ese ángulo trazamos la bisectriz geométrica.
A partir de la bisectriz trazamos medio ángulo del condensador para un lado y medio para el otro de manera que corten el eje σ. En el corte más cercano al origen pongo el cero del compensador y en el más alejado el polo del compensador. *
Lo mismo con el segundo compensador. *

$p_{c_1} = 12 \qquad z_{c_1} = 2{,}89$

$p_{c_2} = 9 \qquad z_{c_2} = 5{,}1$

Ahora hay que encontrar la ganancia del compensador.

$$0 = 1 + G(s)H(s) = \frac{100\,K_c}{s^2(s+10)} \cdot \frac{(s+z_{c_1})}{(s+p_{c_1})} \cdot \frac{(s+z_{c_2})}{(s+p_{c_2})} + 1 = 0$$

$$k_c = \frac{|s^2||s+10||s+p_{c1}||s+p_{c2}|}{100\,|s+z_{c1}||s+z_{c2}|} = \frac{33{,}35 \cdot 8{,}69 \cdot 10{,}39 \cdot 7{,}89}{100 \cdot 5 \cdot 5{,}47} = \boxed{8{,}69}$$

Saco los módulos de forma gráfica y encuentro kc.

$$|s|^2 = \left(\sqrt{2{,}89^2 + 5^2}\right)^2 = 2{,}89^2 + 5^2 = 33{,}35$$

$$|s+10| = \sqrt{7{,}11^2 + 5^2} = 8{,}69$$

$$|s+p_{c1}| = \sqrt{9{,}11^2 + 5^2} = 10{,}39$$

$$|s+p_{c2}| = \sqrt{6{,}11^2 + 5^2} = 7{,}89$$

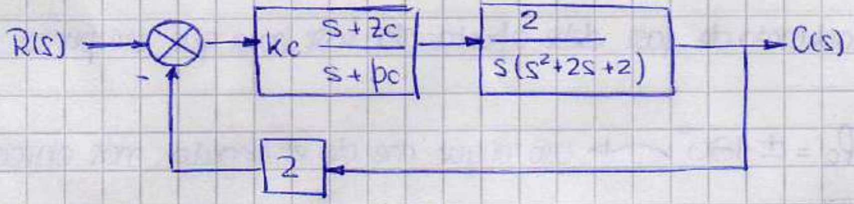
$$|s+z_{c1}| = \sqrt{5^2} = 5$$

$$|s+z_{c2}| = 5{,}47$$

22/10/2013.

TP 9.1 - COMPENSACIÓN ATRASO, ATRASO-ADELANTO.

Ejercicio 3.

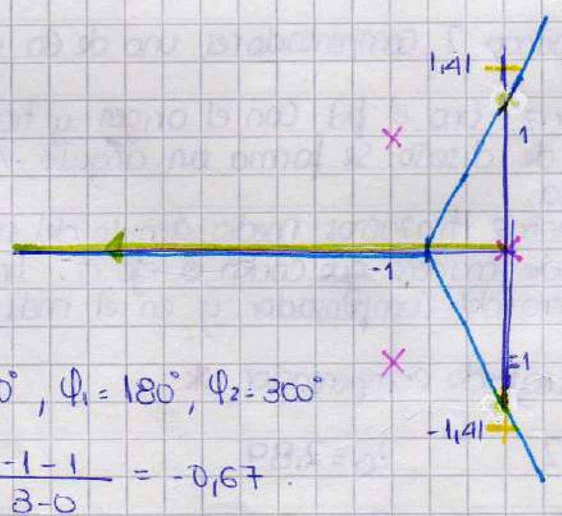


Condición dinámica: ζ, ω_n, ω_d.

Se pide k_c, z_c, p_c para $\zeta = 0{,}5$ y $k_v = 4$

$$G(s)H(s) = \frac{4}{s(s^2+2s+2)} = \frac{4}{s(s+1-j)(s+1+j)}$$

Condición estacionaria: errores, k_v, k_p...



Polos complejos conjugados no cambian la paridad para análisis de lugar de raíces.

Asíntotas $p-z=3$. $\varphi_0 = 60°$, $\varphi_1 = 180°$, $\varphi_2 = 300°$

$$\sigma_c = \frac{\sum Re[p] - \sum Re[z]}{p-z} = \frac{-1-1}{3-0} = -0{,}67$$

Punto de bifurcación → calcular (concluiremos que no hay porque los valores que encontremos no serán lugar de raíces).

Sí hay cruce al eje jω. En algún punto cruza el eje y el sistema se vuelve inestable.

Vamos a analizar estabilidad por Routh-Hourwitz.

$$1 + \frac{4kc}{s(s^2+2s+2)} = 0 \quad \rightarrow \text{ el numerador debe ser cero.}$$

$$s^3 + 2s^2 + 2s + 4kc = 0$$

s^3	1	2
s^2	2	$4kc$
s^1	$2-2kc$	
s^0	$4kc$	

$$a_{31} = \frac{2.2 - 1.4kc}{2} = 2 - 2kc$$

kcrítico → 1

kc < 1 → estable

kc > 1 → inestable.

→ Para obtener los cortes al eje jω armamos una ecuación auxiliar con esta fila usando el valor de kcrítico (=1 en este caso).

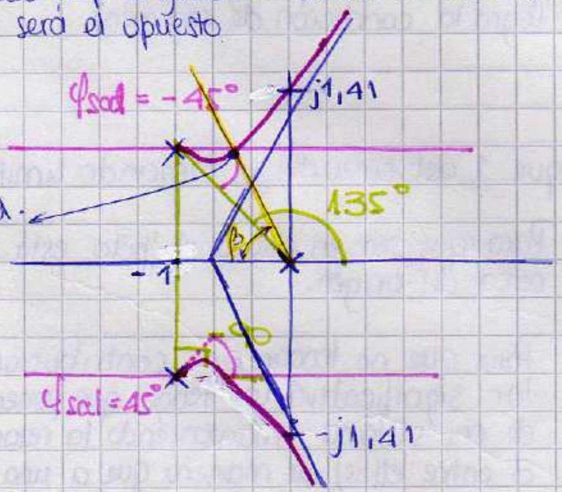
$$2s^2 + 4 = 0$$

$$s^2 + 2 = 0$$

$$s^2 = -2 \Rightarrow s = \pm j1{,}41$$

Ángulo de salida (para polos - para los ceros son ángulos de llegada)

Calculo el ángulo de salida de uno de los polos (en este caso el de arriba) y el del otro será el opuesto



$\varphi_0 = 135°$

$\varphi_{-1-j} = 90°$

(las contribuciones son ~~positiv~~ negativas por tratarse de polos. Para zeros $+\varphi_x + \varphi_y + \varphi_{ent} = \pm 180$).

$$-135 - 90 - \varphi_{salida} = \pm 180$$

$$-225° - \varphi_{salida} = \pm 180°$$

$$-225° \mp 180° = \varphi_{salida} \;\; \begin{cases} -405 \\ -45° \end{cases}$$

Elijo el más chico

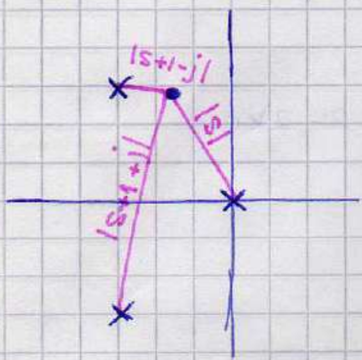
Tengo que salir tangente a ese ángulo.

Diseño: punto de diseño.

$\xi = 0{,}5 = \cos\beta \rightarrow \beta = 60°$.

El punto de diseño es donde esta condición de diseño cruza al lugar de raíces. (ver en amarillo en el diagrama anterior). β se toma en sentido horario. Como corta el diagrama del lugar de raíces se puede compensar ajustando la ganancia. (no necesito adelanto o atraso).

$pd = 0{,}5 + j0{,}9$ (se mide gráficamente).



Cálculo de kc

$$1 + \frac{4kc}{s(s^2+2s+2)} = 0$$

$$kc = -\frac{s(s^2+2s+2)}{4}$$

$$kc = \frac{|s||s+1-j||s+1+j|}{4}$$

$$\left.\begin{aligned} |s| &= \sqrt{(0{,}9)^2+(0{,}5)^2} = 1{,}03 \\ |s+1-j| &= \sqrt{(0{,}1)^2+(0{,}5)^2} = 0{,}51 \\ |s+1+j| &= \sqrt{(1{,}9)^2+(0{,}5)^2} = 1{,}96 \end{aligned}\right\} \quad kc = \frac{1{,}03 \cdot 0{,}51 \cdot 1{,}96}{4} = 0{,}26.$$

$$k_v = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{kc \cdot G_{sistema}}{s(s^2+2s+2)} = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{0{,}26 \cdot 4}{\cancel{s}(s^2+2s+2)} = \frac{0{,}26 \cdot 4}{2} = 0{,}52$$

Como el kv obtenido no coincide con el requerido en la incógnita ($k_v = 4$) tengo que compensar en atraso (es decir, no se logra la condición de régimen)

$k_v = 0{,}52$

agregando el compensador en atraso (bloque 1 del circuito) y tomando límite para $s \to 0$:

$$k_v = 0{,}52 \cdot \frac{z_c}{p_c} = 4 \rightarrow \frac{z_c}{p_c} \approx 8.$$

Para que sea en atraso el polo está más cerca del origen.

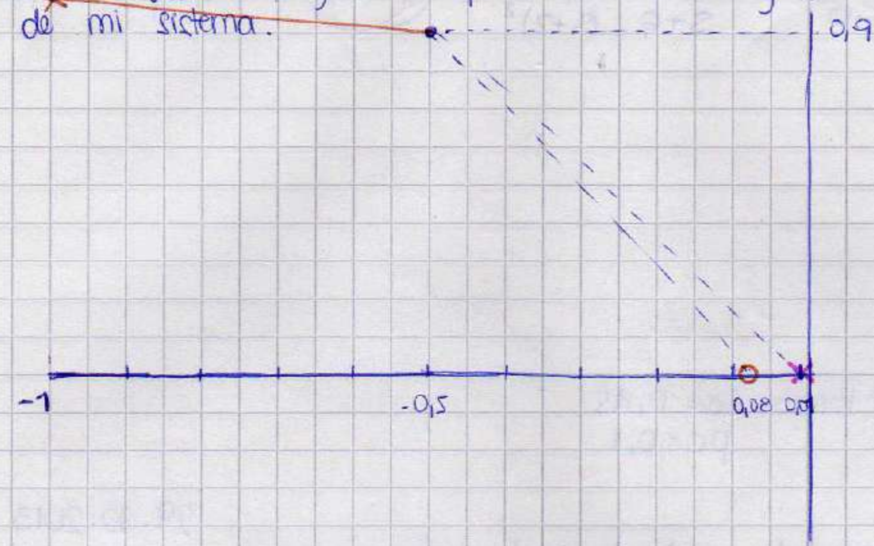
$|Re[pd]| = 0{,}5$

Para irme lejos voy entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{10}$

$0{,}25 > z_c > 0{,}05$ Elijo $\boxed{\begin{aligned} z_c &= 0{,}08 \\ p_c &= 0{,}01 \end{aligned}}$

Para que no tengan una contribución angular significativa los tengo que poner lejos de mi sistema (manteniendo la relación de 8 entre ellos) de manera que a una distancia muy grande las contribuciones angulares de cada uno se anulen.

Con esos valores tengo mi compensador en atraso y no modifiqué el funcionamiento de mi sistema.

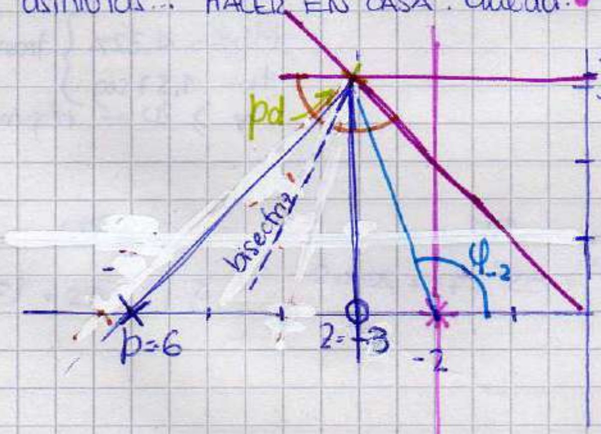


TP 9.1 – COMPENSACIÓN EN ATRASO, ATRASO - ADELANTO.

Ejercicio 4 $\quad G(s) = \frac{1}{(s+2)^2} \quad H(s) = 1$ (polo doble)

Compensar para $\zeta = 0{,}707$, $t_p = 1seg$, $e_{ss} = 0{,}1$

Tenemos un polo doble → para encontrar el lugar de raíces hay que buscar punto de bifurcación, asíntotas... HACER EN CASA. Queda:



$\zeta = \cos\beta = 0{,}707 \Rightarrow \beta = 45°$.

$t_p = \frac{\pi}{\omega d} \Rightarrow \omega d = \frac{\pi}{t_p} = 3{,}14 \frac{rad}{s}$

$pd = -3{,}14 + j3{,}14$

No cruza el lugar de raíces. Compenso por ~~atraso~~ adelanto.

Metodo de la bisectriz:

$\varphi_{-2} = 110$ — Contribución angular de los dos polos $= -220°$.

$-2\varphi_{-2} + \varphi_c = \pm 180°$

$-220 + \varphi_c = \pm 180° \Rightarrow \varphi_c = 40°$. Aplico método gráfico

La ganancia del sistema es

$$k_c \frac{s+3}{s+6} \frac{1}{(s+2)^2} + 1 = 0 \Rightarrow k_c = \frac{|s+2|^2 \, |s+6|}{|s+3|} = \frac{11{,}16 \cdot 4{,}25}{3{,}14} = 15.$$

Sistema de tipo 0: $e_{ss} = \frac{1}{1+k_p} = 0{,}1 \rightarrow k_p = 9.$

$$k_p = \lim_{s\to 0} G(s)H(s) = \lim_{s\to 0} 15 \cdot \frac{s+3}{s+6} \cdot \frac{1}{(s+2)^2} = 1{,}88$$ Tengo que compensar.

$$k_p = 1{,}88 \frac{z_c}{p_c} = 9.$$

$$\frac{z_c}{p_c} \approx 4{,}5$$

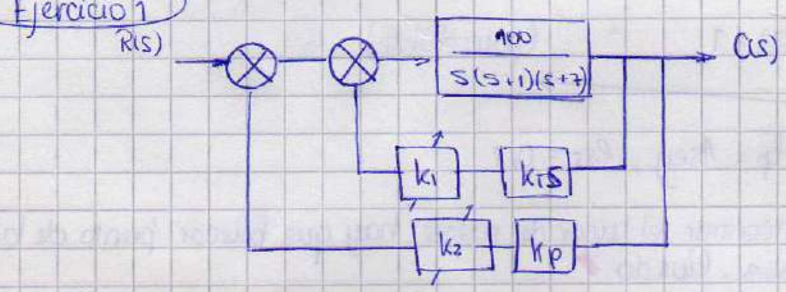
$$\left| Re[p_d] \right| = 3{,}14$$

$1{,}57 > z_c > 0{,}314$ → Pongo $z_c = 0{,}45$
$p_c = 0{,}1$

29.10.2013

TP 9.2. Compensación por métodos respuesta en frecuencia.

Ejercicio 1



- Ganancia derivativa $k_T = 0{,}2$
- Ganancia proporcional $k_p = 1$

k_1 y k_2 ajustar para
- $M_p\% = 4{,}32\%$
- $t_p = 1{,}57$ seg } transitorios.
- $k_v \geq 20$ — régimen

Lazo interno

$$\frac{\frac{100}{s(s+1)(s+7)}}{1 + \frac{100}{s(s+1)(s+7)} \cdot k_1 \cdot 0{,}2s} = \frac{100}{s^3 + 8s^2 + 7s + 20k_1 s} = \frac{100}{s\left[s^2 + 8s + (7+20k_1)\right]}$$

Función total

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{100}{s[s^2+8s+(7+20k_1)]}}{1 + \frac{100}{s[s^2+8s+(7+20k_1)]} \cdot k_2} = \frac{100}{s^3 + 8s^2 + (7+20k_1)s + 100k_2}$$

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

$$t_p = 1{,}57 \text{ seg} = \frac{\pi}{\omega_d} \Rightarrow \omega_d = 2 \frac{rad}{seg}$$

$$M_p\% = e^{-\sigma\pi/\omega_d} \, 100\% = 4{,}32\%$$

$$0{,}0432 = e^{-\sigma\pi/2}$$

$\ln 0{,}0432 = -\frac{\sigma\pi}{2} \Rightarrow \sigma = 2\ seg^{-1}$

$\sigma = \xi\omega_1$; $\omega_n^2 = \sigma^2 + \omega_d^2 = 8\ rad/seg$

La ecuación queda (obtenida de las condiciones de diseño)

$$s^2 + 4s + 8$$

$$\begin{array}{l|l} s^3 + 8s^2 + (7+20k_1)s + 100k_2 & s^2+4s+8 \\ \hline -s^3 - 4s^2 - 8s & s+4 \\ \quad 4s^2 + (20k-1)s + 100k_2 & \\ \quad -4s^2 - 16s \quad - 32 & \\ \quad \underbrace{(20k_1-17)s}_{=0} + \underbrace{100k_2 - 32}_{=0} & \end{array}$$

Si el resto es igual a cero los polos del dividendo son iguales que los del divisor + el del cociente.

$k_1 = 0{,}85 \qquad k_2 = 0{,}32$

$$k_v = \lim_{s\to 0} s\,G(s)H(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{100}{\cancel{s}[s^2+8s+24]} \cdot 0{,}32 = 1{,}33.$$

kv es menor que el que se pide. Tenemos que compensar en atraso por método de lugar de raíces (como hicimos la clase pasada).

Ejercicio 2

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)} \quad ; \quad H(s) = 1$$

$K_v = 20 \qquad M_\phi \geq 50° \qquad M_G \geq 10\,dB.$

Compensación en adelanto → cero más cerca del origen.
(Método de respuesta en frecuencia).

$$G_c(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad ; \quad \alpha < 1$$

$$G_c(s) = K_c \frac{\frac{1}{T}(Ts+1)}{\frac{1}{\alpha T}(\alpha Ts+1)} = \alpha K_c \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$$

$$G_c(s) = K \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} \quad \therefore \; K = \alpha K_c$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} s K \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} \cdot \frac{4}{s(s+2)} = K \cdot \frac{4}{2} = 2K = 20$$

$K = 10$

$G_1(s)$ = la ganancia que acabo de calcular × la planta sin la compensación. $(G.H)$

$$G_1(s) = 10 \cdot \frac{4}{s(s+2)} = \frac{40}{s(s+2)} = \frac{40}{s \cdot 2 \cdot (0{,}5s+1)} = \frac{20}{s(0{,}5s+1)}$$

$|20|_{dB} = 26{,}02\,dB.$

La nueva frec. de corte es 9.

$M_\phi = 18°.$

$50° - 18° = 32°$

Se agregan unos 6 a 8 grados más. Necesito 32°, agrego 38° (Porque la fase de cruce se corre).

$\phi_{máx} = 38°$

$\operatorname{sen}\phi_{máx} = \operatorname{sen} 38° = \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha} \Rightarrow \alpha = 0{,}24$

Del diagrama de Bode sale que la máxima fase se aporta a una frecuencia $\omega_{máx}$. $\omega_{máx}$ queda en el medio del polo y el cero.

$$\omega_{máx} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \frac{1}{\alpha T}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha} \cdot T}$$

El polo y el cero (separados de la ganancia) tienen un aporte de ganancia.

$$\left| \frac{1 + j\omega T}{1 + j\alpha\omega T} \right|_{\omega_{máx} = \frac{1}{\sqrt{\alpha} \cdot T}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

$$20 \log \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = 6{,}2 \text{ dB}$$

Marco $-6{,}2$ dB en el diagrama de Bode. En la intersección con el Bode de módulo tengo la nueva frecuencia de corte $= 9$ rad/seg.

Cuando ponemos el cero y el polo llevamos a cero los $-6{,}2$ dB (lo movemos en ganancia).

$$\omega_{máx} = 9 \frac{rad}{seg} = \frac{1}{\sqrt{\alpha} \cdot T} \quad ; \quad \frac{1}{T} = 4{,}41 \frac{rad}{seg}$$

$$\frac{1}{\alpha T} = 18{,}37 \frac{rad}{seg} \quad ; \quad k_c = \frac{k}{\alpha} = \frac{10}{0{,}24} = 41{,}67$$

Ejercicio 3

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(0{,}5s+1)} \quad ; \quad H(s) = 1 \; ; \; k_v = 5 \; , \; M\phi \geq 40° \; ; \; M_G \geq 10 \text{dB}.$$

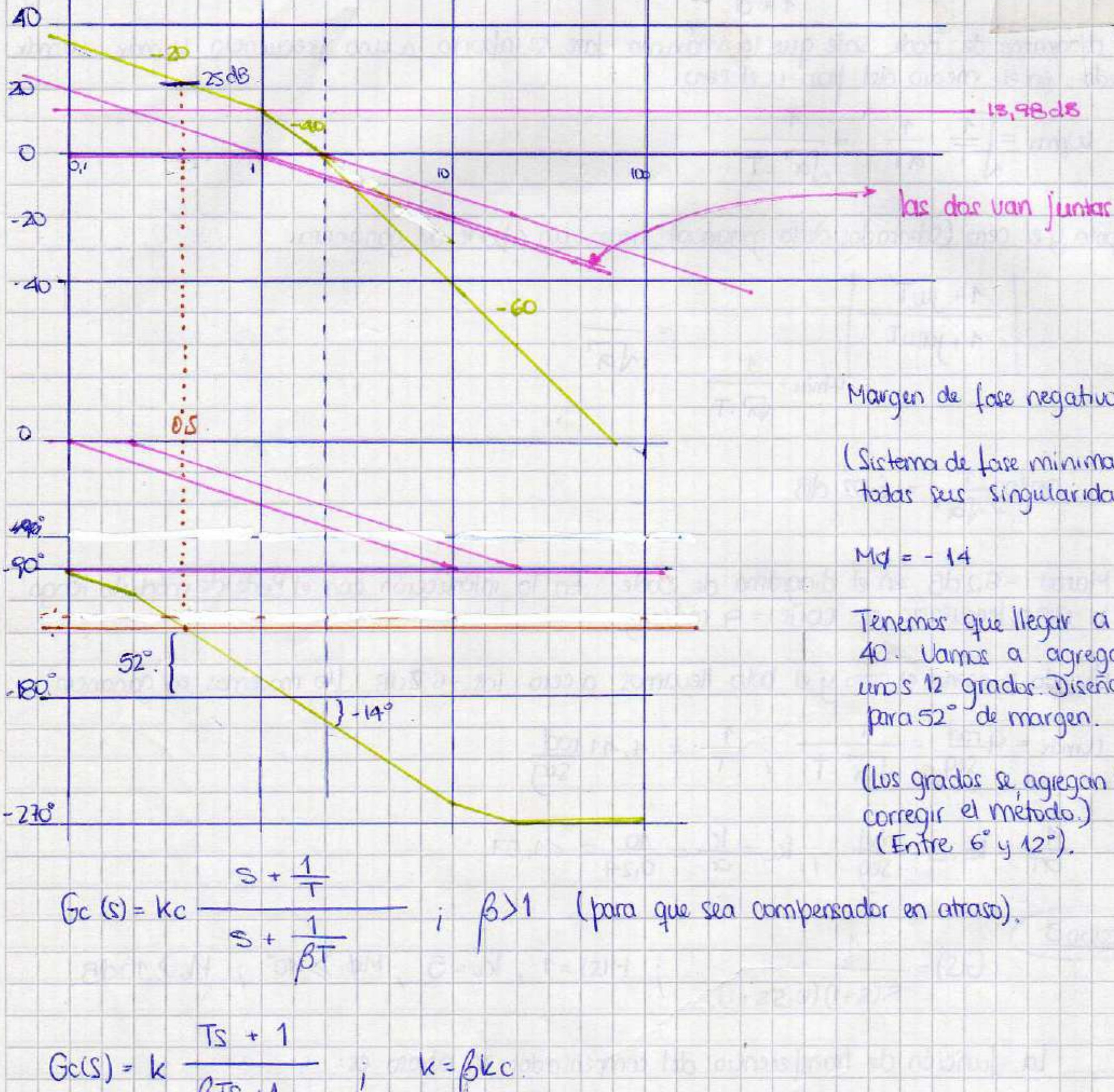
La función de transferencia del compensador en atraso es:

$$k_c \cdot \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \quad ; \quad \beta > 1$$

$$G_c(s) = k_c \cdot \frac{\frac{1}{T}(Ts+1)}{\frac{1}{\beta T}(\beta Ts + 1)} = \overbrace{\beta k_c}^{k} \cdot \frac{Ts+1}{\beta Ts + 1}$$

$$k_v = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s(s+1)(0{,}5s+1)} \cdot k \cdot \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} \Rightarrow k = 5$$

$$G_1(s) = \frac{5}{s(s+1)(0{,}5s+1)} \qquad |5|_{dB} = 13{,}98\,dB$$



Margen de fase negativo

(Sistema de fase mínima: todas sus singularidades

$M\phi = -14$

Tenemos que llegar a 40. Vamos a agregar unos 12 grados. Diseñamos para 52° de margen.

(Los grados se agregan para corregir el método.)
(Entre 6° y 12°).

$$G_c(s) = k_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \quad ; \quad \beta > 1$$ (para que sea compensador en atraso).

$$G_c(s) = k \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} \quad ; \quad k = \beta k_c$$

$40° + 12° = 52° \longrightarrow$ diseñamos para 52°.

Cuando el sistema tiene fase $(180 - 52) = 128°$ tiene margen de fase 52°.
Trazamos una línea en -128°.
La frecuencia de cruce es 0,5.

Coloco el zero entre una octava y una década de la frecuencia de corte. (0,5)

$\frac{1}{2} f_c > \frac{1}{T} > \frac{1}{10} f_c$ $\qquad 0,25 > \frac{1}{T} > 0,05$

Elegimos $\frac{1}{T} = 0,1$ - Tenemos el zero.
El par de singularidades deberá aportar $-25\,dB$ (ver gráfico).

$$\left| \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega\beta T} \right|_{\omega = 0,5 \frac{rad}{seg}} = A$$

$$-25 = 20 \log A \Rightarrow \log A = -\frac{25}{20} \Rightarrow A = 10^{-\frac{25}{20}} = 0,06$$

De la expresión de A despejamos β.

$$\frac{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 \beta^2 T^2}} = 0,06 \Rightarrow \beta \cong 10$$

$$\frac{26}{(0,06)^2} = 1 + 25\beta^2$$

$$\sqrt{\frac{26 - 0,06^2}{0,06^2 \cdot 25}} =$$

El polo del compensador:

$$\frac{1}{\beta T} = 0,01$$

La ganancia del compensador

$$k_c = \frac{k}{\beta} = \frac{5}{10} = 0,5$$

Ejercicio 4. (No entra en el examen).

$$G(s).H(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

$k_v = 10$; $M\phi \geqslant 50°$, $M_G \geqslant 10\,dB$.

$$G_c(s) = k_c \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)}$$

$\beta > 1$

adelanto (z más cerca del origen)

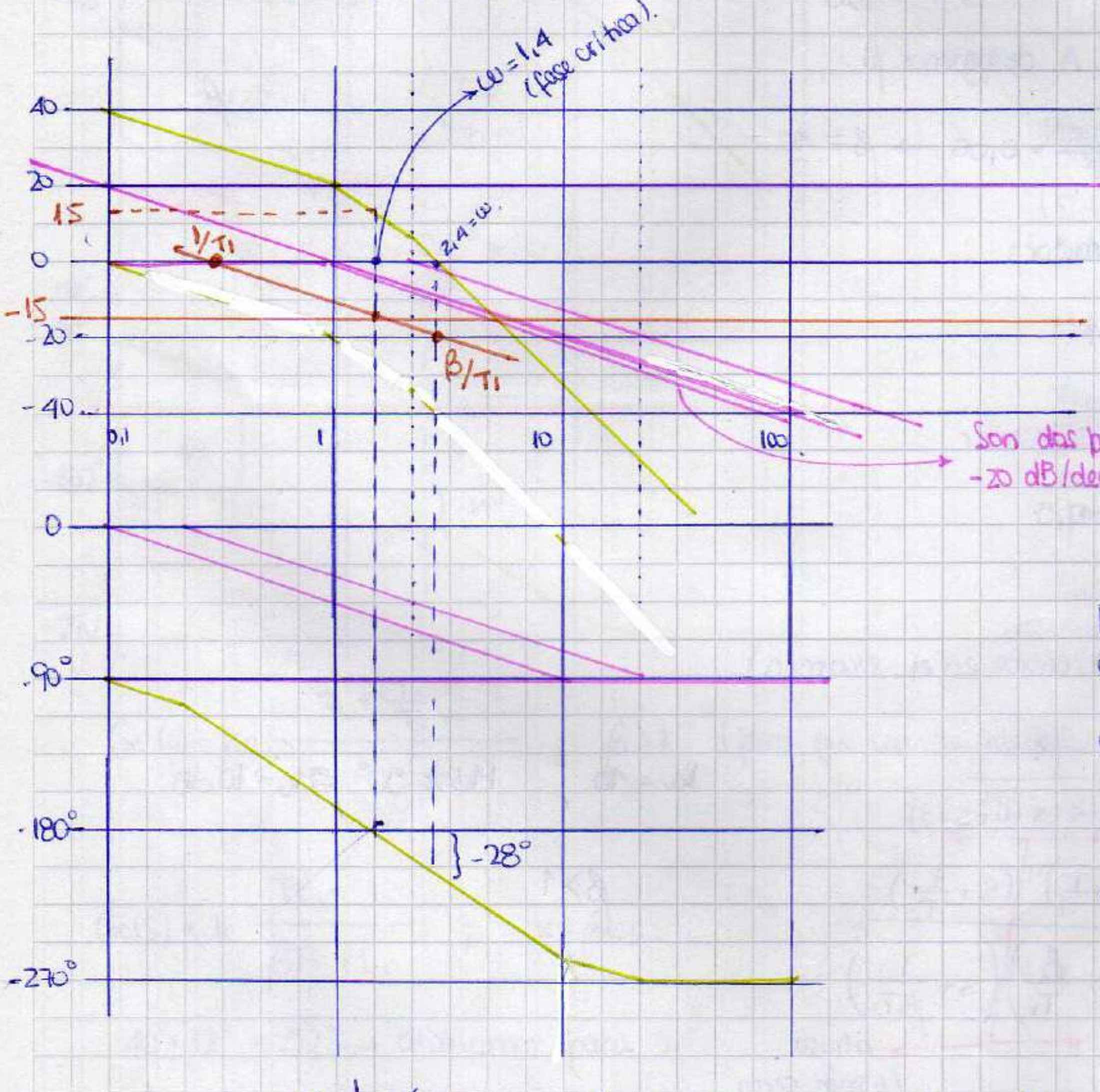
atraso (p más cerca del origen)

$$G_c(s) = k_c \frac{\frac{1}{T_1}(T_1 s+1)\cdot\frac{1}{T_2}(T_2 s+1)}{\frac{\beta}{T_1}\left(\frac{T_1}{\beta}s+1\right)\cdot\frac{1}{\beta T_2}(\beta T_2 s+1)} = k_c \cdot \frac{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}{\left(\frac{T_1}{\beta}s+1\right)(\beta T_2 s+1)}$$

$$k_v = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \cdot k_c \frac{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}{\left(\frac{T_1}{\beta}s+1\right)(T_2\beta s+1)} = 10 = \frac{k_c}{2} \Rightarrow k_c = 20.$$

$$G_1(s) = 20 \cdot \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = 20 \cdot \frac{1}{s(s+1)\cdot 2(0{,}5s+1)}$$

$$G_1(s) = \frac{10}{s(s+1)(0{,}5s+1)} \qquad |10|_{dB} = 20dB.$$



Son dos pendientes juntas de -20 dB/dec desde 1.

La parte del compensador en adelanto debe aportar el margen de fase 50°.

En 1,4 tengo fase crítica (180°), así que ahí agrego los 50°.

$0{,}14 < \frac{1}{T_2} < 0{,}7$; $\frac{1}{T_2} = 0{,}15 \longrightarrow$ zero (atraso).

$$\text{Sen}\,\phi\,\text{máx} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

$$\beta = \frac{1}{\alpha}$$

$$\operatorname{sen} \phi_{máx} = \frac{\beta - 1}{\beta + 1} = \operatorname{sen} 50^\circ = 0{,}77 \Rightarrow \beta = 7{,}55$$

Para tomar un margen (ya que estoy trabajando con los 50° justos), adopto un β de 10.

$$\frac{1}{\beta T_2} = 0{,}015 \longrightarrow \text{Polo del comp. en atraso.}$$

El sistema tiene 15. Trazo una recta en -15. Desde ahí trazo una recta de -20dB/dec que corte los 0dB y los -20dB. Donde corta los 0 dB pongo el zero de mi compensador en adelanto y donde corta los -20 pongo el polo.
El zero está en $1/T_1$ y el polo en β/T_1

$$\frac{1}{T_1} = 0{,}5 \frac{rad}{seg} \qquad \frac{\beta}{T_1} = 5 \, rad/seg.$$

TP 10.1. Repaso de álgebra matricial.

Ejercicio 1

Singular: cuando el determinante da cero

$$[A] = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 10 & -6 \\ 4 & -6 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = 4(18-40) + (-6)(-12+12)(-1) + \dots = 4(-22) = -88$$

No es singular

$$[B] = \begin{vmatrix} -7 & 5 & -2 \\ 5 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & +2 \end{vmatrix} \Rightarrow |B| = 14-40-40+4+112-50=0$$ Es singular

$$[C] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow |C| = -2.8 - 5.0 + 6.0 = -16$$ No es singular

Ejercicio 2

$[A] \times [B]$

			10	-2
			0	3
			-1	-2
2	-3	4	16	-21
5	-10	0	50	-40

$[B] \times [A]$

		2	-3	4
		5	-10	0
10	-2	10	-10	40
0	3	15	-30	0
-1	-2	-12	23	-4

Ejercicio 3

$$[A^{-1}] = \frac{Ad\,[A^T]}{|A|} \quad ; \quad |A| = -2-(-50) = 48$$

$$Adj\,[A] = \begin{bmatrix} -1 & -10 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(Adj\,A)^T = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -10 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow [A^{-1}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{48} & \frac{5}{48} \\ -\frac{10}{48} & \frac{2}{48} \end{bmatrix}$$

$[A] \times [A^{-1}]$

		$-\frac{1}{48}$	$+\frac{5}{48}$
		$-\frac{10}{48}$	$\frac{2}{48}$
2	−5	1	0
10	−1	0	1

$$[B] = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 0 \\ 7 & 10 & -3 \end{bmatrix} \quad ; \quad |B| = 250-30 = 220.$$

$$Adj\,[B] = \begin{bmatrix} 0 & 15 & 50 \\ 44 & -47 & -54 \\ 0 & 25 & 10 \end{bmatrix}$$

$$(Adj[B])^T = \begin{bmatrix} 0 & 44 & 0 \\ 15 & -47 & 25 \\ 50 & -54 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow [B^{-1}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{44}{220} & 0 \\ \frac{15}{220} & -\frac{47}{220} & \frac{25}{220} \\ \frac{50}{220} & -\frac{54}{220} & \frac{10}{220} \end{bmatrix}$$

$B \times B^{-1}$

			0	$\frac{44}{220}$	0
			$\frac{15}{220}$	$-\frac{47}{220}$	$\frac{25}{220}$
			50/220	−54/220	10/220
4	−2	5	1	0	0
5	0	0	0	1	0
7	10	−3	0	0	1

Ejercicio 4

$$x_1'(t) = -x_1(t) + x_2(t)$$
$$x_2'(t) = -x_2(t) - 3x_3(t) + u_1(t)$$
$$x_3'(t) = x_1(t) - 5x_2(t) - 3x_3(t) + u_2(t)$$

$$[x'(t)] = [A][x(t)] + [B][u(t)]$$

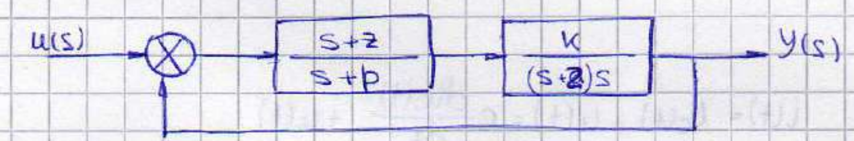
$$[x'(t)] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

Ejercicio 5

$$x_1'(t) = x_2(t)$$
$$x_2'(t) = x_3(t)$$
$$x_3'(t) = -6x_1(t) - 11x_2(t) - 6x_3(t) - 6u(t)$$

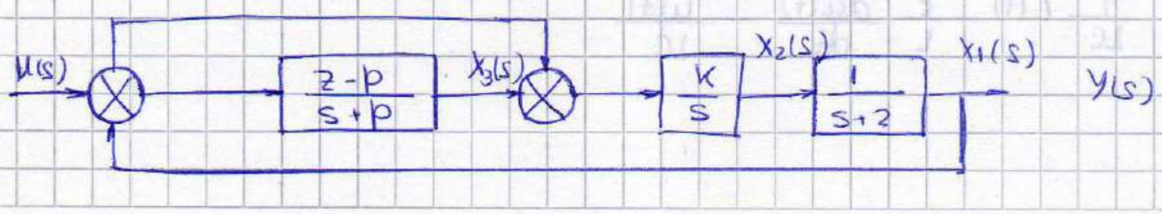
$$[x'(t)] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} u(t)$$

Ejercicio 6



$$\frac{s+z}{s+p} = 1 + \frac{A}{s+p}$$

$$\cancel{s} + z = \cancel{s} + p + A \Rightarrow A = z - p$$



$$\frac{X_1(s)}{X_2(s)} = \frac{1}{s+2} \quad ; \quad sX_1(s) + 2X_1(s) = X_2(s)$$

$$\dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + x_2(t)$$

$$\frac{X_2(s)}{X_3(s) + \mu(s) - Y(s)} = \frac{k}{s}$$

$$X_2(s).s = kX_3(s) + k\,u(s) - \overset{X_1(s)}{\cancel{Y(s)}}.k$$

$$\dot{x}_2(t) = -k\,x_1(t) + k\,x_3(t) + k\mu(t)$$

$$\frac{X_3(s)}{U(s) - X_1(s)} = \frac{z-p}{s+p}$$

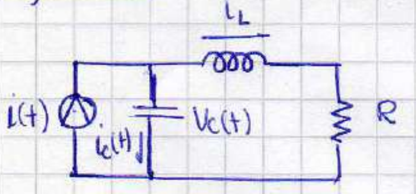
$$sX_3(s) + p\,X_3(s) = \mu(s).(z-p) + (p-z)\,X_1(s)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_1(t)(p-z) - p\,x_3(t) + \mu(t)(z-p).$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -k & 0 & k \\ p-z & 0 & -p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k \\ z-p \end{bmatrix} \mu(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + [0].\,u(t)$$

Ejercicio 7

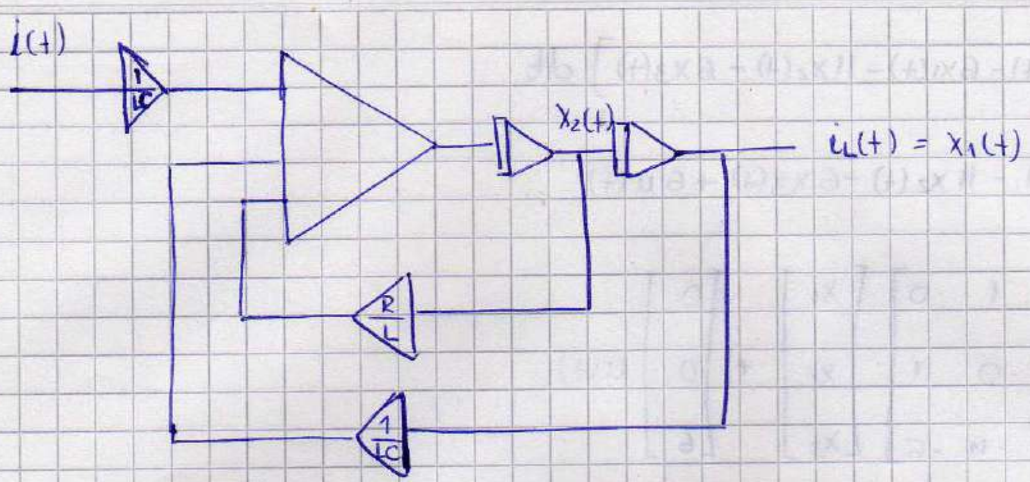


$$i(t) = i_c(t) + i_L(t) = C\frac{dV_c(t)}{dt} + i_L(t)$$

$$V_c(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} + R\,i_L(t)$$

$$i(t) = L.C.\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + RC\frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t)$$

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} = \frac{1}{LC}\,i(t) - \frac{R}{L}\frac{di_L(t)}{dt} - \frac{i_L(t)}{LC}$$



$x_1(t) = \int x_2(t)\,dt$ $\qquad$ $i_L(t) = x_1(t)$

$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$

$$x_2(t) = \int \left[\frac{1}{LC}\, i(t) - \frac{1}{LC}\, x_1(t) - \frac{R}{L}\, x_2(t)\right] dt$$

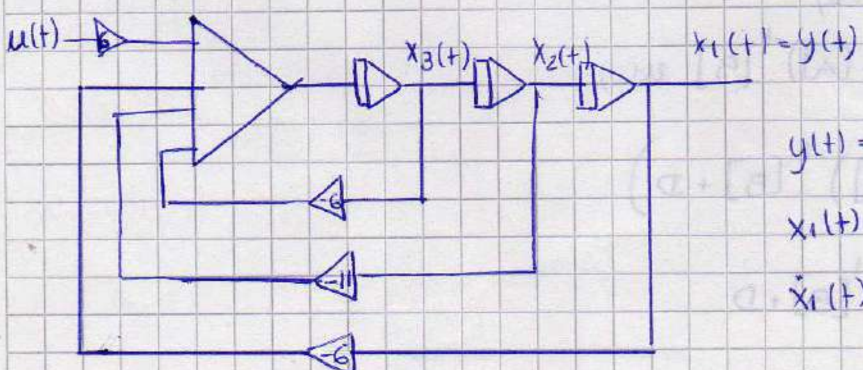
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{1}{LC}\, x_1(t) - \frac{R}{L}\, x_2(t) + \frac{1}{LC}\, i(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} \left[i(t)\right]$$

$$i_L(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0 \cdot \left[i(t)\right]$$

Ejercicio 8

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} = -6\,\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 11\,\frac{dy(t)}{dt} - 6\,y(t) + 6\,u(t)$$



$y(t) = x_1(t)$

$x_1(t) = \int x_2(t)\,dt$

$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$

$$x_2(t) = \int x_3(t)\,dt \quad ; \quad \dot{x}_2(t) = x_3(t)$$

$$x_3(t) = \int \left[6u(t) - 6x_1(t) - 11x_2(t) - 6x_3(t) \right] dt$$

$$\dot{x}_3(t) = -6x_1(t) - 11x_2(t) - 6x_3(t) + 6u(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u(t).$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [D]\,u(t)$$

Ejercicio 9

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$ Ecuación de estado.

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$ Ecuación de salida.

$$[\dot{x}(t)] = [A]\,[x(t)] + [B]\,[u(t)]$$

$$[y(t)] = [C]\,[x(t)] + [D]\,[u(t)]$$

$$s\,[X(s)] - [X(0)] = [A]\,[X(s)] + [B]\,U(s)$$

$$s\,[X(s)] = A\,[X(s)] + [B]\,U(s)$$

$$Y(s) = [C]\,[X(s)] + [D]\,U(s)$$

$$\left[s[I] - [A]\right]\,[X(s)] = [D]\,U(s)$$

$$[X(s)] = \left(s[I] - [A]\right)^{-1} [B]\,U(s)$$

$$Y(s) = U(s)\left([C]\left(s[I] - [A]\right)^{-1} [B] + D \right)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = [C]\left(s[I] - [A]\right)^{-1} [B] + D$$

$$s[I]-[A] = \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$Adj\left(s[I]-[A]\right) = \begin{vmatrix} s+1 & 3 \\ -1 & s+4 \end{vmatrix}^T$$

$$\left|s[I]-[A]\right| = s^2+5s+7$$

$$\left(s[I]-[A]\right)^{-1} \begin{vmatrix} \dfrac{s+1}{(s^2+5s+7)} & -\dfrac{1}{s^2+5s+7} \\ \dfrac{3}{s^2+5s+7} & \dfrac{s+4}{s^2+5s+7} \end{vmatrix}$$

$[C] \times [s[I]-A]^{-1}$		$\dfrac{s+1}{s^2+5s+7}$	$-\dfrac{1}{s^2+5s+7}$
		$\dfrac{3}{s^2+5s+7}$	$\dfrac{s+4}{s^2+5s+7}$
1	0	$\dfrac{s+1}{s^2+5s+7}$	$-\dfrac{1}{s^2+5s+7}$.

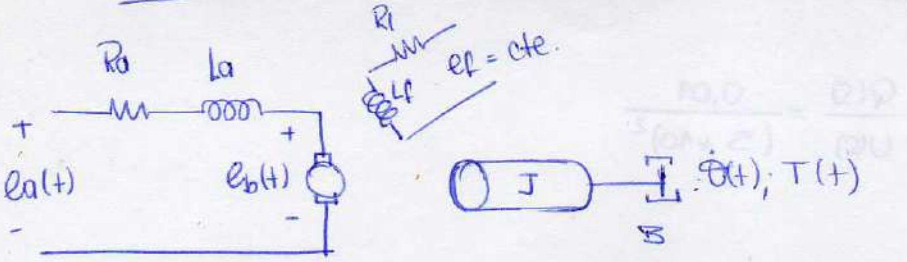
$[C]\cdot(s[I]-[A])[B]$		1
		1
$\dfrac{s+1}{s^2+5s+7}$	$\dfrac{-1}{s^2+5s+7}$	$\dfrac{s}{s^2+5s+7}$

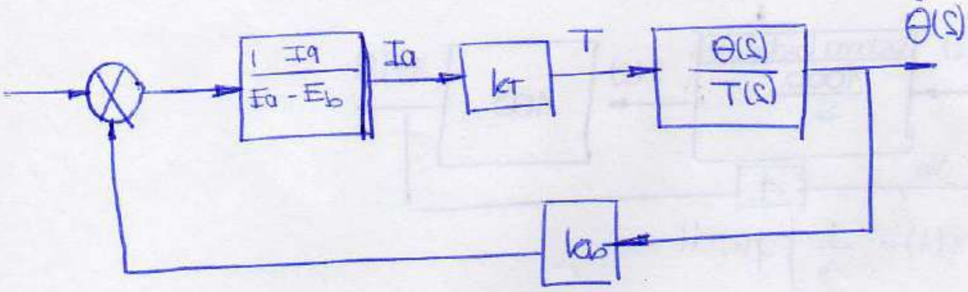
Como D=0

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{s}{s^2+5s+7}.$$

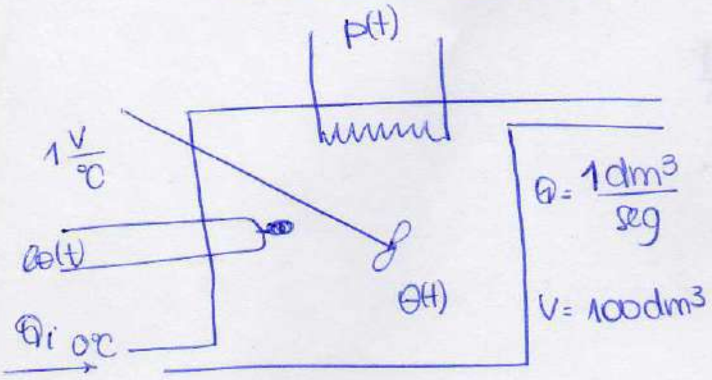
Corregido Completo 19-11-13.
[signature]

MOTOR DE C.C. CONTROLADO POR ARMADURA





SISTEMA TERMICO



θ(t): temperatura

h(t) - calor.

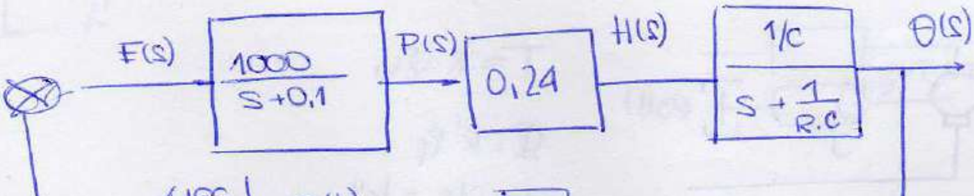
q(t) - caudal.

R_T - resistencia térmica

C_T - capacidad térmica.

$$R_T = \frac{1}{\rho Ce.Q} \qquad C_T = m.Ce = \rho.V.Ce$$

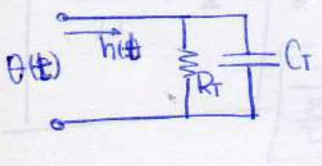
$$\frac{P(s)}{E(s)} = \frac{1000}{S+0,1} \qquad \frac{H(s)}{P(s)} =$$



$$R_T = \frac{1}{\rho Ce\, Q}$$

$$W = \frac{4.186\, J}{1 cal} \cdot Q(t)$$

$$p(t) = \frac{dW(t)}{dt} = 4.186 \frac{Joule}{cal} \cdot \frac{dQ(t)}{dt} = 4.186\, h(t) \Rightarrow \frac{H(s)}{P(s)} = 0,24$$



$$h(t) = \frac{\theta(t)}{R_T} + C_T \frac{d\theta(t)}{dt} \Rightarrow H(s) = \Theta(s)\left[\frac{1}{R_T} + SC_T\right]$$

$$\frac{\Theta(S)}{H(S)} = \left[\frac{1/C}{S + \frac{1}{RC}}\right]$$

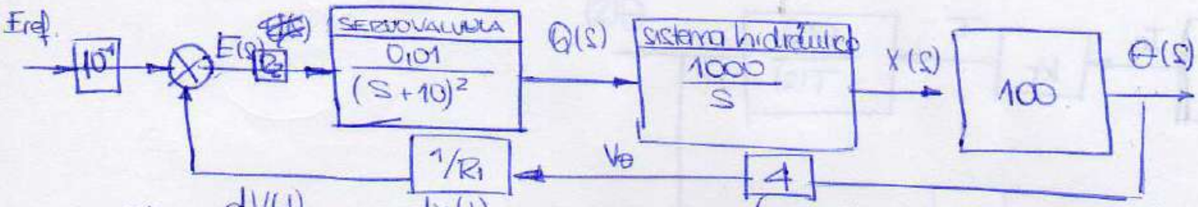
potenciómetro — 360° — ± 12,57 V.

$P_c = 1{,}2566\,mm$

$N = 50$ dientes.

$d_p = 35{,}682\,mm$.

$$\frac{Q(s)}{U(s)} = \frac{0{,}01}{(s+10)^2}$$



$$q(t) = \frac{dV(t)}{dt} = A\,\frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{A}\int q(t)\,dt$$

$$X(s) = \frac{1}{A}\,\frac{Q(s)}{s} \quad ; \quad A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{35{,}682}{2}\right)^2 = 10^{-3}\,m^2 \Rightarrow \frac{X(s)}{Q(s)} = \frac{1000}{s}$$

$$\frac{N}{2\pi}\cdot\Theta(s)\cdot P_c = X(s) \Rightarrow \frac{\Theta(s)}{X(s)} = \frac{2\pi}{N\cdot P_c} = 100\,\frac{rad}{m}$$

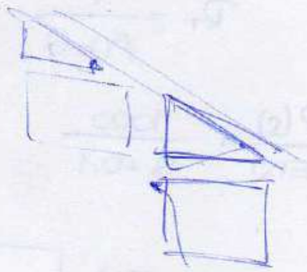
Potenciómetro

$360° \longrightarrow 2\pi\,rad \longrightarrow 12{,}57 \times 2\,V$

$$\frac{V_\theta}{\theta} = \frac{12{,}57\,V}{\pi} = 4$$

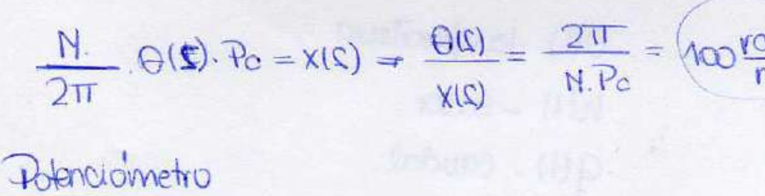
Restador (Detector de error)

$$U(s) = \frac{R_2}{10^4}\cdot E_{ref}(s) - \frac{R_2}{R_1}V_\theta(s) = R_2\left[\frac{1}{10^4}E_{ref}(s) - \frac{1}{R_1}V_\theta(s)\right]$$



MOTOR DE C.C. CONTROLADO POR CAMPO ~~Y ARMADURA~~

Estator.



$T = k\cdot\Phi\cdot i_a$

$\Phi = k'\,i_f$

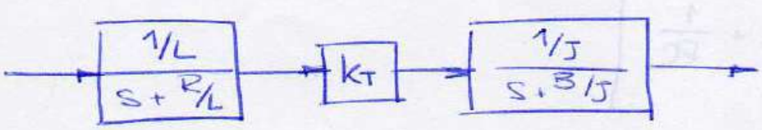
i_a: cte $= k''$

$i_a(t)$: cte.

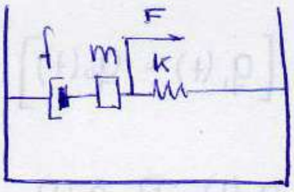
$$T = k\cdot k'\,i_f\cdot k'' = k_T\cdot i_f \longrightarrow T(s) = \boxed{k_T}\,I_f(s)$$

$$e_f(t) = i_f\cdot R_f + L\,\frac{di_f}{dt} \Rightarrow E_f(s) = (R_f + L_f\cdot s)\,I_f(s) \Rightarrow \frac{I_f(s)}{E_f(s)} = \frac{1}{L_f s + R_f} = \boxed{\frac{\frac{1}{L_f}}{s + \frac{R_f}{L_f}}}$$

$$T(t) = J\ddot\theta(t) + B\dot\theta(t) = (Js^2 + Bs)\,\Theta(s) = (Js + B)\,\dot\Theta(s) \Rightarrow \frac{\Theta(s)}{T(s)} = \boxed{\frac{1/J}{s + \frac{B}{J}}}$$

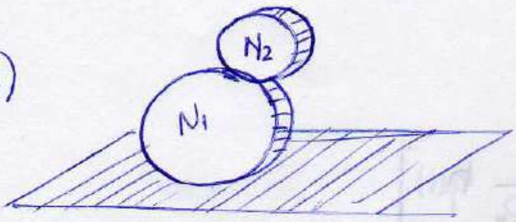


1)



$$F(t) = m\ddot{x}(t) + f\dot{x}(t) + k\dot{x}(t)$$

2)



$C: 10 \frac{\text{dientes}}{\text{mm}}$

$N_1 - 40$ dientes

$N_2: 10$ dientes.

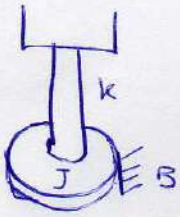
$$N_2 \cdot \theta(t) = N_1 \theta(t)$$

$$x(t) = \frac{N}{C}$$

$$N = \frac{N_1}{2\pi} \theta_1(t) = \frac{N_2}{2\pi} \theta_2(t).$$

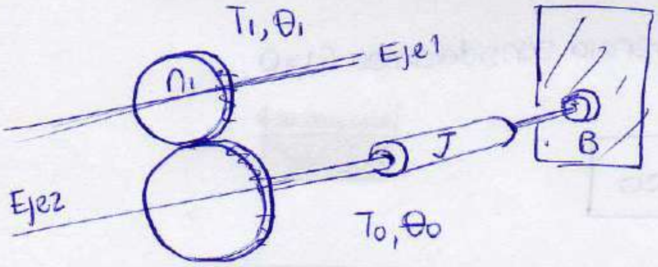
$$x(t) = \frac{N_2}{2\pi} \cdot P_C \cdot \theta_2(t).$$

3)



$$T = J\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t) + k\dot{\theta}(t)$$

4)



$$p = T\dot{\theta}(t) \qquad T_q \theta_1(t) = T_0 \cdot \frac{N_1}{N_2} \theta_1(t)$$

$$T_0 \dot{\theta}_0(t) = T_1 \cdot \theta_1(t)$$

$$T_0 = J_0 \ddot{\theta}_0(t) + B \dot{\theta}_0(t)$$

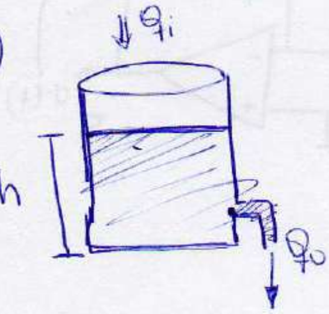
$$\frac{N_2}{N_1} T_1 = \frac{N_1}{N_2} J_0 \ddot{\theta}_q + \frac{N_1}{N_2} B_0 \dot{\theta}_q$$

$$T_1 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 (J_0 \ddot{\theta}_q + B_0 \dot{\theta}_q)$$

$$n_1 \theta_1 = n_2 \theta_0$$

$$\theta_1 = \frac{n_2}{n_1} \theta_0 \rightarrow \theta_0 = \frac{n_1}{n_2} \theta_1$$

5)

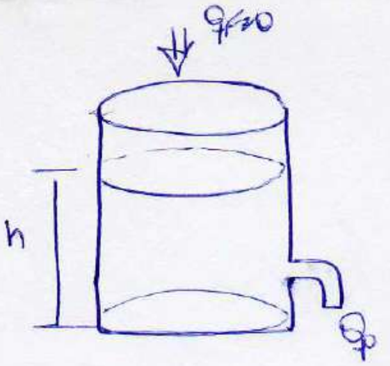


$$\frac{dh(t)}{dt} = (q_i - q_0) k_1$$

$$q_0 = k_2 \cdot h(t) \Rightarrow h(t) = \frac{1}{k_2} q_0 \rightarrow \frac{1}{k_2} = R_H \qquad q_0(t) = \frac{1}{R_H} h(t)$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{A} [q_i(t) - q_0(t)]$$

$$A \frac{dh}{dt} = q_i(t) - \frac{1}{R_H} h(t) \qquad q_i(t) = A \frac{dh}{dt} - \frac{1}{R_H} h$$



$$\frac{dh(t)}{dt} = k_1\left[q_i(t) - q_o(t)\right] = \frac{1}{A}\left[q_i(t) - q_o(t)\right]$$

$$q_o(t) = k_2 h(t) \Rightarrow h(t) = \frac{1}{k_2} q_o(t) = R_H \cdot q_o(t)$$

$$\Rightarrow q_o(t) = \frac{1}{R_H} h(t).$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{A}\left[q_i(t) - \frac{1}{R_H} h(t)\right]$$

$$sH(s) - h(0) = \frac{1}{A}\left[Q_i(s) - \frac{1}{R_H} H(s)\right]$$

$$AsH(s) - Ah(0) = Q_i(s) - \frac{1}{R_H} H(s)$$

$$H(s)\left(As + \frac{1}{R_H}\right) = Q_i(s) \cancel{\frac{1}{R_H}H(s)} + Ah(0)$$

$$q_i(0) = 0$$

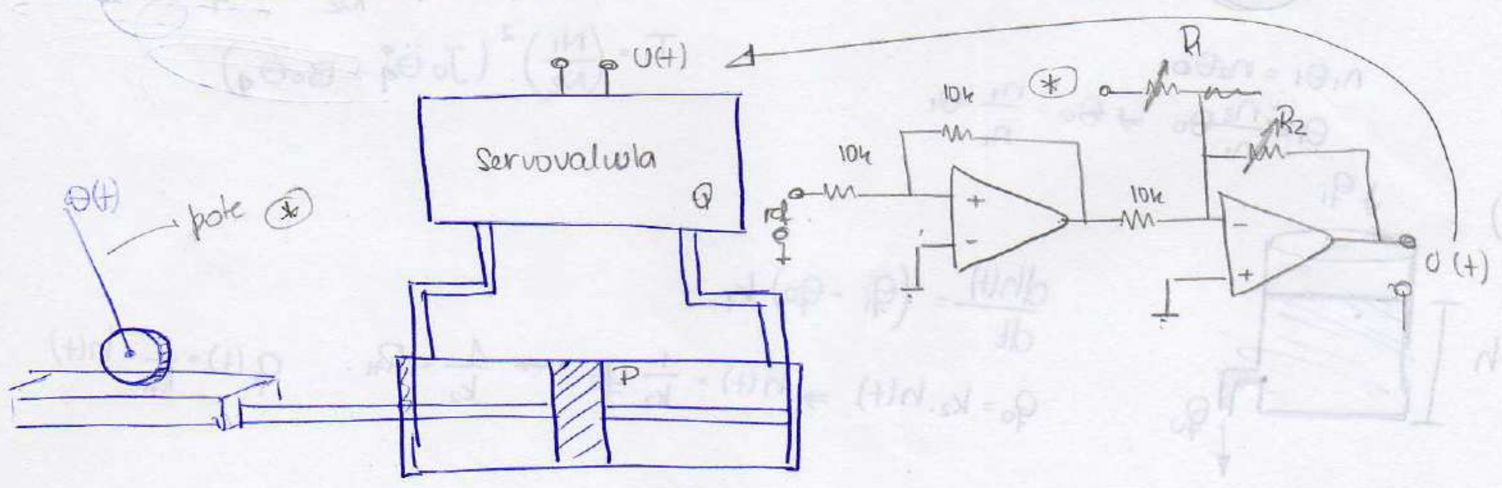
$$H(s) = \frac{Ah(0)}{As + \frac{1}{R_H}} = \frac{h(0)}{s + \frac{1}{AR_H}}$$

$$h(t) = h(0)\, e^{-\frac{1}{AR_H} t}$$

$$2{,}96 = 4e^{-\frac{1}{2R_H}\cdot 30} \rightarrow R_H = 49{,}82$$

Cuando calculamos la función de transferencia consideramos $C_1 = 0$.

EJERCICIO 6. SISTEMA HIDRÁULICO



Unidad temática 1: INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE CONTROL
Trabajo Práctico 1-1: aplicación transformada de Laplace, convolución

Ejercicio 1: resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$y^{I}(t) + 2y(t) = 0 \text{ Condiciones iniciales } y(0) = 3$$

Una vez obtenida la solución demostrar la validez de la igualdad.

Ejercicio 2: resolver la siguiente ecuación diferencial considerando una entrada constante $x(t) = 8$; las condiciones iniciales son nulas. Hallar también los valores inicial y final de la expresión temporal valuando la función para $t = 0$ y para $t = \infty$.

$$y^{II}(t) + 3y^{I}(t) + 2y(t) = x(t)$$

Aplicando los teoremas del valor final e inicial corroborar los valores obtenidos en el paso anterior.

Ejercicio 3: resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales aplicando transformada de Laplace:

$$\begin{cases} x^{I}(t) = 2x(t) - 3y(t) \\ y^{I}(t) = -2x(t) + y(t) \end{cases} \text{ Condiciones iniciales } x(0) = 8,\ y(0) = 3$$

Ejercicio 4: dada una partícula de masa igual a dos gramos que se puede desplazar solamente según el eje x, determinar la posición, velocidad y aceleración en cualquier instante si se encuentra sometida una fuerza de valor $F(t) = 8.10^{-5} x(t)[N]$ que está dirigida hacia el origen en todo instante. Al inicio la partícula está en reposo en la posición $x(t) = 10[cm]$. Luego de encontrar las funciones temporales de las variables solicitadas, responder si es posible encontrar la posición de la partícula cuando $t \to \infty$.

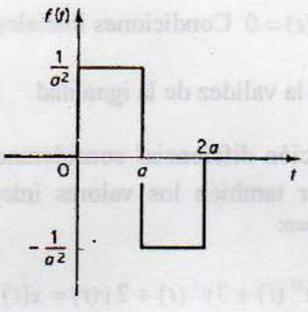
Ejercicio 5: Un sistema mecánico traslacional tiene por ecuación diferencial la expresión que se muestra a continuación:

$$F(t) = m\ddot{x}(t) + f\dot{x}(t) + kx(t)$$

Se aplica para $t = 0^{+}$ una fuerza constante de $F(t) = 4[N]$ dirigida en la dirección positiva del desplazamiento, se pide hallar la expresión que describe el movimiento (desplazamiento) suponiendo que el sistema estaba en reposo para $t = 0^{-}$. Los valores de las constantes son:

- $m = 1[Kg]$ masa
- $f = 0{,}2\left[\dfrac{N \times seg}{m}\right]$ coeficiente de fricción viscosa
- $k = 2\left[\dfrac{N}{m}\right]$ constante elástica del resorte

Ejercicio 6: Hallar la transformada de Laplace de la función $f(t)$ mostrada en la figura; una vez obtenida la respuesta anterior, determinar $F(s)$ cuando $a \to 0$.



Ejercicio 7: Conocidas las transformadas de Laplace de $R(s)$ y $G(s)$ determinar $y(t)$ utilizando la antitransformada de Laplace con los siguientes datos:

$$R(s) = \frac{1}{s^2}$$
$$G(s) = \frac{10}{s+1}$$
$$Y(s) = R(s).G(s)$$

Luego y previo obtener a $r(t)$ y $g(t)$ (siempre usando la antitransformada de Laplace) obtener a $y(t)$ como la integral ó producto de convolución:

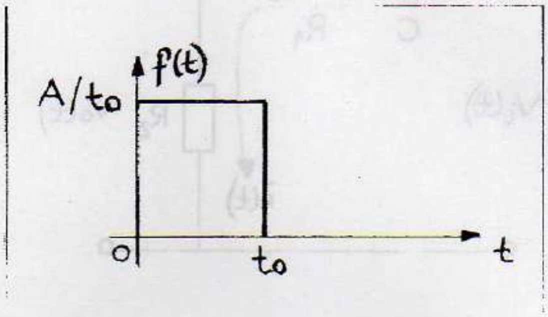
$$y(t) = r(t) * g(t) = \int_0^t r(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Verificar los resultados obtenidos recordando que:

$$\mathcal{L}[r(t) * g(t)] = R(S)G(S)$$

Unidad temática 1: INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE CONTROL
Trabajo Práctico 1-2: función de transferencia

Ejercicio 1: determinar la transformada de Laplace de la función pulso de la figura:



Conocida la transformada anterior, determinar la misma para el caso en que $t_0 \to 0$; es decir determinar la transformada de Laplace de un impulso. Finalmente definir la función impulso unitario ó función Delta de Dirac en el tiempo y su respectiva transformada.

Ejercicio 2: dado el siguiente sistema mecánico de rotación:

$$T(t) = J\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t) + K\theta(t)$$

Determinar la función de transferencia $\dfrac{\theta(s)}{T(s)}$ y luego valuarla sabiendo que:

- $J = 20[Kg \times m^2]$ momento de inercia
- $B = 1\left[\dfrac{N \times m \times seg}{rad.}\right]$ coeficiente de fricción viscosa rotacional
- $K = 5\left[\dfrac{N \times m}{rad.}\right]$ constante elástica rotacional

Ejercicio 3: hallar la función de transferencia $\dfrac{Y(s)}{X(s)}$ del siguiente sistema descripto por la ecuación diferencial que se muestra:

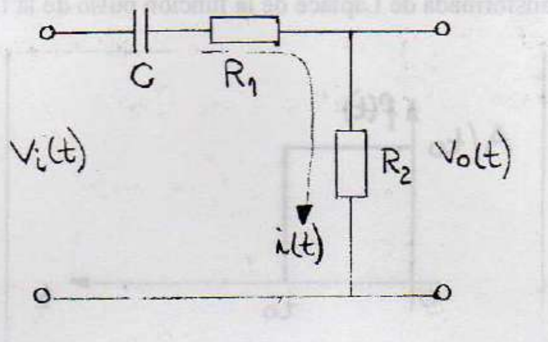
$$y(t) + 2\int y(t)dt = x(t) + \int x(t)dt$$

Luego obtener la respuesta temporal de la salida si de entrada se tiene como excitación la función Delta de Dirac.

Ejercicio 4: Deducir la ecuación diferencial correspondiente a la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s+1}{s^2+s+1}$$

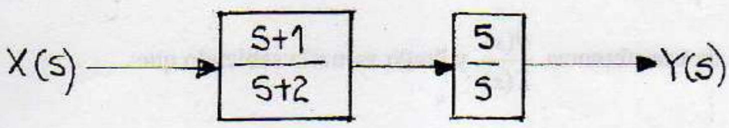
Ejercicio 5: Determinar la función de transferencia de la siguiente red:



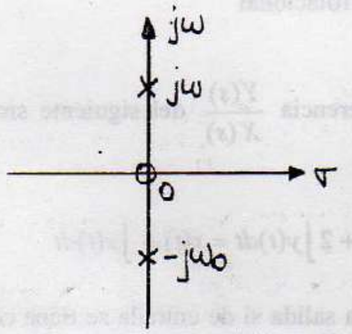
Valuar para:

- $C = 1[\mu F]$
- $R_1 = 1[M\Omega]$
- $R_2 = 100[K\Omega]$

Ejercicio 6: Hallar la respuesta temporal $y(t)$ si $x(t) = 6\mu(t)$.

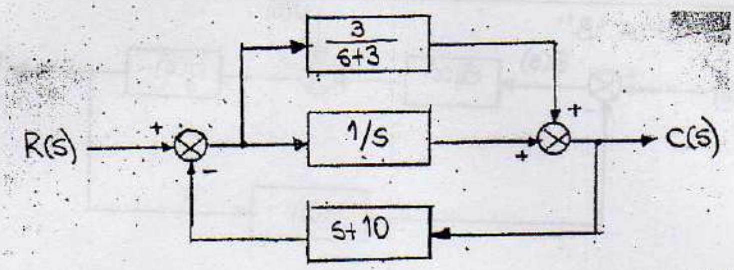


Ejercicio 7: Dado el siguiente diagrama de polos y ceros, perfilar a mano alzada la respuesta del sistema a una excitación impulsiva unitaria.

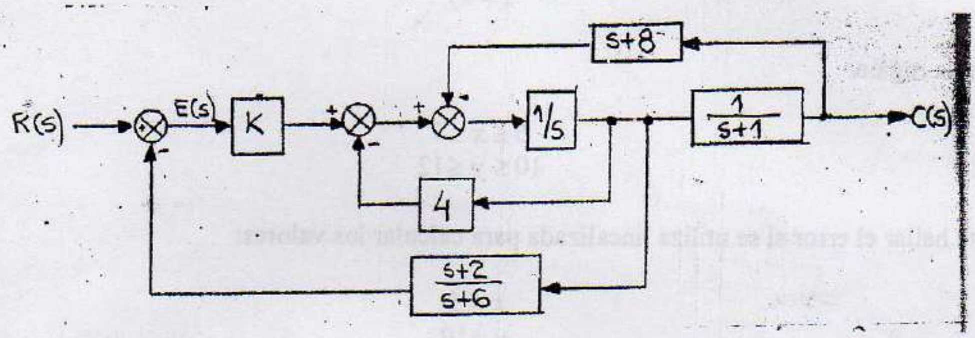


Unidad temática 1: INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE CONTROL
Trabajo Práctico 1-3: álgebra de bloques y diagramas de flujo de señal (fórmula de Mason), características de sistemas realimentados, linealización de sistemas no lineales

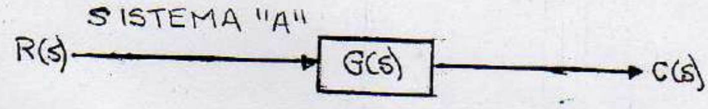
Ejercicio 1: determinar la relación $\frac{R(s)}{G(s)}$ reduciendo bloques; expresar la función de transferencia en forma canónica. Luego realizar el diagrama de flujo de señal; reducir aplicando fórmula de Mason:

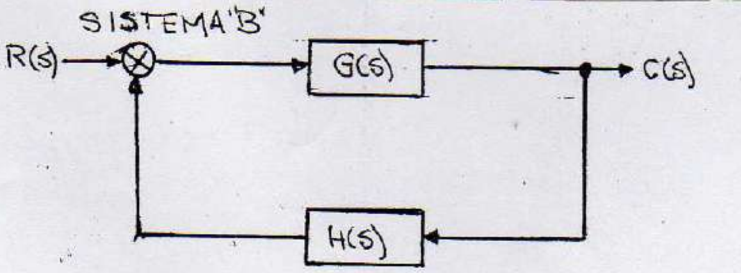


Ejercicio 2: Ídem ejercicio anterior.

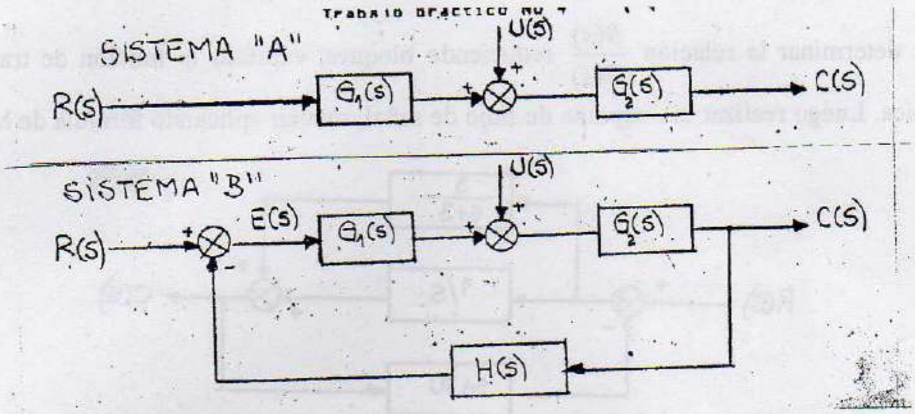


Ejercicio 3: Dados los siguientes sistemas (el primero a lazo abierto, el otro lazo cerrado) determinar para cada uno de ellos la ganancia total y la sensibilidad.





Ejercicio 4: Para ambos sistemas determinar la salida del sistema en función de la entrada de referencia y de la señal de perturbación.



Ejercicio 5: Linealizar la siguiente ecuación no lineal:

$$z = xy$$

Hacerlo en la región:

$$5 \le x \le 7$$
$$10 \le y \le 12$$

Finalmente hallar el error si se utiliza linealizada para calcular los valores:

$$x = 5$$
$$y = 10$$

En la exposición siguiente se presentan las transformadas de Laplace de funciones, así como teoremas sobre la transformada de Laplace, útiles en el estudio de sistemas lineales de control.

Tabla 1-1 Pares de transformadas de Laplace

	$f(t)$	$F(s)$
1	Impulso unitario $\delta(t)$	1
2	Escalón unitario $1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n = 1,2,3,\ldots)$	$\frac{1}{s^n}$
5	$t^n \quad (n = 1,2,3,\ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
7	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} \quad (n = 1,2,3,\ldots)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
9	$t^n e^{-at} \quad (n = 1,2,3,\ldots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
11	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
12	$\operatorname{sen h} \omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
13	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
14	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
15	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
16	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
17	$\frac{1}{ab}\left[1 + \frac{1}{a-b}(be^{-at} - ae^{-bt})\right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$

Tabla 1-1 Continuación

18	$\frac{1}{a^2}(1 - e^{-at} - ate^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$
19	$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
20	$e^{-at}\,\mathrm{sen}\,\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
21	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
22	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\,\mathrm{sen}\,\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t$	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
23	$-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\,\mathrm{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t - \phi)$ $\phi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{s}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
24	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\,\mathrm{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$
25	$1 - \cos\omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}$
26	$\omega t - \mathrm{sen}\,\omega t$	$\frac{\omega^3}{s^2(s^2+\omega^2)}$
27	$\mathrm{sen}\,\omega t - \omega t\cos\omega t$	$\frac{2\omega^3}{(s^2+\omega^2)^2}$
28	$\frac{1}{2\omega}t\,\mathrm{sen}\,\omega t$	$\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$
29	$t\cos\omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
30	$\frac{1}{\omega_2^2-\omega_1^2}(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t) \qquad (\omega_1^2 \neq \omega_2^2)$	$\frac{s}{(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_2^2)}$
31	$\frac{1}{2\omega}(\mathrm{sen}\,\omega t + \omega t\cos\omega t)$	$\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$

Traslación de una función. Se requiere obtener la transformada de Laplace de una función trasladada $f(t-\alpha)1(t-\alpha)$, donde $\alpha \geq 0$. Esta función es cero para $t < \alpha$. Las funciones $f(t)1(t)$ y $f(t-\alpha)1(t-\alpha)$ aparecen en la figura 1-8.

Tabla 1-2 Propiedades de las transformadas de Laplace

1	$\mathcal{L}[Af(t)] = AF(s)$
2	$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$
3	$\mathcal{L}_{\pm}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0\pm)$
4	$\mathcal{L}_{\pm}\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0\pm) - \dot{f}(0\pm)$
5	$\mathcal{L}_{\pm}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} \overset{(k-1)}{f}(0\pm)$ donde $\overset{(k-1)}{f}(t) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}f(t)$
6	$\mathcal{L}_{\pm}\left[\int f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\left[\int f(t)\,dt\right]_{t=0\pm}}{s}$
7	$\mathcal{L}_{\pm}\left[\int\int f(t)\,dt\,dt\right] = \frac{F(s)}{s^2} + \frac{\left[\int f(t)\,dt\right]_{t=0\pm}}{s^2} + \frac{\left[\int\int f(t)\,dt\,dt\right]_{t=0\pm}}{s}$
8	$\mathcal{L}_{\pm}\left[\int \cdots \int f(t)(dt)^n\right] = \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s^{n-k+1}}\left[\int \cdots \int f(t)(dt)^k\right]_{t=0\pm}$
9	$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s}$
10	$\int_0^\infty f(t)\,dt = \lim_{s\to 0} F(s) \qquad \text{si } \int_0^\infty f(t)\,dt \text{ existe}$
11	$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$
12	$\mathcal{L}[f(t-\alpha)1(t-\alpha)] = e^{-\alpha s}F(s) \qquad \alpha \geq 0$
13	$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$
14	$\mathcal{L}[t^2f(t)] = \frac{d^2}{ds^2}F(s)$
15	$\mathcal{L}[t^nf(t)] = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s) \qquad n = 1,2,3,\ldots$
16	$\mathcal{L}\left[\frac{1}{t}f(t)\right] = \int_s^\infty F(s)\,ds$
17	$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = aF(as)$

Practico 1-1. Transformada de Laplace. Convolución.

1) $y'(t) + 2y(t) = 0 \qquad CI \cdot y(0) = 3$

$$sY(s) - 3 + 2Y(s) = 0$$

$$Y(s) = \frac{3}{s+2} \Rightarrow y(t) = 3e^{-2t} \begin{cases} y(0) = 3 \\ \dot{y}(0) = -6e^{-2t} = -6 \end{cases} \Bigg\} \ \dot{y}(t) + 2y(t) = -6 + 2.3 = 0$$

2) $x(t) = 8. \qquad \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = x(t)$

$$s^2 Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = \frac{8}{s}$$

$$Y(s)\left[s^2 + 3s + 2\right] = \frac{8}{s} \qquad \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \begin{cases} \frac{-3-1}{2} = -2 \\ \frac{-3+1}{2} = -1 \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{8}{s(s+2)(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+1}$$

$$A = \lim_{s \to 0} \frac{8}{(s+2)(s+1)} = \frac{8}{2} = 4$$

$$B = \lim_{s \to -2} \frac{8}{s(s+1)} = \frac{8}{2} = 4$$

$$C = \lim_{s \to -1} \frac{8}{s(s+2)} = -8$$

$$Y(s) = \frac{4}{s} + \frac{4}{s+2} - \frac{8}{s+1}$$

$$y(t) = 4 + 4e^{-2t} - 8e^{-t}$$

$$TVF = y(\infty) = \lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} \frac{8}{(s+2)(s+1)} = 4$$

$$TVI : y(0) = \lim_{s \to \infty} sY(s) : \lim_{s \to \infty} \frac{8}{(s+2)(s+1)} = 0$$

3.- $\dot{x}(t) = 2x(t) - 3y(t) \qquad x(0) = 8 \ ; \ y(0) = 3$

$\dot{y}(t) = -2x(t) + y(t)$

$$sX(s) - 8 = 2X(s) - 3Y(s) \rightarrow Y(s) = \frac{(2-s)X(s) + 8}{3}$$

$$sY(s) - 3 = -2X(s) + Y(s)$$

$$\frac{(2-s)X(s) + 8}{3} \cdot s - 3 = -2X(s) + \frac{(2-s)X(s) + 8}{3}$$

$$\left[(2-s)X(s) + 8\right] \cdot s - 9 = -6X(s) + (2-s)X(s) + 8$$

$$s(2-s)X(s) + 8s + 6X(s) - (2-s)X(s) = 17 = 2sX(s) - s^2X(s) + 8s + 6X(s) - 2X(s) + 2X(s) =$$

$$\left[-s^2 + 3s + 4\right]X(s) + 8s = 17 \Rightarrow \frac{-17 + 8s}{s^2 - 3s - 4} = X(s)$$

$$\frac{8s-17}{s^2-3s-4} = X(s) = \frac{8s-17}{(s-4)(s+1)} = \frac{A}{(s-4)} + \frac{B}{(s+1)}$$

$$\left.\begin{aligned} A &= \lim_{s\to4} \frac{8s-17}{s+1} = \frac{15}{5} = 3 \\ B &= \lim_{s\to-1} \frac{8s-17}{s-4} = -\frac{25}{-5} = 5 \end{aligned}\right\} \quad X(s) = \frac{3}{s-4} + \frac{5}{s+1} \Rightarrow x(t) = 3e^{4t} + 5e^{-t}$$

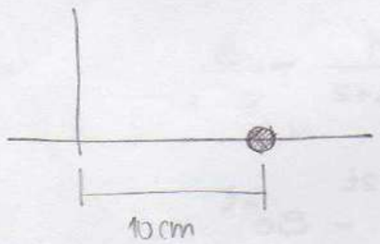
Creo que resolví algo mal.

$$Y(s) = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{s-4} + \frac{5}{s+1}\right) - \frac{s}{3}\left(\frac{3}{s-4} + \frac{5}{s+1}\right) + \frac{8}{3}$$

$$\frac{2}{3}x(t) - \frac{1}{3}\dot{x}(t) + \frac{8}{3} = 2e^{4t} + \frac{10}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}\left(12e^{4t} - 5e^{-t}\right) + \frac{8}{3} =$$

$$= 2e^{4t} + \frac{10}{3}e^{-t} - 4e^{4t} + \frac{5}{3}e^{-t} + \frac{8}{3} = -2e^{4t} + 5e^{-t} + \frac{8}{3}$$

4. $m = 2g \quad F(t) = 8\times10^{-5}x(t)\ [N] \quad x(0) = 10\ cm$



$$\sum F(t) = m\,\ddot{x}(t)$$

$$-8\times10^{-5}x(t) = 2\times10^{-3}\,\ddot{x}(t) \Rightarrow \ddot{x}(t) + 4\times10^{-2}x(t) = 0$$

$$\mathcal{L}[\ddot{x}(t)] = s^2X(s) - sx(0) - x'(0)$$

$$s^2X(s) - 0{,}1\,s - 0 + 4\times10^{-2}X(s) = 0$$

$$X(s)\left(s^2 + 1\times10^{-2}\right) - 0{,}1s = 0$$

$$X(s) = \frac{0{,}1s}{\left(s^2 + 4\times10^{-2}\right)} \qquad \frac{s}{s^2+\omega^2} = \mathcal{L}[\cos(\omega t)]$$

$$\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \mathcal{L}[\operatorname{sen}(\omega t)]$$

$$x(t) = 0{,}1\cos(0{,}2t)$$

$$\dot{x}(t) = -0{,}02\operatorname{sen}(0{,}2t)$$

$$\ddot{x}(t) - 0{,}004\cos(0{,}2t)$$

5. $F(t) = m\ddot{x}(t) + f\dot{x}(t) + kx(t) \qquad m = 1kg \ ;\ f = 0{,}2\ \frac{N.s}{m} \ ;\ k = 2\frac{N}{m}$

para $t = 0^+ \text{ — } F(t) = 4N$

$$4 = \ddot{x}(t) + 0{,}2\,\dot{x}(t) + 2x(t)$$

$$\frac{4}{s} = s^2X(s) + 0{,}2\,sX(s) + 2X(s)$$

$$X(s) = \frac{4}{s\left(s^2 + 0{,}2s + 2\right)}$$

$$\frac{-0{,}2 \pm \sqrt{0{,}2^2 - 4.1.2}}{2} = \frac{-0{,}2 \pm \sqrt{0{,}04-8}}{2} = \frac{-0{,}2 \pm \sqrt{-7{,}96}}{2} = \begin{cases} -0{,}1 + j\,1{,}41 \\ -0{,}1 - j\,1{,}41 \end{cases}$$

$$X(s) = \frac{4}{s(s+0{,}1-j1{,}41)(s+0{,}1+j1{,}41)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+0{,}1-j1{,}41)} + \frac{C}{(s+0{,}1+j1{,}41)}$$

$$A = \lim_{s\to 0} \frac{4}{(s+0{,}1-j1{,}41)(s+0{,}1+j1{,}41)} = \frac{4}{s^2+0{,}2s+2} = 2$$

$$B = \lim_{s\to -0{,}1+j1{,}41} \frac{4}{s\,(s+0{,}1+j1{,}41)} = \frac{4}{(-0{,}1+j1{,}41)(2.\,j1{,}41)} = \frac{-j2}{(1{,}41)\,(-0{,}1+j1{,}41)} =$$

$$= \frac{-j2}{1{,}41} \cdot \frac{-0{,}1-j1{,}41}{(-0{,}1+j1{,}41)(-0{,}1-j1{,}41)} = \frac{-j2}{1{,}41} \cdot \frac{(-0{,}1-j1{,}41)}{2} = 0{,}08\,j - 1 = \boxed{-1+0{,}08j}$$

$$C = B^* = -1 - 0{,}08j$$

$$X(s) = \frac{2}{s} + \frac{-1+0{,}08j}{(s+0{,}1-j1{,}41)} + \frac{-1-0{,}08j}{(s+0{,}1+j1{,}41)}$$

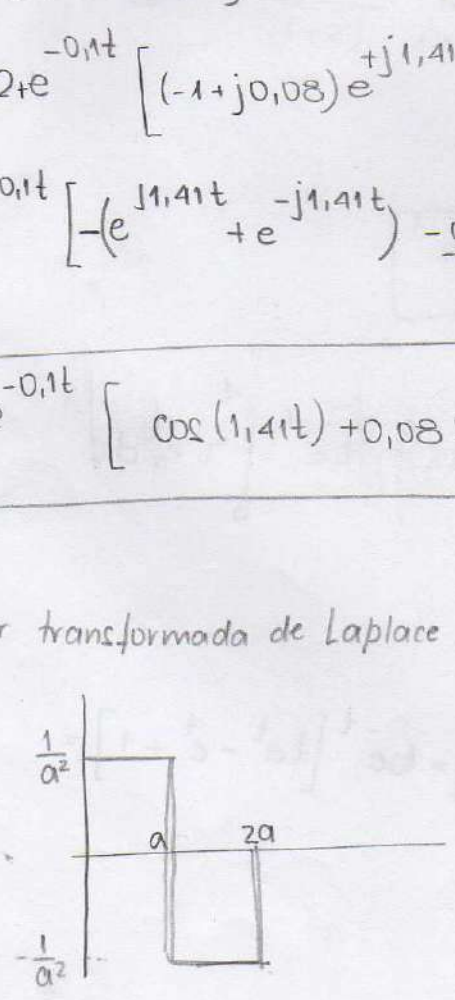
$$x(t) = 2 + (-1+0{,}08j)\,e^{-(0{,}1-j1{,}41)t} + (-1-0{,}08j)\,e^{-(0{,}1+j1{,}41)t} =$$

$$x(t) = 2 + e^{-0{,}1t}\left[(-1+j0{,}08)\,e^{+j1{,}41t} + (-1-j0{,}08)\,e^{-j1{,}41t}\right] =$$

$$= 2 + e^{-0{,}1t}\left[-\left(e^{j1{,}41t}+e^{-j1{,}41t}\right) - \frac{0{,}08\left(e^{j1{,}41t}-e^{-j1{,}41t}\right)}{j}\right] =$$

$$\boxed{2 - 2e^{-0{,}1t}\left[\cos(1{,}41t) + 0{,}08\,\mathrm{sen}\,(1{,}41t)\right] = x(t)}$$

6.- *Hallar transformada de Laplace*



$$f(t) = \frac{1}{a^2}\,\mu(t) - \frac{2}{a^2}\,\mu(t-a) + \frac{1}{a^2}\,\mu(t-2a)$$

$$F(s) = \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{s} - \frac{2e^{-as}}{s} + \frac{e^{-2as}}{s}\right]$$

$$F(s) = \frac{1}{a^2 s}\left[1 - 2e^{-as} + e^{-2as}\right]$$

$$\lim_{a\to 0} F(s) = \frac{1-2+1}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{a\to 0} F(s) = \frac{\lim_{a\to 0} \frac{d}{da}\left[1-2e^{-as}+e^{-2as}\right]}{\lim_{a\to 0} \frac{d}{da}\left[a^2 s\right]} = \frac{\lim_{a\to 0}\left[\cancel{2s}e^{-as} - \cancel{2s}e^{-2as}\right]}{\lim_{a\to 0} \cancel{2as}} =$$

$$= \frac{\lim_{a\to 0}\left(e^{-as} - e^{-2as}\right)}{\lim_{a\to 0} a} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{a\to 0} F(s) = \frac{\lim_{a\to 0} \frac{d}{da}\left(e^{-as}-e^{-2as}\right)}{\lim_{a\to 0} \frac{da}{da}} = \lim_{a\to 0} -se^{-as} + 2se^{-2as} = \boxed{s}$$

7.- $R(s) = \frac{1}{s^2}$

$G(s) = \frac{10}{s+1}$

$Y(s) = R(s)\cdot G(s)$

$$Y(s) = R(s)\,G(s) = \frac{10}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+1}$$

$$A = \lim_{s\to 0} \frac{10}{s+1} = 10$$

$$B = \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}\left(\frac{10}{s+1}\right) = \lim_{s\to 0} -\frac{10}{(s+1)^2} = -10$$

$$C = \lim_{s\to -1} \frac{10}{s} = 10$$

$$Y(s) = \frac{10}{s^2} - \frac{10}{s} + \frac{10}{s+1} \rightarrow y(t) = \boxed{10t - 10 + 10e^{-t}}$$

$r(t) = t$; $g(t) = 10e^{-t}$

$$y(t) = r(t) * g(t) = \int_0^t r(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t \tau\, 10e^{-(t-\tau)}\,d\tau = 10e^{-t}\int_0^t \tau e^{\tau}\,d\tau$$

$$\boxed{\int_0 xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x - \frac{1}{a}\right)}$$

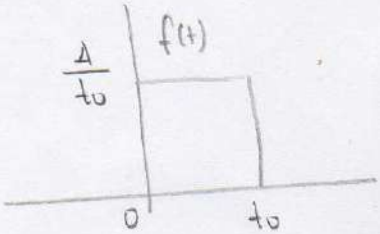
ACLARACIÓN

$$y(t) = 10e^{-t}\cdot e^{\tau}(\tau-1)\Big|_0^t = 10e^{-t}\left[e^{t}(t-1) - e^{0}(0-1)\right] = 10e^{-t}\left[te^{t} - e^{t} + 1\right] =$$

$$= \boxed{10t - 10 + 10e^{-t}}$$

TRABAJO PRÁCTICO 1.2 Función de transferencia

Ejercicio 1



$$f(t) = \frac{A}{t_0}\mu(t) - \frac{A}{t_0}\mu(t-t_0)$$

$$F(s) = \frac{A}{t_0 s} - \frac{A}{t_0 s} e^{-t_0 s} = \frac{A}{t_0 s}\left(1 - e^{-t_0 s}\right)$$

$$\lim_{t_0 \to 0} F(s) = \lim_{t_0 \to 0} \frac{A}{t_0 s}\left(1 - e^{-t_0 s}\right) = \frac{0}{0} = \frac{\lim_{t_0 \to 0} \frac{d}{dt} A\left(1 - e^{-t_0 s}\right)}{\lim_{t_0 \to 0} \frac{d}{dt} t_0 s} = \frac{\lim_{t_0 \to 0} A \cancel{s} e^{-t_0 s}}{\lim_{t_0 \to 0} \cancel{s}} = \boxed{A}$$

Función delta de Dirac

$$\delta(t-t_0) \begin{cases} = 0 \ \forall\, t \neq t_0 \\ = \infty \ \forall\, t = t_0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) = 1 \quad ; \ \mathcal{L}\left[\delta(t-t_0)\right] = 1$$

Ejercicio 2

$$T(t) = J\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t) + k\theta(t) \quad ; \quad \frac{\theta(s)}{T(s)} = ?$$

$$T(s) = Js^2\theta(s) + Bs\,\theta(s) + k\theta(s) = \theta(s)\left[Js^2 + Bs + k\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js^2 + Bs + k} = \frac{1/J}{s^2 + \frac{B}{J}s + \frac{k}{J}} = \frac{\frac{1}{20}}{s^2 + \frac{1}{20}s + \frac{5}{20}} = \frac{0{,}05}{s^2 + 0{,}05s + 0{,}25}$$

Ejercicio 3

Función de transferencia? $\frac{Y(s)}{X(s)}$

$$y(t) + 2\int y(t)\,dt = x(t) + \int x(t)\,dt\,.$$

$$Y(s) + \frac{2}{s}Y(s) = X(s) + \frac{X(s)}{s} \Rightarrow sY(s) + 2Y(s) = sX(s) + X(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (s+2)\,Y(s) = (s+1)\,X(s) \Rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(s+1)}{(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{s+1}{s+2} = 1 - \frac{1}{s+2} \Rightarrow y(t) = \delta(t) - e^{-2t}$$

Ejercicio 4

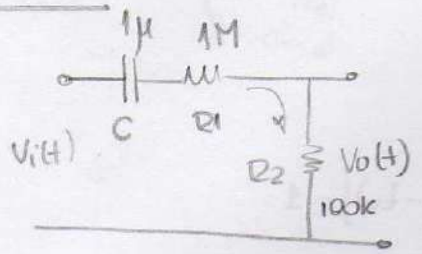
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s+1}{s^2+s+1}$$

$$(s^2+s+1)\,Y(s) = (2s+1)\,X(s)$$

$$s^2Y(s) + sY(s) + Y(s) = 2s\,X(s) + X(s)$$

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = 2\dot{x}(t) + x(t)$$

Ejercicio 5



$$V_i(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt + (R_1+R_2)\,i(t)$$

$$V_o(t) = R_2\,i(t)$$

$$V_i(s) = \frac{1}{sC} I(s) + (R_1+R_2) I(s)$$

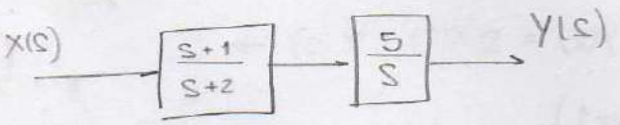
$$V_o(s) = R_2 I(s)$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R_2 \cancel{I(s)}}{\left(\frac{1}{sC} + R_1+R_2\right)\cancel{I(s)}} = \frac{R_2Cs}{1+(R_1+R_2)Cs} = \frac{\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)s}{s+\frac{1}{(R_1+R_2)C}}$$

$$= \frac{100\times10^3}{1\times10^6+1\times10^5} \cdot \frac{s}{s+\frac{1}{(1\times10^6+1\times10^5)\cdot1\times10^{-6}}} = \frac{1\times10^5}{11\times10^5}\cdot\frac{s}{s+\frac{1}{11\times10^{5}\cdot10^{-6}}} = $$

$$= 0{,}09\,\frac{s}{s+0{,}9}$$

Ejercicio 6



$$x(t) = 6\mu(t)$$

$$Y(s) = \frac{(s+1)\cdot 5}{s(s+2)}\cdot\frac{6}{s} = 30\,\frac{(s+1)}{s^2(s+2)} = \frac{A_0}{s^2} + \frac{A_1}{s} + \frac{B}{(s+2)}$$

$$A_0 = \lim_{s\to0} 30\,\frac{s+1}{(s+2)} = 15 \qquad A_1 = \lim_{s\to0} \frac{d}{dt}\,30\,\frac{(s+1)}{(s+2)} = \lim_{s\to0} 30\cdot\frac{s+2-(s+1)}{(s+2)^2} = 7{,}5$$

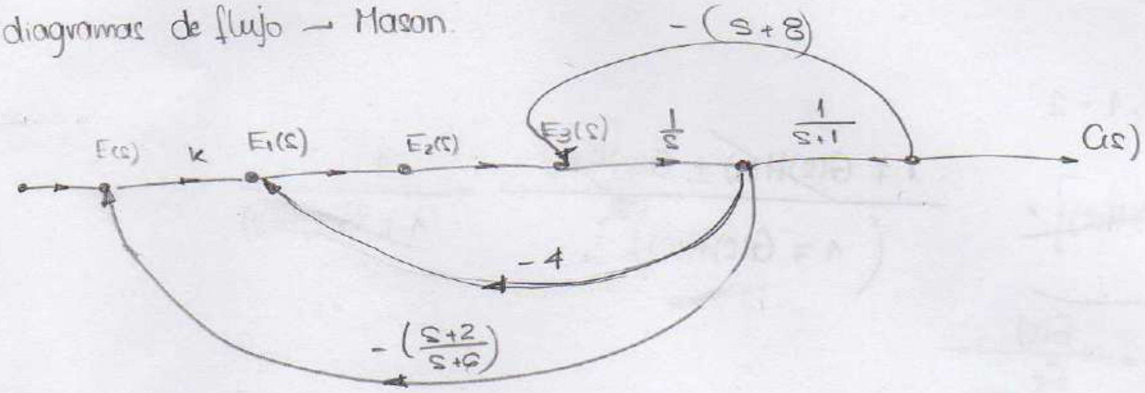
$$B = \lim_{s\to-2} \frac{30(s+1)}{s^2} = \frac{-30}{4} = -7{,}5$$

$$\frac{\dfrac{k(s+1)}{s^2+6s+12}}{1+\dfrac{k(s+1)}{(s^2+6s+12)}\cdot\dfrac{(s+2)}{(s+6)}} = \frac{\dfrac{k(s+1)}{\cancel{(s^2+6s+12)}}}{\dfrac{(s^2+6s+12)(s+6)+k(s+1)(s+2)}{\cancel{(s^2+6s+12)}(s+6)}} =$$

$$\frac{k(s+1)(s+6)}{s^3+6s^2+6s^2+36s+12s+72+ks^2+k3s+2k} = \frac{k(s+1)(s+6)}{s^3+(12+k)s^2+(48+3k)s+72+2k}$$

$$\frac{k(s+1)(s+6)}{s^3+(12+k)s^2+(48+3k)s+72+2k}\cdot\frac{1}{(s+1)} = \frac{k(s+6)}{s^3+(12+k)s^2+(48+3k)s+72+2k}$$

Por diagramas de flujo → Mason.



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta}\sum P_k\Delta_k$$

$$\Delta = 1-\sum_{a} L_a + \sum_{b,c} L_b L_c - \sum_{d,e,f} L_d L_e L_f + \dots$$

$$P_k = k\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{(s+1)} \qquad \Delta_k\ 1-(0+0+0)=1$$

$$L_1 = -\frac{4}{s}\ ;\quad L_2 = -\frac{(s+2)\cdot k}{s(s+6)}\ ;\quad L_3 = -\frac{(s+8)}{s(s+1)}$$

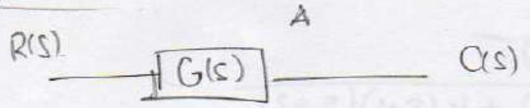
$$\Delta = 1+\frac{4}{s}+\frac{k(s+2)}{s(s+6)}+\frac{(s+8)}{s(s+1)} = \frac{s(s+6)(s+1)+4(s+1)(s+6)+k(s+2)(s+1)+(s+8)(s+6)}{s(s+1)(s+6)}$$

$$= \frac{s^3+\cancel{s^2}+\cancel{6s^2}+\cancel{6s}+\cancel{4s^2}+\cancel{24s}+\cancel{4s}+\cancel{24}+ks^2+\cancel{ks}+\cancel{2ks}+\cancel{2k}+\cancel{s^2}+\cancel{8s}+\cancel{6s}+48}{s(s+1)(s+6)} =$$

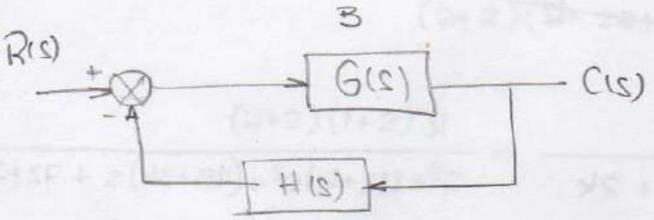
$$= \frac{s^3+(12+k)s^2+(48+3k)s+72+2k}{s(s+1)(s+6)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\cancel{s}\cancel{(s+1)}(s+6)}{s^3+(12+k)s^2+(48+3k)s+72+2k}\cdot\frac{k}{\cancel{s(s+1)}} = \frac{k(s+6)}{s^3+(12+k)s^2+(48+3k)s+72+2k}$$

Ejercicio 3



A. $\frac{C(s)}{R(s)} = G(s) = M(s)$



B. $E(s) = R(s) \pm C(s)H(s)$

$C(s) = G(s)\, H(s)$

$C(s) = R(s)\, G(s) \pm C(s)\,.\,H(s)\, G(s)$

$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 \mp G(s)\,H(s)} = M(s)$

4

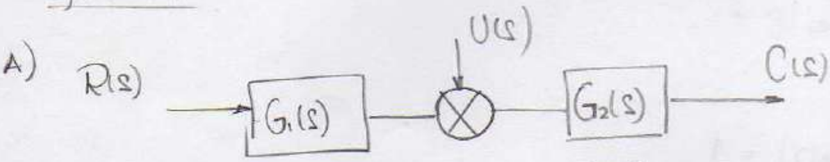
Sensibilidad

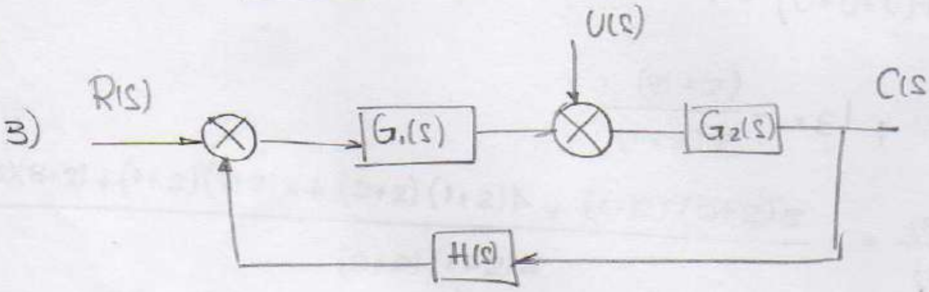
$$S_G^M = \frac{\frac{\partial M(s)}{M(s)}}{\frac{\partial G(s)}{G(s)}} = \frac{G(s)}{M(s)} \frac{\partial M(s)}{\partial G(s)}$$

A: $S_G^M = 1.1 = 1$

B. $\underbrace{\cancel{\left[1 \mp G(s)H(s)\right]}}_{\frac{G(s)}{M(s)} = \frac{G(s)}{\frac{G s}{1 \mp G(s)H(s)}}}$ $\cdot$ $\frac{1 \mp \cancel{G(s)H(s)} \pm \cancel{G(s)H(s)}}{\left(1 \mp G(s)H(s)\right)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{1 \mp G(s)H(s)}$

Ejercicio 4





A) Cuando $U(s) = 0$

$\frac{C(s)}{R(s)} = G_1(s)\, G_2(s)$

$R(s) = 0$

$\frac{C(s)}{U(s)} = G_2(s)$

$C_s = G_1(s)G_2(s)\; R(s) + G_2(s)U(s)$

B) $U(s) = 0$.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 H}$$

$R(s) = 0$

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{G_2}{1 + G_1 G_2 H}$$

$$C(s) = \frac{G_1 G_2 R}{1 + G_1 G_2 H} \pm \frac{G_2 U}{1 + G_1 G_2 H}$$

A lazo cerrado el efecto de G_2 disminuye sobre U porque se amplifica menos

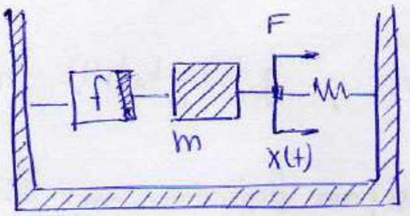
Ejercicios

$z = xy \rightarrow$ linealizar en $5 \leq x \leq 7$; $10 \leq y \leq 12$

Unidad Temática 2:

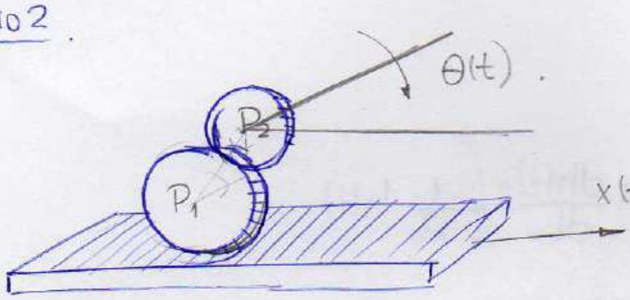
Trabajo Práctico 2-1

Ejercicio 1:



$$F(t) = m\ddot{x}(t) + f\,\dot{x}(t) + k\,x(t)$$

Ejercicio 2



C = 10 dientes/mm

P_1 : 40 dientes/~~mm~~

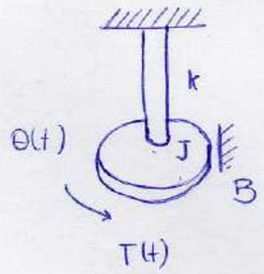
P_2 = 10 dientes.

$$x(t) = \frac{N}{C} \qquad C = \frac{10 \text{ dientes}}{mm}$$

$$N = \frac{N_1}{2\pi}\cdot\theta(t)$$

$$C\,x(t) = \frac{N_1\theta_1(t)}{2\pi} = \frac{N_2\theta_2(t)}{2\pi} \Rightarrow x(t) = \frac{N_1\theta_1(t)}{C\,2\pi} = \frac{N_2\theta_2(t)}{C\,2\pi} = \frac{N_2 P_c}{2\pi}\,\theta_2(t)$$

Ejercicio 3



J – momento de inercia del disco alrededor del eje.

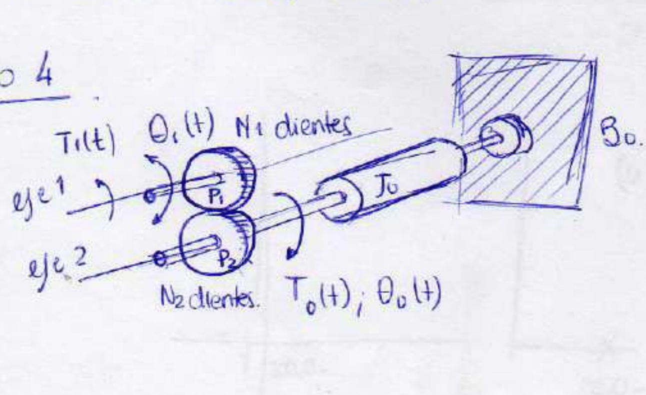
B – fricción viscosa.

k — Rigidez

Par — T(t).

$$T(t) = J\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t) + k\theta(t).$$

Ejercicio 4



$$p(t) = T(t)\cdot\dot{\theta}(t)$$

$$T_1(t)\,\dot{\theta}_1(t) = T_0(t)\cdot\dot{\theta}_0(t)$$

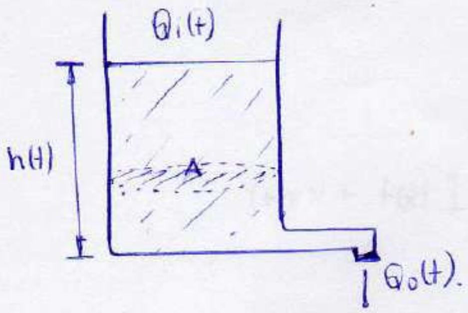
$$N_1\,\theta_1(t) = N_2\,\theta_0(t) \qquad N_1\ddot{\theta}_1(t) = N_2\ddot{\theta}_0(t)$$

$$N_1\,\dot{\theta}_1(t) = N_2\,\dot{\theta}_0(t) \Rightarrow \dot{\theta}_0(t) = \frac{N_1}{N_2}\,\dot{\theta}_1(t)$$

$$T_1(t) = T_0(t)\cdot\frac{N_1}{N_2}$$

$$T_0(t) = J_0\ddot{\theta}_0(t) + B_0\,\dot{\theta}_0(t) \qquad \frac{N_2}{N_1}T_1 = J_0\,\frac{N_1}{N_2}\ddot{\theta}_1(t) + B_0\,\frac{N_1}{N_2}\,\dot{\theta}_1(t) \Rightarrow T_1(t) = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_0\ddot{\theta}_1(t) + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 B_0\dot{\theta}_1$$

Ejercicio 5



$A = 2m^2$

$h_i = 4m$

$h_{30s} = 2{,}96m$

$$\frac{dh(t)}{dt} = k_1\left[q_i - q_o\right] \quad ; \quad q_o(t) = k_2 h(t) \quad ; \quad h(t) = \frac{1}{k_2} q_o(t)$$

Esta resistencia es asi para flujo laminar, no para el turbulento. $R = \frac{H}{Q} = \frac{1}{k_2}$

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{A}\left[q_i(t) - q_o(t)\right]$$

$$A\frac{dh(t)}{dt} = q_i(t) - \frac{1}{R_H}h(t) \Rightarrow q_i(t) = A\frac{dh(t)}{dt} + \frac{1}{R_H}h(t)$$

Consideramos cuando se cierra la entrada, entonces $q_i = 0$

$$0 = A\frac{dh(t)}{dt} + \frac{1}{R_H}h(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 0 = A\left[sH(s) - h(0)\right] + \frac{1}{R_H}H(s)$$

$$0 = \left(As + \frac{1}{R_H}\right)H(s) - Ah(0) \Rightarrow H(s) = \frac{Ah(0)}{As + \frac{1}{R_H}} = \frac{h(0)}{s + \frac{1}{AR_H}}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \rightarrow h(t) = h(0)e^{-\frac{1}{AR_H}t}$$

$$2{,}96 = 4e^{-\frac{1}{2R_H}30} \Rightarrow \frac{2{,}96}{4} = e^{-\frac{15}{R_H}} \rightarrow \ln\frac{2{,}96}{4} = -\frac{15}{R_H} \Rightarrow R_H = -\frac{15}{\ln\frac{2{,}96}{4}}$$

$$= 49{,}82\,\frac{s}{m^2}$$

a) $Q_i(s) = AsH(s) + \frac{1}{R_H}H_s \Rightarrow H_s = \frac{Q_i(s)}{As + \frac{1}{R_H}}$

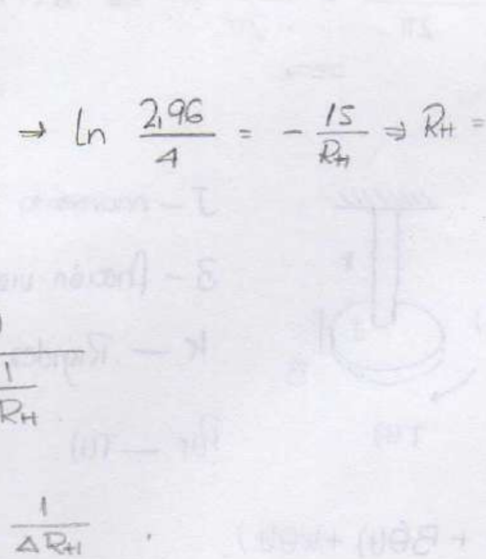
$Q_o(s) = H(s)\cdot\frac{1}{R_H} \Rightarrow H(s) = R_H Q_o(s)$

$$\frac{R_H Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{A\left(s + \frac{1}{AR_H}\right)} \Rightarrow \frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{\frac{1}{AR_H}}{s + \frac{1}{AR_H}}$$

b) Constante de tiempo

$R_H A = 49{,}82 \cdot 2 = 99{,}64$ (seg)

c)



d. Respuesta temporal para un caudal de entrada constante $q_i(t) = \text{cte}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{H(s)}{Q_i(s)} = \dfrac{\frac{1}{A}}{s + \frac{1}{AR_H}} \\ Q_i(s) = \dfrac{Q_i}{s} \end{array}\right\} H(s) = \frac{\frac{Q_i}{A}}{s\left(s + \frac{1}{AR_H}\right)} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s + \frac{1}{AR_H}}$$

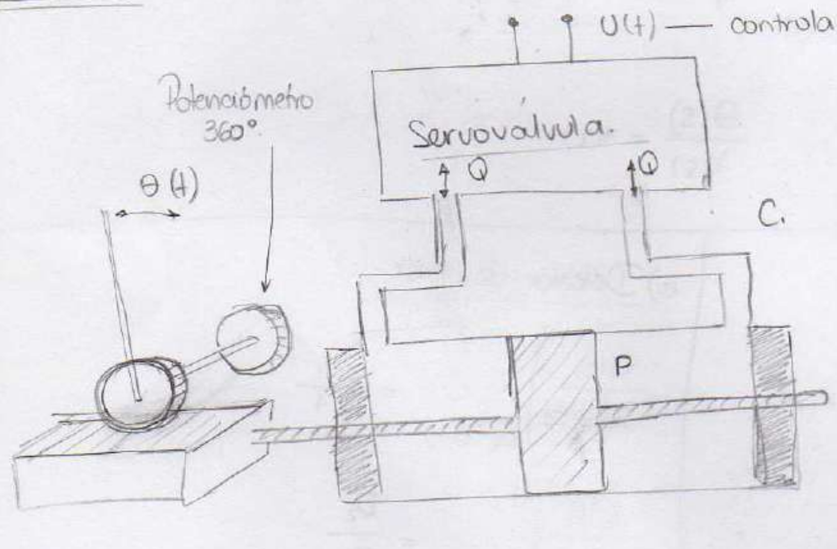
$$A_0 = \lim_{s \to 0} \frac{\frac{Q_i}{A}}{s + \frac{1}{AR_H}} = Q_i R_H \quad ; \quad A_1 = \lim_{s \to -\frac{1}{AR_H}} \frac{\frac{Q_i}{A}}{s} = -Q_i R_H .$$

$$H(s) = R_H \cdot Q_i \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{A R_H}} \right)$$

$$h(t) = R_H Q_i \left(1 - e^{-\frac{1}{AR_H}t} \right)$$

e. $Q_i = 50 \frac{\text{litros}}{\text{seg}}$ $\qquad h(\infty) = 49{,}82 \frac{s}{m^2} \cdot 50 \frac{l}{s} \cdot \frac{1\,m^3}{1000\,l} = \boxed{2{,}49\,m}$

Ejercicio 6



acciona el pistón (P)

mueve mediante la cremallera y el engranaje, el vastago.

Paso de la cremallera 1,2566 mm

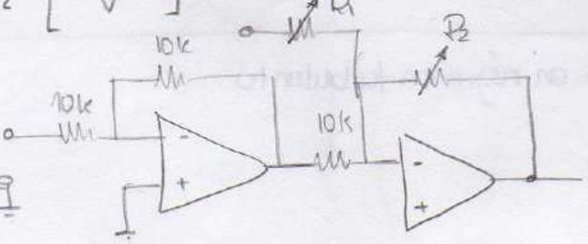
Engranaje : 50 dientes.

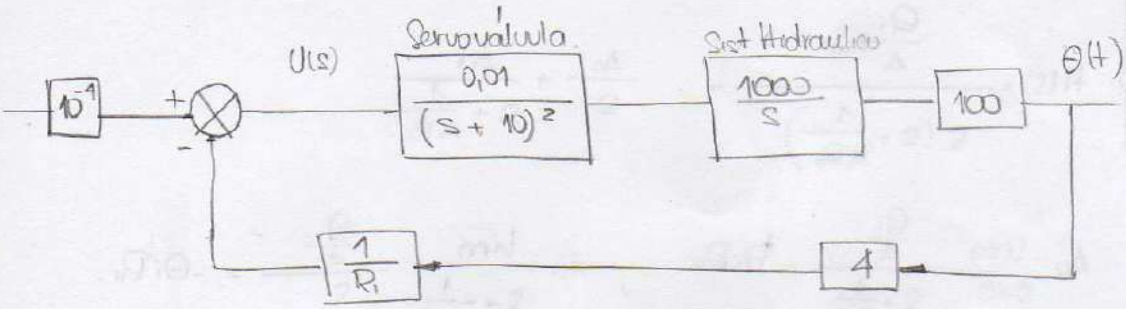
$d_{pistón}$ = 35,682 mm

Potenciómetro → alimentado por ±12,57V

a) $\dfrac{Q(s)}{U(s)} = \dfrac{0{,}01}{(s+10)^2} \left[\dfrac{m^2}{sV} \right]$

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{0{,}01}{(s+10)^2} \left[\frac{m^3/s}{V} \right]$$





a) Servoválvula

$$\frac{Q(t)}{U(t)} = \frac{0{,}01}{(s+10)^2}$$

b) Sistema hidráulico cerrado: cuánto se mueve el pistón según el caudal

$$q(t) = \frac{dV(t)}{dt} = A \cdot \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow dx(t) = \frac{1}{A} q(t)\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{A}\int q(t)\, dt \qquad X(s) = \frac{1}{A} \cdot \frac{Q(s)}{s} \quad ; \quad A = \frac{\pi d^2}{4} = 10^{-3} m^2$$

$$\frac{X(s)}{Q(s)} = \frac{1000}{s} \quad \left[\frac{seg}{m^2}\right]$$

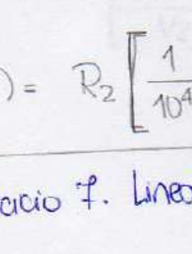
c) Cremallera engranaje

$$x(t) = \frac{N.P}{2\pi} \cdot \theta(t)$$

Por cada paso de la cremallera gira 1 diente del engranaje.
Por cada radián que gira el engranaje se mueve una cantidad de $\frac{N}{2\pi}$ dientes. Eso multiplicado por los radianes que se mueve me da la cantidad de dientes que se movió y eso multiplicado por el paso de la cremallera me dice cuánto se movió la misma

$$x(t) = \frac{50 \cdot 1{,}2566}{2\pi} \theta(t) = 0{,}01\, \theta(t) \Rightarrow \qquad \frac{\theta(s)}{X(s)} = 100$$

d) Potenciómetro



$$V_\theta(t) = \frac{V}{\pi} = \frac{12{,}57}{\pi} = 4$$

e) Detector de error

$$\left.\frac{U(s)}{e_{ref}(s)}\right|_{V_\theta(s)=0} = \frac{R_2}{10^4}$$

$$\left.\frac{U(s)}{V_\theta(s)}\right|_{e_{ref}(s)=0} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$U(s) = R_2 \left[\frac{1}{10^4} e_{ref}(s) - \frac{1}{R_1} V_\theta(s)\right]$$

Ejercicio 7. Linealizar un sistema hidráulico en régimen turbulento.

En estado estacionario $\bar{Q} = q_i(t) = q_o(t)$

En estado turbulento: $\bar{Q} = k\sqrt{\bar{H}}$

Cuando se incrementa el caudal de entrada

$$Q_i(t) = \bar{Q} + q_i(t) \; ; \; H(t) = \bar{H} + h(t) \; ; \; Q_o(t) = \bar{Q} + q_o(t) \; ; \; Q_i(t) - Q_o(t) = A \cdot \frac{dH(t)}{dt}$$

$$\frac{dH(t)}{dt} = \frac{1}{A} Q_i(t) - \frac{k}{A}\sqrt{H(t)}$$ → esta es una función diferencial no lineal.

La linealizamos:

$$z = f(x,y)$$

$$z - \bar{z} = \left.\frac{dz}{dx}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}} (x-\bar{x}) + \left.\frac{dz}{dy}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}} (y-\bar{y})$$

$$\operatorname{sen}\alpha\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha\right)$$

$$\frac{dH(t)}{dt} - \left.\frac{dH(t)}{dt}\right|_{\substack{Q_i(t)=\bar{Q}\\ H(t)=\bar{H}}} = \frac{dH(t)}{dt}.$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

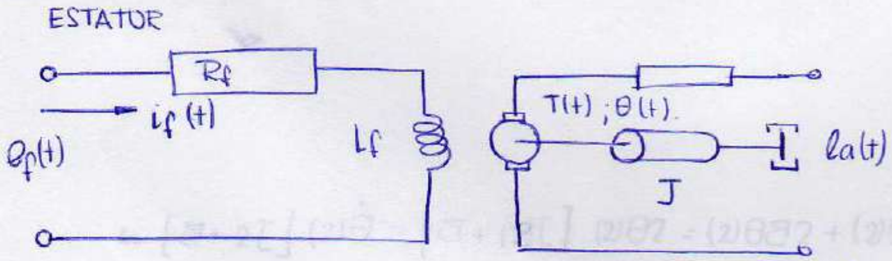
b) $$\frac{dH(t)}{dt} = f\left[Q_i(t); H(t)\right]$$

verlo directamente desde el cuaderno.

No tiene sentido escribirlo de nuevo todo.

TP 2.2 - MOTORES DE C.C. - SISTEMAS TÉRMICOS

Motor controlado por campo



$$\left.\begin{aligned} &\to T(t) = k\,\Phi(t).\,i_a(t) \\ &\to \Phi(t) = k'.\,i_f(t) \\ &\to i_a = k'' \end{aligned}\right\} \quad T(t) = kk'k''\,i_f(t) = k_T\,i_f(t) \Rightarrow T(s) = k_T I_f(s) \Rightarrow \boxed{\frac{T(s)}{I_f(s)} = k_T}$$

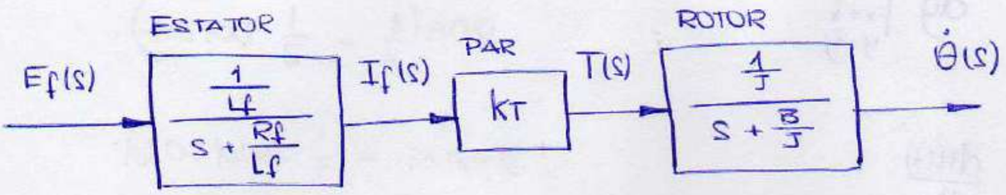
$$\to e_f(t) = R_f.\,i_f(t) + L_f.\,\frac{di_f(t)}{dt} \Rightarrow E_f(s) = R_f\,I_f(s) + s\,L_f\,I_f(s) \Rightarrow \frac{I_f(s)}{E_f(s)} = \frac{1}{R_f + L_f.s} =$$

$$= \boxed{\frac{\frac{1}{L_f}}{s + \frac{R_f}{L_f}}}$$

$$T(t) = J\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t) \Rightarrow T(s) = Js^2\,\theta(s) + Bs\theta(s) = \underbrace{s\theta(s)}_{\omega(s) = \dot{\theta}(s)}(Js+B) = \dot{\theta}(s)(Js+B) \Rightarrow$$

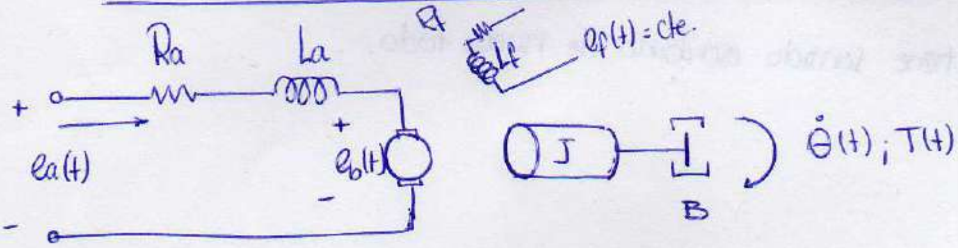
$$\Rightarrow \frac{\dot{\theta}(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js+B} = \frac{1/J}{s + B/J}$$

Diagrama en bloques:



Después de formar la función de transferencia completa se aplica el teorema del valor final para encontrar el valor de k_T con los datos dados...

Motor de corriente continua controlado por armadura



* $e_a(t) - e_b(t) = R_a\,i_a(t) + L_a \dfrac{di_a(t)}{dt} \Rightarrow E_a(s) - E_b(s) = R_a I_a(s) + sL_a I_a(s) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{I_a(s)}{E_a(s) - E_b(s)} = \frac{\frac{1}{L_a}}{s + \frac{R_a}{L_a}}$$

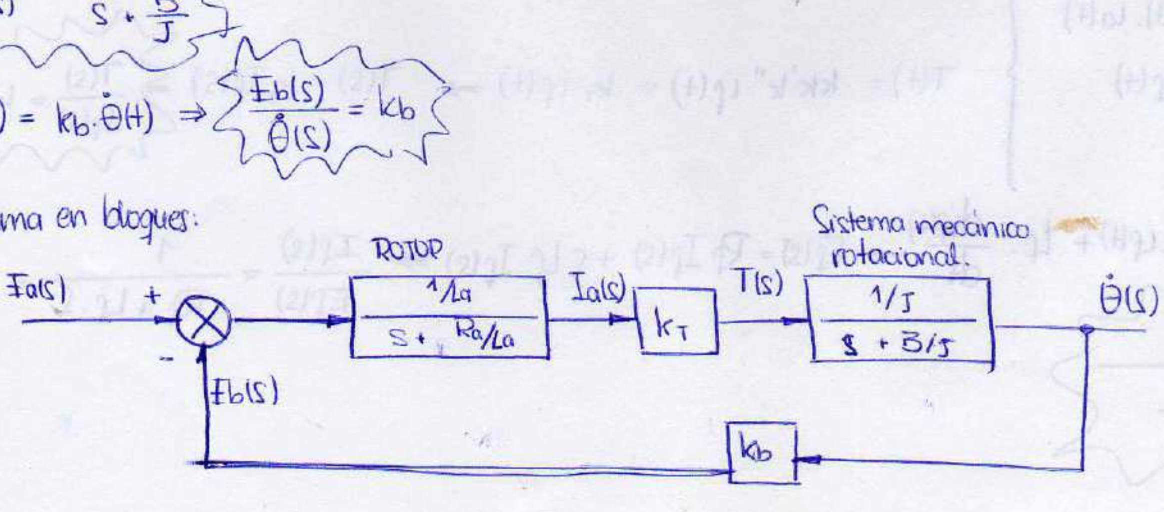
* $T(t) = k_T\,i_a(t) \Rightarrow \dfrac{T(s)}{I_a(s)} = k_T$

* $T(t) = J\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t) \Rightarrow T(s) = s^2 J\theta(s) + sB\theta(s) = s\theta(s)\,[Js + B] = \dot{\theta}(s)\,[Js + B] \Rightarrow$

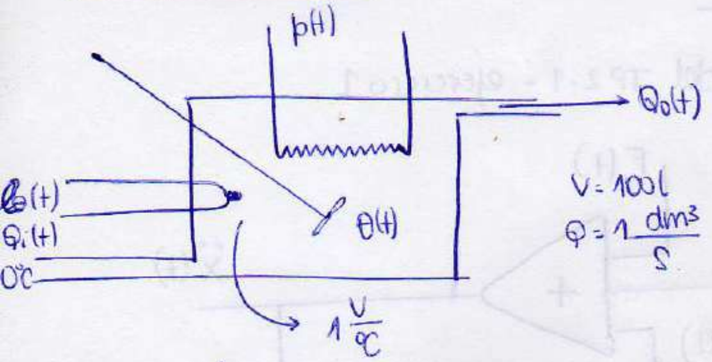
$$\Rightarrow \frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{\frac{1}{J}}{s + \frac{B}{J}}$$

* $e_b(t) = k_b \cdot \dot{\theta}(t) \Rightarrow \dfrac{E_b(s)}{\dot{\theta}(s)} = k_b$

Diagrama en bloques:



Sistema térmico



$V = 100\,l$

$Q = 1\,\frac{dm^3}{s}$

Tensión de referencia $E_{ref}(t)$: 10V.

Detector de error de ganancia unitaria.

* Calefactor

$$\frac{P(s)}{E(s)} = \frac{1000}{s+0{,}1}$$ Amplificador de potencia.

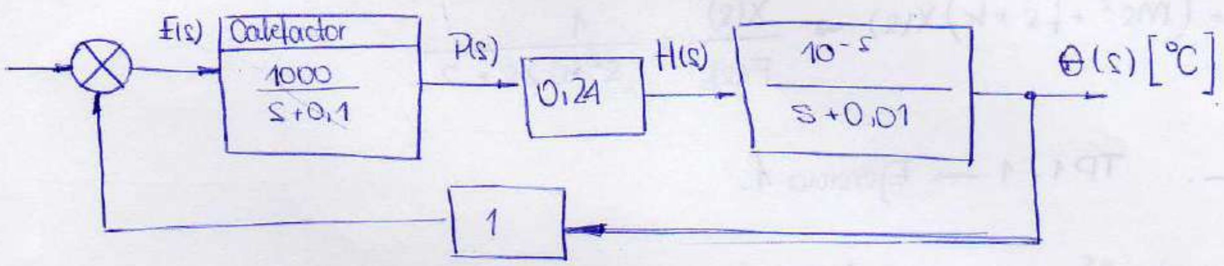
$1\ Cal = 4.186\ Joules$

$$w(t) = \frac{4.186\ Joules}{1\ Cal} \cdot Q(t)$$

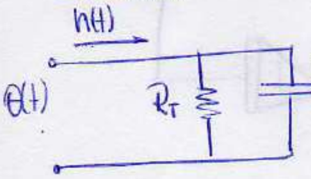
$$\frac{dw(t)}{dt} = p(t) = 4{,}186\ \frac{Joules}{Cal} \cdot \frac{dQ(t)}{dt}$$

$$p(t) = 4{,}186\ \frac{Joule}{cal} \cdot h(t)$$

$$\frac{H(s)}{P(s)} = 0{,}24\ \frac{cal}{Joule}$$



Sistema térmico



$$\frac{\theta(t)}{R_T} + C_T\frac{d\theta(t)}{dt} = h(t) \Rightarrow H(s) = \left(\frac{1}{R_T} + C_T \cdot s\right)\theta(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\theta(s)}{H(s)} = \frac{1}{C_T s + \frac{1}{R_T}} = \frac{\frac{1}{C_T}}{s + \frac{1}{R_T C_T}} = \frac{10^{-5}}{s + 10^{-2}}$$

$R_T\ \left[\frac{°C.seg}{cal}\right]$

$C_T\ \left[\frac{Cal}{°C}\right]$

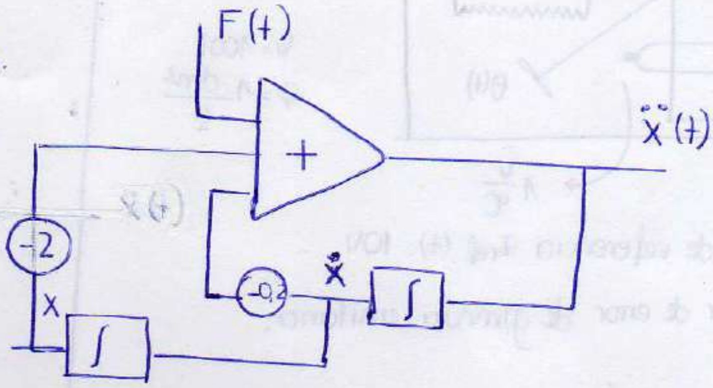
$$R_T = \frac{1}{\rho . Ce . Q} = \frac{1}{1\frac{kg}{dm^3} \cdot 1\frac{cal}{g°C} \cdot \frac{1\,dm^3}{s} \cdot \frac{1000g}{1kg}} = 10^{-3}\frac{°C.seg}{cal}$$

$$C_T = m\,Ce = \rho V Ce = 1\frac{kg}{dm^3} \cdot 100\,dm^3 \cdot 1\ \frac{cal}{g°C} \cdot \frac{1000g}{1kg} = 10^5\ \frac{Cal}{°C}$$

Trabajo práctico nº 3 → Simulación analógica

Ejercicio 1. Diagrama de simulación analógica del TP 2-1 - ejercicio 1.

$$F(t) = m\ddot{x}(t) + f\dot{x}(t) + kx(t).$$



$$m\ddot{x}(t) = F - f\dot{x}(t) - kx(t)$$

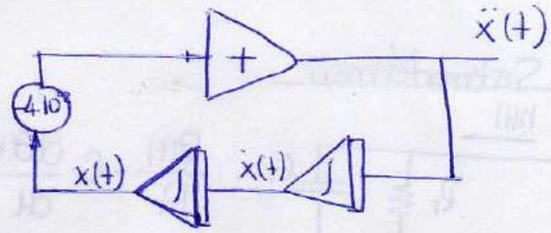
$$\ddot{x}(t) = \frac{F}{m} - \underbrace{\left(\frac{f}{m}\right)}_{0,2}\dot{x}(t) - \underbrace{\left(\frac{k}{m}\right)}_{2}x(t)$$

$$F(s) = \left(ms^2 + fs + k\right)X(s) \Rightarrow \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 + 0,2s + 2}$$

Ejercicio 2. TP 1-1 → Ejercicio 4.

$$-8.10^{-5}x(t) = 2.10^{-3}\ddot{x}(t)$$

$$\ddot{x}(t) = -4.10^{-2}x(t)$$



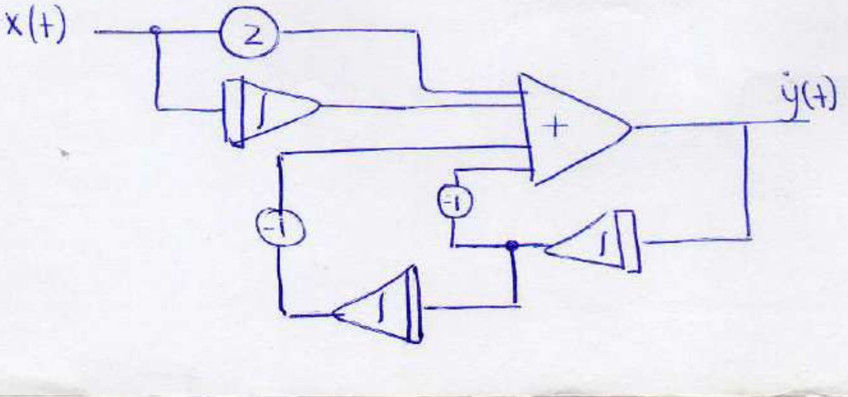
Ejercicio 3

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s^2+1}{s^2+s+1} \Rightarrow Y(s)\,s^2 + Y(s)\,s + Y(s) = 2X(s)\,s^2 + X(s)$$

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = 2\ddot{x}(t) + x(t).$$

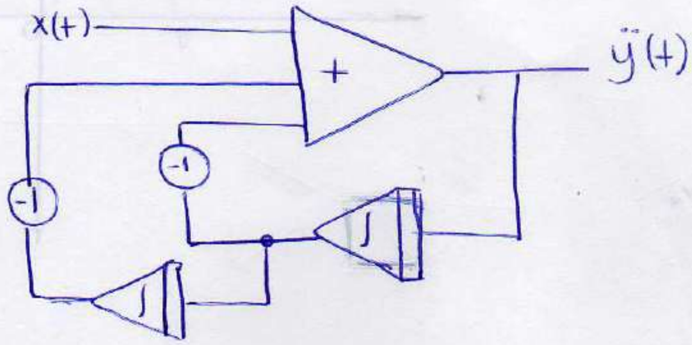
$$\ddot{y}(t) = 2\ddot{x}(t) + x(t) - \dot{y}(t) - y(t)$$

$$\dot{y}(t) = 2\dot{x}(t) + \int x(t) - y(t) - \int y(t).$$



Ejercicio 4

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2+s+1} \Rightarrow \ddot{y}(t) = x(t) - \dot{y}(t) - y(t)$$



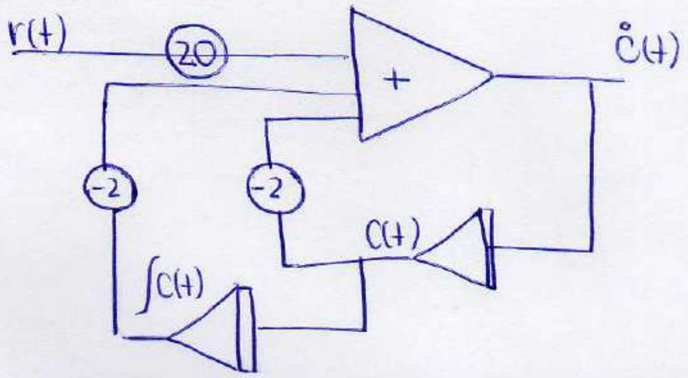
Ejercicio 5

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{20s}{s^2+2s+2} \Rightarrow s^2C(s) + 2sC(s) + 2C(s) = 20sR(s)$$

$$\ddot{c}(t) + 2\dot{c}(t) + 2c(t) = 20\,\dot{r}(t)$$

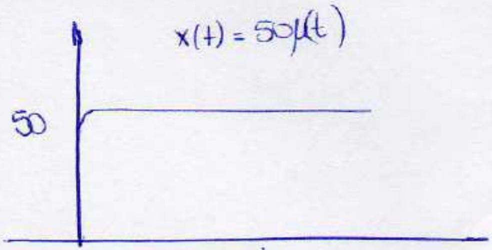
$$\dot{c}(t) + 2c(t) + 2\int c(t) = 20r(t)$$

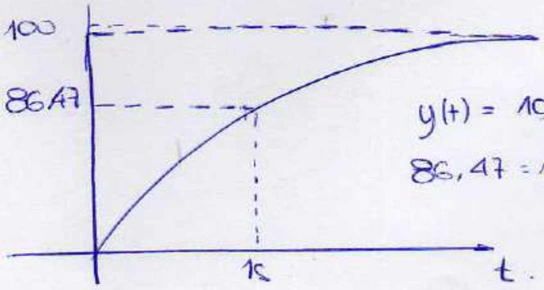
$$\dot{c}(t) = 20r(t) - 2c(t) - 2\int c(t)$$



TRABAJO PRÁCTICO N° 4: RESPUESTA TRANSITORIA.

Ejercicio 1





$$y(t) = 100(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

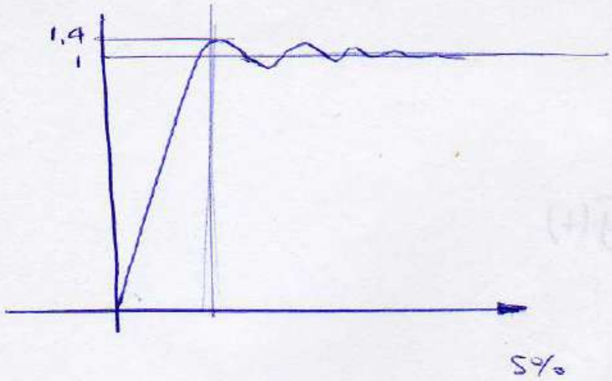
$$86,47 = 100(1 - e^{-\frac{1}{\tau}}) \Rightarrow \tau = 0,5$$

$$y(t) = 100(1 - e^{-2t})$$

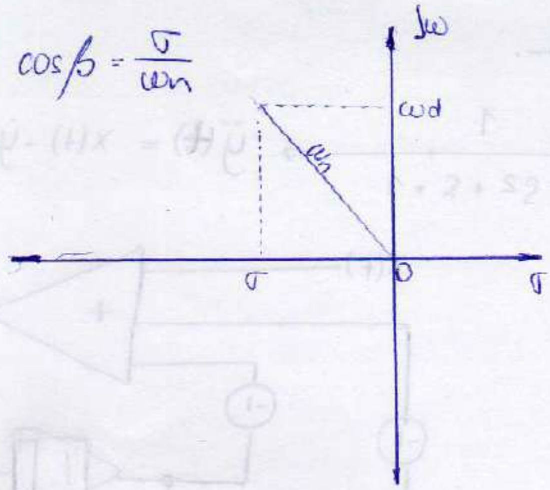
$$X(s) = \frac{50}{s}\ ;\ Y(s) = 100\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{100\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right)}{\frac{50}{s}} = \frac{100 \cdot s\left(\frac{s+2-s}{s(s+2)}\right)}{50} = \frac{4 \cdot \cancel{s}}{\cancel{s}(s+2)} = \boxed{\frac{4}{s+2}}$$

Ejercicio 2



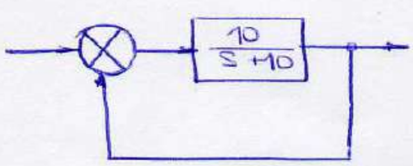
$\zeta \quad \xi = \cos\beta = \frac{\sigma}{\omega_n}$



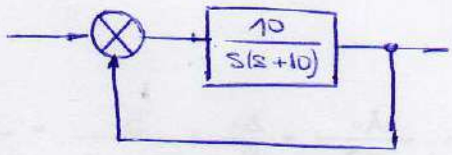
UNIDAD TEMÁTICA Nº 5: Analisis en estado permanente.

Ejercicio 1 . Ejercicio 2

A



B



		0 (A)	1 (B)
$k_p\,(\mu(t))$	$\lim_{s\to 0} G(s)H(s)$	1	∞
$k_v\,(t\,\mu(t))$	$\lim_{s\to 0} s\,G(s)H(s)$	0	1
$k_a\left(\frac{1}{2}t^2\mu(t)\right)$	$\lim_{s\to 0} s^2G(s)H(s)$	0	0
$e_{ss\,\mu(t)}$	$\frac{1}{1+k_p}$	0,5	0
$e_{ss\,t\mu(t)}$	$\frac{1}{k_v}$	∞	1
$e_{ss\,\frac{1}{2}t^2\mu(t)}$	$\frac{1}{k_a}$	∞	∞

Ejercicio 3

Sistema A

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{10}{s+10}}{1+\frac{10}{s+10}} = \frac{10}{s+20} \quad ; \; r(t) = t\,\mu(t) \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$C(s) = \frac{10}{s^2(s+20)} = \frac{A_0}{s^2} + \frac{A_1}{s} + \frac{B}{s+20} = \frac{0{,}5}{s^2} - \frac{0{,}025}{s} + \frac{0{,}025}{s+20}$$

$$A_0 = \lim_{s\to 0} \frac{10}{s+20} = 0{,}5 \quad A_1 = \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}\left(\frac{10}{s+20}\right) = \lim_{s\to 0} -\frac{10}{(s+20)^2} = -0{,}025 \; ; \; B = \lim_{s\to -20} \frac{10}{s^2} = 0{,}025$$

$$c(t) = 0{,}5t - 0{,}025 + 0{,}025\,e^{-20t}$$

↳ pendiente $\frac{1}{2}$ la de la entrada, cuando $t\to\infty$ el error $\to\infty$.

Sistema B

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{10}{s(s+10)}}{1+\frac{10}{s(s+10)}} = \frac{10}{s(s+10)+10} = \frac{10}{s^2+10s+10} =$$

$$\frac{-10 \pm \sqrt{100-40}}{2} = \quad \frac{-10+\sqrt{60}}{2} = -1{,}13 \qquad \frac{-10-\sqrt{60}}{2} = -8{,}87$$

$$= \frac{10}{(s+1{,}13)(s+8{,}87)}$$

$$C(s) = \frac{10}{s^2(s+1{,}13)(s+8{,}87)} = \frac{A_0}{s^2} + \frac{A_1}{s} + \frac{B}{(s+1{,}13)} + \frac{C}{(s+8{,}87)}$$

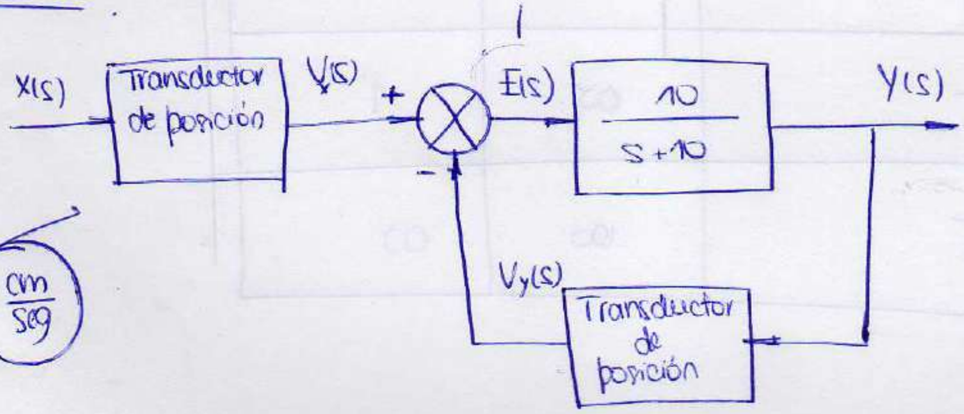
$$A_0 = \lim_{s\to 0} \frac{10}{(s+1{,}13)(s+8{,}87)} = 1 \;; \quad A_1 = \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}\left(\frac{10}{s^2+10s+10}\right) = \lim_{s\to 0} \frac{-(s+10)\,10}{(s^2+10s+10)^2} = -\frac{100}{100} = -1$$

$$B = \lim_{s\to -1{,}13} \frac{10}{s^2(s+8{,}87)} = 1{,}01 \;; \quad C = \lim_{s\to -8{,}87} \frac{10}{s^2(s+1{,}13)} = -0{,}01$$

$$C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1{,}01}{s+1{,}13} - \frac{0{,}01}{s+8{,}87}$$

$c(t) = t - 1 + 1{,}01\,e^{-1{,}13t} - 0{,}01\,e^{-8{,}87t}$ → cuando $t\to\infty$ el error es 1.

Ejercicio 4



$1\ \frac{cm}{seg}$

$E(s) = V_x(s) - V_y(s) = X(s) - Y(s)$

$e(t) = x(t) - y(t)$

$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \infty$

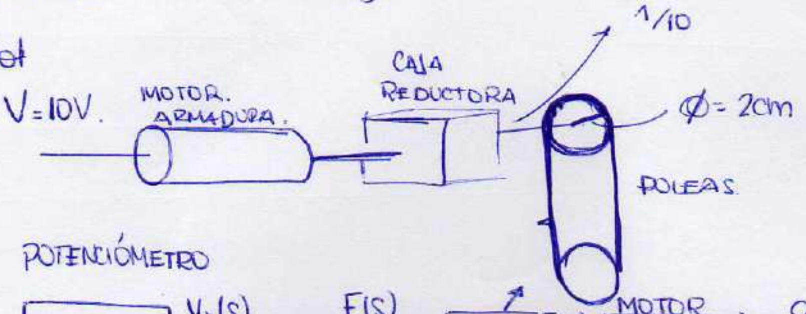
$e(t) = t - \frac{1}{2}t + 0{,}025 - 0{,}025\,e^{-20t}$

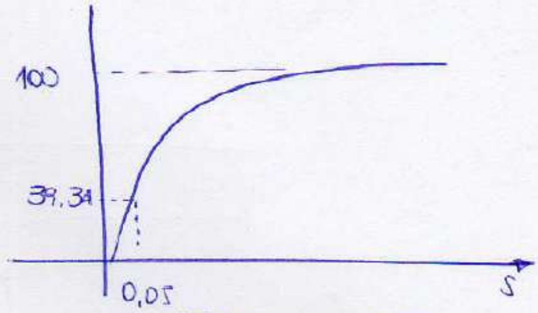
$\dot{e}(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-20t}$

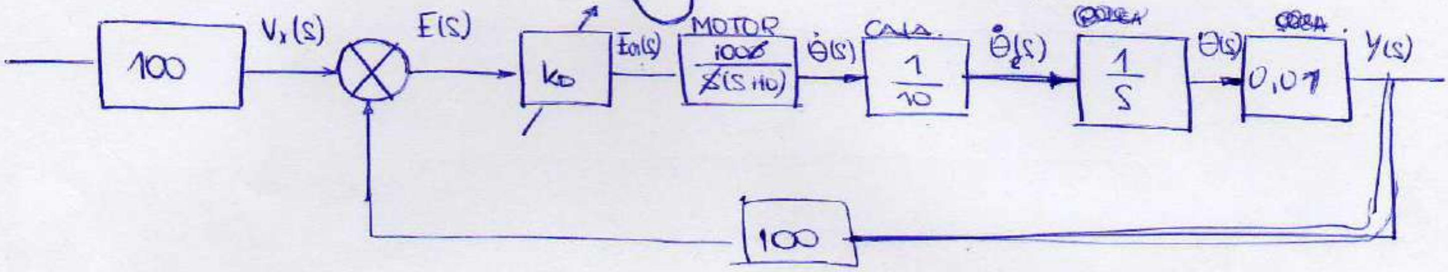
Hola! no tengo más ganas de estudiar!

Ejercicio 5 — Graficador. x(t)

- Amplificador driver.
- Pote lineal 10cm
- ±5V Vcc
- detector de error con A.O. g=1.
- ~~control~~







Potenciómetro

$$\frac{10V}{10cm} \Rightarrow \frac{10V}{0,1m} \cdot x(t) = V_x(t) = 100$$

Integrador.

$$\frac{\Theta(s)}{\dot{\Theta}(s)} = \frac{1}{S}$$

$$V = \omega r \Rightarrow \frac{Y(s)}{\Theta(s)} = r = 1cm$$

Motor
(10V)

$$\dot{\Theta}(t) = 100\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$39.34 = 100\left(1 - e^{-\frac{0,05}{\tau}}\right) \Rightarrow \tau = 0,1 \text{ seg.}$$

$$100\left(1 - e^{-bt}\right) \Rightarrow 100\left(\frac{1}{S} - \frac{1}{S+10}\right) =$$

$$= 100\,\frac{S+10-S}{S(S+10)} = \frac{100 \cdot 10}{S(S+10)}$$

$$\frac{\dot{\Theta}(s)}{E_a(s)} = \frac{1000}{S(S+10)} \cdot \frac{S}{10} = \frac{100}{(S+10)}$$

3

Modelado matemático de sistemas mecánicos y sistemas eléctricos

3-1 Introducción

Este capítulo presenta el modelado matemático de sistemas mecánicos y de sistemas eléctricos. En el Capítulo 2 se obtuvieron los modelos matemáticos de un circuito eléctrico simple y de un sistema mecánico sencillo. En este capítulo se considera el modelado matemático de una variedad de sistemas mecánicos y sistemas eléctricos que pueden aparecer en los sistemas de control.

La ley fundamental que controla los sistemas mecánicos es la segunda ley de Newton. En la Sección 3-2 se aplica esta ley a diversos sistemas mecánicos y se calculan los modelos como función de transferencia y en el espacio de estados.

Las leyes básicas que controlan los circuitos eléctricos son las leyes de Kirchhoff. En la Sección 3-3 se obtienen los modelos como función de transferencia y en el espacio de estados de diversos circuitos eléctricos y sistemas de amplificadores operacionales que pueden aparecer en muchos sistemas de control.

3-2 Modelado matemático de sistemas mecánicos

Esta sección presenta en primer lugar sistemas sencillos de resortes y sistemas simples de amortiguadores. Después calcula los modelos como función de transferencia y en el espacio de estados de diversos sistemas mecánicos.

EJEMPLO 3-1 Se va a obtener la constante del resorte de los sistemas que se muestran en las Figuras 3-1(a) y (b), respectivamente.

Para los resortes en paralelo [Figura 3-1(a)], la constante del resorte equivalente k_{eq} se obtiene de

$$k_1 x + k_2 x = F = k_{eq} x$$

o

$$k_{eq} = k_1 + k_2$$

Para los resortes en serie [Figura 3-1(b)], la fuerza en cada resorte es la misma. Así,

$$k_1 y = F, \qquad k_2(x - y) = F$$

Si se elimina y de esas dos ecuaciones se obtiene

$$k_2\left(x - \frac{F}{k_1}\right) = F$$

o bien

$$k_2 x = F + \frac{k_2}{k_1} F = \frac{k_1 + k_2}{k_1} F$$

La constante equivalente del resorte k_{eq} para este caso es

$$k_{eq} = \frac{F}{x} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \frac{1}{\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}}$$

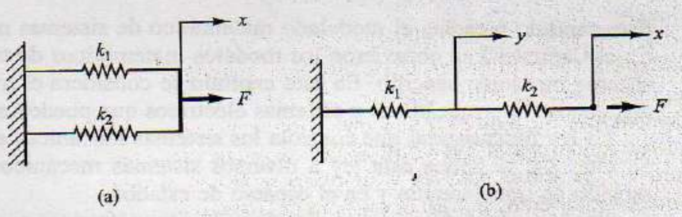


Figura 3-1. (a) Sistema formado por dos resortes en paralelo; (b) sistema formado por dos resortes en serie.

EJEMPLO 3-2 Se va a obtener el coeficiente de fricción viscosa equivalente b_{eq} para cada uno de los sistemas que se muestran en las Figuras 3-2(a) y (b). Un amortiguador es un dispositivo que proporciona fricción viscosa o amortiguamiento. Está formado por un pistón y un cilindro lleno de aceite. El aceite resiste cualquier movimiento relativo entre la varilla del pistón y el cilindro, debido a que el aceite debe fluir alrededor del pistón (o a través de orificios en el pistón) de un lado del pistón al otro. El amortiguador esencialmente absorbe energía. Esta energía absorbida se disipa como calor y el amortiguador no almacena energía cinética ni potencial.

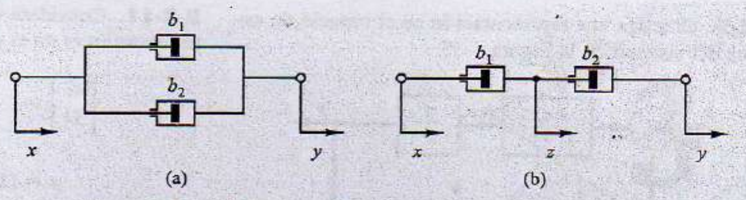


Figura 3-2. (a) Dos amortiguadores conectados en paralelo; (b) dos amortiguadores conectados en serie.

(a) La fuerza f debida a los amortiguadores es

$$f = b_1(\dot{y} - \dot{x}) + b_2(\dot{y} - \dot{x}) = (b_1 + b_2)(\dot{y} - \dot{x})$$

En términos del coeficiente de fricción viscosa equivalente b_{eq}, la fuerza f está dada por

$$f = b_{eq}(\dot{y} - \dot{x})$$

De ahí,

$$b_{eq} = b_1 + b_2$$

(b) La fuerza f debida a los amortiguadores es

$$f = b_1(\dot{z} - \dot{x}) = b_2(\dot{y} - \dot{z}) \tag{3-1}$$

donde z es el desplazamiento de un punto entre el amortiguador b_1 y el amortiguador b_2. (Observe que la misma fuerza se transmite a través del eje.) De la Ecuación (3-1), se tiene

$$(b_1 + n_2)\dot{z} = b_2\dot{y} + b_1\dot{x}$$

o bien

$$\dot{z} = \frac{1}{b_1 + b_2}(b_2\dot{y} + b_1\dot{x}) \tag{3-2}$$

En términos del coeficiente de fricción viscosa equivalente b_{eq}, la fuerza f está dada por

$$f = b_{eq}(\dot{y} - \dot{x})$$

Si se sustituye la Ecuación (3-2) en la Ecuación (3-1), se tiene

$$\begin{aligned} f = b_2(\dot{y} - \dot{z}) &= b_2\left[\dot{y} - \frac{1}{b_1 + b_2}(b_2\dot{y} + b_1\dot{x})\right] \\ &= \frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2}(\dot{y} - \dot{x}) \end{aligned}$$

Así,

$$f = b_{eq}(\dot{y} - \dot{x}) = \frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2}(\dot{y} - \dot{x})$$

De ahí,

$$b_{eq} = \frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2} = \frac{1}{\dfrac{1}{b_1} + \dfrac{1}{b_2}}$$

EJEMPLO 3-3 Considérese el sistema masa-resorte-amortiguador montado en un carro, sin masa, que aparece en la Figura 3-3. Se va a obtener un modelo matemático de este sistema, suponiendo que el carro está inmóvil durante un $t < 0$ y que el sistema masa-resorte- amortiguador también está inmóvil durante un $t < 0$. En este sistema, $u(t)$ es el desplazamiento del carro y la entrada para el sistema. En $t = 0$, el carro se mueve a una velocidad constante o bien $\dot{u}$ = constante. El desplazamiento $y(t)$ de la masa es la salida. (El desplazamiento en relación con el piso.) En este sistema, m representa la masa, b denota el coeficiente de fricción viscosa y k es la constante del resorte. Se supone que la fuerza de fricción del amortiguador es proporcional a $\dot{y} - \dot{u}$ y que el resorte es lineal; es decir, la fuerza del resorte es proporcional a $y - u$.

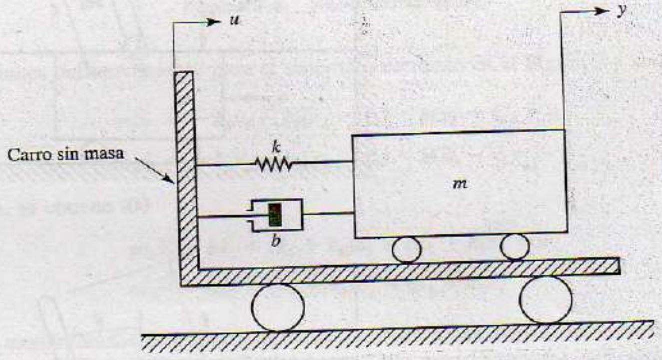


Figura 3-3. Sistema resorte-masa-amortiguador montado sobre un carro.

Para sistemas traslacionales, la segunda ley de Newton establece que

$$ma = \sum F$$

donde m es una masa, a es la aceleración de la masa y ΣF es la suma de las fuerzas que actúan sobre la masa. Aplicando la segunda ley de Newton al sistema presentado y considerando que el carro no tiene masa, se obtiene

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -b\left(\frac{dy}{dt} - \frac{du}{dt}\right) - k(y - u)$$

o bien

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = b\frac{du}{dt} + ku$$

La ecuación representa un modelo matemático del sistema considerado. Si se toma la transformada de Laplace de cada término de esta última ecuación se obtiene

$$(ms^2 + bs + k)Y(s) = (bs + k)U(s)$$

Si se toma el cociente entre $Y(s)$ y $U(s)$, se encuentra que la función de transferencia del sistema es

$$\text{Función de transferencia} = G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$$

Tal representación mediante la función de transferencia de un modelo matemático se usa con mucha frecuencia en la ingeniería de control.