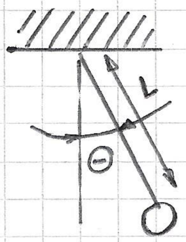
FECHA:

HOJA: 1

TEMA 1: LINEALIZACIÓN DE FUNCIONES



$T = mgL \, \text{sen}\,\theta$

Se linealiz entre $-\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{8}$ $\therefore$ $\bar{\theta} = 0$

a) $\bar{T}(\bar{\theta}) = T(\bar{\theta}) + \frac{dT(\bar{\theta})}{d\theta}(\theta - \bar{\theta})$

$\bar{T}(\bar{\theta}) = mgL \, \text{sen}(\bar{\theta}) + \frac{d}{d\theta}\left(mgL \, \text{sen}(\bar{\theta})\right)(\theta - \bar{\theta})$

$\bar{T}(\bar{\theta}) = mgL \, \text{sen}(\bar{\theta}) + mgL \cos(\bar{\theta})(\theta - \bar{\theta})$

$\bar{T}(\bar{\theta}) = mgL \, \text{sen}(0^\circ) + mgL \cos(0^\circ)(\theta - 0^\circ)$

$\bar{T}(\theta) = mgL\,\theta$

b) Error absoluto (e_A) y error relativo (e_R),

$e_A = T(\pm\pi/8) - \bar{T}(\pm\pi/8) = \pm 0{,}01$

$e_R = \frac{T(\pm\pi/8) - \bar{T}(\pm\pi/8)}{T(\pm\pi/8)} \cdot 100\% = \pm 2{,}617\%$

NOTA:

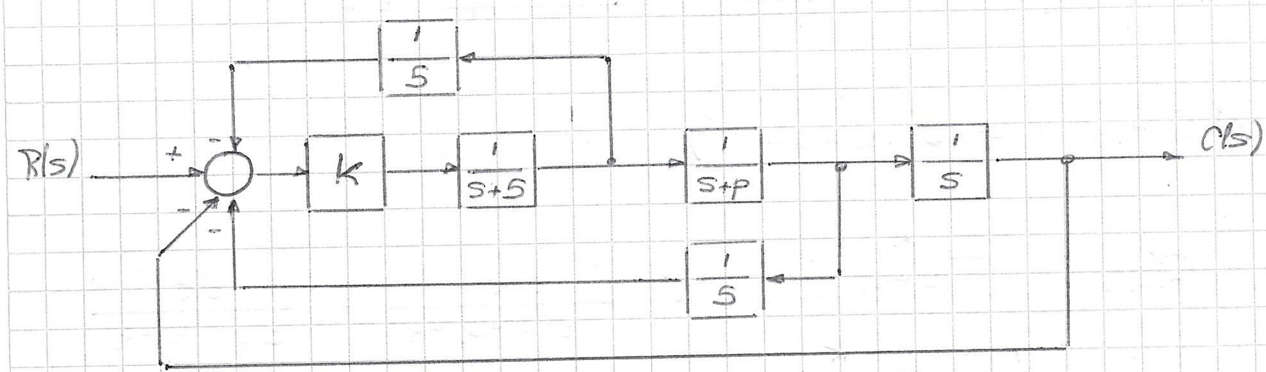
NOTA:

FECHA:

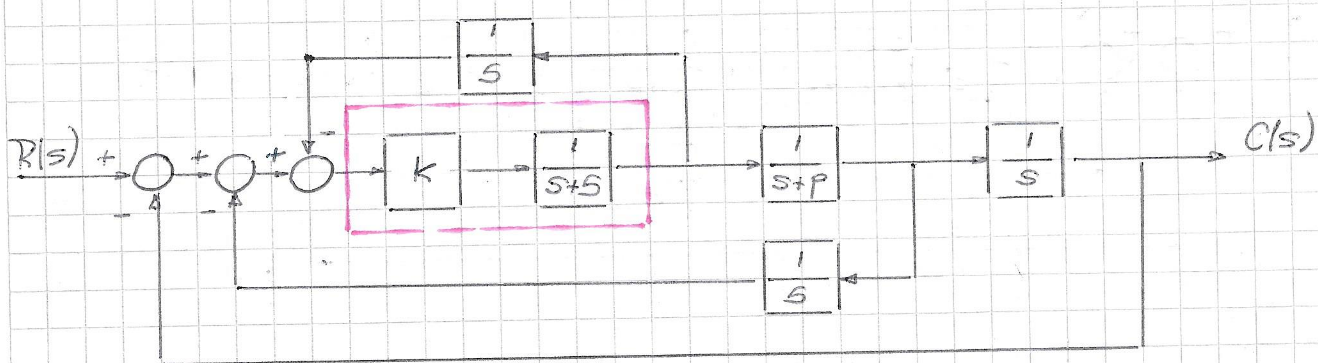
HOJA: 2

TEMA 2 (PASO A PASO):

A partir del siguiente diagrama, se piden valores de k para los cuales el sistema es estable, si p=0 y p=2. Debe ser estable para ambos valores.



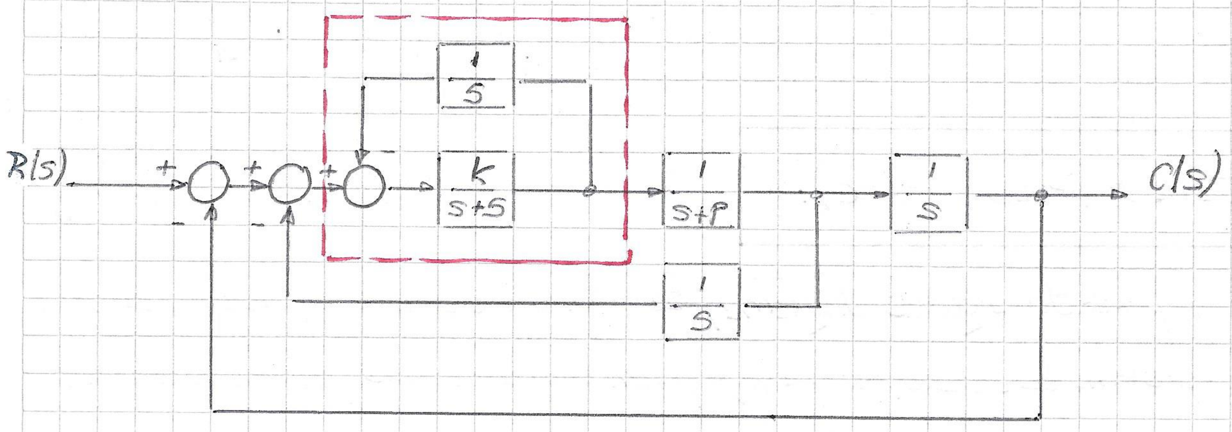
Los puntos de suma pueden redistribuirse dando lugar al siguiente diagrama,



① Multiplicación de bloques en cascada,

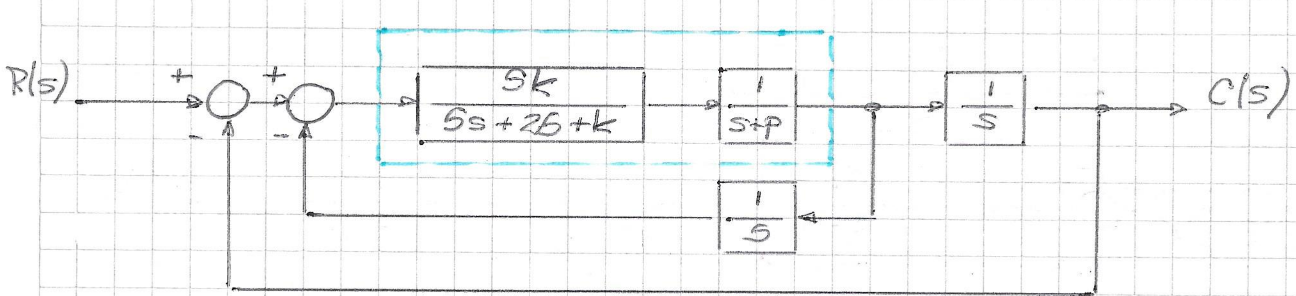
$$G(s) = K \cdot \frac{1}{s+5} = \frac{K}{s+5}$$

NOTA:



② Cerrando el lazo de realimentación,

$$G(s)=\frac{\dfrac{k}{(s+5)}}{1+\dfrac{k}{(s+5).s}}=\frac{5k}{5(s+5)+k}=\frac{5k}{5s+25+k}$$

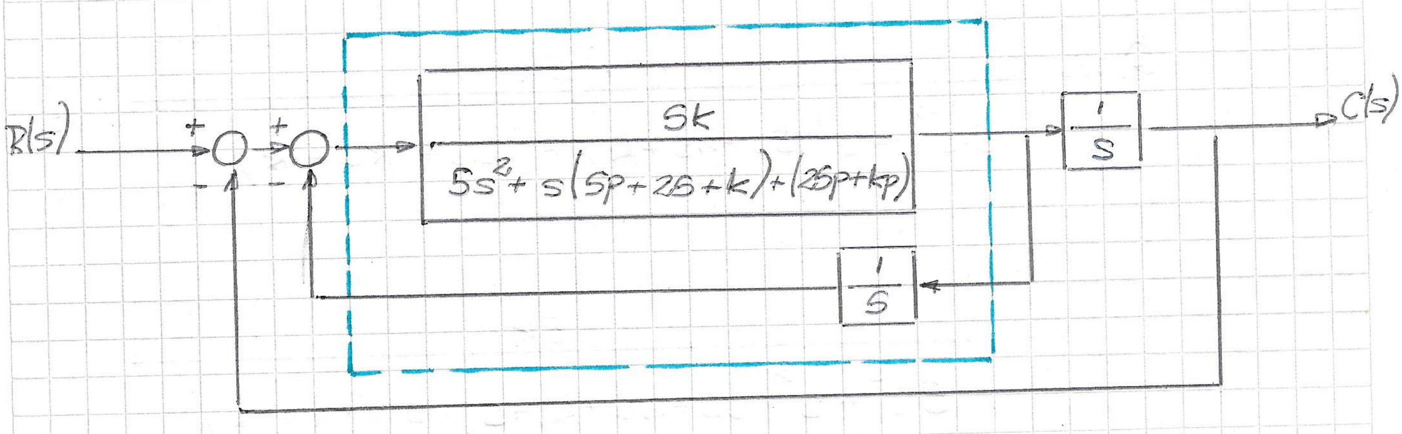


③ Multiplicación de bloques en cascada,

$$G(s)=\frac{5k}{5s+25+k}\cdot\frac{1}{s+p}=\frac{5k}{(5s^2+5ps)+(25s+25p)+(ks+kp)}$$

$$G(s)=\frac{5k}{5s^2+s(5p+25+k)+(25p+kp)}$$

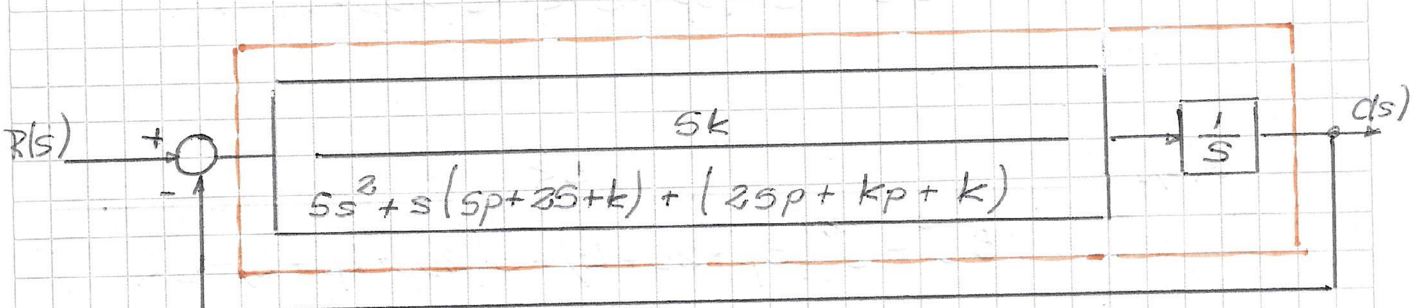
NOTA:



④ Cerrando el lazo de realimentación,

$$G(s)=\frac{\dfrac{sk}{5s^2+s(5p+25+k)+(25p+kp)}}{1+\dfrac{\cancel{s}k}{\left[5s^2+s(5p+25+k)+(25p+kp)\right]\cancel{s}}}$$

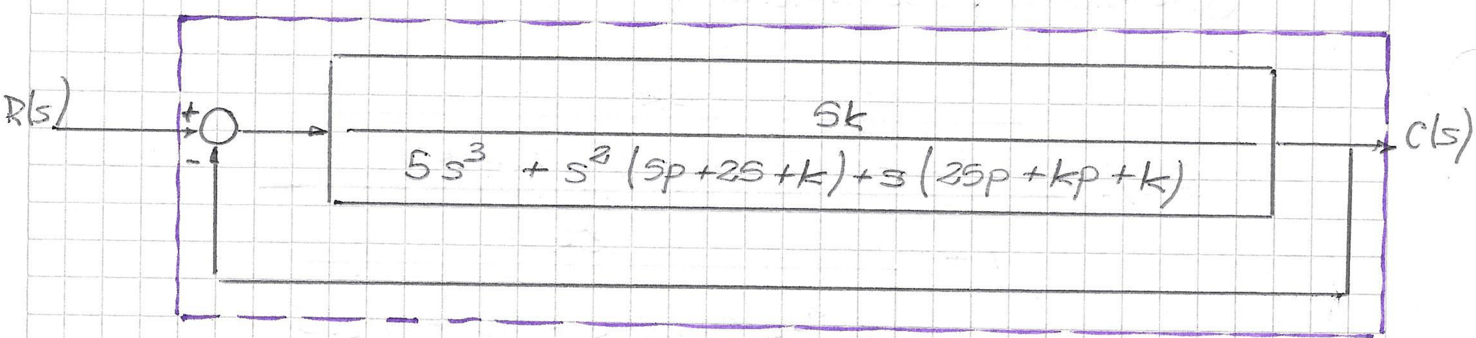
$$=\frac{sk}{5s^2+s(5p+25+k)+(25p+kp+k)}$$



(5) Multiplicación de bloques en cascada,

$$G(s) = \frac{5k}{5s^2 + s(5p+25+k) + (25p+kp+k)} \cdot \frac{1}{s}$$

$$= \frac{5k}{5s^3 + s^2(5p+25+k) + s(25p+kp+k)}$$



(6) Cerrando el lazo de realimentación unitaria,

$$G(s) = \frac{\dfrac{5k}{5s^3 + s^2(5p+25+k) + s(25p+kp+k)}}{1 + \dfrac{5k}{5s^3 + s^2(5p+25+k) + s(25p+kp+k)}}$$

$$G(s) = \frac{5k}{5s^3 + s^2(5p+25+k) + s(25p+kp+k) + 5k}$$

NOTA:

FECHA:

HOJA: 4

Analizando el denominador (Función característica) por Routh-Hurtwitz,

s^3	5	$25p+kp+k$
s^2	$5p+25+k$	$5k$
s^1	A	
s^0	$5k$	

Siendo A,

$$A = \frac{\left[(5p+25+k)(25p+kp+k)\right]-25k}{5p+25+k}$$

Analizando el numerador,

$$(5p+25+k)(25p+kp+k)-25k$$

$$(125p^2+5p^2k+5pk)+(625p+25pk+25k)+(25pk+pk^2+k^2)-25k$$

$$k^2(p+1)+k(5p^2+5p+25p+25+25p-25)+(125p^2+625p)$$

$$k^2(p+1)+k(5p^2+55p)+(125p^2+625p)$$

NOTA:

* Valuando para $p=0$,

$$k^2 + k.0 + 0 = 0 \longrightarrow k_{1,2} = 0$$

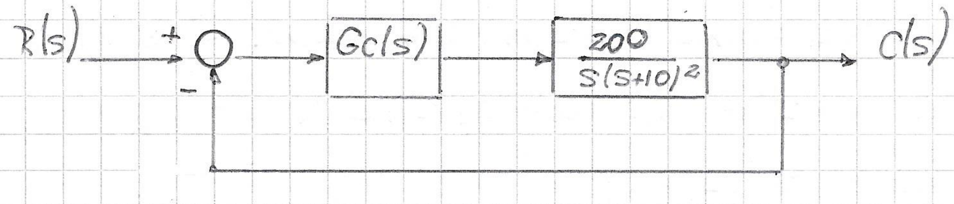
* Valuando para $p=2$,

$$3k^2 + 130k + 1750 = 0 \longrightarrow \begin{cases} k_1 = -21,6\overline{7} + j\,10,67 \\ k_2 = -21,6\overline{7} - j\,10,67 \end{cases}$$

Por lo cual, k debe ser mayor que 0.

NOTA:

TEMA 3: COMPENSACIÓN EN FRECUENCIA (RESOLUCIÓN MATLAB)



Se pide: $M\phi = 65°$

$e_{ss} = 0{,}05$

Analizando el error en estado estacionario, $e_{ss} = 1/k_v$,

$$k_v = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{200}{\cancel{s}(s+10)^2} = 2$$

Se calcula k como, teniendo en cuenta el error solicitado,

$$k_v' = \frac{1}{0{,}05} = 20$$

$$k_v' = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{k \cdot 200}{\cancel{s}(s+10)^2} = 20 \;\therefore\; \frac{k \cdot 200}{100} = 20 \;\therefore\; k = \frac{100 \cdot 20}{200}$$

$$k = 10 \;\therefore\; k_{dB} = 20 \log(10) = 20\ dB$$

Se traza el Bode de módulo y fase con la nueva ganancia, y se obtiene un $M\phi \simeq 0°$

Se propone entonces un compensador en atraso de la forma,

$$Gc(s) = k_c \cdot \beta \cdot \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} \;\therefore\; Gc(s) = k_c \cdot \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}} \;\therefore\; k = k_c \beta$$

NOTA:

Al margen de fase deseado se le agrega 10° más. Se busca el punto donde $MØ = 75°$ (para lo cual se requiere un valor de fase de $-105°$).

Dicho punto existe en $w = 1,32$ rad/seg. Dicha frecuencia es la nueva frecuencia de cruce de ganancia del sistema compensado. El β del compensador en atraso debe suministrar una atenuación equivalente al valor de ganancia en la nueva frecuencia de corte, es decir,

$$20 \log \left(\frac{1}{\beta} \right) = -23,50 \, dB \quad \therefore \quad \frac{1}{\beta} = 10^{-\frac{23,50}{20}}$$

$$\beta = 10^{\frac{23,50}{20}} = 14,96$$

El cero del compensador se ubica a 10 veces la frecuencia por debajo de la frecuencia de cruce de ganancia, es decir,

$$\left(s + \frac{1}{T} \right) = \left(s + \frac{wc}{10} \right) \quad \therefore \quad \frac{1}{T} = \frac{wc}{10} = \frac{1,32}{10} = 0,132 \text{ rad/seg}$$

El polo se ubicará en,

$$\left(s + \frac{1}{\beta T} \right) = \left(s + \frac{0,132}{14,96} \right) \quad \therefore \quad \frac{1}{\beta T} = \frac{0,132}{14,96} = 0,008 \text{ rad/seg}$$

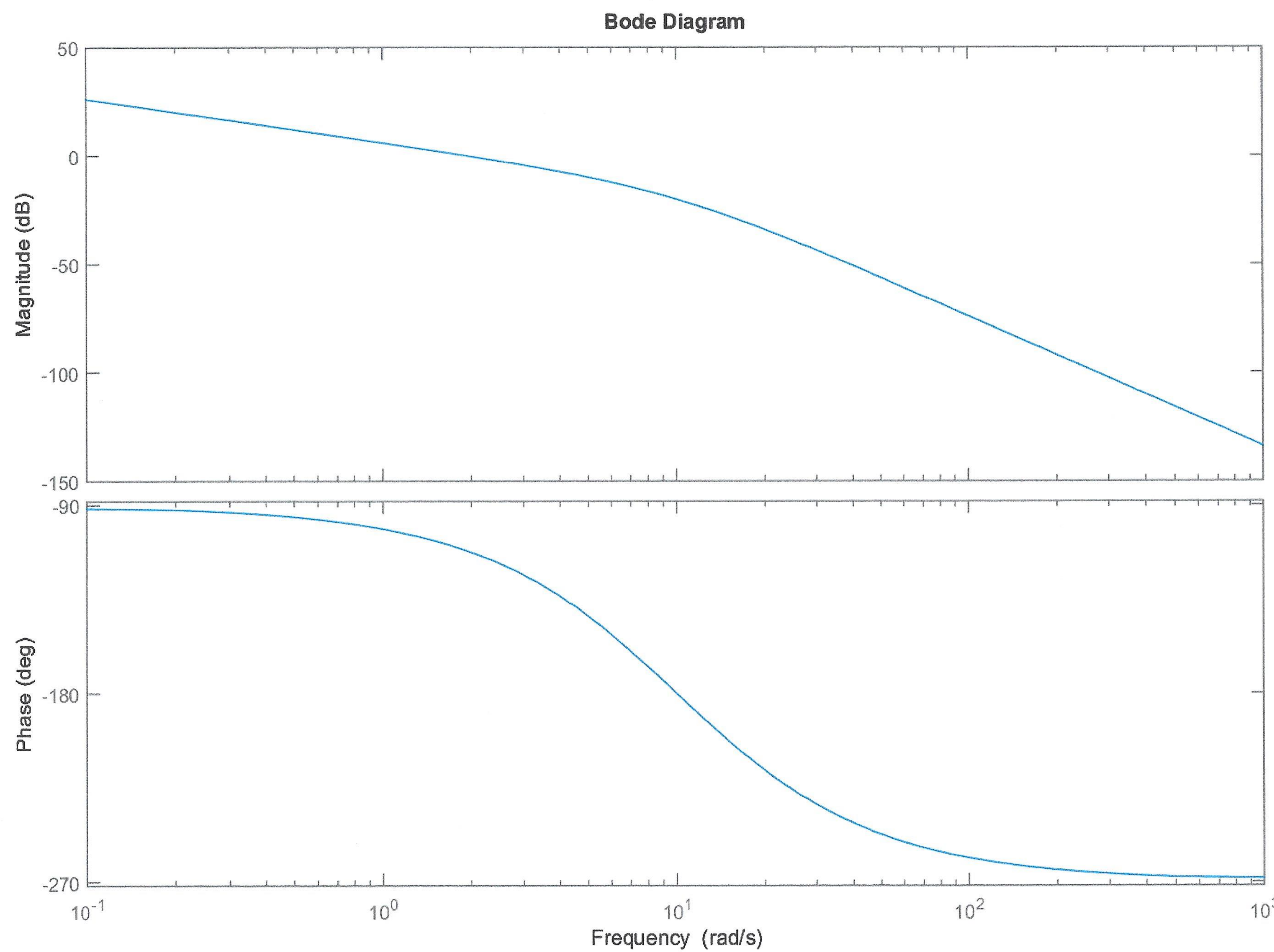
Finalmente se calcula kc como,

$$k = kc . \beta \quad \therefore \quad kc = \frac{k}{\beta} = \frac{10}{14,96} = 0,668$$

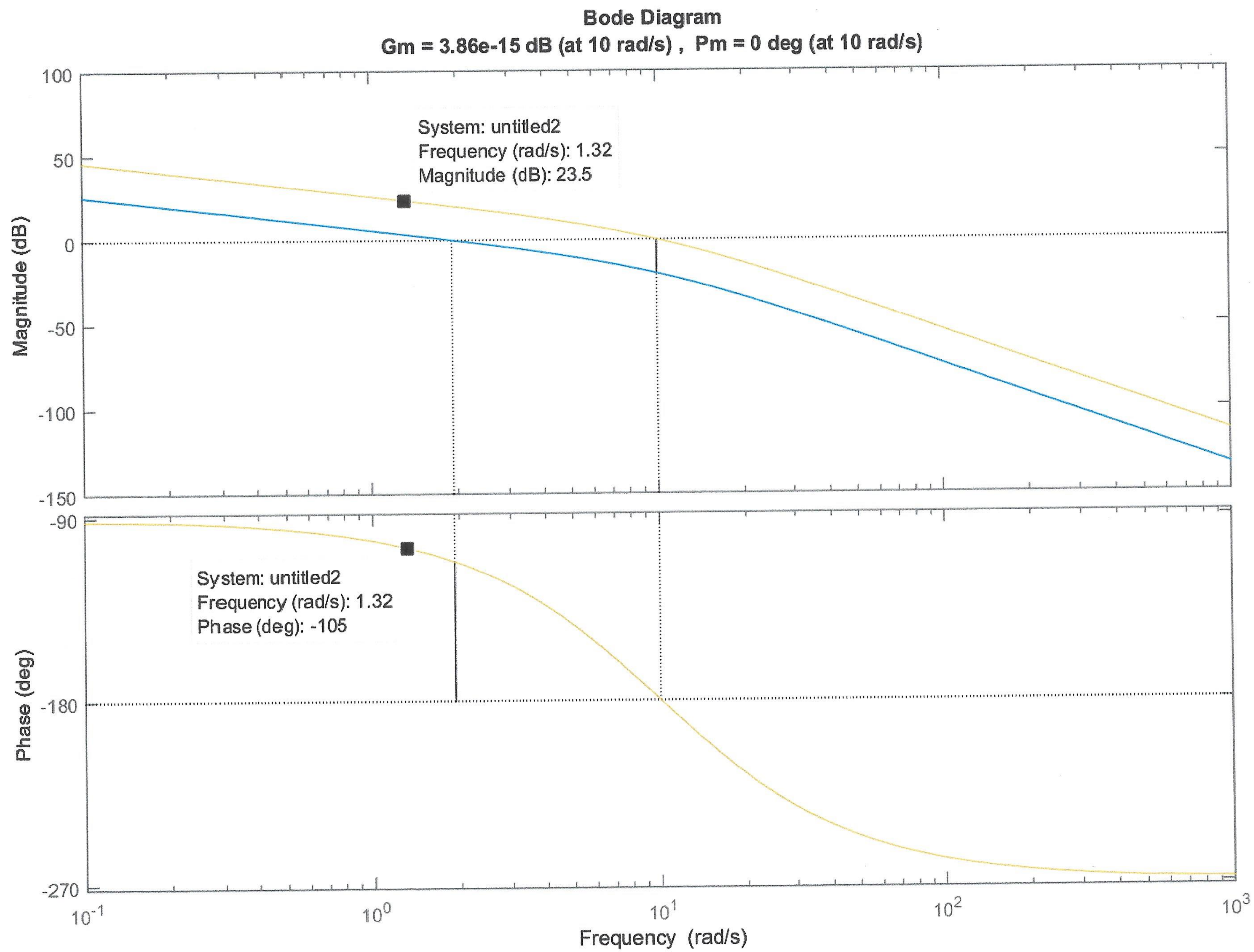
Con lo cual el compensador resulta ser,

$$Gc(s) = 0,668 . \frac{s + 0,132}{s + 0,008}$$

NOTA:


Bode Diagram
Magnitude (dB)
50
0
-50
-100
-150
Phase (deg)
-90
-180
-270
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
Frequency (rad/s)

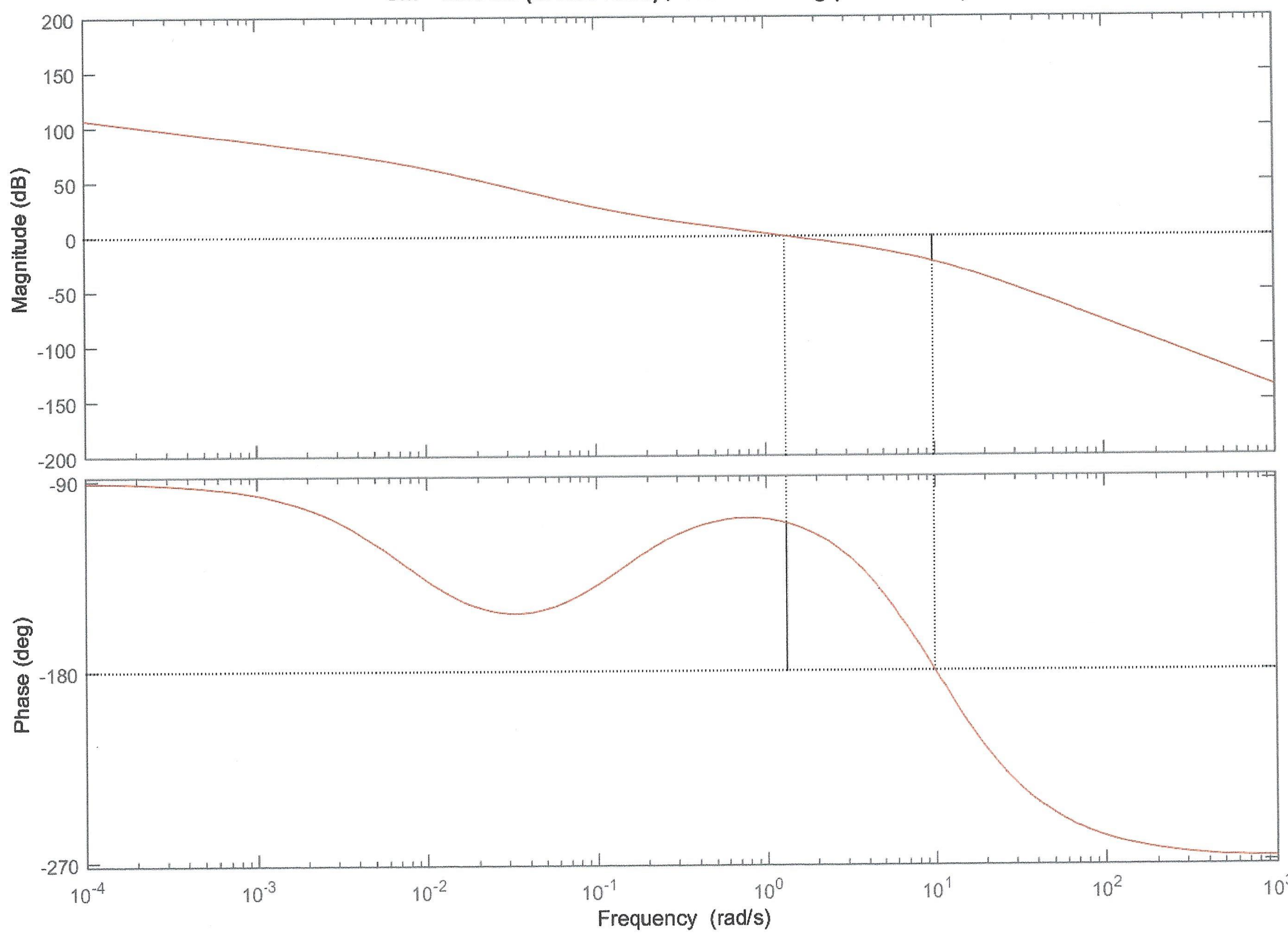
6


Bode Diagram
Gm = 3.86e-15 dB (at 10 rad/s) , Pm = 0 deg (at 10 rad/s)
System: untitled2
Frequency (rad/s): 1.32
Magnitude (dB): 23.5
System: untitled2
Frequency (rad/s): 1.32
Phase (deg): -105
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/s)
100
50
0
-50
-100
-150
-90
-180
-270
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}

7

Bode Diagram

Gm = 23.3 dB (at 9.88 rad/s) , Pm = 69.6 deg (at 1.32 rad/s)



FECHA:

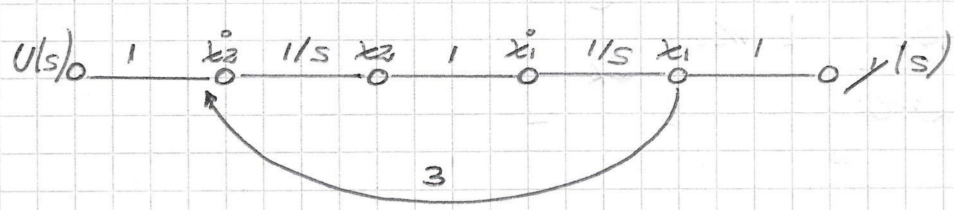
HOJA: 9

TEMA 4: VARIABLES DE ESTADO

$$\begin{vmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}x_1\\ x_2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0\\ 1\end{vmatrix} U$$

$$y = \begin{vmatrix}1 & 0\end{vmatrix} \begin{vmatrix}x_1\\ x_2\end{vmatrix}$$

a) Diagrama de Flujo de señal



b) Autovalores del sistema. Se obtienen como solución a,

$$\left|\lambda I - A\right| = \begin{vmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}0 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\lambda & -1\\ -3 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$\left|\lambda I - A\right| = \lambda^2 - 3 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1{,}7320, \quad \lambda_2 = -1{,}7320$$

NOTA:

c) Controlabilidad,

$$W_C = \left[\, B \mid AB \mid A^{n-1}B \,\right] = \left[\, B \mid AB \,\right]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = AB$$

$$\therefore W_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \; |W_C| = -1 \neq 0$$

Rango $\{W_C\} = 2$ $\therefore$ Sistema completamente controlable.

Observabilidad,

$$W_O = \begin{bmatrix} C \\ \hline CA \\ \hline CA^{n-1} \end{bmatrix} = W_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = CA$$

$$\therefore W_O = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \therefore |W_O| = 1 \neq 0$$

Rango $\{W_O\} = 2$ $\therefore$ Sistema completamente observable

NOTA:

FECHA:

HOJA: 10

d) Se desea determinar la matriz de realimentación k para obtener un sistema críticamente amortiguado y un tiempo de establecimiento de ±2% = 2 segundos.

Siendo la forma de la función deseada,

$$s^2 + s(2\xi w_n) + w_n^2$$

Un sistema críticamente amortiguado tiene un $\xi = 1$ y raíces reales iguales.

Por otra parte,

$$t_s(\pm 2\%) = 4\tau = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\xi w_n} = 2 \text{seg} \quad \therefore \quad \frac{4}{w_n} = 2 \text{ seg} \quad \therefore \quad w_n = 2$$

Por lo tanto, la función deseada resulta ser,

$$s^2 + (2.1.2)s + 2^2 = s^2 + 4s + 4 \longrightarrow$$ Dos raíces reales iguales en $s = -2$.

Se obtiene el vector k por sustitución,

$$|sI - A + Bk| = \begin{bmatrix} s & -1 \\ -3 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ -3+k_1 & s+k_2 \end{bmatrix}$$

$$|sI - A + Bk| = s^2 + k_2.s - (3 - k_1) = s^2 + sk_2 + (k_1 - 3)$$

$$= s^2 + s4 + 4$$

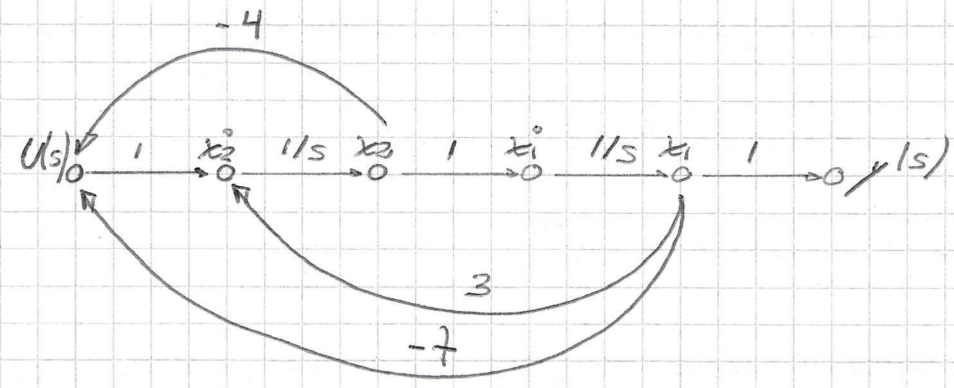
Siendo,

$$k_2 = 4 \quad y \quad k_1 - 3 = 4 \quad \therefore \quad k_1 = 4+3 = 7$$

NOTA:

e) Diagrama de flujo de señal del sistema compensado,

Siendo $k = [k_1 \ \ k_2] = [7 \ \ 4]$



Siendo el diagrama en bloques,