SISTEMAS DE CONTROL
TEÓRICO.

CONTROL - T.

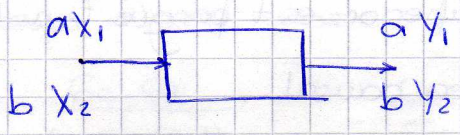
12.03.2013

PROFESOR: Juan Eduardo Picco.

Consulta: jueves después de las 20:30hs.

Sistema: conjunto de elementos interrelacionados para cumplir un fin determinado.

Un sistema es lineal cuando cumple con superposición, aditividad y homogeneidad.



$$aX_1 + bX_2 = aY_1 + bY_2$$

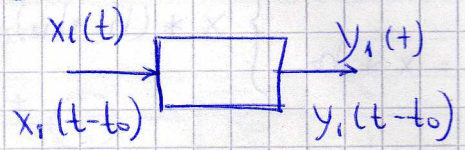
La integral y la derivada son dos operadores lineales.

$y = 3x + 2$ no es lineal porque

$x = 2$	$y = 8$
$x = 3$	$y = 11$
$x = 5$	$y = 19$ → pero da 17.

Está desplazada del origen.

Sistema invariante en el tiempo: los coeficientes de una ecuación que los represente son constantes.



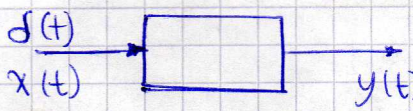
SLIT

Un sistema es causal ~~para~~ cuando no existen para tiempos negativos.

Un sistema es determinístico cuando se tiene una idea de la ~~que~~ respuesta que puede dar. La misma causa produce el mismo efecto. El que no es determinístico es el que ~~no~~ tiene una ley de probabilidades para la respuesta (por ej. un dado)

Ingeniería de control moderna (5ta ed). Ogata. Sistema de control (Kuo)

Función de Transferencia: es la transformada de Laplace para la respuesta al impulso unitario cuando las condiciones iniciales son cero.



$$y(t) = x(t) * h(t) \rightarrow y(t) = \int_0^t x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$$

$$Y(s) = X(s) \cdot H(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \qquad C.I. = 0$$

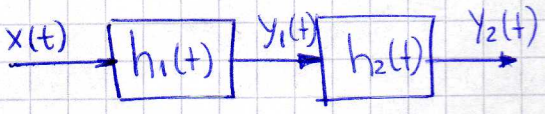
En la integral de convolución el límite superior es t porque τ no puede ser mayor a t para que el sistema sea causal.

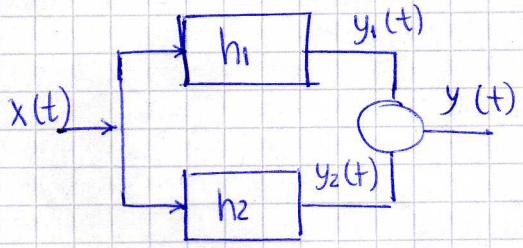
Conociendo la respuesta al impulso puedo conocer la respuesta a cualquier señal haciendo la multiplicación de la transformada de la respuesta por la transformada de la nueva señal.

$y_1 = x * h_1 \qquad y_2 = y_1 * h_2$

$y_2 = x * h_1 * h_2$

$Y_2(s) = X(s) \cdot H_1(s) \cdot H_2(s)$

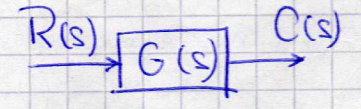




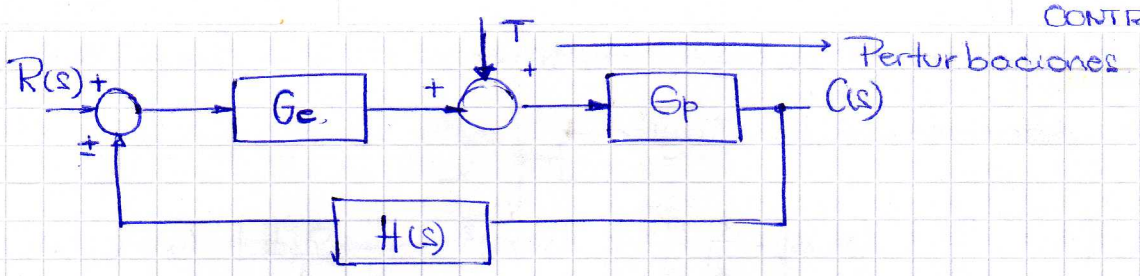
$$\left.\begin{array}{l} y_1 = x * h_1 \\ y_2 = x * h_2 \end{array}\right\} x * (h_1 + h_2) = y$$

$$Y(s) = X(s)\left(H_1(s) + H_2(s)\right)$$

Sistema de lazo abierto: en la entrada no se tiene información de lo que pasa a la salida.

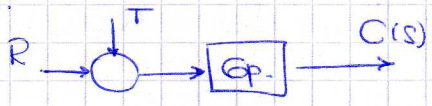


Sistema de lazo cerrado: en la entrada se tiene ~~que~~ información de los valores de la ~~entrada~~ salida.



VENTAJAS DEL SISTEMA A LAZO CERRADO: La perturbación en un sistema a lazo abierto pasa como por un tubo:

$$C(s) = T_0 \cdot G_p + R G_p$$



En sistemas a lazo cerrado:

$$\frac{C_R}{R} = \frac{G_c \cdot G_p}{1 + G_p \cdot G_c \cdot H} \qquad \frac{C_T}{T} = \frac{G_p}{1 + G_c G_p H}$$

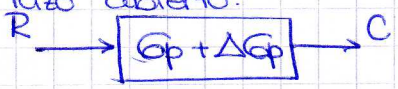
$$C_R = \frac{1}{H} \cdot R \qquad C_T = \frac{1}{G_c H} \cdot T$$

$G_c G_p \gg 1$

(Reduzco la respuesta al ruido G_c veces).

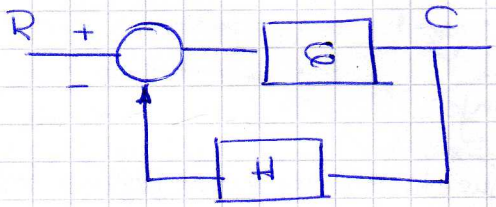
Si hay cambios en los valores de la planta:

A lazo abierto:



$$C = \underbrace{G_p \cdot R}_{\text{Salida nominal}} + \Delta G_p \cdot R$$

A lazo cerrado



$$C = \frac{G}{1 + GH} \cdot R$$

$$\frac{\partial C}{\partial G} = \frac{R(1 + G \cdot H) - HGR}{(1 + G \cdot H)^2}$$

$$\frac{\partial C}{\partial G} = \frac{R}{1 + G \cdot H} \cdot \frac{1}{1 + G \cdot H}$$

$$\frac{\partial C}{\partial G} = \frac{C}{G} \cdot \frac{1}{1 + G \cdot H}$$

$$\frac{\partial C}{C} = \frac{\partial G}{G} \cdot \frac{1}{1 + G \cdot H}$$

Se corrigen las variaciones pero hay un problema: la estabilidad

20. Marzo. 2013

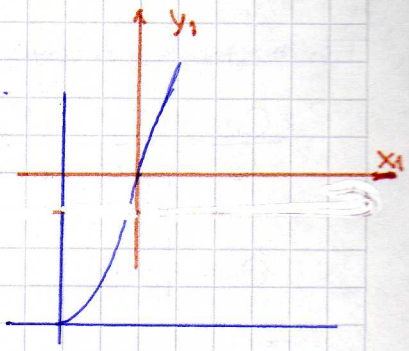
En la mayoría de los casos los sistemas son NO LINEALES. Se hace una linealización alrededor de los puntos de trabajo. Por ejemplo para linealizar $f(x)$: desarrollamos por Taylor.

$$f(x) = f(x_0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}(x-x_0) + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3f}{dx^3}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^3 + \dots$$

Hacemos una aproximación:

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}}_{K}(x-x_0)$$

$$\underbrace{f(x)-f(x_0)}_{f_1} = K\underbrace{(x-x_0)}_{x_1} \longrightarrow \text{Tenemos linealidad.}$$



Ejemplo: $f(x) = x^2$; $x_0 = 2$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ f'(x) = 2x \end{array}\right\} \begin{array}{l} f(x_0) = 4 \\ f'(x_0) = 4 \end{array}$$

$$f(x) = \underbrace{4}_{f(x_0)} + \underbrace{4}_{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}}(x-\overbrace{2}^{x_0})$$

x	x_{REAL}	x_{APROX}
1,8	3,24	3,2
2	4	4
2,2	4,84	4,8

La aproximación sería la recta tangente a x_0. En valores cercanos a x_0 la aproximación es buena.

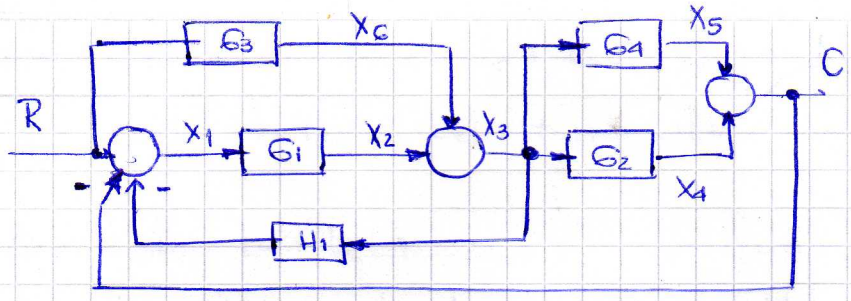
Movimos los ejes a los graficados en naranja.

Para una función de dos variables: lo que linealiza es el plano tangente al punto de nuestra superficie.

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = k_x(x-x_0) + k_y(y-y_0)$$

Diagrama de flujo de señal - MASON

Los diagramas suelen ser complicados. Utilizando diagramas de flujo de señal se pueden simplificar.



Los diagramas de flujo de señal tienen nodos que representan las variables. La unión entre dos nodos se llama rama. La unión entre varias ramas se llama trayectoria. Las ramas son transmitancias (impedancias, ganancias, func. de transferencia)

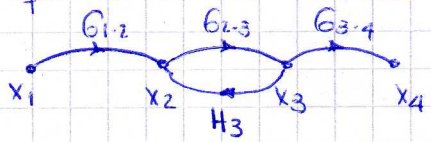
Nodos de entrada: de ellos sólo SALEN ramas, no llega ninguna.

Nodos de salida: a ellos sólo llegan ramas, no sale ninguna.

La trayectoria se considera SIN PASAR DOS VECES por el mismo nodo.

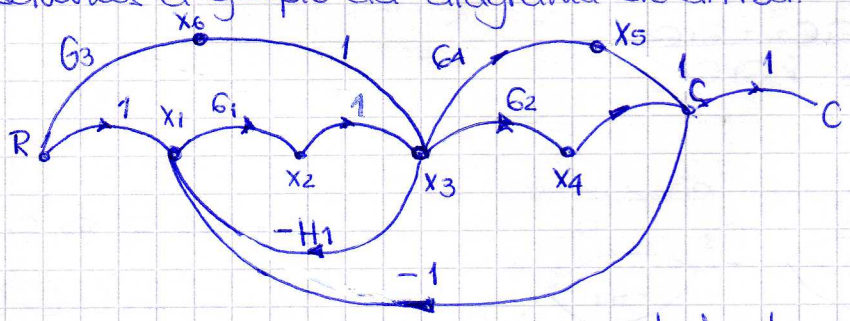
Una trayectoria es cerrada si se vuelve al nodo de partida sin pasar dos veces por el mismo nodo.

Los nodos que no son de entrada ni salida son intermedios



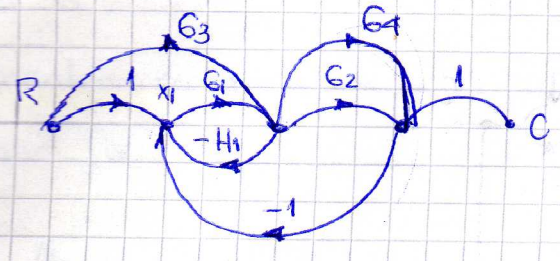
$T_1 = G_{1-2} \cdot G_{2-3} \cdot G_{3-4}$ (Ganancia 1-4 sería ésta)

Resolvemos el ejemplo del diagrama de arriba.



→ Los 1 los ponemos para no perder variables. Si tenemos que volver al diagrama en bloques necesitamos todas las variables. Cuando simplificamos perdemos variables en los puntos de suma.

Hacemos la simplificación.



$$\frac{C}{R} = \frac{\sum M_i \Delta_i}{\Delta}$$

MASON

M_i = ganancias de las trayectorias directas

Δ_i = determinante de la trayectoria i-ésima

Δ : determinante total.

$M_1 = G_3 \cdot G_4$

$M_2 = G_3 \cdot G_2$

$M_3 = G_1 \cdot G_2$

$M_4 = G_1 \cdot G_4$

$L_1 = -G_1 H_1$

$L_2 = -G_1 \cdot G_2$

$L_3 = -G_1 G_4$

$\Delta = 1 - \sum$ Ganancia de lazos individuales $+ \sum$ Producto de Ganancias de lazos disjuntos tomados de 2 en 2. $- \sum$ Producto de Ganancias de lazos disjuntos tomados de 3 en 3 + ...

No tienen nodos comunes.

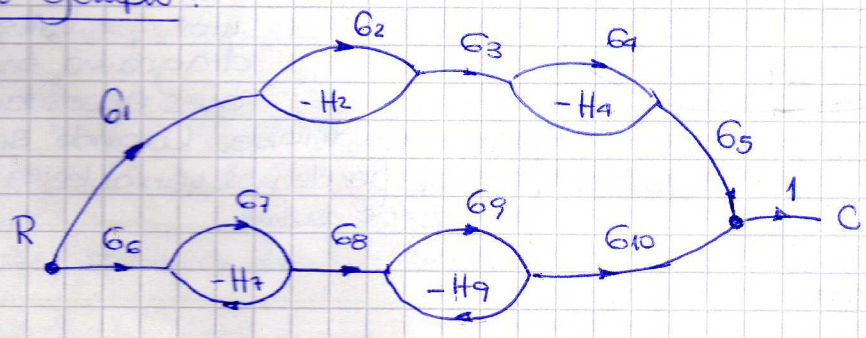
$$\Delta = 1 - L_1 - L_2 - L_3 + \sum \ldots$$

$$1 + G_1 H_1 + G_1 G_2 + G_1 G_4$$

Δ_i = parte de Δ que corresponde a cada trayectoria (anulando los lazos que comparten nodo con la misma.

$$\frac{C}{R} = \frac{G_3 G_4 + G_3 G_2 + G_1 G_2 + G_1 G_4}{1 + G_1 H_1 + G_1 G_2 + G_1 G_4}$$

Otro ejemplo:



$M_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5$

$M_2 = G_6 G_7 G_8 G_9 G_{10}$

$L_2 = -G_2 H_2$

$L_4 = -G_4 H_4$

$L_7 = -G_7 H_7$

$L_9 = -G_9 H_9$

$$\Delta = 1 - L_2 - L_4 - L_7 - L_9 + L_2L_4 + L_2L_9 + L_2L_7 + L_4L_9 + L_4L_7 + L_7L_9 - L_2L_4L_7 - L_2L_4L_9 - L_4L_7L_9 - L_2L_7L_9 + L_2L_4L_7L_9$$

$$\Delta_1 = 1 - L_7 - L_9 + L_7L_9$$

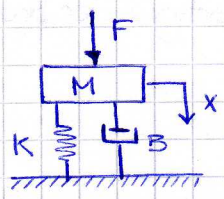
$$\Delta_2 = 1 - L_2 - L_4 + L_2L_4$$

$$\frac{C}{R} = \frac{\Delta_1 M_1 + \Delta_2 M_2}{\Delta}$$

(Si quiero conocer la relación entre R y algún nodo que no es el de salida saco una línea del nodo y lo tomo como salida).

MODELOS MATEMÁTICOS DE SISTEMAS FÍSICOS

Planteamos un sistema elemental de segundo orden:



M → masa
F → fuerza
K → resorte
B → amortiguador.

La masa sólo puede moverse en dirección x y las masas del resorte y el amortiguador se pueden despreciar → Hacemos un diagrama de cuerpo

La fuerza es proporcional a la distancia → fuerza del resorte.

La fuerza del amortiguador es proporcional a la diferencia de velocidad de los extremos.

Ley de Hook (resorte)

$$F_K = K_x(x - x_0)$$

$$F_B = B(\dot{x} - \dot{x}_0)$$

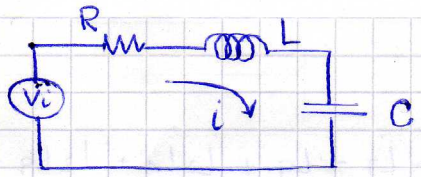
Este sistema sería representado por una ecuación de 2do orden porque hay dos elementos que almacenan energía (masa → cinética y resorte → potencial)

$$\sum F = M\ddot{x}$$

$$F - F_K - F_B = M\ddot{x}$$

$$\boxed{F = M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx}$$

$$V_i = L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q$$

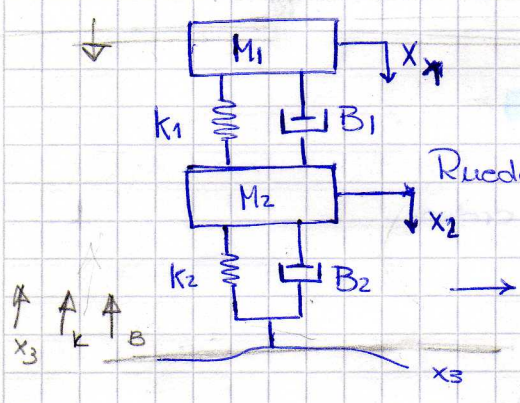


$$V_i = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt$$

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

$$V_i = L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$$

Ejercicio



Rueda + llanta ... todo lo que está en movimiento.

→ K_2 y B_2 — resorte y amortiguador propios de la rueda.

$$\frac{X_1}{X_3} = ?$$

$$\frac{X_2}{X_3} = ?$$

$$F_1 = m_1\ddot{x}_1 + k_1(x_1 - x_2) + B_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$F_2 = M_2\ddot{x}_2 + k_1(x_2 - x_1) + B_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_3) + B_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_3)$$

$$F_1(s) = m_1 s^2 X_1(s) + k_1[X_1(s) - X_2(s)] + B_1[sX_1(s) - sX_2(s)]$$

$$F_2(s) = M_2 s^2 X_2(s) + k_1[X_2(s) - X_1(s)] + B_1[sX_2(s) - sX_1(s)] + k_2[X_2(s) - X_3(s)] + B_2[sX_2(s) - sX_3(s)]$$

$$F_1(s) = m_1 s^2 X_1(s) + k_1 X_1(s) + B_1 s X_1(s) - k_1 X_2(s) - B_1 s X_2(s)$$

$$F_1(s) + (k_1 + B_1 s)X_2(s) = (m_1 s^2 + B_1 s + k_1)X_1(s)$$

$$X_1(s) = \frac{F_1(s) + (k_1 + B_1 s)X_2(s)}{(m_1 s^2 + B_1 s + k_1)} \quad (1)$$

$$F_2(s) = [m_2 s^2 + (B_1 + B_2)s + k_1 + k_2]X_2(s) - (B_1 s + k_1)X_1(s) - (k_2 + B_2 s)X_3(s)$$

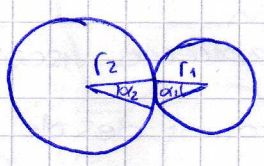
$$F_2(s) = [m_2 s^2 + (B_1 + B_2) + k_1 + k_2]X_2(s) - \frac{(B_1 \cdot s + k_1)[F_1(s) + (k_1 + B_1 s)]}{(m_1 s^2 + B_1 s + k_1)}X_2(s) - (k_2 + B_2 s)X_3(s)$$

$$F_2(s) + (k_2 + B_2 s)X_3(s) = \left\{[m_2 s^2 + (B_1 + B_2)s + k_1 + k_2] - (B_1 \cdot s + k_1)\frac{[F_1(s) + k_1 + B_1 s]}{m_1 s^2 + B_1 s + k_1}\right\}X_2(s)$$

27.03.2013

Modelos matemáticos en rotación

Vemos cómo transmitimos una cupla con sistemas de rotación



Por analogía $\sum F = M\ddot{x}$

$\sum T = J\ddot{\theta}$

$S_1 = \theta_1 r_1 = \theta_2 r_2$

$F_2 = F_1 = \frac{\tau_2}{r_2} = \frac{\tau_1}{r_1}$

$\tau_2 = \frac{r_2}{r_1}\tau_1$

↓

Relación de engranages, radios o dientes puede ser.

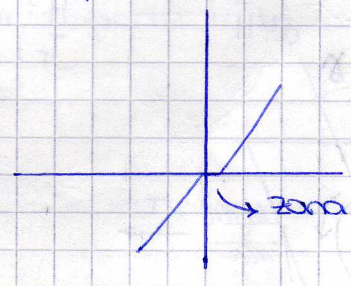
$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$

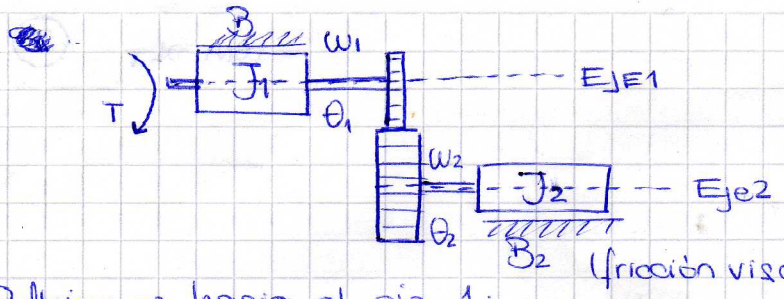
$\theta_2 = \frac{r_1}{r_2}\cdot\theta_1$

$\dot{\theta}_2 = \omega_2 = \frac{r_1}{r_2}\omega_1$

$\frac{r_2}{r_1} = \frac{n_2}{n_1} = n$ (Si se trata de un engranage, n_2/n_1 es la relación entre los dientes si tienen el mismo paso.

Suponemos que tenemos un tren de engranajes que no tiene juego (o zona muerta) entre los dientes de uno y otro engranaje. La zona muerta se elimina con una oscilación de alta frecuencia y pequeña amplitud o con el mecanismo de los relojes





A medida que la cupla va aumentando por los engranajes, los ejes deben tener mayor radio para soportar la torsión.

Reflejamos hacia el eje 1:

$$T = J_1\alpha_1 + B\omega_1 + T_L$$

$$nT_L = J_2\alpha_2 + B_2\omega_2 = J_2\ddot{\theta}_2 + B_2\dot{\theta}_2 \qquad \text{(T de carga)}$$

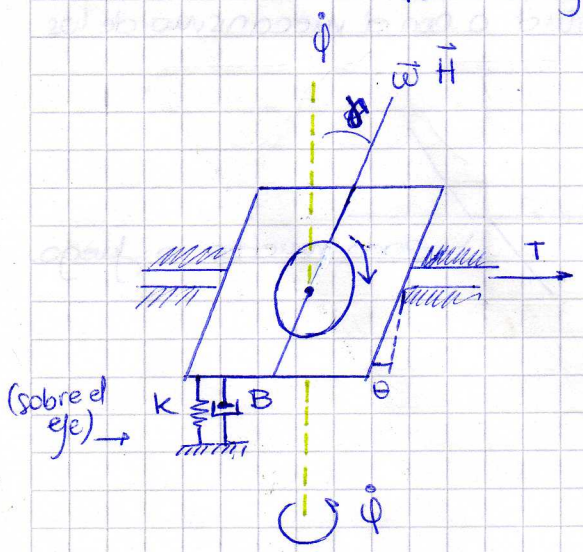
$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{n} \quad ; \quad \theta_2 = \frac{\theta_1}{n}$$

$$T_L = J_2\frac{\ddot{\theta}_1}{n^2} + B_2\frac{\dot{\theta}_1}{n^2}$$

$$T = \left(J_1 + \frac{J_2}{n^2}\right)\ddot{\theta}_1 + \left(B_1 + \frac{B_2}{n^2}\right)\dot{\theta}_1$$

Entonces el momento de inercia y la fricción viscoso lo veremos n^2 veces más chico. Si fuera que miramos desde el otro lado, es decir que queremos reflejar hacia el eje 2, veremos J_1 y B_1 n^2 veces más grande.

~~La relación de~~ ω y θ cuando reflejamos al Eje 1 ~~los~~ se verán n veces más chicas. Acá estamos considerando que J_1 es el momento de inercia de todo el eje 1 y J_2 el de todo el eje 2.



$\vec{H}$: momento cinético
J_r: momento de inercia del rotor

$$T = \vec{H} \wedge \vec{\dot{\varphi}} = H.\dot{\varphi}.\operatorname{sen}\gamma$$

$$\gamma_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$T_0 = H\dot{\varphi}$$

Nos movemos alrededor de $\gamma_0 = \frac{\pi}{2}$ que es el ángulo para que esté nivelado el plano

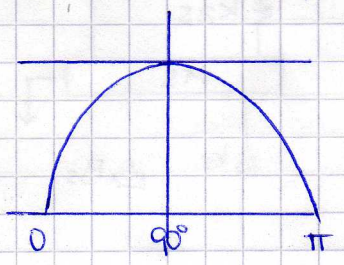
Linealizamos

$$\left.\frac{dT}{d\gamma}\right|_{\gamma=\gamma_0} \quad H\dot{\varphi}\cos\gamma = a_1$$

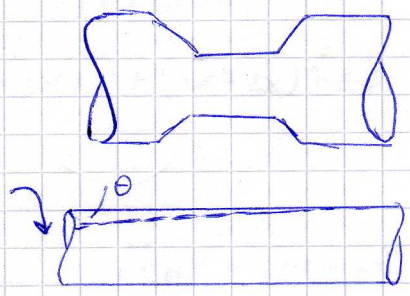
$$T = T_0 + \left.\frac{dT}{d\gamma}\right|_{\gamma=\gamma_0} (\gamma - \gamma_0)$$

$$T = T_0$$

Aproximamos la función seno por una recta horizontal cuando estamos a 90°



$$T = H\dot{\varphi} = J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + k\theta$$



$\dot{\varphi}(s)$ es la velocidad de entrada y cuando transformo, transformo velocidad, por eso la multiplico por s. $\dot{\varphi}$ es simplemente el nombre.

$$H\dot{\varphi} = J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + k\theta \qquad CI = 0$$

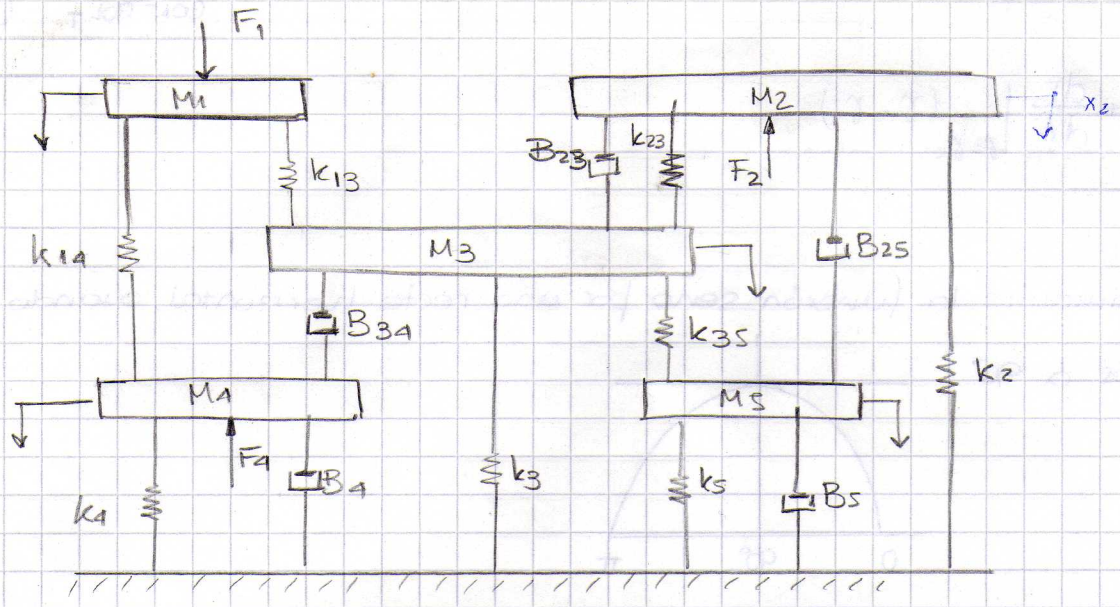
$$H\dot{\varphi}(s) = (Js^2 + Bs + k)\,\theta(s)$$

$$\frac{\theta(s)}{\dot{\varphi}(s)} = \frac{H}{Js^2 + Bs + k}$$

$$\frac{\theta(s)}{\dot{\varphi}(s)} = \frac{H/J}{s^2 + \frac{B}{J}s + \frac{k}{J}}$$

El que soporta toda esa carga es el resorte.

Determinamos para esto entre qué límites de ángulo se mueve, qué grados de libertad se anulan.



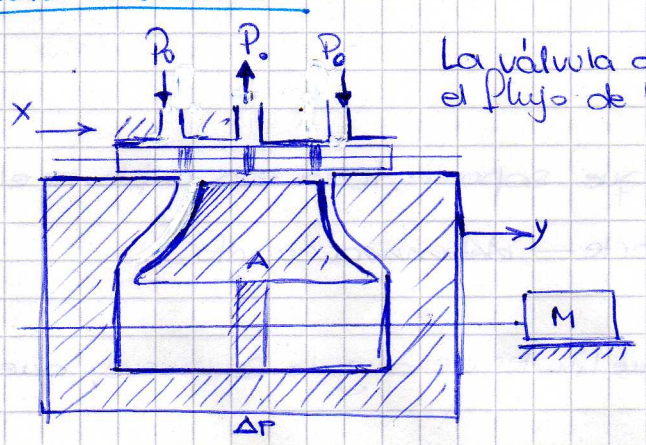
$$F_1 = M_1\ddot{x}_1 + k_{14}(x_1 - x_4) + k_{13}(x_1 - x_3) \qquad \text{(Para } M_1\text{)}$$

$$0 = k_{13}(x_3 - x_1) + B_{23}(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + k_{23}(x_3 - x_2) + B_{34}(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + k_3 x_3 + k_{35}(x_3 - x_5) + M_3\ddot{x}_3$$

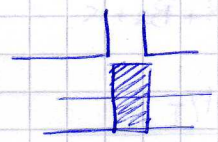
$$-F_4 = M_4\ddot{x}_4 + k_4 x_4 + k_{14}(x_4 - x_1) + B_{34}(\dot{x}_4 - x_3) + B_4\ddot{x}_4$$

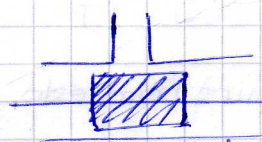
03 Abril. 2013

Motor Hidráulico

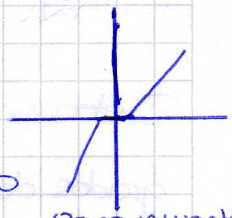


La válvula direcciona el flujo de líquido.



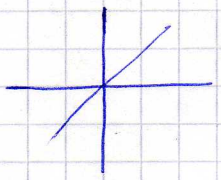


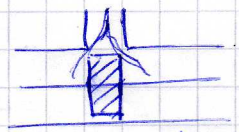
Sobresolapado



(zona muerta)

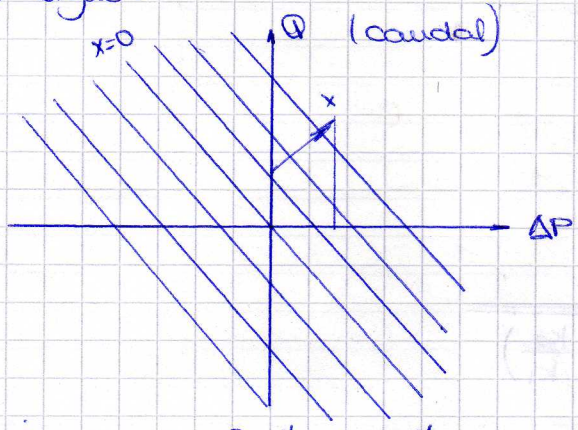
Suponemos que apenas se mueve el pistón comienza a pasar el líquido, entonces la curva pasa por cero. (sin zona muerta).





Subsolapado

Linealizado, el motor hidráulico tiene una serie de curvas como la que sigue:



Trabajamos con $Q=\emptyset$, $\Delta P=\emptyset$ y $x=0$: no hay diferencia de caudal, ni desplazamiento ni de presión. Ese va a ser nuestro punto de equilibrio

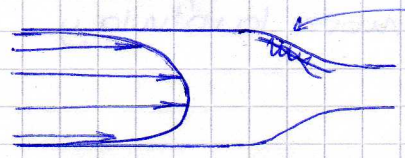
$Q_0=0$, $X_0=0$, $\Delta P_0=0$

$$Q(x,\Delta P)=\underbrace{Q_0(x_0,\Delta P_0)}_{\emptyset}+\left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ \Delta P=\Delta P_0}}(x-x_0)+\left.\frac{\partial Q}{\partial \Delta P}\right|_{\substack{x=x_0\\ \Delta P=\Delta P_0}}(\Delta P-\Delta P_0)$$

$$Q(x,\Delta P)=k_x\cdot x-k_{\Delta P}\,\Delta P$$

Cuando incremento ΔP impido que el caudal avance.

Para la validez del modelo:
Las condiciones de nuestro sistema son: que no haya flujo turbulento, que sea laminar. Si no hay desprendimiento de la capa límite no hay turbulencia.



El líquido debe ser incompresible → se mide con el módulo de Bulk, lo consideramos ∞.

Además todo el conexionado es bien robusto de manera que las mangueras no puedan cambiar su sección.

$$Q=A\cdot\rho\frac{dy}{dt}=k_x\,x-k_{\Delta P}\,\Delta P$$

A: área
ρ: densidad

$$\Delta P=\left(k_x\cdot x-A\rho\dot{y}\right)\cdot\frac{1}{k_{\Delta P}}$$

$$F=A\cdot\Delta P=M\ddot{y}+B\dot{y}=\frac{A k_x}{k_{\Delta P}}\cdot x-\frac{A^2\rho\dot{y}}{k_{\Delta P}}$$

$$\rightarrow x \cdot \frac{A \cdot k_x}{k_{\Delta P}} = M\ddot{y} + \left(B + \frac{A^2 \rho}{k_{\Delta P}}\right)\dot{y}$$

$$x = \underbrace{\frac{M k_{\Delta P}}{A \cdot k_x}}_{k_1} \ddot{y} + \underbrace{\left(\frac{B k_{\Delta P}}{A\, k_x} + \frac{A \rho}{k_x}\right)}_{k_2} \dot{y}$$

$$X(s) = \left(k_1 s^2 + k_2 s\right) Y(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{(k_1 s^2 + k_2 s)} = \frac{\frac{1}{k_1}}{s\left(s + \frac{k_2}{k_1}\right)}$$

Si la entrada es un impulso $X(s) = \delta(s) = 1$

$$Y(s) = \frac{N_1}{s} + \frac{N_2}{s + \frac{k_2}{k_1}}$$

sistema de primer orden.

integramos.

$$y(t) = N_1 + N_2 e^{-\frac{k_2}{k_1} t}$$

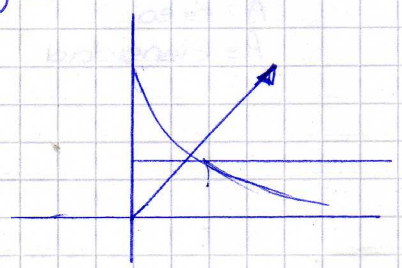
Si integramos un escalón tenemos una rampa, pasado lo transitorio el sistema se comporta como un integrador. Hay que tener en cuenta que no se sobrepasen ciertos valores, no podemos dejar que la rampa crezca indefinidamente.

Suponemos que le ponemos un escalón: sería mover la válvula y dejamos pasar el caudal.

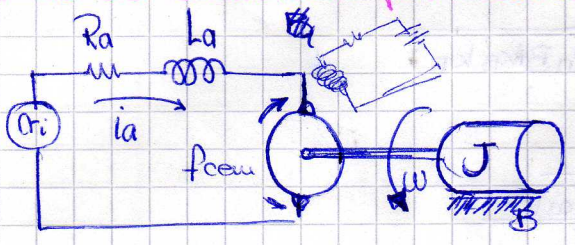
$$Y(s) = \frac{k_3}{s(s + k_4)} \cdot X(s)$$

$$Y(s) = \frac{k_3}{s^2(s + k_4)} = \frac{N_1}{s^2} + \frac{N_2}{s} + \frac{N_3}{(s + k_4)}$$

$$y(t) = N_1 t + N_2 + N_3 e^{-k_4 t}$$



Motor de C.C. controlado por inducido.



El momento de inercia J es de la carga + el motor.

B es la fricción viscosa.

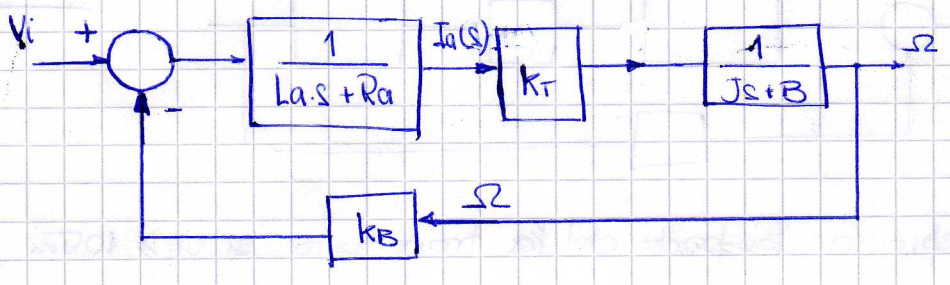
$$v_i = R_a \cdot i_a + L_a \cdot \frac{di_a}{dt} + k_B \cdot \omega$$

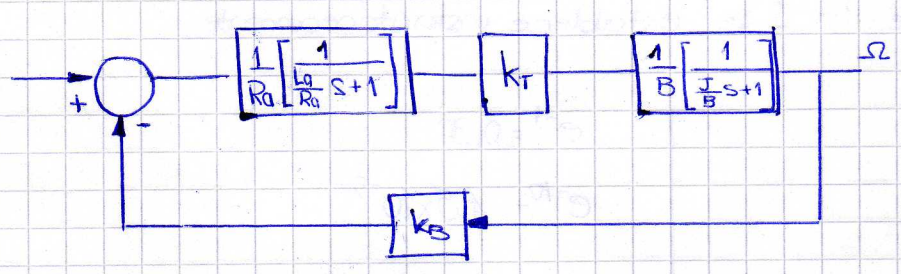
$$\tau = k_T \cdot i_a \qquad \text{(torque)}$$

$$\tau = k_T \cdot i_a = J\ddot{\omega} + B\omega$$

$$V_i(s) = (R_a + L_a \cdot s)\, I_a(s) + k_B\, \Omega(s)$$

$$k_T \cdot I_a(s) = (Js + B)\, \Omega(s)$$





Desde el punto de vista eléctrico la cupla se establece muy rápidamente, en el orden de los ms, según la constante de tiempo La/Ra. Esto significa que al darle tensión la corriente se establece inmediatamente. Normalmente la constante de tiempo eléctrica es mucho más chica que la mecánica

$$\tau_e = \frac{L_a}{R_a} \qquad \tau_m = \frac{J}{B}$$

Si $\tau_e \leq \frac{1}{10}\tau_m$ podemos hacer $\frac{1}{R_a}\left[\frac{1}{\frac{L_a}{R_a}s + 1}\right] \approx \frac{1}{R_a}$

La corriente se establece rápido y hay una cupla, pero la velocidad no se establece con la misma rapidez si la carga inercial es grande.

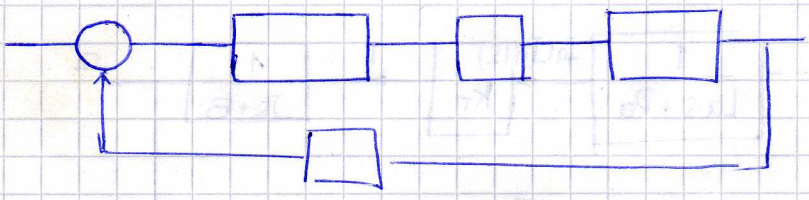
$$V_i(s) = \left[(R_a + L_a s)\left(\frac{Js + B}{k_T}\right) + k_B \right] \Omega(s)$$

$$\frac{\Omega(s)}{V_i(s)} = \frac{k_T}{L_a J s^2 + (R_a J + L_a B)s + R_a B + k_B k_T}$$

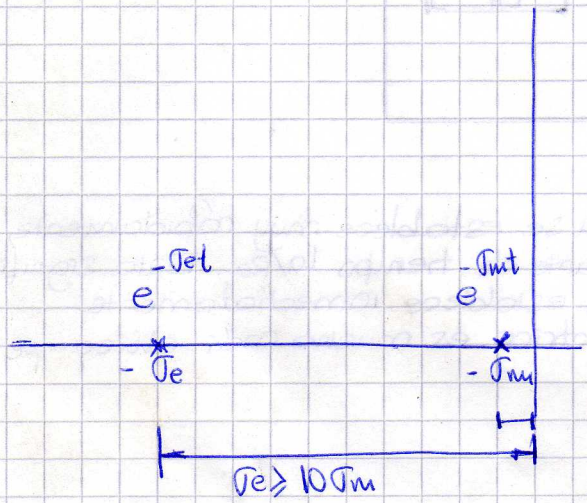
$$\frac{V_i}{\Omega} = \frac{k_T / L_a J}{s^2 + \underbrace{\left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{B}{J}\right)}_{2\xi\omega_m} s + \underbrace{\frac{R_a B + k_B k_T}{L_a J}}_{\omega_m^2}}$$

Se puede modelar un sistema de 2do orden como uno de 1ro eliminando la de de tiempo más rápida, pero hay que tenerla en cuenta para el diseño. (La corriente se establece instantáneamente, pero perdemos el comportamiento transitorio)

10.04.2013



Podemos despreciar la parte del ~~tx~~ transitorio si $\tau_e \geq 10\tau_m$ y considerar que la I se establece instantáneamente



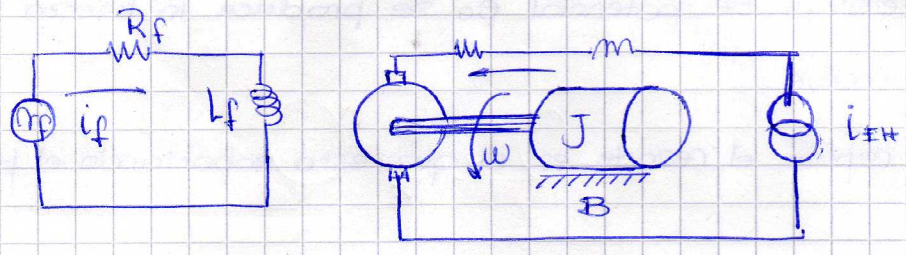
$e^{-1} = 0{,}36$

$e^{-10} = 4{,}5 \times 10^{-5}$

Quedaría un solo integrador, un sistema de 1er orden realimentado

~~Eem~~ el sist. internacional B y k son numéricamente iguales.

Motor de C.C. controlado por campo



$$T = k_f i_f = J\dot{\omega} + B\omega$$

$$v_f = R i_f + L \frac{di_f}{dt}$$

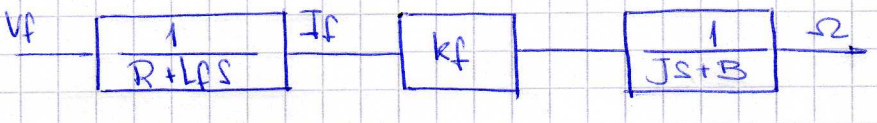
$$k_f \cdot I_f(s) = (Js + B)\,\Omega(s)$$

$$V_f(s) = (R + L_f \cdot s)\, I_f(s)$$

$$k_f \cdot \frac{V_f(s)}{R + L_f s} = (Js + B)\,\Omega(s)$$

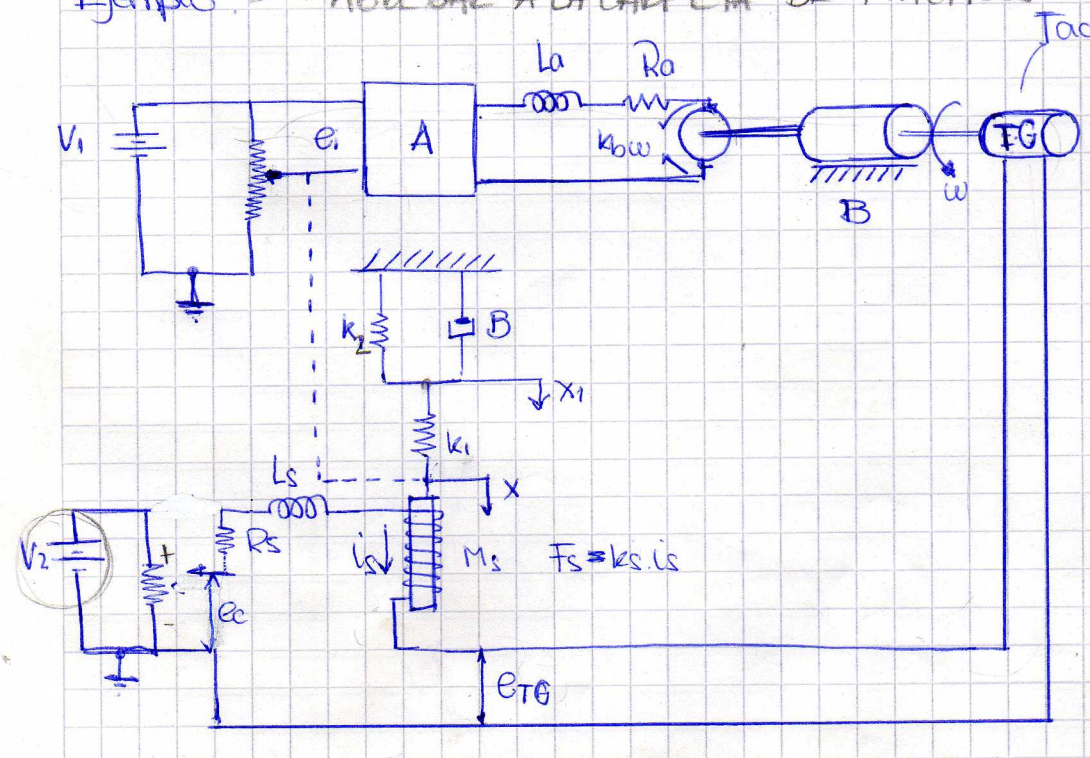
$$\frac{\Omega(s)}{V_f(s)} = \frac{k_f}{(R + L_f s)(Js + B)}$$

Por lo general las ctes eléctricas son parecidas a las mecánicas y ha que ver si tienen un transitorio suficientemente pequeño respecto al mecánico.



Motor a lazo abierto.

Ejemplo → AGREGAR A LA CARPETA DE PRÁCTICOS



$V_{TG} = k_{TG} \cdot \omega$

$e_i = k_x \cdot x$

No está en funcionamiento cuando el primer cursor está arriba ($e_1=0$), la masa (el solenoide) está lo más arriba que puede

Cuando hay diferencia de potencial e_c se produce la fuerza sobre el pistón que se mueve.

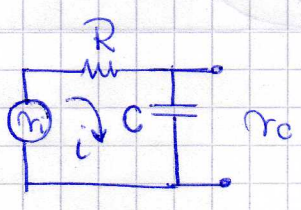
Cuando está en reposo el resorte es el que está soportando el peso.

ANÁLISIS EN EL TIEMPO - RESPUESTA TRANSITORIA

*Sistemas de primer orden

Sistemas de primer orden

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1}$$



$$v_i = Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt \qquad CI = \emptyset$$

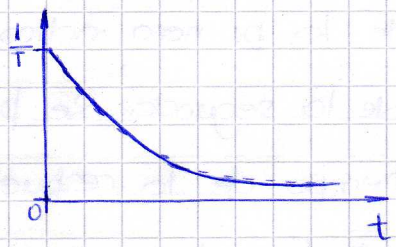
$$v_c = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt$$

$$\left.\begin{aligned} V_1(s) &= \left(R + \frac{1}{sC}\right) I(s) \\ V_c(s) &= \frac{1}{sC}\cdot I(s) \end{aligned}\right\} = \frac{\frac{1}{sC} I(s)}{\left(\frac{RCs+1}{sC}\right) I(s)} = \frac{1}{\underbrace{RC}_{T}s+1} = \frac{1}{Ts+1}$$

Si ponemos un <u>impulso</u> a la entrada: $R(s) = 1$

$$V_c = \frac{1}{T}\left(\frac{1}{s+\frac{1}{T}}\right)$$

$$v_c(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$



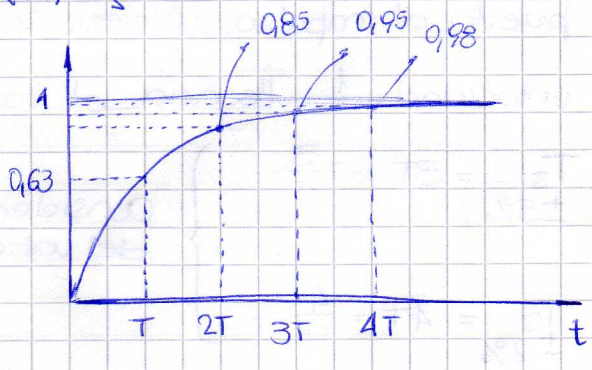
Cuanto más lejos del origen está el polo más rápida es la respuesta.

Con una entrada <u>escalón</u> $R(s) = \frac{1}{s}$

$$V_c = \frac{1}{T}\cdot\frac{1}{\left(s+\frac{1}{T}\right)}\cdot\frac{1}{s} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1}$$

$$A_1 = 1 \qquad A_2 = -1$$

$$V_c = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/T} \Rightarrow v_c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$



Con una entrada <u>rampa</u> $R_s = \frac{1}{s^2}$

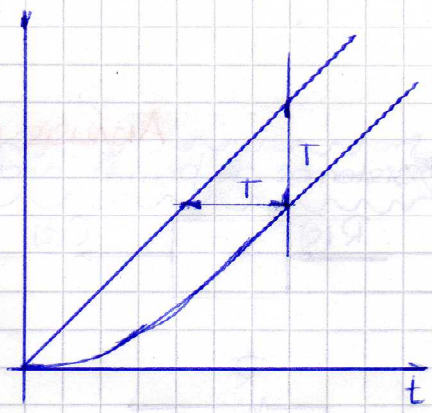
$$V_c = \frac{1}{T}\frac{1}{\left(s+\frac{1}{T}\right)}\cdot\frac{1}{s^2} = \frac{A_1}{s^2} + \frac{A_2}{s} + \frac{A_3}{s+\frac{1}{T}}$$

$$A_1 = 1$$

$$A_2 = \lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\left[s^2\frac{1}{T}\frac{1}{(s+1/T)}\cdot\frac{1}{s^2}\right] = -\frac{1}{T}\frac{1}{\left(s+\frac{1}{T}\right)^2} = -T$$

$$A_3 = \lim_{s \to -\frac{1}{T}} \left(s+\frac{1}{T}\right) \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{s+\frac{1}{T}} \cdot \frac{1}{s^2} = T$$

$$V_c = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s+\frac{1}{T}} \Rightarrow r_c(t) = t - T + Te^{-t/T}$$



Cuando $T \to \infty$ (t) tengo esa diferencia entre la rampa <u>unitaria</u> y la salida.

Para que un sistema sea lineal se cumple que

$$x_1 \longrightarrow \boxed{SLIT} \longrightarrow y_1$$

$$\dot{x}_1 \longrightarrow \boxed{SLIT} \longrightarrow \dot{y}_1$$

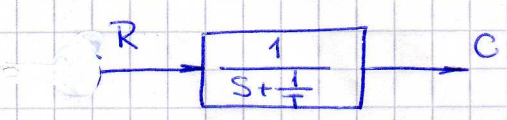
$$\int_0^t x_1\,dt \longrightarrow \boxed{SLIT} \longrightarrow \int_0^t y_1\,dt.$$

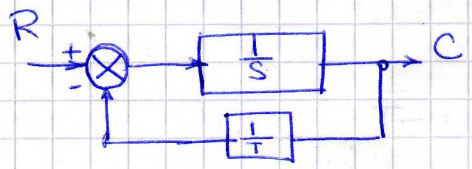
Como la respuesta del impulso es igual a la derivada de la respuesta al escalón, cada punto de la primera indica la velocidad de crecimiento de cada punto de la segunda. Se puede encontrar el valor de la constante de tiempo de la respuesta al escalón considerando el valor de su derivada para $t=0$, que es $\frac{1}{T}$ según la respuesta al impulso. Es decir si la señal siguiera creciendo con velocidad $\frac{1}{T}$ llegaría al valor final en una constante de tiempo

$$\left.\begin{aligned} T_{s\,\pm 5\%} &= 3T = \frac{3}{\sigma} \\ T_{s\,\pm 2\%} &= 4T = \frac{4}{\sigma} \end{aligned}\right\}$$

Consideramos estos índices cuando llega cerca del valor estacionario.

—*—

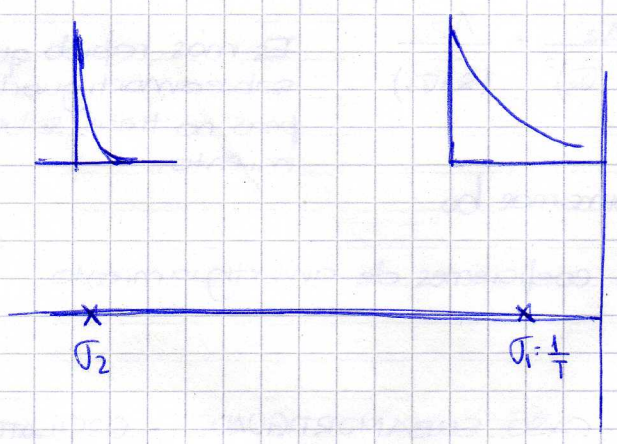




$$\frac{C}{R} = \frac{1/s}{1 + \frac{1}{sT}} = \frac{1/s}{\frac{sT+1}{sT}} = \frac{1}{s + \frac{1}{T}}$$

Un sistema de primer orden es un integrador realimentado. Inicialmente comienza a funcionar como un integrador, por eso en respuesta al escalón en $t=0$ comienza a dar una rampa. Luego la realimentación hace que cambie la pendiente, porque no lo deja seguir creciendo.

Si tuvieramos otro sistema de primer orden acoplado con un polo más alejado del origen, por ende con una respuesta más rápida, el polo dominante será el del primero y será preponderante la respuesta ya que la otra (del segundo sistema) desaparece más rápidamente (la de régimen transitorio)



17. Abril. 2013.

Sistemas de segundo orden

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{s^2 + bs + c}$$

$$s_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

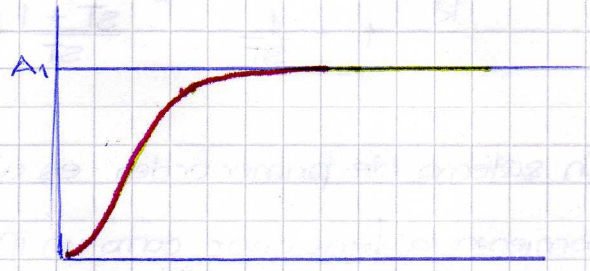
- $b^2 > 4c \longrightarrow$ Raices Reales diferentes
- $b^2 = 4c \longrightarrow$ Raices Reales iguales
- $b^2 < 4c \longrightarrow$ Raices complejas conjugadas

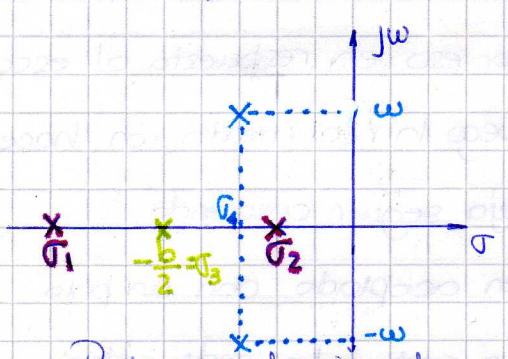
• Raíces reales y distintas: CASO SOBREAMORTIGUADO

$$\frac{C}{R} = \frac{k}{(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)} \qquad \text{Si } R = \frac{1}{s} \; ; \; C(s) = \frac{k}{s\,(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)}$$

$$C(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+\sigma_1} + \frac{A_3}{s+\sigma_2}$$

$$c(t) = A_1 + A_2 e^{-\sigma_1 t} + A_3 e^{-\sigma_2 t}$$



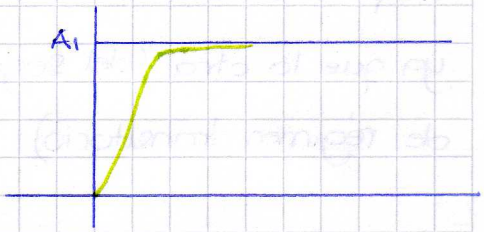


• Raíces reales iguales: CASO CRÍTICAMENTE AMORTIGUADO.

$$\sigma_3 = -\frac{b}{2}$$

$$\frac{C}{R} = \frac{k}{(s+\sigma_3)^2} \; ; \; R = \frac{1}{s} \quad \text{(Si ponemos un escalón)}$$

$$C(s) = \frac{k}{(s+\sigma_3)^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{(s+\sigma_3)^2} + \frac{A_3}{(s+\sigma_3)}$$



Es más rápido que el sobreamortiguado pero no tiene sobrepasamiento.

Coef. amort (b) → $b^2 = 4c \Rightarrow b = \underbrace{2\sqrt{c}}_{b_0}$ → lo llamamos b_0.

$$\frac{b}{b_0} = \xi \rightarrow \text{Relación de coeficientes de amortiguamiento.}$$

• Raíces complejas conjugadas: CASO SUBAMORTIGUADO - OSCILATORIO.

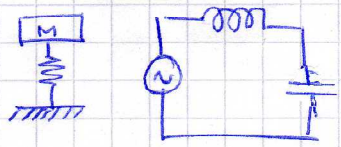
$$s_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{4c - b^2}}{2} j$$

$$s_{1,2} = \sigma \pm j\omega$$

Para el caso de $b=0$ → un sistema de segundo orden sin el término de primera derivada, tengo un oscilador

$$\omega = \sqrt{c} = \omega_n \text{ (pulsación natural)}$$

El sistema no tiene amortiguamiento: $(\ddot{y} + 3y = x)$ → ejemplo



Si tengo un sistema con todos los términos y todos tienen el mismo signo el sistema es estable.

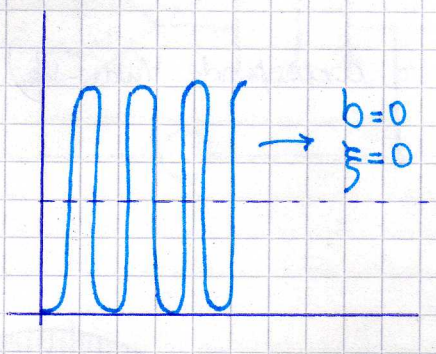
$b_0 = 2\sqrt{C}$

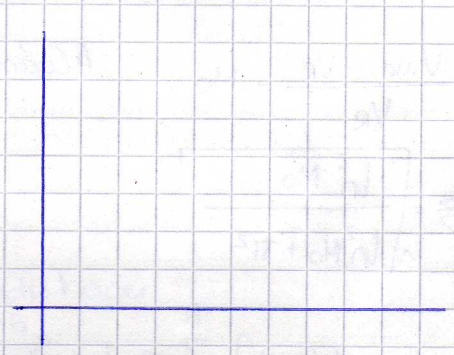
$b = 2\sqrt{C}\cdot\xi$

$b = 2\xi\omega_n$

ω_n es el término independiente del denom. cuando el coeficiente de s^2 es 1

$$\frac{C}{R} = \frac{K}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad ; \quad K = K_n \cdot \omega_n^2$$

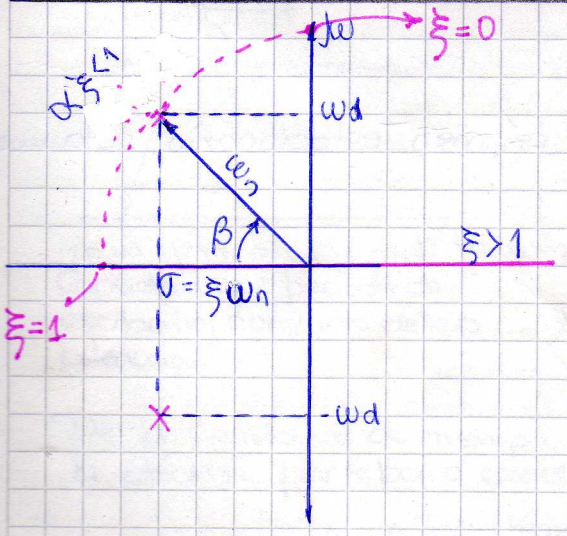




$$\frac{C}{R} = \frac{k = \omega_n^2}{(s+\sigma+j\omega)\,(s+\sigma-j\omega)}$$

AGREGAR ESTO A LA CARPETA DE PRÁCTICOS:
Encontrar la solución temporal para entrada $\frac{1}{s}$ (escalón) con $\xi < 1$ para la siguiente función de transferencia

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$



$$\sigma = -\frac{b}{2} = -\frac{2\xi\omega_n}{2} = \xi\omega_n$$

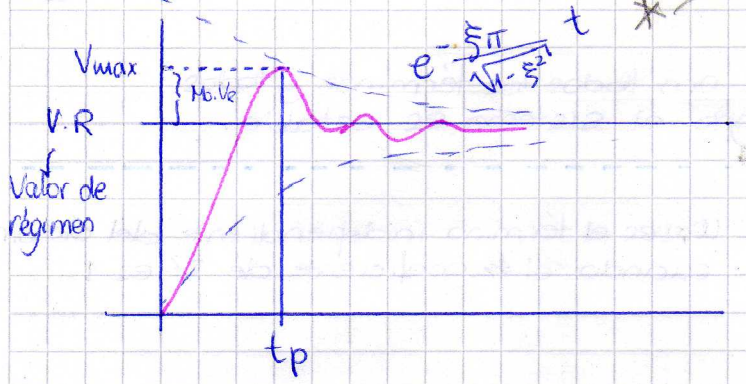
$$\omega = \frac{\sqrt{4C - b^2}}{2}$$

$$\omega_d = \frac{\sqrt{4\omega_n^2 - 4\xi^2\omega_n^2}}{2}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$V = \sqrt{\cancel{\xi^2\omega_n^2} + \omega_n^2 - \cancel{\xi^2\omega_n^2}} = \omega_n$$

$\cos\beta = \xi$



* → ver si está bien.

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$\frac{V_{max} - V_R}{V_R} = M_o$$ (¿Cuánto de V_R corresponde $V_{max} - V_R$)

$$\xi = \sqrt{\frac{\ln^2 M_o}{\ln^2 M_o + \pi^2}}$$

$$\frac{k}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$ → k lo obtengo del valor de régimen

$$\xi^2 = \frac{\ln^2 M_o}{\ln^2 M_o + \pi^2} \Rightarrow \xi^2(\ln^2 M_o + \pi^2) = \ln^2 M_o \Rightarrow \xi^2 \ln^2 M_o + \xi^2\pi^2 = \ln^2 M_o$$

$$\ln^2 M_o\left[-\xi^2 + 1\right] = \xi^2\pi^2$$

$$\ln M_o = \frac{\xi\pi}{1-\xi^2} \Rightarrow M_o = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Cuando estamos en 4τ estamos en régimen estacionario, estamos dentro del ±2%, o del ±5% de τ.

Si tengo 2 polos + alejados (otro sistema) tengo una resp. más rápida con igual ξ? Creo que algo así.

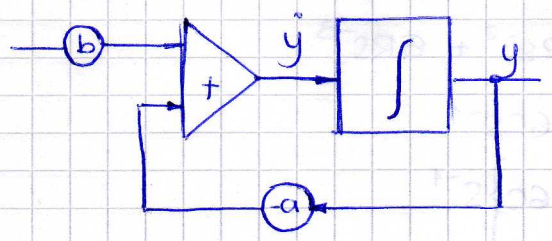
15. Mayo. 2013

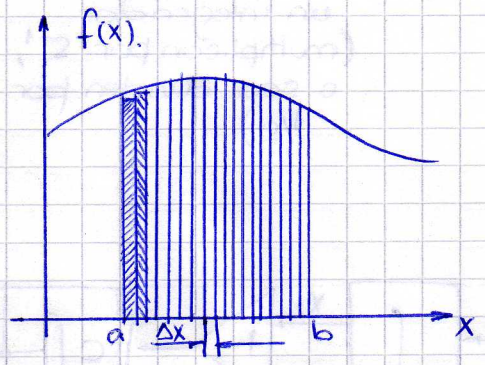
SIMULACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS

$$\dot{y} + ay = bx$$

Una ecuación diferencial de orden n se puede resolver como n ecuaciones de orden 1.

Puedo hacer $\dot{y} = bx - ay$





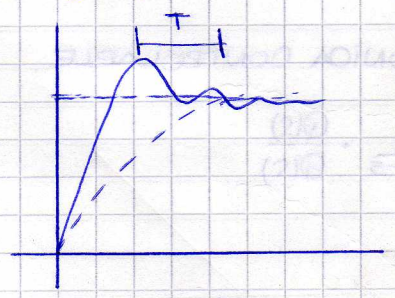
Puedo hacer

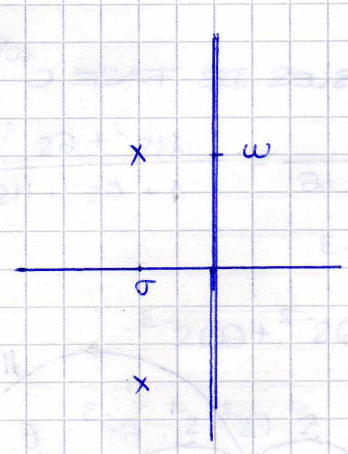
$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \sum_{n=1}^{N} f(x_m)\Delta x = \bar{A}$$

Si no hago una correcta elección de los límites de integración puedo obtener errores importantes.

Es importante conocer la constante de tiempo de los sistemas porque dan una buena idea de cuál debe ser el intervalo de integración.

Por ejemplo





$$\sigma = \frac{1}{\tau}$$

$$f(t) = 1 - e^{-\sigma t}\cos(\omega t + \varphi)$$

Consideramos período de oscilación, constante de atenuación.

De la constante de tiempo más pequeña y del menor período tomamos la décima parte para ~~constante de~~ intervalo de integración.

$$\Delta x < \frac{\tau \text{ más pequeña}}{10} \qquad \Delta x < \frac{T \text{ más pequeño}}{10}$$

Por ejemplo, tomamos la siguiente función de transferencia, y la resolvemos:

$$\frac{C}{R} = \frac{11s+6}{s^3+6s^2+11s+6} = \frac{11s^{-2}+6s^{-3}}{1+6s^{-1}+11s^{-2}+6s^{-3}}$$

Cuando divido por s^3 en Laplace estoy integrando 3 veces.

En las simulaciones no se usa derivador porque hace pasar el ruido y lo amplifica. (Considerar que la derivada da cuenta de la variación de señales, entonces el ruido pasa bárbaro)

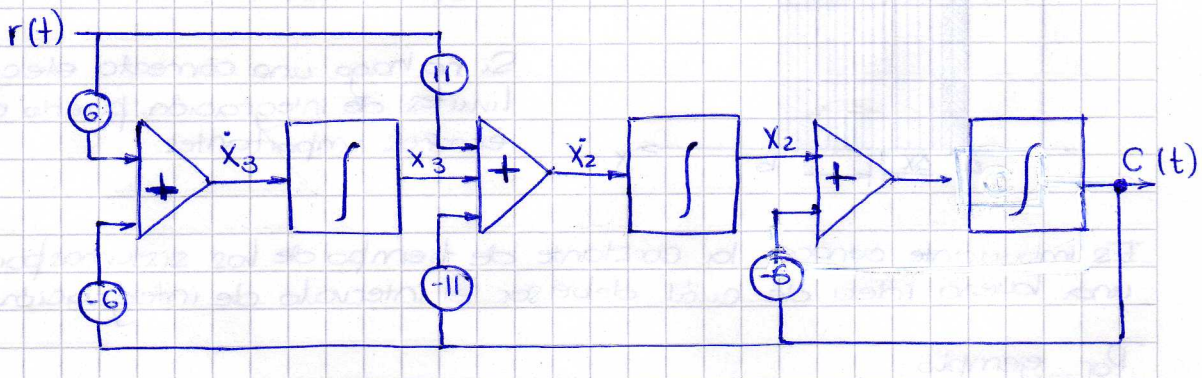
1) MÉTODO DE PROGRAMACIÓN DIRECTA

$$C + 6Cs^{-1} + 11Cs^{-2} + 6Cs^{-3} = 11Rs^{-2} + 6Rs^{-3}$$

$$C = (6R-6C)s^{-3} + (11R-11C)s^{-2} - 6Cs^{-1}$$

$$C = \underbrace{\left\{\underbrace{\left[\underbrace{(6R-6C)s^{-1}}_{x_3} + (11R-11C)\right]s^{-1}}_{x_2} - 6C\right\}s^{-1}}_{x_1\ (=C)}$$

Son salidas de un integrador (multiplican por s^{-1}, o sea dividen por $1/s$)

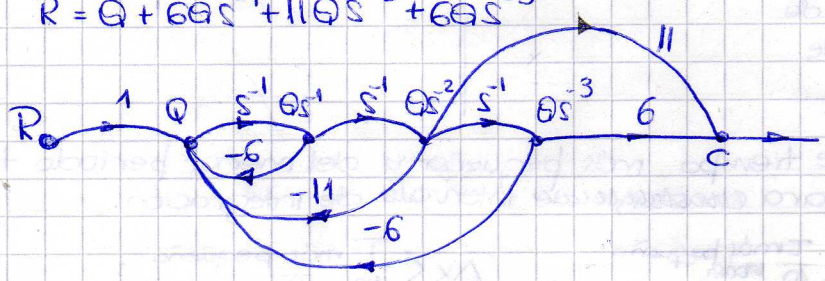


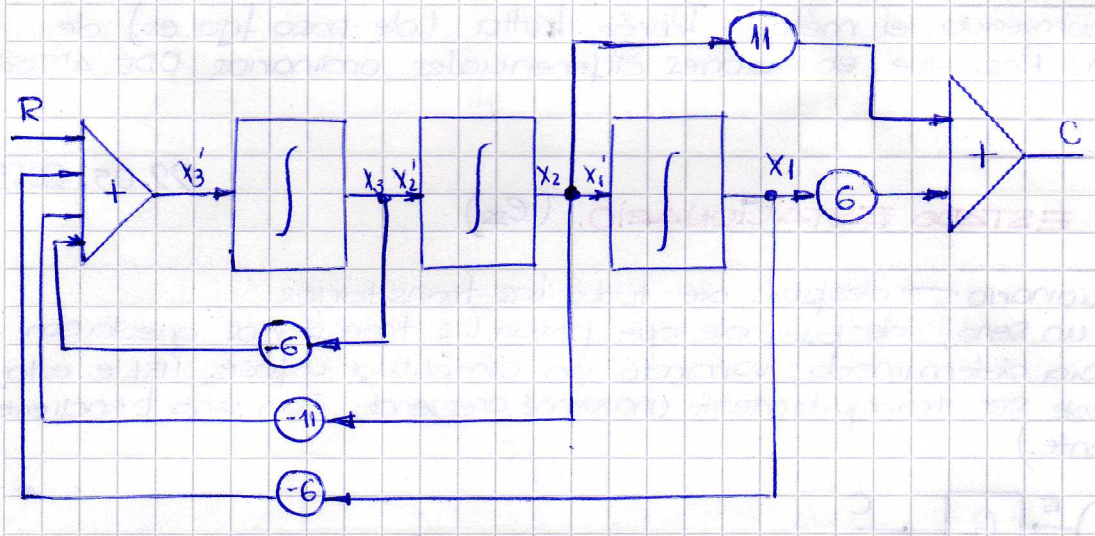
2) METODO DE LAS VARIABLES DE FASE O FORMA CANÓNICA CONTROLABLE.

$$\frac{C}{R} = \frac{11s+6}{s^3+6s^2+11s+6} = \frac{11s^{-2}+6s^{-3}}{1+6s^{-1}+11s^{-2}+6s^{-3}} \cdot \frac{Q(s)}{Q(s)}$$

$$C = 11Qs^{-2} + 6Qs^{-3}$$

$$R = Q + 6Qs^{-1} + 11Qs^{-2} + 6Qs^{-3}$$





3)

$$\frac{C}{R} = \frac{11s+6}{s^3+6s^2+11s+6} = \frac{11s+6}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A_1}{(s+1)} + \frac{A_2}{(s+2)} + \frac{A_3}{(s+3)}$$

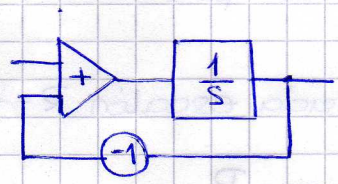
$A_1 = -\frac{5}{2}$ $\quad A_2 = 16 \quad A_3 = -\frac{27}{2}$

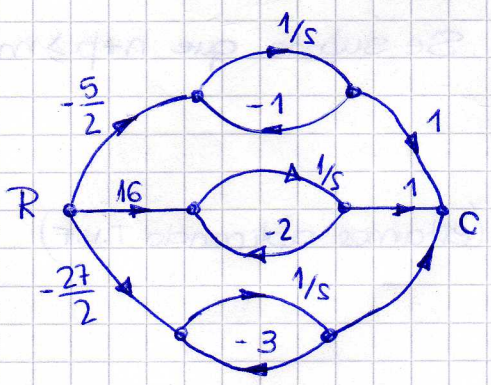
$$C = \frac{-\frac{5}{2}}{s+1}R + \frac{16}{s+2}R + \frac{-\frac{27}{2}}{s+3}R$$

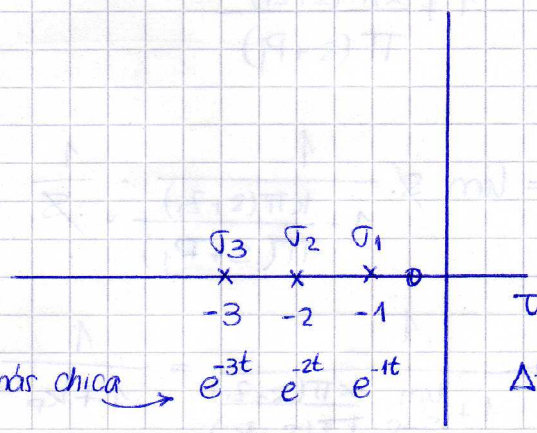
— Habíamos dicho que un sistema de primer orden es un integrador realimentado.

Podemos hacer cada sistema así:

$$\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}} = \frac{1}{s+1} \longrightarrow$$







$\tau = 0{,}33 \quad (\frac{1}{3})$

$\Delta t = 0{,}03$

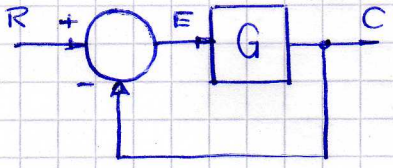
Hay algunos métodos que se llaman "de paso fijo" que usan siempre el mismo intervalo de integración. Otros son los métodos "de paso variable" que arrancan con un paso fijo y según cómo sea el cambio de pendiente [illegible] va tomando distintos intervalos de integración.

El profe recomienda el método Runge-kutta (de paso fijo es) de cuarto orden. Resuelve ecuaciones diferenciales ordinarias ODE 4to orden.

22.05.2013

ERROR EN ESTADO ESTACIONARIO. (e_{ss})

Estado estacionario → después de todos los transitorios.
Por ejemplo un seno, después de que pasan los transitorios queda con una frecuencia determinada, variando en amplitud y fase. (El e. estacionario puede ser tranquilamente una señal creciendo con una pendiente indefinidamente.)



$\frac{1}{s}$ → Como señal es un escalón
→ Como sistema es un integrador

$$\frac{E}{R} = \frac{1}{1+G}$$

$$G = \frac{k \cdot \prod_{i=1}^{m} (s+Z_i)}{s^n \prod_{j=1}^{p} (s+P_j)}$$

TIPO DE SISTEMA.

- Si $n=0$ → sistema tipo 0 (no hay integrador)
- Si $n=1$ → sistema tipo 1
- Si $n=2$ → sistema tipo 2

* TIPO 0 (Entrada escalón $R = \frac{1}{s}$)

$$E = \frac{1}{1 + \frac{k\prod(s+Z_i)}{\prod(s+P_j)}} \cdot R$$

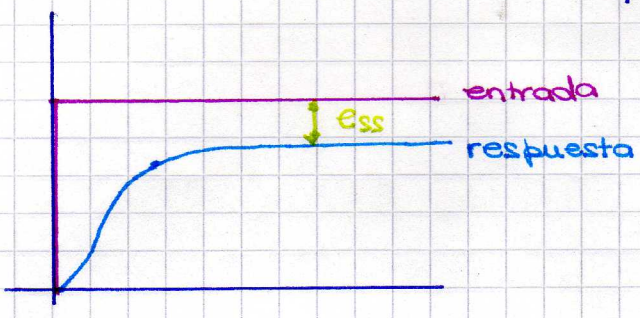
Se supone que $n+p \geq m$

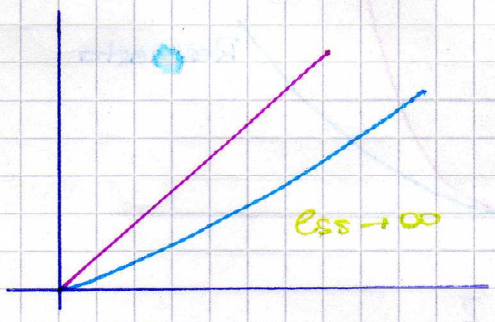
$$e_{ss} = \lim \cancel{s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k\prod(s+Z_i)}{\prod(s+P_j)}} \cdot \frac{1}{\cancel{s}}$$

(estamos aplicando T.V.F)

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + \lim_{s\to 0} \frac{k\prod(s+Z_i)}{\prod(s+P_j)}} = \frac{1}{1+k_p} = \frac{1}{1+\lim_{s\to 0} G(s)}$$

k_p = Coeficiente de error estático de posición para una entrada escalón





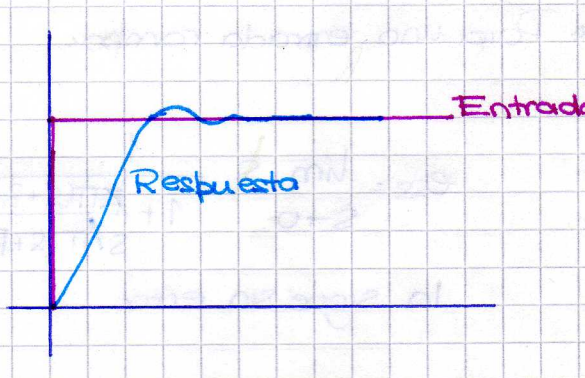
Si como entrada pongo una rampa $\left(\frac{1}{s^2}\right)$ el error va a tender a ∞ por lo que un sistema tipo 0 no puede seguir una rampa.
(El sistema trata de seguir la rampa, pero siempre con un error creciente). No tiene la velocidad necesaria para seguir la rampa (o
Puede seguir un cambio repentino en la entrada, con un e_{ss}.

(parábo

* TIPO 1

Si le pongo un escalón lo sigue sin error (si es estable el sistema)

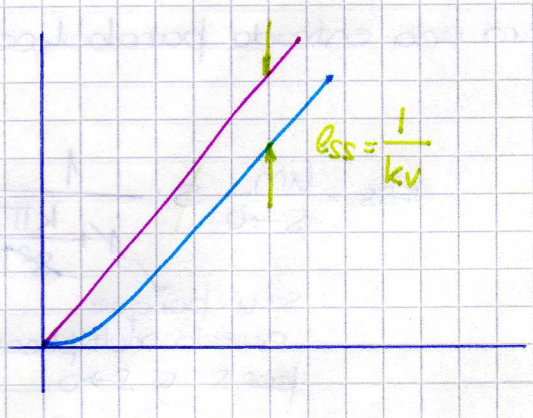
$$E = \frac{1}{1 + \frac{k\Pi(s+z_i)}{s\Pi(s+P_j)}}$$



$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k\Pi(s+z_i)}{s\Pi(s+P_j)}} \cdot \frac{1}{\cancel{s}}$$

Si pongo una rampa

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k\Pi(s+z_i)}{s\Pi(s+P_j)}} \cdot \frac{1}{s^{\cancel{2}}}$$

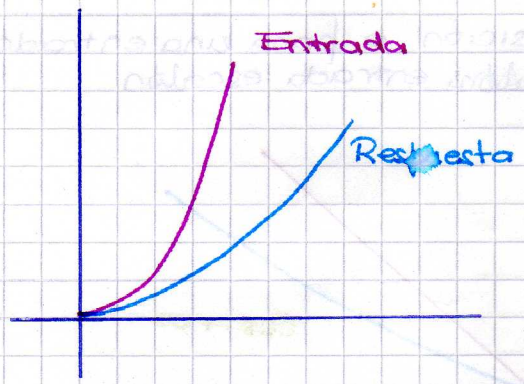


$$\lim_{s\to 0} s \cdot G(s) = k_v = \lim_{s\to 0} s \underbrace{\frac{k\Pi(s+z_i)}{s\Pi(s+P_j)}}_{G(s)}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{k_v}$$

k_v: coeficiente de error estático de velocidad para una entrada rampa.

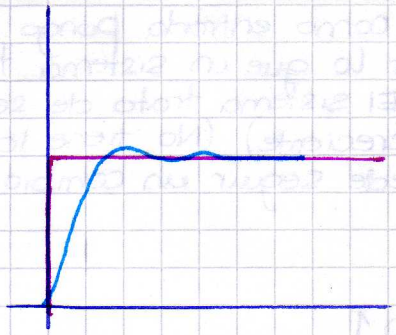
Un sistema tipo 1 no puede seguir una entrada parabólica. Va a tratar de seguirla con un error creciente.



* TIPO 2

Para un escalón

$$E = \frac{1}{1 + \frac{k\Pi(s+z_i)}{s^2\Pi(s+P_j)}}$$



$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k\Pi(s+z_i)}{s^2\Pi(s+P_j)}} \cdot \frac{1}{\cancel{s}}$$

lo sigue sin error

∴ Para una entrada rampa.

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k\Pi(s+z_i)}{s^{\cancel{2}}\Pi(s+P_j)}} \cdot \frac{1}{\cancel{s^2}}$$

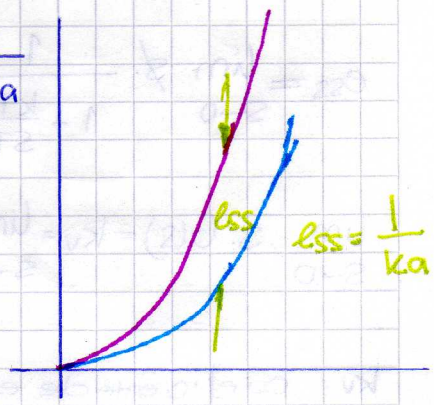
la sigue sin error

Para una entrada parabólica

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot \frac{1}{\cancel{1} + \frac{k\Pi(s+z_i)}{\cancel{s^2}\Pi(s+P_j)}} \cdot \frac{1}{\cancel{s^{3}}^{2}} = \frac{1}{k_a}$$

se va porque queda multiplicado por s y $s \to 0$

$$k_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)$$

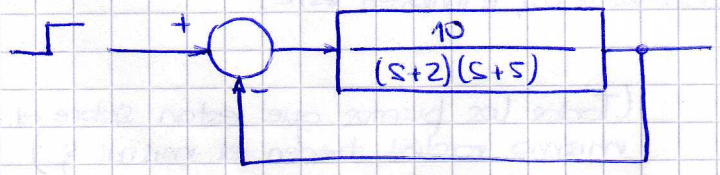


k_a = error en estado estacionario de aceleración para una entrada parabólica.

TIPO / ENTRADA	0	1	2
Escalón	$\varepsilon_{ss} = \frac{1}{1+k_p}$ $k_p = \lim_{s\to 0} G(s)$	$\varepsilon_{ss} = 0$	$\varepsilon_{ss} = 0$
Rampa	$\varepsilon_{ss} \to \infty$	$\varepsilon_{ss} = \frac{1}{k_v}$ $k_v = \lim_{s\to 0} s\,G(s)$	$\varepsilon_{ss} = 0$
Parábola	$\varepsilon_{ss} \to \infty$	$\varepsilon_{ss} \to \infty$	$\varepsilon_{ss} = \frac{1}{k_a}$ $k_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)$

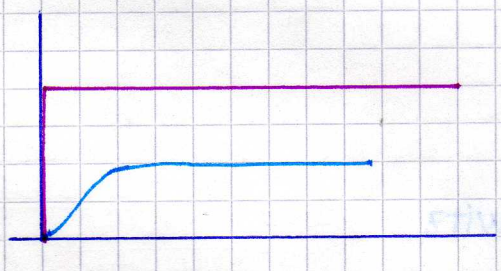
Ejemplo.

(A)

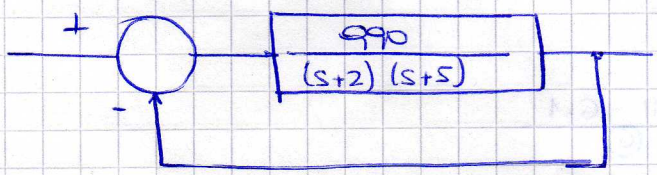


$$k_p = \lim_{s\to 0} G(s) = 1$$

$$\varepsilon_{ss} = \frac{1}{1+k_p} = 0{,}5$$



(B)



$$k_p = \lim_{s\to 0} G(s) = 99$$

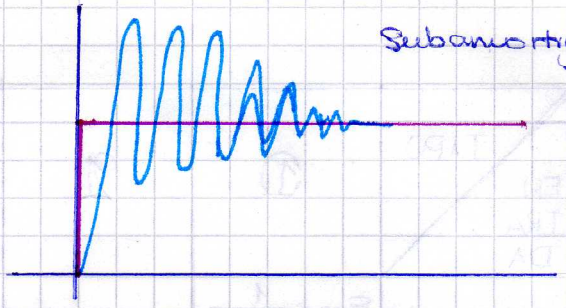
$$\varepsilon_{ss} = \frac{1}{1+99} = 0{,}01$$

(A) $$\frac{\frac{10}{(s+2)(s+5)}}{1+\frac{10}{(s+2)(s+5)}} = \frac{10}{s^2+\underbrace{7s}_{2\xi\omega_n}+\underbrace{20}_{\omega_n^2}} = \frac{C}{R}$$

(B) $$\frac{990}{s^2+7s+1000}$$

$\omega_n = 31,6$

$\xi = 0,11$



Subamortiguado.

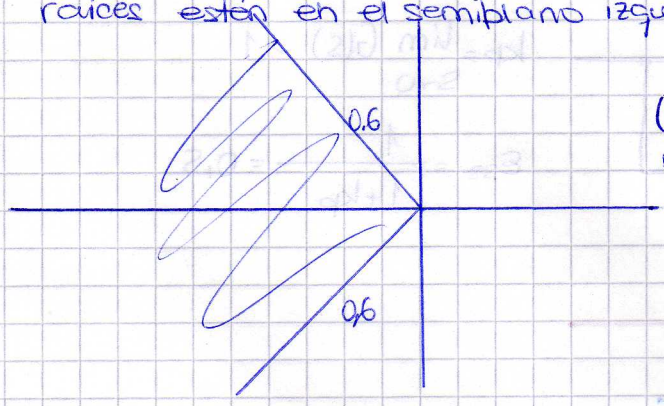
Podemos tener un ess muy pequeño pero un transitorio completamente indeseable. En ese caso conviene poner un compensador del ess pero tener un transitorio adecuado. No siempre sucede eso de ess pequeño y transitorio horrible. Pasa principalmente si aumentamos mucho mucho la ganancia.

(No se si está bien lo que escribí de los compensadores).

ESTABILIDAD ABSOLUTA Y RELATIVA.

- **Estabilidad absoluta**: todas las raíces del denominador están en el semiplano izquierdo. (Con raíces en el eje imaginario → oscilador).

- **Estabilidad relativa**: se considera para un ξ por debajo de 0,6. Depende de cada problema en particular. No sólo se quiere que las raíces estén en el semiplano izquierdo, también esto)



(Todos los puntos que están sobre el mismo radial tienen el mismo ξ)

CRITERIO DE ROUTH-HURWITZ

$$s^3+6s^2+11s+6=0$$

- Condición necesaria: polinomio completo en s.

- Condición suficiente.

s^3	1	11
s^2	6	6
s^1	$\frac{66-6}{6}$	
s^0	6	

$$\frac{6\times 11 - 6\times 1}{6}$$

Caso particular 1

$s^3 + 2s^2 + 20s + 40 = 0$

s^3	1	20
s^2	2	40
s^1	ε	
s^0	40	

Cuando los coeficientes de arriba y abajo de ε tienen igual signo es porque hay raíces imaginarias puras.

Salen de la ecuación usando la fila de arriba de ε.

$$2s^2 + 40 = 0$$

$$s^2 = -20 \rightarrow s = \pm\sqrt{20} \cdot j$$

Caso particular 2. — Se anula toda una fila.

$s^5 + 5s^4 + 3s^3 + 15s^2 + 5s + 25$

s^5	1	3	5
s^4	5	15	25
s^3	20	30	
s^2			
s^1			
s^0			

COMPLETAR!!!

Tomo la ecuación superior a la fila que se anula.

$$\frac{d}{ds}\left[5s^4 + 15s^2 + 25\right]$$

$$20s^3 + 30s$$

Lo vimos en teoría II

y no puede seguir porque iba muy rápido

29. Mayo. 2013

LUGAR DE RAÍCES

En un sistema de control de lazo cerrado, por lo general podemos determinar o conocer la función de transferencia de los componentes

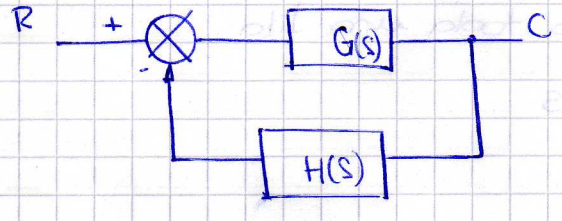
$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1+G.H}$$ Nos permite determinar si el sistema es estable y sus características.

$1+G.H=0$ — Ecuación característica.

Función de transferencia de lazo abierto G.H.

$G.H=-1$
- $\angle G.H = \pm 180\,(2k+1)$ — dónde está el lugar de raíces
- $|G.H| = 1$ — dónde me posiciono.

A partir de la FTLA puedo saber cómo se modifican las raíces (polos de mi función de transferencia de lazo cerrado) cuando varío un parámetro de interés (como es k)

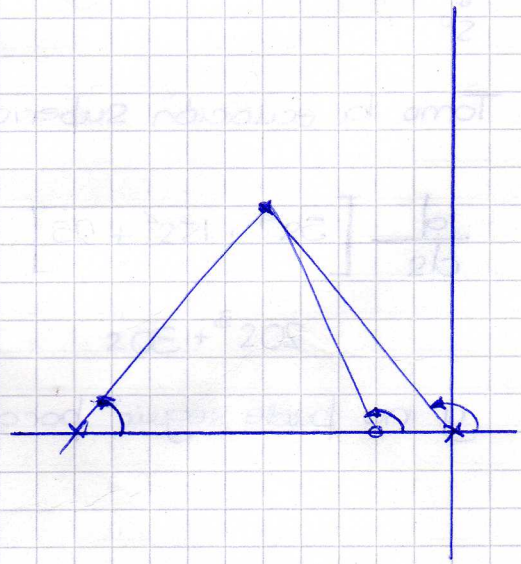


$$G.H = \frac{k\,\Pi(s+z_i)}{\Pi(s+p_j)}$$

Si $|G.H| = 1 \Rightarrow k = \dfrac{\Pi(|s+p_j|)}{\Pi(|s+z_i|)}$

Hacemos el análisis para $0<k<\infty$

k se hará cero cuando estoy en un polo: el lugar de raíces de la función de transferencia a lazo abierto empieza en los polos. A partir de cada polo hay una rama de la función de transferencia.
En general hay más polos que ceros para una función físicamente realizable (denominador > numerador - en orden).
k se hace ∞ cuando estoy en un cero.
El lugar de raíces termina en los ceros.
Habrá tantas ramas como polos o ceros (el que sea más grande).

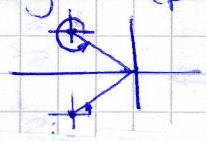


Para saber si un punto genérico cumple con el lugar de raíces:

k empieza en los polos y termina en los ceros.

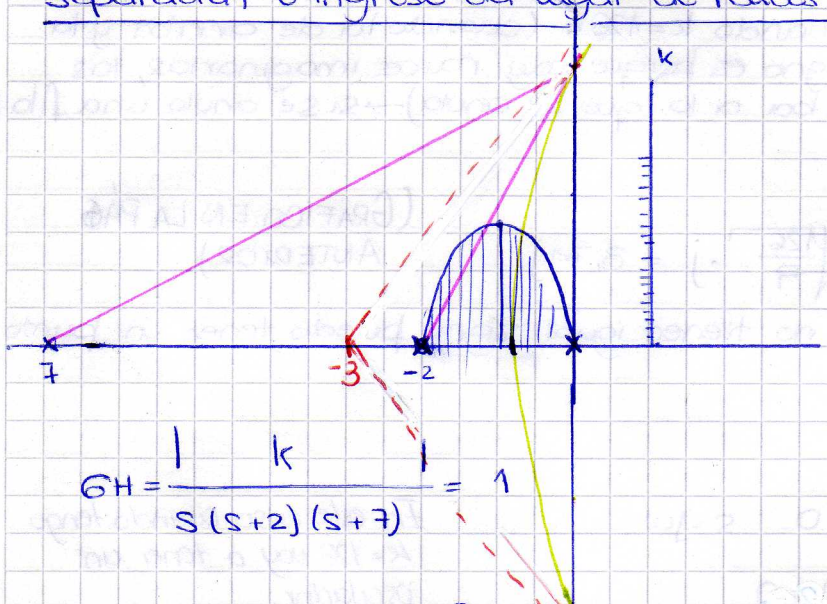
$$\angle G.H = \angle s+z_1 + \angle s+z_2 + \angle s+z_3 + \dots - \angle s+p_1 - \angle s+p_2 - \dots - \angle s+p_n$$

Los ángulos se toman en sentido antihorario desde la dirección $+x_q$ pasando por el punto singular (polo o cero).



Existe lugar de raíces sobre el eje real cuando a la derecha del punto considerado hay un número impar de singularidades (polos o ceros)

Separación o ingreso del lugar de raíces en el eje real:



$$GH = \frac{|k|}{s(s+2)(s+7)} = 1$$

$$K = s(s+2)(s+7) = s^3 + 9s^2 + 14s$$

$$\frac{dk}{ds} = 3s^2 + 18s + 14 = 0 \begin{cases} s_1 = -0{,}92 \\ s_2 = -5{,}08 \end{cases}$$

$s_1 = -0{,}92$ cae en un lugar de raíces. (después veremos qué hacemos con la de $-5{,}08$).

- Asíntotas

$Cant = n - m$

n: número de polos
m: número de ceros

$$\text{Ángulo de asíntota} = \frac{\pm 180}{n-m}(2k+1)$$

$$\frac{180}{3}(2k+1)$$

σ de corte

$$\sigma_c = \frac{\sum Re\,P - \sum Re\,Z}{n-m}$$

$\sigma_c = -3$

Ahora queremos ver cuándo se pasan para el semiplano derecho:

$$GH = \frac{k}{s^2 + 9s^2 + 14s}$$

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1+GH} = \frac{k}{s^3 + 9s^2 + 14s + k}$$

Aplicamos Routh-Hurwitz →

s^3	1	14
s^2	9	k
s^1	$\frac{126-k}{9}$	
s^0	k	

Para que no haya cambios de signo $0 < k < 126$

Quiero saber qué pasa cuando $k = 126$ → se anula una fila (s^1) (cuando la de arriba y la de abajo tienen igual signo es porque hay raíces imaginarias, las saco con la fila de arriba a la que se anula) → si se anula una fila pasa eso.

$$9s^2 + 126 = 0$$

$$9s^2 = -126 \Rightarrow s^2 = \sqrt{\frac{126}{9}} \cdot j = 3{,}74j$$

(GRÁFICO EN LA PÁG ANTERIOR).

(Si el de arriba y abajo no tienen igual signo puedo tener un punto de ensilladura).

Otra forma:

$$s^3 + 9s^2 + 14s + k = 0 \qquad s = j\omega$$

$$-j\omega^3 - 9\omega^2 + 14j\omega + k = 0$$

$$k - 9\omega^2 = 0 \rightarrow k = 126$$

$$14\omega - \omega^3 = 0$$

$$\omega[14 - \omega^2] = 0 \qquad \omega = \sqrt{14}$$

En este caso cuando tengo $k = 126$ voy a tener un oscilador.

Tomamos un punto conocido $(0; \sqrt{14})$

$$k = |s+2||s+7||s|$$

$$s = \sqrt{14}\, j$$

$$k = |\sqrt{14+4}||\sqrt{14+49}||\sqrt{14}|$$

$$k = \sqrt{18 \cdot 63 \cdot 14} = 126$$

Puedo determinar la respuesta para cualquier valor de k — comportamiento dinámico

CONSULTAR - Faltó anotar algunas cosas porque me perdí bastante -

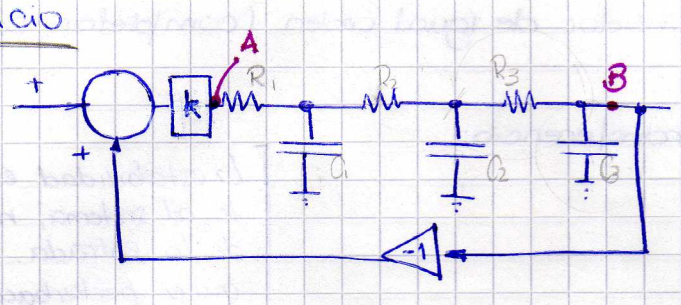
Tengo determinado el valor de k para un punto

HACER!!!

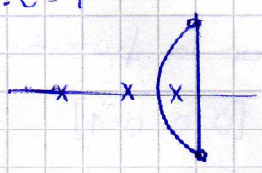
Filtro ideal → la salida tiene la misma forma que la entrada pero corrido en el tiempo → desplazamiento de fase.

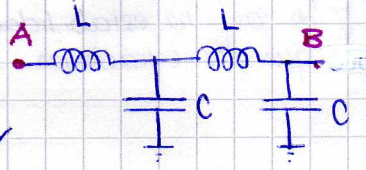
$Y(s) = k X(s) e^{-sD}$

EJERCICIO

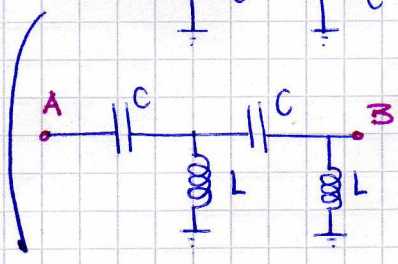


R = C = 1

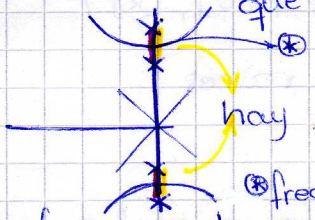




L = C = 1



Para estos tres osciladores (el de arriba y reemplazando entre A y B por lo de abajo) buscar el valor de k para que oscile.



hay lugar de raices

⊛ frec. a la que va a oscilar a una sola

Para que oscile a una sola frecuencia las raices tienen que ser complejas conjugadas dobles.

05/06/2013

Lugar de raíces en MATLAB.

- Usar numerador y denominador de igual orden (completar con cero los coeficientes)

▸ Armar la función de transferencia:

```
n = [0 0 0 1]
d = [1 9 14 0]
gh = tf(n, d)
```

otra forma:

```
gh = zpk([0 0 0 1], [1 9 14 0], [k])
```

[La estabilidad es inherente al sistema, no depende de la entrada. Ante cualquier perturbación responde con la estabilidad que lo caracterice]

▸ Para encontrar el lugar de raíces

```
rlocus(gh)
```

Puedo posicionarme en los puntos del gráfico y ver los datos de ganancia.

Para una ganancia $k = 17{,}9$ en este ejemplo, las raíces deberían ser

$RCC = -0{,}773 \pm 1{,}34j$

$RR = -7{,}44$

Si le pongo una $k = 126$ el sistema oscila. $r = -7{,}16$

Para $k = 6$ tengo un sistema críticamente amortiguado.

En $k < 6$ el sistema es subamortiguado.

▸ Para hacer la función de lazo cerrado de gh con ~~ga~~ realimentación unitaria negativa para ganancia 6

```
gh1c6 = feedback(gh, 1)
```

▸ Para la respuesta a un escalón, impulso

```
step(gh1c6)
impulse(gh1c6)
```

(hold mantiene el plot de la figura).

Si ahora tenemos una ganancia negativa:

$$G.H = -\frac{k\,\Pi(s+z_i)}{\Pi(s+p_j)}$$

$1 - G.H = 0$

$GH = 1$ → $\angle GH = 360 \times k \quad (0, 1, 2, 3, \ldots)$

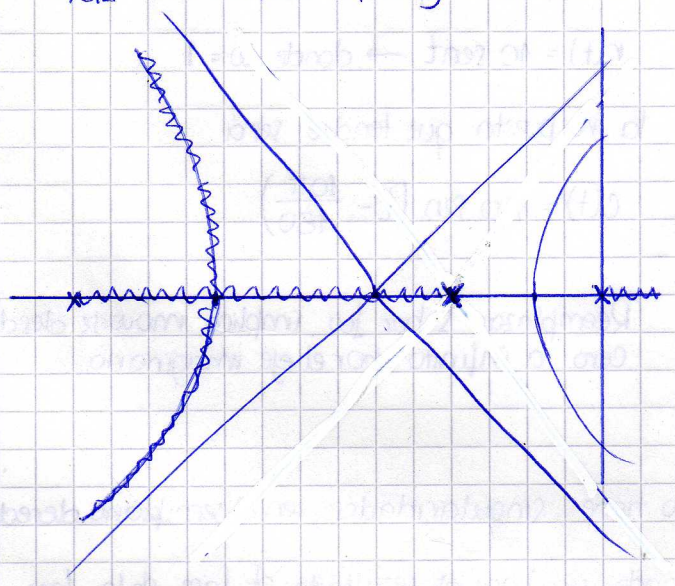
$GH = 1$ → $|GH| = 1$

Lo único que cambia es lo relacionado con el argumento.
Ahora se completa el lugar de raíces.

Las asíntotas ahora son (ángulo)

$$\frac{360 \cdot k}{n-m}$$

En el ejercicio que vimos de ejemplo la clase pasada había obtenido de dk/ds las raíces $-0{,}92$ y $-5{,}08$.



ωωωω → lugar de raíces

Ahora hay lugar de raíces cuando a la derecha del punto considerado hay un número par de singularidad

11. 06. 2013 (clase sorpresa!)

Análisis de respuesta en Frecuencia.

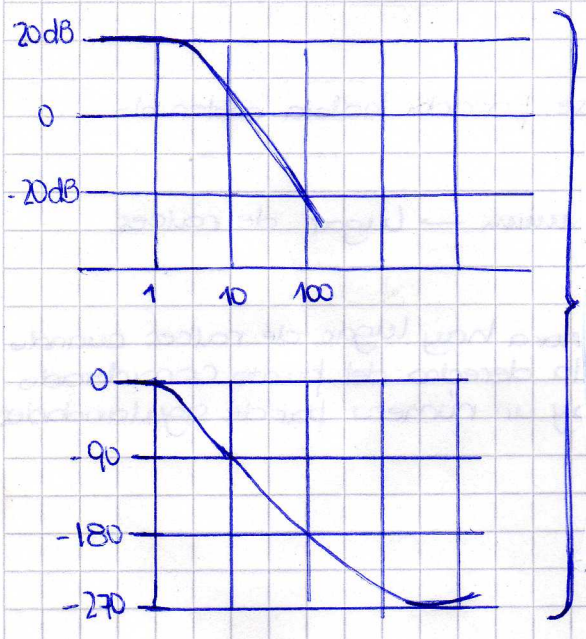
Para una función seno: $R(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$$C(s) = G(s).R(s) = \frac{A_1}{s+s_1} + \frac{A_0}{s+s_2} + \dots + \frac{A_n}{s+s_n} + \frac{B_1}{s+j\omega} + \frac{\bar{B}_1}{s-j\omega}$$

$$C(t) = A_1 e^{-s_1 t} + A_2 e^{-s_2 t} + \dots + A_n e^{-s_n t} + B_1 e^{j\omega t} + \bar{B} e^{-j\omega t}$$

cuando $t \to \infty$, $C(\infty)$ va a ser:

$C(\infty) = B \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$ — Nos va a quedar corrido en fase y con distinta amplitud, pero oscilando con igual frecuencia.



Para un sistema con esta respuesta en frecuencia al que excito con una entrada

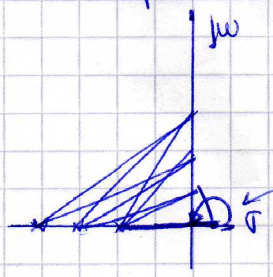
$r(t) = 10 \operatorname{sen} t \longrightarrow$ donde $\omega = 1$

la respuesta que tendré será

$$c(t) = 100 \operatorname{sen}\left(t - \frac{10\pi}{180}\right)$$

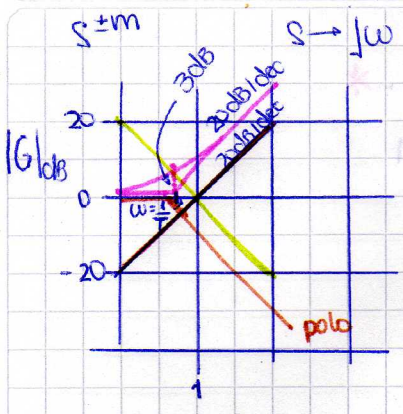
Reemplazar s por $j\omega$ implica moverse desde cero a infinito por el eje imaginario.

Un sistema es de fase mínima cuando no tiene singularidades en el semiplano derecho.



(Porque cuando uno hace el resultado de fase da la fase mínima. Si están del lado derecho ya arrancan con 180°)

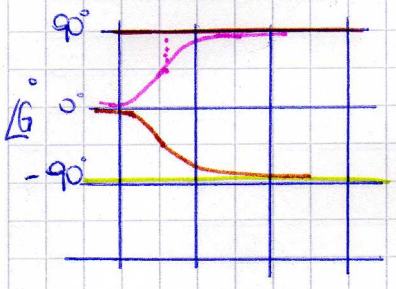
Empezamos viendo los términos de tipo $s^{\pm m}$, que son integradores y derivadores



Para sistemas con $\omega = 1$

$$20 \log 10\omega_1 - 20 \log \omega_1 = 20 \log \frac{10\omega_1}{\omega_1} = 20 \text{ dB}.$$

La respuesta de un derivador es una línea de pendiente 20 dB/dec, que comienza con fase 90°. *

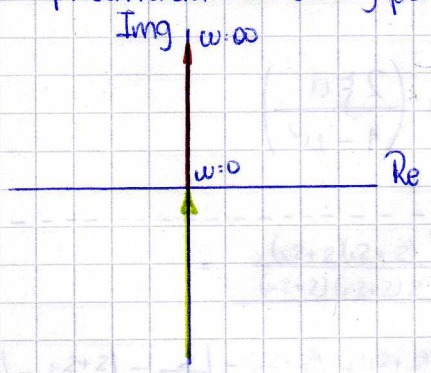


Para un integrador: $1/s \to 1/j\omega$ *

$\frac{1}{s} \to$ módulo: $\log \frac{1}{10j\omega_1}$ $\log \frac{1}{\omega_1}$ — no se si está bien.

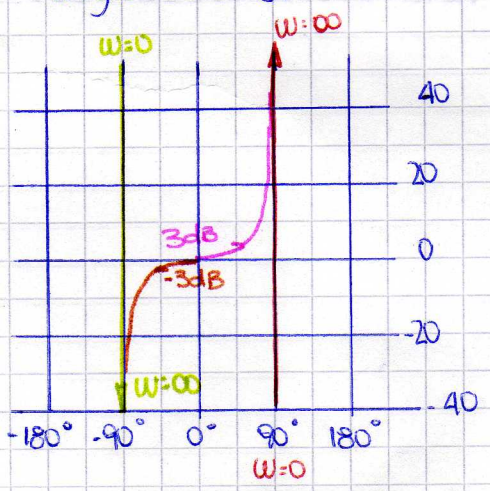
La amplitud viene con -20dB/dec.

La representación de ceros y polos en Nyquist:



Buscar bien todos estos temas y completar los gráficos

En diagrama de Black:



Si la respuesta es una constante tenemos que determinar en qué rango de frecuencia.

Los componentes se comportan diferente para distintos valores de frecuencia.

Para un sistema de primer orden:

$$(Ts+1)^{\pm m}$$

$$|Tj\omega+1| = \sqrt{T^2\omega^2+1^2}$$

Alta frecuencia: $T\omega$ *

Baja frecuencia: 1
$\omega \to 0$

$$\angle Tj\omega+1 = tg^{-1}\frac{T\omega}{1}$$

Vemos sistemas de segundo orden.

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

$s \to j\omega$ y dividimos todo por ω_n^2

$$\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2+2\xi\frac{s}{\omega_n}+1} = \frac{1}{-\underbrace{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}_{u^2}+2\xi\underbrace{\frac{\omega}{\omega_n}}_{u}j+1}$$

$$\Rightarrow G(u) = \frac{1}{1-u^2+2j\xi u}$$

$$\angle G(u) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{2\xi u}{1-u^2}\right)$$

$$|G(j\omega)| = \text{mod} = \frac{1}{\sqrt{(1-u)^2+4\xi^2u^2}}$$

nota

$$\angle\frac{(s+s_1)(s+s_2)}{s(s+s_3)(s+s_4)} =$$

$$= \angle(s+s_1) + \angle(s+s_2) - \angle s - \angle s+s_3 - \angle s-s_4$$

Buscamos si hay máximos o mínimos

Radicando: $1-2u^2+u^4+4\xi^2u^2$

$$\frac{dR}{du} = -4u+4u^3+8\xi^2u = 0$$

$$4u(-1+u^2+2\xi^2) = 0$$

$$u^2 = 1-2\xi^2$$

$$u = \pm\sqrt{1-2\xi^2}$$

$$u_r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\omega_r}{\omega_u} = \sqrt{1-2\xi^2}$$

$$M_r = \frac{1}{\sqrt{\left[1-(1-2\xi^2)\right]^2 + 4\xi^2(1-2\xi^2)}} = \frac{1}{\sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2 - 8\xi^4}} =$$

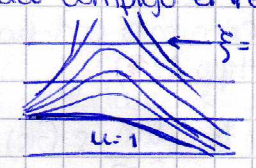
$$= \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

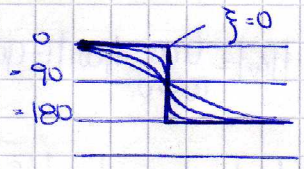
Se produce un máximo en Mr. Para valores de ξ comprendidos entre 0 y 0,707. Particularmente, cuando $\xi = 0$, la respuesta crece sin límite hasta que se rompe.

$$\underbrace{\sqrt{1-2\xi^2}}_{0 < \xi < 0.707}$$

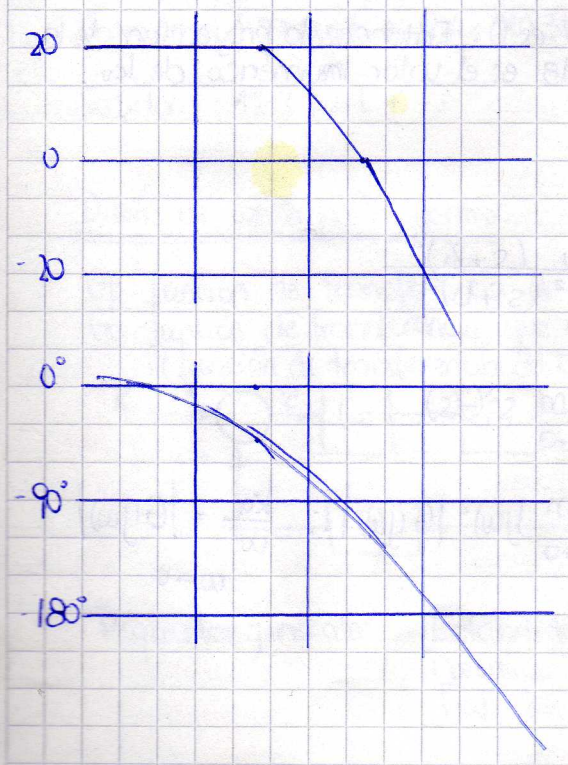
$0 < \xi < 0.707$ → si es mayor se me hace complejo el resultado de la raíz.

El gráfico que se obtiene de esto es el que nos daba GAbad

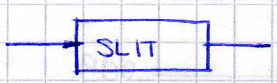




12. Junio. 2013



Suponemos el caso en que el sistema en lugar de ~~-180~~ terminar en 180° (suponiendo que P-Z=2) ~~ter~~ sigue para abajo.



$F(s) \cdot e^{-s\tau} \longrightarrow f(t-\tau)$

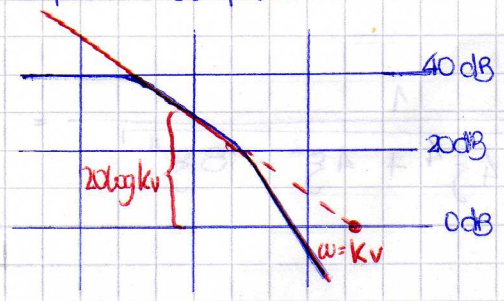
$F(j\omega) \left| e^{-j\omega\tau} \right|$

$\varphi = -\omega\tau$

$$\frac{e^{-s\tau} \cdot K}{(s+a)(s+b)}$$

La fase sigue cayendo porque depende de $\omega\tau$. Dependiendo de cuál sea el corrimiento, puede ser muy perjudicial

Los retardos de ~~espera~~ tiempo se dan cuando la acción de control y la de sensado están en diferencia de fase.



Si de entrada veo que en baja frecuencia hay una línea horizontal sé que es un sistema de tipo 0. (no tiene polos ni ceros al origen).

$$k_p = \lim_{s \to 0} G(s)$$

$$|k_p| = \lim_{\omega \to 0} |G(j\omega)|$$

Si termina en 180° se que la función de transferencia será de la forma:

$$\frac{k_p}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$$

Si la fase sigue es porque hay un corrimiento.

Si comienza con una pendiente de -20dB/dec tengo 1 polo al origen y un sistema de tipo 1 (~~s~~)

$$k_v = \lim_{s \to 0} s\, G(s)$$

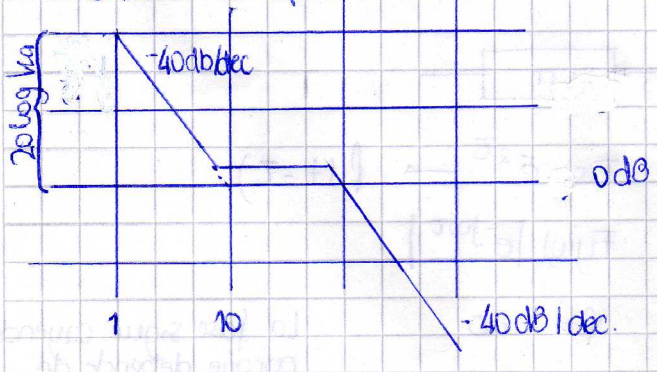
$$|k_v| = \lim_{\omega \to 0} |j\omega| |G(j\omega)|$$

$$\left|\frac{k_v}{\omega}\right| = |G(j\omega)|$$

Si $\omega = 1$, el módulo será $20 \log k_v$.

Cuando $\omega = k_v$, el módulo es 0. Entonces la proyección de la recta donde corta con 0dB es el valor numérico de k_v.

Sistema de tipo 2:

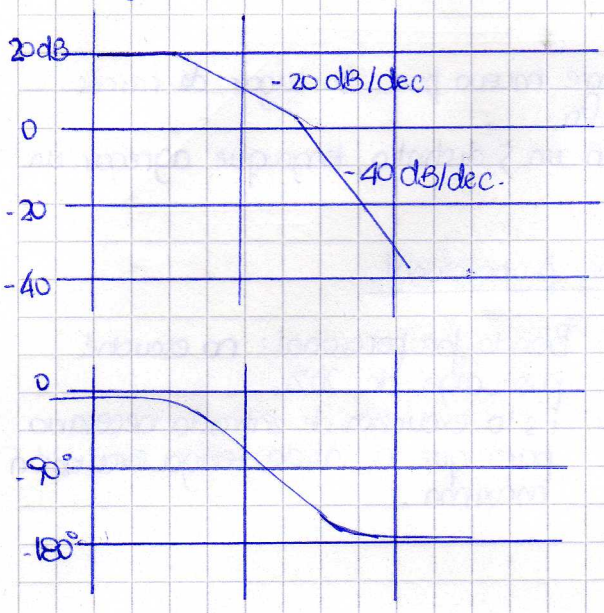


$$\frac{k_v (s+z_1)^2}{s^2 (s+b)^2}$$

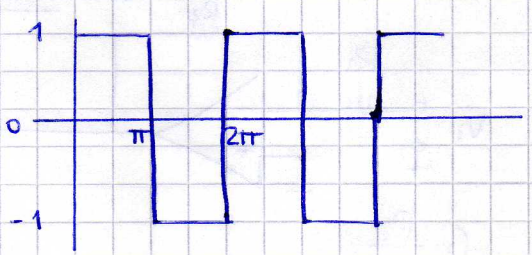
$$k_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s)$$

$$k_a = \lim_{s \to 0} |j\omega|^2 |G(j\omega)| \therefore \frac{k_a}{\omega^2} = |G(j\omega)|_{\omega \to 0}$$

Supongamos que tenemos un SLIT con la siguiente respuesta en frecuencia



¿Qué señal obtengo a la salida si pongo a la entrada una señal como la siguiente?



La señal de entrada (onda cuadrada) es una suma de señales senoidales. Es una función impar: su valor medio es nulo.

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_k \operatorname{sen}(m\omega t) \longrightarrow \frac{4}{n\pi}$$

En la señal cuadrada de entrada $\omega = 1$ $\left(f = 1/2\pi,\ \omega = 2\pi f = 1\right)$

Entrada: $1{,}27 \operatorname{sen} t + 0{,}42 \operatorname{sen} 3t + 0{,}27 \operatorname{sen} 5t$

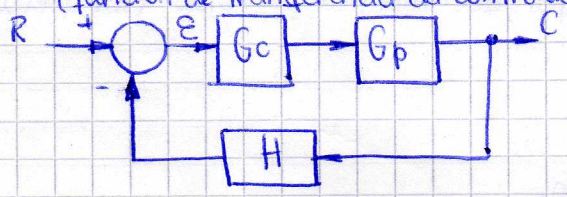
Salida: $12{,}7 \operatorname{sen} t + \dots$

31 de Julio - 201

Lauro Biolato

Diseño de los sistemas control.

Gp: función de transferencia de la planta.
Gc: función de transferencia que vamos a agregar para modificar la que tenemos. (función de transferencia del controlador)



Requisitos generales:
- Estabilidad
- Precisión
- Rapidez.

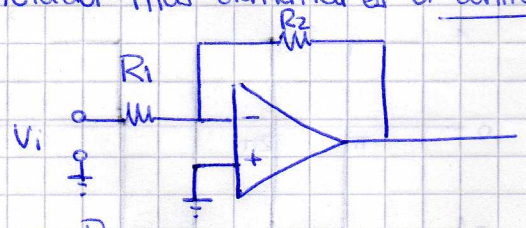
Se debe tratar de que sea robusto e independiente de la variación de los parám

Vamos a considerar no sólo sistemas de control electrónicos, sino también mecánicos, neumáticos, etc.

(DESCARGAR ARCHIVO DE AUTOGESTIÓN);

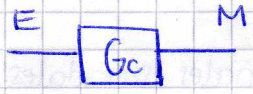
Si tengo un sistema con su lugar de raíces y me muevo por su lugar de raíces sólo tengo que variar la ganancia k de G_D
Si por ejemplo quiero agregar un punto(?) con un ζ distinto, tengo que agregar un controlador (creo que mandé fruta acá).

El controlador más elemental es el <u>controlador proporcional</u>.



$$G = -\frac{R_2}{R_1}$$

Banda proporcional: no escuché. puso algo de 20%.
Es la excursión de entrada necesaria para que la salida tenga excursión máxima.



$$G(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = k_p$$

- Controlador proporcional derivativo

$$m(t) = k_p \cdot e(t) + k_d \cdot \frac{de(t)}{dt}$$

$$M(s) = [k_p + k_d \cdot s]\, E(s)$$

$$\frac{M(s)}{E(s)} = k_p + k_d \cdot s = k_p [T_d \cdot s + 1]$$

$T_d = \frac{k_d}{k_p}$: tiempo derivativo.

Tiempo en que la acción de control derivada adelanta a la acción de control proporcional.

La acción derivativa actúa cuando hay variación de la señal, normalmente en los transitorios.
Actúa como fpa.
La recta de la ganancia proporcional tiene pendiente k_p (crece k_d en T_d)

~~Entonces~~ No usamos el derivativo solo porque amplifica el ruido (las frecuencias más altas) 20dB/dec.

- Controlador proporcional integral

El factor integral genera un polo en el origen.

$$m(t) = k_p\, e(t) + k_i \int e(t)\, dt$$

$$M(s) = \left(k_p + \frac{k_i}{s}\right) E(s) \Rightarrow \frac{M(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_i}{s}$$

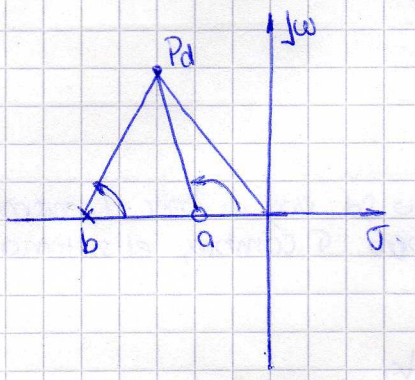
$$\frac{k_i}{k_p} = \frac{1}{T_i} \Rightarrow \frac{M(s)}{E(s)} = k_p \cdot \left(\frac{s + \frac{1}{T_i}}{s}\right)$$

No tengo que exagerar en los tiempos de integración para que no se haga muy lento. Actúa como fpb.

Antes la inversa de Ti se llamaba frecuencia de reposición. Indica cuántas veces la acción integral hace lo que hace la acción proporcional (o al revés?)

- Controlador proporcional-integral-derivativo: corrige error en estado estacionario y transitorio.

COMPENSADOR DE ADELANTO



Pd: punto de diseño. ; $G_c = k\dfrac{(s+a)}{(s+b)}$

La contribución angular de a y b en el punto de diseño será:

$$\angle G_c = \underset{0}{\angle k} + \angle s+a - \angle s+b$$

Cuando el cero está a la derecha del punto de diseño se comporta (el sistema) como un compensador de adelanto (el ángulo es mucho más grande).

$$G = k\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$$

$0 < \alpha < 1$

Con un compensador de adelanto mejoramos rapidez

Nunca compensar en adelanto más de 65° con una red pasiva.

$$G = \frac{k}{\alpha}\frac{\left[s+\frac{1}{T}\right]}{\left[s+\frac{1}{\alpha T}\right]}$$

COMPENSADOR DE ATRASO

El polo está más a la derecha. Mejoramos precisión. Se usa muy cerca del origen. Se trata de que el ángulo (diferencia entre los de polos y ceros) no sea mayor a 5°

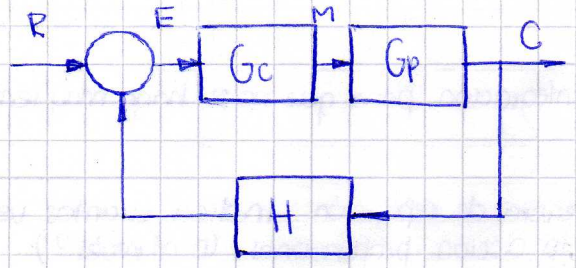
COMPENSADOR DE ATRASO-ADELANTO

...

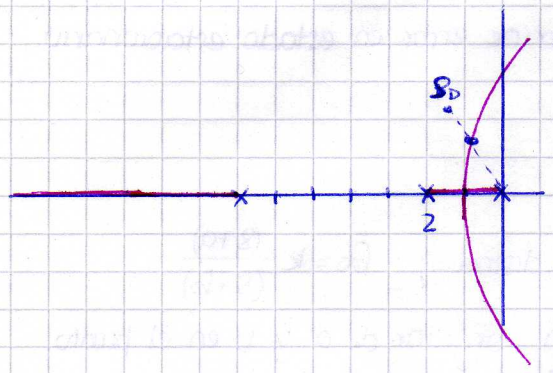
COMPENSADOR DE CANCELACIÓN.

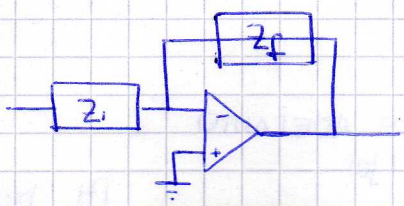
Se hacen sólo en el semiplano izquierdo. Se cancelan polos con ceros.

07.08.2013

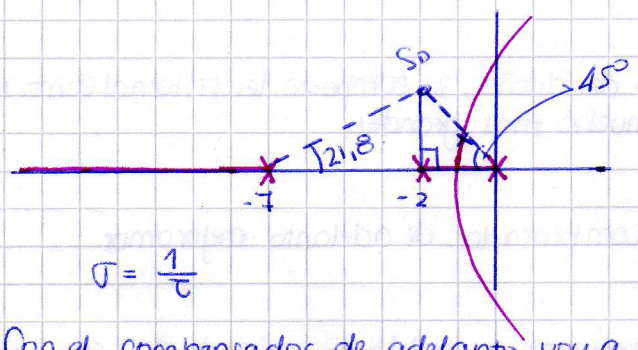


Siempre se intenta que los compensadores no excedan los 65°.





Si quiero que mi polo se ubique en el punto de diseño Sd voy a tener el mismo ξ que en el que está marcado sobre el lugar de raíces pero σ cambia, el sistema en este caso va a ser más rápido.



$$G_p = \frac{k_1}{s(s+2)(s+7)}$$

$$\angle G_p = -135 - 90 - 21{,}8 = -246{,}8$$

$$-246{,}8 + 180 = -66{,}8$$

comp. ad: $66{,}8° \approx 67$ (lo usamos para el ejemplo aunque sea > a 65°).

Con el compensador de adelanto voy a tener un sistema más rápido.

Si $k = 10{,}7$ vamos a estar en el punto sobre el lugar de raíces.

DESCARGAR LOS APUNTES DE AUTOGESTIÓN.

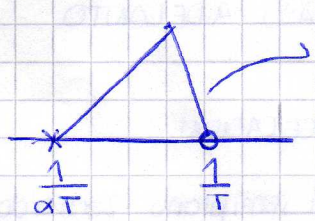
Para estar en Sd $\omega_n = \sqrt{8}$.

Usamos el método de la bisectriz.

En la figura 3: los radiales son los valores constantes de ξ. Los círculos son ω_n. Para igual σ igual tiempo de establecimiento.

$$G_c = k_1 \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = \frac{k_1}{\alpha}\left[\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}}\right]$$

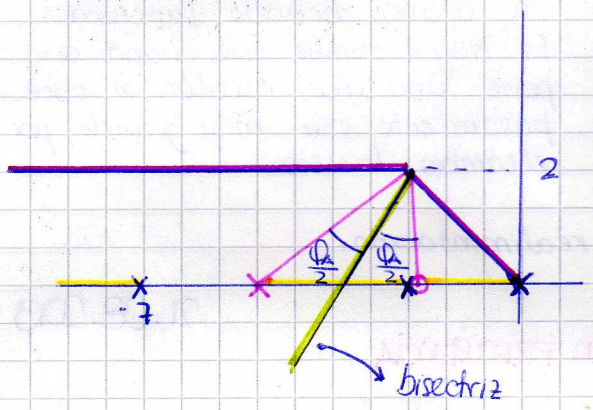
$\alpha < 1$



Compensador de adelanto. (cero a la derecha, polo a la izquierda.)

Metodo de la bisectriz: en el diagrama del lugar de raíces se traza una recta paralela al eje de abscisas que pase por el punto de diseño, y unimos sd con el origen. Tomamos la bisectriz del ángulo formado por las dos rectas. A ambos lados de la bisectriz trazamos rectas a la mitad del ángulo del compensador de adelanto. Entonces sabemos que cumplimos con la condición de angulo en ese punto. En los cortes con el eje de abscisas marcamos el cero (a la derecha) y el polo (a la izquierda). Hay infinidad de posibilidades, pero esto nos da una ganancia k adecuada.

$$\frac{\varphi_A}{2} = \frac{67}{2} = 33{,}5^\circ$$



$$k = \frac{\Pi(s+P_i)}{\Pi(s+Z_i)}$$

(No está a escala, el gráfico da cualquier cosa, es sólo para guiarme)

(Esto está hecho a ojo)
Los valores reales son: cero: -1,65
polo: -5,08

$$\frac{\sqrt{3{,}08^2+4}\cdot\sqrt{8}\cdot 2\cdot\sqrt{5{,}08^2+4}}{\sqrt{0{,}35^2+4}} = 55{,}86$$

Ver en el apunte, debría dar 55,3

El nuevo lugar de raíces queda marcado en amarillo.
Tenemos 4-1 = 3 asíntotas.

Se podría hacer cancelando ceros con polos y viceversa pero <u>sólo</u> en el semiplano izquierdo: cancelo el polo que está en -2 con un cero y tengo 90° de adelanto. Tengo que atrazar 23° para que me queden los 67 de la consigna. Pongo un polo a:

$$tg\,\alpha = \frac{2}{x} \Rightarrow x = \frac{2}{tg\,23} = 4{,}71$$

El polo va a -4,71.
La ganancia ahora queda a 77,94 $\left(= \sqrt{8}\sqrt{4+4{,}71^2}\sqrt{29} = 77{,}94\right)$.
También me cambia el lugar de raíces.

Mejoramos la respuesta transitoria y la rapidez de respuesta.

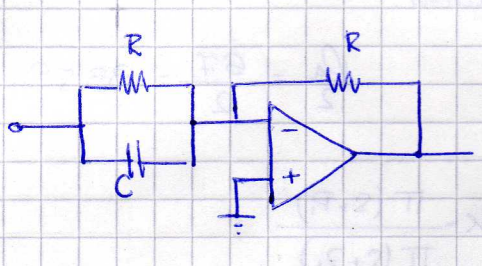
Otra forma es usar un compensador proporcional derivativo.

$$G_c = k_p \cdot [T_d \cdot s + 1] = k_p T_d \left[s + \frac{1}{T_d}\right]$$

Me provee un cero que me tiene que dar un ángulo de 67°.

$$x = \frac{2}{tg\,67} = 0{,}84$$

En 2,84 (estoy en abcisa = 2), pongo el cero.



Cuando hay una señal de error la acción derivada funciona. Es muy probable que cuando se pone una señal escalón el sobrepasamiento sea muy grande, por el cambio brusco.

También podemos compensar utilizando la realimentación.

21.08.2013

ANÁLISIS DE RESPUESTA EN FRECUENCIA.

$$k_v = \lim_{s \to 0} sG(s)$$

(DESCARGAR DIAPOSITIVAS).

Cuando $s = j\omega$ estamos en análisis cuando pasaron los transitorios.

$$k_v = \lim_{\omega \to 0} \omega G(j\omega)$$

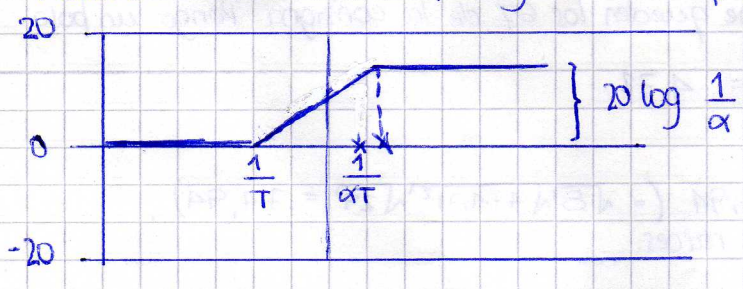
Cuando el k_v es numericamente igual a ω estamos en 0dB.

Para los sistemas de segundo orden el margen de fase está relacionado con ξ. Para $0{,}4 < \xi < 0{,}7$ el margen de fase es 100ξ.

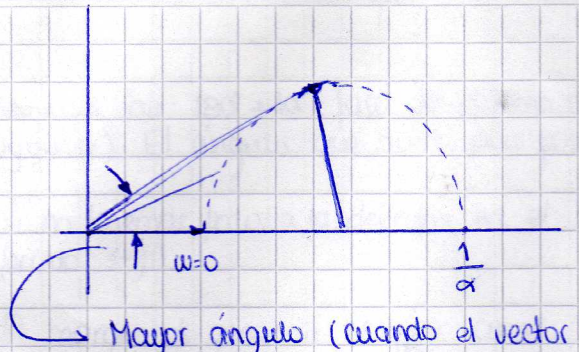
La estabilidad se analiza con margen de fase y de ganancia.

<u>En el compensador de adelanto:</u>

Módulo: cuando $\omega \to 0$, la ganancia empieza en 0 dB.



El diagrama de Nyquist para un sistema como este es:



→ Mayor ángulo (cuando el vector es tangente al ~~graft~~ diagrama).

$$R = \frac{1-\alpha}{2\alpha}$$

$$\operatorname{sen}\alpha_{máx} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad ; \quad \alpha = \frac{1-\operatorname{sen}\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha}$$

Ejemplo (de la diapositiva) → Pide ~~el error~~ un error de estado estacionario específico para una ~~[illegible]~~ entrada rampa. → Segunda Parte

- Dibujamos el Bode.
- Tenemos que subir la recta: nos va a quedar igual pero desplazada 20dB.

- En las diapositivas está resuelto con detalle.

Después de los -180° es muy complicado compensar con un compensador de adelanto.

$$\varphi_{máx} = MG_d - \underbrace{MF_a}_{} + \delta \longrightarrow 10° \text{ ó } 15° \text{ por el mismo diseño}$$

↳ Hay que considerar el margen actual.

La curva de fase se modifica sustancialmente.

<u>Compensación en atraso</u>: Hay veces que la compensación lalala.

El β debe valer entre 1 y 15.
Para $\omega \to 0$ el módulo es 0dB, empieza a caer cuando se encuentra con el polo y en el cero vuelve a tener pendiente cero, quedando su valor en $20\log\frac{1}{\beta}$ cuando $\omega \to 0$

La fase en este caso no nos interesa mucho. Vamos a usar la atenuación a altas frecuencias. Esto no nos cambia el error de estado estacionario a bajas frecuencias.

Ejemplo. $l_{ss} < 0{,}1$, margen de fase 40°. → Veo en qué punto el margen de fase da 40° y ahí veo cuánto tengo que mover la curva de módulo para que cruce por cero en ese punto.

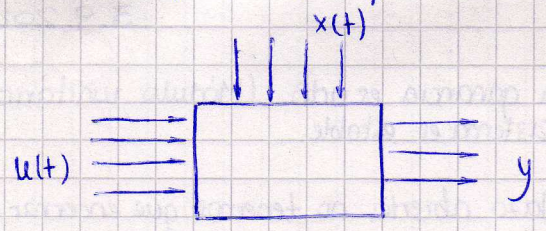
El sistema se hace más lento, el ancho de banda disminuye.

3.9.2013

Descargar diapositivas.

04.09.2013

Variables de estado: el conjunto mínimo con cuyo conocimiento para $t = t_0$ y sus entradas para $t \geq t_0$ permiten caracterizar el sistema para $t \geq t_0$.



$u(t)$ = entrada
$y(t)$ = salida

$x(t)$: vector de estado.

$$\left.\begin{array}{ll} x(t) - x(t_0) & \\ u(t) & t \geq t_0 \end{array}\right\} x(t) \quad t \geq t_0$$

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t), t, u(t)\right)$$

$$y(t) = g\left(x(t), t, u(t)\right)$$

Para sistemas lineales:

$$\dot{x}(t) = A(t)\, x(t) + B(t)\, u(t)$$

$$y(t) = C(t) \cdot x(t) + D(t)\, u(t)$$

A, B, C, D son matrices.

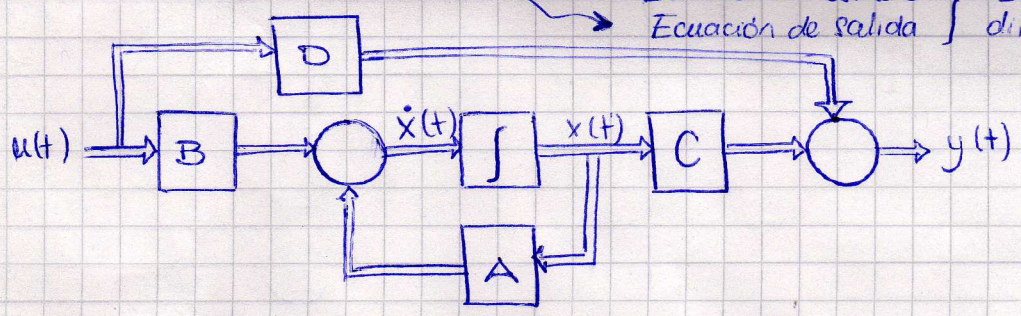
Nosotros trabajamos para sistemas lineales invariantes en el tiempo: SLIT.
Entonces las ecuaciones quedan

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B\, u(t)$$

$$y(t) = C\, x(t) + D\, u(t)$$

A, B, C y D son matrices pero ahora de coeficientes constantes.

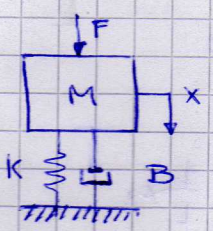
Ecuación de estado
Ecuación de salida
} Ecuaciones dinámicas



$x(t)$: vector de estado $[n \times 1]$
A : matriz de coeficientes $[n \times n]$
$\dot{x}(t)$: vector de derivadas $[n \times 1]$
$u(t)$: vector de control $[r \times 1]$
B : matriz de coeficientes $[n \times r]$
C : matriz de coeficientes $[p \times n]$
D : matriz de coeficientes $[n \times p]$

Las variables de estado nos permiten analizar sistemas con varias entradas y varias salidas.

Ejemplo:



$$F = M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx$$

Tenemos una ecuación diferencial de segundo orden: dos elementos que almacenan energía (masa y resorte).

$$E_m = \frac{1}{2} M \cdot v^2 = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} k x^2$$

Variables de estado física: las variables que entran en la ecuación de energía, de los elementos almacenadores de energía.

$x_1 = x$

$x_2 = \dot{x}$

La ecuación expresada con variables de estado queda:

$$F = M\dot{x}_2 + B x_2 + K x_1$$

La ecuación de estado va a tener la forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \overset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \overset{B}{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F}{M} \end{bmatrix}} u$$

Ecuación de estado.

El $\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2$ lo despejamos

D es cero porque no hay una entrada que se manifieste directamente a la salida.

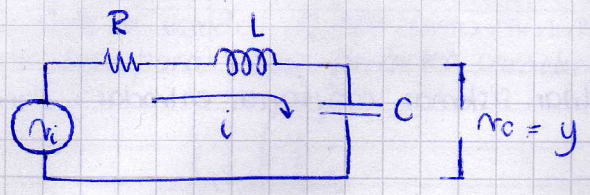
$$y = \overset{C}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \overset{D}{0} \cdot u$$

Ecuación de salida.

Cuando el orden del numerador no es menor que el del denominador, sino igual, aparece la matriz D. En general es cero.

Las variables de estado se toman a la salida de los integradores, cuando hay un integrador hay una variable de estado.

Otro ejemplo:



$$v_i = L\frac{di}{dt} + R.i + \underbrace{\frac{1}{C}\int i\,dt}_{x_2} \rightarrow u = L.\dot{x}_1 + Rx_1 + x_2$$

$$E_L = \frac{1}{2}Li^2 \qquad E_C = \frac{1}{2}C\,v_c^2 \qquad \dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1$$

$$\dot{x}_1 = \frac{u}{L} - \frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2$$

$$i = x_1 \qquad v_c = x_2$$

$$v_i \rightarrow u.$$

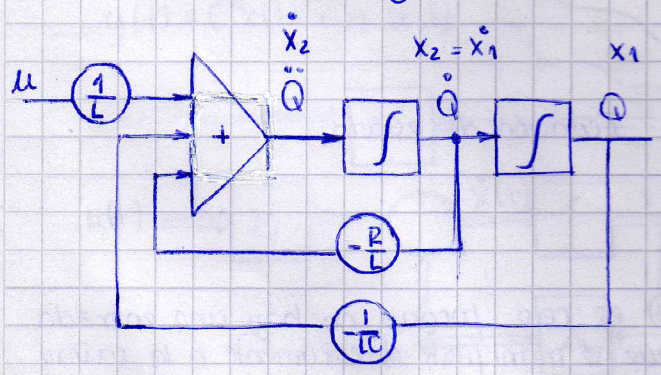
(A)
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{R}{L} & -\frac{1}{L}\\ \frac{1}{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{L}\\ 0\end{bmatrix}u$$

Esto es con variables de estado físicas.

$$y = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Si pusiera la ecuación en función de la carga podría hacer:

$$v_i = L.\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C}$$



Los integradores son los elementos de memoria del sistema. (En los sist. discretos son los retardos).

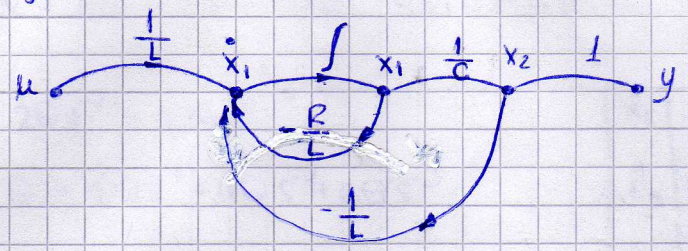
(B)
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{L}\end{bmatrix}u$$

Ec. estado

$$y = \begin{bmatrix}\frac{1}{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + 0.u.$$

Ec. Salida.

Siguiendo la ecuación de estado (A):



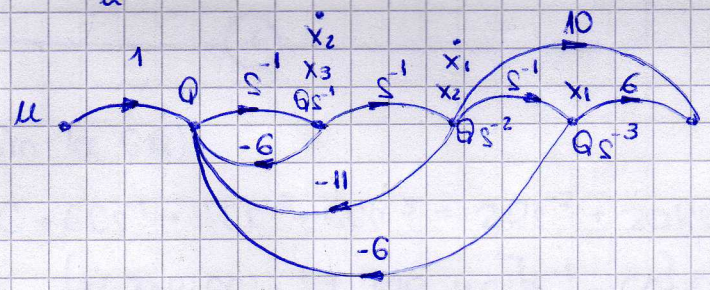
Suponemos una función de transferencia de la forma:

$$\frac{C}{R} = \frac{\overset{\triangle}{10}s + \overset{*}{6}}{s^3 + \underset{\square}{6}s^2 + \underset{\bullet}{11}s + \underset{*}{6}} = \frac{10s^{-2} + 6s^{-3}}{1 + 6s^{-1} + 11s^{-2} + 6s^{-3}} \cdot \frac{Q(s)}{Q(s)}$$

$$C = 10Qs^{-2} + 6Qs^{-3}$$

$$R = Q + 6Qs^{-1} + 11Qs^{-2} + 6Qs^{-3}$$

$$Q = \underbrace{R}_{u} - 6Qs^{-1} - 11Qs^{-2} - 6Qs^{-3}$$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \underset{\square}{-6} & \underset{\bullet}{-11} & \underset{*}{-6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \underset{*}{6} & \underset{\triangle}{10} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 0 \cdot u$$

Variables de estado de fase o Forma canónica controlable.

11.09.2013

$\dot{x} = Ax + Bu$
$y = Cx + Du$

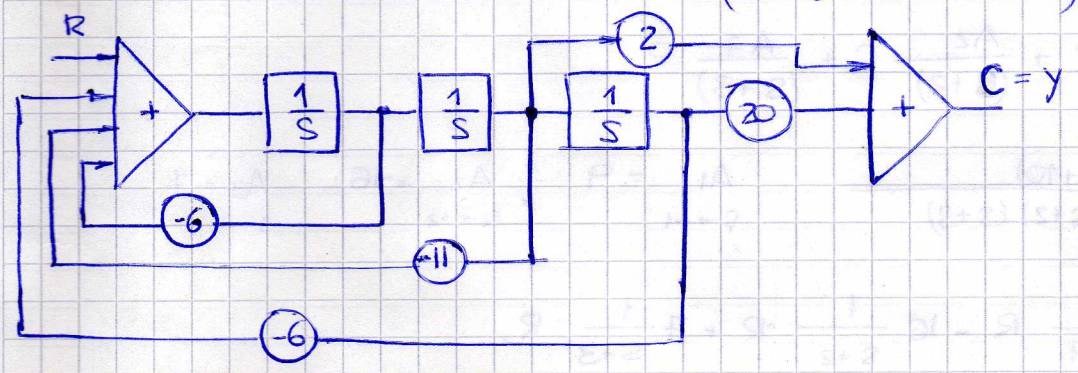
$$\frac{C}{R} = \frac{2s+20}{s^3+6s^2+11s+6} = \frac{2s^{-2}+20s^{-3}}{1+6s^{-1}+11s^{-2}+6s^{-3}} \cdot \frac{Q(s)}{Q(s)}.$$

$C = 2Qs^{-2} + 20Qs^{-3}$

$R = Q + 6Qs^{-1} + 11Qs^{-2} + 6Qs^{-3}.$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

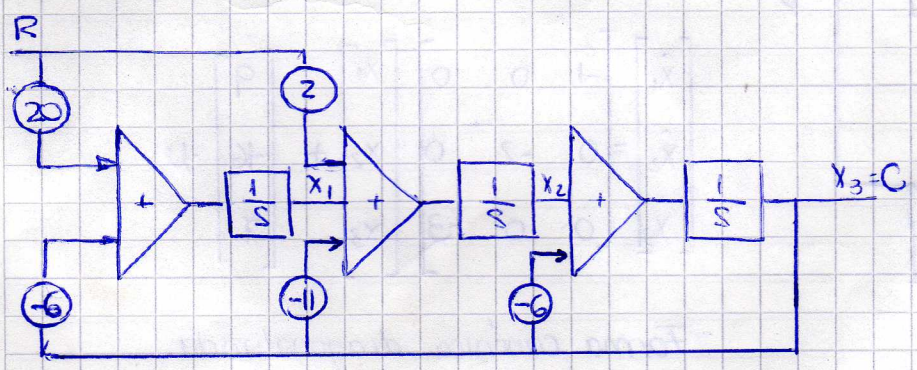
Forma canónica controlable
Forma variable de fase.
(Matriz de Frobenius)



Sin los Q(s):

$C + 6Cs^{-1} + 11Cs^{-2} + 6Cs^{-3} = 2Rs^{-2} + 20Rs^{-3}$

$$C = \Big\{\underbrace{\Big[\underbrace{\underbrace{(20R-6C)}_{x_1}s^{-1} + (2R-11C)}_{x_2}\Big]s^{-1} - 6C}_{x_3}\Big\}s^{-1}$$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 \\ 2 \\ \end{bmatrix} u$$

Forma canónica observable

(Si observamos, vemos que las matrices -ésta y la anterior- son transpuestas).

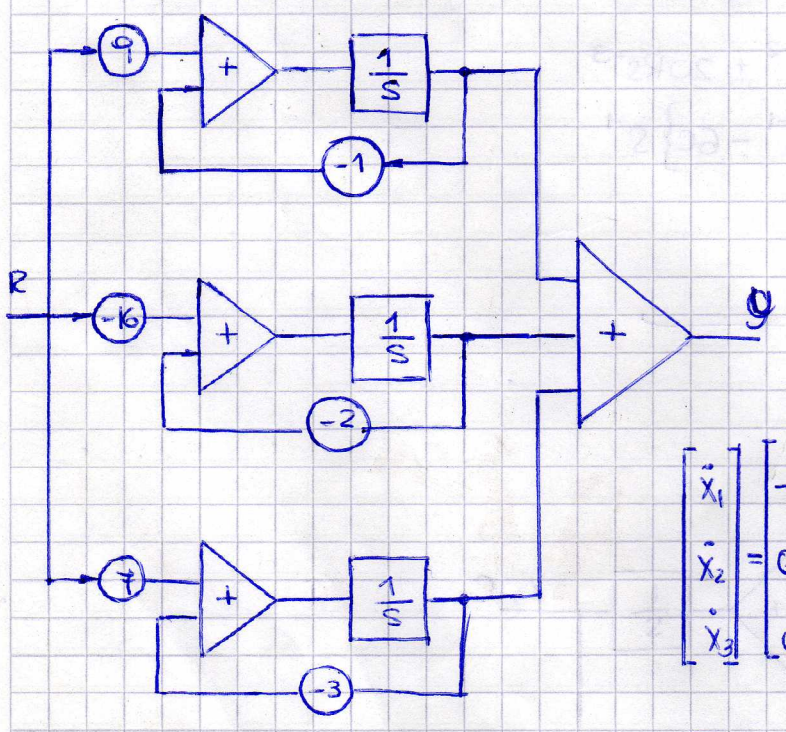
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Otro método es por expansión en fracciones simples: tiene la ventaja de que da como resultado un sistema en paralelo.

$$C = \frac{A_1}{(S+1)} R + \frac{A_2}{(S+2)} R + \frac{A_3}{(S+3)} R$$

$$\frac{C}{R} = \frac{2(S+10)}{(S+1)(S+2)(S+3)} \qquad \underset{S \to -1}{A_1} = 9 \; ; \; \underset{S \to -2}{A_2} = -16 \qquad \underset{S \to -3}{A_3} = 7$$

$$C = 9 \cdot \frac{1}{S+1} \cdot R - 16 \frac{1}{S+2} \cdot R + 7 \frac{1}{S+3} \cdot R.$$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ -16 \\ 7 \end{bmatrix} u.$$

Forma canónica diagonalizada.

Si $u=0$

$\dot{x} = Ax = \lambda x$

$\lambda x - Ax = 0$

$|\lambda I - A||x| = 0$

Los autovalores son los valores de λ que hacen $|\lambda I - A| = 0$.

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda+6 \end{vmatrix}$$

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 6 + 11\lambda = 0$$

$$\underbrace{\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0}_{\text{los autovalores son } -1;\ -2;\ -3.}$$

Los autovalores se corresponden con los polos del sistema.
Vemos si varian ante una transformación lineal (cambio de referencia, forma de mec
Quiero hacer una transformación lineal de x a z → uso una matriz P.
La matriz P debe ser no singular, es decir $\det(P) \neq 0$, para que exista P^{-1} (la inversa de P).

$$x = P.z$$

$$\dot{x} = P\dot{z}$$

$$P\dot{z} = APz + Bu$$

$$y = CPz + Du$$

$$\dot{z} = \overbrace{P^{-1}.A.P}^{A}.z + P^{-1}.B.u$$

$$y = CPz + Du$$

Autovalores: $|\lambda I - P^{-1}AP| = 0$ $\qquad I = P.P^{-1}$

$$\underbrace{|P^{-1}|}_{\neq 0}\underbrace{|\lambda I - A|}_{0}\underbrace{|P|}_{\neq 0}$$

Invarianza de los autovalores ~~de~~ en una transformación lineal.

Traza de una matriz: suma de los elementos de la diagonal principal.

La suma de los autovalores es igual a la traza de la matriz (cualquiera de las matrices).

Los autovalores representan características propias del funcionamiento de un sistema.

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} \rightarrow$$

Matriz de Vandermonde (Van Der Monde)

Ésta es la matriz que diagonaliza

~~Encontramos~~

En nuestro caso:

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

Encontramos P^{-1}. Para eso primero buscamos la matriz de cofactores.

$$M_C = \begin{vmatrix} -6 & 6 & -2 \\ -5 & 8 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Cofactor $a_{11} = a_{22} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23}$

(Tomaba un pivote, eliminaba fila y columna y sacaba el determinante que quedaba).

~~Dividimos por el determinante~~

Sacamos la transpuesta y dividimos por el determinante.

$$T_{M_C} = \begin{vmatrix} -6 & -5 & -1 \\ 6 & 8 & 2 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

$Det(P) = -2$

$$P^{-1} = \frac{T_{M_C}}{Det(P)} \longrightarrow \begin{vmatrix} 3 & -2{,}5 & 0{,}5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1{,}5 & 0{,}5 \end{vmatrix}$$

Comprobar $P \cdot P^{-1} = I$ y $|P^{-1} A \cdot P| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

Asociado a una matriz A existe una serie de autovalores, y asociado a cada autovalor existe un autovector.

$$P = P_1, P_2, P_3 = \begin{vmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ P_{31} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P_{12} \\ P_{22} \\ P_{32} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P_{13} \\ P_{23} \\ P_{33} \end{vmatrix}$$

$$|\lambda_i I - A| P_i = 0$$

Cuando los autovalores son reales y distintos.

$$\left\{ \begin{vmatrix} \lambda_i & & \\ & \lambda_i & \\ & & \lambda_i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{vmatrix} \right\} \begin{vmatrix} P_{1i} \\ P_{2i} \\ P_{3i} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_i & -1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & -1 \\ 6 & 11 & \lambda_i+6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P_{1i} \\ P_{2i} \\ P_{3i} \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_i P_{1i} - P_{2i} + 0 \cdot P_{3i} = 0$$

$$0 P_{1i} + \lambda_i P_{2i} - P_{3i} = 0$$

$$6 P_{1i} + 11 P_{2i} + (\lambda_i + 6) P_{3i} = 0.$$

Asignamos valores (los de los autovalores).

Para $\lambda_i = -1$

$P_{11} = 1$
$P_{21} = -1$
$P_{31} = 1$

Para $\lambda_i = -2$

$P_{12} = 1$
$P_{22} = -2$
$P_{32} = 4$

Para $\lambda_i = -3$

$P_{13} = 1$
$P_{23} = -3$
$P_{33} = 9$

$$P = \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \\ \end{array} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{vmatrix}$$

↳ Autovectores.

(Da igual a la de Vandermonde, pero no tiene por qué ser igual siempre)

Esta matriz me permite transformar

Si los autovalores no son reales y distintos, sino que se repiten:
Supongamos raíces reales iguales:

$$\frac{10s+2}{(s+1)^3(s+2)}$$

Vamos a tener 4 autovectores P_1 P_2 P_3 P_4

$\lambda_1 = -1$ $\qquad$ $\lambda_4 = -2$

$$|\lambda_1 I - A| P_1 = 0$$

$$|\lambda_1 I - A| P_2 = -P_1$$

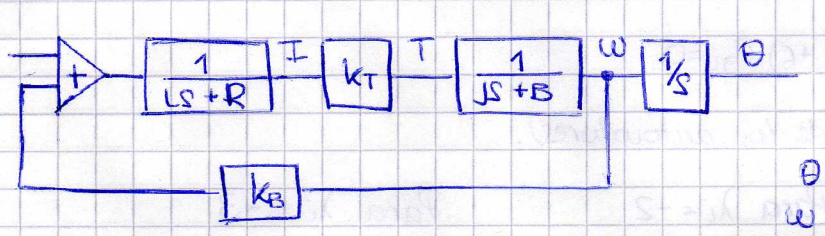
$$|\lambda_1 I - A| P_3 = -P_2$$

$$|\lambda_4 I - A| P_4 = 0.$$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{array}\right] \qquad A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

18.09.2013
(copiada de Chinota).

Representación motor.



$\theta = x_1$
$\omega = x_2$
$I = x_3$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -B/J & k_T/J \\ 0 & -k_b/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u.$$

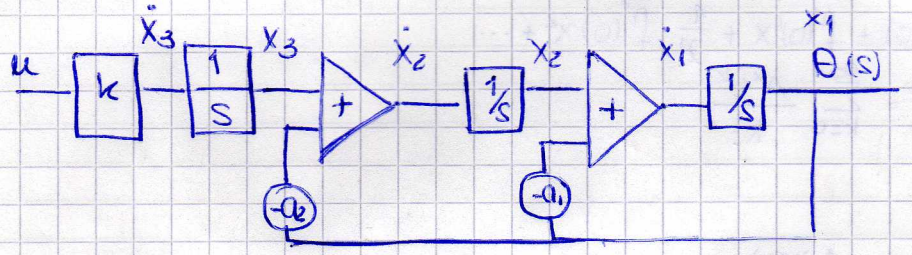
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\Theta}{u} = \frac{k_T}{JLs^2 + (LB + RJ)s + RB + k_b k_T} \cdot \frac{1}{s} = \frac{k_T/Ls}{s^2 + \left(\frac{B}{J} + \frac{R}{L}\right)s + \frac{RB + k_b k_T}{JL}} \cdot \frac{1}{s}$$

$$\frac{\Theta}{u} = \frac{k}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s} = \frac{k s^{-3}}{1 + a_1 s^{-1} + a_2 s^{-2}}$$

$$\Theta(s) = k\,U s^{-3} - a_2 s^{-2} - a_1 s^{-1}$$

$$\Theta(s) = \left[\left[k u s^{-1} - a_2 \Theta\right] s^{-1} - a_1 \Theta\right] s^{-1}$$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix} u.$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Función de Transferencia

De las ecuaciones de estado llegar a la función de transferencia por medio de Laptace.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

$$sX(s) - X(0) = AX(s) + Bu(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + Du(s)$$

$$sX(s) - AX(s) = Bu(s)$$

$$(sI - A)X(s) = Bu(s)$$

Despejo $X(s)$ y agrego la matriz I para poder restar A.

$$X(s) = (sI - A)^{-1} B u(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\left[C(sI - A)^{-1} B + D\right]}_{H(s)} u(s)$$

MATRIZ DE TRANSICIÓN DE ESTADOS.

$\dot{x} = Ax + Bu$ ecuación de estado.

Varias posibilidades de soluciones

$\dot{x} = Ax$ $\quad u = 0$ sin excitación.

$\dot{x} = ax$ $\quad x(t) = e^{at}x(0) \longrightarrow \dot{x}(t) = \underbrace{a e^{at} x(0)}_{x(t)}$

escalar

$\dot{x}(t) = Ax(t)$ $\quad x(t) = e^{At}x(0) \longrightarrow x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$ Condiciones iniciales.

$\dot{x}(t) = Ae^{At}x(0)$

$e^{At} = \phi(t) \longrightarrow$ Matriz de transición de estados.

Por Taylor... $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \dots$

$$\phi(t) = e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

Por Laplace... $\dot{x} = Ax$

$sX(s) - X(0) = AX(s)$

$sX(s) - AX(s) = X(0)$

$(sI - A)X(s) = X(0)$

$X(s) = (sI - A)^{-1}X(0) = \phi(s)X(0)$

$$x(t) = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]}_{e^{At} = \phi(t)} x(0)$$

Solucionamos cuando el sistema no está excitado.

$\dot{x} = Ax + Bu$

$sX(s) - X(0) = AX(s) + BU(s) \Rightarrow (sI - A)X(s) = X_0 + BU(s)$

$X(s) = (sI - A)^{-1}X(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$

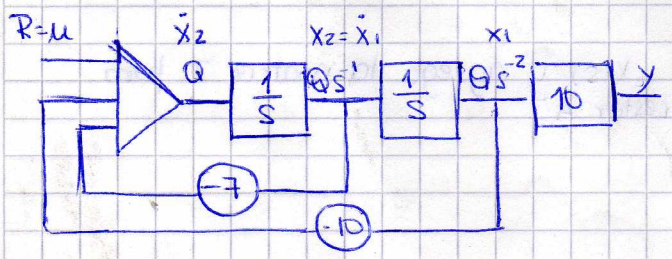
El sistema es causal.

$X(s) = \phi(s)X(0) + \phi(s)BU(s)$

$$X(t) = \phi(t)x(0) + \int_0^t \phi(t-\tau)Bu(\tau)\,d\tau$$

Ejemplo

$$\frac{C}{R} = \frac{10}{s^2+7s+10} = \frac{10}{(s+2)(s+5)} = \frac{10s^{-2}}{1+7s^{-1}+10s^{-2}} \cdot \frac{Q(s)}{Q(s)}$$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

$$y = \begin{bmatrix} 10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$sI - A = \begin{vmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 10 & s+7 \end{vmatrix}$$

cofactores $\begin{bmatrix} s+7 & -10 \\ 1 & s \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{adjunta}} \dfrac{\begin{bmatrix} s+10 & 1 \\ -10 & s \end{bmatrix}}{(s+2)(s+5)} \Rightarrow \phi(s) = \begin{vmatrix} \dfrac{s+10}{(s+2)(s+5)} & \dfrac{1}{(s+2)(s+5)} \\ \dfrac{-10}{(s+2)(s+5)} & \dfrac{s}{(s+2)(s+5)} \end{vmatrix}$

$$\phi_{11}(s) = \frac{A_1}{s+2} + \frac{A_2}{s+5} = \frac{8/3}{(s+2)} - \frac{5/3}{(s+5)}$$

$$\phi_{12}(s) = \frac{A_3}{(s+2)} + \frac{A_4}{s+5} = \frac{1/3}{(s+2)} - \frac{1/3}{(s+5)}$$

$$\phi_{21}(s) = \frac{A_5}{s+2} + \frac{A_6}{s+5} = \frac{-10/3}{s+2} + \frac{10/3}{s+5}$$

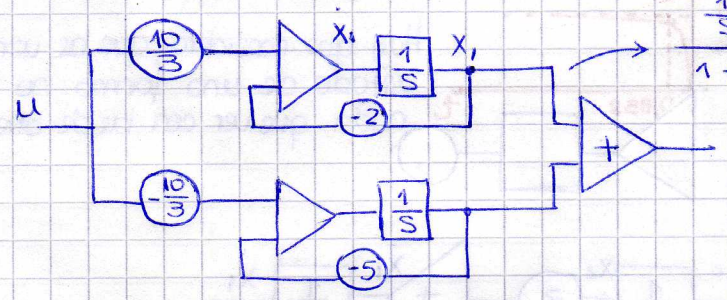
$$\phi_{22}(s) = \frac{A_7}{s+2} + \frac{A_8}{s+5} = \frac{-2/3}{s+2} + \frac{5/3}{s+5}$$

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} \frac{8}{3}e^{-2t} - \frac{5}{3}e^{-5t} & \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-5t} \\ -\frac{10}{3}e^{-2t} + \frac{10}{3}e^{-5t} & -\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{5}{3}e^{-5t} \end{bmatrix}$$

como después $x(t) = \phi(t)\,x(0)$ (queda muy largo) (?)

por ello diagonalizamos (fracciones simples).

$$\frac{C}{R} = \frac{A_1}{s+2} + \frac{A_2}{s+5} = \frac{10/3}{s+2} - \frac{10/3}{s+5} \Rightarrow C = \frac{10}{3}\cdot\frac{1}{(s+2)}R - \frac{10}{3}\cdot\frac{1}{(s+5)}R$$



$$\frac{\frac{1}{s}}{1 + 2/s} = \frac{1}{s+2}$$

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10/3 \\ -10/3 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \quad (sI - A) = \begin{vmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+5 \end{vmatrix}$$

cofactores $\dfrac{\begin{vmatrix} s+5 & 0 \\ 0 & s+2 \end{vmatrix}}{(s+2)(s+5)} \Rightarrow \begin{vmatrix} \dfrac{s+5}{(s+2)(s+5)} & 0 \\ 0 & \dfrac{s+2}{(s+2)(s+5)} \end{vmatrix} = \phi(s)$.

$$\phi(t) = \begin{vmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{vmatrix}$$

Nos da los modos de oscilación.

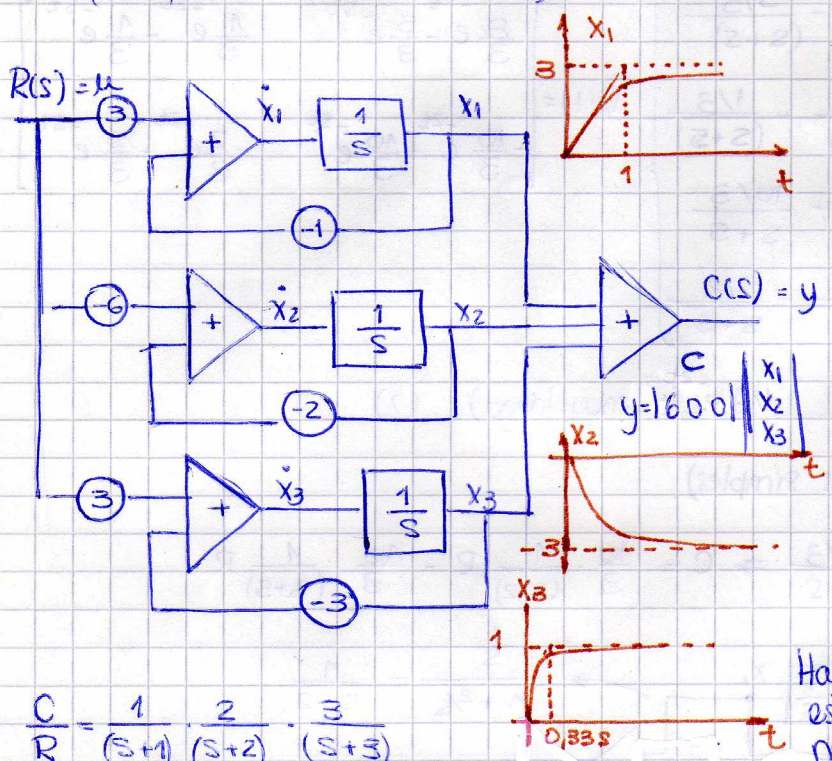
25.09.2013

$$\frac{C}{R} = \frac{6}{s^3+6s^2+11s+6} = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)} \Rightarrow C(s) = \frac{A_1}{s+1}R(s) + \frac{A_2}{s+2}R(s) + \frac{A_3}{s+3}R(s)$$

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

La traza de la matriz es igual a la suma de los autovalores.

$$C(s) = \frac{3}{(s+1)}R(s) + \frac{-6}{(s+2)}R(s) + \frac{3}{(s+3)}R(s)$$



matriz A — matriz B

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{vmatrix} u$$

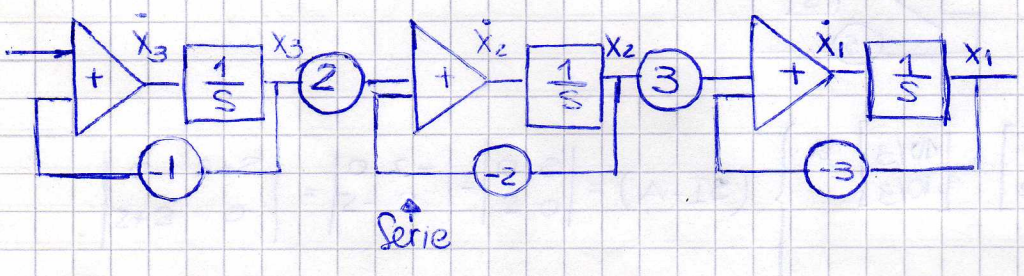
$$y = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{matriz } C} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} u$$

Forma canónica controlable.

$$\frac{C}{R} = \frac{1}{(s+1)} \cdot \frac{2}{(s+2)} \cdot \frac{3}{(s+3)}$$

Hay que considerar que las variables de estado de una forma no tienen nada que ver con las de otra!



$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} u \qquad y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$$

Forma canónica diagonalizada:

$$\begin{vmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s+2 & 0 \\ 0 & 0 & s+3 \end{vmatrix}$$

Saco la matriz de cofactores:

$$\begin{vmatrix} (s+2)(s+3) & 0 & 0 \\ 0 & (s+1)(s+3) & 0 \\ 0 & 0 & (s+1)(s+2) \end{vmatrix}$$

Saco la transpuesta (que como es una matriz diagonal es igual).

Divido por el determinante y obtengo la inversa.

$$\text{Det} = (s+1)(s+2)(s+3).$$

$$(SI-A)^{-1} = \phi(s) = \begin{vmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+3} \end{vmatrix}$$

$$\phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\}$$

$$\phi(t) = \begin{vmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{vmatrix}$$

Tenemos la $\phi(t)$. Queremos encontrar la respuesta del sistema ante un escalón unitario con condiciones iniciales 0.

Para un sistema lineal invariante en el tiempo y causal encontrábamos los estados:

$$x(t) = \underbrace{\phi(t)\,x(0)}_{\text{sol. de homogénea}} + \underbrace{\int_0^t \phi(t-\tau)\cdot B.\,u(\tau)\,d\tau}_{\text{solución particular.}}$$

CI = 0, entonces

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \int_0^t \begin{vmatrix} e^{-(t-\tau)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2(t-\tau)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3(t-\tau)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{vmatrix} u(\tau)\,d\tau$$

escalón (1)

Ver gráficos de las variables en el gráfico de los tres sistemas en paralelo (página anterior).

$$x_1(t) = 3e^{-t}\int_0^t e^{\tau}d\tau = 3e^{-t}\left[e^{\tau}\right]_0^t = 3-3e^{-t}$$

$$x_2(t) = -6e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}d\tau = -6e^{-2t}\left[\frac{e^{2\tau}}{2}\right]_0^t = -3+3e^{-2t}$$

$$x_3(t) = 3e^{-3t}\int_0^t e^{3\tau}d\tau = 3e^{-3t}\left[\frac{e^{3\tau}}{3}\right]_0^t = 1-e^{-3t}$$

$$\Rightarrow 1-3e^{-t}+3e^{-2t}-e^{-3t}$$

En matlab...

```
A = [-1 0 0; 0 -2 0; 0 0 -3];
B = [3 ; -6 ; 3];
C = [1 1 1];
D = 0
```

SIST1 = SS (A,B,C,D);

STEP (SIST1) → sale la respuesta al escalón

IMPULSE (SIST1) → sale la respuesta al impulso.

La rampa hay que generarla:

INT = TF([0 1], [1 0]) → $\frac{1}{s}$

STEP (INT, INT * SIST1, 10) → respuesta a la rampa.

→ seteamos un tiempo.

CONTROLABILIDAD DE ESTADO

Un estado es controlable si con un vector de control puedo modificarlo en un tiempo finito.
Un sistema es totalmente controlable si todos sus estados son controlables.

Matriz de controlabilidad

Rango: cantidad de filas linealmente independiente.

$$CONT = \left| B \quad AB \quad A^2B \cdots A^{n-1}B \right|_{n\times m}$$

Si el rango de la matriz es n, ~~todo~~ el sistema es totalmente controlable
El rango de la matriz me dice cuántos estados son controlables.

OBSERVABILIDAD DE ESTADO

Un estado es observable si desde la salida se puede observar el cambio del estado en un tiempo finito.

$$OBS = |C^T \;.\; A^TC^T \;.\; A^{T^2}C^T \;\ldots\; A^{T^{n-1}}C^T|$$

Si el rango de la matriz es n, el sistema es totalmente observable.

Analizando la matriz diagonalizada: si un estado de la matriz B es cero ese estado no puede controlarse y si un estado de la matriz C es cero, ese estado no es observable.

En matlab...

OBSV = (A,C)

CTRB = (A,B)

rank (M). $\qquad n = \text{rank (cont)}$

Sistema Dual

9.10.13

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad \begin{aligned} CO &= [B \;\; AB \;\; A^2B \ldots A^{n-1}B] \\ OB &= [C^T \;\; A^TC^T \;\; A^{T^2}C^T \ldots A^{T^{n-1}}C^T] \end{aligned}$$

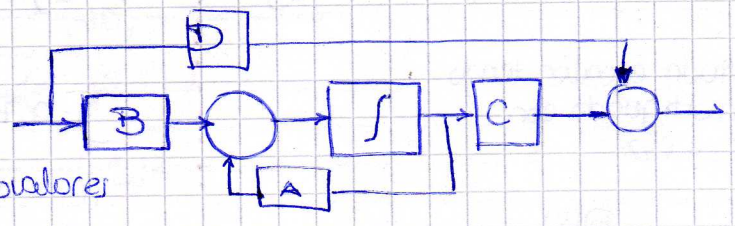
$$\begin{cases} \dot{z} = A^Tz + C^Tu \\ y_1 = B^Tz + Du \end{cases} \qquad \begin{aligned} CON &= [C^T \;\; A^TC^T \;\; A^{T^2}C^T \ldots A^{T^{n-1}}C^T] \\ OBS &= [B \;\; AB \;\; A^2B \ldots A^{n-1}B] \end{aligned}$$

(En autogestión va a subir el apunte de hoy).

Un sistema es dual si la matriz de controlabilidad es igual a la de observabilidad de las transpuestas, y viceversa.

① DISEÑO EN EL ESPACIO DE ESTADOS

$\dot{x} = Ax + Bu$
$y = Cx + Du$



$|(sI - A)| = 0$
↳ Encontramos autovalores

El comportamiento dinámico queda determinado por los autovalores.
Vamos a ver si podemos modificar el comportamiento dinámico.

METODO 1: Ubicación de polos (pole placement): se indica dónde queremos que estén los polos.
Lo primero que se hace es realimentar los estados (x). La ley que usamos es

$u = -k \cdot x$ (k es una matriz de ganancia).

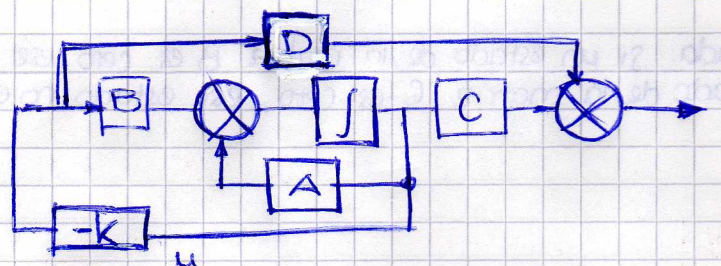
Para que podamos ubicar los polos en cualquier lugar del plano hay dos condiciones:

1°- El sistema tiene que ser de estado totalmente controlable.

$$[B \quad AB \quad A^2B \ldots A^{n-1}B] \longrightarrow \text{rango } n.$$

2°- Que el vector u no está acotado (no está limitado en su valor).

Lo que hacemos es realimentar por medio de la matriz k.



$$\dot{x} = Ax + B\overbrace{(-kx)}^{u}$$

$$\dot{x} = (A - Bk)x$$

La matriz A-Bk tiene que tener todos los polos del sistema que yo diseñé.
Polos deseados $s_1, s_2, \ldots s_n$

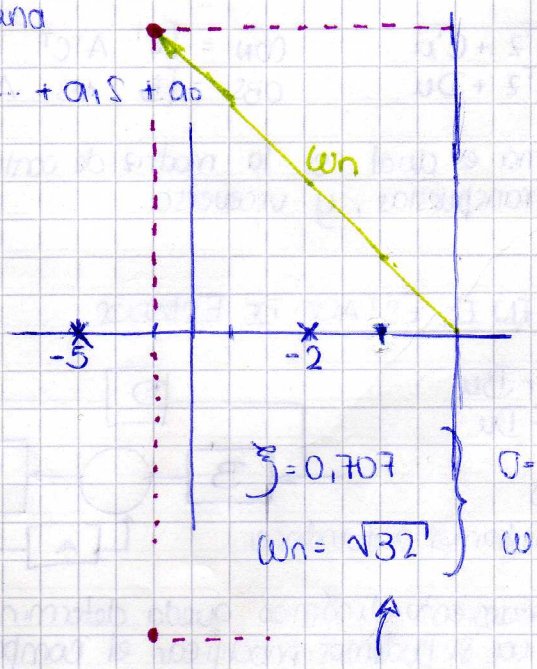
$$|sI - A + Bk| = |(s-s_1)(s-s_2)\ldots(s-s_n)| = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \alpha_{n-2}s^{n-2} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

Los polos del sistema original generan una

$$|sI - A| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \ldots + a_1 s + a_0$$

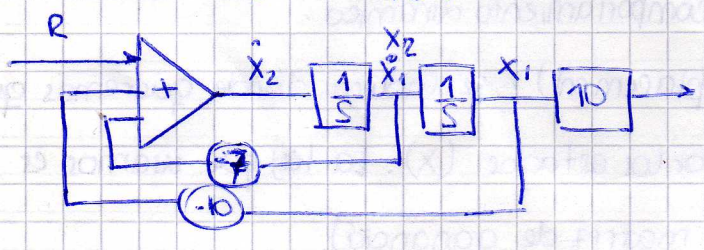
Ejemplo: $\frac{C}{R} = \frac{10}{s^2+7s+10}$

$s_1 = -2$; $s_2 = -5$



Si le pongo una entrada escalón tengo un sistema subamortiguado con ctes de tiempo 0,5 y 0,2

$$\frac{C}{R} = \frac{10s^{-2}}{1+7s^{-1}+10s^{-2}} \cdot \frac{Q(s)}{Q(s)}$$



$\xi = 0{,}707$ $\quad \sigma = -4$

$\omega_n = \sqrt{32}$ $\quad \omega = 4$

Quiero.

$s_{1,2} = -4 \pm j4$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -10 & -7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u.$$

$$y=\begin{vmatrix}10 & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x_1\\ x_2\end{vmatrix}$$

Este es el sistema original.

El que yo quiero, el "compensado" tiene polos en $(-4-4j)$ y $(-4+4j)$

El polinomio deseado queda $(s+4+j4)(s+4-j4)=[s^2+8s+32]$

Controlabilidad del sistema $\quad cont=[B\ AB]=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -7\end{vmatrix}=-1$ ✓

Usamos la realimentación.

$u=-kx$

Los autovalores deseados los saco de

$|sI-A+Bk|=0$ (incógnita k)

$$\begin{vmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & 1\\ -10 & -7\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0\\ 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}k_1 & k_2\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}s & -1\\ 10 & s+7\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 0\\ k_1 & k_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}s & -1\\ 10+k_1 & s+7+k_2\end{vmatrix}$$

$s^2+(7+k_2)s+10+k_1=s^2+8s+32$

$7+k_2=8 \Rightarrow k_2=1$

$10+k_1=32 \Rightarrow k_1=22$

En matlab, teniendo A, B, C, D y definidos los polos deseados en un vector P, para encontrar la matriz k de realimentación

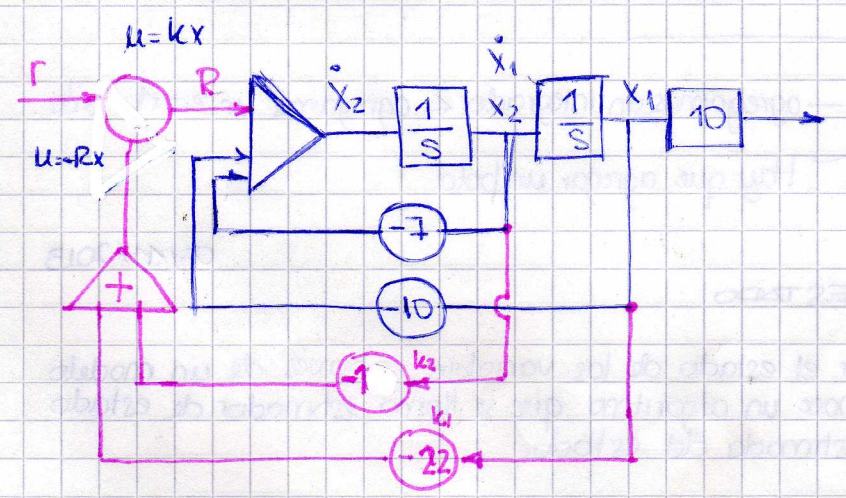
k = acker (A, B, P) → hasta 10x10. → por método de Ackerman

ó

k = place (A, B, P)

$k=[0\ 0\ \dots\ 0\ 1][cont]^{-1}\phi(A)$

lo vemos la clase que viene.



Hay que tener en cuenta que con este procedimiento la ganancia disminuye.

MATRIZ DE ACKERMAN 16.10.2013

$k=[0\ 0\ 0\ \cdots\ 1]_n\,[cont]^{-1}\,\phi(A)$

$\phi(A)$ → Si la ecuación característica es $s^3+5s^2+6s+10=0$, $\phi(A)$ es

$\phi(A)=A^3+5A^2+6A+10I=0$

A es solución de la ec. característica.

En la forma canónica controlable

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} u.$$

$$\frac{C}{R} = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$a_3 \quad a_2 \quad a_1$

$$y = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$$

$$s^3 + 10s^2 + 20s + 10$$

$\alpha_3 \quad \alpha_2 \quad \alpha_1$

Ver de diapositivas.

$$k = \begin{vmatrix} \alpha_1 - a_1 & \alpha_2 - a_2 & \alpha_3 - a_3 & \dots & \alpha_n - a_n \end{vmatrix}$$

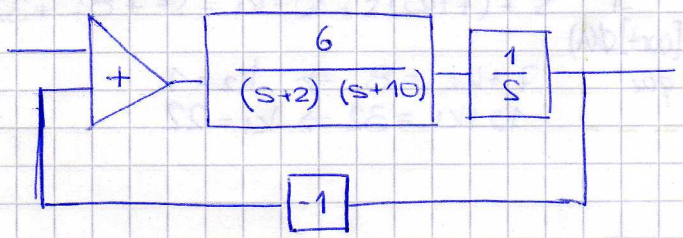
La matriz k se puede encontrar → por sustitución
→ por ackerman
→ por la matriz de controlabilidad ?

Por efecto de la realimentación disminuimos la ganancia del sistema. Se cumple con las especificaciones dinámicas pero no se mantiene una salida similar a la anterior.

ASIGNACIÓN DE POLOS PARA LOGRAR ERROR DE ESTADO ESTACIONARIO NULO ANTE UNA ENTRADA ESCALÓN UNITARIO

* Cuando la planta posee un integrador.

TODA LA EXPLICACIÓN ESTÁ EN LAS DIAPOSITIVAS



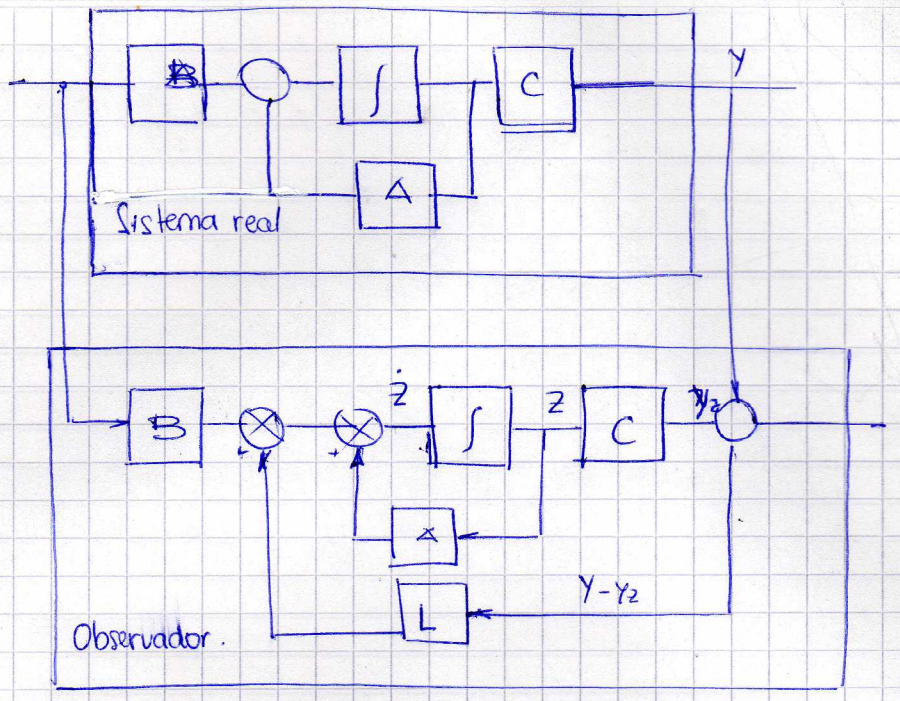
* Si no tiene un integrador → agregamos un integrador ← agregamos un estado más.
→ Hay que agregar un polo.

06/11/2013

OBSERVADORES DE ESTADO

Cuando es difícil medir o tomar el estado de las variables, a través de un modelo matemático de la planta se hace un algoritmo que se llama estimador de estado y permite obtener una idea estimada del estado.

DIAPOSITIVAS!!



El observador tiene que tener la misma cantidad de estados que el sistema original.

Se comparan los valores.

Original $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$

$$\dot{z} = Az + Bu + \underbrace{L(y-y_z)}$$

Factor de corrección que realimentamos para aproximarnos al sistema. Se trata de que $y - y_z \to 0$.

$$\dot{z} = Az + Bu + L(Cx - Cz)$$

$$\dot{z} = Az + Bu + LC(x - z)$$

$$\dot{x} - \dot{z} = Ax - Az - LC(x-z)$$

$$\dot{x} - \dot{z} = A\underbrace{(x-z)}_{e} - LC\underbrace{(x-z)}_{e}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 - z_1 \\ x_2 - z_2 \\ x_3 - z_3 \end{vmatrix}$$

$$\dot{e} = (A - LC)e$$

$\lambda I - A + LC \longrightarrow$ Autovalor.