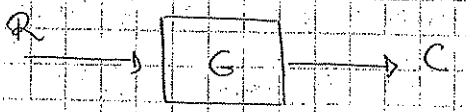
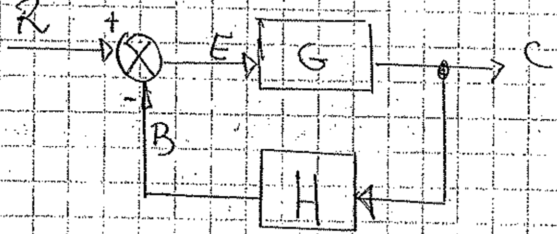
* SISTEMAS DE LAZO ABIERTO Y CERRADO



$$G = \frac{C}{R} \quad \text{Lazo Abierto}$$



$$C = G \cdot E$$

$$E = R - B = R - H \cdot C$$

$$C = G\,[R - HC]$$

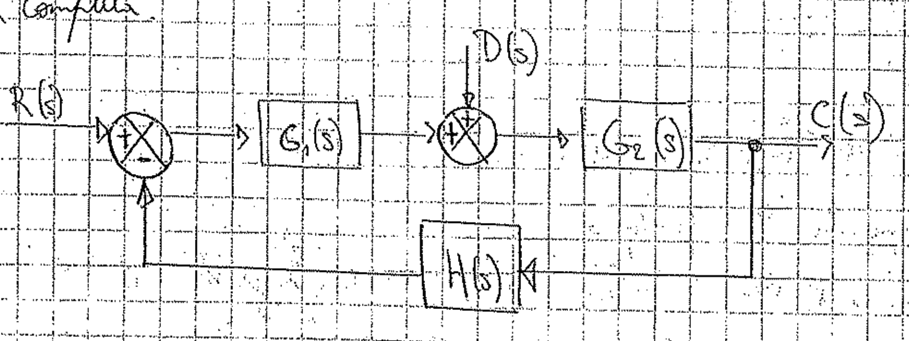
$$C = GR - GHC$$

$$C(1+GH) = GR$$

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1+GH} \quad \text{Lazo Cerrado}$$

* SIST. EN LAZO CERRADO SUJETO A UNA PERTURBACIÓN

En un sistema lineal, cada una de las entradas (la de referencia y la perturbación) puede tratarse de forma independiente y sus salidas sumarse para obtener la salida completa



$$\frac{C_D(s)}{D(s)} = \frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad \text{Rta. a la perturbación}$$

$$\frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)\,G_2(s)}{1+G_1(s)\cdot G_2(s)\cdot H(s)} \quad \text{Rta. a la entrada}$$

NOTA

$$C(s) = C_R(s) + C_D(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \left[G_1(s) \cdot R(s) + D(s) \right]$$

Conforme aumenta la ganancia,

$|G_1(s) \cdot G_2(s) H(s)| \gg 1$, $C_D(s)/D(s)$ tiende a cero. $C_R(s)/R(s)$ se vuelve independiente de G_1 y G_2 y se hace inversamente proporcional a $H(s)$. Si $H(s) = 1$, tiende a igualar la entrada y la salida.

* DIAGRAMAS DE FLUJO

Consiste en una red en la cual los nodos están conectados por ramas con dirección y sentido.

- Nodo de entrada: sólo tiene ramas que salen.
- Nodo de salida: sólo tiene ramas que entran
- Trayectoria Directa: trayecto de un nodo de entrada a uno de salida sin pasar por ningún nodo más de una vez.
- Lazo: trayecto cerrado, sin pasar ningún nodo más de una vez.
- Lazos Disjuntos: aquellos que no tienen ningún nodo en común.

* FORMULA DE MASON

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{m} P_i \, \Delta i$$

m = cantidad de trayectorias directas

Δ = determinante del gráfico

Δ_i = determinante del cofactor, de la i-ésima trayectoria directa del gráfico con los lazos que tocan la trayectoria directa eliminados

$$\Delta = 1 - \sum_a L_a + \sum_{b,c} L_b . L_c - \sum_{d,e,f} L_d . L_e . L_f + \ldots$$

L_a = ganancia de lazo individual

$L_b L_c$ = producto de las ganancias de todos los lazos disjuntos tomados de dos en dos.

$L_d L_e L_f$ = idem para los lazos de tres en tres.

---

* RESPUESTA TRANSITORIA

La respuesta en el tiempo de un sistema de control consta de dos partes: la respuesta transitoria y la respuesta en estado estacionario. La rta. transitoria se refiere a la que va del estado inicial al estado final. La rta. en estado estacionario es como se comporta la salida conforme t tiende a infinito.

* Señales de prueba típicas: se usan regularmente funciones escalón, rampa, impulso, parábola. Con estas señales es posible realizar con facilidad análisis matemáticos porque son funciones del tiempo muy simples.
La forma de entrada a la que el sistema estará sujeto con mayor frecuencia en operación normal determina qué señal de prueba usar.

---

* ERRORES EN ESTADO ESTACIONARIO

El Teorema del Valor Final ofrece una forma conveniente de determinar el comportamiento en estado estacionario de un sistema estable.

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

Las constantes de error estático son figuras de mérito de los sistemas de control: cuanto más altas sean las constantes, más pequeño es el bios en estado estacionario. Se denomina "posición" a la salida, "velocidad" a la razón de cambio de la salida, etc, sin importar la forma física de la salida.

TEMAS

- ~~Variables de Estado (Diagrama de flujo) Autovalores. Función de transferencia.~~
- ~~Controlabilidad y Observabilidad del estado~~
- ~~Matriz de transición de estados $\phi(t)$~~
- ~~Matriz de realimentación mediante ubicación de polos.~~
- ~~Respuesta al escalón~~ (4)
- ~~Compensador de atraso de fase. Coef. de error. Bode~~
- ~~Controlador proporcional~~
- ~~Lugar de raíces. Rango de variación de K.~~ (3)
- ~~VE → ecuaciones diferenciales~~ VER
- ~~Compensador en la realimentación~~ VER
- ~~Compensación mediante respuesta en frecuencia~~
- ~~Sintonización Z-N, filtros PI, PID atraso o adelanto~~
- ~~Comp. cero-polo~~
- ~~Comp. usando velocidad y posición en la realimentación~~
- ~~Definiciones varias~~ (1) (faltan VE)
- ~~Margen de ganancia y fase.~~ (5)
- ~~Circuitos analógicos del compensador~~
- ~~Función de transferencia de un motor~~ (2)

* LINEALIZACIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS NO LINEALES

Un sistema es no lineal si no se aplica el principio de superposición.
Si el sistema opera alrededor de un punto de equilibrio y se considera un rango de operación limitado, es posible aproximar el sistema no lineal mediante un sistema lineal.
Este procedimiento se basa en el desarrollo de la función no lineal en series de Taylor alrededor del punto de operación.
Se supone un sistema cuya entrada es $x(t)$ y su salida es $y(t)$:

$$y = f(x)$$

Si la condición normal de operación corresponde a x_0, y_0; se expande en series de Taylor alrededor de ese punto:

$$y = f(x) = f(x_0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}(x-x_0) + \underbrace{\frac{1}{2!}\left.\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^2 + \ldots}_{\text{se desprecia}}$$

Si la variación $(x-x_0)$ es pequeña, se pueden despreciar los términos de orden superior. Entonces:

$$f(x) = f(x_0) + K(x-x_0) \qquad \text{si } x - x_0 = x_1$$

$$f(x) - f(x_0) = K(x-x_0)$$

$$\boxed{f(x_1) = K\,x_1} \qquad \text{Modelo Lineal Equivalente}$$

Si el sistema fuera de 2 entradas:

$$y = f(x,z) \longrightarrow f(x_1, z_1) = K_x \cdot x_1 + K_z \cdot z_1 \qquad K_x = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ z=z_0}}$$

$$\boxed{K_z = \frac{\partial f}{\partial z}}\Bigg|_{\substack{x=x_0\\ z=z_0}}$$

Ejemplo: linealizar el sistema $z = x\,y$ para el rango $\begin{cases} 5 \leq x \leq 7 \\ 10 \leq y \leq 12 \end{cases}$

$x_0 = 6$ $\quad z_0 = 66$

$y_0 = 11$

$Z = f(x, y) = \qquad Z - Z_0 = K_x\,(x - x_0) + K_y\,(y - y_0)$

$$K_x = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} = \left. y \right|_{y = y_0} = 11$$

$$K_y = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} = x = 6$$

$$Z - 66 = 11(x - 6) + 6(y - 11)$$

$$Z \cancel{- 66} = 11x \cancel{- 66} + 6y - 66$$

$$\boxed{z = 11x + 6y - 66}$$

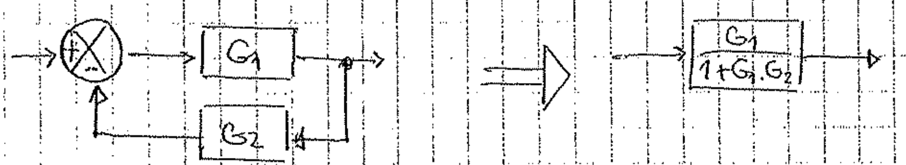
En el punto $\left.\begin{matrix} x = 5 \\ y = 10 \end{matrix}\right\}$ $\quad z = 11x + 6y - 66 = 49$

$$z = x\,y = 50$$

$$e\% = \frac{49 - 50}{50} \cdot 100\% = -2\%$$

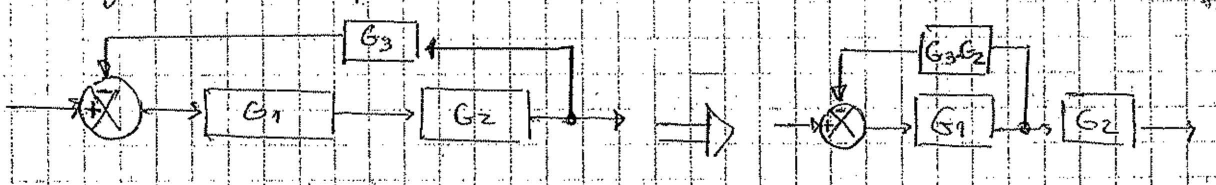
* ALGEBRA DE DIAGRAMA DE BLOQUES

- Eliminación de un lazo cerrado

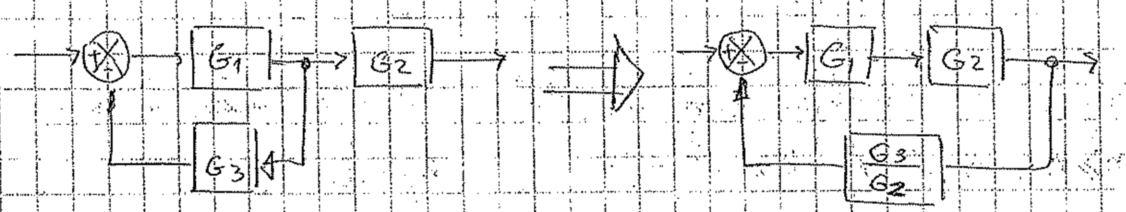


(si el signo del sumador es +, el denominador es $1 - G_1 G_2$)

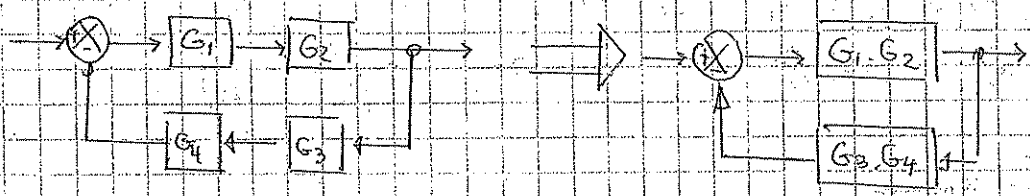
- Desplazamiento de un punto de toma de señal hacia delante de un bloque



- Desplazamiento de un punto de toma de señal hacia atrás de un bloque.



- Combinación de bloques en cascada



* TRANSFORMADA DE LAPLACE

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)\, e^{st}\, ds$$

para $t>0$ y c es una constante real más grande que las partes reales para todas las singularidades de $F(s)$.

* Desarrollo en fracciones simples

* Polos distintos

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)} \qquad m<n$$

$$= \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + \ldots + \frac{a_n}{s+p_n}$$

a_k residuo del polo en $-p_k$

Cálculo del residuo:

$$(s+p_k)\frac{B(s)}{A(s)}\Bigg|_{s=-p_k} = a_k \longrightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a_k}{s+p_k}\right] = a_k e^{-p_k t}$$

- Si p_1 y p_2 son complejos conjugados, entonces a_1 y a_2 también lo son.
- Si $m \geq n$, se divide $B/A = G + N/D$ y se expande N/D

* Polos múltiples

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s+z_1)}{(s+p_1)^n} \longrightarrow F(s) = \frac{b_1}{s+p_1} + \frac{b_2}{(s+p_1)^2} + \frac{b_3}{(s+p_1)^3}$$

Cálculo de los residuos

$$(s+p_1)^3 F(s)\Big|_{s=-p_1} = b_3$$

$$\frac{d}{ds}\left[(s+p_1)^3 F(s)\right]_{s=-p_1} = b_2$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{1}{2!}(s+p_1)^3 F(s)\right]_{s=-p_1} = b_1$$

* Funciones básicas

$\delta(t) \longrightarrow 1$

$1 \longrightarrow 1/s$

$t \longrightarrow 1/s^2$

$e^{-at} \longrightarrow \frac{1}{s+a}$

$te^{-at} \longrightarrow \frac{1}{(s+a)^2}$

$\sin wt \longrightarrow \frac{w}{s^2+w^2}$

$\cos wt \longrightarrow \frac{s}{s^2+w^2}$

$\frac{df(t)}{dt} \longrightarrow sF(s) - f(0)$

$\frac{d^2f(t)}{dt^2} \longrightarrow s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$

TVF $\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$

TVI $\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$

Ejemplo: $\ddot{x} + 6\dot{x} + 3x = 2u$

$$s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + 6sX(s) - 6x(0) + 3X(s) = 2U(s)$$

$$X(s)\left[s^2 + 6s + 3\right] - \left[sx(0) + \dot{x}(0) + 6x(0)\right] = 2U(s)$$

$$X(s) = \underbrace{\frac{2U(s)}{s^2+6s+3}}_{\text{solución particular}} + \underbrace{\frac{sx(0) + \dot{x}(0) + 6x(0)}{s^2+6s+3}}_{\text{solución homogénea (cuando la entrada es nula)}}$$

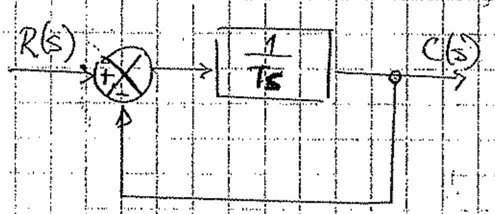
$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{2}{s^2+6s+3} \longrightarrow \frac{-6 \pm \sqrt{36-12}}{2} = -3 \pm \sqrt{6} \;\; \begin{matrix} -0,55 \\ -5,45 \end{matrix}$$

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{2}{(s+0,55)(s+5,45)} = \frac{a_1}{(s+0,55)} + \frac{a_2}{(s+5,45)}$$

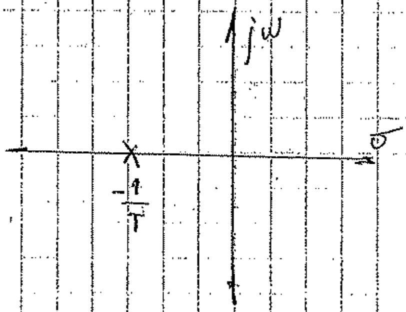
$$a_1 = \left.\frac{2}{(s+5,45)}\right|_{s=-0,55} = 0,408 \qquad a_2 = \left.\frac{2}{(s+0,55)}\right|_{s=-5,45} = -0,408$$

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{0,408}{s+0,55} - \frac{0,408}{s+5,45} \longrightarrow \boxed{\frac{x(t)}{u(t)} = 0,408\left(e^{-0,55t} - e^{-5,45t}\right)}$$

* SISTEMAS DE 1° ORDEN



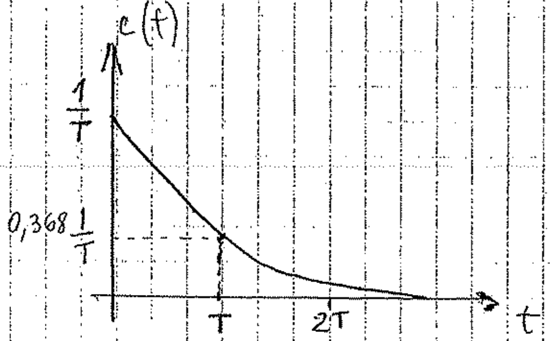
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1} = \frac{1/T}{s+1/T}$$



- Respuesta al impulso

$R(s) = 1$, $r(t) = \delta(t)$ $\longrightarrow$ $C(s) = \dfrac{1}{Ts+1}$

$$c(t) = \frac{1}{T}\, e^{-t/T}$$



- Respuesta al escalón

$R(s) = \dfrac{1}{s}$

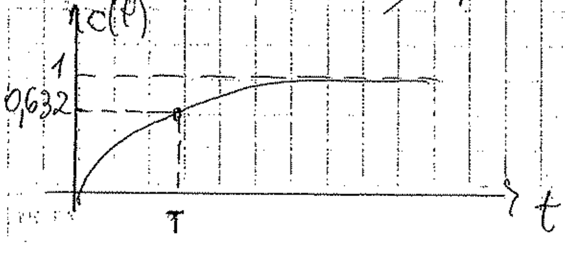
$$C(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1/T}{s+1/T} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1/T}$$

$$A = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} \cdot \frac{1/T}{s+1/T} = 1$$

$$B = \lim_{s\to -1/T} \cancel{(s+1/T)} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1/T}{\cancel{s+1/T}} = -1$$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/T}$$

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}$$



$3T = 0{,}95$

$4T = 0{,}98$

Respuesta a la rampa

$$R(s) = \frac{1}{s^2} \qquad C(s) = \frac{1}{s^2}\,\frac{1/T}{s+1/T} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+1/T}$$

$$A = \lim_{s\to 0} \cancel{s^2}\,\frac{1}{\cancel{s^2}}\,\frac{1/T}{s+1/T} = 1$$

$$B = \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}\left[\cancel{s^2}\,\frac{1}{\cancel{s^2}}\,\frac{1/T}{s+1/T}\right] = \frac{-1/T}{(s+1/T)^2} = -T$$

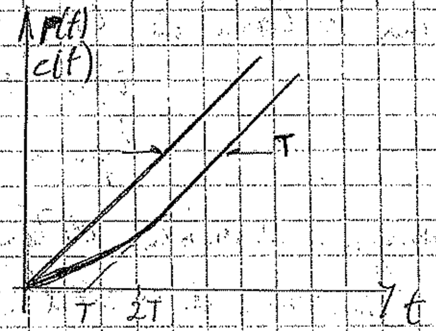
$$C = \lim_{s\to -\frac{1}{T}} \cancel{(s+1/T)}\,\frac{1}{s^2}\,\frac{1/T}{\cancel{s+1/T}} = T$$

$$C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s+1/T}$$

$$c(t) = t - T + T e^{-t/T}$$

La señal de error $e(t)$:

$$e(t) = r(t) - c(t)$$
$$= T\left(1 - e^{-t/T}\right)$$
$$e(\infty) = T$$



* Comparando las 3 entradas, se observa que la respuesta a la derivada de una señal de entrada se obtiene diferenciando la respuesta del sistema para la señal original (propiedad de los SLIT)

$$r(t) \longrightarrow \boxed{\text{SLIT}} \longrightarrow c(t)$$
$$\dot{r}(t) \qquad\qquad\qquad \dot{c}(t)$$

NOTA

* ERRORES EN ESTADO PERMANENTE

Se refiere a la incapacidad del sistema para seguir determinados tipos de entradas. Esto depende del tipo de función de transferencia en lazo abierto del sistema. La clasificación se basa en la cantidad de integradores indicados por la FTLA (polos al origen).

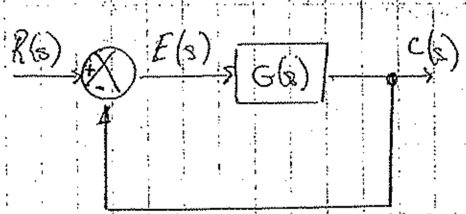
$$G(s) = \frac{K\,(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots(T_m s+1)}{s^n\,(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_p s+1)}$$

$$G(s) = \frac{K_1 \prod_{i=1}^{m} (s+z_i)}{s^n \prod_{j=1}^{p} (s+p_j)} \qquad n+p > m$$

- Un sistema se llama de tipo 0 $\longrightarrow n=0$
  tipo 1 $\longrightarrow n=1$
  tipo 2 $\longrightarrow n=2$ ...

- Cuánto mayor es el número de tipo, mejora la precisión. Sin embargo, se agrava el problema de la estabilidad, por lo que es necesario un equilibrio. Resulta difícil diseñar sistemas estables que tengan 2 o más integradores en la trayectoria directa.

- Errores



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{R(s)-C(s)}{R(s)}$$

$$= 1 - \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{1+\cancel{G(s)}-\cancel{G(s)}}{1+G(s)}$$

$$\boxed{\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)}}$$

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} \cdot R(s) \quad \text{por el TVF}$$

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)}$$

- Constante de error de posición estático K_p

Error para una entrada escalón

$$e_{ss} = \mathcal{E}(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{\cancel{s}} \frac{\cancel{s}}{1+G(s)} \qquad R(s) = \frac{1}{s}$$

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = G(0)$$

Para sistemas tipo 0 : $\mathcal{E}_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{k\Pi(s+z_i)}{\Pi(s+p_j)}}_{G(0)=k_p}}$

$$\boxed{e_{ss} = \frac{1}{1+k_p}}$$

Para sistemas tipo 1 o mayor:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1 + \frac{K\Pi(s+z_i)}{s^N\Pi(s+p_j)}} = \frac{1}{\infty} = 0 \qquad \boxed{e_{ss} = 0}$$

$N \geq 1$

Si no existe un integrador, habrá un error en estado estacionario.
Se puede disminuir aumentando K, pero disminuye la estabilidad

- Constante de error de velocidad estática K_v

Error para una entrada rampa

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2} \frac{\cancel{s}}{1+G(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s\,G(s)}$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\,G(s)$$

Para sistemas de tipo 0:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s\left(1+\frac{K\prod(s+z_i)}{\prod(s+p_j)}\right)} = \infty$$

Para sistemas de tipo 1:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s\left[1+\frac{K\prod(s+z_i)}{s\prod(s+p_j)}\right]} = \frac{1}{K_v}$$

Para sistemas de tipo 2:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s\left[1+\frac{K\prod(s+z_i)}{s^2\prod(s+p_j)}\right]} = 0$$

- Constante de error de aceleración estática K_a

Error para una entrada parábola $\rightarrow$ $r(t) = t^2/2$ para $t \geq 0$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^3} \cdot \frac{s}{1+G(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2 G(s)}$$

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)$$

Para sistemas de tipo 0:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2\left[1 + \frac{k\prod(s+z_i)}{\prod(s+p_j)}\right]} = \infty$$

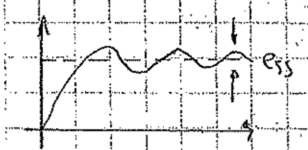
Para sistemas de tipo 1:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2\left[1 + \frac{k\prod(s+z_i)}{s\prod(s+p_j)}\right]} = \infty$$

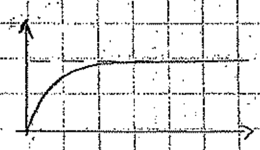
Para sistemas de tipo 2:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2\left[1 + \frac{k\prod(s+z_i)}{s^2\prod(s+p_j)}\right]} = \frac{1}{K_a}$$

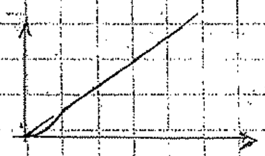
	ESCALÓN	RAMPA	PARÁBOLA
TIPO 0	$\frac{1}{1+k_p}$	∞	∞
TIPO 1	0	$\frac{1}{K_v}$	∞
TIPO 2	0	0	$\frac{1}{K_a}$



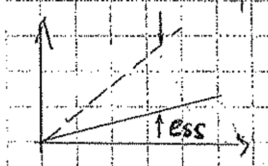
$e_{ss} = \frac{1}{1+k_p}$



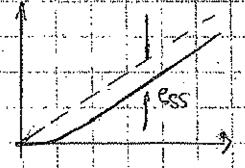
$e_{ss} = 0$



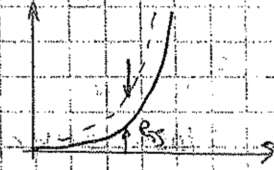
$e_{ss} = 0$



$e_{ss} = \infty$



$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$



$e_{ss} = \frac{1}{K_a}$

* POLOS DOMINANTES EN LAZO CERRADO

Si los coeficientes? cocientes de las partes reales son superiores a 5 y no hay ceros cerca, los polos en lazo cerrado más cercanos al eje $j\omega$ dominarán el comportamiento de la respuesta transitoria, debido a que corresponden a los términos de la respuesta transitoria que disminuyen lentamente (Estos polos dominantes aparecen con frecuencia en forma de un par complejo conjugado.)

- Cuando el sistema es de mayor orden que 2º, estrictamente, no se puede utilizar el ξ y la ω_n definidos para los sistemas de 2º orden. Pero si la dinámica del sistema puede representarse con un par de polos dominantes complejos conjugados, se puede utilizar ξ como factor de amortiguamiento relativo del sistema.

* GRÁFICA DE MÓDULO (BODE)

- Para saber los valores del gráfico de módulo de la $F(s)$ en 0 y ∞, se toma límite. También se puede hacer para regiones de pendiente 0 dB/dec.

$$\lim_{s\to\infty} |F(s)| = \lim_{s\to\infty} \left| \frac{5\cancel{(s+100)}\cancel{(s+1000)}}{\cancel{(s+20)}\cancel{(s+3000)}} \right| = |5| = 14 \text{ dB}$$

$$\lim_{s\to 0} |F(s)| = \lim_{s\to 0} \left| \frac{5 \cdot 100\left(1+\frac{s}{100}\right)\left(1+\frac{s}{1000}\right)1000}{20\left(\frac{s}{20}+1\right)3000\left(\frac{s}{3000}+1\right)} \right| = |8{,}33| = 18{,}41 \text{ dB}$$

Para la meseta entre $\omega = 100$ y $\omega = 1000$

$$\lim_{100 \ll s \ll 1000} |F(s)| = \left| \frac{5 \cdot s \cdot 1000}{s \cdot 3000} \right| = |1{,}66| = 4{,}43 \text{ dB}$$

Pérez V

RESOLUCIÓN FINALES

Definiciones

* Sistema Lineal: si se aplica el principio de superposición → la respuesta producida por la aplicación simultánea de dos entradas diferentes, es la suma de las 2 respuestas individuales.
* Sistema Lineal Invariante en el Tiempo (SLIT): se describen por ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo (coeficientes constantes o funciones solo de la variable independiente)
* Sistema con Memoria: la salida depende de la entrada actual y sus valores anteriores. Posee elementos almacenadores de energía (integradores)
* Sistema causal: la salida depende únicamente del valor de la entrada (actual y anteriores) y no comienza antes de aplicar la excitación (no es anticipativo). La salida en $t=0$ depende de las entradas en $t<0$
* Función de transferencia de un SLIT: se define como el cociente entre la Transformada de Laplace de la salida y la T. de Laplace de la entrada, con las condiciones iniciales nulas.

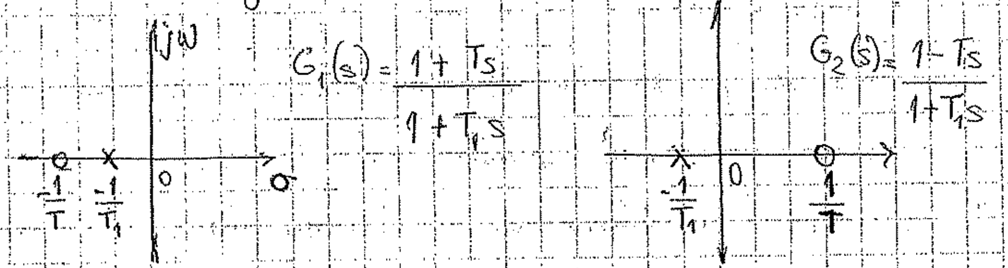
$$X(s) \rightarrow \boxed{\text{SLIT}} \rightarrow Y(s) \qquad H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \left.\frac{\mathcal{L}[y(t)]}{\mathcal{L}[x(t)]}\right|_{CI=0}$$

* Sistema de Control Realimentado Tipo 2: contiene un integrador doble al origen, lo que implica que:

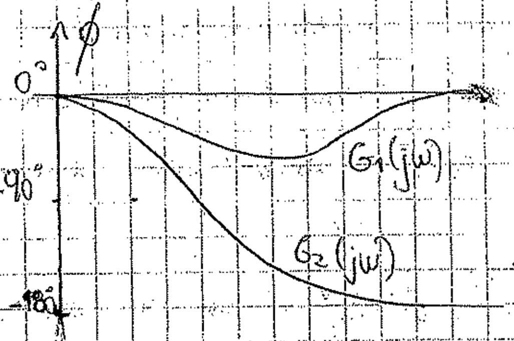
$E_{ss}=0$ (entrada escalón);
$E_{ss}=0$ (entrada rampa); $E_{ss}=\frac{1}{K_A}$ (entrada parábola)

Ver definición otra

* Sistema de Fase Mínima: no tiene polos ni ceros en el semiplano derecho del plano S. La función de transferencia se determina de forma única sólo a partir de la curva de magnitud. Esto no es válido para un sistema de fase no mínima, donde el ángulo de fase en $\omega = \infty$ NO es igual a $-90(q-p)$

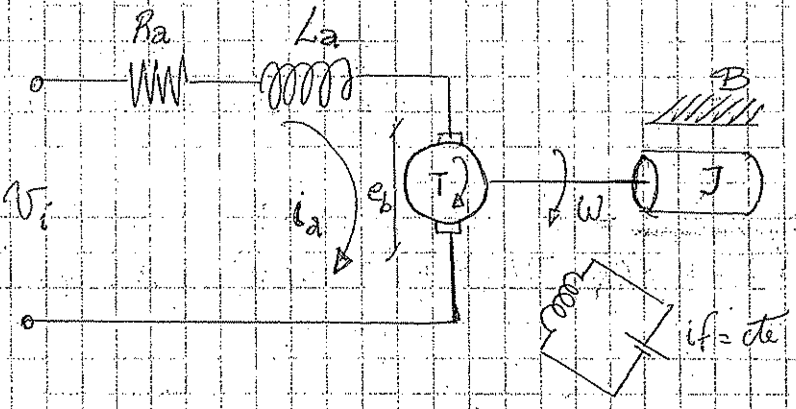


El cero se comporta como un polo para la fase.



* Test de Routh: permite determinar la cantidad de polos de lazo cerrado que se encuentran en el semiplano derecho del plano S.
  ↳ se puede determinar el rango de estabilidad para el valor de un parámetro (por ej. la ganancia K)
* Constante de tiempo de un sistema de 1° orden: indica la rapidez de respuesta del sistema: cuanto más pequeña es la constante de tiempo T, más rápida es la respuesta del sistema. Para $t \geq 4T$ la respuesta permanece dentro del 2% del valor final y se toma como el tiempo para alcanzar el estado estacionario

* MOTOR DE C.C. CONTROLADO POR INDUCIDO (ARMADURA)



$$V_i = L\frac{di_a}{dt} + R.i_a + e_b$$ Ec. dif. del circuito del inducido

$$e_b = K_b . W = K_b . \frac{d\theta}{dt}$$ Fuerza contra electromotriz fcem. Para un flujo constante, la tensión inducida e_b es proporcional a la velocidad angular

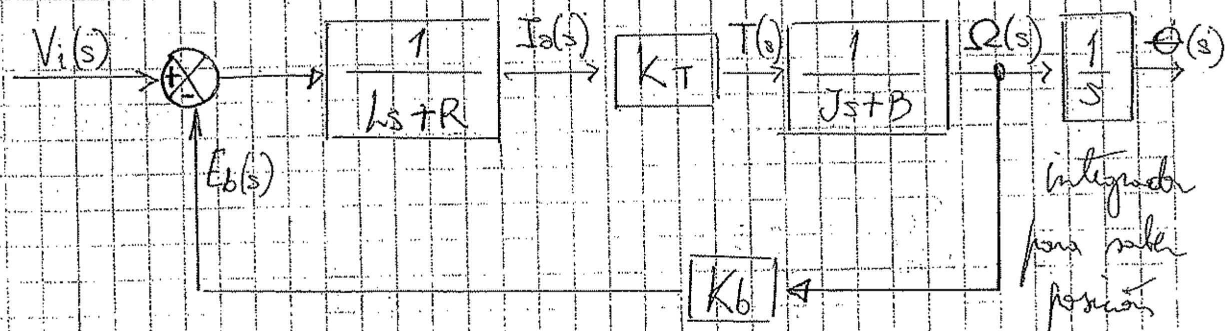
$$\phi = K_f . i_f$$ El flujo es proporcional a la corriente de campo

$$T = K_f . i_f . K_1 . i_a$$ donde $K_1 = cte$, para $i_f = cte$:

$$T = K_T . i_a$$ Par motor $= T$
Constante del par motor $= K_T$

$$T = J\frac{dW}{dt} + BW$$

$$\begin{cases} V(s) = (Ls + R) I_a(s) + K_b . \Omega(s) \\ K_T I_a(s) = (Js + B)\Omega(s) \end{cases}$$ (considerando CI = 0)



integrador para saber posición

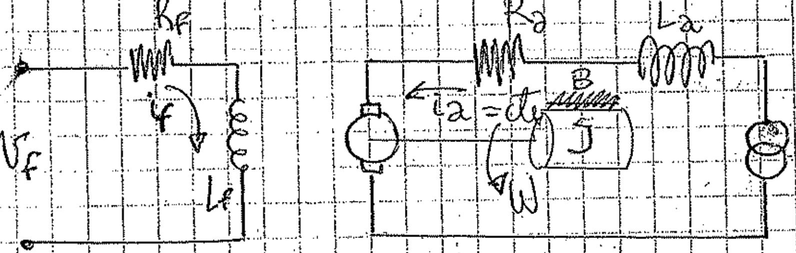
$$\frac{\Omega(s)}{V_i(s)} = \frac{K_T}{(Ls+R)(Js+B)+K_bK_T} = \frac{K_T}{JLs^2+(RJ+LB)s+BR+K_b K_T}$$

$$= \frac{G}{1+GH} = \frac{\frac{A}{B}}{1+\frac{A}{B}C} = \boxed{\frac{A}{B+AC}}$$

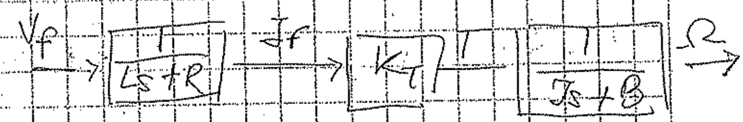
La inductancia L en el circuito del inducido generalmente es pequeña y se la puede despreciar, por lo que queda una respuesta de 1º orden.

VcR!. → Pero

* MOTOR DE CC CONTROLADO POR CAMPO



$$\begin{cases} V_f = R_f\, I_f + L_f \dfrac{d\,i_f}{dt} \\ T = K_{Tf}\cdot i_f = J\dot{\omega} + B\omega \end{cases}$$



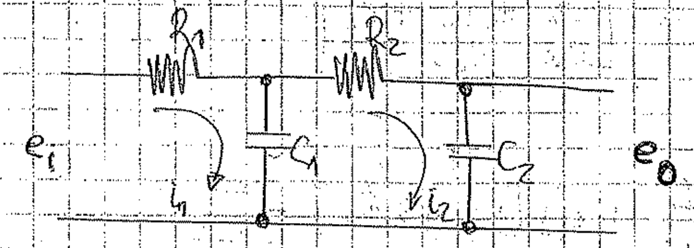
$$\begin{cases} V_f(s) = (R+Ls)\, I_f(s) \\ K_{Tf}\cdot I_f(s) = (Js+B)\,\Omega(s) \end{cases}$$

NO TIENE REALIM.?

$$\frac{\Omega(s)}{V_f(s)} = \frac{K_{Tf}}{(Ls+R)(Js+B)}$$

NOTA

* ELEMENTOS EN CASCADA



$$\begin{cases} e_i = \dfrac{1}{C_1}\displaystyle\int (i_1 - i_2)\,dt + R_1 i_1 \\[2ex] 0 = \dfrac{1}{C_1}\displaystyle\int (i_2 - i_1)\,dt + R_2 i_2 + \dfrac{1}{C_2}\displaystyle\int i_2\,dt \\[2ex] e_0 = \dfrac{1}{C_2}\displaystyle\int i_2\,dt \end{cases}$$

$$E_i(s) = \frac{1}{C_1 S}\left[I_1(s) - I_2(s)\right] + R_1 I_1(s)$$

$$0 = \frac{1}{C_1 \cdot S}\left[I_2(s) - I_1(s)\right] + R_2 I_2(s) + \frac{1}{C_2 \cdot S} I_2(s)$$

$$E_0(s) = \frac{1}{C_2 S} I_2(s)$$

$$E_i(s) = I_1(s)\left[\frac{1}{C_1 S} + R_1\right] - \frac{1}{C_1 S} I_2(s)$$

$$I_1(s) = \frac{E_i(s) + \dfrac{1}{C_1 S} I_2}{\dfrac{1}{C_1 S} + R_1}$$

$$0 = \frac{1}{C_1 S}\left[I_2(s) - \frac{E_i(s) + \dfrac{1}{C_1 S} I_2}{\dfrac{1}{C_1 S} + R_1}\right] + R_2 I_2(s) + \frac{1}{C_2 S} I_2(s)$$

$$0 = \frac{I_2(s)}{C_1 s} - \frac{E_i(s) + \frac{I_2(s)}{C_1 s}}{1 + C_1 s R_1} + R_2 I_2(s) + \frac{I_2(s)}{C_2 s}$$

$$\frac{Ei(s) + \frac{I_2(s)}{C_1 \cdot s}}{1 + C_1 \cdot s \cdot R_1} = I_2(s)\left[\frac{1}{C_1 s} + \frac{1}{C_2 s} + R_2\right]$$

$$Ei(s) = I_2(s)\left[\frac{1}{C_1 s} + \frac{1}{C_2 s} + R_2\right]\left[1 + C_1 s \cdot R_1\right] - \frac{I_2}{C_1 \cdot s}$$

$$Ei(s) = I_2\left\{\left[\frac{C_1 s + C_2 s}{C_1 s^2 \cdot C_2} + R_2\right]\left[1 + C_1 s \cdot R_1\right] - \frac{1}{C_1 s}\right\}$$

$$= I_2\left\{\left[\frac{C_1 s + C_2 s + R_2 C_1 C_2 s^2}{C_1 C_2 s^2}\right]\left[1 + C_1 s R_1\right] - \frac{1}{C_1 s}\right]$$

$$= I_2\left\{\left[\frac{C_1 C_2 R_2 s^2 + C_1 s + C_2 s}{C_1 C_2 s^2} + \frac{C_1^2 C_2 R_1 R_2 s^3 + C_1^2 s^2 R_1 + C_1 C_2 R_1 s^2}{C_1 C_2 s^2}\right] - \frac{1}{C_1 s}\right\}$$

$$= I_2\left\{\left[\frac{s^3(C_1^2 C_2 R_1 R_2) + s^2(C_1 C_2 R_2 + R_1 C_1^2 + R_1 C_1 C_2) + s(C_1 + C_2)}{s^2 C_1 C_2} - \frac{1}{C_1 s}\right]\right\}$$

$$= I_2\left\{\frac{s^2(C_1^2 C_2 R_1 R_2) + s(C_1 C_2 R_2 + R_1 C_1^2 + R_1 C_1 C_2) + (C_1 + \cancel{C_2}) - \cancel{C_2}}{s C_1 C_2}\right\}$$

$$Ei(s) = I_2(s)\left[\frac{s^2(R_1 \cdot R_2 \cdot C_1^2 C_2) + s(C_1 C_2 R_2 + R_1 C_1^2 + R_1 C_1 C_2) + C_1}{s C_1 C_2}\right]$$

$$\frac{Eo(s)}{Ei(s)} = \frac{\frac{1}{C_2 s} \cancel{I_2(s)}}{\cancel{I_2(s)}\left[\quad \ldots \quad\right]}$$

$$\boxed{\frac{E_o(s)}{Ei(s)} = \frac{1}{s^2(R_1 R_2 C_1 C_2) + s(C_2 R_2 + R_1 C_1 + R_1 C_2) + 1}}$$

El término $R_1 C_2 s$ representa la interacción de los 2 circuitos RC. La función de transferencia no es el producto de 2 FT de 1º orden del tipo $1/RCs+1$ porque cuando se obtiene esos, se supone $Z_L=\infty$. En este caso, el 2º circuito carga al primero

——— o ———

* MÉTODO DEL LUGAR DE RAÍCES

La característica básica de la respuesta transitoria de un sistema en lazo cerrado se relaciona estrechamente con la localización de los polos en lazo cerrado, que son las raíces de la ecuación característica.

Este método (Evans) consiste en trazar las raíces de la ecuación característica para todos los valores de un parámetro del sistema (generalmente es la ganancia en lazo abierto). Indica la forma en que hay que modificar la posición de polos y ceros a lazo abierto para que la respuesta cumpla las especificaciones del sistema.

- Condiciones de ángulo y amplitud

FTLC $\Longrightarrow \dfrac{C(s)}{R(s)} = \dfrac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$

ecuación característica

$$\boxed{1+G\cdot H = 0} \rightarrow H\cdot G = -1$$

Como $G(s)H(s)$ es una magnitud compleja:

$$|HG| = 1$$

$$\angle HG = \pm 180^\circ (2k+1) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Los puntos del plano S que cumplen con las condiciones de ángulo y amplitud son las raíces de la ecuación característica o polos de lazo

Cuando. El lugar de las raíces es una gráfica de los puntos que sólo satisfacen la condición de ángulo.

[* El LR comienza para K=0 en los polos de lazo abierto y termina para K=∞ en los ceros de lazo abierto, o de forma asintótica a rectas llamadas asíntotas. Si K<0, realimentación positiva.]

$$|GH| = \left| K \frac{\prod (s+z_i)}{\prod (s+p_j)} \right| = 1$$

debe tratarse de esta forma.

$$|K| = \frac{\prod |(s+p_j)|}{\prod |(s+z_i)|}$$

- Reglas para construir los lugares de raíces

1) Obtener la ecuación característica: $1+G(s)H(s)=0$

2) Determinar los LR sobre el eje real, los cuales están determinados por los polos y ceros a lazo abierto que estén sobre él. Existe lugar de raíces sobre el eje real cuando a la derecha del punto considerado hay un número impar de singularidades (ceros/polos).

3) Determinar las asíntotas. Los LR para valores muy grandes de s deben ser asintóticos a rectas cuyos ángulos están dados por:

N° asíntotas: $n-m$ $\quad$ n = Cantidad de polos, m = " de ceros

$$\varphi_K = \angle s = \frac{\pm 180\,(2K+1)}{n-m} \qquad (K=0,1,2,\ldots)$$

4) Todas las asíntotas se intersectan sobre el eje real:

$$\sigma_c = \frac{\sum Re_{polos} - \sum Re_{ceros}}{n-m}$$

baricentro

HOJA Nº 13

FECHA

5 - Hallar los puntos de ruptura. Debido a la simetría conjugada de los lugares de raíces, los puntos de ruptura están sobre el eje real o se producen en pares complejos conjugados.

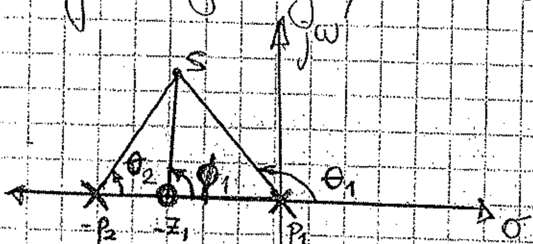
El punto de ruptura corresponde a un punto del plano s en el cual hay raíces múltiples de la ecuación característica. Se encuentra haciendo:

punto de bifurcación $\frac{dK}{ds} = 0$ Sólo las soluciones de esta ecuación que están sobre L.R son puntos de ruptura reales (o puntos de ingreso)

6 - Hallar los puntos de intersección de los lugares de raíces y el eje imaginario. Se puede utilizar el criterio de R H, por un procedimiento de tanteo y error, o haciendo $s = j\omega$ en la ecuación característica e igualando la parte real e imaginaria a cero y despejando ω y K.

El valor de ω así encontrado da el valor de frecuencia en la que el L.R corta el eje imaginario y el valor de K corresponde a un valor crítico de ganancia respecto a estabilidad.

7 - Seleccionar un punto de prueba en una vecindad amplia del eje $j\omega$ y el origen, y aplicar la condición de ángulo



$-\theta_1 - \theta_2 + \phi_1 = \pm 180$ (para ser L.R)

Los ángulos siempre se miden antihorario.

8 - Dibujar los L.R con la información obtenida

NOTA

* Ejemplo final (19/04/10)

1) a) Dada la función de transferencia en lazo cerrado con realimentación unitaria, hallar la función de transferencia de lazo abierto

$$\frac{27s+54}{s^3+9s^2+27s+54}$$

b) A qué tipo de sistema corresponde la FTLA y cuál es el error en estado estable para una entrada escalón?

c) Dibuje el lugar geométrico de raíces de G(s) H(s)

d) Si los polos complejos conjugados de la E.C. del punto (a) son $s_1 = -1,5 + j2,6$ y $S_2 = -1,5 - j2,6$ $S_3 = -6$, para qué valor de la ganancia corresponden estas raíces? Obtener cuánto vale ξ y el ω_n para ese K

e) Para una ganancia $K = 33$, dónde se ubican las raíces en el gráfico del L.R? Obtener cuánto vale ξ y el ω_n para ese K

1) a) $$\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{27s+54}{\underbrace{s^3+9s^2}_{B}+\underbrace{27s+54}_{A}}$$

$$G(s) = \frac{A}{B}$$

$$\frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{A/B}{1+\frac{A}{B}} = \frac{A}{B+A}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{27(s+2)}{s^2(s+9)}}$$ FTLA

comprobación $$\frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{27(s+2)}{s^2(s+9)\left[1+\frac{27(s+2)}{s^2(s+9)}\right]} = \frac{27s+54}{s^3+9s^2+27s+54}$$

b) Sistema tipo 2 (s^2) ε_{ss} para escalón es cero.

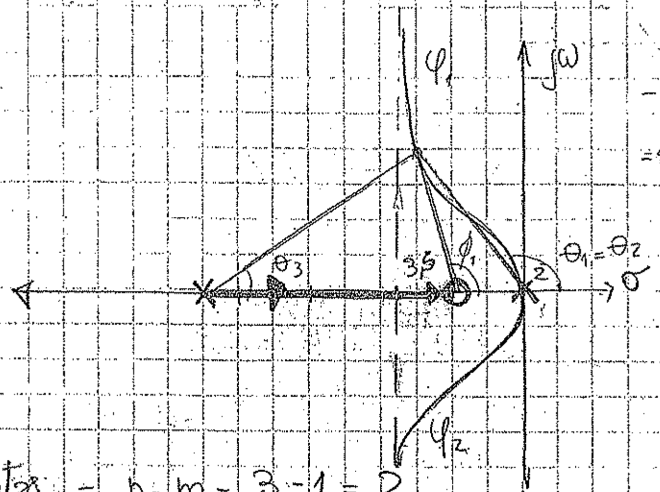
$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{1+G} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} = \frac{1}{1+\frac{27(s+2)}{s^2(s+9)}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

HOJA Nº 14

FECHA

c) 1) polos = $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = -9$ ceros = $s_4 = -2$

2)



$-\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 + \phi_1 =$

$= 130 - 130 - 35 + 105 = -190 \approx -180$

3) asíntotas $= n - m = 3 - 1 = 2$

$\varphi_k = \pm \dfrac{180\,(2k+1)}{n-m} \longrightarrow \varphi_1 = 90°$

$\varphi_2 = 270°$

4) baricentro $\sigma_c = \dfrac{\sum Re_{polos} - \sum Re_{ceros}}{n-m} = \dfrac{-9+2}{2} = -3{,}5$

5) punto de bifurcación $\dfrac{dk}{ds}$

$1 + GH = 0$

$\dfrac{K(s+2)}{s^2(s+9)} = -1 \rightarrow K = \dfrac{-s^2(s+9)}{s+2} = \dfrac{-(s^3+9s^2)}{s+2}$ $U' = -(3s^2+18s)$

$V' = 1$

$\dfrac{dk}{ds} = \dfrac{U'V - UV'}{V^2} = \dfrac{-(3s^2+18s)(s+2) + (s^3+9s^2)}{s^2+4s+4} = 0$

$-3s^3 - 6s^2 - 18s^2 - 36s + s^3 + 9s^2 = -2s^3 - 15s^2 - 36s = -2s\,(s^2 + 7{,}5s + 18)$

$\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \dfrac{-7{,}5 \pm \sqrt{56{,}25 - 72}}{2} = \boxed{-3{,}75 \pm j\,1{,}98}$ s_1, s_2

$\boxed{s_3 = 0}$

Se bifurca en $\boxed{s = 0}$

NOTA

c) Por R-H:

$$\begin{array}{llll} s^3 & a_4 & a_2 \\ s^2 & a_3 & a_1 \\ s^1 & \left(\frac{a_2 a_3 - a_1 a_4}{a_3}\right) & 0 \\ s^0 & (\ ) a_1 - 0 & \\ & (\ ) & \end{array} \qquad \begin{array}{llll} s^3 & 1 & k \\ s^2 & 9 & 2k \\ s^1 & \frac{9k - 2k}{9} = 0{,}77k & 0 \\ s^0 & 2k & \end{array}$$

No hay inversión de signo para $k > 0 \rightarrow$ ESTABLE

d) $s_1 = -1{,}5 + j\,2{,}6$

$s_2 = -1{,}5 - j\,2{,}6$ $\quad k = ?$

$s_3 = -6$

$$s^3 + 9s^2 + k(s+2) = (s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)$$

$$= (s + 1{,}5 - j2{,}6)(s + 1{,}5 + j2{,}6)$$

$$= (s^2 + 3s + 9)(s + 6)$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} = \begin{matrix} -1{,}5 + j\,2{,}6 \\ -1{,}5 - j\,2{,}6 \end{matrix}$$

$b = 3 \qquad \sqrt{b^2 - 4ac} = \pm j\,5{,}2 \qquad ac = 9$

$b^2 - 4ac = -27 \qquad a = 1 \rightarrow c = 9$

$-4ac = -36$

$$s^3 + 9s^2 + ks + 2k = s^3 + 6s^2 + 3s^2 + 18s + 9s + 54$$

$$= s^3 + 9s^2 + 27s + 54 \rightarrow \boxed{k = 27}$$

$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 \qquad \omega_n = 3$

$$\xi = \frac{3}{2 \cdot 3} = 0{,}5$$

e) Para $k = 33 \rightarrow s^3 + 9s^2 + 33s + 66 = 0$

(NECESITO CALCULADORA) $\quad (s + 5{,}05)\underbrace{(s + 1{,}97 + j\,3{,}02)(s + 1{,}97 - j\,3{,}02)}$

$$\boxed{s^2 + 3{,}94s + 13}$$

$\omega_n = \sqrt{13} = 3{,}605$

$$\xi = \frac{3{,}94}{2 \cdot \omega_n} = 0{,}546$$

$\sigma = \xi\omega_n = 1{,}97 \qquad \omega_n = \sqrt{1{,}97^2 + 3{,}02^2} = 3{,}6$

$\xi = 0{,}546$

* Ejemplo final

Realizar el diagrama del lugar de raíces para K que varía desde 0 a ∞, de un sistema de control con realimentación negativa unitaria y con una función de transferencia de la planta G(s) dada por:

$$G(s) = \frac{K\,(s^2+16s+64)}{s\,(s+4)(s+8)} \qquad H(s)=1$$

Se pide:

a) Indicar el rango de variación de K para que el sistema sea estable.

b) ¿Para qué valor de K el sistema presentará polos de lazo cerrado en $S = -1{,}7 \pm j1{,}7$? $(-3{,}7 \pm j3{,}7)$

c) ¿Dónde se encuentra la tercera raíz para el valor de K encontrado en b)?

d) Encontrar la respuesta aprox. del sistema de lazo cerrado para el valor de K encontrado en b) ante una entrada escalón unitario y graficarla indicando los parámetros más importantes.

e) ¿Cuál es el error en estado estacionario del sistema para una entrada escalón unitario?

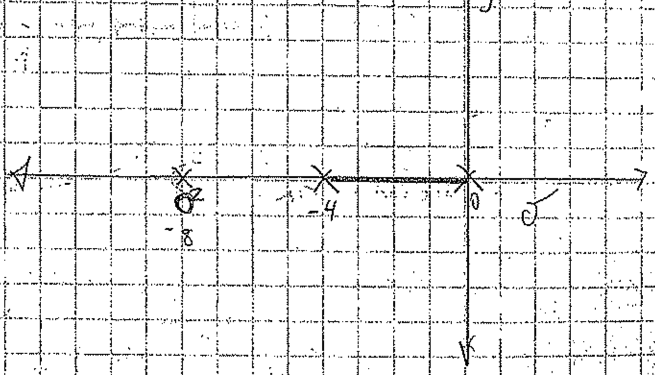
f) ¿Cuál es el error a estado estacionario del sistema para una entrada rampa unitaria?

a) $1 + G(s)H(s) = 0$

$$\frac{K\,(s+8)^2}{s\,(s+4)(s+8)} = -1$$

$n - m = 3 - 2 = 1$

$$\varphi_K = \frac{180\,(2K+1)}{1} = 180^\circ$$



$\sigma_c = \sum Re_{polos} - \sum Re_{ceros} = -8-4-(-8-8) = -12+16 = \boxed{4}$ No Tiene Significado

$$\frac{dk}{ds} = 0 \Rightarrow k = -\frac{s(s+4)(s+8)}{(s+8)^2} = -\frac{(s^2+4s)(s+8)}{}$$

$$\frac{dk}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{s^3+\underbrace{8s^2+4s^2}_{12s^2}+32s}{s^2+16s+64}\right)$$

$$= -\left(\frac{u'v-uv'}{v^2}\right) \qquad u' = 3s^2+24s+32$$

$$v' = 2s+16$$

$$= -\left[\frac{(3s^2+24s+32)(s^2+16s+64)-(s^3+12s^2+32s)(2s+16)}{(s+8)^4}\right]$$

$$= -[3s^4+48s^3+192s^2+24s^3+384s^2+1536s+32s^2+512s+2048) -$$

$$= [3s^4+72s^3+608s^2+2048s+2048] =$$

$$= -[(\quad) - (2s^4+16s^3+24s^3+192s^2+64s^2+512s)]$$

$$-[(\quad) - (2s^4+40s^3+256s^2+512s)]$$

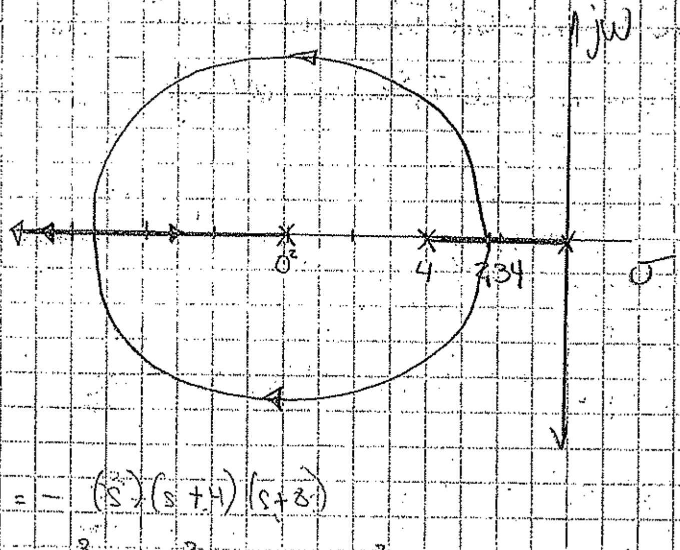
$$-[s^4+32s^3+352s^2+1536s+2048]$$

$S_1 = -13,66$ ✓

$S_2 = -8$ X

$S_3 = -8$ X

$S_4 = -2,34$ ✓



$$EC = k(s+8)^2 = -(s)(s+4)(s+8)$$

$$0 = s^3+12s^2+32s+s^2k+16ks+64k$$

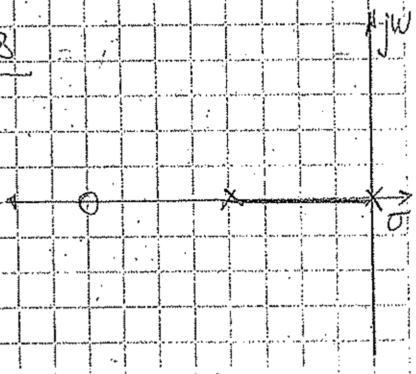
$$0 = s^3+s^2(12+k)+s(32+16k)+64k$$

Con cancelación de polos

$$G(s) = \frac{k\,(s^2+16s+64)}{s(s+4)(s+8)} = \frac{k\,(s+8)^{\cancel{2}}}{s(s+4)\cancel{(s+8)}} = \frac{K(s+8)}{s(s+4)}$$

$$G(s)H(s)+1 = 1 + \frac{k(s+8)}{s(s+4)} = \frac{K(s+8)+s(s+4)}{s(s+4)}$$

$$= \frac{s^2+4s+ks+k8}{s^2+4s}$$



$E.C \longrightarrow s^2 + s(4+k) + 8k = 0$

$n-m = 2-1 = 1 \qquad \varphi_k = 180°$

$\sigma_c = \sum Re_{polos} - \sum Re_{ceros} = -4+8 = 4$

$$\frac{dk}{ds} = 0 \Longrightarrow s^2+4s+k(s+8) = 0$$

$$k = -\frac{(s^2+4s)}{s+8}$$

$$\frac{dk}{ds} = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(2s+4)(s+8) - (s^2+4s)}{(s+8)^2}$$

$$= \cancel{2}s^2 + 16s + \cancel{4s} + 32 - \cancel{s^2} - \cancel{4s} = 0$$

$$= s^2 + 16s + 32 = 0$$

$$\frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4\cdot 32}}{2} = -8 \pm 5{,}66 = -13{,}66$$
$$= -2{,}34$$

puntos de bifurcación

a) $s^2 + (4+k)s + k8 \longrightarrow (jw)^2 + (4+k)jw + k8 = 0$

$-w^2 + 8k = 0 \qquad 4+k = 0$

$-w^2 = -8k = 32 \qquad k = -4$

$w = -\sqrt{32}$

w y k negativos, ESTABLE!

b) $(s+3{,}7+j3{,}7)(s+3{,}7-j3{,}7) = s^2 + 7{,}4s + 27{,}35$

$w_n^2 = |3{,}7 + j3{,}7| = 5{,}23^2 = 27{,}35$

$\xi = \cos \angle 3{,}7 + j3{,}7 = 0{,}707$

$s^2 + (4+k)s + k\,8 = s^2 + 7{,}4s + 27{,}35$

$4+K = 7{,}4$

$k = 3{,}4 \longrightarrow 8K = 27{,}2 \longrightarrow \boxed{K = 3{,}4}$

c) Ecuación Característica Completa

$s^3 + s^2(12+K) + s(32+16k) + 64K = 0$

$$
\begin{array}{l|l}
s^3 + 15{,}4s^2 + 86{,}4s + 217{,}6 & s^2 + 7{,}4s + 27{,}2 \\
\hline
-\ s^3 + 7{,}4s^2 + 27{,}2s & s + 8 \\
\hline
0 \quad 8s^2 + 59{,}2s + 217{,}6 & \\
-\ \ 8s^2 + 59{,}2s + 217{,}6 & \\
\hline
\quad 0s^2 \quad 0s \quad 0 &
\end{array}
$$

La otra raíz se encuentra en $\boxed{S = -8}$

HOJA Nº 17

FECHA

$s^3 + s^2(12+k) + s(32+16k) + 64k$

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & (32+16k) \\ s^2 & (12+k) & 64k \\ s^1 & \dfrac{(12+k)(32+16k) - 64k}{12+k} & \\ s^0 & & \end{array}$$

$= 384 + 32k + 192k + 16k^2 - 64k$

$$\frac{384+160k+16k^2}{12+k}$$

$0 \leq k < \infty$

$(s+3{,}7-j3{,}68)(s+3{,}7+j3{,}68) =$

$|w_n| \angle \beta$

$5{,}22 \angle 44{,}8 \rightarrow w_n^2 = 27{,}2$

$\frac{b}{2} \rightarrow b = 7{,}4 \rightarrow \boxed{s^2 + 7{,}4s + 27{,}2}$

$16k^2 + 160k + 384$

$16(k^2 + 10k + 24)$

$$\frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4\cdot 24}}{2} \quad \begin{array}{l} -4 \\ -6 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} s^3 & 1 & 32+16k & 0 \\ s^2 & 12+k & 64k & 0 \\ s^1 & A & & \\ s^0 & B & & \end{array}$$

$A \rightarrow \dfrac{16(k+4)(k+6)}{(k+12)}$

para $k > 0$, siempre positivo

ESTABLE

$B = \dfrac{\cancel{A}\cdot 64k}{\cancel{A}} = 64k \rightarrow$ idem

b)

$$\begin{array}{l} s^3 + s^2(12+k) + s(32+16k) + 64k \\ -\; s^3 + s^2(7{,}4) + s(27{,}2) \\ \hline 0 \quad s^2(k+4{,}6) \quad s(16k+4{,}8) \quad 64k \end{array} \quad \Big| \; \begin{array}{l} s^2 + 7{,}4s + 27{,}2 \\ \hline s + s_1 \end{array}$$

$64k = 27{,}2 \times s_1 \rightarrow k = \dfrac{27{,}2 \cdot s_1}{64}$

$16k + 4{,}8 = 7{,}4 \times s_1$

$6{,}8 s_1 + 4{,}8 = 7{,}4 \cdot s_1$

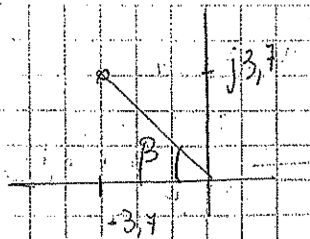
$\boxed{s_1 = 8}$

$\boxed{k = 3{,}4}$

$\boxed{(s^2 + 7{,}4s + 27{,}2)(s+8)}$

NOTA

d)



$\sigma = 3{,}7$

$t_s\big|_{2\%} = 4\tau = \dfrac{4}{\sigma} = 1{,}08$ seg

$\pi = 3{,}14$ rad

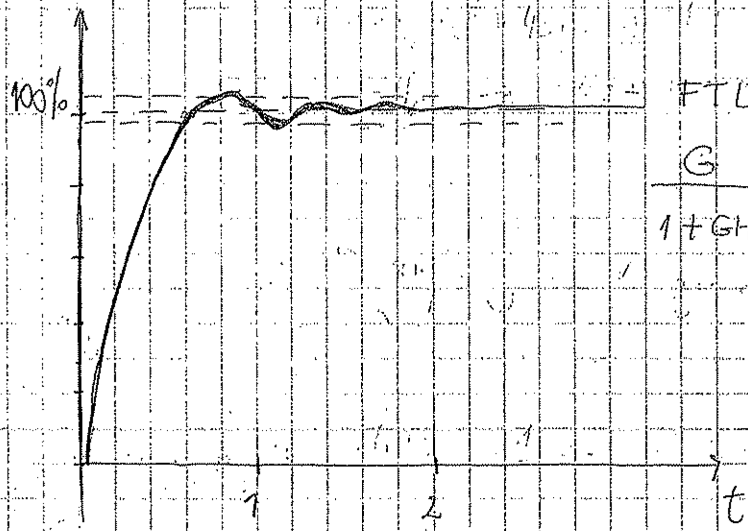
$\beta = 45° = \pi/4$ rad

$t_r = \dfrac{\pi - \beta}{\omega_d} = \dfrac{3/4\,\pi}{3{,}7} = 0{,}637$ seg

$t_p = \dfrac{\pi}{\omega_d} = 0{,}85$ seg

$M_p = e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} = e^{-\pi} = 0{,}043$

$M_p\% = 4{,}3\%$



FTLC

$$\frac{G}{1+GH} = \frac{3{,}4\,(s^2+16s+64)}{s(s+4)(s+8)+3{,}4\,(s^2+16s+64)} = \frac{3{,}4s^2+54{,}4s+217{,}6}{s^3+15{,}4s^2+86{,}4s+217{,}6}$$

e) El sistema es tipo 1. Para entrada escalón, $e_{ss} = 0$

f) " " rampa, $e_{ss} = \dfrac{1}{K_v}$

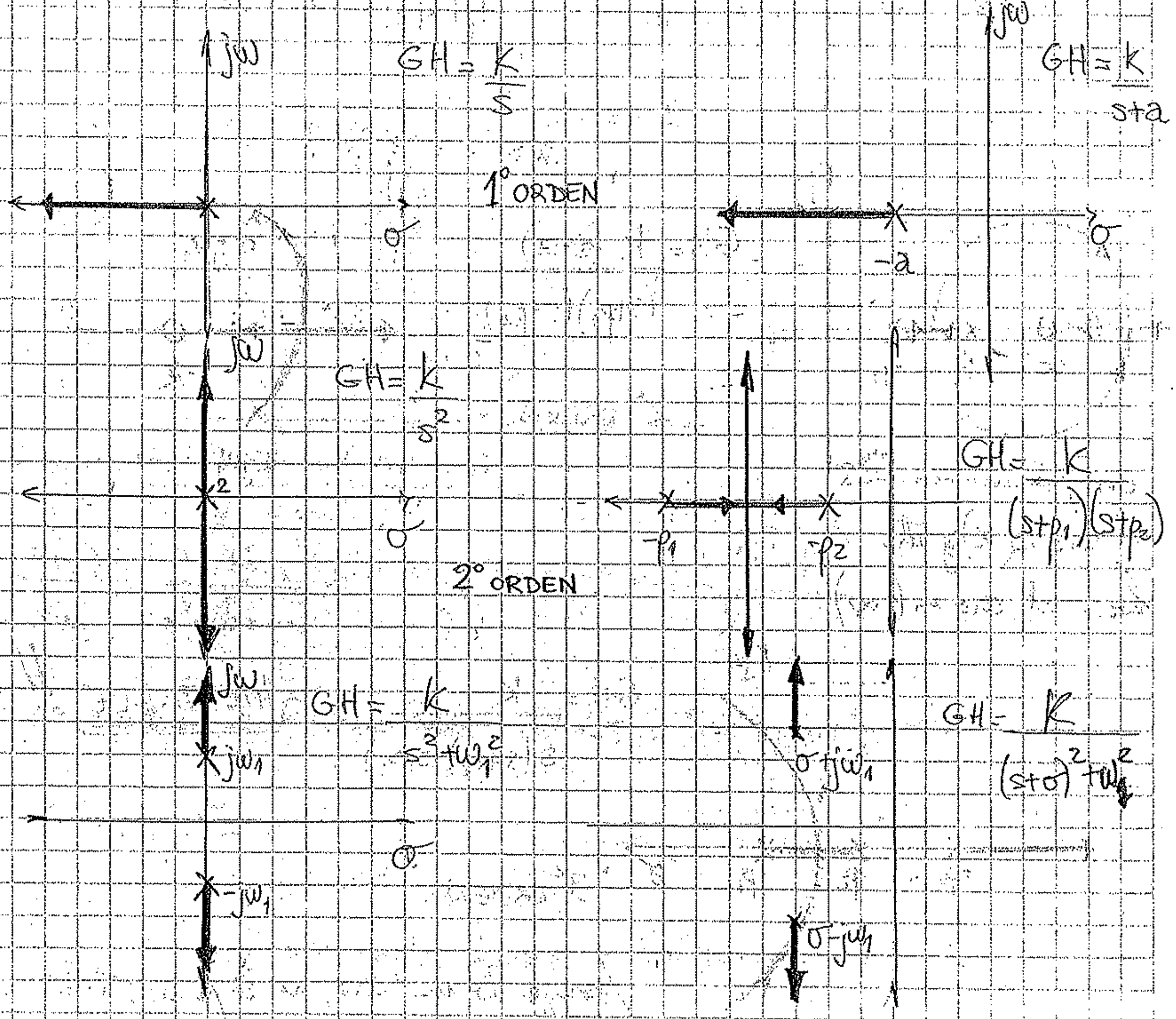
$$K_v = \lim_{s\to 0} s\,G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{3{,}4\,(s^2+16s+64)}{(s+4)(s+8)} = 6{,}8$$

$$e_{ss} = \frac{1}{6{,}8} = \boxed{0{,}147}$$

- NO DA los resultados esperados porque los polos en $-3{,}7 \pm j3{,}7$ no son dominantes con respecto al polo $s = -8$

- Configuración de polos y ceros

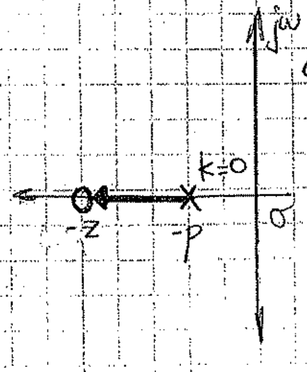
* Sistemas sin ceros



Si el número de polos en lazo abierto es mayor que el número de ceros finitos en dos o más, existe un valor de ganancia K para el cual los lugares de raíces entran en el semiplano derecho del plano S (se vuelve INESTABLE)

Los anteriores son absolutamente estables

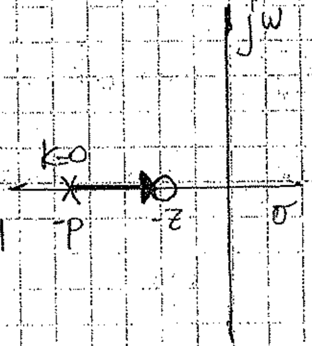
* Sistemas con ceros



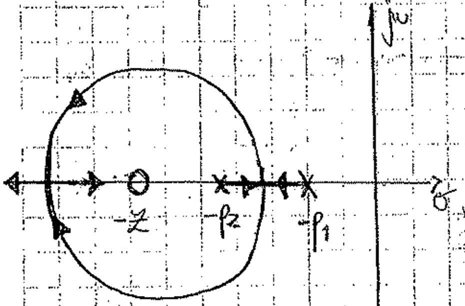
$$GH = \frac{K(s+z)}{(s+p)}$$

$|z| > |p|$

$|p| > |z|$

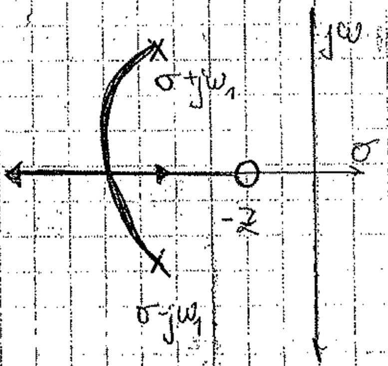


1° ORDEN

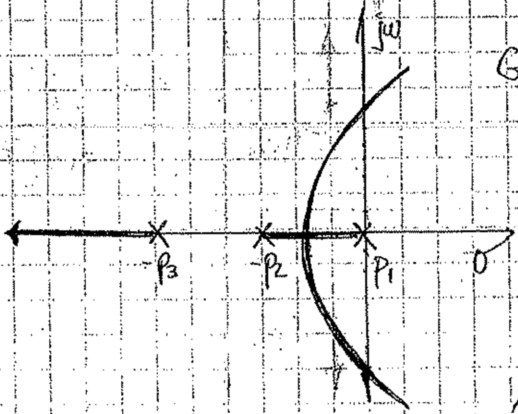


$$GH = \frac{K(s+z)}{(s+p_1)(s+p_2)}$$

2° ORDEN



Un polo se mueve hacia el cero en (-z) y otro hacia el cero en (-∞)

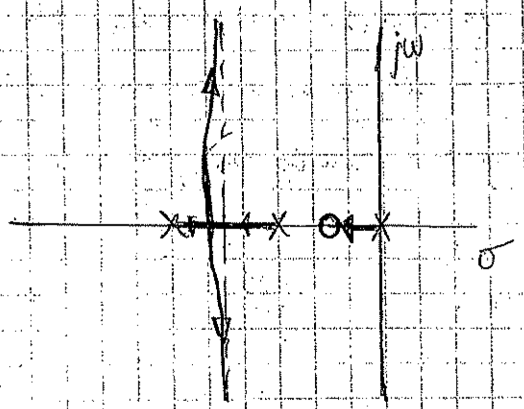


$$GH = \frac{K}{s(s+p_2)(s+p_3)}$$

INESTABLE !!

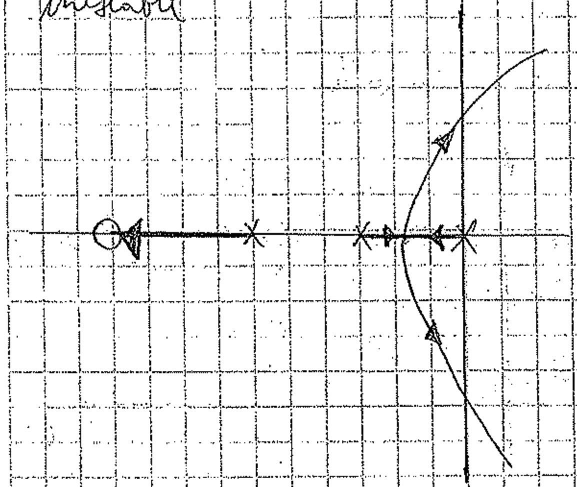
3° ORDEN

Agregando un cero, se lo puede estabilizar



Completamente estable

A medida que el cero se aleja, se parece a un sistema sin cero y vuelve a ser inestable



* SISTEMAS DE 2° ORDEN

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s^2+bs+c} \qquad s_{1,2} \rightarrow \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4c}}{2}$$

1 - $b^2 > 4c$ = Raíces Reales Distintas = Sobreamortiguado

$$G(s) = \frac{K}{(s+s_1)(s+s_2)}$$

2 - $b^2 = 4c$ = Raíces Reales Iguales = Críticamente Amortiguado

$$G(s) = \frac{K}{(s+s_1)^2} \qquad s_1 = -\frac{b}{2} \qquad b_0^2 = 4c$$

$\boxed{b_0 = 2\sqrt{c}}$ es el b que da raíces iguales

3 - $b^2 < 4c$ = Raíces Complejas Conjugadas = Subamortiguado

$$\sigma = -\frac{b}{2} \qquad \omega = \frac{\pm\sqrt{4c-b^2}}{2} j \qquad \begin{aligned} s_1 &= \sigma + j\omega \\ s_2 &= \sigma - j\omega \end{aligned}$$

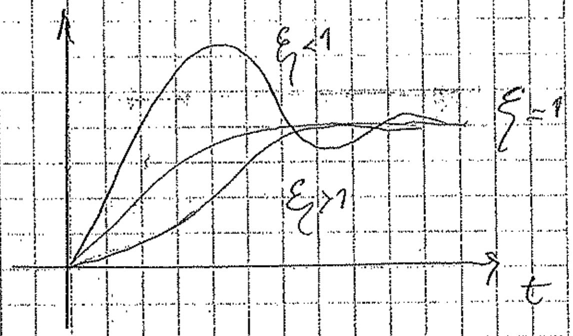
Si $b=0$ → Raíces Imaginarias Puras = No amortiguado

$$S_1 = S_2 = \pm \frac{\sqrt{4c}}{2} = \sqrt{c} = \omega_n$$ frecuencia angular natural no amortiguada

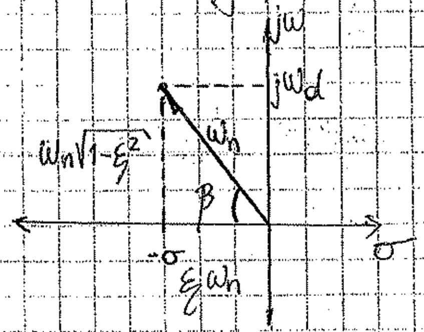
$$\xi = \frac{b}{b_0} = \frac{b}{2\sqrt{c}}$$ factor de amortiguamiento

$$b = \xi 2\sqrt{c} = \xi 2 \omega_n$$

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$



* Por lo general, se desea una respuesta transitoria suficientemente rápida y suficientemente amortiguada. Para esto, ξ debe estar entre $0,4 < \xi < 0,8$. Hay que buscar una solución de compromiso.



$$\sigma = \frac{b}{2} = \xi\omega_n \qquad \cos\beta = \frac{\xi\omega_n}{\omega_n} = \xi$$

$$\omega_n = \sqrt{c}$$

$$\omega_d = \frac{\sqrt{4c - b^2}}{2} = \frac{\sqrt{4\omega_n^2 - 4\xi^2\omega_n^2}}{2}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

* Especificaciones de respuesta transitoria

Se especifican para una entrada escalón unitario.

1- Tiempo de retardo, t_d: tiempo requerido para que la respuesta alcance el 50% del valor final.

2- Tiempo de subida, t_r: Tiempo requerido para que la respuesta pase del 10 al 90%, o del 0% al 100% del valor final (generalmente se usa este último)

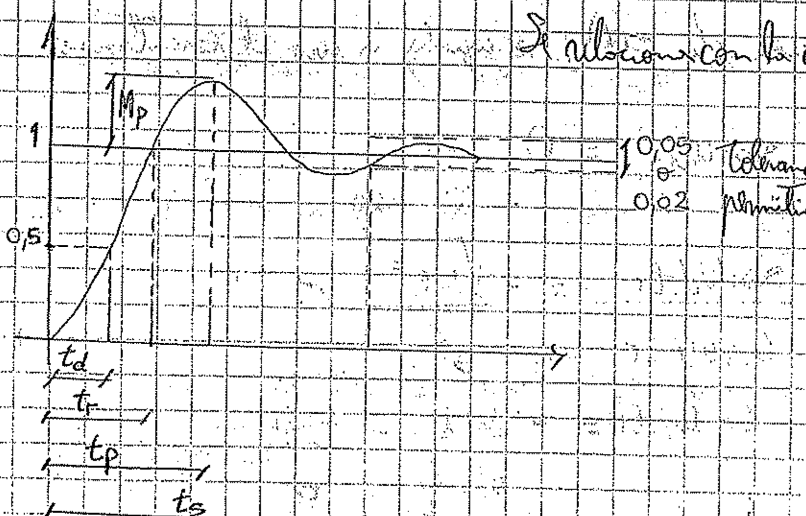
3_ Tiempo pico, t_p: tiempo requerido para que la respuesta alcance el primer pico de sobreimpulso

4- Sobreimpulso máximo, M_p: máximo sobreimpulso medido a partir de la unidad. Se utiliza el porcentaje:

$$M_p(\%) = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \cdot 100\%$$

Este valor indica de manera directa la estabilidad relativa del sistema

5- Tiempo de asentamiento, t_s: (o de establecimiento) tiempo requerido para que la curva alcance y se mantenga dentro de determinado rango alrededor del valor final (2% o 5%)
Se relaciona con la constante de tiempo del sistema



* Para sistemas de 2º orden, la respuesta al escalón es:

- subamortiguado $(0 < \xi < 1)$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s^2+2\xi\omega_n+\omega_n^2)} \longrightarrow C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2+2\xi\omega_n+\omega_n^2)s}$$

$$c(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+2\xi\omega_n}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} = \underbrace{\frac{1}{s}} - \underbrace{\frac{s+\xi\omega_n}{(s+\xi\omega_n)^2+\omega_d^2}} - \underbrace{\frac{\xi\omega_n}{(s+\xi\omega_n)^2+\omega_d}}$$

$$\therefore c(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_d t) - e^{-\xi\omega_n t}\operatorname{sen}(\omega_d t)\frac{\xi\omega_n}{\omega_d}$$

$$\boxed{c(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t}\left[\cos(\omega_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\operatorname{sen}(\omega_d t)\right]}$$ para $t \geq 0$

Si $\xi = 0$, la respuesta se vuelve no amortiguada y las oscilaciones continúan.
Si $\xi > 1$, la respuesta se vuelve sobreamortiguada y no oscilará.

- ω_n es la frecuencia a la cual oscilaría el sistema si $\xi = 0$. Si $\xi > 0$, la frecuencia que se observa es la frec natural amortiguada $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$, que siempre es menor que ω_n.

- Las especificaciones para el caso subamortiguado son:

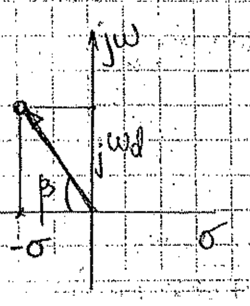
* t_r: de la ecuación de $c(t)$, se iguala a cero el paréntesis

$$\cos \omega_d t_r + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen} \omega_d t_r = 0$$

$$\frac{\operatorname{sen}\omega_d t_r}{\cos\omega_d t_r} = -\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

$$tg(\omega_d t_r) = -\frac{\omega_d}{\omega_n \xi} = \frac{-\omega_d}{\sigma}$$

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} tg^{-1}\left(-\frac{\omega_d}{\sigma}\right)$$



$$\boxed{t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}}$$

t_r inversamente proporcional a ω_d

* t_p : haciendo $\frac{dc(t)}{dt} = 0$ para encontrar el máximo:

$$\frac{dc(t)}{dt} = \ldots$$

$$\left.\frac{dc(t)}{dt}\right|_{t=t_p} = \ldots = \operatorname{sen} W_d \cdot t_p = 0$$

$$W_d \cdot t_p = 0, \pi, 2\pi, \ldots$$

$t_p = \frac{\pi}{W_d}$ El t_p corresponde con medio ciclo de la frecuencia natural amortiguada.

* M_p : se produce cuando $t = t_p$

$$M_p = c(t_p) - 1 = \ldots = e^{-(\sigma/W_d)\pi} = e^{-(\xi/\sqrt{1-\xi^2})\pi}$$

* t_s : la constante de tiempo del sistema de 2º orden es $1/\sigma$

para una tolerancia del 5% $t_s = 3T = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{\xi W_n}$

para una tolerancia del 2% $t_s = 4T = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\xi W_n}$

- La duración del periodo transitorio puede variarse, sin modificar el M_p, ajustando los W_n
- Cuanto más cerca está el polo del origen, el sistema es más lento.

$$T = \frac{1}{\sigma}$$

$$t_d = \frac{1 + \frac{\xi}{\sqrt{2}}}{W_n}$$

* RESPUESTA EN FRECUENCIA

Los métodos de respuesta en frecuencia varían la frecuencia de entrada ω a lo largo de todo el rango de interés y se analiza la respuesta de un sistema en estado estacionario (régimen permanente) a una entrada sinusoidal.

$$R(s) \longrightarrow \boxed{SLIT} \longrightarrow C(s)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} \qquad R(s) = \frac{\overset{=1}{A}\cdot\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$C(s) = \frac{N(s)}{D(s)}\,R(s)$$

$$C(s) = K\,\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{A_1}{s+s_1}+\frac{A_2}{s+s_2}+\dots+\frac{A_n}{s+s_n}+\frac{B}{s+j\omega}+\frac{B^*}{s-j\omega}$$

$$c(t) = \underbrace{A_1 e^{-s_1 t}}_{0} + \underbrace{A_2 e^{-s_2 t}}_{0} + \dots + \underbrace{A_n e^{-s_n t}}_{0} + B\cdot e^{-j\omega t} + B^* e^{j\omega t}$$

$$\boxed{c(\infty) = A\cdot \mathrm{sen}\,(\omega t+\varphi)}$$

* DIAGRAMAS DE BODE

Está formado por 2 gráficos: la gráfica del logaritmo de la magnitud de $G(j\omega)$ y otra la gráfica del ángulo de fase. Ambos se dibujan con la frecuencia en escala logarítmica. La ventaja principal es que la multiplicación de magnitudes se convierte en suma, y que presenta las características de alta y baja frecuencia en un sólo diagrama.

- Los factores básicos que se presentan en una función de transferencia arbitraria $G(j\omega)H(j\omega)$ son:

1- La ganancia K
2- Factores integrales y derivativos $(j\omega)^{\pm n}$
3- Factores de 1º orden $(j\omega T+1)^{\pm n}$
4- Factores cuadráticos $\left[1+2\xi\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]$

1- Ganancia K

La curva de magnitud logarítmica para una ganancia constante K es una recta horizontal cuya magnitud es $20\log K$ [dB]. El ángulo de fase es cero.

$$20\log K \rightarrow <0 \quad si \quad 0<K<1$$
$$ \rightarrow >0 \quad si \quad K>1$$

2- Factores integrales y derivativos $(j\omega)^{\pm n}$

$20\log (j\omega)^{\pm n} = \pm n \cdot 20\log \omega \longrightarrow$ recta con una pendiente de $\pm n \cdot 20$ dB/década.

$\angle(j\omega)^{\pm n} = \pm n \cdot 90^\circ$

Las curvas de magnitud pasarán por el punto (0 dB, $\omega=1$)

3- Factores de 1º orden $(1+j\omega T)^{\pm n}$

$$20\log\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right| = -20\log\sqrt{1+\omega^2T^2}\ \text{dB}$$

$\rightarrow$ BF ($\omega \ll 1/T$) $= -20\log 1 = 0$ dB

$\rightarrow$ AF ($\omega \gg 1/T$) $= -20\log \omega T$ dB

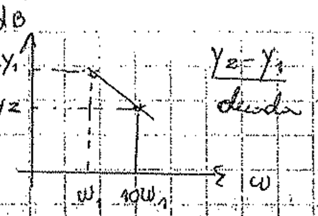
Aproximación mediante asíntotas

En $\omega_1 \longrightarrow -20 \log T\omega_1$

$10\omega_1 \longrightarrow -20 \log T\,10\,\omega_1$

$= -20 \log T10\omega_1 + 20 \log T\omega_1$

$= 20 \log \frac{T\omega_1}{T\,10\omega_1} = 20 \log \frac{1}{10} = -20\,dB \Longrightarrow \boxed{-20\,dB/dec}$



La frecuencia esquina es donde las 2 asíntotas se encuentran ($1/T = \omega$).
Al usar asíntotas, se produce un error, cuyo máximo ocurre en la frecuencia esquina y es:

$$-20 \log \sqrt{1+1} = -20 \log \sqrt{2} = \underline{-3\ dB}$$

El ángulo de fase está dado por $\phi = -Tg^{-1}\,\omega T$

Si $\omega = 0 \longrightarrow \phi = 0°$

$\omega = \frac{1}{T} \longrightarrow \phi = \pm 45°$

$\omega = \infty \longrightarrow \phi = \pm 90°$

<u>Resumiendo</u>: módulo

si $\omega \ll 1/T \longrightarrow 0\,dB$

si $\omega \gg 1/T \longrightarrow \pm n\,20\,dB/dec$

fase

si $\omega \ll 1/T \longrightarrow 0°$

si $\omega = \frac{1}{T} \longrightarrow \pm n.45°$

si $\omega \gg 1/T \longrightarrow \pm n.90°$

<u>4. Factores cuadráticos</u> $\left[1 + 2\xi\left(j\omega/\omega_n\right) + \left(j\omega/\omega_n\right)^2\right]$

$$G = \frac{\omega_n^2}{s^2 + s2\xi\omega_n + \omega_n^2} \xrightarrow[:\,\omega_n^2]{s=j\omega} \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\frac{j\omega}{\omega_n} + 1}$$

Si $\xi > 1$, este factor cuadrático se expresa como un producto de 2 factores de primer orden con polos reales. Si $0 < \xi < 1$, es el producto de 2 factores complejos conjugados. Las aproximaciones asintóticas no son precisas para un factor con valores bajos de ξ. Esto se debe a que la magnitud y fase del factor cuadrático dependen de la frecuencia esquina y del factor de amortiguamiento relativo ξ.

$$20\log\left|\frac{1}{1+2\xi\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right| = -20\log\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

- BF $\longrightarrow$ $\omega \ll \omega_n$ $\quad -20\log 1 = 0$ dB
- AF $\longrightarrow$ $\omega \gg \omega_n$ $\quad -20\log\frac{\omega^2}{\omega_n^2} = -40\log\frac{\omega}{\omega_n}$ dB

Si en $\omega_1 \longrightarrow -40\log \omega_1/\omega_n$

$10\omega_1 \longrightarrow -40\log \omega_1 10/\omega_n$

$$+40\log\frac{\omega_1/\omega_n}{10\omega_1/\omega_n} = +40\log\frac{1}{10} = \boxed{-40\text{ dB/década}}$$

El ángulo de fase está dado por

$$\phi = Tg^{-1}\left[\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right] \quad \left.\begin{array}{l}\longrightarrow \omega=0,\ \phi=0^\circ\\ \longrightarrow \omega=\omega_n,\ \phi=-90^\circ\\ \longrightarrow \omega=\infty,\ \phi=-180^\circ\end{array}\right\}$$

Se tendrá una resonancia cuando $|G(j\omega)|$ tenga un máximo, es decir:

$$g(\omega) = \left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$$ sea mínima. Reescribiendo:

NOTA

$$g(\omega) = 1 - 2\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \frac{\omega^4}{\omega_n^4} + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}$$

reemplazo $u = \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$ y derivo para encontrar el máximo

$$g(u) = 1 - 2u + u^2 + 4\xi^2 u$$

$$\frac{dg}{du} = -2 + 2u + 4\xi^2 = 0$$

$$u = \frac{2 - 4\xi^2}{2} = 1 - 2\xi^2$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_n^2} = 1 - 2\xi^2 \Longrightarrow \boxed{\omega_r = \omega_n\sqrt{(1-2\xi^2)}}$$

Frecuencia de resonancia

- Para $\xi > 0{,}707$, no hay un pico de resonancia. Se produce desde $0 < \xi \leq 0{,}707$. Para $0{,}7 < \xi < 1$, la respuesta escalón es oscilatoria pero están bien amortiguados.
- La magnitud del pico de resonancia se encuentra:

$$M_r = |G(j\omega)_{max}| = \left|\frac{1}{1 + 2\xi j\sqrt{1-2\xi^2} - (1-2\xi^2)}\right| = \frac{1}{\sqrt{(2\xi^2)^2 + (2\xi\sqrt{1-2\xi^2})^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2(1-2\xi^2)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\xi^2(\xi^2 + 1 - 2\xi^2)}} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

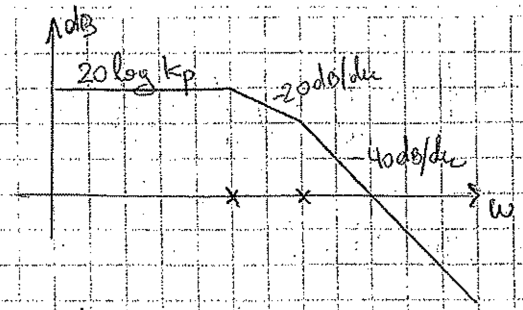
Para $\xi > 0{,}707 \longrightarrow M_r = 1$

Para $\xi \to 0 \longrightarrow M_r \to \infty$

* Tipos de sistemas. Constantes de error estático

- El tipo de sistema determina la pendiente de la curva de magnitud logarítmica a bajas frecuencias.

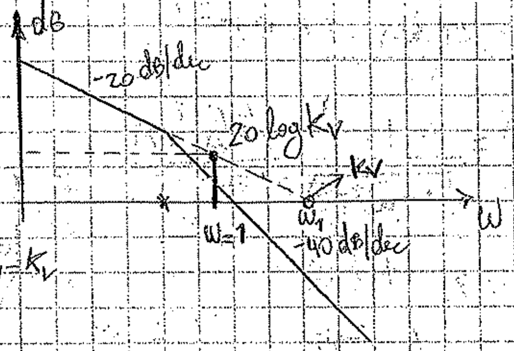
- Tipo 0: (no hay polo al origen)



- Tipo 1:

$20\log\left|\frac{K_v}{j\omega}\right|_{\omega=1} = 20\log K_v$

$20\log\left|\frac{K_v}{j\omega}\right|_{\omega=\omega_1} = 0 \rightarrow \omega_1 = K_v$

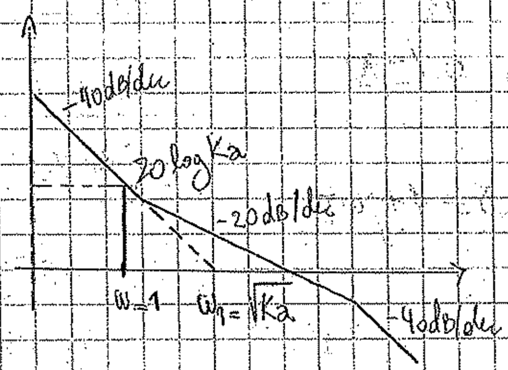


Para BF $\rightarrow G(j\omega) = \frac{K_v}{j\omega}$

$\left|\frac{K_v}{j\omega_1}\right| = 1$

$\boxed{K_v = \omega_1}$

- Tipo 2:



$20\log\left|\frac{K_a}{(j\omega_2)^2}\right| = 20\log 1 = 0$

$\boxed{\omega_2 = \sqrt{K_a}}$

* DIAGRAMAS POLARES (NYQUIST)

Gráfica de la magnitud de G(jw) con respecto al ángulo de fase de G(jw) en coordenadas polares, cuando w varía de cero a infinito. Los ángulos se miden en sentido contrario a las agujas del reloj.
La ventaja es que representa en un solo gráfico la respuesta en frecuencia completa; la desventaja es que no indica de forma clara la contribución de todos los factores individuales de la FTLA.

1 - Factores integrales y derivativos $(j\omega)^{\pm n}$

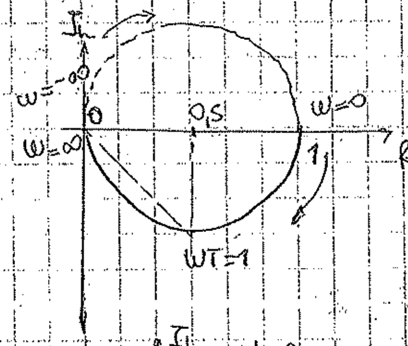
Si $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega}\angle -90$$

Los diagramas polares son los ejes.

2 - Factores de primer orden $(1+j\omega T)^{\pm 1}$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \angle -tg^{-1}\omega T$$

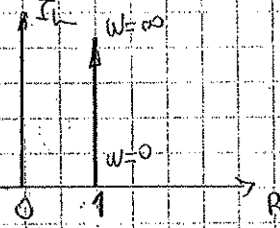


para $\omega = 0 \longrightarrow 1 \angle 0°$

para $\omega = \frac{1}{T} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \angle -45°$

para $\omega = \infty \longrightarrow 0 \angle -90$

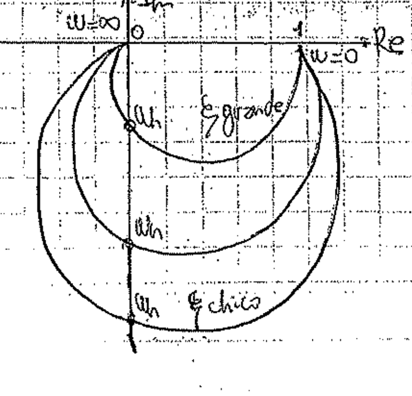
En cambio, para $G(j\omega) = 1 + j\omega T$



3 - Factores cuadráticos $\left[1 + 2\xi\left(j\omega/\omega_n\right) + \left(j\omega/\omega_n\right)^2\right]^{\pm 1}$

Si
$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad \text{para } \xi > 0$$

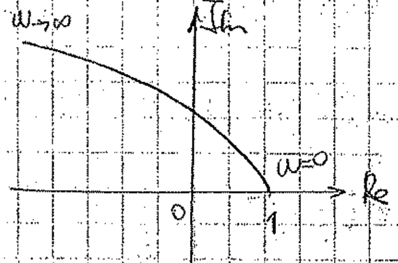
BF $\lim_{\omega \to 0} G(j\omega) = 1 \angle 0°$ AF $\lim_{\omega \to \infty} G(j\omega) = 0 \angle -180°$



- La forma exacta del diagrama polar depende del valor de ξ.
- Cuando $\omega = \omega_n$, $G(j\omega_n) = 1/j2\xi$ y el ángulo es $-90°$ → corte al eje imaginario.

Para $G(j\omega) = 1 + 2\xi\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$; $\xi > 0$

BF $\lim_{\omega \to 0} G(j\omega) = 1 \angle 0°$ AF $\lim_{\omega \to \infty} G(j\omega) = \infty \angle 180$



- La parte imaginaria es positiva para ω>0 y aumenta de forma monótona, además de que la parte real de G(jω) disminuye de forma monótona a partir de la unidad.

- Pasos para elaborar el diagrama de Nyquist

$$G(s) = K \frac{(\text{grado } m)}{(\text{grado } n)} \qquad n \geq m$$

1 - Punto de inicio ($s \to 0$, BF)
  - → ceros al origen $|0| \angle n \cdot 90°$
  - → polos al origen $|\infty| \angle n \cdot -90°$
  - → si no hay, constante K

2 - Punto final ($s \to \infty$, AF)
  - → si $m = n$, constante K
  - → si $n > m$, $|0| \angle (n-m) \cdot -90$

3 - Cambio de variable. Separación parte real e imaginaria. Se iguala parte Re a cero y se obtiene corte eje Im. Se iguala la parte Im a cero y se obtiene corte al eje Re (solo valores reales y positivos de W). Se reemplazan los valores obtenidos de W en G(jW)

4- Se traza la curva de $\omega=0$ a $\omega=\infty$. Se traza la curva espejo de $\omega=-0$ a $\omega=-\infty$.

5- Si la $F(s)$ tiene polos en el origen, se cierra la curva para $s\to 0$. Teniendo en cuenta la cantidad de polos en el origen

φ = número de polos $(-180°)$ $\qquad$ φ = de 0^- a 0^+

6- Cerrar la curva para $s\to\infty$ (no se aplica para $G(s)H(s)$) VER

φ = polos $(-180°)$ $\qquad$ φ = de ∞^- a ∞^+

7- Aplicar el Criterio de Nyquist

→ Si es una función $F(s)$, fijarse la cantidad de rodeos al origen en sentido $0^+ \to \infty^+ \to \infty^- \to 0^-$

→ Si es una función de lazo cerrado $G(s)H(s)$, hacer lo mismo alrededor del punto $-1+j0$.

$N = Z - P$ VER

*El criterio de estabilidad de Nyquist relaciona la respuesta en frecuencia en lazo abierto $G(s)H(s)$ con el número de ceros y polos de $1+G(s)H(s)$ que se encuentran en el semiplano derecho del plano S → permite determinar estabilidad absoluta sin determinar los polos a lazo cerrado.

* Márgenes de fase y de ganancia

La proximidad del lugar geométrico $G(j\omega)$ a rodear el punto $-1+j0$ se utiliza como una medida de la estabilidad del sistema.

_ Márgen de fase: es la cantidad de retardo de fase adicional en la frecuencia de cruce de ganancia requerida para llevar al sistema al borde de la inestabilidad → la frecuencia de cruce de ganancia es la frecuencia a la cual $|G(j\omega)| = 1$. El margen de fase γ es de 180° más el ángulo de fase ϕ de la FTLA en la frecuencia de cruce de ganancia.

$$\gamma = 180° + \phi$$

_ Márgen de ganancia: es el recíproco de la magnitud $|G(j\omega)|$ en la frecuencia a la cual el ángulo de fase es -180° (frecuencia de cruce de fase).

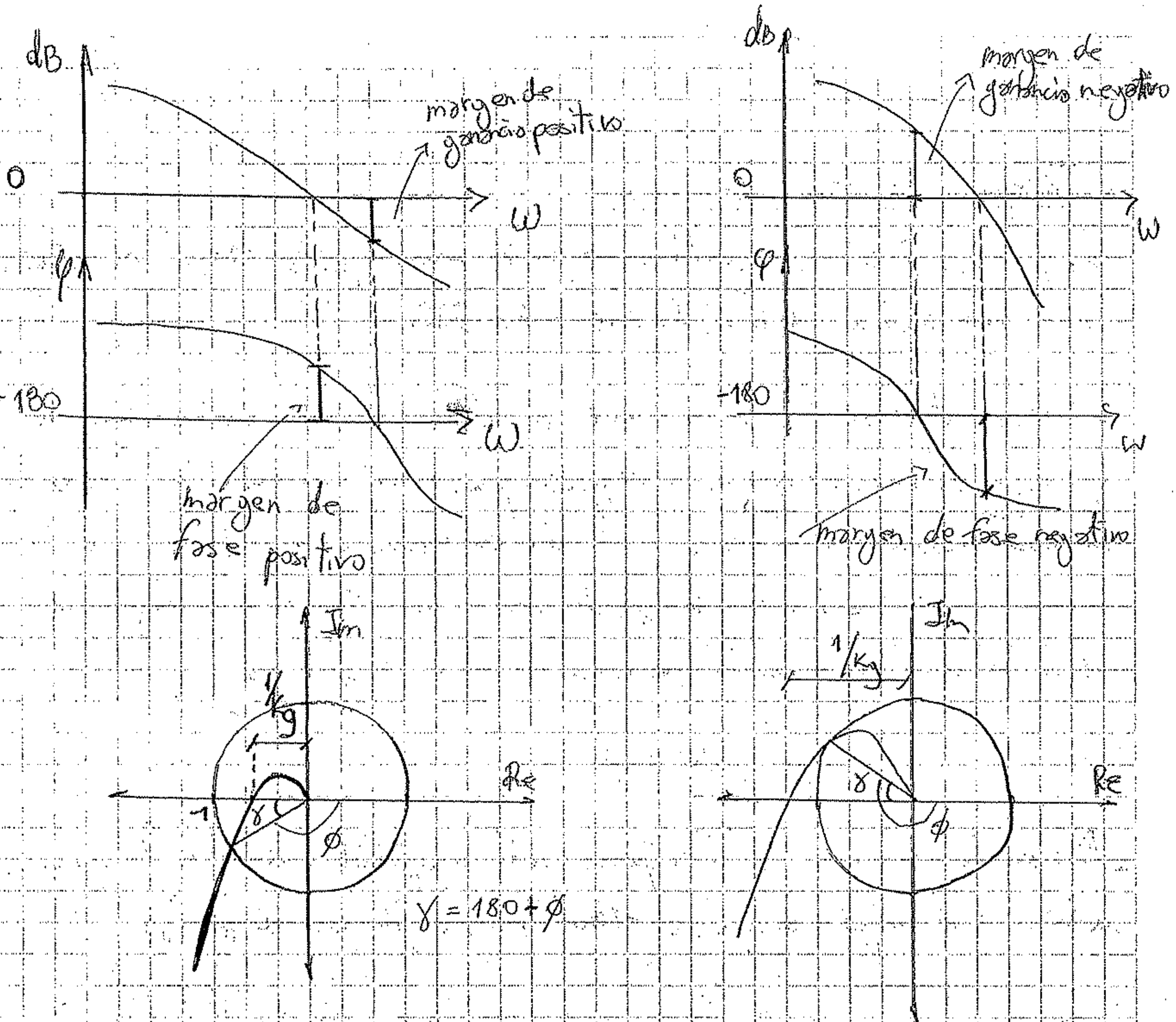
$$K_g = \frac{1}{G(j\omega)} \longrightarrow K_g|_{dB} = 20 \log K_g = -20 \log |G(j\omega_1)|$$

* Ambos márgenes deben considerarse en la determinación de la estabilidad relativa y pueden utilizarse como criterio de diseño.

Para un sistema de fase mínima, los márgenes de fase y de ganancia deben ser positivos con el fin de que el sistema sea estable. Los márgenes negativos indican inestabilidad.

Para un sistema de fase **no** mínima, la interpretación correcta de los márgenes de estabilidad requiere un estudio cuidadoso.

* El márgen de ganancia de un sistema de 1° o 2° orden es infinito, ya que sus diagramas polares no cruzan el eje real negativo.

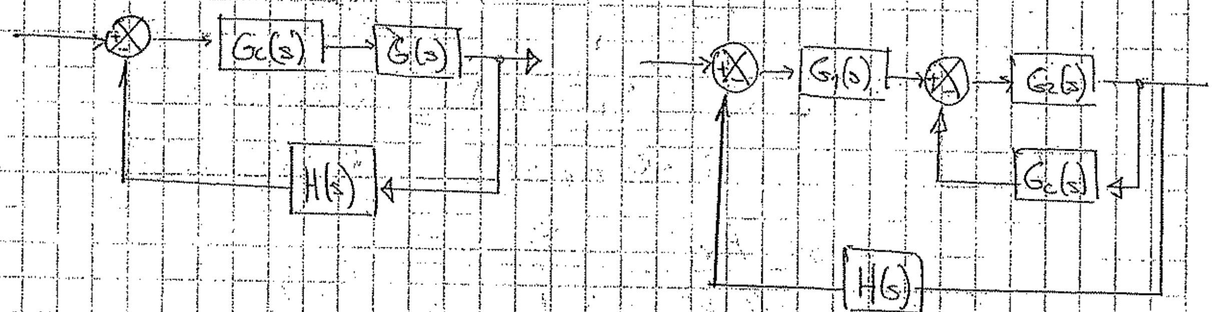


SISTEMA ESTABLE —— SISTEMA INESTABLE

* COMPENSACIÓN

Suponiendo que la planta de un sistema de control está dada y es inalterable, el problema de diseño se convierte en mejorar el comportamiento del sistema mediante la inserción de un compensador → filtro que añade ceros o polos a la FTLA

La compensación puede ser en serie o en paralelo. En general, la compensación en serie es más sencilla, aunque requiere amplificadores adicionales para incrementar la ganancia y/o ofrecer aislamiento. La compensación en paralelo se realiza realimentando algunos elementos y colocando el compensador en el camino de realimentación interno resultante. En general, requiere menor número de componentes que la comp. en serie, siempre y cuando se tenga una señal adecuada (y no se usen comp. adicionales).



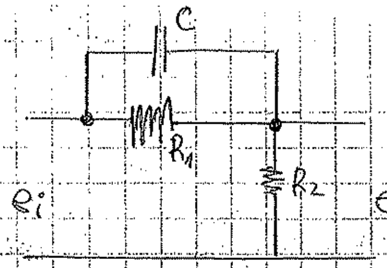
SERIE

PARALELO

* Los más usados son compensadores serie de adelanto (la fase de la salida en estado estacionario tiene un adelanto de fase), de retardo y retardo-adelanto (retardo de fase en BF, adelanto de fase en AF).
* La adición de un polo a la FTLA tiene el efecto de desplazar el lugar de raíces a la derecha, lo cual tiende a disminuir la estabilidad relativa del sistema y el tiempo de establecimiento de la respuesta.
* La adición de un cero a la FTLA tiene el efecto de desplazar el lugar de raíces hacia la izquierda, lo cual tiende a hacer el sistema más estable y se acelera el tiempo de establecimiento de la respuesta.

* COMPENSACIÓN DE ADELANTO

Existen muchas formas de obtener compensadores de adelanto, por ejemplo la red RC siguiente:



$$Z_1 = \frac{R_1 \cdot \frac{1}{C_1 S}}{R_1 + \frac{1}{C_1 S}} = \frac{R_1}{1 + R_1 C S}$$

$$Z_2 = R_2$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R_2}{\frac{R_1}{1+R_1 C s} + R_2} = \frac{R_2}{\frac{R_1 + R_2 + R_1 R_2 C s}{R_1 C s + 1}}$$

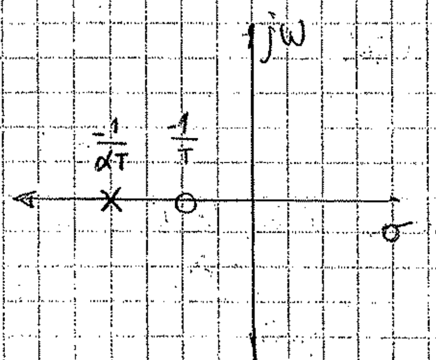
$$= \frac{R_2 \, (R_1 C s + 1)}{R_1 + R_2 + R_1 R_2 C s} = \frac{R_2 R_1 C s + R_2}{R_1 + R_2 + R_1 R_2 C s}$$

$$= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_1 C s + 1}{1 + \frac{R_1 R_2 C s}{R_1 + R_2}}$$

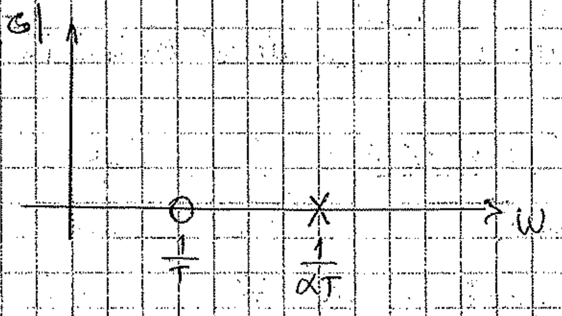
Si $T = R_1 C$ y $\alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \alpha \, \frac{Ts + 1}{T\alpha s + 1} \Longrightarrow \boxed{\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{s + 1/T}{s + 1/\alpha T}}$$

La función de transferencia posee un cero en $s = -1/T$ y un polo en $s = -1/\alpha T$. Como $\alpha < 1$, el polo está siempre a la izquierda del cero (en el lugar de raíces, en el Bode es al revés)



LUGAR DE RAÍCES



BODE

- Método a utilizar:

  * Si se piden especificaciones en el dominio del tiempo (ξ, W_n, M_p, t_p) se debe hacer por el método del lugar de raíces.

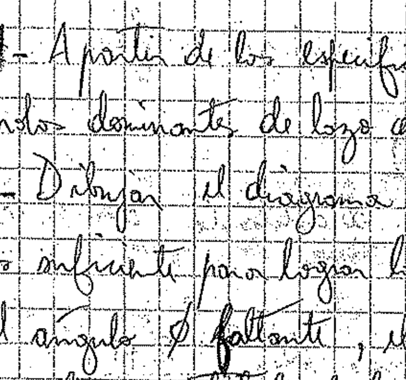
  * Si se piden especificaciones en el dominio de la frecuencia (margen de fase, margen de ganancia, BW, magnitud del pico de resonancia) se debe hacer por el método de la respuesta en frecuencia.

- Procedimiento (Lugar de Raíces)

1- A partir de las especificaciones, determinar la posición deseada de los polos dominantes de lazo cerrado.

2- Dibujar el diagrama del lugar de raíces para ver si el ajuste de ganancia es suficiente para lograr los polos de lazo cerrado deseados. Sino, se calcula el ángulo ϕ faltante, el cual debe ser provisto por el compensador de manera que la suma total de los ángulos sea $\pm 180°(2k+1)$.

Para el cálculo de ϕ debo unir el punto deseado (pd) con el origen, trazar por él una recta paralela al eje de las abcisas y trazar la bisectriz del ángulo α que se formó. Calculo la contribución angular de pd, denominada θ y luego: (θ es la contribución angular de todas las singularidades)



$$\theta + \varphi_c = \pm 180$$

$$\varphi_c = \pm 180 - \theta$$

siendo φ_c el ángulo que aporta el compensador.

Divido φ_c por 2 y trazo un ángulo $\varphi/2$ a cada lado de la bisectriz. El punto que corta al eje de las abcisas más cerca del eje jw es el cero, el otro es el polo.

NOTA

Cada compensador puede aportar como máximo un ángulo de 60°, si $\varphi_c > 60$ se deberán colocar tantos compensadores como sea necesario.

3 _ Se determina la ganancia K_c a partir de la condición de magnitud.

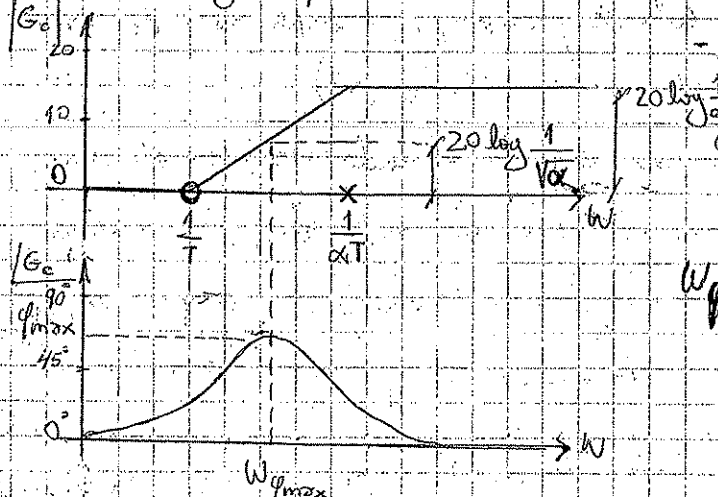
$$\left|\frac{K_c \cdot (s+z_c) \cdot G(s)}{(s+p_c)}\right|_{s=p_d} = 1 \quad \text{y se despeja } K_c.$$

Con este método se modifica el valor de la constante de error de velocidad estática $K_v \longrightarrow K_v = \lim_{s\to 0} s\,G_c(s)\,G(s)$

Si hay un K_v dado, debe aplicarse el método de respuesta en frecuencia!

- Procedimiento (Respuesta en frecuencia)

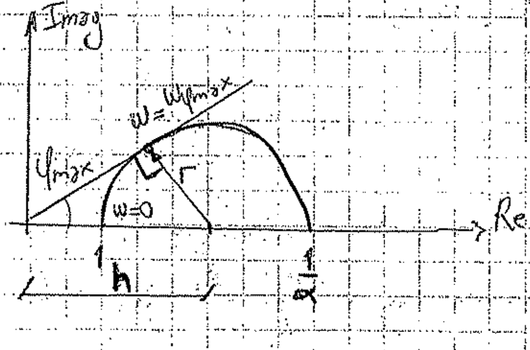
Las características en frecuencia del compensador de adelanto con un cero en $s=-1/T$ y un polo en $s=-1/\alpha T$.



- gráficos de $\dfrac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$

$0<\alpha<1$

$$\omega_{\varphi max} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$



$$r = \frac{\frac{1}{\alpha}-1}{2} = \frac{1-\alpha}{2\alpha}$$

$$h = 1 + r = 1 + \frac{1-\alpha}{2\alpha} = \frac{2\alpha+1-\alpha}{2\alpha}$$

$$h = \frac{1+\alpha}{2\alpha}$$

$$\operatorname{sen} \varphi_{max} = \frac{r}{h} = \frac{1-\alpha / 2\alpha}{1+\alpha / 2\alpha} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

$$(\alpha+1) \operatorname{sen} \varphi_{max} = 1-\alpha$$

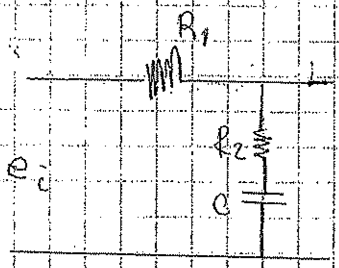
$$\alpha \operatorname{sen} \varphi_{max} + \alpha = 1 - \operatorname{sen} \varphi_{max}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{1-\operatorname{sen} \varphi_{max}}{1+\operatorname{sen} \varphi_{max}}}$$

El procedimiento de diseño es el siguiente:

1. Determinar la ganancia de lazo abierto K que satisfaga el coeficiente de error dado $\rightarrow K = \alpha K_c$
2. Usando la ganancia determinada, calcular el margen de fase (BODE)
3. Determinar el ángulo de adelanto de fase necesario, incrementar este valor en 5°. $MF_{dado} + 5° - M_{F_{REAL}} = \varphi_c$
4. Determinar el factor de atenuación $\alpha = \dfrac{1-\operatorname{sen} \varphi_{max}}{1+\operatorname{sen} \varphi_{max}}$
5. Determinar la frecuencia a la cual la magnitud del sistema no compensado $G_1(j\omega)$ es igual a $-20 \log (1/\sqrt{\alpha})$, esta frecuencia será la frecuencia de cruce de ganancia y se corresponde con $\omega_{\varphi max} = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}\, T}$
6. Determinar las frecuencias esquina del compensador. cero $\rightarrow \omega = 1/T$
polo $\rightarrow \omega = 1/\alpha T$
7. Obtener $K_c = K/\alpha$

* COMPENSACIÓN DE ATRASO



$$Z_1 = R_1$$

$$Z_2 = R_2 + \frac{1}{Cs} = \frac{R_2Cs+1}{Cs}$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2}{Z_1+Z_2} = \frac{\frac{R_2Cs+1}{Cs}}{R_1+\frac{R_2Cs+1}{Cs}} = \frac{R_2Cs+1}{R_1Cs+R_2Cs+1} = \frac{R_2Cs+1}{(R_1+R_2)Cs+1}$$

Si $T = R_2C$ y $\beta = \frac{R_1+R_2}{R_2} > 1$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} \Longrightarrow \boxed{\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{\beta}\,\frac{(s+1/T)}{(s+1/\beta T)}}$$

La función de transferencia posee un cero en $s = -1/T$ y un polo en $s = -1/\beta T$. Como $\beta > 1$, el polo siempre está ubicado a la derecha del cero en el LR.

- Procedimiento (Lugar de Raíces)

Si se ubican el polo y el cero del compensador muy cerca entre sí y del origen:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{\beta}\cdot\frac{s+1/T}{s+1/\beta T} \approx \frac{1}{\beta}$$

por lo que se puede incrementar la ganancia de lazo abierto en un factor β, lo que aumenta los coeficientes de error estático sin alterar las características de respuesta transitoria.

1- Trazar el diagrama de LR para el sistema sin compensar, y ubicar los polos dominantes de lazo cerrado.

2- Determinar la ganancia de lazo abierto utilizando la condición de módulo.

3- Evaluar el coeficiente de error particular especificado en el problema.

NOTA

4- Determinar el valor de incremento del coeficiente de error necesario para satisfacer las especificaciones.

5- Determinar el polo y el cero que producen el incremento necesario en el coef. de error sin modificar el LR original.

$0,1\ Re[pd] < Z_c < 0,5\ Re[pd]$ pd: punto de diseño

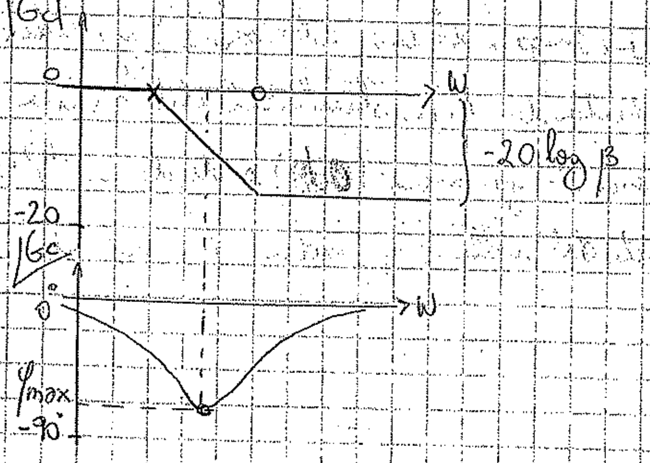
6- Trazar el nuevo LR para el sistema compensado. Ubicar polos dominantes.

7- Ajustar la ganancia del compensador a partir de la condición de módulo para que los polos tengan la ubicación deseada.

Procedimiento (Respuesta en Frecuencia)

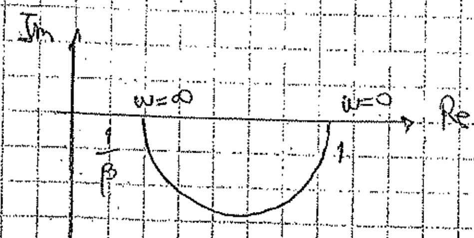
Las características en frecuencia del compensador de atraso con un cero en $s = -1/T$ y un polo en $s = -1/\beta T$ (con $\beta > 1$)

gráfico de $\frac{Ts+1}{\beta Ts+1}$



$W_{\varphi max} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\,T}$ ¿?

$\sqrt{T_1 T_2} = \sqrt{T_1 \beta T_1} = \sqrt{\beta}\,T_1$



1- Determinar la ganancia de lazo abierto para satisfacer las especificaciones del coef. de error.

2- Se traza el Bode y se busca la frecuencia a la cual la fase es igual a $-180 + M\varphi_{requerido}$, este margen de fase incluye 10° más para compensar el desfase del compensador. Se elige esta frecuencia como frecuencia de cruce de ganancia. Si no la tiene, no se puede usar este compensador.

3- Se elige la frecuencia esquina $\omega = 1/T$ (correspondiente al cero) entre una octava y una década por debajo de la nueva frecuencia de cruce.

4- Determinar la atenuación necesaria para llevar la curva de magnitud a 0 dB en la nueva frecuencia de cruce de ganancia. Esta atenuación es $-20 \log \beta$, se calcula el valor de β. Luego se obtiene la frecuencia del polo $\omega = 1/\beta T$

5- Con el valor de K y β se obtiene $K_c = K/\beta$.

* Las redes de retardo son filtros pasa bajos que permiten una ganancia elevada a bajas frecuencias (lo que mejora el error estacionario) y reduce la ganancia en altas frecuencias, evitando la inestabilidad del sistema.
* Como desplaza la frecuencia de cruce de ganancia (0dB) a donde el $M\varphi$ es aceptable, reduce el ancho de banda del sistema y produce una respuesta transitoria más lenta

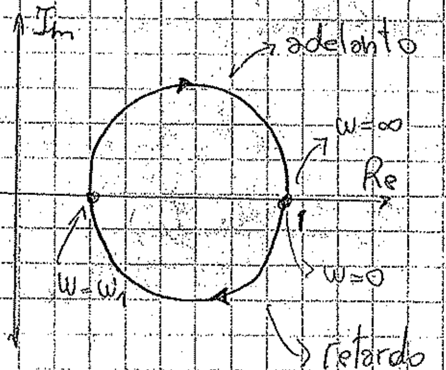
* COMPENSACIÓN DE RETARDO-ADELANTO

La compensación de adelanto acelera la respuesta e incrementa la estabilidad del sistema. La compensación de retardo mejora la precisión en estado estacionario del sistema, pero reduce la velocidad de respuesta.
Se utiliza la compensación de retardo-adelanto (2 polos y 2 ceros, a menos que ocurran cancelaciones) para combinar las ventajas de las compensaciones.

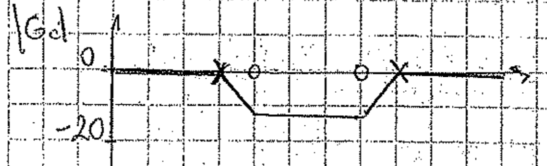
- Procedimiento (Resp en frecuencia)

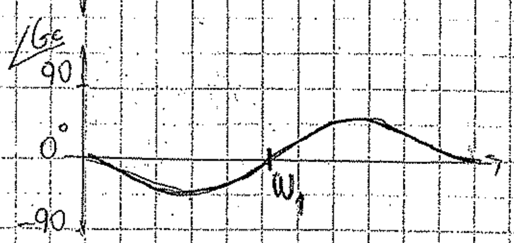
Si la función de transferencia del compensador es:

$$G_c(s) = K_c \underbrace{\left(\frac{s + 1/T_1}{s + \beta/T_1}\right)}_{\text{adelanto}} \cdot \underbrace{\left(\frac{s + 1/T_2}{s + 1/\beta T_2}\right)}_{\text{atraso}} \qquad \beta > 1$$



$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} \quad \text{(el ángulo de fase = 0°)}$$





1. Determinar K_c en función de las especificaciones de régimen.

2. Dibujar el Bode de la función no compensada con el valor de ganancia obtenido. Determinar MF y ω_{c1}.

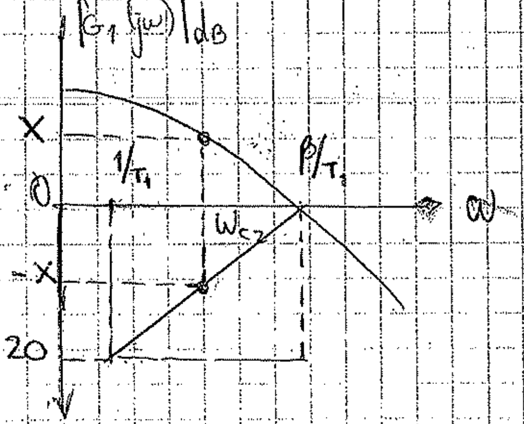
3. Determinar ω_{c2} en $\angle G_1(j\omega_{c2}) = -180°$

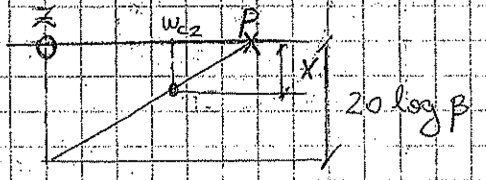
4. Determinar el cero de la parte de atraso entre una década y una octava por debajo de $\omega_{c2} \rightarrow 1/T_2$ $\quad \varphi_{max} = \varphi_{deseado} + 10$

5. Calcular β reemplazando en: $\sin \varphi_{max} = \dfrac{\beta - 1}{\beta + 1}$

6. Determinar el polo de la parte de atraso como $1/\beta T_2$

7. La parte de adelanto se puede determinar del sig. modo. Como la nueva frecuencia de cruce de ganancia es ω_{c2}, se encuentra que $|G_1(j\omega_{c2})|$ es X dB. Entonces es posible dibujar una línea recta de pendiente +20dB/dec que pase por el punto $(\omega_{c2}, -X\,dB)$ y se determinan las frecuencias esquina $1/T_1$ y β/T_1.





$$20 \log \beta = 20 \log \frac{Z}{P}$$

$$\boxed{(20 \log \beta) - X = 20 \log \frac{\omega_{c2}}{Z}}$$

o también

$$\boxed{X = 20 \log \frac{P}{\omega_{c2}}}$$

NOTA

* CONTROLADOR PROPORCIONAL

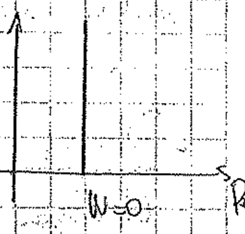
$G_c(s) = K_p$ $\qquad K_p$ = ganancia proporcional.

Es un amplificador con ganancia ajustable

* CONTROLADOR PROPORCIONAL - DERIVATIVO (PD)

$G_c(s) = K_p + K_d \cdot s$ $\qquad K_d$ = constante derivativa

$= K_p(1 + T_d \cdot s)$ $\qquad T_d$ = tiempo derivativo



Este control añade un cero simple en $s = -1/T_d$

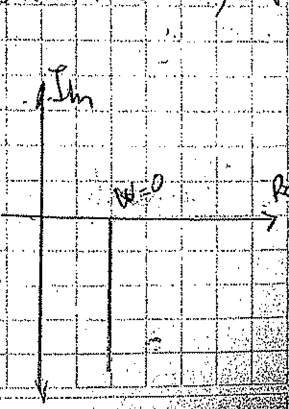
Mejora el amortiguamiento y reduce el sobrepico máximo, reduce el tiempo de crecimiento y el tiempo de establecimiento. Incrementa el ancho de banda, mejora el MG y el MF, aunque puede acentuar el ruido en A.F. No es efectivo para sistemas ligeramente amortiguados.

- Diseño en el dominio del tiempo

Calcular T_d a partir de los polos de lazo cerrado deseados y haciendo cumplir la condición de ángulo. Luego, por la condición de módulo se despeja K_p.

- Diseño en el dominio de la frecuencia

Establecer una nueva frecuencia de corte en $w = 1/T_d$ para el controlador, tal que se logre el margen de fase deseado.



* CONTROLADOR PROPORCIONAL-INTEGRAL (PI)

$G_c(s) = K_p + K_i/s$ $\qquad T_i$ = tiempo integral

$= K_p\left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s}\right)$

$$G_c(s) = K_p\left(\frac{sT_i+1}{T_i s}\right) = K_p\left(\frac{s+1/T_i}{s}\right)$$

Este control añade un polo en $s=0$ y un cero en $s=-1/T_i$. Se incrementa en 1 el tipo del sistema.
Mejora el amortiguamiento y reduce el sobrepico máximo, incrementa el tiempo de crecimiento y disminuye el AB. Mejora el MG y MΦ, filtra el ruido de AF.

- Diseño en el dominio del tiempo

Utilizar el coeficiente de error deseado para calcular $K_{i_{min}}$. Utilizar R-H en la ecuación característica de lazo cerrado para encontrar los valores de $1/T_i$ que hace el sistema estable y seleccionar uno de ellos.
Utilizar solo los polos dominantes, un valor de ξ y calcular K_p y K_i.

- Diseño en el dominio de la frecuencia

Se debe poner la frecuencia de corte en $\omega_c = 1/T_i$, tan lejos a la izquierda como el requisito de AB lo permita, para que el atraso del compensador no degrade el margen de fase alcanzado por el sistema.
Se establece una nueva frecuencia de cruce de ganancia ω_g' para un cierto MΦ, en la cual la ganancia del sistema debe ser 0dB. Para que esto se cumpla, el controlador debe proveer la atenuación necesaria que es igual a la ganancia de la curva en ω_g'

$$|G_p(j\omega_g')|_{dB} = -20\log K_p \qquad K_p < 1$$

Teniendo K_p, calcular K_i, considerando:

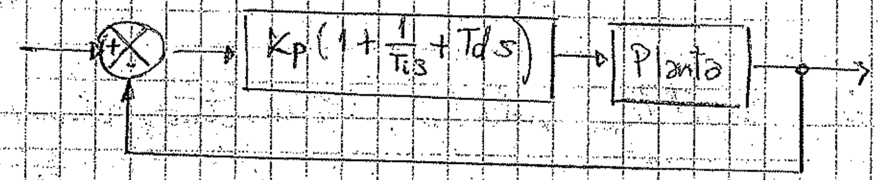
$$\frac{K_i}{K_p} = \frac{\omega_g'}{10} \Bigg\}$$ No debe ser muy pequeño, sino el AB del sistema es muy bajo.

* CONTROLADOR PID

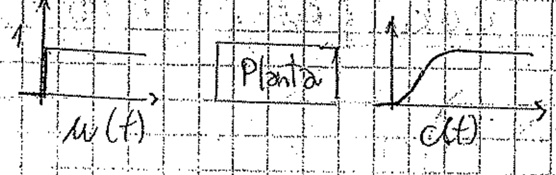
Si no se puede obtener el modelo matemático de una planta, se recurre a procedimientos experimentales para la sintonía de los controladores PID.

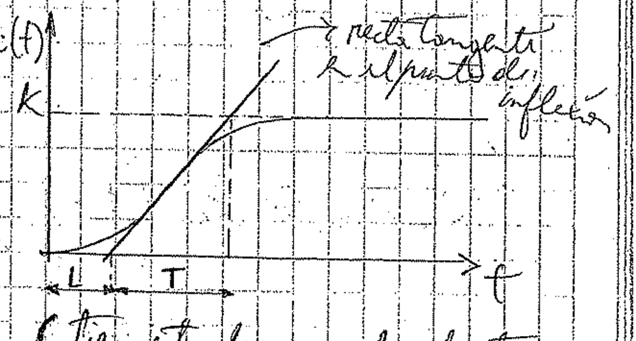
1- Reglas de Ziegler-Nichols

Sugieren un conjunto de valores Kp, Ti y Td que darán una operación estable al sistema. Hay 2 métodos.



- 1º método: se obtiene la respuesta escalón unitario de la planta de manera experimental, y si ésta tiene forma de S (sigmoidal) se la caracteriza de la siguiente forma.





L = tiempo de retardo

T = constante de tiempo

(tiene esta forma si la planta no contiene integradores ni polos complejos conjugados dominantes)

La función de transferencia se aproxima mediante un sistema de 1º orden con un retardo:

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{K e^{-Ls}}{Ts+1}$$

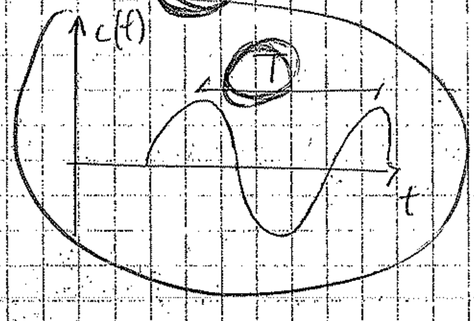
Tipo	K_p	T_i	T_d
P	T/L	∞	0
PI	$0{,}9\, T/L$	$L/0{,}3$	0
PID	$1{,}2\, T/L$	$2L$	$0{,}5L$

$$G_c(s) = \frac{1{,}2T}{L}\left(1 + \frac{1}{2Ls} + 0{,}5Ls\right)$$

$$= 0{,}6T\,\frac{\left(s + 1/L\right)^2}{s}$$

polo al origen y cero doble en $s = -1/L$

- 2º método: se utiliza solo K_p, incrementando desde 0 hasta un valor K_c donde la salida presente oscilaciones sostenidas.



Tipo	K_p	T_i	T_d
P	$0{,}5K_c$	∞	0
PI	$0{,}45K_c$	$\frac{1}{1{,}2}T$	0
PID	$0{,}6K_c$	$0{,}5T$	$0{,}125T$

$$G_c(s) = 0{,}6K_c\left(1 + \frac{1}{0{,}5Ts} + 0{,}125Ts\right)$$

$$= 0{,}075K_c T\,\frac{\left(s + \frac{4}{T}\right)^2}{s}$$

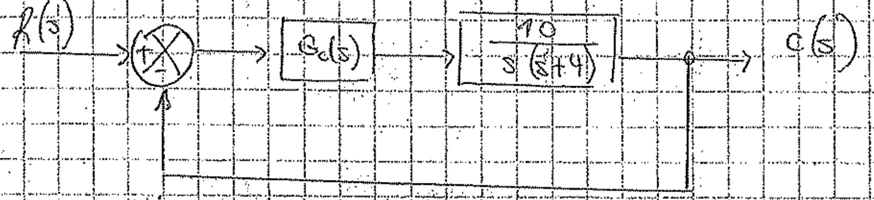
polo al origen y cero doble en $s = -4/T$

Si el sistema tiene un modelo matemático conocido, se puede emplear el LR para encontrar la ganancia crítica (K_c) y la frecuencia de las oscilaciones sostenidas $\boxed{\omega_c \rightarrow 2\pi/\omega_c = T}$

ATRASO

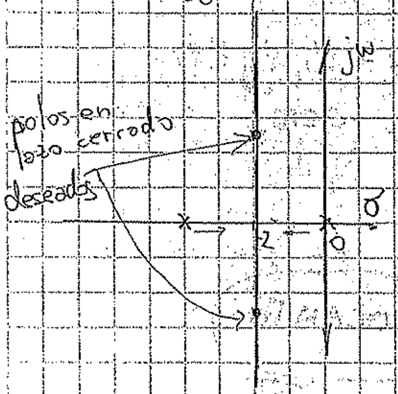
Ejemplo 6.15 (pág. 374)

Sea el sistema de control siguiente. Diseñar un compensador de retardo $G_c(s)$ tal que $K_v = 50\ seg^{-1}$ sin modificar notablemente la localización original de los polos en lazo cerrado, que están en $s = -2 \pm j\sqrt{6}$



$$FTLC \quad \frac{10/s(s+4)}{1+10/s(s+4)} = \frac{10}{s(s+4)+10} = \frac{10}{s^2+4s+10}$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-40}}{2} = -2 \pm \frac{\sqrt{24}}{2} = -2 \pm \sqrt{6}$$



$$\sigma_c = \frac{-4}{2} = -2 \qquad G_c = K_c \frac{(s+1/T)}{(s+1/\beta T)}$$

$$\frac{dk}{ds} = 2s+4 = 0 \quad s=-2 \qquad \lim_{s \to 0} \frac{K_c \, 1/T}{1/\beta T} = K_c \beta$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\, G_c \frac{10}{\cancel{s}(s+4)} = 50$$

$$K_c \beta \; 2{,}5 = 50$$

$$\underbrace{K_c \beta}_{K_c \frac{z_c}{p_c}} = 20$$

Si $K_c = 1$ → para no afectar los polos originales

$\beta = 20$

$$0{,}1\,Re[pd] < z_c < 0{,}5\,Re[pd]$$

$$-0{,}2 < z_c < 1 \longrightarrow z_c = -0{,}2$$

$$FTLA = K_c \frac{s+0{,}2}{s+0{,}01} \cdot \frac{10}{s(s+4)}$$

$$FTLC = \frac{10(s+0{,}2)}{(s+0{,}01)(s^2+4s)+10s+2}$$

$$\frac{10s+2}{s^3+4{,}01s^2+0{,}04s+10s+2} = \frac{10s+2}{s^3+4{,}01s^2+10{,}04s+2}$$

→ raíces FTLC

$s_{1,2} = -1{,}9 \pm 2{,}37j$

$s_3 = -0{,}217$

$$|K| = \left|\frac{\prod(s+p_i)}{\prod(s+z_j)}\right| = \left|\frac{(s+0{,}01)(s+4)s}{(s+0{,}2)}\right|_{s=-2+j2{,}45}$$

Si se quiere ajustar la ganancia K_c para que los polos estén en el lugar adecuado:

$$= \left|\frac{3{,}15 \cdot 3{,}16 \cdot 3{,}16}{3{,}04}\right| = 10{,}35$$

$$K = 10K_c \longrightarrow K_c = \frac{K}{10} = 1{,}035$$

$$FTLA \rightarrow G_1(s) = \frac{1{,}035\,(s+0{,}2)\cdot 10}{(s+0{,}01)(s+4)s}$$

$$FTLC \Rightarrow \frac{10{,}35s+2{,}07}{s^3+4{,}01s^2+10{,}39s+2{,}07} \longrightarrow$$ raíces FTLC

$s_{1,2} = -1{,}9 \pm j2{,}44$

$s_3 = -0{,}216$

$$\lim_{s\to 0} sG_1(s) = 51{,}75\ seg^{-1} = K_V$$

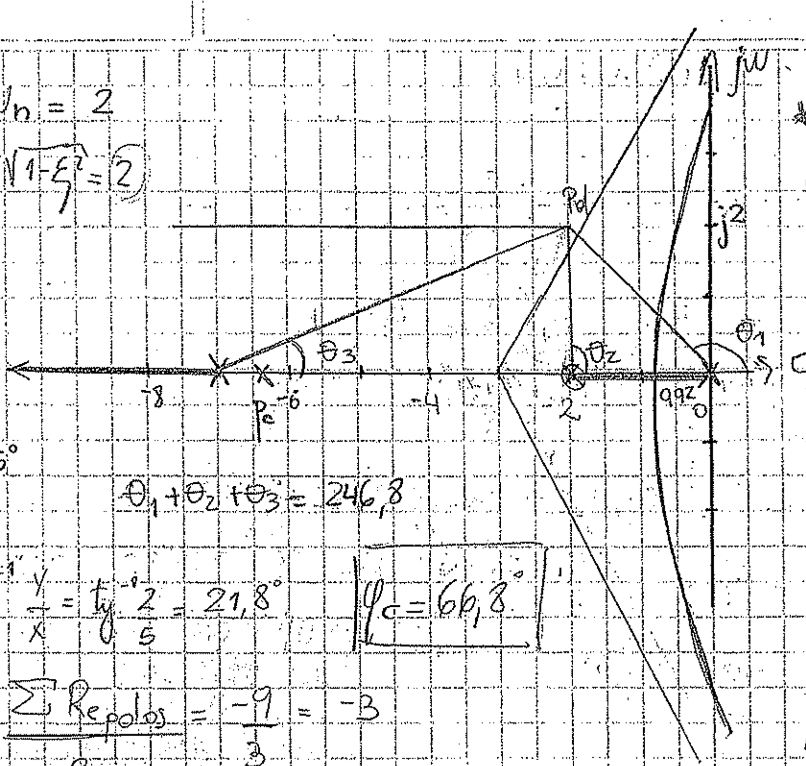
- Ejemplo **Picco** (Apunte) **ADELANTO**

Se pide realizar la compensación para lograr un sistema que presente una respuesta con polos complejos conjugados dominantes que posean una relación de coef. de amortiguamiento $\xi = 0{,}707$ y una frecuencia angular natural no amortiguada $\omega_n = \sqrt{8}$.

La función de transferencia de la planta es:

$\sigma = \xi \omega_n = 2$

$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} = 2$



Utilizo cancelación del polo $(s+2)$ con el cero del compensador. El polo debe aportar

$\varphi_c = 66{,}8 - 90 = -23{,}2°$

$tg\,\varphi_c = \frac{y}{x} = \frac{2}{x}$

$x = \frac{2}{tg\,23{,}2} = 4{,}66$

$p_c = -4{,}66 - 2 = \boxed{-6{,}66}$

$\theta_1 = 135°$

$\theta_2 = 90°$

$\theta_3 = tg^{-1}\frac{y}{x} = tg^{-1}\frac{2}{5} = 21{,}8°$

$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 246{,}8$

$\boxed{\varphi_c = 66{,}8}$

$\sigma_c = \frac{\sum Re_{polos}}{3} = \frac{-9}{3} = -3$

$1 + GH = 0$

$K = -s(s+2)(s+7) = (s^2+2s)(s+7) = s^3 + 2s^2 + 7s^2 + 14s = s^3 + 9s^2 + 14s$

$\frac{dK}{ds} = 3s^2 + 18s + 14 = 0$

$s^2 + 6s + 4{,}67 = 0 \rightarrow \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 18{,}68}}{2} \rightarrow \begin{cases} -5{,}08 & \times \\ -0{,}92 & \checkmark \end{cases}$

$s^3 + 9s^2 + 14s + K$

s^3	1	14
s^2	9	K
s^1	$\frac{126-k}{1}$	0
s^0	$(126-k)k$	

$126 - K = 0$

$K = 126$

Inestable para $K > 126$

$G_c(s) = k_c \cdot \frac{(s+2)}{(s+6{,}66)}$

$\left| k_c\, G_c\, G_1 \right|_{pd} = 1 \Rightarrow k_c \left| \frac{1}{|4{,}66+j2|\,|2+j2|\,|5+2j|} \right| = 1$

$k_c \left(\frac{1}{5{,}07 \cdot 2{,}83 \cdot 5{,}38} \right) = 1 \longrightarrow \boxed{k_c = 77{,}2}$

NOTA

$$FTLA \Rightarrow \frac{77,2}{(s+7)(s+6,66)\,s}$$

$$FTLA = G_c \cdot G_1$$

$$FTLC = \frac{G_c G_1}{1 + G_c G_1}$$

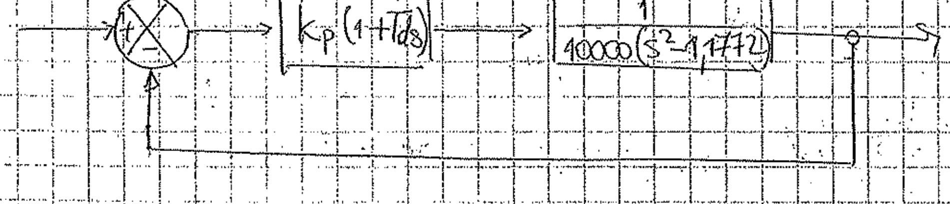
$$FTLC \Rightarrow \frac{77,2}{(s^2+7s+6,66s+46,62)\,s+77,2}$$

$$\frac{77,2}{s^3+13,66\,s^2+46,62\,s+77,2}$$

raíces $\begin{cases} s_1, s_2 = -2 \pm j2 \\ s_3 = -9,66 \end{cases}$ ✓

Ejemplo 6.14 (pag. 372) (PD)

Considere un sistema con una planta inestable. Utilizando el método de LR diseñe un control PD tal que el factor de amortiguamiento $\xi = 0,7$ y $\omega_n = 0,5$ rad/seg.

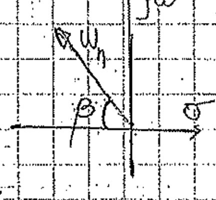


Los polos de lazo cerrado deben estar en

$S = 0,5\ \angle 180 \pm \beta$ donde

$S = 0,5\ \angle 134,43$ $\cos\beta = \xi$

$s_{1,2} = -0,35 \pm j\,0,357$ $\beta = \cos^{-1}\xi = 45,57$

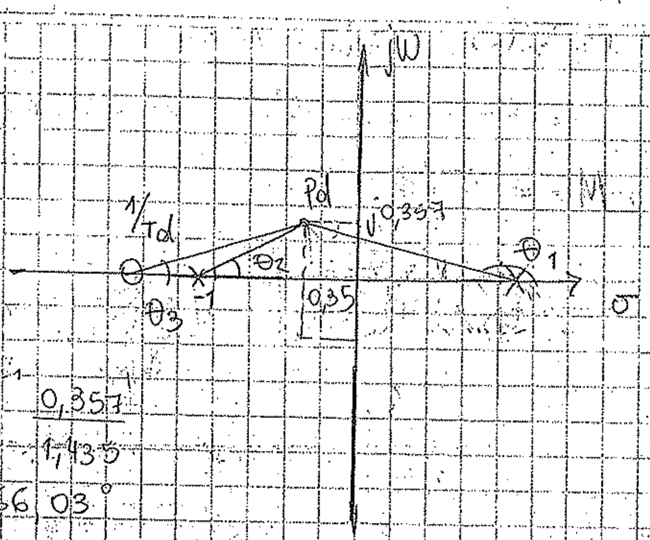


NOTA

$s^2 - 1{,}1772 = 0$

$S_1 = 1{,}085$

$S_2 = -1{,}085$



$\theta_1 = tg^{-1}\dfrac{y}{x} = tg^{-1}\dfrac{0{,}357}{1{,}435}$

$= 166{,}03°$

$\theta_2 = tg^{-1}\dfrac{y}{x} = tg^{-1}\dfrac{0{,}357}{0{,}73} = 26{,}06°$

$-\theta_1 - \theta_2 + \theta_3 = 180°$

$-166{,}03 - 26{,}06 + \theta_3 = 180$

$\boxed{\theta_3 = 12{,}09°}$

$tg\,\theta_3 = \dfrac{y}{X - 0{,}35} = \dfrac{0{,}357}{X - 0{,}35} = 0{,}214$

$1{,}66 = X - 0{,}35$

$X = 2{,}02$

$1/Td = 2{,}02$

$Td = 0{,}495$

$\left| K_p (1 + Td\, s) \dfrac{1}{10000(s^2 - 1{,}1772)} \right| = 1$

$G_c(s) = 1{,}42\,(1 + 0{,}495 s)$

$\left| K_p \dfrac{(1 + 0{,}495 s)}{10000\,(s^2 - 1{,}1772)} \right|_{pd} = 1$

$\left| K_p \dfrac{(0{,}83 + j\,0{,}177)}{10000\,(s^2 - 1{,}1772)} \right|_{pd} = K_p \left| \dfrac{0{,}849}{10000 \quad 1{,}479 \quad 0{,}812} \right| = 1$?

$\boxed{K_p = 14.145}$

$\boxed{G_c(s) = 14.145\,(1 + 0{,}495 s)}$

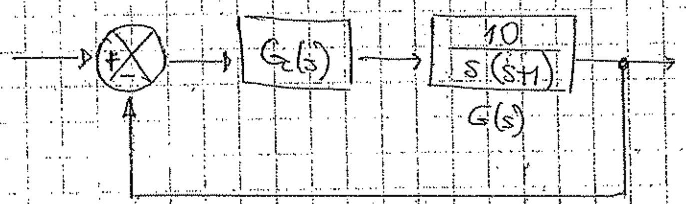
$FTLA \Rightarrow \dfrac{14145\,(1 + 0{,}495 s)}{10000\,(s^2 - 1{,}1772)}$

$FTLC \Rightarrow \dfrac{7001 s + 14.145}{10000 s^2 + 7001 s + 2373} \longrightarrow$ raíces $\rightarrow S_{1,2} = -0{,}35 \pm j\,0{,}34$

(ADELANTO)

- Ejemplo 7.24 (pág 548)

Diseñe un compensador tal que el sistema en lazo cerrado satisfaga los siguientes requisitos: constante de error estático de velocidad = 20 seg^{-1}; margen de fase = 50°, MG ≥ 10 dB.



Compensador de adelanto
$$G_c(s) = K_c\alpha\,\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K_c\,\frac{s+1/T}{s+1/\alpha T} \qquad \alpha<1$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\,G_c(s)G(s) = 20$$

$$\lim_{s\to 0} s\,K_c\alpha\,\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}\,\frac{10}{s(s+1)} = K_c\alpha\,10 = 20$$

$$K_c\alpha = 2$$

$$G_1(s) = \frac{20}{s(s+1)} \Longrightarrow \text{BODE}$$

En $\omega_c = 4{,}4$
$$\underline{/G(j4{,}4)} = \frac{20}{j4{,}4(j4{,}4+1)} = \frac{20}{-19{,}36+j4{,}4} = \frac{20}{-19{,}85\underline{/-12{,}7^\circ}} = 1\underline{/167{,}3^\circ}$$

$$M\varphi = 180 - 167{,}3 = 12{,}7^\circ$$

$$\varphi_c = 50 + 5^\circ - 12{,}7^\circ = 42{,}3^\circ$$

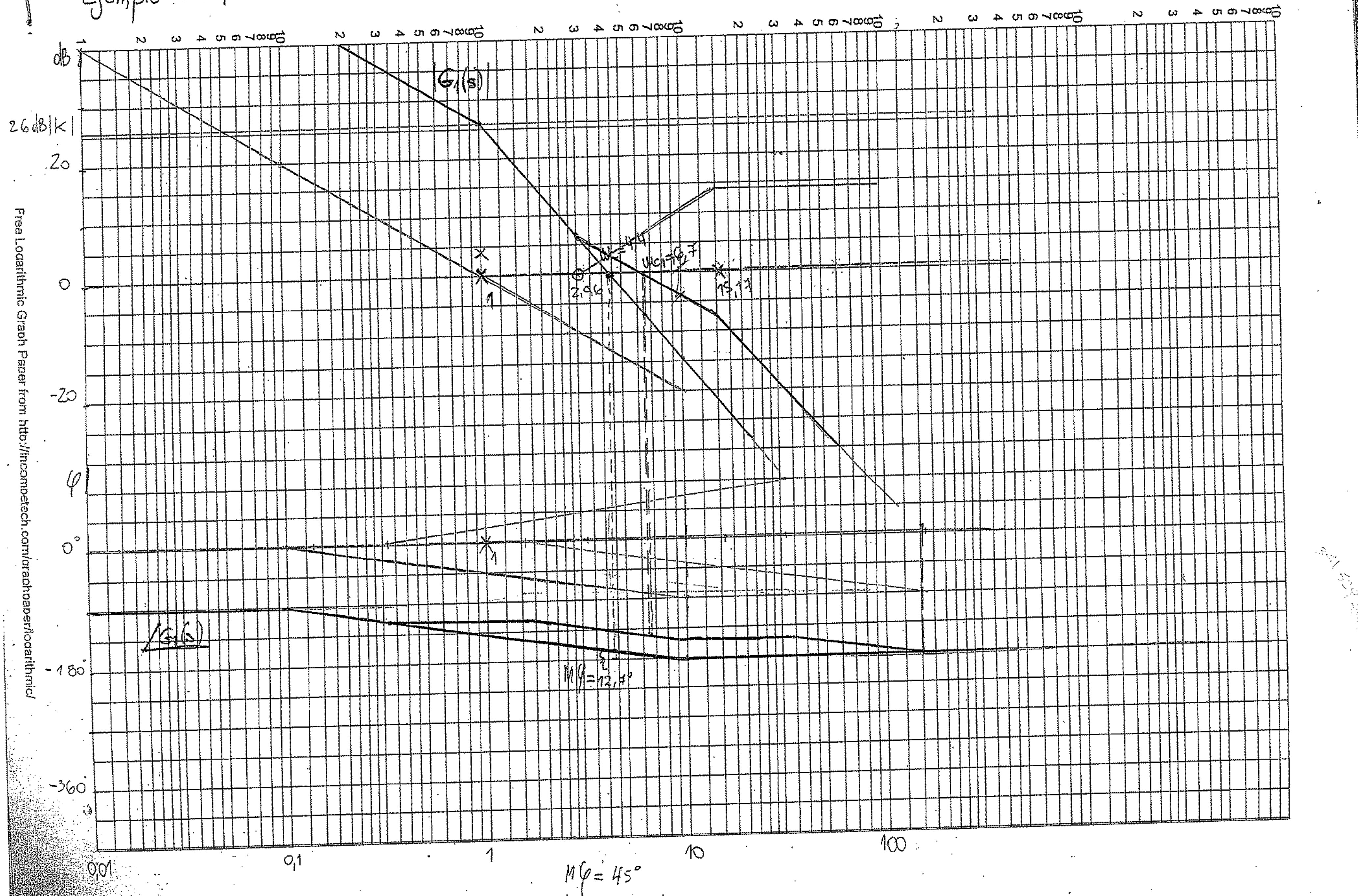
$$\alpha = \frac{1-\sin\varphi_{max}}{1+\sin\varphi_{max}} = \frac{0{,}327}{1{,}673} = \boxed{0{,}195}$$

$$-20\log\left(1/\sqrt{\alpha}\right) = -7{,}1\,dB \Longrightarrow \omega_{\varphi max} = 6{,}7\ \text{rad/seg} = 1/\sqrt{\alpha}T$$

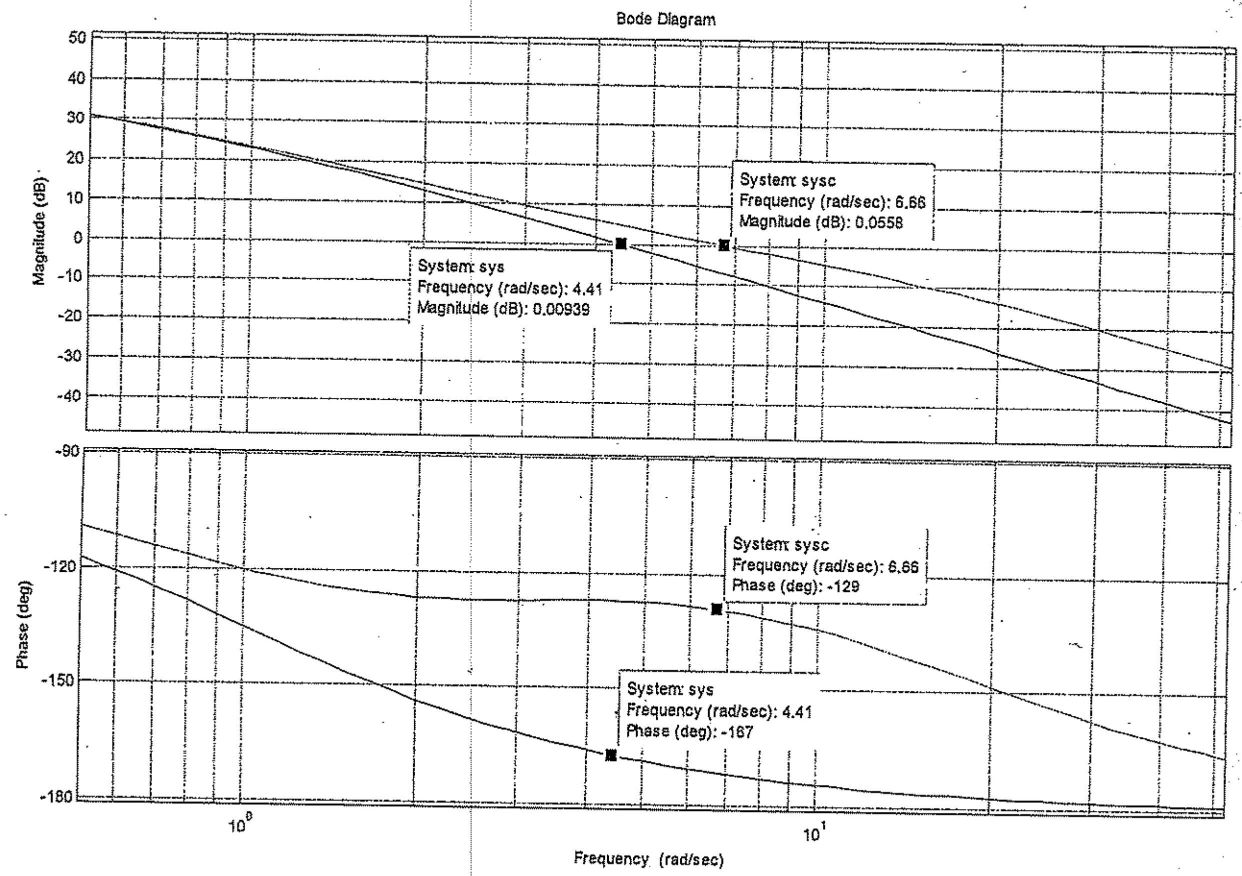
Lo que aumenta el compensador en su máximo

$$T = 0{,}338$$

Ejemplo 7.24



$M\varphi = 45°$
$MG \geq 40$ dB



	MG	Mfase	ωG	ωfase
sys	Inf	12.7580	Inf	4.4165
sysc	Inf	50.8343	Inf	6.6920

HOJA Nº 37

FECHA

$cero = 1/T = 2{,}96$ $\qquad K_c = \frac{Z}{\alpha} = 10{,}26$

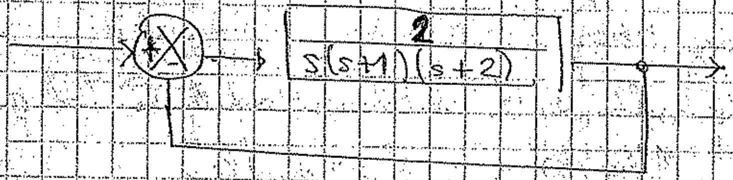
$polo = 1/\alpha T = 15{,}17$

$$\boxed{G_c(s) = 10{,}26 \frac{s + 2{,}96}{s + 15{,}17}}$$

$$G_c(s)G(s) = 10{,}26 \frac{s+2{,}96}{s+15{,}17} \cdot \frac{10}{s(s+1)} = \frac{102{,}6\,(s+2{,}96)}{(s+15{,}17)(s+1)\,s}$$

Ejemplo 7.27 (pág. 505) ATRASO

Se desea compensar el sistema siguiente de forma que la constante $K_v = 5\ seg^{-1}$; $M\varphi = 40°$ y $MG \geq 10\ dB$, utilizando un compensador de retardo.



$$G_c(s) = K_c \beta \frac{Ts+1}{\beta T s + 1} = K_c \frac{s + 1/T}{s + 1/\beta T} \qquad \beta > 1$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\, G_c(s) G(s) = \lim_{s \to 0} K_c \beta \frac{Ts+1}{\beta T s+1} \frac{2}{s(s+1)(s+2)} = 5$$

$$K_c\beta \frac{2}{2} = 5$$

$$\boxed{K_c\beta = 5}$$

$$G_1(s) = 5 \frac{2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{5}{s(s+1)(\frac{s}{2}+1)}$$

$|K| = 20 \log 5 = 14\ dB$ $\qquad W_{c_1}\big|_{M\varphi = 50} = 0{,}7\ rad/seg$

$W_{c_1} = 2{,}1\ rad/seg$ $\qquad M\varphi = -20°$

$MG = -10\ dB$

$1/T \rightarrow \quad 0,1\omega_{c1} < 1/T < 0,5\omega_{c1}$

$0,07 < 1/T < 0,35$

$\boxed{0,15}$ Cero

Se necesita bajar la curva 17dB

$20 \log \beta = 17$

$\boxed{\beta = 7,08} \longrightarrow \omega_{polo} = 1/\beta T = 0,02$ rad/seg

$K_c \beta = 5$

$K_c = 0,706$

$$\boxed{G_c(s) = 0,706 \frac{s+0,15}{s+0,02}}$$

$$G_c(s) \cdot G(s) = 0,706 \frac{s+0,15}{s+0,02} \cdot \frac{2}{s(s+1)(s+2)}$$

Ejemplo 7.25 (pág. 565) ATRASO-ADELANTO

Diseñe un compensador $G_c(s)$ de retardo-adelanto tal que las constantes $K_v = 10\ seg^{-1}$, $M\varphi = 50°$ y el $MG \geq 10$ dB.

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)}$$

$$G_c(s) = K_c \left(\frac{s + 1/T_1}{s + \beta/T_1}\right) \left(\frac{s + 1/T_2}{s + 1/\beta T_2}\right) \qquad \beta > 1$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} s G_c G = \lim_{s \to 0} K_c \frac{K}{s(s+1)(s+4)} = 10$$

$K_c \cdot K = 40$ si $K_c = 1$

$\boxed{K = 40}$

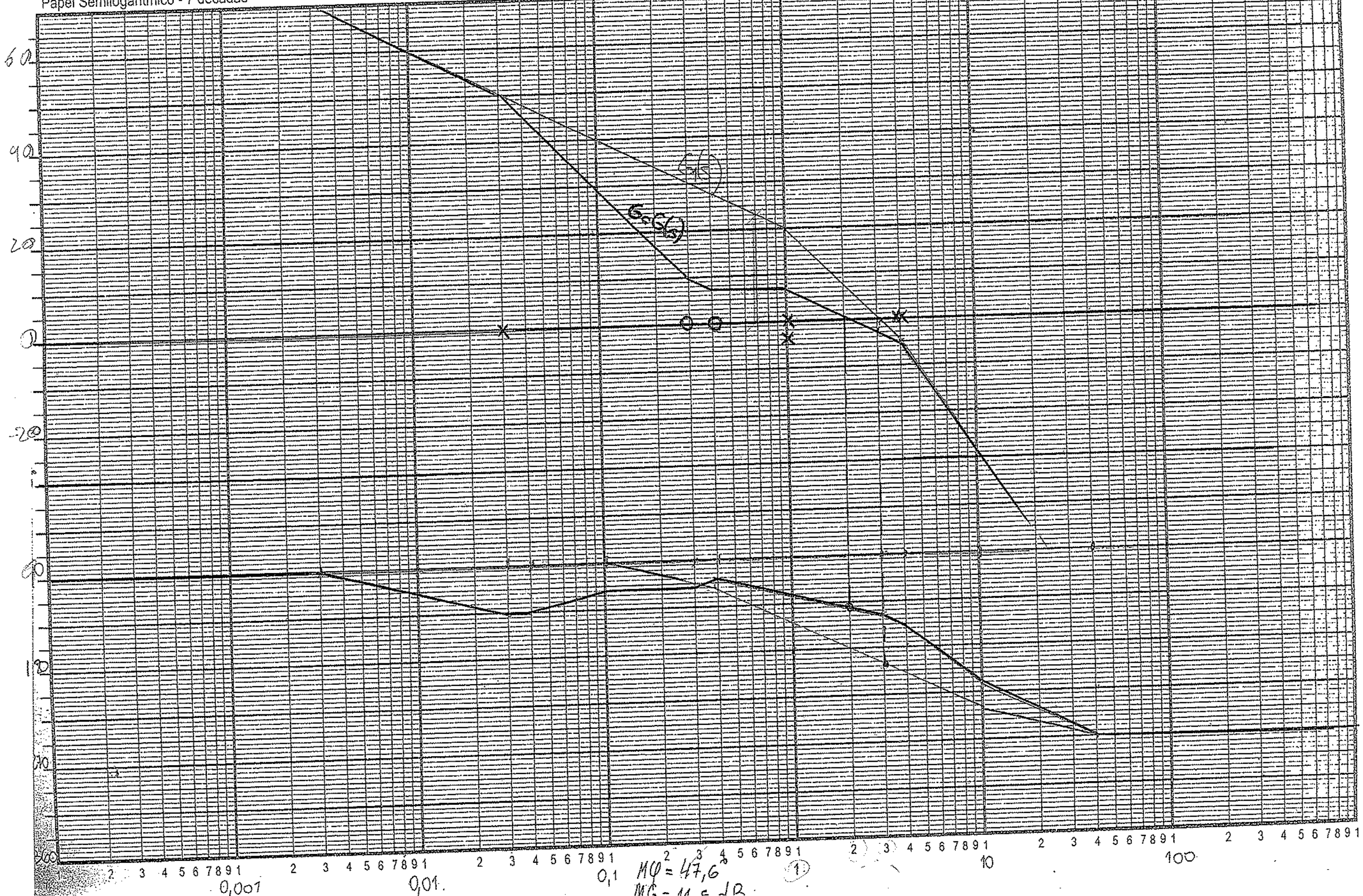
$|K| = 20 \log \frac{40}{4} = 20$

NOTA

Ejemplo 7.25

Universitas. Editorial Científica Universitaria. Pje España 1467 - B° Nueva Cba (Al borde de Ciudad Universitaria) - Te: (0351) 4680913 - (5000) Córdoba.

Papel Semilogarítmico - 7 decadas



HOJA Nº 38

FECHA

$W_{c1} = 2{,}77 \ \frac{rad}{seg}$ $\quad MQ = -15°$

$W_{c2} = 2 \ rad/seg$ $\quad MQ = 0°$

$0{,}1 W_{c2} < 1/T_2 < 0{,}5 W_{c2}$

$0{,}2 < 1/T_2 < 1$

$\boxed{1/T_2 = 0{,}4 \ \frac{rad}{seg}}$

$\sin \varphi_{max} = \frac{\beta - 1}{\beta + 1} = \sin 60° = 0{,}866$

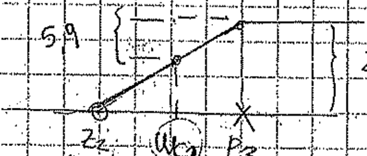
$0{,}866(\beta + 1) = \beta - 1$

$0{,}866 + 1 = \beta(1 - 0{,}866) = \beta \cdot 0{,}134$

$\beta = \frac{1{,}866}{0{,}134} = 13{,}92 \approx 14 \longrightarrow \varphi_{max} = 60{,}07°$

$polo = 1/\beta T_2 = \boxed{0{,}029 \ \frac{rad}{seg}}$

atraso $\Longrightarrow \boxed{\frac{s + 0{,}4}{s + 0{,}029}}$



$G(jW_{c2}) = 5{,}9 \ dB$

$20 \log \frac{p_2}{z_2} = 22{,}9$

adelanto $\Longrightarrow \boxed{\frac{s + 0{,}28}{s + 3{,}95}}$

$20 \log \frac{W_{c2}}{z_2} = 17 \rightarrow \frac{W_{c2}}{z_2} = 7{,}08$

$z_2 = 0{,}28 \ rd/seg$

$p_2 = \beta z_2 = 3{,}95 \ \frac{rad}{seg}$

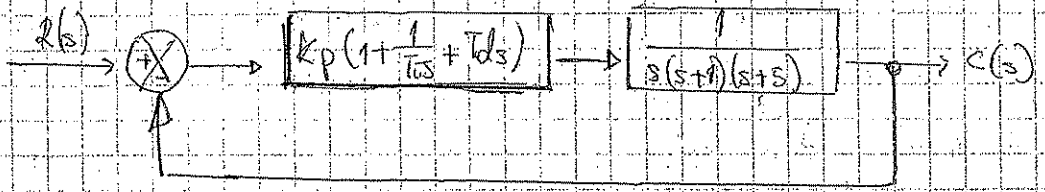
$$G_c(s) = \frac{s + 0{,}4}{s + 0{,}029} \ \frac{s + 0{,}28}{s + 3{,}95}$$

$$G_c G = \frac{s + 0{,}4}{s + 0{,}029} \cdot \frac{s + 0{,}28}{s + 3{,}95} \cdot \frac{40}{(s+1)(s+4)s}$$

NOTA

Ejemplo 8-1 (pág 572) PID

Utilizar un controlador PID para el sig. sistema. Obtener los valores mediante la regla de sintonía de Ziegler-Nichols. Obtener la curva de respuesta escalón unitario y comprobar si el sist. diseñado presenta una sobreelongación del 25%. Si es excesivo ($\geq 40\%$), haga una sintonía fina.



Como la planta tiene un integrador, uso el 2° método.
Fijando $T_i = \infty$ y $T_d = 0$, se obtiene la FTLC:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{s(s+1)(s+5)+K_p} = \frac{K_p}{s^3+6s^2+5s+K_p}$$

$$s^3+6s^2+5s+K_p=0 \Longrightarrow \text{R-H}$$

s^3	1	6
s^2	5	K_p
s^1	$\frac{6\cdot 5-K_p}{1}$	0
s^0	K_p	

$\rightarrow K_p = 30$ ganancia crítica

$$(j\omega_c)^3+6(j\omega_c)^2+5j\omega_c+30=0$$

$$j(5\omega_c-\omega_c^3)+(-6\omega_c^2+30)=0$$

$$\boxed{\omega_c=\sqrt{5}}$$

$$\frac{2\pi}{\omega_c} = T = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} = \boxed{2{,}81}$$

$K_p = 0{,}6K_c = 18$

$T_i = 0{,}5T = 1{,}405$

$T_d = 0{,}125T = 0{,}351$

$$G_c(s) = 18\left(1+\frac{1}{1{,}405s}+0{,}351s\right)$$

$$= 18\left(\frac{s+0{,}712+0{,}351s^2}{s}\right)$$

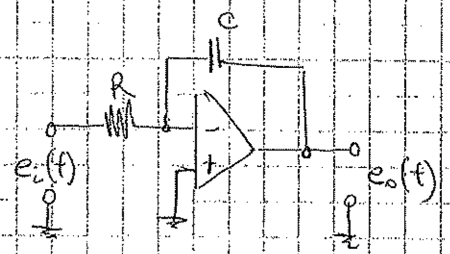
$$= 6{,}32\left(\frac{s^2+2{,}85s+2{,}03}{s}\right)$$

$$G_c(s) = 6{,}32\,\frac{(s+1{,}425)^2}{s}$$

* DISEÑO DE COMPENSADORES ELECTRÓNICOS

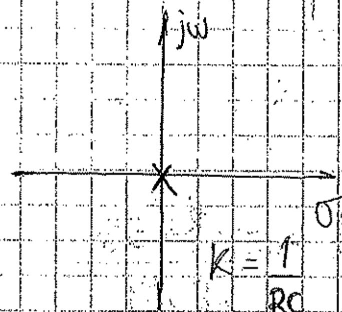
El valor de R → $1K\Omega < R < 1M\Omega$

1_ INTEGRADOR



$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{-Z_o(s)}{Z_i(s)} = \frac{-1/sC}{R}$$

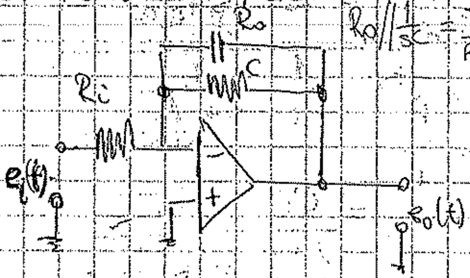
$$= \frac{-1}{sCR} = (-1)\,\frac{1}{s}\,\frac{1}{RC}$$



POLO AL ORIGEN

$$K = \frac{1}{RC}$$

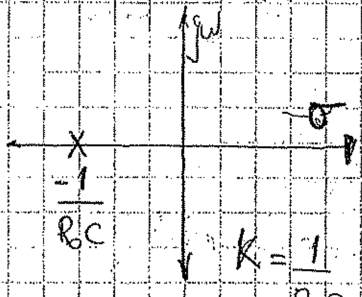
2_ POLO SIMPLE



$$R_o // \frac{1}{sC} = \frac{1}{\frac{1}{R_o} + \frac{1}{\frac{1}{sC}}}$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{\frac{1}{1/R_o + sC}}{R_i} = -\frac{R_o}{R_i}\,\frac{1}{R_oCs+1}$$

$$= -\frac{1}{R_iC}\,\frac{1}{s+\frac{1}{R_oC}}$$

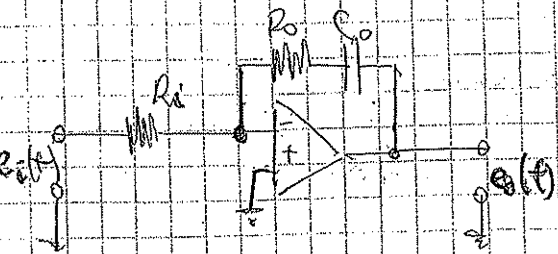


POLO DESPLAZADO DEL ORIGEN

$$K = \frac{1}{R_iC}$$

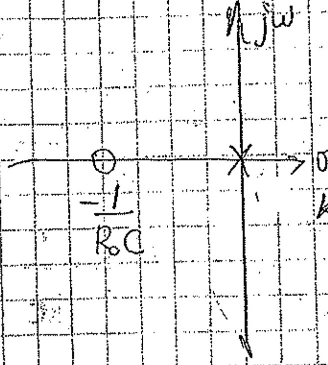
$$\frac{R_o S C + 1}{S C R_i} = \frac{S + 1/R_oC}{S \frac{R_i}{R_o}}$$

3.- COMPENSADOR PI



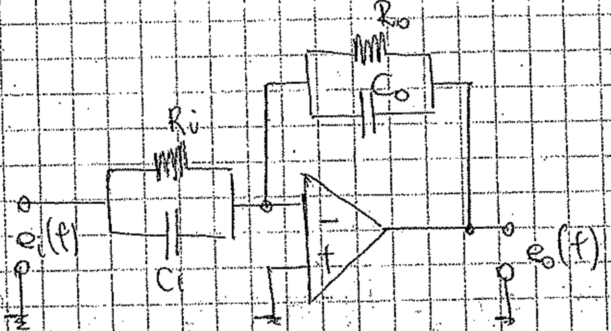
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\left(R_o + \frac{1}{sC}\right)\cdot\frac{1}{R_i}$$

$$= -\frac{R_o}{R_i}\,\frac{s + 1/R_oC}{s}$$



$$K = \frac{R_o}{R_i}$$

4. COMPENSADOR EN ATRASO

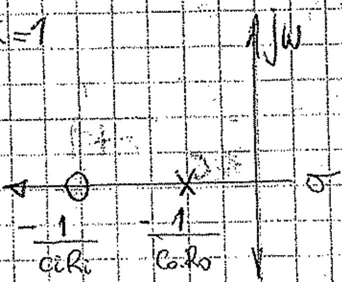


$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{R_o /\!/ \frac{1}{sC_o}}{R_i /\!/ \frac{1}{sC_i}}$$

$$= \frac{\frac{1}{C_o}\cdot\frac{1}{s + \frac{1}{C_oR_o}}}{\frac{1}{C_i}\cdot\frac{1}{s + \frac{1}{C_iR_i}}}$$

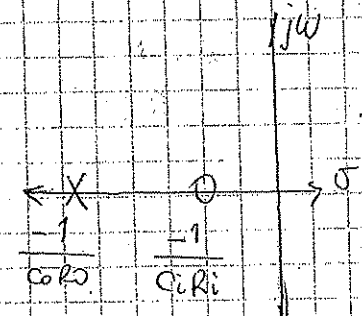
$$= \frac{C_i}{C_o}\,\frac{s + \frac{1}{C_iR_i}}{s + \frac{1}{C_oR_o}}$$

$C_i \approx C_o \Rightarrow K = 1$



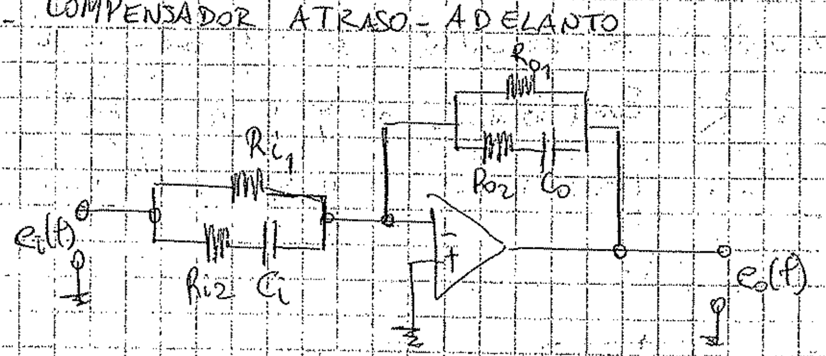
5.- COMPENSADOR EN ADELANTO

Mismo circuito que (4), cambian los valores de R_i y R_o



NOTA

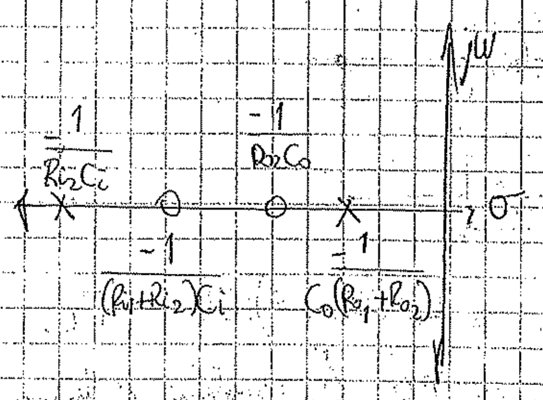
6_ COMPENSADOR ATRASO - ADELANTO



$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_o(s)}{Z_i(s)} \qquad Z_o = \frac{R_{o1}R_{o2}}{(R_{o1}+R_{o2})}\frac{\left(s+\frac{1}{R_{o2}C_o}\right)}{\left(s+\frac{1}{(R_{o1}+R_{o2})C_o}\right)}$$

$$Z_i = \frac{R_{i1}R_{i2}}{(R_{i1}+R_{i2})} \cdot \frac{s+\frac{1}{R_{i2}C_o}}{s+\frac{1}{(R_{i1}+R_{i2})C_i}}$$

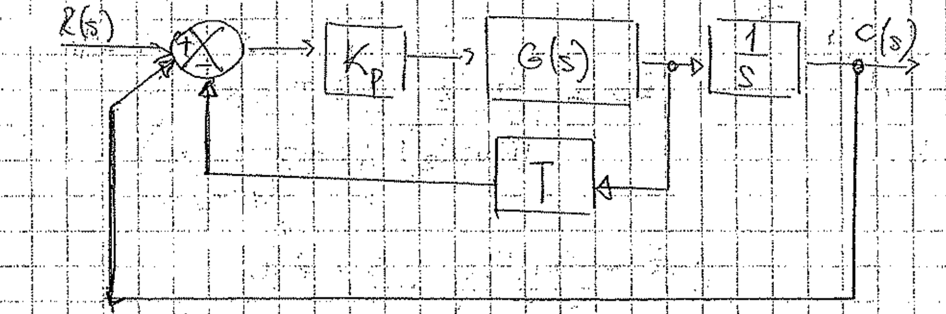
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\underbrace{\frac{R_{o1}//R_{o2}}{R_{i1}//R_{i2}}}_{K} \cdot \underbrace{\frac{s+\frac{1}{R_{o2}C_o}}{s+\frac{1}{(R_{o1}+R_{o2})C_o}}}_{\text{Atraso (polo + cerca del origen)}} \cdot \underbrace{\frac{s+\frac{1}{(R_{i1}+R_{i2})C_i}}{s+\frac{1}{R_{i2}C_i}}}_{\text{Adelanto}}$$



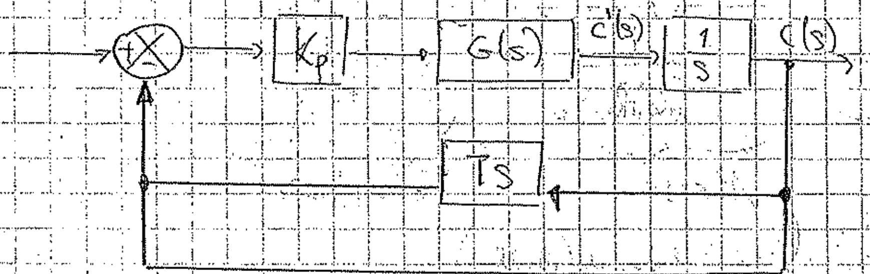
* COMPENSACIÓN PARALELA

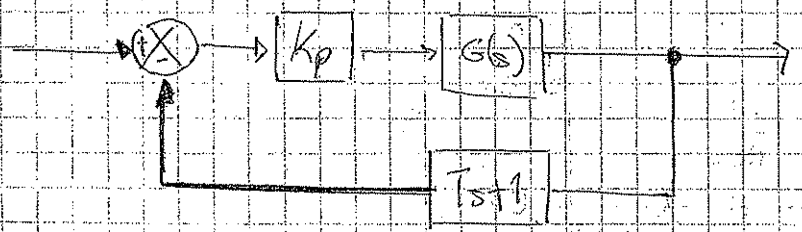
En estos casos, el compensador se encuentra en el lazo de realimentación.

- Sistemas con realimentación de velocidad: el compensador es un elemento de ganancia T. Este parámetro no aparece como factor multiplicativo en la FTLA, por lo que no se puede aplicar directamente la técnica de L.R



Se reescribe el diagrama de bloques:



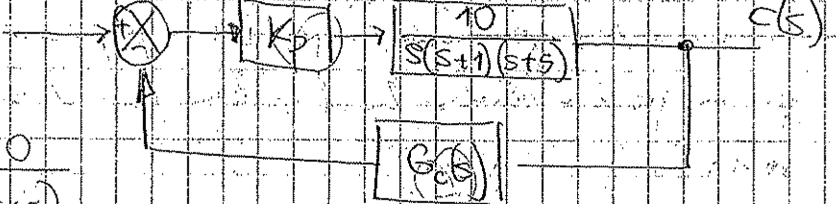


La FTLA $= K_p \cdot G(s) \cdot H(s) = K_p\,(Ts+1)\cdot G(s)$ tiene la misma forma que la del compensador PD. Se construye el lugar de raíces ubicando el cero y el K necesarios para cumplir con el punto de diseño.

- La diferencia es que la FTLC no tiene el cero, lo elimina

Ejemplo 6 abril 2009

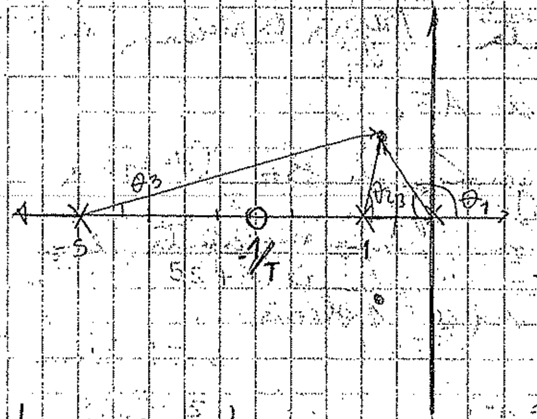
Compensar el sistema de lazo cerrado mediante compensador a la realimentación para obtener 2 polos complejos conjugados dominantes que presenten una respuesta con coeficiente de amortiguación $\xi = 0{,}5$ y $\omega_n = 1{,}4142$, manteniendo el error de estado permanente nulo para una entrada escalón unitario.



$$FTLA = \frac{K_p (Ts+1)\, 10}{s(s+1)(s+5)}$$

$\xi = 0{,}5$ $\quad \omega_n = 1{,}4142$ $\quad \sigma = \xi\omega_n = 0{,}707$ $\quad \omega_d = \sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n = 1{,}225$

$\beta = 60°$



$\theta_1 = 120°$ $\qquad \theta_3 = tg^{-1}\frac{1{,}225}{4{,}293} = 15{,}9$

$\theta_2 = tg^{-1}\frac{y}{x} - tg^{-1}\frac{1{,}225}{0{,}293} = 76{,}5°$

$-(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + \phi_1 = -180(2k+1)$

$-212{,}4 + \phi_1 = 180 \rightarrow \boxed{\phi_1 = 32{,}4}$

$tg\,\phi_1 = \frac{1{,}225}{x} \rightarrow x = 1{,}93$

$x = 1/T - 0{,}707 \rightarrow 1/T = 2{,}637$

$\boxed{T = 0{,}38}$

$$\left|\frac{K_p (Ts+1)\, 10}{s(s+1)(s+5)}\right|_{pd} = 1$$

$$\left|\frac{K_p\, 0{,}86 \cdot 10}{(-0{,}707+j1{,}225)(0{,}293+j1{,}225)(4{,}293+j1{,}225)}\right|_{pd} = 1$$

$$\left|\frac{K_p\, 0{,}87 \cdot 10}{1{,}41 \cdot 1{,}26 \cdot 4{,}46}\right| = \left|K_p\, 1{,}1\right| = 1 \rightarrow \boxed{K_p = 0{,}9}$$

$\boxed{G_c(s) = 0{,}38s + 1}$ $\qquad FTLC \Rightarrow \frac{9}{s^3 + 6s^2 + 8{,}42s + 9}$

* COMPARACIÓN DE LOS COMPENSADORES

_ Adelanto: proporciona el resultado deseado mediante su contribución al adelanto de fase. Suele usarse para mejorar los márgenes de estabilidad, da una frecuencia de cruce de ganancia más alta que la de retardo → mayor ancho de banda → reducción en el tiempo de establecimiento, respuesta rápida.

Por otro lado, el sistema es más sensible al ruido (por el AB). Además requiere una ganancia mayor que la que precisa la de retardo. Puede generar grandes señales en el sistema, no deseables porque lo pueden saturar.

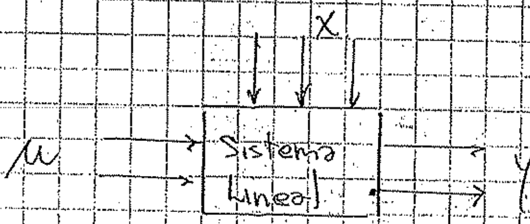
_ Atraso: proporciona el resultado deseado mediante su propiedad de atenuación a altas frecuencias. Reduce la ganancia de AF sin reducirla a BF → velocidad de respuesta más lenta. Mejora la precisión en estado estacionario. Atenúa los ruidos de AF

_ Atraso - Adelanto: incrementa la ganancia de BF (mejora la precisión en estado estacionario) y al mismo tiempo incrementa el ancho de banda y los márgenes de estabilidad del sistema

NOTAS

* VARIABLES DE ESTADO

- Estado: es el conjunto de variables más pequeño de un sistema dinámico de forma que el conocimiento de estas variables para $t=t_0$, junto con el conocimiento de la entrada para $t \geq t_0$, determina completamente el comportamiento del sistema en cualquier $t \geq t_0$
- Las variables de estado no necesitan ser físicamente medibles, sin embargo en la práctica es conveniente que lo sean
- Vector de estado: si se necesitan n variables de estado para describir completamente el comportamiento de un sistema dado, esas n variables de estado forman el vector de estado X
- Las variables de estado son integradores o elementos que almacenan energía.



$u(t)$ entradas
$y(t)$ salidas
$x(t)$ variables de estado.

$$\dot{x}_n(t) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)$$
$$y_m(t) = g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)$$

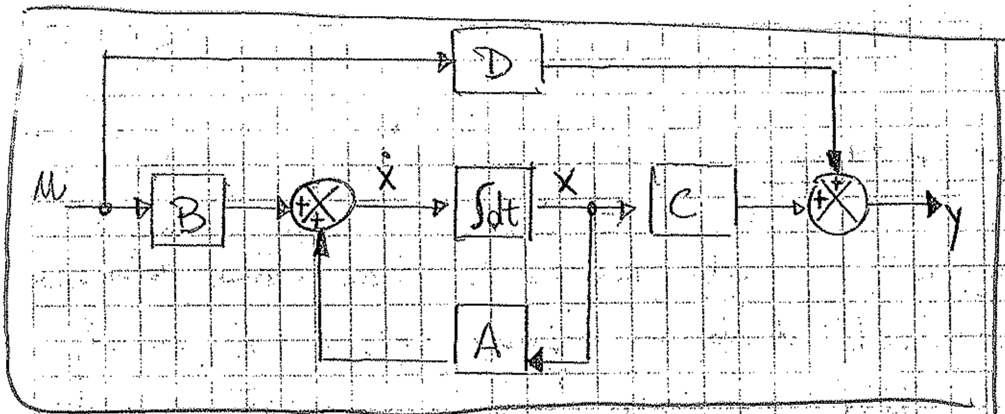
estas ecuaciones se convierten en:

$$\left.\begin{array}{l}\dot{x}(t) = A(t)\cdot x(t) + B(t)\cdot u(t) \\ y(t) = C(t)\cdot x(t) + D(t)\cdot u(t)\end{array}\right\}$$ si f y g no involucran el tiempo y el sistema es SLIT

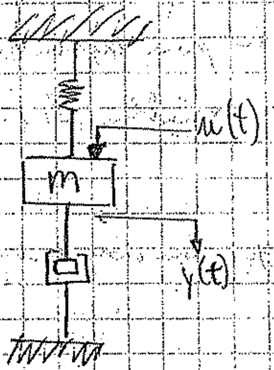
$$\boxed{\begin{array}{l}\dot{X}(t) = A\,X(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t)\end{array}}$$

A = matriz de estado
B = matriz de entrada
C = matriz de salida
D = matriz de transmisión directa

NOTA



Ejemplo: suponer el sig. sistema mecánico (lineal) La fuerza externa $u(t)$ es entrada al sistema y el desplazamiento $y(t)$ de la masa es la salida



$$\ddot{y} = \frac{u}{m} - \frac{Ky}{m} - \frac{b\dot{y}}{m}$$

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + Ky = u$$

El sistema tiene 2 integradores, se definen las variables de estado;

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t)$$

Ecuación de Estado $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{K}{m}x_1 - \dfrac{b}{m}x_2 + \dfrac{1}{m}u \end{cases}$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{matrix} \\ \hline a_{11} \; a_{12} & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \end{array}$$

Ecuación de salida $\{ \; y = x_1$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

$$\underset{m \times n}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} \underset{n \times p}{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}} = m \times p$$

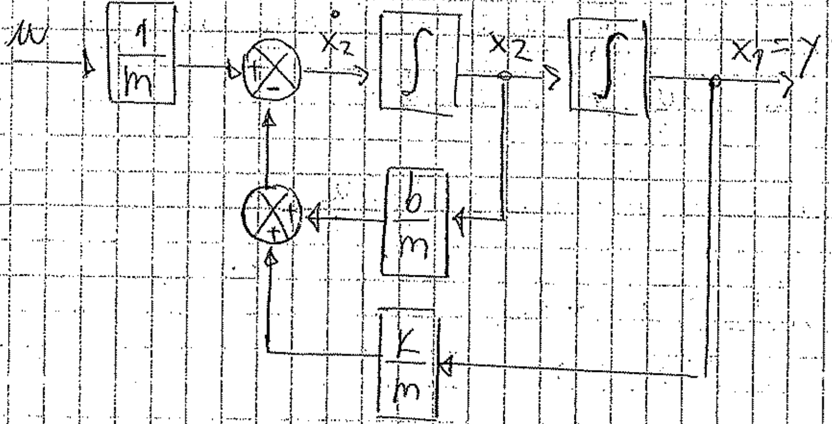
$$= \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\text{Ecuaciones Dinámicas del sistema}}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y = Cx + Du$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \qquad D = 0$$



* Las salidas de los integradores son variable de estado

_Relación entre ecuaciones de estado y función de transferencia

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$ este sistema se representa en el espacio de estados mediante:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

Aplicando Laplace:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$
$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

Como la FT se define para CI = 0 :

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$
$$sX(s) - AX(s) = BU(s)$$
$$(sI - A)\,X(s) = BU(s)$$
$$X(s) = (sI - A)^{-1} \cdot BU(s)$$

NOTA

$$Y(s) = C\,(sI-A)^{-1}B\,U(s) + D\,U(s)$$

$$Y(s) = \left[C(sI-A)^{-1}B + D\right] \cdot U(s)$$

$$\boxed{G(s) = C\,(sI-A)^{-1}B + D}$$ Función de Transferencia en términos de A, B, C y D.

- Representación en el espacio de estados en formas canónicas

Considérese un sistema definido mediante:

$$\overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \dots + a_n y = b_0 \overset{(n)}{u} + b_1 \overset{(n-1)}{u} + \dots + b_n u$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

1) Forma Canónica Controlable

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \text{ceros} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 & b_{n-1} - a_{n-1} b_0 & \dots & b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

Si grado NUM < grado DEN $\longrightarrow b_0 = 0$

La forma canónica controlable es importante cuando se analiza el método de asignación de polos para el diseño de sistemas de control.

HOJA Nº 44

FECHA

2) Forma Canónica Observable

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u$$

ceros

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

La matriz de estado $n \times n$ (A) es la transpuesta de la ecuación de estado de la FCC (1). La matriz B es la transpuesta de la C de la FCC.

3) Forma Canónica Diagonal

Se considera el caso en el cual el polinomio del denominador sólo contiene raíces distintas. Reescribiendo

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} = b_0 + \frac{c_1}{s+p_1} + \frac{c_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{c_n}{s+p_n}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & & \cdots & 0 \\ 0 & -p_2 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

NOTA

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

4) Forma Canónica de Jordan

Se considera el caso en el que el polinomio del denominador contiene raíces múltiples, entonces la FCD debe modificarse:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{(s+p_1)^3 (s+p_4) \cdots (s+p_n)}$$

$$= b_0 + \frac{c_1}{(s+p_1)^3} + \frac{c_2}{(s+p_1)^2} + \frac{c_3}{(s+p_1)} + \frac{c_4}{(s+p_4)} + \dots + \frac{c_n}{(s+p_n)}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -p_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -p_1 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & -p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & -p_4 & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & -p_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

* Ejemplo: obtener 1, 2 y 3 para el sistema $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$

FCC:
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

FCO: $$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

FCD: $$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+2}$$

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \lim_{s \to -1} \frac{s+3}{s+2} = \frac{2}{1} = 2 \\ c_2 &= \lim_{s \to -2} \frac{s+3}{s+1} = \frac{1}{-1} = -1 \end{aligned}\right\} \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

* VALORES PROPIOS O AUTO-VALORES DE UNA MATRIZ A $(n \times n)$

Son los valores escalares λ tales que para la matriz cuadrada A se cumple que:

$$Ax = \lambda x$$

$$(A - \lambda I)x = 0 \qquad \text{donde } x = \text{vector propio y} \neq 0$$

NOTA

Entonces λ es valor propio si:

$$\underbrace{\det(A-\lambda I)=0}_{\text{Ecuación característica de } A}$$

El polinomio $a(\lambda)=|A-\lambda I|$ en potencias de λ se llama polinomio característico de la matriz A

Ejemplo: si $A=\begin{bmatrix}4 & -5\\ 2 & -3\end{bmatrix} \Longrightarrow |A-\lambda I| = \begin{vmatrix}4-\lambda & -5\\ 2 & -3-\lambda\end{vmatrix} = 0$

$$=(4-\lambda)(-3-\lambda)+5.2=0$$

$$=-12-4\lambda+3\lambda+\lambda^2+10=0$$

Valores propios

$\lambda_1=-1 \quad \lambda_2=2 \longleftarrow$ $\lambda^2-\lambda-2=0$

$$(\lambda+1)(\lambda-2)=0$$

* A un valor propio λ en general le corresponden una infinidad de vectores propios $\longrightarrow$ espacio propio correspondiente a λ
* La suma de los n valores propios de la matriz A es igual a su traza $\quad \lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n = \text{traza}(A)$

* Método de la Transformada de Laplace para la solución de las ecuaciones de estado en el caso homogéneo.

Considerando la ecuación de estado lineal homogénea:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \qquad \text{tomo Laplace}$$

$$sX(s)-x(0)=AX(s)$$

$$(sI-A)X(s)=x(0) \qquad \text{multiplico por } (sI-A)^{-1}$$

$$X(s)=(sI-A)^{-1}x(0)$$

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]x(0)$$

NOTA

$$(sI-A)^{-1} = \frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \dots$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right] = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \dots = \underbrace{e^{At}}_{\text{matriz exponencial de la matriz}}$$

La transformada inversa de Laplace de una matriz es la matriz formada por las transformadas inversas de Laplace de todos los elementos.

$$\boxed{x(t) = e^{At}\,x(0)}$$

Se define $\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]$

como una matriz $n \times n$, solución única de:

$$\dot{\Phi}(t) = A\,\Phi(t) \quad , \quad \Phi(0) = I$$

Esta matriz se denomina Matriz de transición de estados. Representa la respuesta libre del sistema (gobierna la respuesta que es debida a las condiciones iniciales solamente)

Esta matriz $\Phi(t)$ define por completo la transición de estado desde el tiempo inicial $t=0$ a cualquier momento t cuando las entradas son cero.

- Si los valores propios son distintos, entonces $\Phi(t)$ contendrá las n exponenciales $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, e^{\lambda_3 t}, \dots$

Propiedades de $\Phi(t)$

1 - $\Phi(0) = e^{A0} = I$

2 - $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$

3 - $\Phi(t_1+t_2) = \Phi(t_1)\,\Phi(t_2)$

4 - $[\Phi(t)]^n = \Phi(nt)$ para n entero positivo

5 - $\Phi(t_2-t_1)\,\Phi(t_1-t_0) = \Phi(t_2-t_0)$

Solución para el caso no homogéneo

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$(sI-A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

$$X(s) = (sI-A)^{-1}x(0) + (sI-A)^{-1}BU(s)$$

$$X(s) = \mathcal{L}[e^{At}]x(0) + \mathcal{L}[e^{At}]BU(s)$$

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}BU(\tau)\,d\tau$$

Suponiendo un tiempo inicial t_0:

$$\boxed{x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau}$$

* CONTROLABILIDAD

Se dice que un sistema es controlable en el tiempo t_0 si se puede transferir desde cualquier estado inicial $x(t_0)$ a cualquier otro estado, mediante un vector de control sin restricciones, en un intervalo de tiempo finito.

Sea el sistema en tiempo continuo:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

x = vector de estados (dim)
u = señal de control (escalar)
A = matriz (n×n)
B = matriz (n×1)

Si todos los estados son controlables, se dice que el sistema es de estado totalmente controlable

- Matriz de controlabilidad

$$MC = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^{n-1}B]$$

El sistema es de estado completamente controlable si y sólo si los vectores $B, AB, \ldots, A^{n-1}B$ son linealmente independientes, o la matriz MC de n×n es de rango n (número de líneas linealmente indep.). El determinante debe ser no nulo.
Si es nulo, es que hay por lo menos un estado no controlable.

* OBSERVABILIDAD

Se dice que un sistema es observable en el tiempo t_0 si, con el sistema en el estado $X(t_0)$, es posible determinar este estado a partir de la observación de la salida durante un intervalo de tiempo finito.
El sistema es completamente observable si todas las transiciones del estado afectan eventualmente a todos los elementos del vector de salida.
El concepto de observabilidad es útil al resolver el problema de reconstruir variables de estado no medibles a partir de variables que sí lo son en el tiempo mínimo posible.

- Matriz de observabilidad

$$MO = [C^T \; A^T C^T \; A^{T^2} C^T \ldots A^{T^{n-1}} C^T]$$

El sistema es completamente observable si la matriz $n \times nm$ es de rango n (n vectores columna linealmente independientes)

- Relación entre observabilidad, controlabilidad y funciones de transferencia

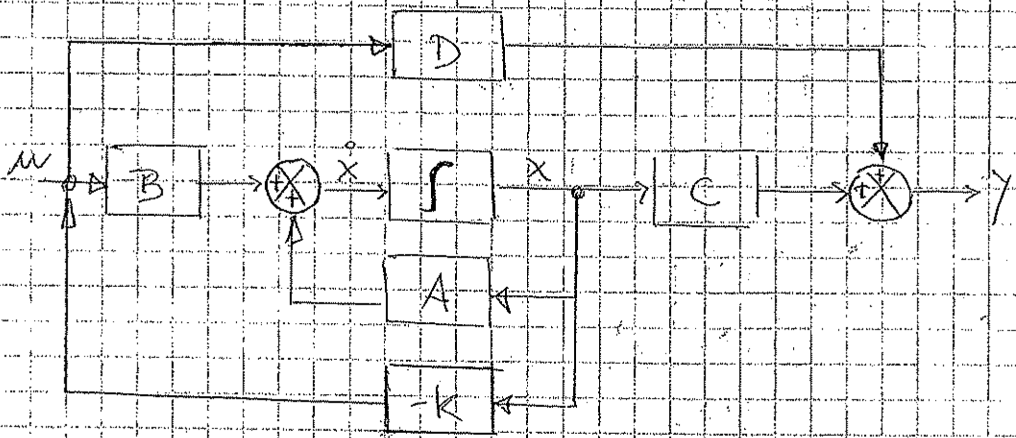
Si la función de transferencia entrada-salida de un sistema lineal tiene cancelación de polos y ceros, el sistema será o no controlable, o no observable, o ambos, dependiendo de como se definan las variables de estado. Por otra parte, si la función de transferencia no tiene ~~cancelación~~ cancelación de polos y ceros, el sistema siempre se puede representar mediante las ecuaciones dinámicas como un sistema totalmente controlable y observable, sin importar como se obtenga el modelo en variables de estado.

* DISEÑO POR UBICACIÓN DE POLOS MEDIANTE REALIMENTACIÓN DEL VECTOR DE ESTADOS

Se supone que todas las variables de estado son medibles y que están disponibles para su realimentación. Si el sistema es de estado completamente controlable, los polos de lazo cerrado se pueden colocar en cualquier posición deseada mediante realimentación del estado a través de una adecuada matriz de ganancias.

En este enfoque se especifican todos los polos en lazo cerrado.

NOTA



$u = -Kx$

$\dot{x} = Ax + Bu$ * MÉTODO DE SUSTITUCIÓN DIRECTO

$\dot{x} = (A - BK)x$

La nueva ecuación característica: $\boxed{|sI - A + BK| = 0}$

El polinomio característico deseado:

$(s + \lambda_1)(s + \lambda_2) \ldots (s + \lambda_n) = 0$

$s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} + \alpha_n = 0$

La matriz de ganancias de realimentación de estado:

$K = [K_1 \; K_2 \; K_3]$ se sustituye en la ecuación caract. e iguala

$|sI - A + BK| = (s + \lambda_1)(s + \lambda_2)(s + \lambda_3)$

Este método es conveniente si $n = 2$ ó 3

NOTA

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{B} u \qquad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6}{s^3+6s^2+11s+6}$$

$$y = \overbrace{\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$M_C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 25 \end{bmatrix}$$

$|M_C| = -1$ es controlable

$$\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -6 & -11 & -6 & -6 \end{array}$$

$$MC = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}$$

$$AB = \underset{3\times3}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}} \cdot \underset{3\times1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} = \underset{3\times1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}}$$

$$M_O = \begin{bmatrix} C^T & A^TC^T & (A^T)^2C^T \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \\ 36 & 60 & 25 \end{bmatrix}$$

$$M_O = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = 216 \text{ es Observable}$$

Polos

$$A^2B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \\ 36 & 60 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$|A - I\lambda| = \emptyset$$

$$MC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 25 \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta_{MC} = -1 \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -6 & -11 & -6-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\text{Det}: -(\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6) \to S_1 = -1,\ S_2 = -2,\ S_3 = -3$$

$$MO = \begin{bmatrix} C^T & A^TC^T & A^{T^2}C^T \end{bmatrix}$$

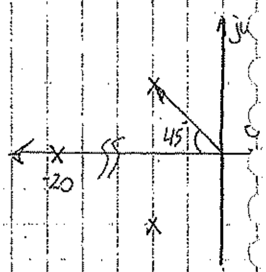
$$C^T = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \quad A^TC^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A^{T^2} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 36 \\ 0 & -11 & 60 \\ 1 & -6 & 25 \end{bmatrix}$$

$$A^{T^2} C^{T} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad MO = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \Longrightarrow \Delta_{MO} = 216 \neq 0$$

El sistema es totalmente controlable y observable

Los polos actuales son $s_1 = -1$, $s_2 = -2$, $s_3 = -3$

Si deseamos ubicarlos en $s_1 = -2+2j$, $s_2 = -2-2j$, $s_3 = -20$



$$(s^2 + 4s + 8)(s + 20) = s^3 + 4s^2 + 8s + 20s^2 + 80s + 160$$
$$= s^3 + 24s^2 + 88s + 160 = 0$$

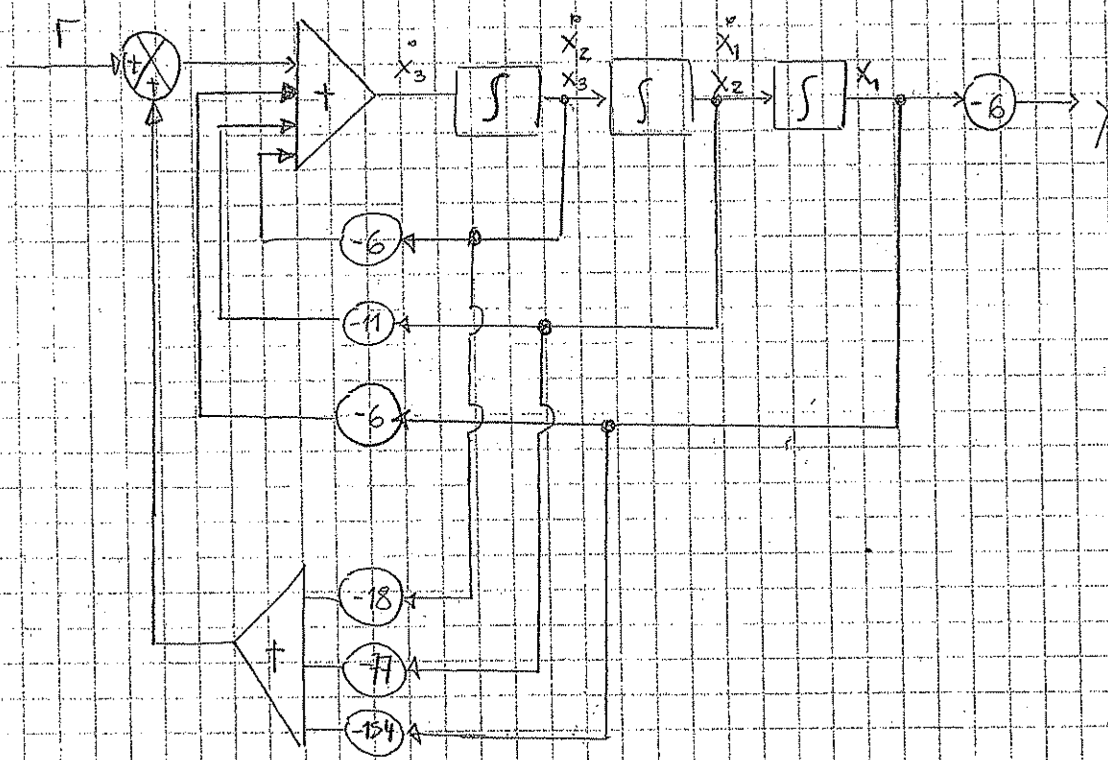
$$[sI - A + BK] = 0$$

$$\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \; k_2 \; k_3] = 0$$

$$\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ +6 & 11 & s+6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ k_1+6 & k_2+11 & k_3+s+6 \end{bmatrix}$$

$$= s^2(k_3 + s + 6) + k_1 + 6 - s(-1)(k_2 + 11)$$
$$= s^3 + (k_3 + 6)s^2 + (k_2 + 11)s + (k_1 + 6)$$
$$= s^3 + 24s^2 + 88s + 160 \Longrightarrow k_3 = 24 - 6 = 18$$
$$k_2 = 88 - 11 = 77$$
$$k_1 = 160 - 6 = 154$$

$$\boxed{K = [154 \quad 77 \quad 18]} \quad \checkmark$$



* La inversa de una matriz es igual a la relación de su matriz adjunta y el determinante. Una matriz adjunta es la transpuesta de la matriz cuyos elementos son los cofactores. El cofactor A_{ij} del elemento a_{ij} es $(-1)^{i+j}$ veces el determinante de la matriz que se obtiene eliminando la i-ésima fila y la j-ésima columna de A.

$$A^{-1} = \frac{Adj\ A}{|A|}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (s+4)(s+1)+3 = s^2+5s+4+3 = s^2+5s+7$$

$$cof = \begin{bmatrix} s+1 & 3 \\ -1 & s+4 \end{bmatrix}$$

$$Adj\ A = cof^T = \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s^2+5s+7} & \frac{-1}{s^2+5s+7} \\ \frac{3}{s^2+5s+7} & \frac{s+4}{s^2+5s+7} \end{bmatrix}$$

NOTA

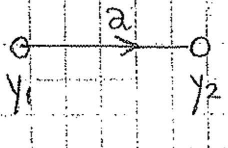
263

HOJA Nº 50

FECHA

DIAGRAMAS DE FLUJO

- Los nodos representan variables
- Las ramas tienen ganancias y direcciones asociadas.



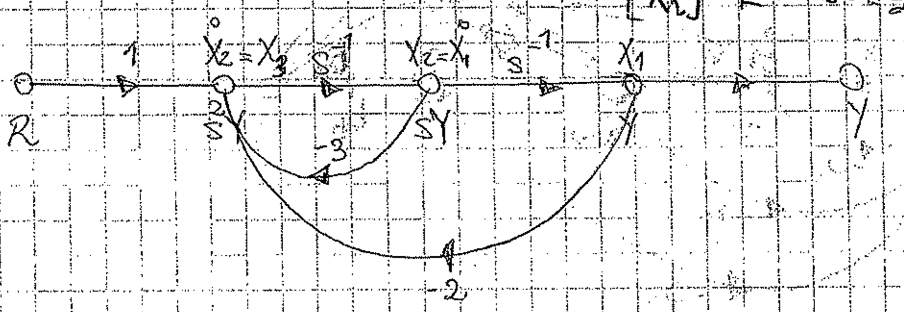
$y_2 = a\,y_1$

- Entrada a la izquierda, salida a la derecha.

DIAGRAMAS DE ESTADO

Extensión del diagrama de flujo para describir ecuaciones de estado y ec. diferenciales. Se construye utilizando la transformada de Laplace de las ecuaciones de estado.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$



$$y = [\,1\ 0\ 0\,]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2+3s+2} \qquad \text{Por Mason: } \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta}\sum_k P_k \Delta_k$$

$$P_1 = \frac{1}{s^2} \qquad L_1 = \frac{-3}{s} \qquad L_2 = \frac{-2}{s^2}$$

$$\Delta = 1 - \sum_a L_a = 1 - \left(\frac{-3}{s} - \frac{2}{s^2}\right) = 1 + \frac{3s+2}{s^2} = \frac{s^2+3s+2}{s^2}$$

$\Delta_1 = 1$

$$\frac{Y}{R} = \frac{s^2}{s^2+3s+2}\cdot\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2+3s+2}$$

NOTA

* DESCOMPOSICIÓN DE FUNCIONES DE TRANSFERENCIA

Es construir el diagrama de estados a partir de la FT

- Descomposición directa (transforma en FCC)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

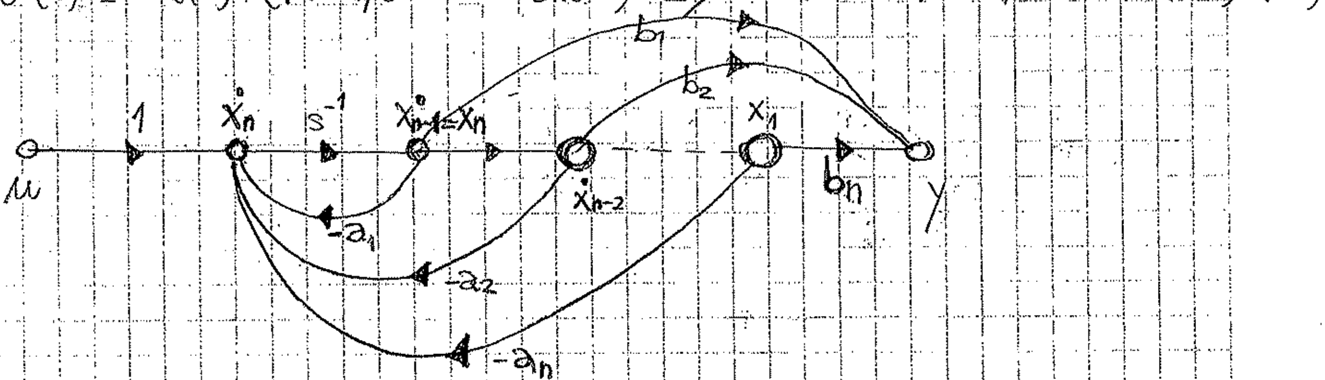
Se multiplica todo por s^{-n}:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^{-1} + b_2 s^{-2} + \dots + b_{n-1} s^{-n+1} + b_n s^{-n}}{1 + a_1 s^{-1} + a_2 s^{-2} + \dots + a_{n-1} s^{-n+1} + a_n s^{-n}}$$

Luego se multiplica por un polinomio Q(s)

$$Y(s) = Q(s)\,(b_1 s^{-1} + \dots + b_n s^{-n})$$

$$U(s) = Q(s)\,(1 + a_1 s^{-1} + \dots + a_n s^{-n}) \Rightarrow \overset{Q(s)}{X(s)} = U(s) - (a_1 s^{-1} + \dots + a_n s^{-n})X(s)$$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_3 & b_2 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad (b_0 = 0)$$

* TRANSFORMACIONES DE SIMILITUD

Dadas las ecuaciones dinámicas de un sistema:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(t) \text{ vector de estado } n\times 1$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

se pueden transformar en otro grupo de ecuaciones de la misma dimensión mediante la transformación:

$x(t) = P.\bar{x}(t)$ donde P es una matriz no singular de $n\times n$, por lo que:

$$\bar{x}(t) = P^{-1}.x(t) \qquad (1)$$

Una matriz singular es aquella cuyo determinante $= 0$ No tiene inversa

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) \qquad (2)$$

$$\bar{y}(t) = \bar{C}\bar{x}(t) + Du(t)$$

Derivando en (1):

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = P^{-1}\frac{dx(t)}{dt} = P^{-1}Ax(t) + P^{-1}Bu(t)$$

$$= \underbrace{P^{-1}AP}_{\bar{A}}\bar{x}(t) + \underbrace{P^{-1}B}_{\bar{B}}u(t) \qquad \text{de la fórmula (2)}$$

$$\bar{y}(t) = \bar{C}\bar{x}(t) + \bar{D}u(t)$$

$$= \bar{C}P^{-1}x(t) + \bar{D}u(t) \qquad \text{comparando con } y(t) = Cx(t) + Du$$

$$\bar{C} = CP \qquad \bar{D} = D$$

Entonces:

$$\left.\begin{array}{l}\bar{A} = P^{-1} A P \\ \bar{B} = P^{-1} B \\ \bar{C} = C P \\ \bar{D} = D\end{array}\right\}$$

Transformación de similitud

En el sistema transformado se conserva la ecuación característica, los autovalores y la función de transferencia.

- Para pasar a la FCC:

De la ecuación característica de A:

$$|sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

se define la matriz $W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & \vdots & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$

y la matriz de transformación es:

$P = M_c \cdot W$ $\qquad M_c = [B \; AB \; A^2B \dots A^{n-1}B]$

- Para pasar a la FCO:

$P = (W \cdot M_o)^{-1}$ $\qquad M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^3 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = [C^T \; A^T C^T \; A^{T^2} C^T \dots A^{T^{n-1}} C^T]$

S1-B

* Pasar a las distintas formas de la matriz de estados

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = [1\ 0\ 0]$$

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s+5 & -5 & 0 \\ 0 & s+3 & -3 \\ 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix} = (s+5)(s+3)(s+1) \Rightarrow s^3 + 9s^2 + 23s + 15$$

$$s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$$

$$W = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 9 & 1 \\ 9 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \text{FCC}$$

$$M_C = [B \mid AB \mid A^2B]$$

$$AB \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 25 & -40 & 15 \\ 0 & 9 & -12 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 0 & 3 & -12 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = M_c \cdot W = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 15 & 3 & 0 \\ 15 & 8 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}067 & 0 & 0 \\ -0{,}33 & 0{,}33 & 0 \\ 1{,}067 & -2{,}667 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -15 & -23 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{FCC}}$$

$$\bar{B} = P^{-1} B \Rightarrow \begin{bmatrix} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CP \qquad [1\ 0\ 0]\ P \qquad [15\ 0\ 0]$$

* Para pasar a la FCO (A tiene que estar en FCC)

$$Q = (W \cdot M_O)^{-1} \qquad M_O = [C^T \mid A^T C^T \mid A^{T^2} C^T]$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A^T C^T \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A^{T^2} C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -15 \\ 1 & 0 & -23 \\ 0 & 1 & -9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_O = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \qquad Q = (W \cdot M_O)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}067 \\ 0 & 0{,}067 & -0{,}6 \\ 0{,}067 & -0{,}6 & 3{,}87 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = Q^{-1} A Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -15 \\ 1 & 0 & -23 \\ 0 & 1 & -9 \end{bmatrix}$$

$P^{-1} A P$

En todo caso, la $\boxed{\bar{A}\ (FCO) = A^T\ (FCC)}$

* Para pasar a la FCD (A tiene que estar en la FCC):

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -5 \\ 1 & 9 & 25 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}875 & 1 & 0{,}125 \\ -1{,}25 & -1{,}5 & -0{,}25 \\ 0{,}375 & 0{,}5 & 0{,}125 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = P^{-1} A P = P^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -15 & -23 & -9 \end{bmatrix}}_{A \text{ en FCC}} P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$\boxed{FCD}$

Esta solución es útil para obtener la matriz de transición de estados $\Phi(t)$.

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]$$

* Diagonalización de una matriz de $n \times n$ (pasar a la FCD)

Si una matriz A de $n \times n$ con valores propios distintos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

La transformación $x = Pz$, donde

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Transformará $P^{-1}AP$ en la matriz diagonal

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

que está en la Forma Canónica Diagonal

Si A contiene valores propios múltiples, es IMPOSIBLE.

- Los valores propios de A son idénticos a los de $P^{-1}AP$

NOTA:

* MÉTODO UTILIZANDO LA MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN T

$$\dot{x} = (A - BK)x$$

1 _ Se comprueba la controlabilidad

2 _ Se determina la ecuación característica y sus coeficientes

$$|sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

3 _ Se determina la matriz de transformación T que convierte la ecuación de estado del sistema a su FCC. Si la ecuación del sistema determinada ya está en su FCC, entonces $T = I$

La matriz de transformación T viene dada por:

$$T = M_c W \qquad \text{donde } W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4 _ Usando los valores propios deseados, determinar los valores α:

$$(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)\cdots(s+\lambda_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n$$

5 _ La matriz de ganancias de realimentación del estado K requerida se determina por:

$$K = [\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \cdots \quad \alpha_1 - a_1]\, T^{-1}$$

* MÉTODO UTILIZANDO LA FÓRMULA DE ACKERMANN

$$\dot{x} = (A - BK)x$$

$$K = [0\ 0\ \dots\ 1][MC]^{-1}\phi(A)$$

donde $\phi(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \alpha_2 A^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1}A + \alpha_n I$

donde los α son los coeficientes de la EC con los polos deseados

- Ejemplo: polos en $s_1 = -1$, $s_2 = -2$, $s_3 = -3$
se desean en $s_1 = -2+2j$; $s_2 = -2-2j$; $s_3 = -20$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$(s+2-j2)(s+2+2j)(s+20) = s^3 + 24s^2 + 88s + 160$$

$$\alpha_1 = 24 \quad \alpha_2 = 88 \quad \alpha_3 = 160$$

- MÉTODO MATRIZ T

A está en su FCC $\rightarrow T = I$

$$|sI - A| = (s+1)(s+2)(s+3) = (s+1)(s^2+5s+6) = s^3 + 5s^2 + 6s + s^2 + 5s + 6$$
$$= s^3 + 6s^2 + 11s + 6$$

$$K = [(160-6)\ \ (88-11)\ \ (24-6)]\ T^{-1} \qquad a_1 = 6 \quad a_2 = 11 \quad a_3 = 6$$

$$K = [154\ \ 77\ \ 18]$$

* METODO ACKERMAN

$$\phi(A) = A^3 + 24A^2 + 88A + 160I$$

$$\phi(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}^3 + 24\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}^2 + 88\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

$$+ 160\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi(A) = \begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 36 & 60 & 25 \\ -150 & -239 & -90 \end{bmatrix} + 24\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \\ 36 & 60 & 25 \end{bmatrix} + 88\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

$$+ 160\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 154 & 77 & 18 \\ -108 & -44 & -31 \\ 186 & 233 & 142 \end{bmatrix}$$

$$MC^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow MC^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = [0 \quad 0 \quad 1]\, MC^{-1} \cdot \phi(A)$$

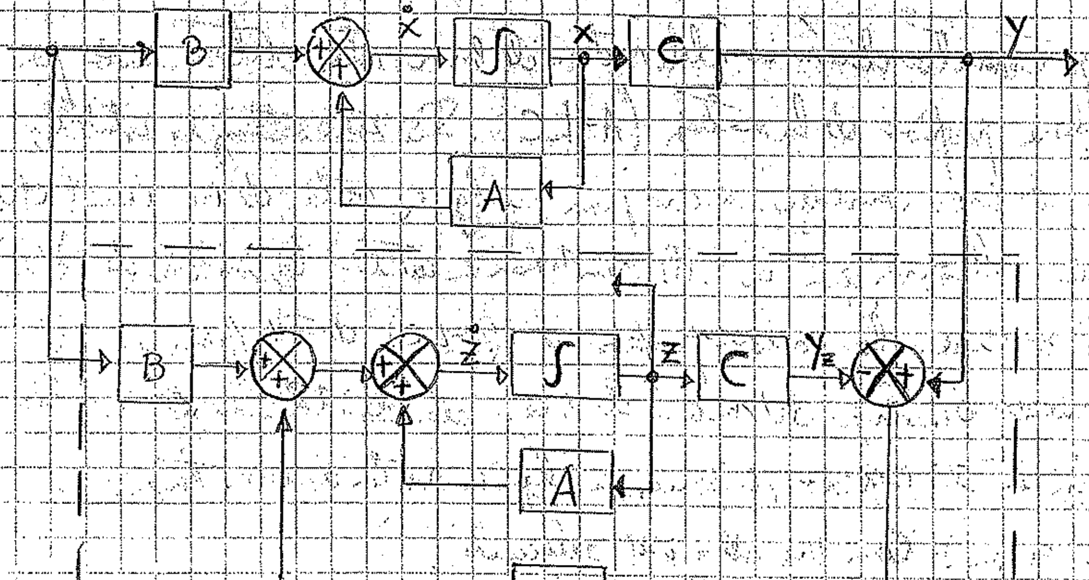
$$K = [0 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 154 & 77 & 18 \\ -108 & -44 & -31 \\ 186 & 233 & 142 \end{bmatrix} =$$

$$K = [1 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 154 & 77 & 18 \\ -108 & -44 & -31 \\ 186 & 233 & 142 \end{bmatrix} = [154 \quad 77 \quad 18]$$

NOTA

* OBSERVADORES DE ESTADO

Cuando no todas las variables de estado están accesibles para poder realimentarse, se necesita estimar las variables de estado que no están disponibles. Esto se denomina observación. Un dispositivo que estima u observa las variables de estado se llama un observador de estado.
Si el observador de estado capta todas las variables de estado del sistema, sin importar si algunas están disponibles por medición directa, se denomina observador de estado de orden completo.
Los observadores de estado pueden diseñarse si y sólo si se satisface la condición de observabilidad.



observador de estado
de orden completo

El observador es un subsistema para reconstruir el vector de estado de la planta. El modelo matemático del observador es básicamente el

mismo que el de la planta, salvo que incluye un término adicional que contiene el error de estimación para compensar las imprecisiones en las matrices A y B y la falta de error inicial.
El error de estimación (o de observación) es la diferencia entre el estado inicial y el estado estimado inicial.
El modelo matemático del observador:

$$\dot{z} = Az + Bu + L(y - Cz) \quad ; \quad y = Cx$$
$$\dot{x} - \dot{z} = Ax - Az - L(Cx - Cz)$$
$$\dot{x} - \dot{z} = (x - z)(A - LC)$$

El vector de error:

$$e = x - z$$
$$\dot{e} = (A - LC)\,e$$

El comportamiento dinámico del vector de error está determinado por los valores propios de la matriz $(A-LC)$. Si esta matriz es estable, el vector de error convergerá a cero para cualquier vector de error inicial $e(0)$. Es decir $z(t)$ convergerá a $x(t)$ sin tomar en cuenta los valores de $z(0)$ y $x(0)$. Si se eligen los valores propios de $(A-LC)$ de tal forma que el comportamiento dinámico del vector de error sea asintóticamente estable y suficientemente rápido, entonces cualquier vector de error tenderá a cero (el origen) con una velocidad adecuada.
La ecuación característica del observador:

$$|sI - A + LC| = 0$$

Si el sistema es completamente observable, es posible seleccionar una matriz L tal que $(A-LC)$ tenga autovalores deseados.

* MÉTODO DE SUSTITUCIÓN DIRECTA

$$|sI - A + LC| = (s+\lambda_1)(s+\lambda_2)(s+\lambda_3)$$

λ = polos deseados, más de 3 es complicado

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}$$

* MÉTODO DE TRANSFORMACIÓN

$$L = \underbrace{(W \cdot MO^T)^{-1}}_{I} \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

si el sistema está dado en su FCO

donde $W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix}$

* MÉTODO DE ACKERMANN

$$L = \phi(A) \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}}_{MO^{-1}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sea el ejemplo anterior:

FC deseada $s^3 + 24s^2 + 88s + 160$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \quad C = [6 \; 0 \; 0] \qquad |sI - A| = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$$

FCC $\rightarrow$ FCO: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \quad C = [0 \; 0 \; 1] \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

* Sustitución directa

$$[sI - A + LC] = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} [0 \; 0 \; 1] =$$

NOTA

$$\begin{bmatrix} s & 0 & 6 \\ -1 & s & 11 \\ 0 & -1 & s+6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 & 6+l_1 \\ -1 & s & 11+l_2 \\ 0 & -1 & s+6+l_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} s & 0 & 6+l_1 \\ -1 & s & 11+l_2 \\ 0 & -1 & s+6+l_3 \end{vmatrix} = s^2(s+6+l_3) + (6+l_1) - s(11+l_2)(-1)$$

$$s^3 + 6s^2 + l_3 s^2 + 6 + l_1 + 11s + l_2 s$$

$$= s^3 + s^2\underbrace{(6+l_3)}_{24} + s\underbrace{(11+l_2)}_{88} + \underbrace{6+l_1}_{160}$$

$6 + l_3 = 24 \longrightarrow l_3 = 18$

$11 + l_2 = 88 \longrightarrow l_2 = 77$

$6 + l_1 = 160 \longrightarrow l_1 = 154$

$$L = \begin{bmatrix} 154 \\ 77 \\ 18 \end{bmatrix} \checkmark$$

* MÉTODO DE TRANSFORMACIÓN

$$L = (W \cdot Mo^T)^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

$$Mo = [C^T \quad A^T C^T \quad A^{T^2} C^T] \qquad C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$A^T C^T$

$$\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -6 & -11 & -6 & -6 \end{array}$$

$$A^{T^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \\ 36 & 60 & 25 \end{bmatrix}$$

NOTA

* PROBLEMA DUAL - SISTEMA DUAL

El diseño del observador de orden completo se basa en determinar un L tal que A-LC tenga los valores propios deseados.
Si se utiliza la matriz K determinada mediante el método de asignación de polos, la matriz de ganancias del observador L se determina:

$$\boxed{L = K^T}$$

* ESTABILIDAD

Un sistema de control lineal e invariante con el tiempo es estable si la salida termina por regresar a su estado de equilibrio cuando el sistema está sujeto a una condición inicial.
Es críticamente estable si las oscilaciones de salida continúan de forma indefinida, y es inestable si la salida diverge sin límite a partir de su estado de equilibrio.

* CRITERIO DE ROUTH

Dice si existen o no raíces inestables en una ecuación polinomial, sin tener que obtenerlas.

- Si alguno de los coeficientes es cero o negativo (y hay algún coeficiente positivo) hay una raíz o raíces imaginarias que tienen partes reales positivas.
- Condición necesaria para la estabilidad: todos los coeficientes de $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$ estén presentes y tengan signo positivo.

$$
\begin{array}{lllll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\
\vdots & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
s^1 & c_1 & c_2 & & \\
s^0 & d_1 & & &
\end{array}
$$

Ejemplo $s^4+2s^3+3s^2+4s+5=0$

$$
\begin{array}{llll}
s^4 & 1 & 3 & 5 \\
s^3 & 2 & 4 & 0 \\
s^2 & \frac{2\cdot 3-4}{2}=1 & \frac{2\cdot 5}{2}=5 & 0 \\
s^1 & \frac{1\cdot 4-10}{1}=-6 & 0 & \\
s^0 & 5 & &
\end{array}
$$

2

raíces:
- $-1{,}28-j0{,}86$
- $-1{,}28+j0{,}86$
- $0{,}28+j1{,}41$ X
- $0{,}28-j1{,}41$ X

$$b_1=\frac{a_1a_2-a_3a_0}{a_1} \qquad b_2=\frac{a_1a_4-a_0a_5}{a_1}$$

$$c_1=\frac{b_1a_3-a_1b_2}{b_1} \qquad c_2=\frac{b_1a_5-b_3a_1}{b_1}$$

* El número de raíces con partes reales positivas es igual al número de cambios de signo de los coeficientes de la 1º columna.

HOJA Nº 56

FECHA

$$A^T C^T \quad L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -6 & 36 & 1 \\ 0 & -11 & 60 & -6 \\ 1 & -6 & 25 & 25 \end{array}\right]$$

$$MO = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 25 \end{bmatrix}$$

$$MO^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 25 \end{bmatrix} \qquad W = \begin{bmatrix} 11 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W \cdot MO^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (W \cdot MO^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 154 \\ 77 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 154 \\ 77 \\ 18 \end{bmatrix}$$

NOTA

* Polos Dominantes ✓
* Compensación en la realimentación (342) ✓
* Descomposición de la Función de transferencia. Diagramas de flujo ✓
* ¿Desacoplamiento de estados? O

* MÉTODO DE ACKERMAN

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow$$

$C = [0 \ 0 \ 1]$

$$CA = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} = [0 \ 1 \ -6]$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 36 \\ 0 & -11 & 60 \\ 1 & -6 & 25 \end{bmatrix}$$

$$CA^2 = [1 \ -6 \ 25]$$

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 25 \end{bmatrix}$$

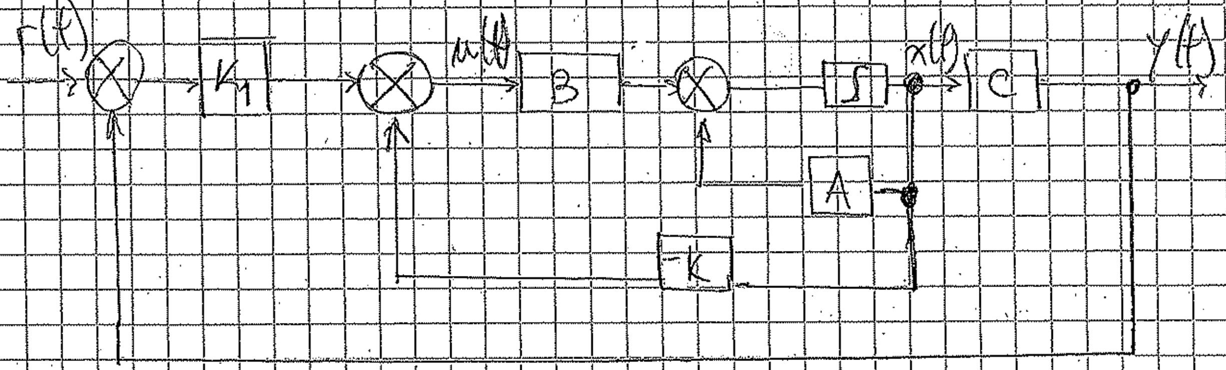
$$Z^{-1} = \begin{bmatrix} 11 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\phi(A) = A^3 + 24A^2 + 88A + 160I$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 36 & -150 \\ -11 & 60 & -239 \\ -6 & 25 & -90 \end{bmatrix} + 24 \begin{bmatrix} 0 & -6 & 36 \\ 0 & -11 & 60 \\ 1 & -6 & 25 \end{bmatrix} + 88 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 160 & 0 & 0 \\ 0 & 160 & 0 \\ 0 & & 160 \end{bmatrix}$$

$$\phi(A) = \begin{bmatrix} 154 & -108 & 186 \\ 77 & -44 & 233 \\ 18 & -31 & 142 \end{bmatrix}$$

Asignación de polos para lograr $e_{ss}=0$ (entrada escalón) cuando la planta posee un integrador



$$K = [0 \; k_2 \; k_3 \ldots k_n]$$

El coeficiente k_1 de la matriz es cero, no se realimenta x_1, se elige que la salida $y(t) = x_1$ y:

$$u = -[0 \; k_2 \ldots k_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} + k_1 (r - x_1)$$

$$u = -Kx + k_1 r$$

$$\dot{x} = Ax + Bu = (A-BK)x + Bk_1 r$$

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(\infty) = (A-BK)[x(t) - x(\infty)]$$

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(\infty) = e(t) \qquad r(\infty) = r(t) \text{ constante para } t>0$$

$$\dot{e} = (A-BK)e$$

* Diseño para $E_{ss} = 0$ y polos en $s_{1,2} = -2 \pm j\,2\sqrt{3}$
$s_3 = -10$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s + 0}$$

$$FCC \longrightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|sI - A| = s^3 + 3s^2 + 2s$$

Ec. característica deseada:

$$(s + 2 + j2\sqrt{3})(s + 2 - j2\sqrt{3})(s+10) = s^3 + 14s^2 + 56s + 160$$

* Por método directo.

$$|sI - A + BK| = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} BK & [k_1\ k_2\ k_3] \\ \hline \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ k_1 & 2+k_2 & s+3+k_3 \end{vmatrix} = s^2(s+3+k_3) + k_1 + s(2+k_2)$$

$$= s^3 + s^2(3+k_3) + s(2+k_2) + k_1$$

$$\left.\begin{array}{l} 3 + k_3 = 14 \longrightarrow k_3 = 11 \\ 2 + k_2 = 56 \longrightarrow k_2 = 54 \\ k_1 = 160 \end{array}\right\} \quad K = [160\ 54\ 11]$$

* Por Ackerman

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Mc^{-1} \cdot \phi(A)$$

$$\phi(A) = A^3 + 14A^2 + 56A + 160I$$

$$Mc = \begin{bmatrix} B \mid AB \mid A^2B \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} A^2B & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \end{array}$$

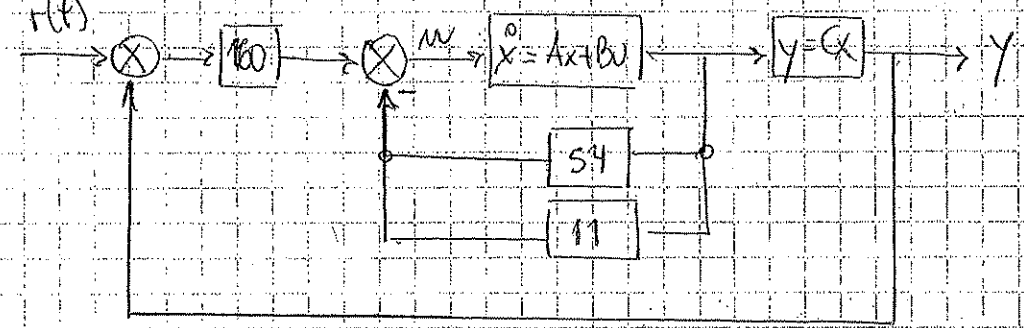
$$Mc = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 7 \end{bmatrix} \qquad Mc^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\phi(A) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 14 & -15 \end{bmatrix} + 14\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix} + 56\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 160 & 0 & 0 \\ 0 & 160 & 0 \\ 0 & 0 & 160 \end{bmatrix}$$

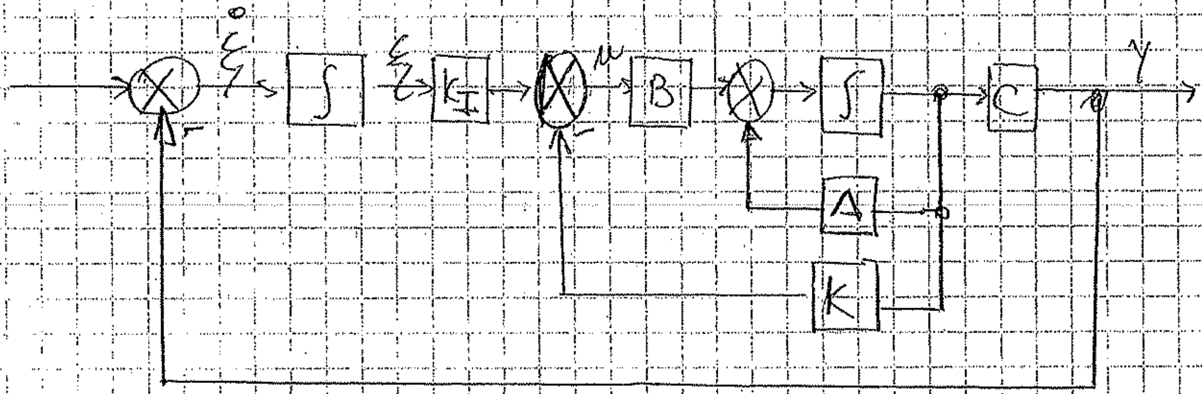
$$\phi(A) = \begin{bmatrix} 160 & 54 & 11 \\ 0 & 138 & 21 \\ 0 & -42 & 75 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \times \phi(A)$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 160 & 54 & 11 \\ 0 & 138 & 21 \\ 0 & -42 & 75 \end{bmatrix} \\ \hline \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 160 & 54 & 11 \end{bmatrix} \end{array}$$



* ASIGNACIÓN DE POLOS PARA LOGRAR $e_{ss} = 0$ (entrada escalón) CUANDO LA PLANTA NO POSEE INTEGRADOR



$\dot{x} = Ax + Bu$ $\qquad$ ξ = variable de estado del sistema (escalar)

$y = Cx$

$u = -Kx + K_I \xi$ $\qquad$ K_I = constante de ganancia integral

$\dot{\xi} = r - y = r - Cx$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{K} = [k_1 \; k_2 \; -K_I]$$

* Diseñar para $e_{ss}=0$, polos en $s_{1,2}=-50\pm j150$

$s_3=-200$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -25\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix}2500 & 0\end{bmatrix}$$

$$\hat{A}=\begin{bmatrix}A & 0\\ -C & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -25 & 0\\ -2500 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \hat{B}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$|sI-A+BK| = \begin{bmatrix}s & 0 & 0\\ 0 & s & 0\\ 0 & 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -25 & 0\\ -2500 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ k_1 & k_2 & -k_I\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=$$

$$BK = \begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix}k_1 & k_2 & -k_I\end{bmatrix}\\ \hline \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ k_1 & k_2 & k_I\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array} \qquad = \begin{vmatrix}s & -1 & 0\\ k_1 & s+25+k_2 & -k_I\\ 2500 & 0 & s\end{vmatrix}$$

$$=s^2(s+25+k_2)+(+2500k_I)+sk_1$$

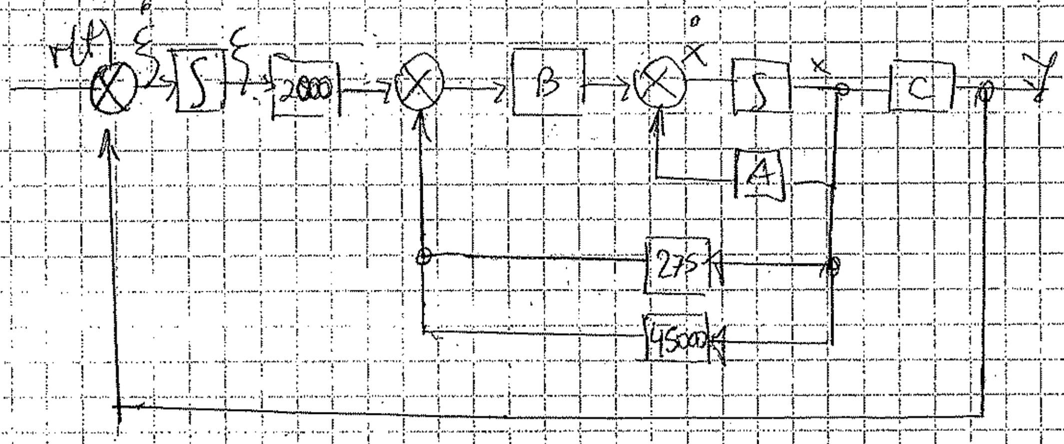
$$=s^3+s^2(25+k_2)+sk_1+2500k_I$$

Ec. característica deseada:

$$(s+50+j150)(s+50-j150)(s+200)=s^3+300s^2+45000s+5.000.000$$

$25+k_2=300 \qquad k_1=45000 \qquad 2500k_I=5000000$

$k_2=275 \qquad\qquad\qquad\qquad k_I=2000$


r(t)
∫
2000
B
A
∫
C
y
275
45000

$$L = \underbrace{\phi(A)\, Z^{-1}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1232 & 816 & 154 \\ 816 & 418 & 77 \\ 154 & 77 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 1 \\ \hline 1232 & 816 & 154 & 154 \\ 816 & 418 & 77 & 77 \\ 154 & 77 & 18 & 18 \end{array}$$

$$L = \begin{bmatrix} 154 \\ 77 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Final 19/11/12

1) $y = x^3 + x$

Linealizar alrededor del punto (0,0) en el rango $-0,2 < x < 0,2$

Error absoluto y error relativo linealización en el gráfico

$$y = f(x) \implies y = f(x_0) + f'(x - x_0)\Big|_{x = x_0} \qquad f'(x) = 3x^2 + 1$$

$$f(x) = f(x_0) + K\,(x - x_0) \qquad f'(x)\Big|_{x=0} = 1$$

$$f(x) - \underbrace{f(x_0)} = K\,(x - x_0)$$

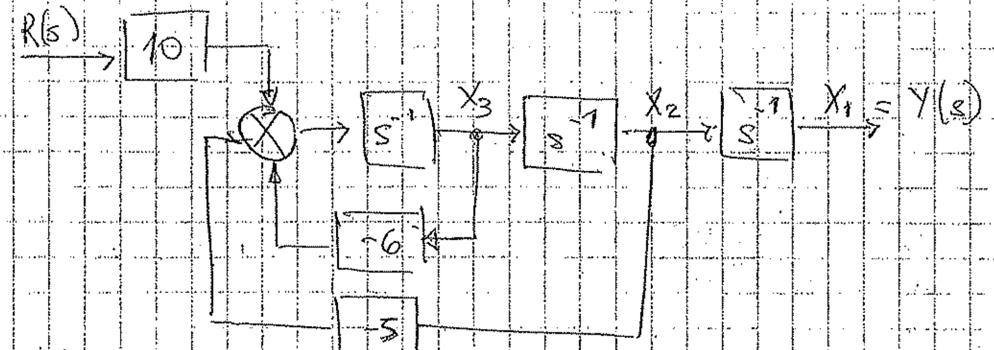
$$f(x) - 0 = 1\,(x - 0) \rightarrow f(x) = x$$

En el punto $(0{,}2;0) \longrightarrow y = x^3 + x = 0{,}208 \qquad e_{abs} = 0{,}008$

$$y = x = 0{,}2 \qquad e_{rel} = \frac{0{,}008}{0{,}2} = \boxed{4\%}$$

NOTA:

2)



a- Expresar en variables de estado

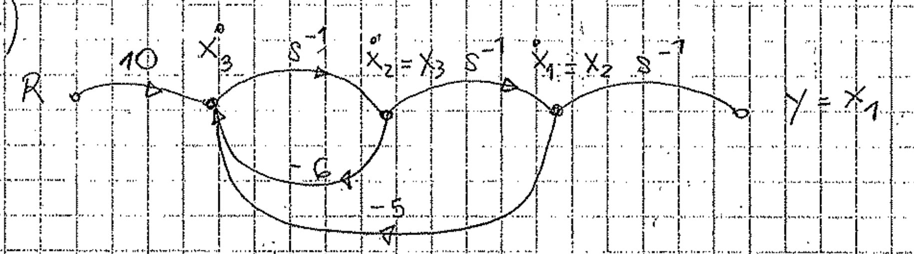
b- Obtener autovalores y determinar controlabilidad y observabilidad

c- Obtener la matriz K para que los polos de lazo cerrado sean

$S_1 = -10$, $S_2 = -1+j$ y $S_3 = -1-j$ y $e_{ss} = 0$

d- Diagrama de bloques del sistema realimentado

a)



$\dot{X}_3 = -6X_3 - 5X_2 + 10\,R(s)$

$\dot{X}_2 = X_3$

$\dot{X}_1 = X_2$

$Y = X_1$

pasando a la forma $\dot{X} = AX + BU$

$Y = CX$

$$\begin{bmatrix}\dot{X}_1\\ \dot{X}_2\\ \dot{X}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -5 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 10\end{bmatrix} R$$

$$Y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{bmatrix}$$

NO ESTA EN FCC

$\bar{A} = P^{-1}AP = A$

$\bar{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$

$\bar{C} = CP$ $\quad \begin{bmatrix}10 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$P = M_c\,W$ $\qquad W = \begin{bmatrix}+5 & +6 & 1\\ +6 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix}10 & 0 & 0\\ 0 & 10 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{bmatrix}$ $\qquad P^{-1} = \begin{bmatrix}0{,}1 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}1 & 0\\ 0 & 0 & 0{,}1\end{bmatrix}$

HOJA Nº 61

FECHA

b) Autovalores $\longrightarrow$ $\det |A - \lambda I| = 0$

$$|A - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -5 & -6-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (-\lambda)(-\lambda)(-6-\lambda) - (-\lambda)(1)(-5)$$

$$= \lambda^2(-6-\lambda) - 5\lambda = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 5\lambda \longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = -5 \end{cases}$$

Controlabilidad

$$MC = [B \quad AB \quad A^2B] \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ -60 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -6 \\ 0 & 30 & 31 \end{bmatrix} \qquad A^2B = \begin{bmatrix} 10 \\ -60 \\ 310 \end{bmatrix}$$

$$MC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & -60 \\ 10 & -60 & 310 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Det} = -1000 \neq 0$$

rango 3 $\rightarrow$ es Controlable

observabilidad

$$MO = [C^T \quad A^TC^T \quad A^{T^2}C^T] \qquad C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \end{array} \rightarrow A^TC^T$$

NOTA

$$A^{T^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 30 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix} \qquad MO = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$det = 1 \neq 0$

rango 3, observable

c) polos deseados

$S_1 = -10 \qquad S_2 = -1+j \qquad S_3 = -1-j$

Ec característica deseada $= s^3 + 12s^2 + 22s + 20$

$$[sI - A + BK] = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10k_1 & 10k_2 & 10k_3 \end{bmatrix}$$

$$BK = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} [k_1 \ k_2 \ k_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10k_1 & 10k_2 & 10k_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 10k_1 & 5+10k_2 & s+6+10k_3 \end{bmatrix} = s^2(s+6+10k_3) + 10k_1 + s(5+10k_2)$$

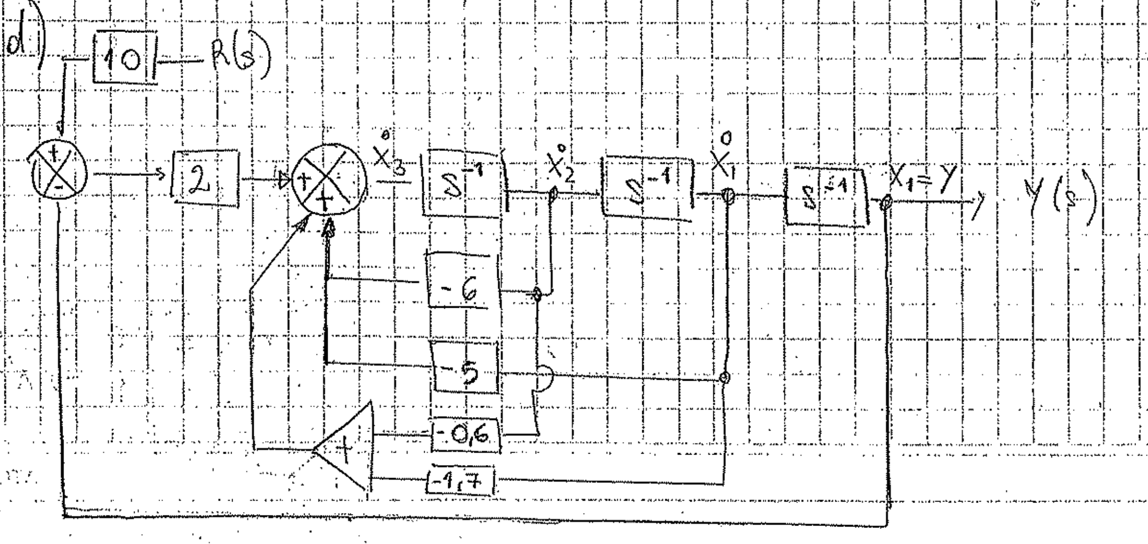
$$= s^3 + s^2\underbrace{(6+10k_3)}_{12} + s\underbrace{(5+10k_2)}_{22} + \underbrace{10k_1}_{20}$$

$6 + 10k_3 = 12 \rightarrow k_3 = 0{,}6$

$5 + 10k_2 = 22 \rightarrow k_2 = 1{,}7 \implies K = [2 \ \ 1{,}7 \ \ 0{,}6]$

$10k_1 = 20 \rightarrow k_1 = 2$

d)



HOJA Nº 62

FECHA

c) Por Ackerman

$$K = [0 \quad 0 \quad 1]\, Mc^{-1}\, \phi(A)$$

$$Mc^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \phi(A) = A^3 + 12A^2 + 22A + 20I$$

$$\phi(A) = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -6 \\ 0 & 30 & 31 \\ 0 & -155 & -156 \end{bmatrix} + 12\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -6 \\ 0 & 30 & 31 \end{bmatrix} + 22\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\phi(A) = \begin{bmatrix} 20 & 17 & 6 \\ 0 & -10 & -19 \\ 0 & 95 & 104 \end{bmatrix}$$

$$[0 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [0{,}1 \quad 0 \quad 0]$$

$$K = [0{,}1 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 20 & 17 & 6 \\ 0 & -10 & -19 \\ 0 & 95 & 104 \end{bmatrix} = [2 \quad 1{,}7 \quad 0{,}6]$$

✓

NOTA

B) $G(s) = k \dfrac{(s+2)(s+3)}{s(s+1)}$

Con el diagrama de Bode y LR p/un determinado K

a) Determinar si existe LR para los intervalos:

$0,7 < \xi < 0,9$

$2 < t_s < 4$

$1,5 < W_n < 2$

b) Determinar el K para el cual está graficado el Bode. MF y MG

c) Determinar K_v y e_{ss}.

d) Determinar el k para el cual los polos de lazo cerrado son reales iguales y el sistema tiene el menor t_s

a) $\xi = \cos\beta \rightarrow \xi = 0,7 \rightarrow \beta = 45,6^\circ$; $\xi = 0,9 \rightarrow \beta = 25,8^\circ$ } Si

$t_s\big|_{2\%} = \dfrac{4}{\sigma} \rightarrow t_s = 4 \rightarrow \sigma = 1$; $t_s = 2 \rightarrow \sigma = 2$ } Si

$W_n = \dfrac{\sigma}{\xi} \rightarrow W_n = 1,5 \rightarrow \sigma = \xi\, 1,5$; $W_n = 2 \rightarrow \sigma = \xi\, 2$ } Si

Combinando los 3 intervalos, hay una zona que es LR

$\xi = 0,9 \rightarrow \sigma = 1,75 \rightarrow W_n = 1,944 \rightarrow W_d = W_n\sqrt{1-\xi^2} = 0,847$

$s = -1,75 \pm j\,0,847$ } $s^2 + 3,5s + 3,48$

$W_n = 1,5 \rightarrow \sigma = 1,25 \rightarrow \xi = 0,833$

$\rightarrow W_d = W_n\sqrt{1-\xi^2} = 0,83$

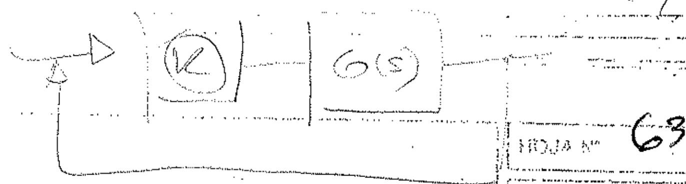
$s = -1,25 \pm j\,0,83$ } $s^2 + 2,5s + 2,25$

$Ec \rightarrow 1 + k\dfrac{(s^2+5s+6)}{s^2+s} \Rightarrow s^2 + s + ks^2 + 5ks + 6k$

$s^2(K+1) + s(5K+1) + 6K$

NOTA

KG(s)



$$s^2 + s\,\frac{(5k+1)}{k+1} + \frac{6k}{k+1} \Rightarrow s^2 + 2{,}5s + 2{,}25$$

$$6k = 2{,}25(k+1) = 2{,}25k + 2{,}25$$

$$3{,}75k = 2{,}25$$

$$\boxed{k = 0{,}6} \longrightarrow \left.\frac{5k+1}{k+1}\right|_{k=0{,}6} = 2{,}5$$

$$6k = 3{,}78(k+1) \rightarrow 2{,}22k = 3{,}78$$

$$\boxed{k = 1{,}7} \longrightarrow \left.\frac{5k+1}{k+1}\right|_{k=1{,}7} = 3{,}5$$

Para esos 2 valores de k existe lugar de raíces en los intervalos obtenidos.

b) $\lim\limits_{s\to\infty} G(s) = \dfrac{k\,\cancel{(s+2)}\,\cancel{(s+3)}}{\cancel{(s)}\,\cancel{(s+1)}} = \dfrac{k}{1}$ $\quad 20\log k = 22\,dB \quad \boxed{k = 12{,}6}$ $\quad MG = \infty \quad M\varphi = \infty$

c) $K_v = \lim\limits_{s\to 0} s\,G(s) = 12{,}6 \cdot 6 = 75{,}6 \longrightarrow \boxed{e_{ss} = \dfrac{1}{K_v} = 0{,}013}$

d) Polos reales iguales $\longrightarrow s^2 + bs + c \longrightarrow \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$

$$b^2 - 4c = 0$$

$$b = \sqrt{4c} = 2\sqrt{c}$$

Ec. característica =

$$s^2 + s\,\frac{(5k+1)}{k+1} + \frac{6k}{k+1} \longrightarrow \left[\frac{(5k+1)}{k+1}\right]^2 = \frac{4 \cdot 6k}{k+1} = \frac{24k}{k+1}$$

reemplazando

$$\frac{25k^2 + 10k + 1}{(k+1)^2} = \frac{24k}{\cancel{k+1}}$$

$$25k^2 + 10k + 1 = 24k^2 + 24k$$

$$k^2 - 14k + 1 = 0 \longrightarrow k_1 = 0{,}072 \quad k_2 = 13{,}93$$

$$K_1 \longrightarrow s^2 + 1{,}27s + 0{,}4$$

$$K_2 \longrightarrow s^2 + 4{,}73s + 5{,}6$$

$$s\Big|_{k_1} = 0{,}63 \qquad s\Big|_{k_2} = -2{,}36$$

NOTA

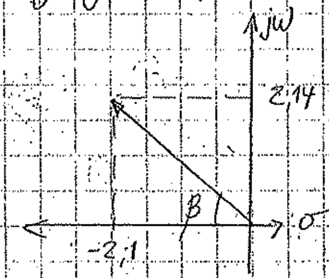
De las 2 ganancias que tienen polos de lazo cerrado iguales, la mayor $K_2 = 13,93$ permite un ts menor, ya que estaremos alejados del origen los polos $\rightarrow$ $\sigma_{1,2} = -2,36$ $\rightarrow$ $t_s\big|_{2\%} = \frac{4}{\sigma} = 1,7$ seg

FINAL 3/12/12

1 - De la función de transferencia $\frac{1\ K}{s(s+3)(s+6)} = G(s)$

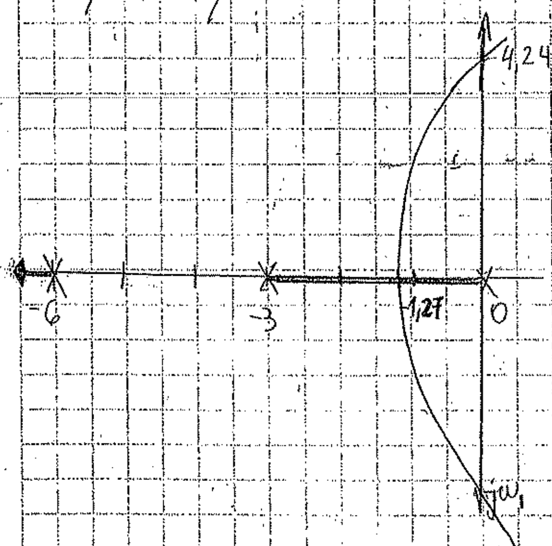
a - Compensar para $\xi = 0,7$ y $W_n = 3$

b - Trazar el LR de la FTLC y marcar en el gráfico el punto para el nuevo K encontrado



$\xi = 0,7 \quad W_n = 3 \rightarrow \sigma = \xi W_n = 2,1$

$\beta = \cos^{-1}\xi = 45,57°$ $\quad W_d = w_n\sqrt{1-\xi^2} = j2,14$



Ec característica:

$1 + GH = s^3 + 9s^2 + 18s + K$

$\frac{dK}{ds} = 0 \quad ; \quad K = -s^3 - 9s^2 - 18s$

$\frac{dK}{ds} = -3s^2 - 18s - 18 = 0$

$s^2 + 6s + 6 = 0$

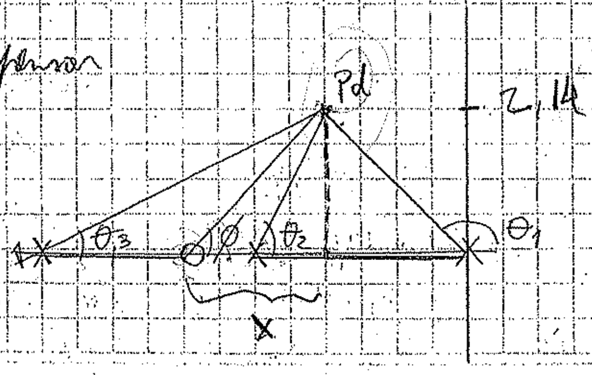
$s_1 = -1,27 \rightarrow$ está en LR

$s_2 = -4,73$

Por ganancia no se puede compensar

- Usando un PD $\rightarrow$

$K_p(1 + T_d s)$



HOJA Nº 64

FECHA

$-\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 + \phi = -180$

$-231{,}8 + \phi = -180$

$\boxed{\phi = 51{,}8}$

$\theta_1 = 90 + 45{,}6° = 135{,}6°$

$\theta_2 = tg^{-1}\dfrac{2{,}15}{3-2{,}1} = 67{,}3°$

$\theta_3 = tg^{-1}\dfrac{2{,}15}{6-2{,}1} = 28{,}9°$

$tg\,\phi = \dfrac{2{,}14}{x} \longrightarrow x = 1{,}65$

$\sigma_1 = x + 2{,}1 = 3{,}75 \longrightarrow$ cero $-3{,}75$

$(s+\frac{1}{Td}) \quad \left(\frac{1}{Td}s+1\right) \quad (s+3{,}75)$

$1/Td$

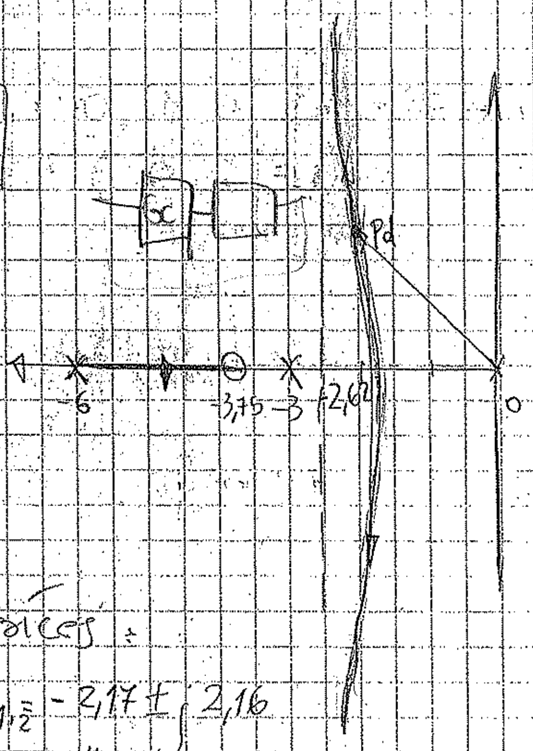
$Td = 0{,}266$

$\left|\dfrac{K_p\,(1+Td\,s)}{s\,(s+3)(s+6)}\right|_{pd} = 1$

$\dfrac{K_p\,|1-0{,}56+j0{,}56|}{3 \cdot 2{,}33 \cdot 4{,}45} = 1 \longrightarrow \boxed{K_p = 43{,}7}$

$G_c(s) = 43{,}7\,(1 + 0{,}266\,s)$

(2,1 ± j2,14)



$1+GH = 1 + \dfrac{11{,}6s + 43{,}7}{s^3+9s^2+18s}$

$= s^3 + 9s^2 + 29{,}6s + 43{,}7 \longrightarrow$ raíces:

$\begin{cases} s_{1,2} = -2{,}17 \pm j\,2{,}16 \\ s_3 = -4{,}66 \end{cases}$

asíntota $= n-m = 3-1 = 2$

$\phi_k = \dfrac{180}{n-m}(2k+1) = 90° ,\ 270°$

$\sigma_a = \dfrac{\sum Re_{polos} - \sum Re_{ceros}}{n-m} = \dfrac{-9+3{,}75}{2} = -2{,}625$

$s^3 + 9s^2 + 18s + K = 0$

$(j\omega)^3 + 9(j\omega)^2 + 18j\omega + K = (K - 9\omega^2) + j(18\omega - \omega^3)$

$K = 9\omega^2 \qquad 18 = \omega^2$

$K = 162 \qquad \omega = 4{,}24$

$s^3 + 9s^2 + 18s + 162 = 0$

corte del eje $j\omega$

$\omega_1 = j\,4{,}24$

$s_3 = -9$

NOTA

2- De la FT $\dfrac{10}{s^3+9s^2+18s}$

a- Expresar en ecuación dinámica FCC

b- Diagrama de Flujo

c- Autovalores

d- Controlabilidad y Observabilidad

e- Obtener la matriz K para que los polos de lazo cerrado sean

$S_1 = -24 \qquad S_{2,3} = -3 \mp j4 \quad , \; e_{ss} = 0$

f- Diagrama en bloques de la FTLC

a) $$\frac{10}{s^3+9s^2+18s} = \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

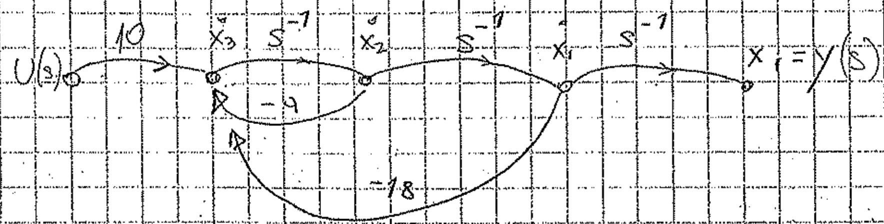
$$FCC \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$Y = \begin{bmatrix} b_3 - a_3 b_0 & b_2 - a_2 b_0 & b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -18 & -9 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b)



$\dot{X}_3 = -9X_3 - 18X_2 + 10U$

$\dot{X}_2 = X_3$

$\dot{X}_1 = X_2$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -18 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} \Bigg\} \text{NO ESTÁ EN FCC}$$

NOTA

c) Autovalores:

$$|sI - A| = 0 \Longrightarrow \left| \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -18 & -9 \end{bmatrix} \right|$$

$$\left| \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 18 & s+9 \end{bmatrix} \right| = s^2(s+9) - (-1)s.18$$

$$= s^3 + 9s + 18s \longrightarrow s_1 = 0$$

$s_2 = -3$

$s_3 = -6$

d) Controlabilidad

$$MC = [B \quad AB \quad A^2B]$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -18 & -9 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -18 & -9 \\ 0 & 162 & 63 \end{bmatrix}$$

AB

Mal $\longrightarrow$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -18 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix}$ 0

A^2B

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -18 & -9 \\ 0 & 162 & 63 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ 63 \end{bmatrix}$$

$$MC = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -9 \\ 1 & -9 & 63 \end{bmatrix} \longrightarrow \det MC = -10 \neq 0$$

rango 3 $\longrightarrow$ controlable

Observabilidad

$$MO = [C^T \quad A^TC^T \quad A^{T^2}C^T]$$

$$C = [10 \quad 0 \quad 0] \qquad C^T = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -18 \\ 0 & 1 & -9 \end{bmatrix} \qquad A^{T^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 162 \\ 1 & -9 & 63 \end{bmatrix}$$

$$A^T C^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -18 \\ 0 & 1 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A^{T^2} C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$MO = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \det MO = 1000 \neq 0$$

rango 3 → observable

e) Se realiza la asignación de polos mediante el vector de realimentación K. Para obtener $e_{ss} = 0$, como la planta es tipo 1, el coeficiente K_1 en la matriz K es igual a cero → se elige $x_1 = y$

$$|sI - A| = s^3 + 9s^2 + 18s \qquad BK = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$|sI - A + BK| = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 18 & s+9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ k_1 & k_2+18 & s+9+k_3 \end{vmatrix} = s^2(s+9+k_3) + K_1 + s(k_2+18)$$

$$= s^3 + s^2(9+k_3) + s(k_2+18) + K_1$$

Ec. característica deseada:

$$(s+24)(s+3+j4)(s+3-j4) = s^3 + 30s^2 + 169s + 600$$

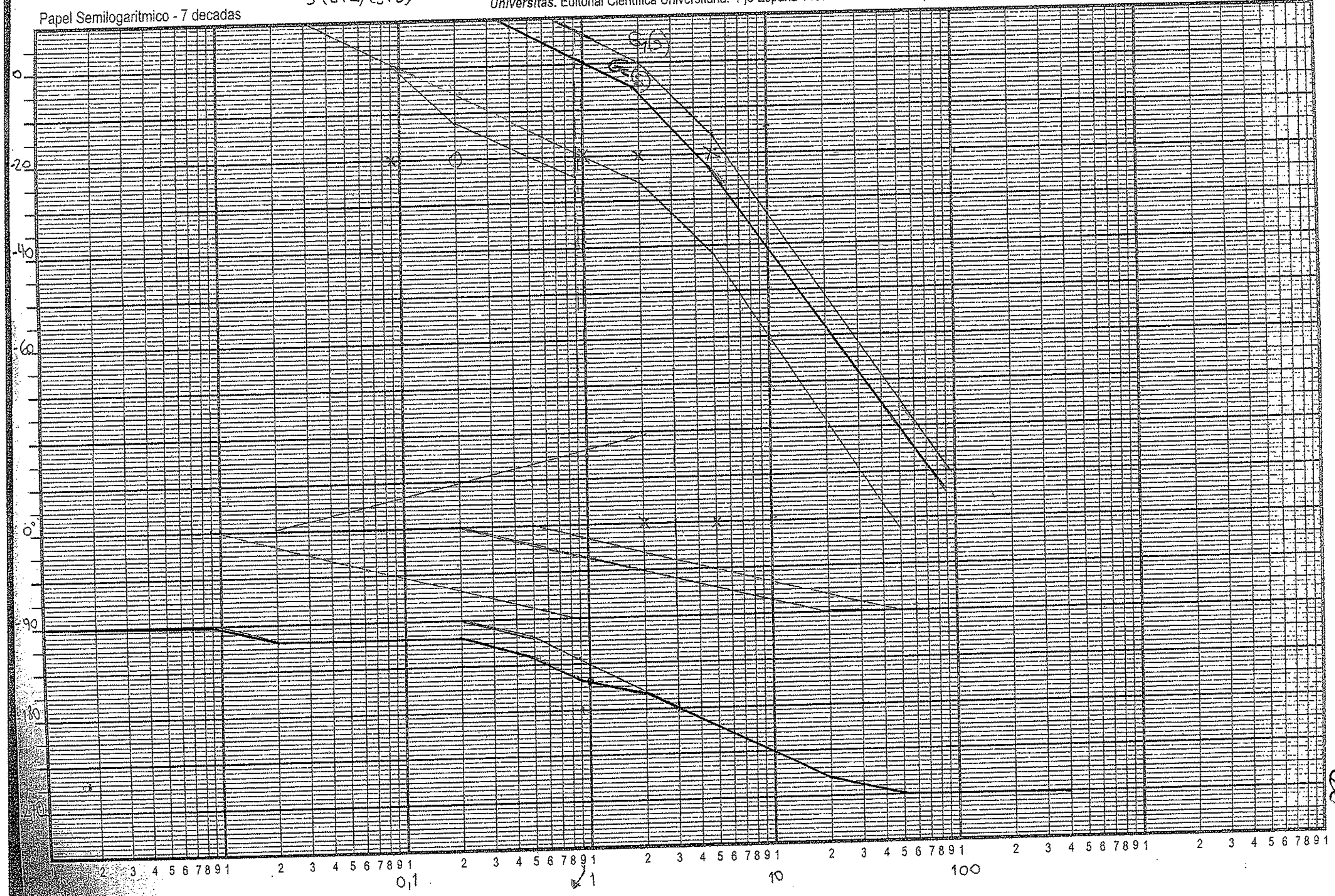
$$= s^3 + (9+k_3)s^2 + (k_2+18)s + K_1$$

$$K_1 = 600 \quad ; \quad k_2 = 169 - 18 = 151 \quad ; \quad k_3 = 30 - 9 = 21$$

NOTA

$G(s) = \dfrac{1}{s\,(s+2)\,(s+5)}$ COMP. ATRASO

Papel Semilogarítmico - 7 decadas

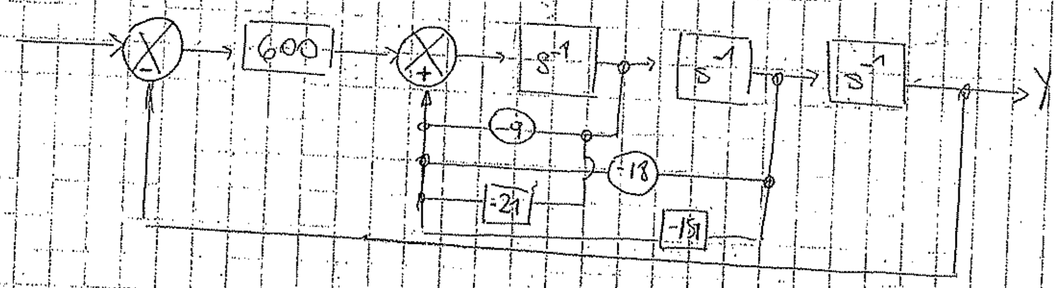


HOJA Nº

FECHA

$K = [k_1 \ k_2 \ k_3] = [600 \ \ 151 \ \ 21]$

f)



3) $G(s) = \dfrac{1}{s(s+2)(s+5)} = \dfrac{1}{s \cdot 2\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s}{5}+1\right)5} = \underbrace{\dfrac{1}{10}}_{K} \dfrac{1}{s\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s}{5}+5\right)}$

$K|_{dB} = 20 \log 0{,}1 = -20 \text{ dB}$

$\omega_{min} = 1 \longrightarrow 0{,}1$ $\qquad \lim_{s\to 0} G(s) = \infty \longrightarrow -20 \text{ dB/dec}$

$\omega_{max} = 5 \longrightarrow 50$

$\lim_{s\to\infty} G(s) = 0 \longrightarrow -60 \text{ dB/dec}$

$MG = -33 \text{ dB}$ $\qquad \begin{cases} E_{ss} = 0{,}5 \\ MF = 40^\circ \end{cases}$

$MF = 90^\circ$

$E_{ss} = \dfrac{1}{K_v} \longrightarrow K_v = 2 \qquad K_v = K K_1 \Longrightarrow K_1 = \dfrac{K_v}{K} = \dfrac{2}{0{,}1} = 20$

$K_1 = \beta K_c$

$G_1(s) = \dfrac{20}{s(s+2)(s+5)} \longrightarrow M\varphi \text{ deseado} = 40^\circ + 10^\circ = 50 \longrightarrow \omega_1 = 0{,}9 \text{ rad/seg}$

$|G(j\omega_1)| = 7 \text{ dB}$

$20 \log \beta = 7 \text{ dB} \Longrightarrow \beta = 2{,}25$

NOTA

$0{,}1W_1 < \frac{1}{T} < 0{,}5W_1 \longrightarrow \frac{1}{T} = 0{,}2 \frac{rad}{seg}$ $T = 5$ Cero

$\frac{1}{\beta T} = 0{,}09 \frac{rad}{seg}$ polo

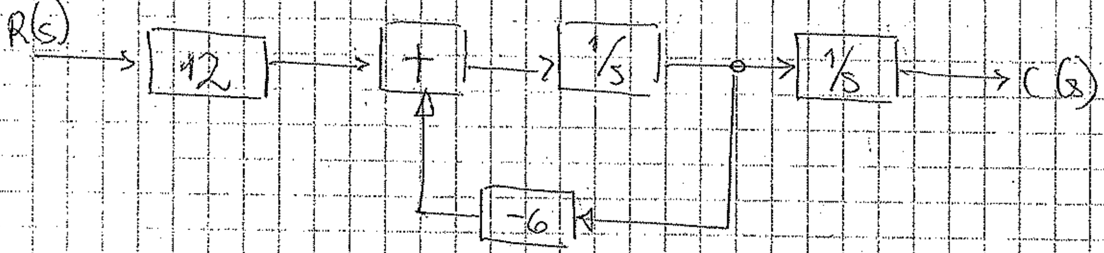
$G_c(s) = \frac{K_c(s+0{,}2)}{(s+0{,}09)}$ $K_c = \frac{K_1}{\beta} = \frac{20}{2{,}25} = 8{,}9$

$G_2(s) = \frac{8{,}9\,(s+0{,}2)}{(s+0{,}09)\,s\,(s+2)(s+5)}$

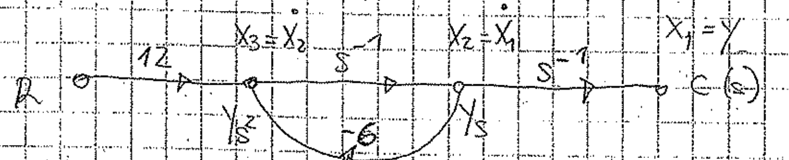
$MG = 11{,}2\,dB$ $W_G = 3{,}03$

$M\varphi = 50{,}7^\circ$ $W_\varphi = 0{,}83$

* FINAL 09/04/12



1) Expresar en variables de estado
b) Controlabilidad y Observabilidad
c) Encontrar K para que los polos sean $S_{1,2} = -7{,}07 \pm j\,7{,}07$ y $e_{ss} = 0$
d) Diagrama de flujo del sistema realimentado



$\dot{X}_2 = 12R(s) - 6X_2$

$\dot{X}_1 = X_2$

$$\begin{bmatrix}\dot{X}_1\\ \dot{X}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$Y = \begin{bmatrix}12 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\end{bmatrix}$$

$\frac{C}{R} = \frac{12}{s^3+6s}$

$\frac{C}{R} = \frac{1}{\Delta}\sum_i P_i \Delta_i$

$P_1 = \frac{12}{s^2}$ $\Delta = 1 - \sum_a L_a = 1 + \frac{6}{s} = \frac{s+6}{s}$

$L_1 = \frac{-6}{s}$ $\Delta_1 = 1$ $\frac{C}{R} = \frac{s}{s+6} \cdot \frac{12}{s^2} = \frac{12\cancel{s}}{s^{\cancel{2}}(6+s)} = \frac{12}{s^2+6s}$

$$\frac{C}{R} = \frac{b_0 s^2 + b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b_2 - b_0 a_2 & b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 12 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Controlabilidad

$$MC = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} \qquad AB: \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$MC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$|MC| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \text{controlable}$$

Observabilidad

$$MO = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T \end{bmatrix} \qquad C_T = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$|MO| = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = 12^2 = 144 \neq 0$$

observable

NOTA

$$|sI - A| = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+6 \end{bmatrix} = s(s+6) = s^2 + 6s$$

Autovalores $\rightarrow s_1 = 0$

$s_2 = 6$

Ec. característica deseada $\rightarrow (s+j\,7{,}07)(s-j\,7{,}07)$ $\rightarrow \neq -7{,}07 \pm 7{,}07j$

$= s^2 + 50$

$$|sI - A + BK| = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ k_1 & s+6+k_2 \end{bmatrix}$$

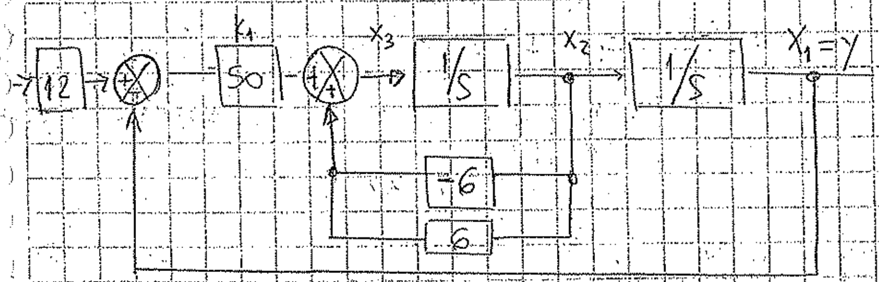
$$BK = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \; k_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

$s(s+6+k_2) + k_1$

$s^2 + (6+k_2)s + k_1$

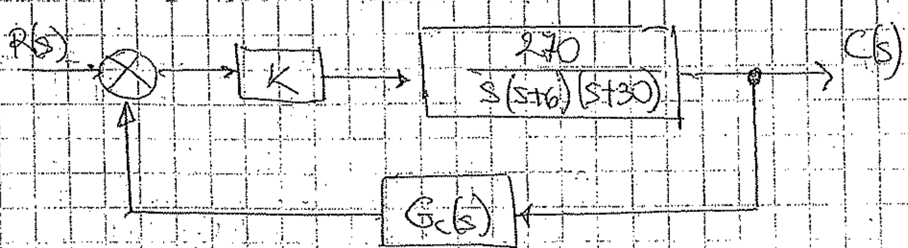
$k_2 + 6 = 0 \rightarrow k_2 = -6$

$k_1 = 50 \qquad K = [50 \; -6]$



VER

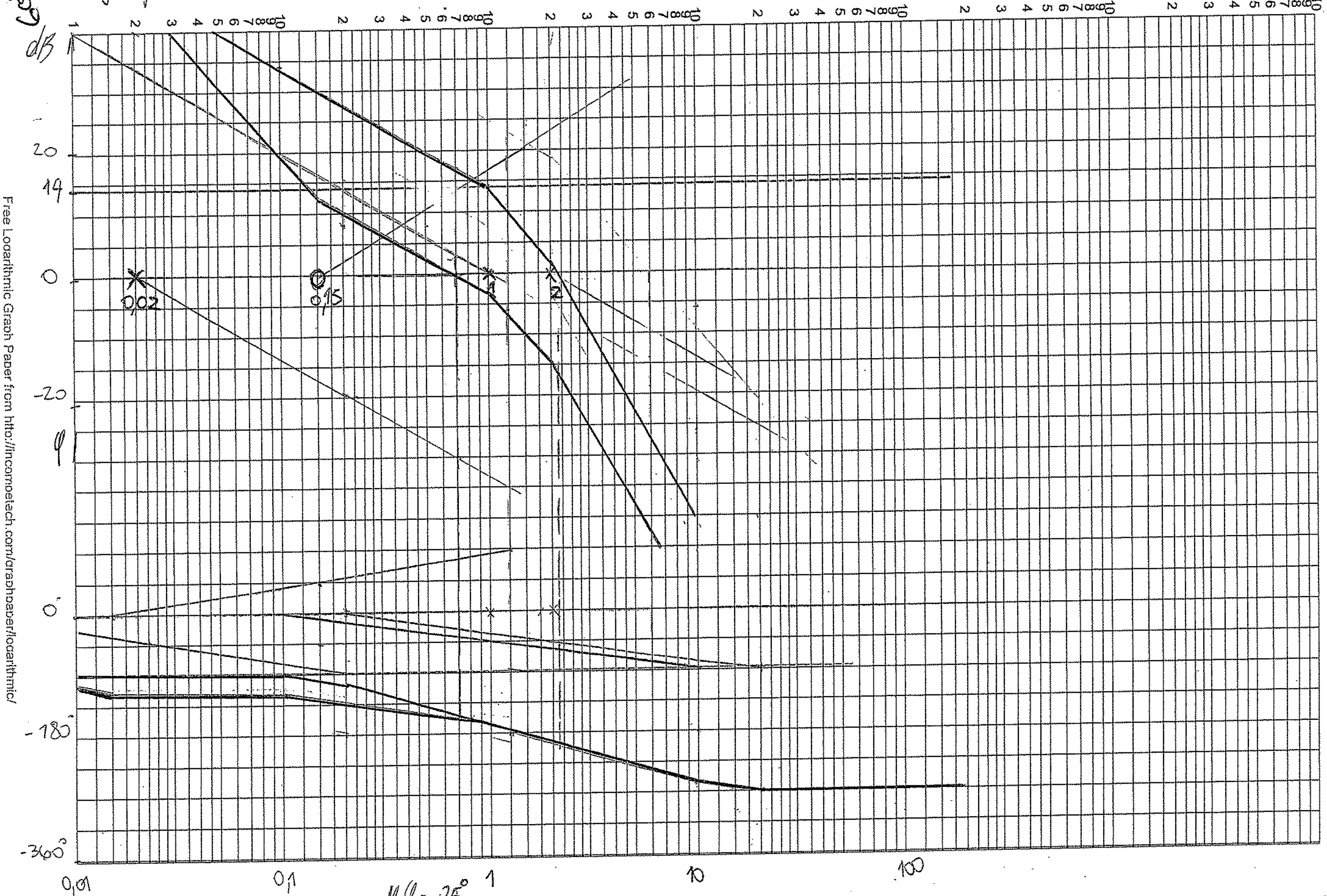
3)

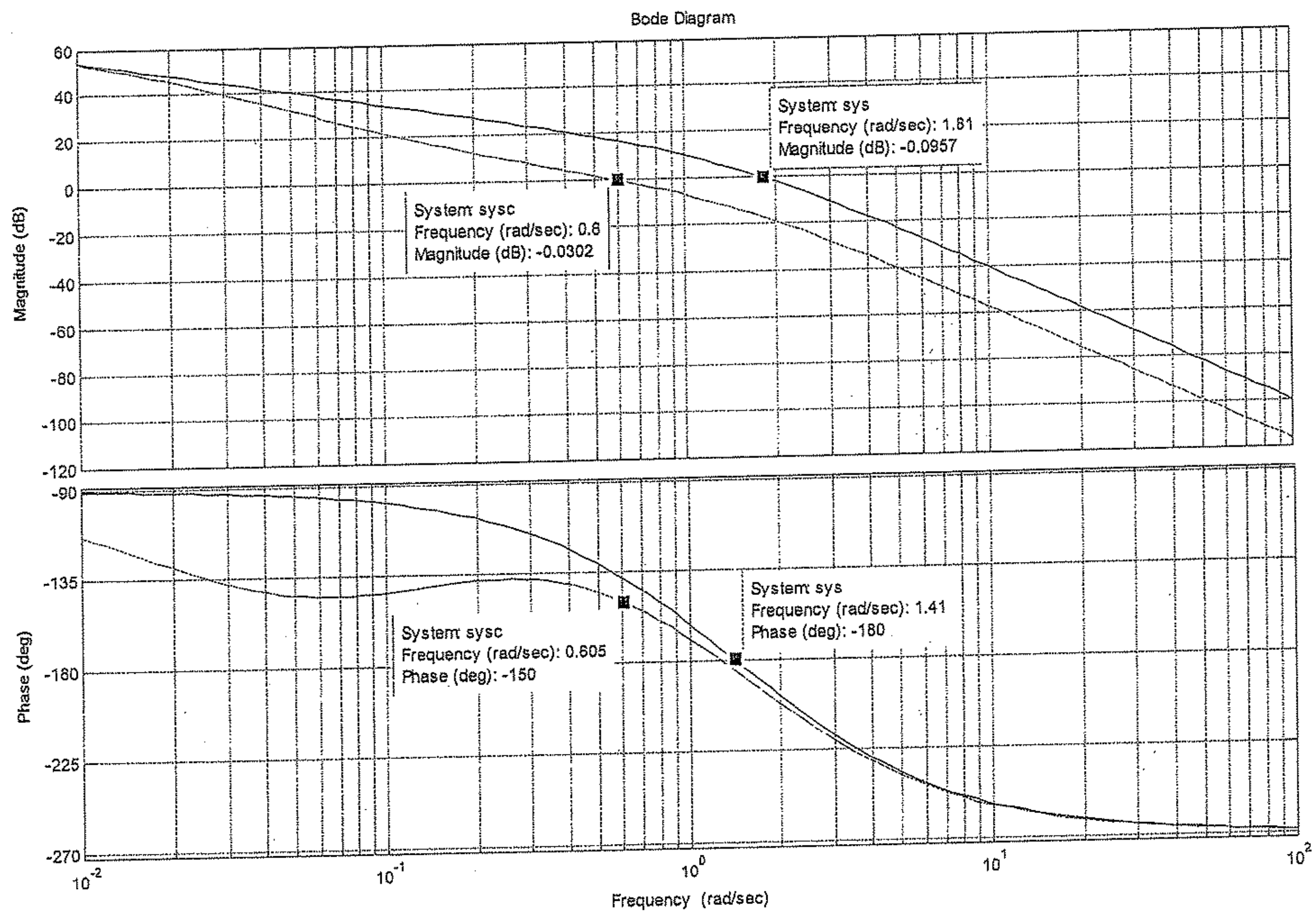


- Realimentar para que $s_{1,2} = -5 \pm j5$

59

Ejemplo 7.27



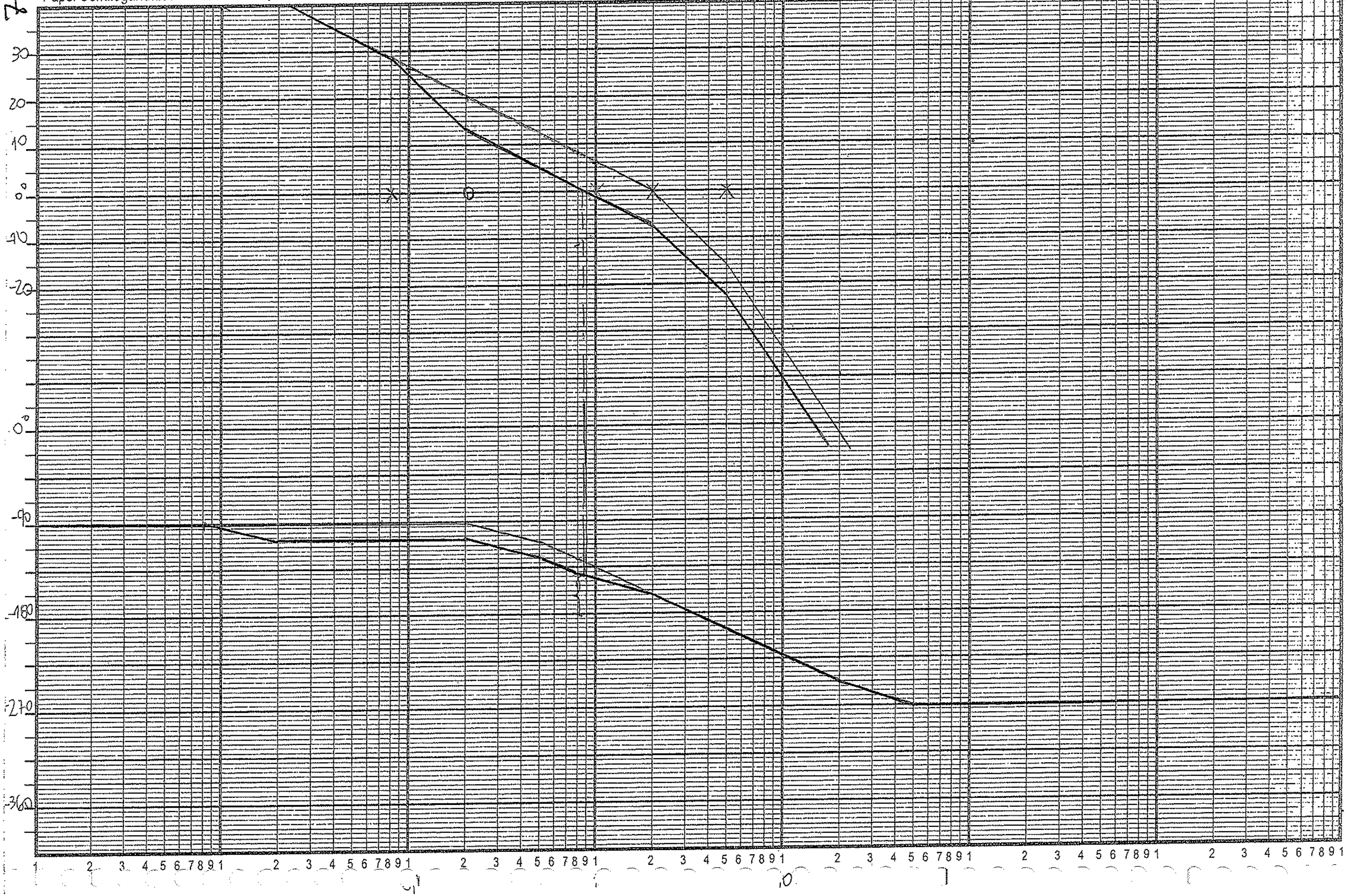


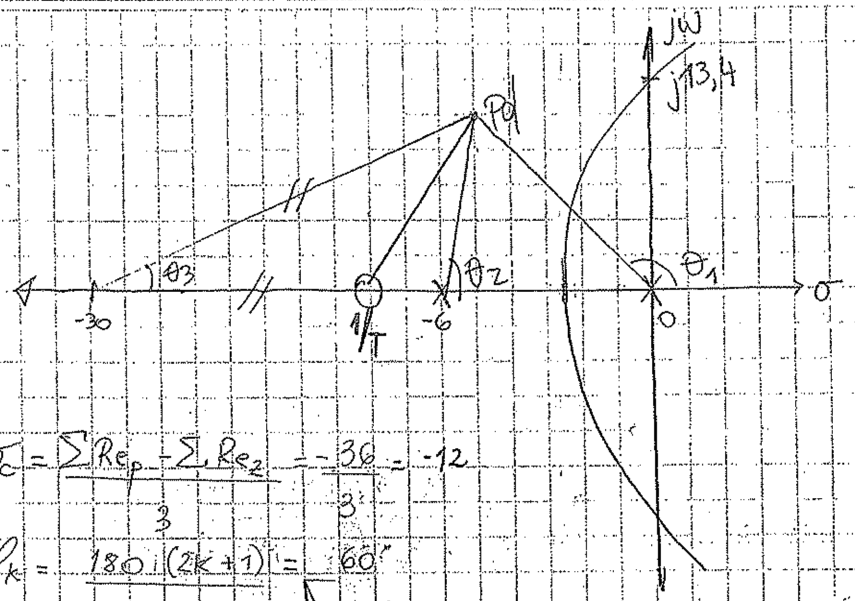
	MG	Mfase	ωG	ωfase
sys	-4.4370	-12.9919	1.4142	1.8020
sysc	10.6706	30.3021	1.2690	0.5981

71

Papel Semilogarítmico - 7 decadas ATRASO

Universitas. Editorial Científica Universitaria. Pje España 1467 - B° Nueva Cba (Al borde de Ciudad Universitaria) - Te: (0351) 4680913 - (5000) Córdoba.





$$\sigma_c = \frac{\sum Re_p - \sum Re_z}{3} = \frac{-36}{3} = -12$$

$$\varphi_k = \frac{180 \cdot (2k+1)}{3} = 60°, \; 180°, \; 300$$

$$1 + GH = 1 + \frac{270}{s(s+6)(s+30)} = s^3 + 36s^2 + 180s + 270 = 0$$

$s_1 = -2,82 - j\,0,97$

$s_2 = -2,82 + j\,0,97$

$s_3 = -30,37$

$$\frac{dk}{ds} = 3s^2 + 72s + 180 = s^2 + 24s + 60 \longrightarrow s_1 = -3,83 \quad S1 \checkmark$$

$s_2 = -21,16$ NO

$$s^3 + 36s^2 + 180s + K \Rightarrow \underbrace{(K - 36w^2)}_{0} + j\underbrace{(180w - w^3)}_{0}$$

$180\,w = w^3$

$$\boxed{w = 13,4} \longrightarrow K = 36w^2 = 6480 \longrightarrow S_{1,2} = \pm j\,13,4$$

$S_3 = -36$

$pd = -6 + j5$

$$-\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 + \phi = -180$$

$$\phi = -180 + 223,16$$

$$\boxed{\phi = 43,16°}$$

$\theta_1 = 135°$

$\theta_2 = tg^{-1}\frac{y}{x} = tg^{-1}\frac{5}{1} = 78,7$

$\theta_3 = tg^{-1}\frac{5}{30} = tg^{-1}\,0,16 = 9,46°$

NOTA

$tg\,\phi = \frac{y}{x}$ $\quad x = 5{,}23 \rightarrow \frac{1}{T} = -(x + Re_{pd}) = -10{,}23$

$tg\,43{,}16 = \frac{5}{x}$ $\quad T = 0{,}098$

$PD \rightarrow K_p(1+Ts)$

$$FTLA = \frac{K_p(1+Ts) \cdot 270}{s(s+6)(s+30)}$$

$$FTLC = \frac{\frac{K_p\, 270}{s(s+6)(s+30)}}{1 + \frac{K_p(1+Ts)270}{s(s+6)(s+30)}} = \frac{K_p\, 270}{s^3 + 36s^2 + 180s + K_p 270 Ts + K_p 270}$$

Condición de módulo $\quad |1 + GH| = 0$

$$\left| \frac{K_p(1+0{,}098s)270}{s(s+6)(s+30)} \right|_{pd} = 1$$

$$\frac{K_p \cdot 1257}{7{,}07 \cdot 5{,}1 \cdot 25{,}5} = 1 \Rightarrow K_p = 0{,}73$$

$$\boxed{G_c(s) = 1 + 0{,}098s}$$

$$\boxed{FTLC = \frac{197{,}1}{s^3 + 36s^2 + 199{,}3s + 197{,}1}}$$

NOTA

FECHA

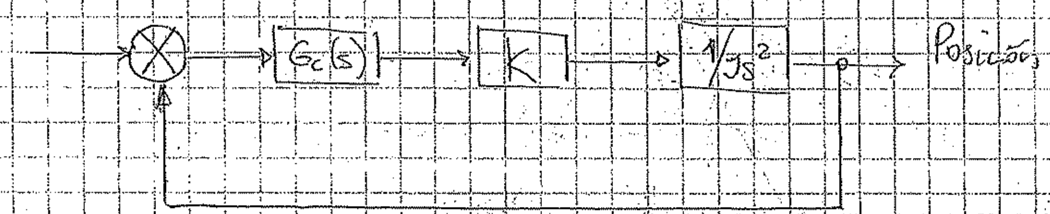
FINAL 08/02/10

1) Dado el diagrama de bloques compensar para $\xi = 0{,}5$ y $t_{s\,2\%} = 2$ seg usando lugar de raíces. Los valores son: $K = 2$ y $J = 4$

a) Compensar usando un PD

b) Compensar usando un zero-polo

c) Compensar usando velocidad y posición (lo lo realimen).

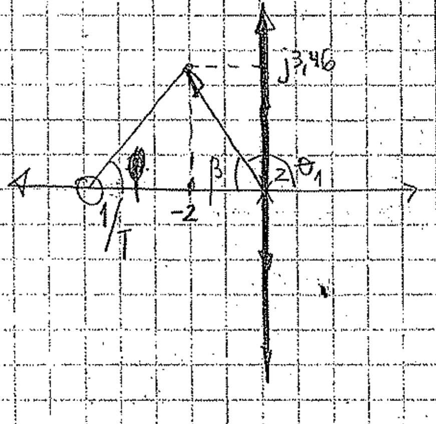


a) PD $\Rightarrow k_p(1 + T_d s)$ $\qquad G = \dfrac{2}{4s^2} = \dfrac{1}{2s^2}$

$t_s\big|_{2\%} = 2$ seg $\rightarrow t_s = \dfrac{4}{\sigma} = 2$

$\boxed{\sigma = 2}$ $\qquad \xi \omega_n = \sigma \rightarrow \omega_n = \dfrac{\sigma}{\xi} = 4$

$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = 4\sqrt{1 - 0{,}5^2} = 3{,}46$



$\cos\beta = \xi$

$\beta = 60 \qquad \theta_1 = 120°$

$-(\theta_1 \times 2) + \varphi = -180$

$\varphi = 60°$

$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$

$x = \dfrac{y}{\operatorname{tg}\varphi} = \dfrac{3{,}46}{\operatorname{tg} 60°} = 2$

$-\dfrac{1}{T} = -(2+2) = -4 \qquad \boxed{T = 0{,}25}$

NOTA

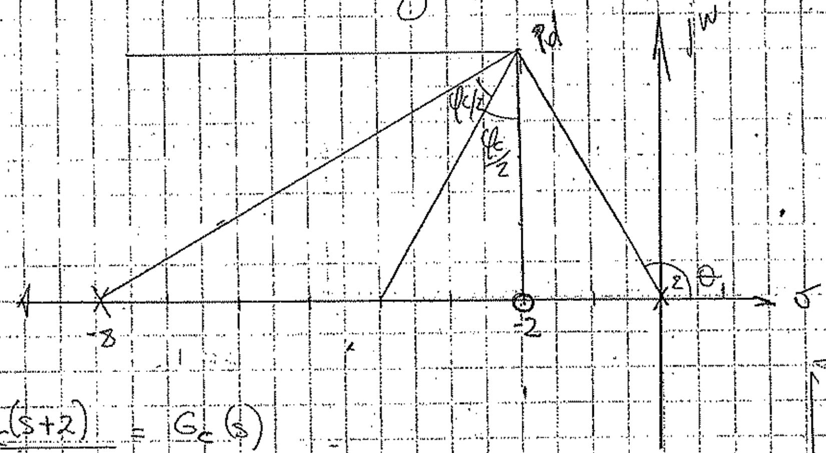
$1 + GH = 0$ $\qquad pd = -2 + j\,3{,}46$

$$|GH| = \left|\frac{k_p (1 + T_d s)\, 2}{4 s^2}\right|_{pd} = \left|\frac{k_p (1 + 0{,}25 s)}{2 s^2}\right|_{pd}$$

$$= \frac{k_p \cdot 1{,}8}{2 \cdot 16} = 1 \Longrightarrow \boxed{k_p = 17{,}8}$$

$$\boxed{G_c(s) = 17{,}8\,(0{,}25 s + 1)}$$

b) Por método de la bisectriz



$\theta_1 = 120$

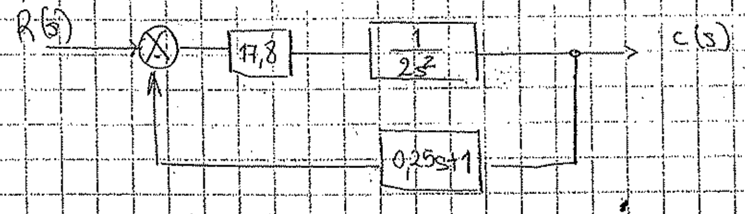
$\varphi_c = 60°$

$$k_c \frac{(s+2)}{(s+8)} = G_c(s)$$

$$\boxed{G_c(s) = \frac{64\,(s+2)}{s+8}}$$

$$\left|\frac{k_c\,(s+2)\,2}{4 s^2 (s+8)}\right|_{pd} = \frac{k_c \cdot 3{,}46}{2 \cdot 16 \cdot 6{,}92} = 1 \longrightarrow k_c = 64$$

c) Realimentación, se usa el mismo cálculo que el PD



3) Dada la FT

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{12}{s^3+9s^2+20s+12}$$

- Obtener VE y diagrama de flujo
- Observabilidad y Controlabilidad Autovalores
- Matriz de transición
- Obtener matriz K para $s=-8$ y complejos conjugados $-2 \pm 2j$
- Respuesta al escalón y proponer solución para mejorar e incluso eliminar el error. Explicarlo y mostrarlo en diagrama de flujo

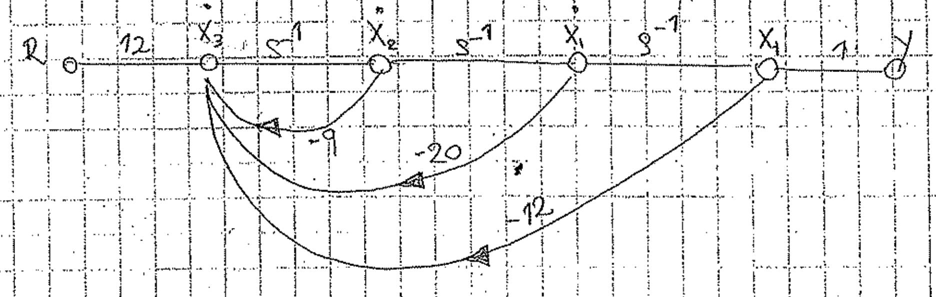
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_3}{s^3+a_1 s^2+a_2 s+a_3}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -20 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$Y = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$



Controlabilidad

$$M_C = [B \;\; AB \;\; A^2B]$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -12 & -20 & -9 \\ 108 & 168 & 61 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

AB

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -20 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ 61 \end{bmatrix}$$

$$M_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -9 \\ 1 & -9 & 61 \end{bmatrix} \rightarrow \det(M_O) = -1 \neq 0$$

Observabilidad

$$M_O = [C^T \;\; A^TC^T \;\; A^{T^2}C^T]$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & -20 \\ 0 & 1 & -9 \end{bmatrix}$$

$$A^{T^2} = \begin{bmatrix} 0 & -12 & 108 \\ 0 & -20 & 168 \\ 1 & -9 & 61 \end{bmatrix}$$

A^TC^T

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & -20 \\ 0 & 1 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{T^2}C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$M_O = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(M_O) = 12^3 = 1728 \neq 1$$

Autovalores

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -20 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 12 & 20 & s+9 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

NOTA

HOJA Nº 75

FECHA

$$s^2(s+9)+12+20s = s^3+9s^2+20s+12 \rightarrow \left.\begin{array}{l} s_1=-1 \\ s_2=-2 \\ s_3=-6 \end{array}\right\} \text{Autovalores}$$

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]$$

$$[sI-A]^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 12 & 20 & s+9 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$[sI-A]^{-1} = \frac{Adj\ A}{|A|} = \frac{Cof^T}{|A|}$$

$$Cof = \begin{bmatrix} s^2+9s+20 & (-1)12 & -12s \\ (-1)(-1)(s+9) & s^2+9s & (-1)20s+12 \\ 1 & (-1)(-s) & s^2 \end{bmatrix}$$

$$Cof^T = \begin{bmatrix} s^2+9s+20 & s+9 & 1 \\ -12 & s^2+9s & s \\ -12s & -20s-12 & s^2 \end{bmatrix} \qquad det = (s+1)(s+2)(s+6)$$

$$[sI-A]^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+6)} \begin{bmatrix} s^2+9s+20 & s+9 & 1 \\ -12 & s^2+9s & s \\ -12s & -20s-12 & s^2 \end{bmatrix}$$

0077

$$\frac{s^2+9s+20}{(s+1)(s+2)(s+6)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+6} \Rightarrow \begin{cases} A = 2{,}4 \\ B = -1{,}5 \\ C = 0{,}1 \end{cases}$$

$$\frac{s+9}{(s+1)(s+2)(s+6)} \Rightarrow A = 1{,}6 \quad B = -1{,}75 \quad C = 0{,}15$$

$$\frac{1}{\Delta} = A = 0{,}2 \quad B = -0{,}25 \quad C = 0{,}05 \qquad\qquad \frac{-12}{\Delta} = A = -2{,}4 \quad B = 3 \quad C = -0{,}6$$

$$\frac{s^2+9s}{\Delta} = A = -1{,}6 \quad B = 3{,}5 \quad C = -0{,}9 \qquad \frac{s}{\Delta} = A = -0{,}2 \quad B = 0{,}5 \quad C = -0{,}3 \qquad \frac{-12s}{\Delta} = A = 2{,}4 \quad B = -6 \quad C = 3{,}6$$

$$\frac{-20s-12}{\Delta} = A = 1{,}6 \quad B = -7 \quad C = +5{,}4 \qquad\qquad \frac{s^2}{\Delta} = A = 0{,}2 \quad B = -1 \quad C = 1{,}8$$

$$\mathcal{L}^{-1}(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} 2{,}4e^{-t} - 1{,}5e^{-2t} + 0{,}1e^{-6t} & 1{,}6e^{-t} - 1{,}75e^{-2t} + 0{,}15e^{-6t} & 0{,}2e^{-t} - 0{,}25e^{-2t} + 0{,}05e^{-6t} \\ -2{,}4e^{-t} + 3e^{-2t} - 0{,}6e^{-6t} & -1{,}6e^{-t} + 3{,}5e^{-2t} - 0{,}9e^{-6t} & -0{,}2e^{-t} + 0{,}5e^{-2t} - 0{,}3e^{-6t} \\ 2{,}4e^{-t} - 6e^{-2t} + 3{,}6e^{-6t} & 1{,}6e^{-t} - 7e^{-2t} + 5{,}4e^{-6t} & 0{,}2e^{-t} - e^{-2t} + 1{,}8e^{-6t} \end{bmatrix}$$

$\Phi(t)$

Matriz K para $s_1 = -8$, $s_{2,3} = -2 \pm 2j$

$$|sI - A + BK| = \left| \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 12 & 20 & s+9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 12+k_1 & 20+k_2 & s+9+k_3 \end{vmatrix}$$

$$s^2(s+9+k_3) + 12 + k_1 + s(20+k_2)$$

$$s^3 + (9+k_3)s^2 + s(20+k_2) + (12+k_1) \equiv (s+8)(s+2+j2)(s+2-j2)$$

$$= s^3 + 12s^2 + 40s + 64$$

$9+k_3 = 12 \rightarrow k_3 = 3$

$20+k_2 = 40 \rightarrow k_2 = 20$

$12+k_1 = 64$

$k_1 = 52$

NOTA

$K = [52 \quad 20 \quad 3]$

Respuesta al escalón

polos dominantes $-2 \pm 2j$

$w_d = 2 \qquad \xi = \frac{\sigma}{w_n} = \frac{2}{2{,}828} = 0{,}707$

$\sigma = 2$

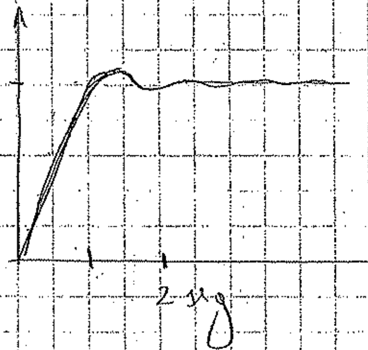
$\beta = \cos^{-1}\xi = 45° = \frac{\pi}{4}$

$t_s = \frac{4}{\sigma} = 2$ seg

$t_p = \frac{\pi - \beta}{w_d} = \frac{3\pi/4}{2} = 1{,}18$ seg

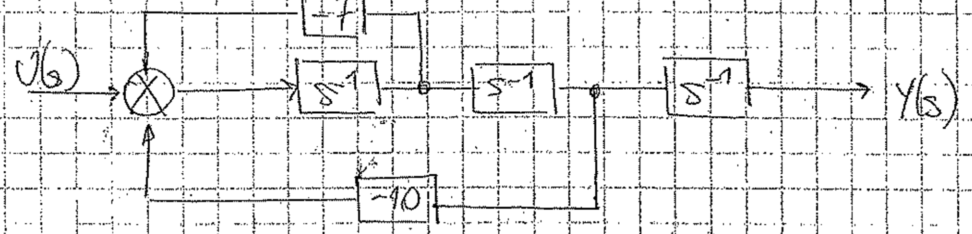
$t_p = \frac{\pi}{w_d} = 1{,}57$ seg

$M_p = e^{-\frac{\sigma}{w_d}\pi} = e^{-\pi} = 0{,}04$



Final 27/08/12

1) a) Representar el sistema de control dado por el diagrama de bloques en variable de estado, considerando la entrada $u(t)$ y la salida $y(t)$



b) Encontrar los autovalores y determinar observabilidad y controlabilidad de estados

c) Mediante una transformación lineal de la forma $x = Pz$, representar el sistema en la forma canónica diagonal

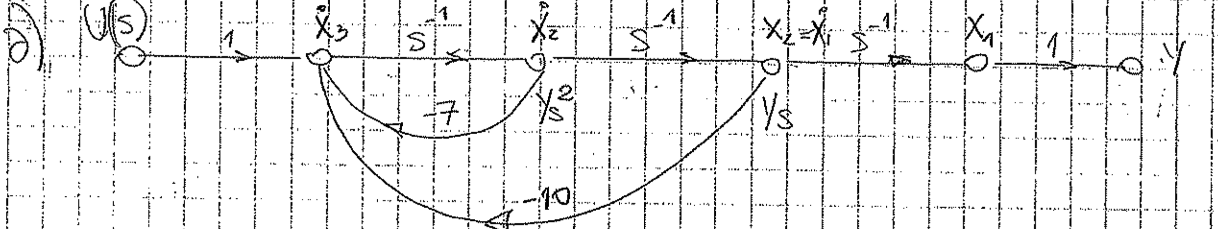
d) Encontrar la matriz de transición de estados $\phi(t)$ del sistema

NOTA

Para el sistema...
y en caso afirmativo

el sistema dado en (a), indicar si se cumplen las condiciones, afirmativo encontrar la matriz K de realimentación del vector de estados para ubicar los polos de lazo cerrado en $s_{1,2}=-3\pm 3j$, $s_3=-18$, sin que el sistema tenga error en estado estacionario para una entrada escalón unitario.
Comprobar resultados realizando el cálculo utilizando otro método diferente para obtener K.

a)



$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{s^3+7s^2+10s}=\frac{b_3}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{X}_1\\ \dot{X}_2\\ \dot{X}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-10&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$Y=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{bmatrix}$$

b) $$|sI-A|=\left|\begin{bmatrix}s&0&0\\0&s&0\\0&0&s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-10&-7\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}s&-1&0\\0&s&-1\\0&10&s+7\end{vmatrix}=s^2(s+7)+10s$$

$$=s^3+7s^2+10s$$

Autovalores $\rightarrow (s+2)(s+5)s$

$s_1=-2$
$s_2=-5$
$s_3=0$

$MC = [B \; AB \; A^2B]$ $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -7 \\ 0 & 70 & 39 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix} \end{array}$$

$A^2B = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 39 \end{bmatrix}$

$MC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -7 \\ 1 & -7 & 39 \end{bmatrix} \Longrightarrow \det(MC) = -1 \longrightarrow$ controlable

$MO = [C^T \; A^T C^T \; A^{T^2} C^T]$ $C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{c|c} & C^T \\ & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline A^T & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & -7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$A^{T^2} C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$MO = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \det(MO) = 1 \longrightarrow$ observable

c) $P^{-1}AP \longrightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 4 & 25 \end{bmatrix}$

$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0 & -0{,}833 & -0{,}166 \\ 0 & 0{,}133 & 6{,}67 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}$

$P^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0 & -0{,}833 & -0{,}166 \\ 0 & 0{,}133 & 0{,}067 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}667 & 0{,}333 \\ 0 & -0{,}667 & -0{,}333 \end{bmatrix}$

NOTA

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}667 & 0{,}333 \\ 0 & -0{,}667 & -0{,}333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 4 & 25 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}B =$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0 & -0{,}833 & -0{,}166 \\ 0 & 0{,}133 & 0{,}067 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ -0{,}166 \\ 0{,}067 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$CP =$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 4 & 25 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_2 \\ \dot{Z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ -0{,}166 \\ 0{,}067 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix}$$

d) $\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[sI - A]^{-1}$

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s+2 & 0 \\ 0 & 0 & s+5 \end{bmatrix}$$

$$[sI - A]^{-1} = \frac{\text{adj}\,[sI-A]}{\det\,[sI-A]} \qquad \det = s^3 + 7s^2 + 10s$$

$$\text{adj} = \text{cof}^T \qquad \text{cof} = \begin{bmatrix} (s+2)(s+5) & 0 & 0 \\ 0 & s(s+5) & 0 \\ 0 & 0 & s(s+2) \end{bmatrix}$$

$$\text{cof}^T = \text{cof}$$

$$[sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\cancel{(s+2)}\cancel{(s+5)}}{\cancel{(s+2)}\cancel{(s+5)}s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+5} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} = \phi(t)$$

e) polos deseados $s_1 = -3-3j \quad s_2 = -3+3j \quad s_3 = -18$

Ec. característica deseada: $(s+3+3j)(s+3-3j)(s+18)$

$$= s^3 + 24s^2 + 126s + 324$$

$$[sI - A + BK] = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 10 & s+7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ K_1 & K_2+10 & K_3+s+7 \end{bmatrix} = s^2(s+7+K_3) + K_1 + s(K_2+10)$$

$$= s^3 + s^2(7+K_3) + s(K_2+10) + K_1$$

$$\left.\begin{aligned} 7+k_3 &= 24 \rightarrow k_3 = 17 \\ 10+k_2 &= 126 \rightarrow k_2 = 116 \\ k_1 &= 324 \end{aligned}\right\} \quad K = \begin{bmatrix} 324 & 116 & 17 \end{bmatrix}$$

Por Ackerman

$$K = [0\ 0\ 1] Mc^{-1} \phi(A)$$

$$\phi(A) = A^3 + \alpha_1 A^2 + \alpha_2 A + \alpha_3 I$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -10 & -7 \\ 0 & 70 & 39 \\ 0 & -390 & -203 \end{bmatrix} + 24 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -7 \\ 0 & 70 & 39 \end{bmatrix} + 126 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -7 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 324 & 0 & 0 \\ 0 & 324 & 0 \\ 0 & 0 & 324 \end{bmatrix}$$

$$\phi(A) = \begin{bmatrix} 324 & 116 & 17 \\ 0 & 154 & -3 \\ 0 & 30 & 175 \end{bmatrix}$$

$$Mc^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 1 \\ 7 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

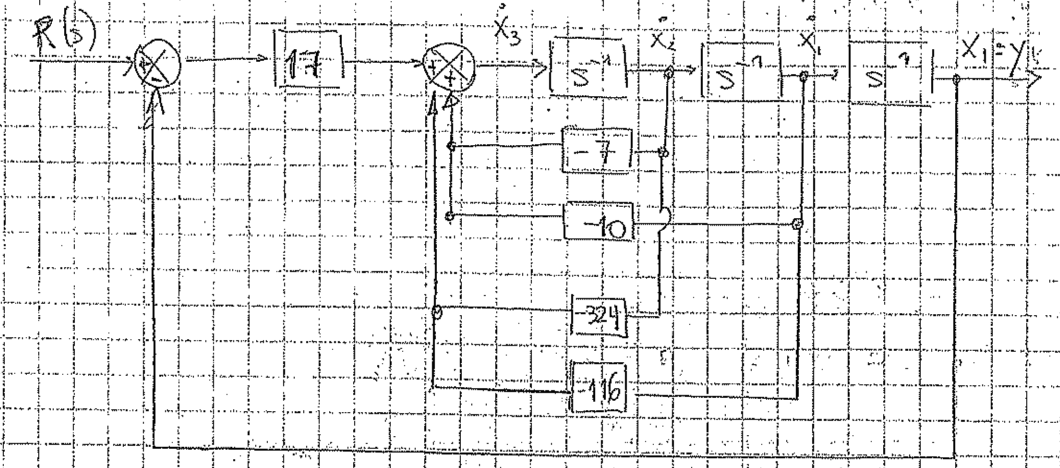
$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 1 \\ 7 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[0\ 0\ 1] \quad [1\ 0\ 0]$$

$$\begin{bmatrix} 324 & 116 & 17 \\ 0 & 154 & -3 \\ 0 & 30 & 175 \end{bmatrix}$$

$$[1\ 0\ 0] \quad [324\ 116\ 17]$$

K



VER

2) $G_p(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+5)}$ $\quad e_{ss} = 0,5$ para entrada rampa
$M\phi = 40°$

a) Diseñar controlador de adelanto
b) " controlador de atraso
c) Indicar las diferencias que se producirían en las respuestas de los sistemas si con ambos pueden cumplirse las especif. de diseño.

$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 0,5 \rightarrow K_v = 2$

a) $G_1(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+5)} \rightarrow \lim_{s \to 0} sG_1(s) = \frac{\cancel{s}\,K}{\cancel{s}(s+2)(s+5)} = \frac{K}{10} = 2$ $\quad \boxed{K = 20}$

$K = \alpha K_c$

$M\phi_{act} = 18° \rightarrow \phi_c = 40 - 18 = 22 + 10 = 32°$

$\alpha = \frac{1 - \sin\phi_c}{1 + \sin\phi_c} = \frac{0,47}{1,53} = \boxed{0,307}$

$-20 \log \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = -5,12\,dB \rightarrow \omega_{max} = 2,6\,rad/seg = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$

$T = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\,2,6} = 0,69$

$T = 0{,}69 \longrightarrow 1/T = 1{,}45$ cero

$\alpha T = 0{,}211 \longrightarrow 1/\alpha T = 4{,}72$ polo

$K = \alpha K_c \Rightarrow 20 = 0{,}307\, K_c \longrightarrow K_c = 65{,}15$

$$G_c = 65{,}15 \frac{(s+1{,}45)}{(s+4{,}72)}$$

$$G_T(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{65{,}15\ (s+1{,}45)}{(s+4{,}72)\, s\, (s+2)(s+5)}$$

b) $180 - 50 = 130° \rightarrow \omega_1 = 0{,}8$ rad

$$0{,}1\,\omega_1 < \frac{1}{T} < 0{,}5\,\omega_1 \longrightarrow \frac{1}{T} = 0{,}2 \text{ rad}$$

$|G(j\omega_1)| = 8\text{ dB} \rightarrow 20 \log \beta = 8\text{ dB}$

$$\boxed{\beta = 2{,}5}$$

$\frac{1}{\beta T} = 0{,}08$ rad $\qquad K_c = \frac{K}{\beta} = \frac{20}{2{,}5} = 8$

$$G_c(s) = \frac{8\,(s+0{,}2)}{(s+0{,}08)} \qquad G_T(s) = \frac{8\ (s+0{,}2)}{(s+0{,}08)\, s\, (s+2)(s+5)}$$

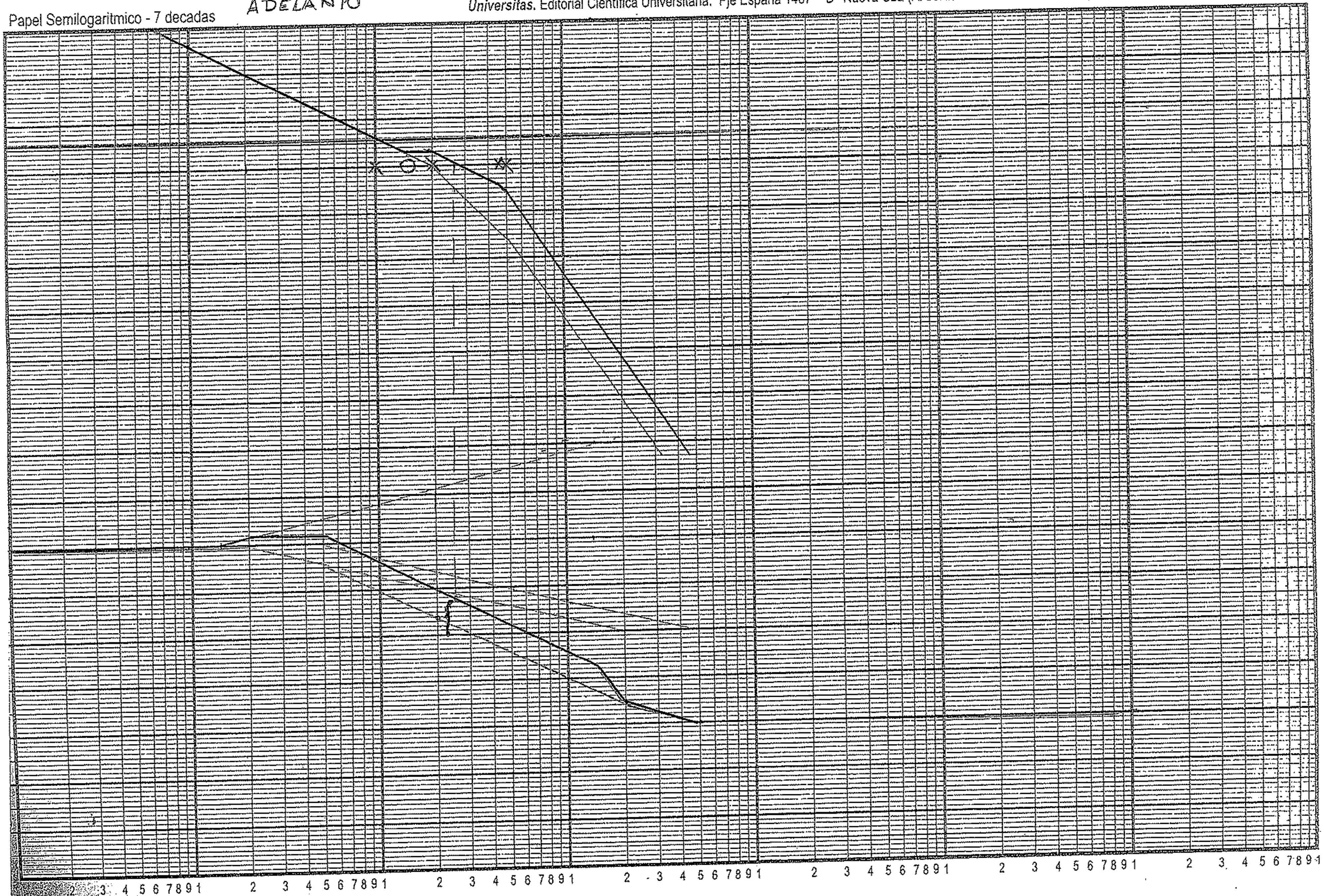
c) Adelanto: aumenta el ancho de banda y mejora la respuesta transitoria, puede acentuar los efectos del ruido.

Atraso: filtro pasa bajos, disminuye el ancho de banda, mejora la precisión pero empeora la respuesta transitoria.

NOTA

Papel Semilogaritmico - 7 decadas

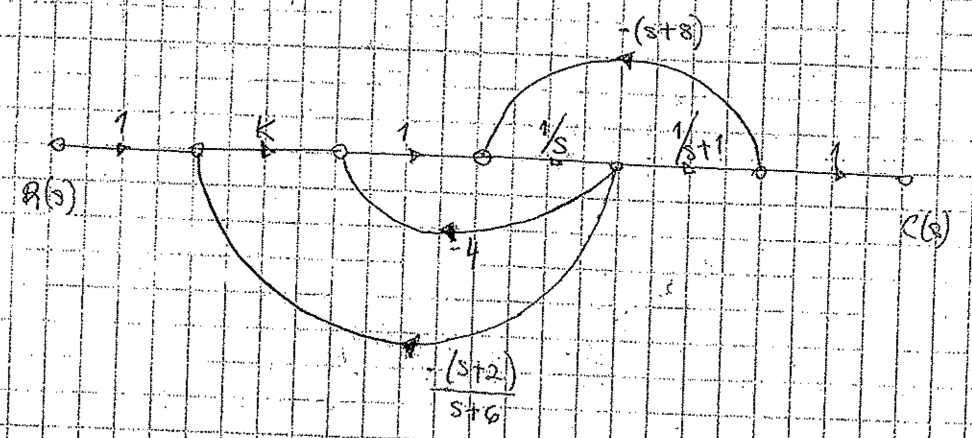
ADELANTO



HOJA Nº

FECHA

* Ejemplos de Aplicación MASON:



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{m} P_i \Delta_i$$

* NO HAY LAZOS DISJUNTOS (todos tiene nodos en común)

$$P_1 = \frac{K}{s(s+1)} \qquad L_1 = -\frac{K}{s}\frac{(s+2)}{s+6} \qquad L_2 = \frac{-4}{s} \qquad L_3 = \frac{-(s+8)}{s(s+1)}$$

$$\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c$$

$$= 1 - (L_1 + L_2 + L_3)$$

$$= 1 - \left[\frac{-K(s+2)}{s(s+6)} - \frac{4}{s} - \frac{(s+8)}{s(s+1)}\right] = 1 + \frac{K(s+2)(s+1) + 4(s+1)(s+6) + (s+8)(s+6)}{s(s+1)(s+6)}$$

$$= \frac{s(s+1)(s+6) + K(s^2+3s+2) + 4(s^2+7s+6) + (s^2+14s+48)}{s^3+7s^2+6s}$$

$$= \frac{s^3 + 7s^2 + 6s + Ks^2 + 3Ks + 2K + 4s^2 + 28s + 24 + s^2 + 14s + 48}{s^3+7s^2+6s}$$

$$\Delta = \frac{s^3 + (12+K)s^2 + (3K+48)s + (2K+72)}{s^3+7s^2+6s}$$

$\Delta_1 = 1$ (todos los lazos tocan la trayectoria P_1)

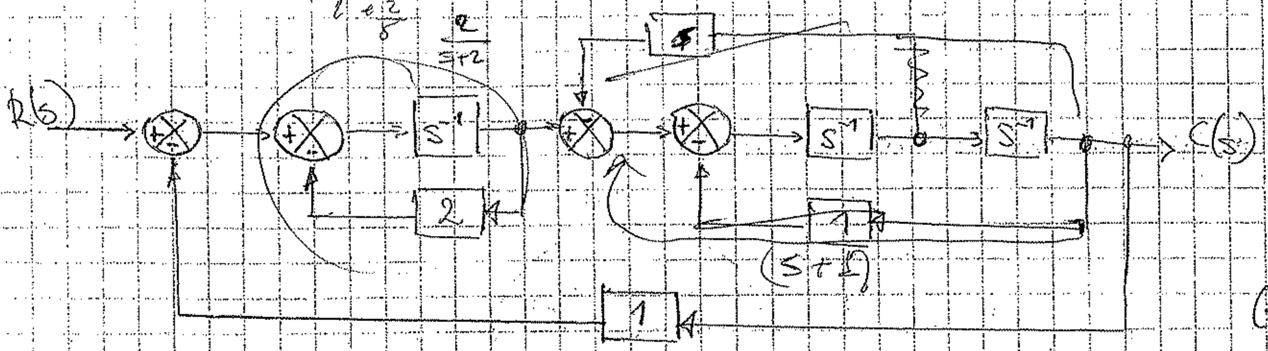
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(s^3+7s^2+6s)\,K}{\left[s^3+(12+K)s^2+(48+3K)s+(72+2K)\right]\cdot\left[s(s+1)\right]}$$

NOTA

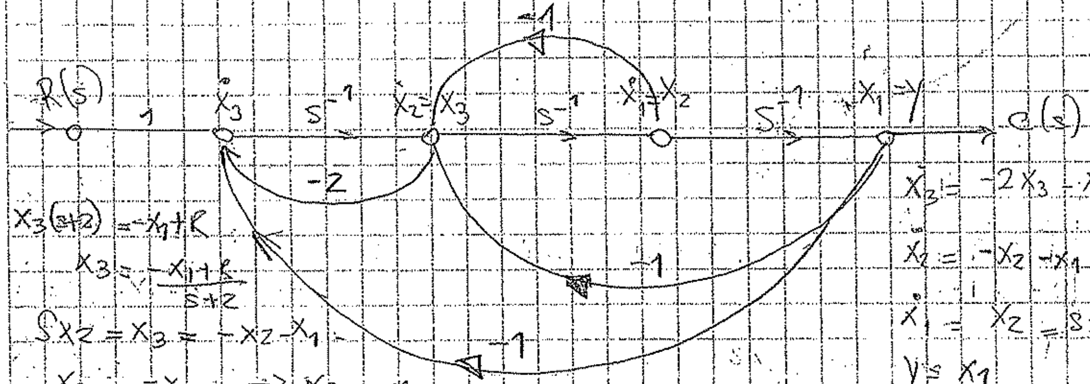
$$\frac{\frac{2}{s}}{1+\frac{2}{s}} = \frac{2}{s+2}$$

$$\frac{\frac{1}{s^2}\cdot(s+1)}{1+\frac{s+1}{s^2}} = \frac{s+1}{s^2+s+1}$$

81



$$\frac{s+1}{(s^2+s+1)}\cdot\frac{2}{(s+2)}$$



$\dot{X}_3 = -2X_3 - X_1 + R = sX_3$

$\dot{X}_2 = -X_2 - X_1 = sX_2$

$\dot{X}_1 = X_2 = sX_1$

$Y = X_1$

$X_3(s+2) = -X_1 + R$

$X_3 = \frac{-X_1 + R}{s+2}$

$sX_2 = X_3 = -X_2 - X_1$

$X_2 = \frac{-X_1}{s+1} \rightarrow \frac{X_3}{s} = \frac{-X_1}{(s+1)} \rightarrow X_3 = \frac{-s\,X_1}{(s+1)} = \frac{-X_1 + R}{(s+2)}$

$\frac{-s(s+2)X_1}{(s+1)} = -X_1 + R \Rightarrow X_1\left(1 - \frac{s(s+2)}{s+1}\right) = R$

$Y = \frac{R}{1 - \frac{s(s+2)}{(s+1)}} \Rightarrow \frac{Y}{R} = \frac{1}{\frac{s+1-s^2-2s}{(s+1)}} = \frac{s+1}{-s^2-s+1}$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta}\sum_{i=1} P_i\Delta_i$$

$P_1 = \frac{1}{s^3}$ $\quad L_1 = \frac{-2}{s}$ $\quad L_2 = \frac{-1}{s}$ $\quad L_3 = \frac{-1}{s^2}$ $\quad L_4 = \frac{-1}{s^3}$

$\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c$ → lazos sin nodos en común, no hay

$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) = 1 + \frac{2}{s} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} = \frac{2s^2 + s^2 + s + 1}{s^3} + 1$

$\Delta = \frac{s^3 + 3s^2 + s + 1}{s^3}$ $\quad \Delta_1 = 1$ (no hay lazos que no toque P_1)

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s^3}{s^3+3s^2+s+1}\cdot\frac{1}{s^3} = \frac{1}{s^3+3s^2+s+1}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{X}_1\\ \dot{X}_2\\ \dot{X}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u \qquad Y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{bmatrix}$$

MAC

NOTA

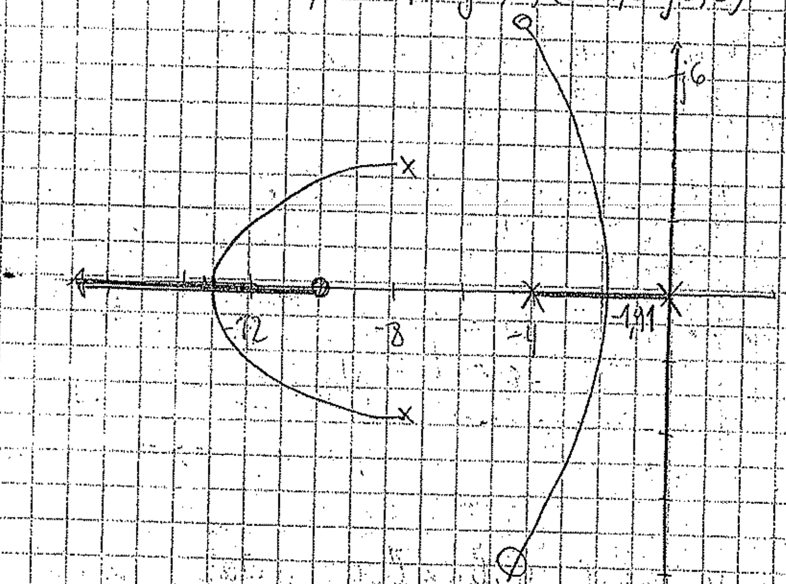
*FINAL

- Realizar el diagrama del lugar de raíces para $-\infty < K < \infty$ de un sistema de control que tiene una función de transferencia de lazo abierto GH(s) dada por

$$GH(s) = \frac{K(s+10)(s^2+9s+81)}{s(s+4)(s^2+14,4s+64)}$$

Indicando el rango de variación para que el sistema sea estable.

$$GH(s) = \frac{K(s+10)(s+4,5+j7,8)(s+4,5-j7,8)}{s(s+4)(s+7,2+j3,5)(s+7,2-j3,5)} = \frac{K[s^3+19s^2+171s+810]}{s^4+18,4s^3+121s^2+256s}$$



$n-m = 1$ asíntota $\rightarrow -180°$

$$\frac{\pm 180}{n-m}(2k+1) = \pm 180$$

$J \times M - K \times L$

$$\frac{dK}{ds} \rightarrow \frac{s^4+18,4s^3+121s^2+256s}{(\quad)} = K \qquad U = L \quad V = M$$

$$\frac{dK}{ds} = \frac{U'V - V'U}{V^2} \qquad U' = 4s^3+55,2s^2+242s+256 \quad (J)$$

$$V' = 3s^2+38s+171 \quad (K)$$

$$\frac{dk}{ds} = s^6 + 38s^5 + 741{,}6\,s^4 + 9020{,}8\,s^3 + 60539\,s^2 + 196020\,s + 207360$$

raíces $\rightarrow$ $s_1 = -1{,}91$ $\longrightarrow$ son LR ✓

$s_{2,3} = -6{,}02 \pm j\,2{,}26$

$s_{4,5} = -5{,}4 \pm j\,13{,}01$

$s_6 = -13{,}22$

$$|1+GH| = 0 = s^4 + 18{,}4s^3 + 121s^2 + 256s + K\left[s^3 + 19s^2 + 171s + 810\right]$$

$$= s^4 + s^3(18{,}4 + k) + s^2(121 + k19) + s(256 + k171) + k.810$$

$$(j\omega)^4 + (j\omega)^3(k + 18{,}4) + (j\omega)^2(121 + 19k) + j\omega(171k + 256) + 810.k$$

REALES $\rightarrow$ $\omega^4 - (121 + 19k)\omega^2 + 810k = 0$

IMAG $\rightarrow$ $j\left[-\omega^3.(k + 18{,}4) + \omega.(171k + 256)\right] = 0$

$$\cancel{\omega}(171k + 256) = \omega^{\cancel{3}}(k + 18{,}4)$$

$$\frac{171k + 256}{k + 18{,}4} = \omega^2 \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{171k + 256}{k + 18{,}4}}$$

$$171k + 256 = 0$$

$$\boxed{k = -1{,}5}$$

NO ES INESTABLE PARA $K > 0$

- Considerando el sistema de control realimentado anterior, se pide realizar un control en cascada, para lograr un coeficiente de error en estado estacionario mayor o igual a 50 y un margen de fase de 50°. Realizar el diseño y marcar en el Bode.

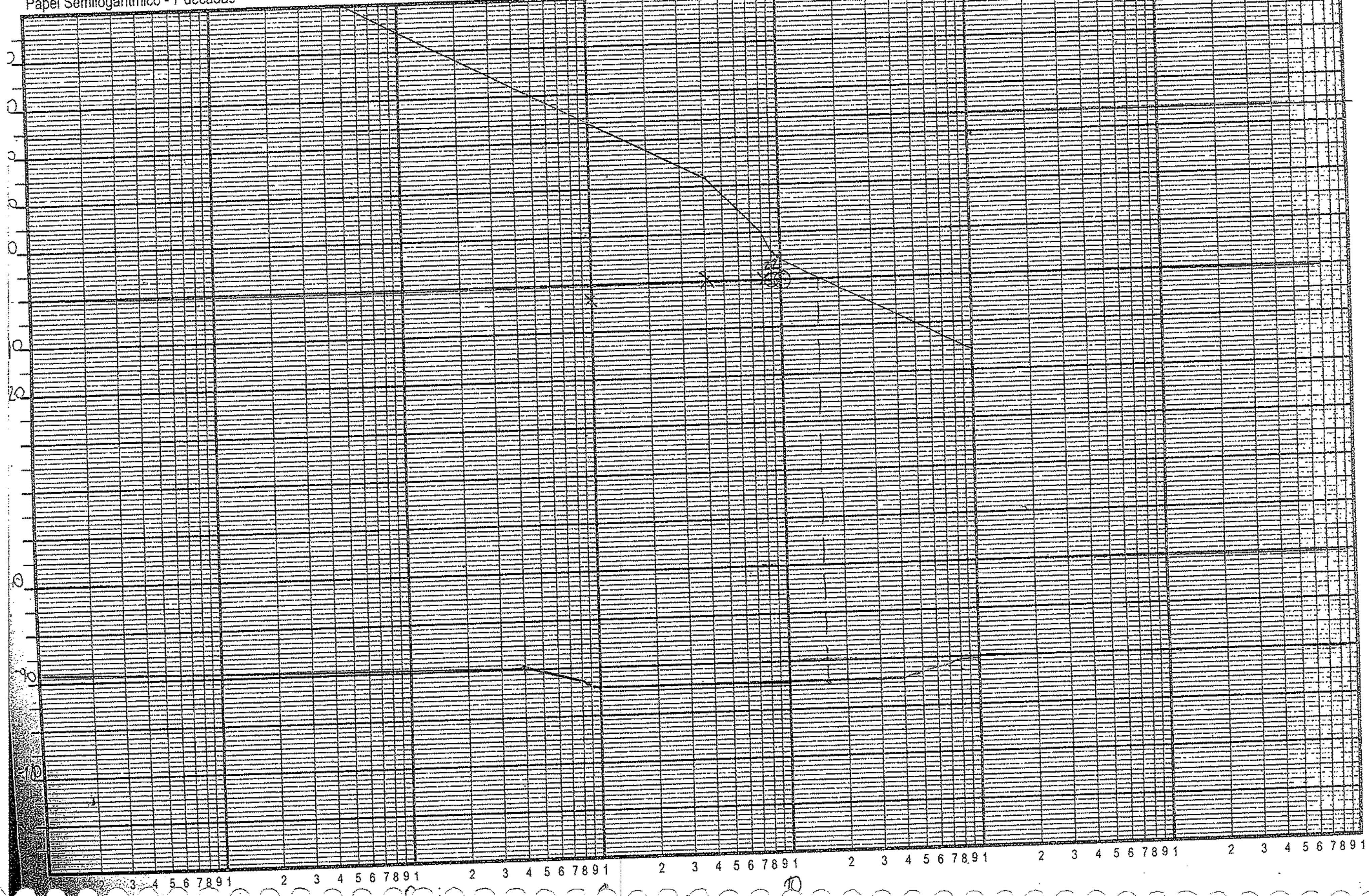
$$G = \frac{K(s+10)(s^2+9s+81)}{s(s+4)(s^2+14{,}4s+64)} = \frac{k.10.\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s^2}{81}+\frac{9}{81}s+1\right)81}{4s\left(\frac{s}{4}+1\right)\left(\frac{s^2}{64}+\frac{14{,}4}{64}s+1\right)64}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{k_V} \qquad k_V = \lim_{s\to 0} sG(s) = \frac{k.10.81}{4.64} = k.3{,}164 = 50$$

$$\boxed{K = 15{,}8}$$

Universitas. Editorial Científica Universitaria. Pje España 1467 - B° Nueva Cba (Al borde de Ciudad Universitaria) - Te: (0351) 4680913 - (5000) Córdoba.

Papel Semilogarítmico - 7 decadas



HOJA Nº

FECHA

$s^2+9s+81 \longrightarrow \omega_n = 9$

$\xi = \dfrac{9}{2\omega_n} = 0{,}5$

$M_r = \dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \cong 1{,}15 \Rightarrow 1{,}25\ dB$

$\omega_r = \omega_n\sqrt{(1-2\xi^2)} = 6{,}36\ \frac{rad}{seg}$

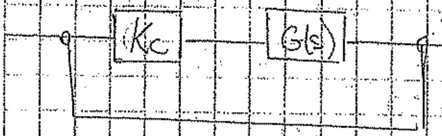
$s^2+14{,}4s+64 \longrightarrow \omega_n = 8$

$\xi = \dfrac{14{,}4}{2\omega_n} = 0{,}9 > 0{,}707 \longrightarrow M_r = 1 \quad \omega_r = \omega_n$

$K|_{dB} = 34\ dB \qquad \omega_c = 16\ rad/seg \qquad M\varphi = 70^\circ$

$MG = \infty$

- Compensación por ajuste de ganancia



$K_c = 15{,}8$

* Un sistema de control de entrada y salida única está modelado por una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 11\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 36\frac{dy(t)}{dt} + 36\,y(t) = 36\,r(t)$$

con autovalores $-2, -3$ y -6

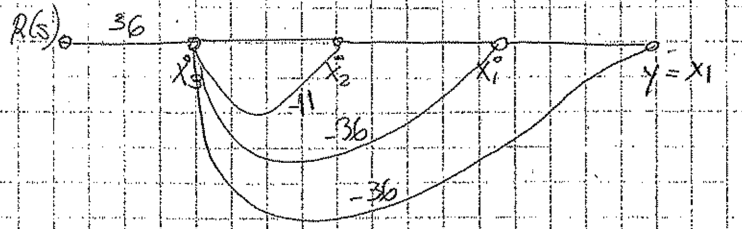
- Realizar la representación mediante variables de estado indicando ecuaciones dinámicas, diagrama de flujo de señal, controlabilidad y observabilidad. Mediante la realimentación del vector de estado obtener la matriz K que permita ubicar los polos de lazo cerrado en $s_1 = -10;\ s_{2,3} = -3 \pm 3j$

$s^3Y(s) - \cancel{s^2Y(0)} - \cancel{sY'(0)} - \cancel{Y''(0)} + 11s^2Y(s) - \cancel{sY(0)} - \cancel{Y'(0)} + 36sY(s) - \cancel{Y(0)} + 36Y(s) = 36R$

$Y(s)\left[s^3+11s^2+36s+36\right] = 36\,R(s)$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{36}{s^3+11s^2+36s+36}$$

NOTA



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -36 & -36 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$MC = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -36 & -36 & -11 \\ 396 & 360 & 85 \end{bmatrix}$$

$$AB: \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -36 & -36 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -11 \end{bmatrix} \qquad A^2B = \begin{bmatrix} 1 \\ -11 \\ 85 \end{bmatrix}$$

$$MC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -11 \\ 1 & -11 & 85 \end{bmatrix} \Longrightarrow \det(MC) = -1 \rightarrow \text{rango 3, controlable}$$

$$MO = \begin{bmatrix} C^T & A^TC^T & A^{T^2}C^T \end{bmatrix} \qquad C^T = \begin{bmatrix} 36 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^TC^T: \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & -36 \\ 1 & 0 & -36 \\ 0 & 1 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 36 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 36 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A^{T^2}C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 36 \end{bmatrix}$$

$$MO = \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{bmatrix}$$

$\det(MO) = 46656 \rightarrow$ rango3
observable

NOTA

$$|sI-A| = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -36 & -36 & -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ +36 & +36 & s+11 \end{bmatrix} = s^2(s+11) + 36 + 36s$$

$$= s^3 + 11s^2 + 36s + 36$$

$$|sI-A+BK| = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 36 & 36 & s+11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 36+k_1 & 36+k_2 & s+11+k_3 \end{bmatrix},$$

$$BK = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$= s^2(s+11+k_3) + 36+k_1 + s(36+k_2)$$

$$= s^3 + s^2(11+k_3) + s(36+k_2) + (36+k_1)$$

Ec. característica deseada:

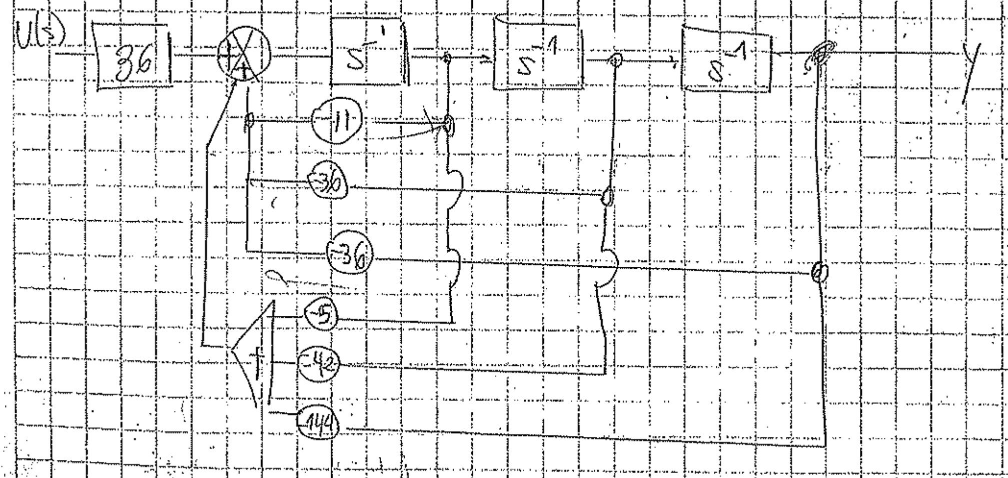
$$(s+10)(s+3-j3)(s+3+3j) = s^3 + \underbrace{16}_{11+k_3}s^2 + \underbrace{78}_{36+k_2}s \underbrace{+180}_{36+k_1}$$

$k_3 = 16 - 11 = 5$

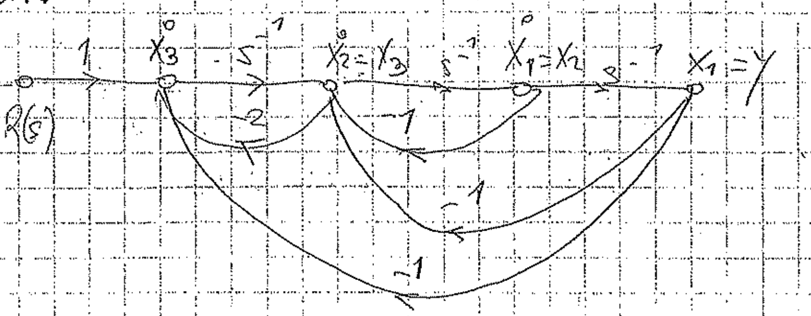
$k_2 = 78 - 36 = 42$

$k_3 = 180 - 36 = 144$

$$K = \begin{bmatrix} 144 & 42 & 5 \end{bmatrix}$$



* DESCOMPOSICIÓN EN FCC



$$\dot{X}_1 = X_2 \qquad \dot{X}_1 = sX_1 = X_2$$

$$\dot{X}_2 = X_3 - X_1 - X_2 \qquad \dot{X}_2 = sX_2 = X_3 - X_1 - X_2$$

$$\dot{X}_3 = -2X_3 - X_1 + R(s) \qquad \dot{X}_3 = sX_3 = -2X_3 - X_1 + R(s)$$

$$sX_1 = X_2 \qquad sX_2 = X_3 - X_1 - X_2 \qquad sX_3 = -2X_3 - X_1 + R(s)$$

$$X_1 = \frac{X_2}{s} \qquad X_2 = \frac{X_3}{s+1} - \frac{X_1}{s+1} \qquad X_3 = -\frac{X_1}{s+2} + \frac{R(s)}{s+2}$$

$$X_2 = \frac{1}{s+1}\left[\frac{-X_1 + R(s)}{s+2} - X_1\right]$$

$$= \frac{R(s) - X_1 - X_1(s+2)}{(s+1)(s+2)}$$

$$X_1 = \frac{R - X_1(1+s+2)}{(s+1)\,s\,(s+2)} = \frac{R - X_1(s+3)}{s(s+1)(s+2)}$$

$$X_1 (s+1)(s+2)s = R - X_1(s+3)$$

$$X_1 \left[s(s+1)(s+2) + (s+3)\right] = R$$

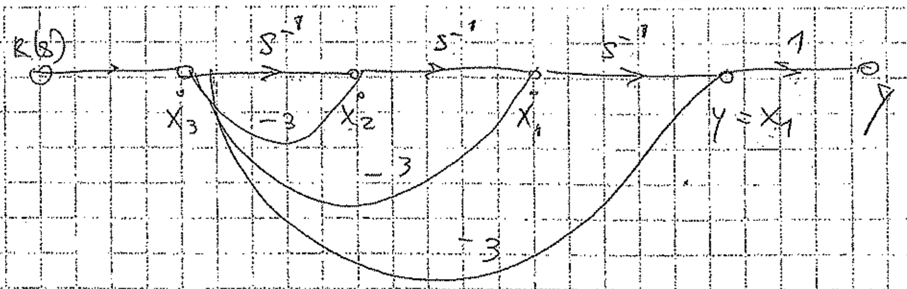
$$X_1 \left[s^3 + 3s^2 + 2s + s + 3\right] = X_1 \left[s^3 + 3s^2 + 3s + 3\right] = R(s)$$

Si $X_1 = X(s)$

$$X(s)\,(s^3 + 3s^2 + 3s + 3) = R(s)$$

$$X(s) = \frac{R(s)}{s^3 + 3s^2 + 3s + 3} \cdot \frac{s^{-3}}{s^{-3}} = \frac{R(s)\,s^{-3}}{1 + 3s^{-1} + 3s^{-2} + 3s^{-3}}$$

$$X(s) = -(\underbrace{3s^{-1}}_{X_3} + \underbrace{3s^{-2}}_{X_2} + \underbrace{3s^{-3}}_{X_1}) + R(s)\,s^{-3}$$



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

FCC

Si se toma directamente de las ecuaciones:

$$\dot{x}_1 = x_2 = s x_1$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2$$
$$\dot{x}_3 = R(s) - x_1 - 2x_3$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} R$$

$$[sI - A] = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 1 & s+1 & 0 \\ 1 & 0 & s+2 \end{vmatrix} = s(s+1)(s+2) + (s+2) = s^3 + 3s^2 + 2s + s + 2 = s^3 + 3s^2 + 3s + 2$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Para pasar A a la FCC, $P^{-1}AP$, donde

$$P = M_c W : \quad W = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

NO

AB $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

A^2B

VER

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 7 & -5 & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 13 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}$$

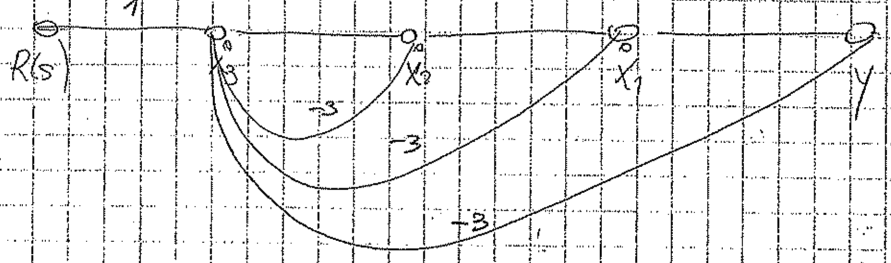
NOTA

Descompone de la FT a la FCC:

$$\frac{C}{R} = \frac{1}{s^3+3s^2+3s+3} \cdot \frac{s^{-3}}{s^{-3}} = \frac{s^{-3}}{1+3s^{-1}+3s^{-2}+3s^{-3}} \cdot \frac{X(s)}{X(s)}$$

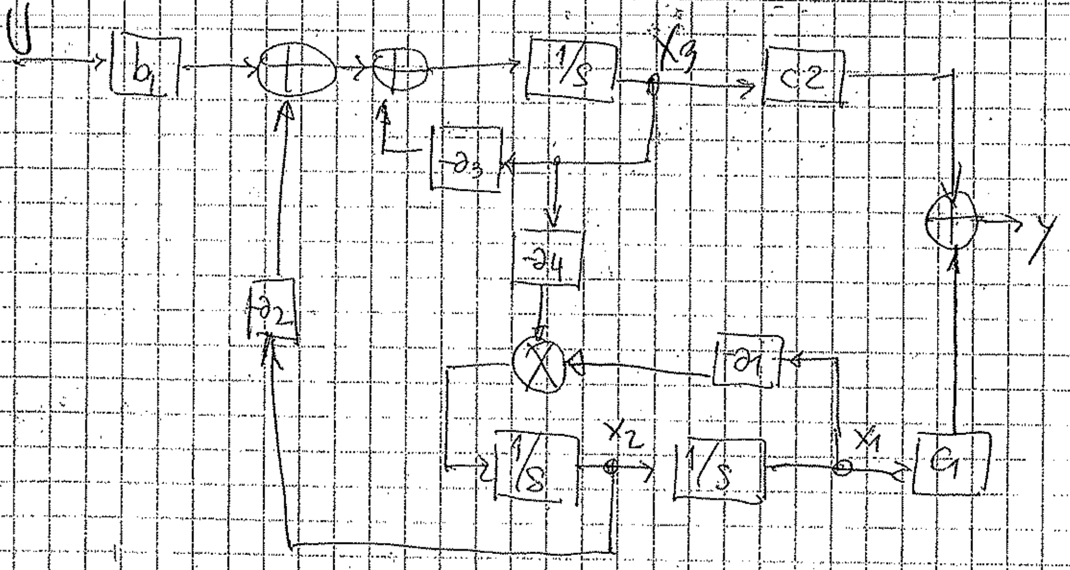
$$C = s^{-3}X(s)$$

$$R = X(s)\left(1+3s^{-1}+3s^{-2}+3s^{-3}\right) \Longrightarrow X(s) = R(s) - X(s)\left(\underbrace{3s^{-1}}_{x_3}+\underbrace{3s^{-2}}_{x_2}+\underbrace{3s^{-3}}_{x_1}\right)$$



FINAL 08/04/2003

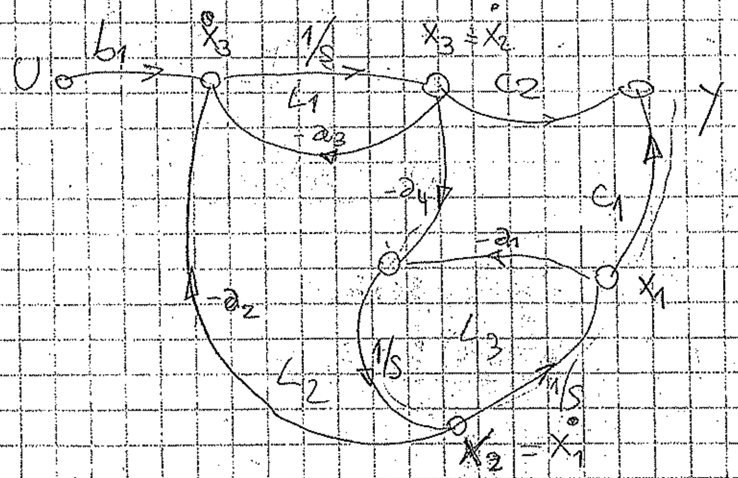
1) Considere el sistema lineal e invariante en el tiempo dado en la figura



Las ecuaciones dinámicas del sistema están dadas por $\begin{cases} \dot{X} = AX+BU \\ Y = CX \end{cases}$

Se pide: a) Representar en el espacio de estados las ecuaciones dinámicas tomando como variables las de la (figura) b) Realizar el diagrama de flujo de la señal y utilizar Mason, determinar la FT del sistema. $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$

c) Determinar las condiciones necesarias y suficientes que deben satisfacer las constantes a_1, a_2, a_3 y a_4 para que el sistema sea absolutamente estable



$\dot{X}_3 = b_1U - a_2X_2 - a_3X_3 = sX_3$ $\quad Y = C_1x_1 + C_2X_3$

$\dot{X}_2 = X_3$

$\dot{X}_1 = X_2 = -\frac{a_4}{s}X_3 - \frac{a_1}{s}X_1 = sX_1$

$-\frac{a_4}{s}X_3 = X_1\left(s+\frac{a_1}{s}\right) \rightarrow X_3 = X_1\left(s+\frac{a_1}{s}\right)\left(-\frac{s}{a_4}\right)$

$sX_3 = b_1U - a_2X_2 - a_3X_3$

$X_3(s+a_3) = b_1U - a_2X_2$

$X_3 = \frac{b_1U - a_2X_2}{(s+a_3)} = \frac{b_1U - a_2\left(-\frac{a_4}{s}X_3 - \frac{a_1}{s}X_1\right)}{(s+a_3)}$

$= \frac{b_1U + \frac{a_2a_4}{s}X_3 + \frac{a_2a_1}{s}X_1}{(s+a_3)}$

$$X_3(s+a_3) = b_1 U + \frac{a_2 a_4}{s} X_3 + \frac{a_2 a_1}{s} X_1$$

$$X_3 \underbrace{\left(s + a_3 - \frac{a_2 a_4}{s}\right)}_{\frac{s^2 + s a_3 - a_2 a_4}{s}} = b_1 U + \frac{a_2 a_1}{s} X_1$$

$$X_3 = \left(b_1 U + \frac{a_2 a_1}{s} X_1\right) \cdot \frac{s}{s^2 + s a_3 - a_2 a_4} = \frac{s b_1 U + a_2 a_1 X_1}{s^2 + s a_3 - a_2 a_4}$$

$$X_3 = X_1 \left(\frac{s^2 + a_1}{\cancel{s}}\right)\left(-\frac{\cancel{s}}{a_4}\right) = -X_1 \left(\frac{s^2 + a_1}{a_4}\right)$$

$$-X_1\left(\frac{s^2 + a_1}{a_4}\right) = \frac{s b_1 U + a_2 a_1 X_1}{s^2 + s a_3 - a_2 a_4} \Rightarrow s b_1 U = -X_1 \left(\frac{s^2 + a_1}{a_4}\right) \cdot (s^2 + s a_3 - a_2 a_4) - a_2 a_1 X$$

$$-s b_1 U = X_1 \left[\left(\frac{s^2 + a_1}{a_4}\right)(s^2 + s a_3 - a_2 a_4) + a_2 a_1\right] =$$

$$= X_1 \left[\frac{s^4 + s^3 a_1 + s^2(a_1 - a_2 a_4) + s a_1 a_3 - a_1 a_2 a_4}{a_4} + a_2 a_1\right]$$

$$= X_1 \left[\frac{s^4 + s^3 a_1 + s^2 (a_1 - a_2 a_4) + s a_1 a_3 - \cancel{a_1 a_2 a_4} + \cancel{a_2 a_1 a_4}}{a_4}\right]$$

$$-\cancel{s} b_1 a_4 U = X_1 (s^{\cancel{4}} + \cancel{s}^3 a_1 + \cancel{s}^2 (a_1 - a_2 a_4) + \cancel{s} a_1 a_3)$$

$$U = X_1 \frac{(s^3 + a_1 s^2 + (a_1 - a_2 a_4) s + a_1 a_3)}{-b_1 a_4}$$

VER

$$Y = c_1 X_1 + c_2 X_3 = c_1 X_1 - c_2 X_1 \left(\frac{s^2 + a_1}{a_4}\right) = X_1 \left[c_1 - \frac{c_2}{a_4}(s^2 + a_1)\right]$$

$$\frac{Y}{U} = \frac{\cancel{X_1}\left[c_1 - \frac{c_2}{a_4}(s^2 + a_1)\right]}{\cancel{X_1}(s^3 + a_1 s^2 + (a_1 - a_2 a_4) s + a_1 a_3)} \cdot (-b_1 a_4) = \boxed{\frac{s^2 b_1 c_2 + b_1 (a_1 c_2 - a_4 c_1)}{s^3 + s^2 a_1 + s(a_1 - a_2 a_4) + a_1 a_3}}$$

Por Mason

$$L_1 = \frac{-a_3}{s} \qquad L_2 = \frac{a_4 \cdot a_2}{s^2} \qquad L_3 = \frac{-a_1}{s^2}$$

$$P_1 = \frac{b_1 c_2}{s} \qquad P_2 = \frac{-a_4 b_1 c_1}{s^3}$$

$$FT = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{2} P_i \Delta_i$$

$\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c$

producto de lazos disjuntos, que no tienen nodos en común. $(L_1 L_3)$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1 L_3$$

$$= 1 + \frac{a_3}{s} - \frac{a_4 a_2}{s^2} + \frac{a_1}{s^2} + \frac{a_3 a_1}{s^3}$$

$$= \frac{s^3 + s^2 a_3 - s a_4 a_2 + s a_1 + a_3 a_1}{s^3} = \frac{s^3 + s^2 a_3 + s(a_1 - a_4 a_2) + a_3 a_1}{s^3}$$

$$\Delta_1 = 1 - L_3 = 1 + \frac{a_1}{s^2} = \frac{s^2 + a_1}{s^2}$$

$$\Delta_2 = 1 \qquad P_1 \Delta_1 = \frac{b_1 c_2}{s} \cdot \frac{s^2 + a_1}{s^2} = \frac{s^2 b_1 c_2 + b_1 c_2 a_1}{s^3}$$

$$P_2 \Delta_2 = -\frac{a_4 b_1 c_1}{s^3}$$

$$\sum P_i \Delta_i = \frac{s^2 b_1 c_2 + b_1 c_2 a_1}{s^3} - \frac{a_4 b_1 c_1}{s^3} = \frac{s^2 b_1 c_2 + b_1 (a_1 c_2 - a_4 c_1)}{s^3}$$

$$FT = \frac{\dfrac{s^2 b_1 c_2 + b_1(a_1 c_2 - a_4 c_1)}{\cancel{s^3}}}{\dfrac{s^3 + s^2 a_3 + s(a_1 - a_4 a_2) + a_3 a_1}{\cancel{s^3}}}$$

$$\boxed{\frac{Y}{U} = \frac{s^2 b_1 c_2 + b_1 (a_1 c_2 - a_4 c_1)}{s^3 + s^2 a_3 + s(a_1 - a_4 a_2) + a_3 a_1}}$$

Aplicando ROUTH:

NOTA

$X_3(s)$ ... $a_1 - a_4 a_2$

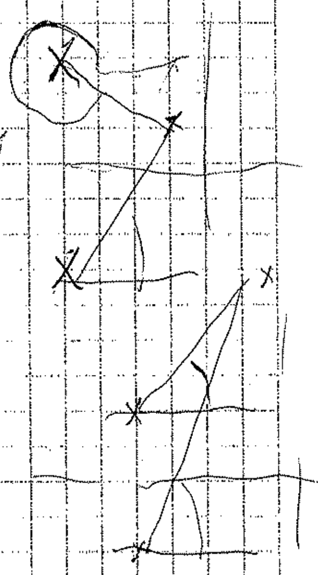
$a_3 a_1$

$\dfrac{(-a_4 a_2) - a_3 a_1}{a_3}$ 0

s_0 $\dfrac{-a_4 a_2 \cdot a_3 a_1}{-a_4 a_2} = a_3 a_1$

$\cancel{a_1} - a_4 a_2 - \cancel{a_1} = -a_4 a_2$

s_3	1	$a_1 - a_4 a_2$
s_2	a_3	$a_3 a_1$
s_1	$-a_4 a_2$	
s_0	$a_3 a_1$	



Las condiciones son: $a_3 > 0$

$-a_4 a_2 > 0 \rightarrow a_4 a_2 < 0$

$a_1 > 0$

2) Un sistema de control con realimentación negativa unitaria, presenta una respuesta al escalón unitario como la que se da en la figura, cuando la ganancia es dos (2). Se observa que la respuesta está pobremente amortiguada y presenta error en estado estacionario.

El lugar de raíces de la FTLA se da en la figura 3 y puede observarse que posee 3 polos de LA ubicados en $s_1 = -2{,}4422$; $s_{2,3} = -0{,}279 \pm j1{,}25$

Se pide: determinar un compensador en la rama directa, de forma tal de lograr un sistema que posea raíces complejas conjugadas dominantes ubicadas en $-1 \pm j$ y que no posea error en estado estacionario.

$$FTLA = \frac{K}{(s+2{,}45)(s+0{,}28+j1{,}25)(s+0{,}28-j1{,}25)} = \frac{K}{s^3+3s^2+3s+4}$$

$$FTLC = \frac{K}{s^3+3s^2+3s+(K+4)}$$

NOTA

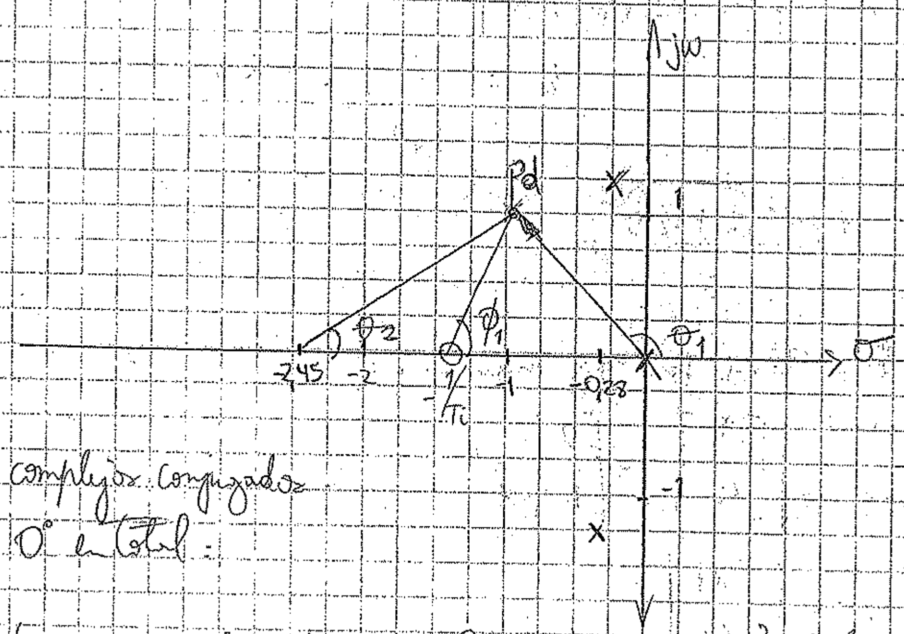
Si $k=2 \rightarrow K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = \frac{2}{6} = 0{,}33$

$e_{ss} = \frac{1}{0{,}33} = 3$ $\qquad t_p = \frac{\pi}{w_d} = 2{,}5\,seg$

$\boxed{w_d = 1{,}25}$

* Para eliminar el e_{ss}, aplico un compensador con polo al origen.

Un PI $\rightarrow K_p\left(1+\frac{1}{T_i s}\right) = K_p\left(\frac{T_i s+1}{T_i s}\right) = K_p\left(\frac{s+1/T_i}{s}\right)$



Los polos complejos conjugados aportan 0° en total:

$-\theta_1 - \theta_2 + \phi_1 = -180\,(2k+1)$ $\qquad \theta_1 = 135° \Rightarrow \theta_1' = tg^{-1}\frac{1}{-1} = -45°$

$-135 - 34{,}6 + \phi_1 = -180$ $\qquad \theta_2 = tg^{-1}\frac{1}{1{,}45} = 34{,}6°$

$\phi_1 = -10{,}4°$ NO

Lo mismo E.C. $\Rightarrow FTLA = \frac{K\,(s + 1/T_i)}{s^4+3s^3+3s^2+4s}$

$FTLC = \frac{sK + K/T_i}{s^4+3s^3+3s^2+s(4+K)+K/T_i} \rightarrow EC$

Si $K=2 \rightarrow s^4+3s^3+3s^2+6s+\frac{2}{T_i}$

NOTA

$$
\begin{array}{l|lll}
s^4 & 1 & 3 & 2/T_i \\
s^3 & 3 & 6 & \\
s^2 & \frac{9-6}{1} = 3 & \frac{3 \cdot 2/T_i}{1} = \frac{6}{T_i} & \\
s^1 & \frac{18 - 18/T_i}{3} & & \\
s^0 & & &
\end{array}
$$

$T_i \geq \frac{18}{18} = 1$

$T_i = 2 \rightarrow -\frac{1}{T_i} = -0{,}5$

$$\left| \frac{K \cdot (s + 1/T_i)}{(s+2{,}45)(s+0{,}28+j1{,}25)(s+0{,}28-j1{,}25)\,s} \right| = 1$$

$$\left| \frac{K \cdot (1{,}12)}{1{,}76 \cdot 0{,}76 \cdot 0{,}76 \cdot 1{,}41} \right| = 1$$

$$K = \frac{1}{0{,}78} = 1{,}28$$

$$G_c(s) = \frac{1{,}28\,(s+0{,}5)}{s}$$

VER

3) Un sistema tiene las sig. ecuaciones:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -15 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$Y = \begin{bmatrix} 15 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

a) Determinar la controlabilidad y observabilidad de estado

b) Como especificaciones de diseño se precisa una matriz K que permita mediante realimentación del vector de estado (si el sistema cumple las condiciones) ubicar los polos de lazo cerrado en $s_{1,2} = -4 \pm j4$, sin que tenga e_{ss} para entrada escalón. Elegir el valor del tercer polo.

c) Realizar el diagrama de bloques del sistema original con las realimentaciones propuestas para cumplir las especificaciones.

$MC = [B \quad AB]$

$$\begin{array}{c|c} & AB \\ & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -15 & -8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix} \end{array}$$

$MC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}$

$det = -1$, rango 2
controlable

$M_o = [C^T \quad A^TC^T]$

$$\begin{array}{c|c} & A^TC^T \\ & \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & -15 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \end{bmatrix} \end{array}$$

$MO = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$

$det = 225$, rango 2
observable

$FT = \dfrac{15}{s^2 + 8s + 15}$

$|sI - A| = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -15 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 15 & s+8 \end{bmatrix} = s^2 + 8s + 15$

Ec característica deseada

$(s+4+4j)(s+4-4j) = (s^2+8s+32)(s+32) = s^3 + 40s^2 + 288s + 1024$

$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -15 & -8 & 0 \\ -15 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\hat{K} = [K \; -K_I] = [K_1 \quad K_2 \; -K_I]$

$|sI - \hat{A} + \hat{B}\hat{K}| = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -15 & -8 & 0 \\ -15 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K_1 & K_2 & -K_I \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$

$$\begin{array}{c|c} \hat{B}\hat{K} & [K_1 \quad K_2 \quad K_I] \\ \hline \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K_1 & K_2 & K_I \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 15+K_1 & s+8+K_2 & -K_I \\ 15 & 0 & s \end{bmatrix} = s^2(s+8+K_2) + 15K_I + (15+K_1)s$

$= s^3 + s^2(8+K_2) + s(15+K_1) + 15K_I$

Igualando $\rightarrow$ $40 = 8 + K_2 \rightarrow K_2 = 32$

$288 = 15 + K_1 \rightarrow K_1 = 273$

$15K_I = 1024 \rightarrow K_I = 68,27$

NOTA

* Dado el sig. sistema de control:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

a) Realizar el diagrama de flujo de la señal, indicando el tipo de configuración que se ha utilizado para la selección de las variables de estado. Determinar autovalores y la FT.

b) Determinar controlabilidad y observabilidad.

c) Encontrar la matriz de transición $\phi(t)$.

d) Mediante asignación de polos, determinar la matriz de realimentación del vector de estado para lograr que los polos estén ubicados en $S_1 = -12$ y los otros dos en $S = -4 \pm j4$.

e) Graficar a mano alzada la respuesta al escalón del sistema.

a) $\dot{X}_1 = -5X_1 - 5X_2$ $\qquad Y = X_1$

$\dot{X}_2 = -3X_2 + 3X_3$

$\dot{X}_3 = -X_3 + u$

$\dot{X}_1 = SX_1 = -5X_1 - 5X_2$

$(S+5)X_1 = -5X_2$

$X_2 = \dfrac{(S+5)}{-5} X_1$

$\dot{X}_2 = SX_2 = -3X_2 + 3X_3$

$(S+3)X_2 = 3X_3$

$X_3 = \dfrac{(S+3)}{3} X_2$

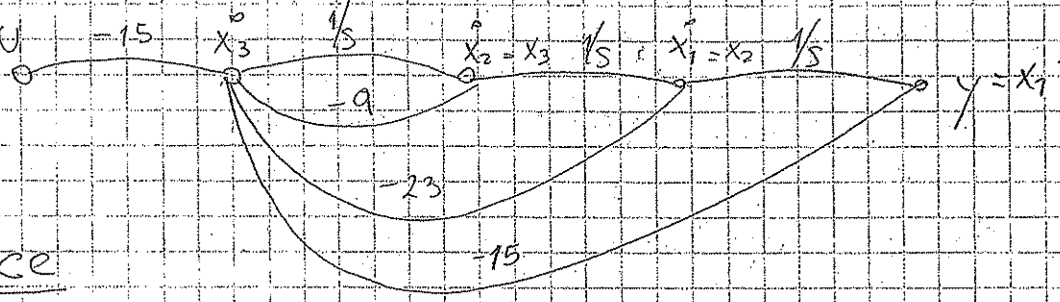
$\dot{X}_3 = SX_3 = -X_3 + u$

$(S+1)X_3 = u$

$X_3 = \dfrac{(S+3)}{3}\dfrac{(S+5)}{(-5)} X_1 = \dfrac{(S^2+8S+15)}{-15} X_1$

$u = (s+1)\, X_3 = \dfrac{(s+1)\,(s^2+8s+15)}{-15}\, X_1$

$x_1 = y \Rightarrow \dfrac{Y}{U} = \dfrac{-15}{(s+1)(s^2+8s+15)} = \dfrac{-15}{s^3+9s^2+23s+15}$



Fce

$|\lambda I - A| = \begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-5 & +5 & 0\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda+5 & +5 & 0\\ 0 & \lambda+3 & 3\\ 0 & 0 & \lambda+1\end{bmatrix} =$

$(\lambda+5)(\lambda+3)(\lambda+1) \Rightarrow \lambda_1 = -5$

$\lambda_2 = -3$

$\lambda_3 = -1$

b)

$M_C = [B \quad AB \quad A^2B]$ $\qquad A = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -15 & -23 & 9\end{bmatrix}$ $\qquad A^2 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -15 & -23 & -9\\ 135 & 192 & 58\end{bmatrix}$

$M_C = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -9\\ 1 & 9 & 58\end{bmatrix} = \det{-1}$, rango 3

$M_O = [C^T \quad A^TC^T \quad A^{T2}C^T] = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \det(1) \longrightarrow$ rango 3

c) $\mathcal{L}^{-1}[sI - A]^{-1} \Rightarrow sI - A = \begin{bmatrix}s & -1 & 0\\ 0 & s & -1\\ s+15 & s+23 & s+9\end{bmatrix}$

inversa $[sI - A] = \dfrac{adj}{\Delta}$ $\qquad adj = cof^T$

$$\text{Cof}\,[sI - A] = \begin{bmatrix} s(s+9)+(s+23) & s+15 & -s(s+15) \\ (s+9) & s(s+9) & s(s+23)+s+15 \\ 1 & s & s^2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = (s+3)(s+5)(s+1) =$$

$$\text{Cof}^T = \begin{bmatrix} s^2+10s+23 & s+15 & -s^2-15s \\ s+9 & s^2+9s & s^2+24s+15 \\ 1 & s & s^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Inv} = \begin{bmatrix} \dfrac{s^2+10s+23}{\Delta} & \dfrac{s+15}{\Delta} & \dfrac{-s^2-15s}{\Delta} \\[2mm] \dfrac{s+9}{\Delta} & \dfrac{s^2+9s}{\Delta} & \dfrac{s^2+24s+15}{\Delta} \\[2mm] \dfrac{1}{\Delta} & \dfrac{s}{\Delta} & \dfrac{s^2}{\Delta} \end{bmatrix}$$

Expansion en fracciones simples

$$\frac{s^2+10s+23}{(s+1)(s+3)(s+5)} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+5} + \frac{A_3}{s+3} \quad A_1 = 1{,}75 \quad A_2 = -0{,}5 \quad A_3 = -0{,}25$$

$$\frac{s+15}{\Delta} = \quad A_1 = 1{,}75 \quad A_2 = -3 \quad A_3 = 1{,}25$$

$$\frac{-s^2-15s}{\Delta} = \quad A_1 = 1{,}75 \quad A_2 = -9 \quad A_3 = 6{,}25$$

$$\frac{s+9}{\Delta} = \quad A_1 = 1 \quad A_2 = -1{,}5 \quad A_3 = 0{,}5$$

$$\frac{s^2+9s}{\Delta} \quad -1 \quad 4{,}5 \quad 2{,}5$$

$$\frac{s^2+24s+15}{\Delta} \quad A_1 = -1 \quad A_2 = 12 \quad A_3 = -10$$

$$\frac{1}{\Delta} \quad 0{,}125 \quad -0{,}25 \quad 0{,}125$$

$$\frac{s}{\Delta} \quad -0{,}125 \quad 0{,}75 \quad -0{,}625$$

HOJA Nº 91

FECHA

$$\frac{s^2}{\Delta} \rightarrow \begin{cases} 0{,}125 \\ -2{,}25 \\ 3{,}125 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[sI-A]^{-1} = \phi(t) =$$

$$\begin{bmatrix} 1{,}75e^{-t}-0{,}5e^{-3t}-0{,}25e^{-5t} & 1{,}75e^{-t}-3e^{-3t}+1{,}25e^{-5t} & 1{,}75e^{-t}-9e^{-3t}+6{,}25e^{-5t} \\ e^{-t}-1{,}5e^{-3t}+0{,}5e^{-5t} & -e^{-t}+4{,}5e^{-3t}-2{,}5e^{-5t} & -e^{-t}+12e^{-3t}-10e^{-5t} \\ 0{,}125e^{-t}-0{,}25e^{-3t}+0{,}125e^{-5t} & -0{,}125e^{-t}+0{,}75e^{-3t}-0{,}625e^{-5t} & 0{,}125e^{-t}-2{,}25e^{-3t}+3{,}125e^{-5t} \end{bmatrix}$$

d) EC deseada : $(s+4+j4)(s+4-j4)(s+12) = s^3+20s^2+128s+384$

$$s^3+s^2(9+k_1)+s(23+k_2)+(15+k_3)$$

$k_1 = 11$

$k_2 = 105$ $\qquad K = [11 \quad 105 \quad 363]$

$k_3 = 363$

e) $t_r = \dfrac{\pi-\beta}{w_d} = \dfrac{2{,}356}{4} = 0{,}59$ seg $\qquad t_p = \dfrac{\pi}{w_d} = 0{,}785$ seg

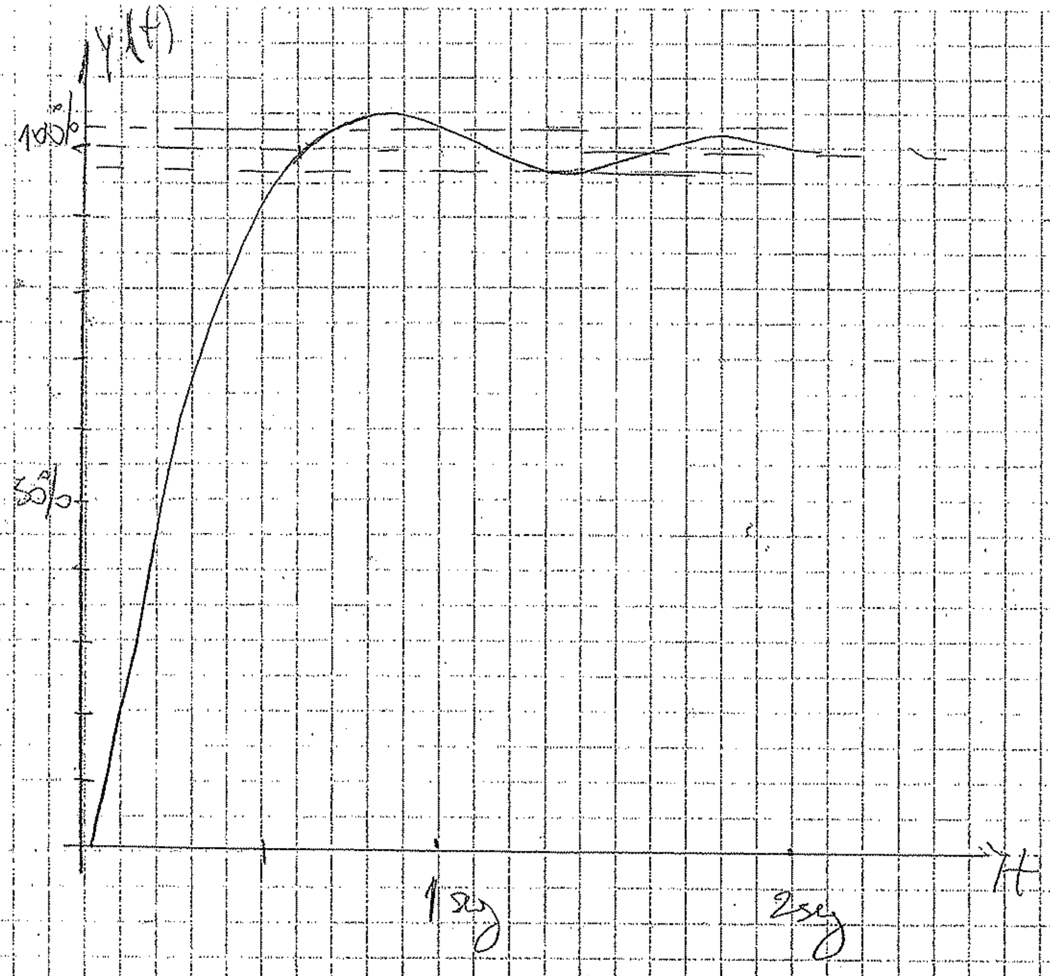
$\beta = \cos^{-1}\xi$

$\xi = 0{,}707$

$M_p = e^{-\frac{\sigma\pi}{w_d}} = e^{-\pi} = 4{,}32\ \%$

$t_s\big|_{2\%} = \dfrac{4}{\sigma} = 1$ seg

NOTA



NOTA