

INTRODUCCIÓN:

Los circuitos sintonizados y gran cantidad de filtros se construyen utilizando elementos inductivos y capacitivos, los que deben tener en cuenta las inductancias y capacidades parásitas distribuidas que aparecen en los circuitos electrónicos. Estos componentes además de presentar una determinada reactancia a la circulación de la corriente alterna, producen un corrimiento de fase entre la corriente y la tensión en el circuito. En el caso de un capacitor este provoca un adelanto de la corriente de 90° respecto de la tensión, si se agrega un resistor, el ángulo de desfasaje estará entre 0° y 90° .

La impedancia o admitancia de un circuito RLC es una función complicada de la frecuencia y normalmente tiene una componente resistiva (real) y una reactiva (imaginaria). Para algunos circuitos, la parte reactiva se anula en una o más frecuencias; esta condición (impedancia y admitancia reales puras) se denomina **resonancia** y la frecuencia (o frecuencias) a la que ocurre, se llama **Frecuencia de Resonancia**. Un circuito resonante es el que tiene una o más frecuencias de resonancia, tales circuitos se usan mucho en sistemas de comunicaciones para separar las señales deseadas de las indeseadas. Además, los circuitos resonantes tienen propiedades importantes de transformación de impedancias y por ejemplo, se pueden diseñar para que la fuente externa de alta impedancia transfiera la máxima potencia a la carga de baja resistencia a través del circuito resonante.

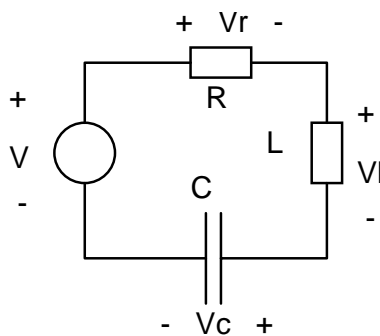
El rango de frecuencia dentro del cual el circuito es aproximadamente resonante, es el ancho de banda útil del circuito, aunque en este contexto la definición precisa de ancho de banda depende de la definición de "aproximadamente resonante" o de qué tan grande puede tolerarse una componente reactiva de la impedancia. Como la impedancia de la mayoría de los circuitos resonantes pasa por un pico mínimo o máximo agudo en resonancia, el ancho de banda o *selectividad* en frecuencia de tales circuitos, se define a menudo en términos de la anchura de este pico o ranura. El ancho de banda se relaciona frecuentemente con un parámetro llamado "**Q**" (factor de calidad) del circuito, el cual se define posteriormente.

El ancho de banda, el factor de calidad, la frecuencia de resonancia, la impedancia resonante y las propiedades de transformación de impedancias de un circuito, son importantes en el diseño de amplificadores y osciladores de RF.

RESONANCIA SERIE

La figura 2.1 muestra un circuito serie excitado para una fuente de voltaje. La resistencia R combina el resistor de carga y cualquier resistencia en serie presente en el inductor y en la fuente, la impedancia de entrada del circuito se puede expresar mediante:

$$Z(j\omega) = \frac{V}{I} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + jX \quad (2.1)$$

**Fig. N° 2 -1**

La fig. 2.2 muestra cómo se comporta esta impedancia cuando varía la frecuencia f . El lugar geométrico en el plano de la impedancia es una recta paralela al eje imaginario y pasa por el punto.

$$Z = R + j0$$

En resonancia. En este punto, $|Z|$ toma valor mínimo. La ecuación (2.1) muestra que la resonancia ocurre si:

$$\omega L - 1 / \omega C = 0$$

esto es, una frecuencia resonante

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \left(\frac{\text{rad}}{\text{seg}} \right) \quad (2.2)$$

Sí se varía la frecuencia de la fuente mientras el voltaje V se mantiene constante, la corriente alcanza un valor máximo $I_{\text{max}} = V/R$ en resonancia.

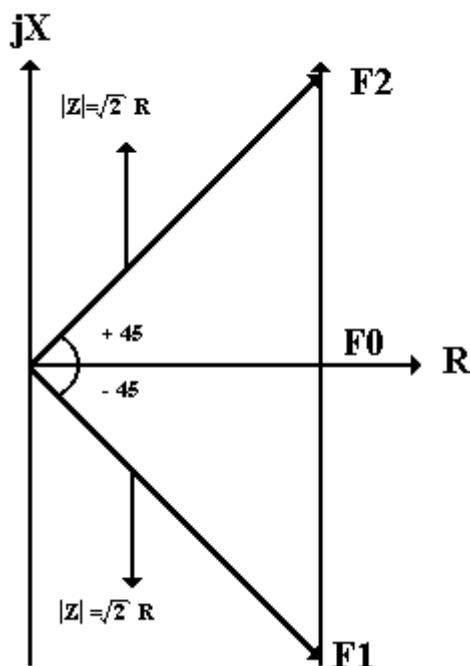
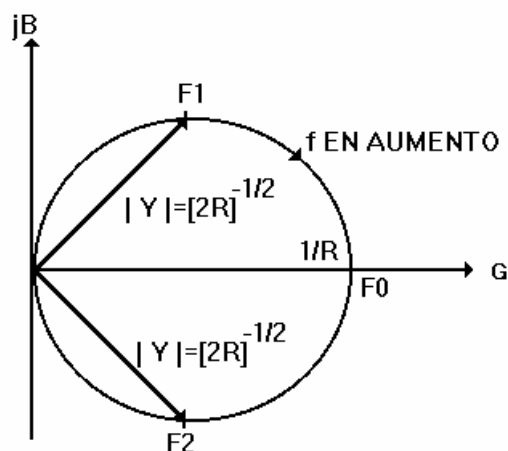
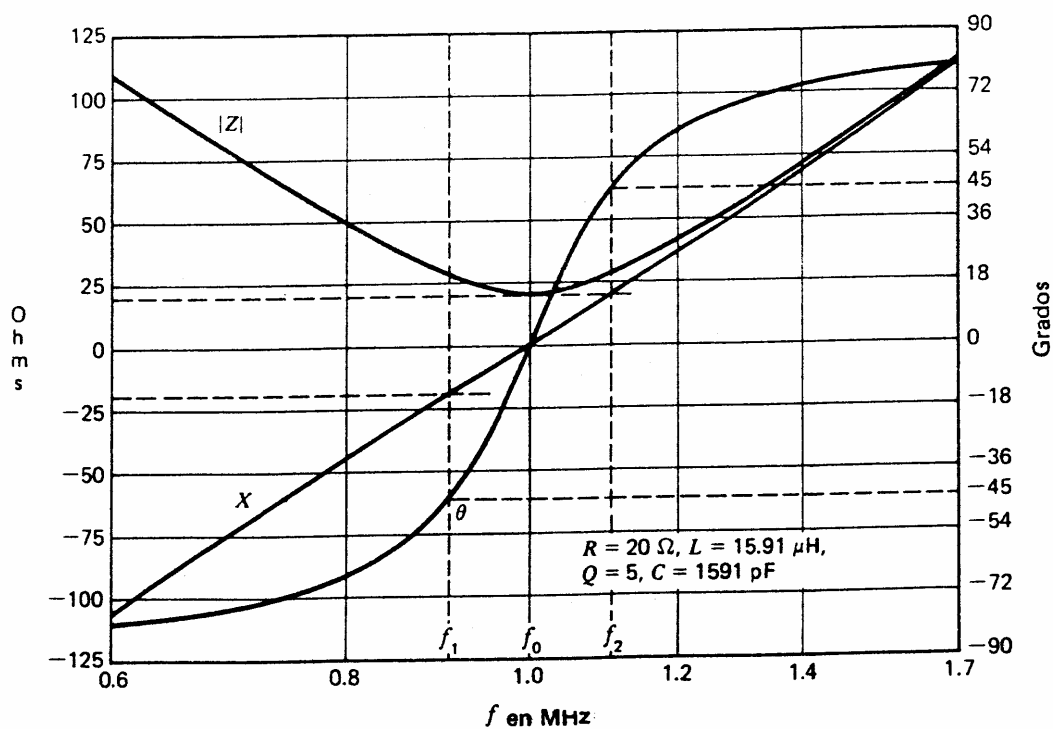


Fig. N° 2-2

El comportamiento de la admitancia de este circuito es también de interés y puede obtenerse invirtiendo (2.1), para obtener el lugar geométrico en el plano de la admitancia mostrado en la figura 2.3. Pueden también construirse las gráficas de repuesta en frecuencia de $|Z|$, θ , y X , como se ilustra en la figura 2.4. Además de la frecuencia de resonancia f_0 , son importantes otras dos frecuencias, indicadas como f_1 y f_2 en las figuras 2.2, 2.3, y 2.4, f_1 y f_2 , la magnitud de la reactancia es igual a resistencia ($|X| = R$); la impedancia tiene el valor $|Z| = \sqrt{2} R$, y el ángulo de fase $\theta = \pm 45^\circ$. Consecuentemente, la corriente $I = I_{\text{max}} / [2]^{1/2}$ y la potencia disipada en el resistor es la mitad de la potencia en la frecuencia de resonancia. Se ha convenido que las frecuencias f_1 y f_2 definen al ancho de banda B de potencia mitad del circuito.

$$B = f_2 - f_1 \text{ [Hz]} \quad (2.3)$$

**Fig. N° 2-3****Fig. N° 2 - 4**

Como se estableció antes, un parámetro que se usa comúnmente para denotar la selectividad de un circuito, es el Factor de Calidad **Q**, que se definió originalmente como la razón de la reactancia a la resistencia de una bobina. La definición general del **Q** de cualquier circuito en resonancia es:

$$Q = [2 \pi \text{ energía instantánea máxima almacenada en el circuito}] / [\text{energía disipada por ciclo}] \quad (2.4)$$

El cálculo del numerador de (2.4) puede ser difícil para un circuito que tenga varios inductores o capacitores. Sin embargo, para un circuito RLC en serie, es fácil demostrar que el Q del circuito se obtiene:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} \quad (2.5)$$

Por sustitución de (2.2) y (2.5) en (2.1), la ecuación para la impedancia se puede poner en la forma:

$$Z(j\omega) = R \left[1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] \quad (2.6)$$

y puede demostrarse que:

$$Q = \frac{f_0}{f_2 - f_1} = \frac{f_0}{\beta} \quad (2.7)$$

Como nota final, se debe señalar que, en resonancia, el voltaje V_C que soporta el capacitor, es Q veces el voltaje aplicado V.

Resonancia Paralelo

La figura 2-5 muestra un circuito en el que L, C, $R_t = 1/G_t$ están conectados en paralelo¹. La resonancia paralelo tiene lugar cuando el voltaje de entrada y la corriente están en fase. El Q_t del circuito paralelo está dado por

$$Q_t = \frac{\omega C}{G_t} = R_t \omega_0 C \quad (2.8)$$

y la admitancia de entrada es

$$Y(j\omega) = G_t + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = G_t \left[1 + jQ_t \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] \quad (2.9)$$

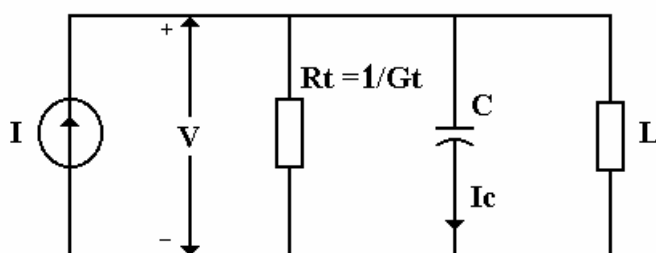
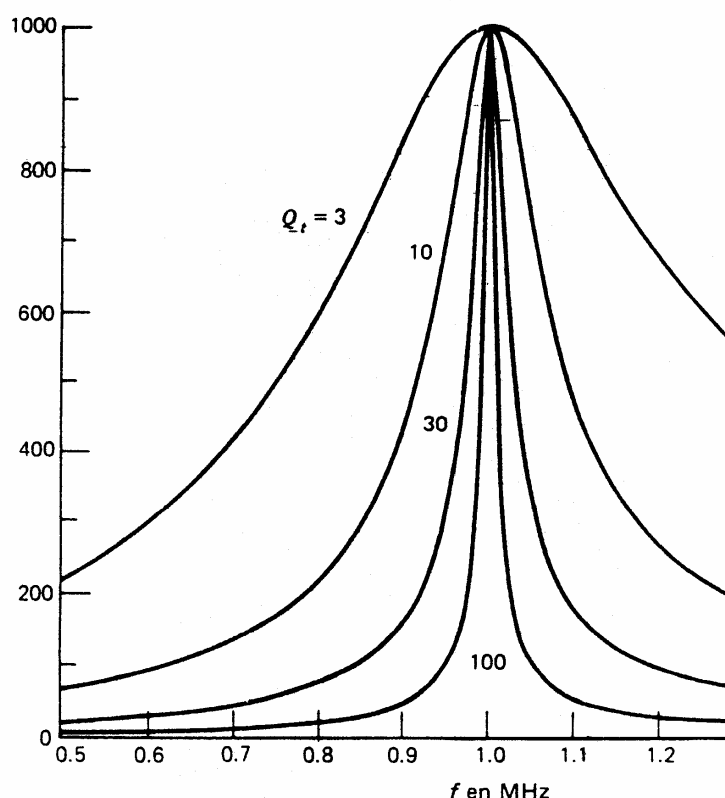
La ecuación (2.9) tiene la misma forma que la (2.1) y (2.6) para el circuito serie, excepto que los parámetros de impedancia se sustituyen por los admitancia, por lo que, con un intercambio similar de variables, las figuras 2.2 y 2.4 se aplican al circuito paralelo RLC. Además de las anteriores, las siguientes ecuaciones son útiles.

$$2\pi f_0 = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{rad/seg}) \quad (2.10)$$

$$B = \frac{f_0}{Q_t} = \frac{1}{2\pi C R_t} \quad (\text{Hz}) \quad (2.12)$$

También en resonancia se puede demostrar que $|I_C| = Q_t |I|$. Las gráficas de $|Z(j\omega)|$ y f, para diversos valores de Q, se muestran en la figura siguiente:

¹El subíndice t persiste para la resistencia terminal en resonancia. R_t se denomina "resonancia de tanque" y Q_t concordará con la ecuación (2.4).

**Fig. N° 2-5****Fig. N° 2-6**

Resonancia Paralelo con Resistencia Carga en Serie

El circuito de la figura 2.5 no siempre es real, esto se debe a que en este una vez calculado C, L y Q para una resistencia de entrada (R_1) y salida (R_2) dadas, no se puede modificar ningún parámetro. A este resonador se lo puede modificar para por ejemplo poder seleccionar el ancho de banda B o la relación de transformación R_1/R_2 en forma independiente. Para esto en muchas aplicaciones de circuitos resonantes paralelos, la carga, a la que finalmente se destina la potencia, puede estar en serie con el inductor o con el capacitor. Las ecuaciones de diseño y el comportamiento en frecuencia de estos circuitos difieren de los de la figura 2.5.

Resistencia en la rama inductiva: $RL // C$:

En el circuito de la figura 2.7, la resistencia puede tomar en cuenta la propia de la bobina y la carga. La admitancia de entrada del circuito es:

$$Y_{(j\omega)} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + \left[\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right] \quad (2.13)$$

En resonancia, I y V están en fase y el término de susceptancia debe desaparecer. La frecuencia de resonancia se encuentra igualando a cero la susceptancia:

$$\omega_0 = \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2} \right) \quad (\text{rad/seg}) \quad (2.14)$$

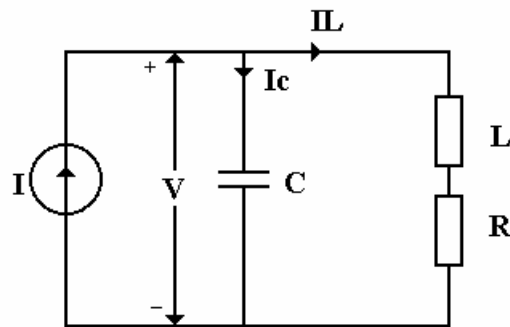


Fig. N° 2-7

La sustitución de este valor en (2.13) da la impedancia de resonancia como:

$$Z_{(j\omega)} = \frac{1}{Y_{(j\omega)}} = R_t = \frac{L}{RC} \quad (2.15)$$

Si se define el Q_t del circuito en resonancia como:

$$Q_t = \frac{\omega_0 L}{R} \quad (2.16)$$

y se define a la R_t del circuito como: $R_t = \frac{L}{CR} = R(Q_t^2 + 1)$ (2.17)

Para poder efectuar el diseño de una red de este tipo, se dispone de una tabla que resume las ecuaciones mas importantes. para efectuar el calculo podemos utilizar las fórmulas exactas o si el Q_t es mayor que 10 las fórmulas aproximadas, en este caso el error cometido es despreciable. La tabla 2.2.1 resume las fórmulas exactas y las aproximadas. Los datos necesarios para efectuar el diseño, son: 1 - frecuencia de resonancia, 2 - Ancho de Banda, 3 - Resistencia de carga R, con estos datos y las ecuaciones de la tabla 221 se puede encontrar los valores de C y L.

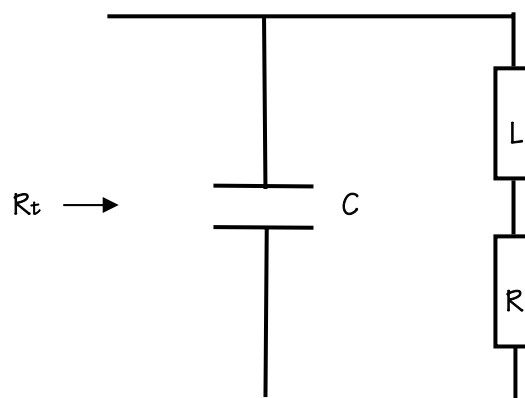


Fig. N° 2-8

Tabla 2.2.1

CANTIDAD	EXPRESIÓN EXACTA	UNIDADES	EXPRESIÓN APROXIMADA $Q_t \geq 10$
ω_0	$= \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2} \right)^{1/2}$	rad / seg	$\approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Q_t	$= \omega_0 L / R = \omega_0 C R_t$		$\approx \frac{1}{\omega_0 C R}$
R_t	$= \frac{L}{RC} = \frac{Q_t}{\omega_0 C} =$ $= R (Q_t^2 + 1)$	ohm	$\approx Q_t^2 R = \omega_0 L Q_t$
B		hertz	$\approx \frac{1}{2 \pi C R_t} = \frac{R}{2 \pi L} = \frac{f_0}{Q_t}$

Resistencia en la rama capacitiva: $RC // L$

Este circuito se muestra en la figura 2.9 y es utilizado muy frecuentemente. Si la resistencia de la bobina es pequeña frente a la resistencia R, las ecuaciones de diseño se establecen en forma similar a las de la sección anterior. Por ello, las fórmulas de diseños se resumen en la tabla 2.2.2. La sección siguiente muestra como puede tomarse en cuenta la resistencia de bobina si es necesario.

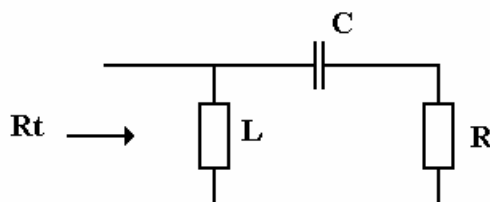
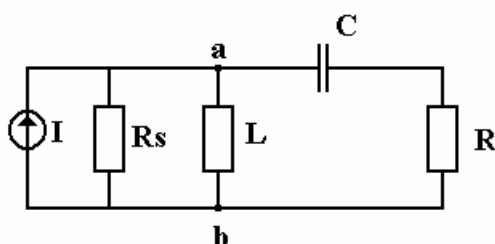
**Fig. N° 2-9**

TABLA 2.2.2 Fórmulas de diseño para el circuito resonante RC//L

CANTIDAD	EXPRESIÓN EXACTA	UNIDADES	EXPRESIÓN APROXIMADA $Q_t \geq 10$
ω_0	$= \left(\frac{1}{LC - R^2 C^2} \right)^{1/2}$	rad / seg	$\approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Q_t	$= \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{R_t}{\omega_0 L}$		$\approx \frac{\omega_0 L}{R}$
R_t	$= \frac{L}{CR} = \omega_0 L Q_t =$ $= R (Q_t^2 + 1)$	ohm	$\approx Q_t^2 R = \frac{Q_t}{\omega_0 C}$
B		hertz	$\approx \frac{f_0}{Q_t} = \frac{1}{2\pi C R_t}$

Efectos de resistencias de fuentes y de bobinas

Una fuente de corriente en paralelo con resistencia finita R_s , al excitar un circuito resonante paralelo, produce un valor que afecta el Q global y el ancho de banda del circuito. En la figura 2.10, por ejemplo, el circuito RC//L, que ofrece una impedancia R_t entre los terminales a-b en resonancia, se excita con una fuente de impedancia R_s . La fuente de corriente ideal ve la impedancia $R_t // R_s$; el Q efectivo y el ancho de banda se determinan por esta resistencia equivalente en paralelo. Por ejemplo si $R_s = R_t$, el Q disminuirá su valor y el ancho de banda se duplicará, en comparación con los valores dados en la tabla 2.2.2.

**Fig. N° 2-10**

Si ambas ramas L y C tienen resistencias en serie, como muestra la figura 2.11a, el análisis exacto del circuito resulta complicado. Empero, si el Q de rama se definen como:

$$Q_L = \frac{\omega_0 L}{r_c} \quad \text{y} \quad Q_C = \frac{1}{\omega_0 C R_C}$$

y si ambos $Q_L, Q_C > 10$, el circuito equivalente válido en la proximidad de resonancia, es el de la figura 2.11 b. La impedancia de resonancia vista por la fuente ideal entre los terminales a-b es

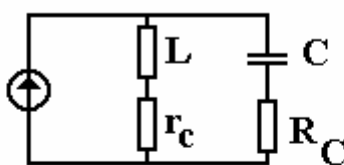
$$R_t = Q_L^2 r_c \parallel Q_C^2 R_C$$

Conversión Paralelo a Serie Para Circuitos RL Y RC

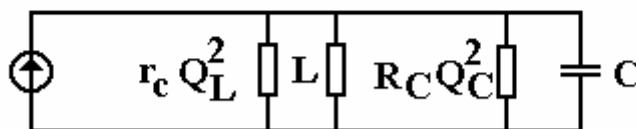
En la siguiente exposición sobre circuitos derivados, es conveniente reemplazar los circuitos paralelos RC o RL por sus series equivalentes, y viceversa. Los valores equivalentes de R y C ó L, con frecuencia son parámetros dependientes; por lo tanto son útiles principalmente en la cercanía de la frecuencia de resonancia para circuitos de banda estrecha. Las tablas 2.5.1 y 2.5.2 proporcionan fórmulas para conversión entre circuitos equivalentes paralelos y en serie. En estas tablas se define un nuevo parámetro

$$Q_p = R_p / X_p$$

Para la combinación paralela de R y C ó R y L. Este parámetro es útil en el diseño de circuitos resonantes derivados, especialmente si Q_p puede escogerse ≥ 10 , de modo que las fórmulas aproximadas sean aplicables.



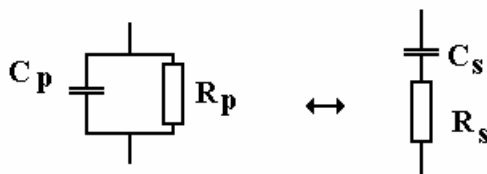
a)



b)

Fig. N° 2-11

TABLA 2.5.1 Fórmulas de conversión paralelo serie para redes RC

Fig. N° 2-12

DEFINIR: $X_p = \frac{1}{\omega C_p}$ $Q_p = \frac{R_p}{X_p}$	DEFINIR: $X_s = \frac{1}{\omega C_s}$ $Q_s = \frac{X_s}{R_s}$
EQUIVALENTE PARALELO DE LA RED SERIE	EQUIVALENTE SERIE DE LA RED PARALELO
FÓRMULAS EXACTAS	
$R_{PE} = R_s (1 + Q_s^2)$ $X_{PE} = X_s \left(\frac{Q_s^2 + 1}{Q_s^2} \right)$ $C_{PE} = C_s \left(\frac{Q_s^2}{Q_s^2 + 1} \right)$	$R_{SE} = \frac{R_p}{1 + Q_p^2}$ $X_{SE} = X_p \left(\frac{Q_p^2}{Q_p^2 + 1} \right)$ $C_{SE} = C_p \left(\frac{Q_p^2 + 1}{Q_p^2} \right)$
FÓRMULAS APROXIMADAS	
SI $Q_s \geq 10$ $R_{PE} \approx R_s Q_s^2$ $X_{PE} \approx X_s$ $C_{PE} \approx C_s$	SI $Q_p \geq 10$ $R_{SE} \approx \frac{R_p}{Q_p^2}$ $X_{SE} \approx X_p$ $C_{SE} \approx C_p$

TABLA 2.5.2 Fórmulas de conversión paralelo serie para redes RL

**Fig. N° 2-13**

DEFINIR: $X_p = \omega L_p$ $Q_p = \frac{R_p}{X_p}$	DEFINIR: $X_s = \omega L_s$ $Q_s = \frac{X_s}{R_s}$
EQUIVALENTE PARALELO DE LA RED SERIE	EQUIVALENTE SERIE DE LA RED PARALELO
FÓRMULAS EXACTAS	
$R_{PE} = R_s (1 + Q_s^2)$ $X_{PE} = X_s \left(\frac{Q_s^2 + 1}{Q_s^2} \right)$ $L_{PE} = L_s \left(\frac{Q_s^2 + 1}{Q_s^2} \right)$	$R_{SE} = \frac{R_p}{1 + Q_p^2}$ $X_{SE} = X_p \left(\frac{Q_p^2}{Q_p^2 + 1} \right)$ $L_{SE} = L_p \left(\frac{Q_p^2}{Q_p^2 + 1} \right)$
FÓRMULAS APROXIMADAS	
SI $Q_s \geq 10$ $R_{PE} \approx R_s Q_s^2$ $X_{PE} \approx X_s$ $L_{PE} \approx L_s$	SI $Q_p \geq 10$ $R_{SE} \approx \frac{R_p}{Q_p^2}$ $X_{SE} \approx X_p$ $L_{SE} \approx L_p$

Circuitos Resonantes con Derivación

El circuito de la figura 2.7 carece de flexibilidad, pues el ancho de banda del circuito y el Q_t quedan fijos una vez especificado los valores de R_t y R . Para ganar cierto grado adicional de libertad, de tal suerte que el ancho de banda y la razón de impedancias puedan escogerse

independientemente, se requiere un elemento de circuito adicional. Una forma de hacer esto es dividir la rama inductiva o la capacitiva en dos componentes en serie, con la carga de baja resistencia a través de una de ellas, como se muestra en las figuras 2.14a y 2.15 a. También puede conectarse una derivación a una bobina continua, se muestra en la figura 2.16. Los circuitos con derivación se usan profusamente en osciladores y amplificadores de alta frecuencia y de banda estrecha.

Aunque el circuito resonante con derivación proporciona flexibilidad, su diseño se hace más complicado.

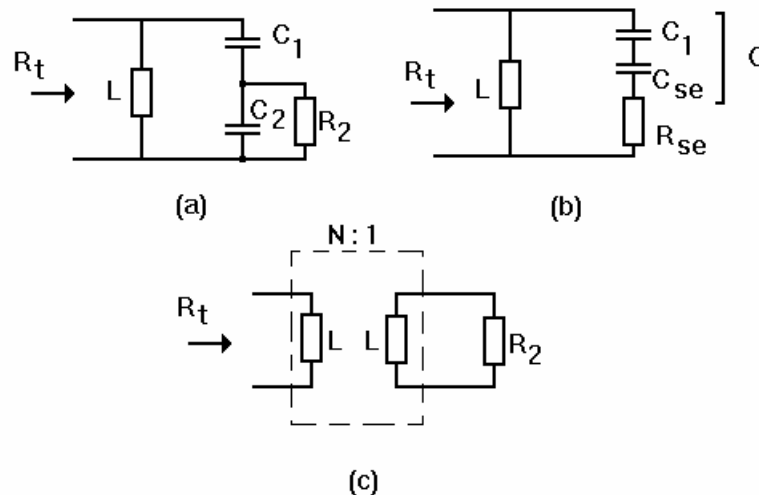


Fig. N° 2-14

Circuito de capacitor con derivación

se supondrá que $Q_t \geq 10$

El circuito de capacitor de la figura 2.14a se usa frecuentemente en los osciladores Colpitts. Se diseña para valores específicos de R_2 y R_t ; de frecuencia de resonancia f_0 y de ancho de banda B . Los valores de L , C_1 y C_2 se tienen que calcular. La pérdida de la bobina no se considera en el diseño. Se toma en cuenta reflejando la resistencia de bobina r_c como una resistencia equivalente paralelo igual a $Q_L^2 r_c$ a través del puerto R_t .

Con la conversión paralelo a serie de la tabla 2.5.1, se obtiene el circuito de la figura 2.14b. La capacitancia C es igual a:

$$C = \frac{C_1 C_{se}}{C_1 + C_{se}} \quad (2.18)$$

Para este circuito, la especificación de f_0 y B fija el valor de Q_t :

$$Q_t \approx \frac{f_0}{B} \quad (2.19)$$

De la tabla 2.2.2 se encuentra la relación exacta entre R_t y R_{se} como:

$$R_{se} = \frac{R_t}{Q_t^2 + 1} \quad (2.20)$$

que muestra que el valor de R_{se} lo determinan R_t y Q_t . De la tabla 2.5.1, usando

$$Q_p = \omega C_2 R_2 \quad (2.21)$$

es obvio que

$$R_{se} = \frac{R_2}{Q_p^2 + 1} \quad (2.22)$$

Como Q_p debe ser ≥ 0 , es claro de (2.20) que el valor de R_2 no puede ser menor que el de R_{se} . Conviene recordar que cuando una resistencia está en paralelo con un capacitor o un inductor, la serie de resistencia resultante, es siempre menor que el valor original.

Al igualar (2.20) con (2.22), se encuentra el valor de Q_p en términos de los parámetros de diseño:

$$Q_p = \left[(Q_t^2 + 1) \frac{R_2}{R_t} - 1 \right]^{1/2} \quad (2.23)$$

Además, la propiedad de transformar impedancia del circuito en resonancia equivale a la de un transformador ideal con razón de vueltas N o razón de impedancia N^2 , como se muestra en la figura 2.14c. El uso de (2.23) da otra expresión para Q_p :

$$\frac{R_t}{R_2} = N^2 \quad (2.24)$$

$$Q_p = \left(\frac{Q_t^2 + 1}{N^2} - 1 \right)^{1/2} \quad (2.25)$$

Ya que $Q_t \geq 10$, como se supuso inicialmente para obtener Q_t a partir de f_0 y B especificados, (2.25) puede simplificarse a

$$Q_p \approx \left(\frac{Q_t^2}{N^2} - 1 \right)^{1/2} \quad (2.26)$$

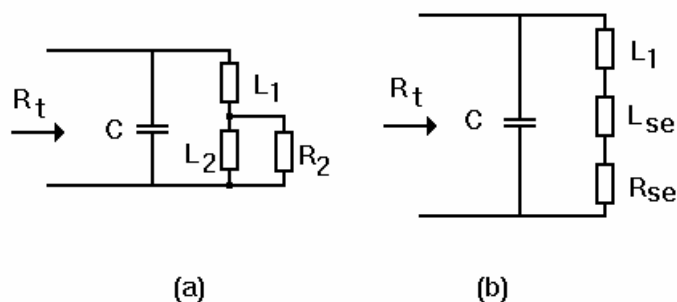
o bien para $Q_t / N = 10$, lo que implica que $Q_p > 10$,

$$Q_p \approx \frac{Q_t}{N} \quad (2.27)$$

Esta última relación es útil para realizar una verificación rápida y ver si se usa el diseño exacto para $Q_p < 10$, o la aproximación más sencilla para $Q_p > 10$.

Circuito de inductor con derivación

Con el supuesto de que $Q_t \geq 10$ y el uso de las relaciones de las tablas 2.2.1 y 2.5.2, un desarrollo paralelo al precedente conduce a las fórmulas dadas en la tabla 2.6.2, para el circuito de inductor con derivación de la figura 2.15a.

**Fig. N° 2-15****TABLA 2.6.2 Fórmulas de diseño para circuitos con inductor derivado**

Para $Q_t \approx f_0 / B \geq 10$

$$(1) C = \frac{1}{2\pi B R_t}$$

$$(2) L = \frac{1}{\omega_0^2 C}$$

$$(3) Q_t \approx \frac{f_0}{B}$$

$$(4) N = \left(\frac{R_t}{R_2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(5) \frac{Q_t}{N} \approx Q_p$$

Fórmulas aproximadas $Q_p \geq 10$	Fórmulas para $Q_p < 10$
$(6) Q_p = \frac{Q_t}{N}$ $(7) L_2 = \frac{L}{N}$ $(8) L_1 = (N - 1) L_2 = L - L_2$	$(6) Q_p = \left(\frac{Q_t^2 + 1}{N^2} - 1 \right)^{1/2}$ $(7) L_2 = \frac{R_2}{\omega_0 Q_p}$ $(8) L_{se} = \frac{L_2 Q_p^2}{Q_p^2 + 1}$ $(9) L_1 = L - L_{se}$

Bobina derivada con inductancia mutua

El circuito de bobina con derivación se muestra en la figura 2.16, se usa a menudo en circuitos de amplificador. Se utiliza una bobina única, con la posición del contacto (punto b), escogida para transformar R_2 en R_t . Si la bobina se devana sobre un núcleo de ferrita, de tal

manera que el coeficiente de acoplamiento k sea casi la unidad, se comporta como un transformador ideal y los resultados son predecibles casi de inmediato. Con bobina de núcleo de aire, el coeficiente de acoplamiento es pequeño y la aproximación por transformador ideal no es válida en todos los casos, haciéndose necesario un análisis más elaborado para determinar la posición de contacto de derivación.

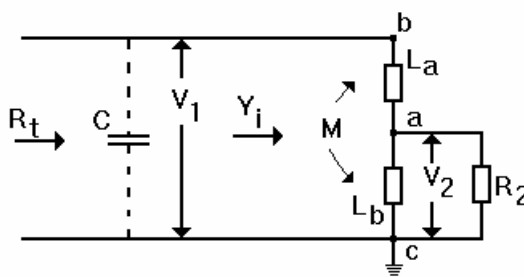


Fig. N° 2-16

Sean L_a y L_b las autoinductancias de las dos partes de la bobina; M la inductancia mutua y k el coeficiente de acoplamiento. La inductancia total de la bobina está dada por

$$L = L_a + L_b + 2M \quad (2.28)$$

Con acoplamiento unidad ($k=1$), la razón de transformación de impedancia del transformador está dada por

$$\frac{R_t}{R_2} = \frac{L^2}{(L_b + M)^2} = \frac{V_1^2}{V_{2oc}^2} \quad (2.29)$$

donde V_{2oc} es el voltaje en circuito abierto (sin carga) desde el contacto a tierra, una cantidad fácilmente de medir. La admitancia de entrada de este transformador aparece como

$$Y_i = G_i + jB_i = \frac{1}{R_t} - \frac{j}{\omega_0 L} \quad (2.30)$$

a la frecuencia de operación f_0 , donde la admitancia del capacitor C (mostrado con línea punteada en figura 2.13) sintoniza el circuito para resonancia; es decir:

$$B_c = \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} \quad (2.31)$$

El Q_t y el ancho de banda del circuito están dados por

$$Q_t = \frac{B_i}{G_t} = \omega_0 C R_t = \frac{R_t}{\omega_0 L} \quad (2.32)$$

$$B = \frac{f_0}{Q_t} \quad (2.33)$$

Con bobinas de núcleo de aire, que se utilizan en rangos de frecuencias más altas, el coeficiente de acoplamiento puede ser del orden de 0,1 y no es válida la solución sencilla dada antes. Sin embargo, como se demostrará, si $R_t / \omega_0 L = Q_t \geq 10$, y $R_2 > \omega_0 L$, el circuito se comporta aún como un transformador ideal en la frecuencia de resonancia y la posición del

contacto, puede determinarse a partir de mediciones de voltaje en circuito abierto, como en (2.29).

Se ha obtenido la solución general del problema, exenta de las aproximaciones antes mencionadas, expresada en términos de parámetros de bobina fáciles de medir (inductancia total L , coeficiente de acoplamiento k y porcentaje de vueltas total en el punto de derivación). El análisis se aplica tanto a circuitos de banda ancha como de estrecha, pues no está restringido a un Q_t alto y se ajusta a cualquier razón deseada $\omega_0 L / R_2$.

Un análisis de mallas del transformador cargado de la figura 2.13 (con el capacitor omitido) da la siguiente expresión para la admitancia de entrada:

$$Y_i = G_i + jB_i = \frac{R_2 + \omega_0 L_0}{- \omega^2 [LL_b - (L_b + M)^2] + j\omega LR_2} \quad (2.34)$$

Si se separan las partes real e imaginaria y se hace $R_t = R_i = 1/G_i$, se obtiene, después de una manipulación considerable:

$$R_t = \left[\left(\frac{L}{L_b + M} \right)^2 + \left(\frac{\omega L}{R_2} \right)^2 \left(\frac{L_b}{L_b + M} - \frac{L_b + M}{L} \right)^2 \right] \quad (2.35)$$

Y

$$B_i = \frac{1}{L} \left\{ \frac{\omega^2 L_b \left[L_b - \frac{(L_b + M)^2}{L} \right] + R_2^2}{\omega^2 \left[L_b - \frac{(L_b + M)^2}{L} \right] + R_2^2} \right\} \quad (2.36)$$

Las expresiones anteriores no son aún útiles, pues la forma en que varía L_b al desplazarse la toma a lo largo de la bobina, no se conoce para $k < 1$. (La forma en que k varía con la posición de la toma tampoco se conoce, pero se supone que k es constante en la siguiente derivación). Si los valores de L_a y L_b se relacionan por un factor a , tal que

$$L_a = a L_b \quad (2.37)$$

los parámetros L y $L_b + M$ se pueden presentar en términos de L_b , k y a . Así,

$$L_b = \frac{1}{1 + a + 2k\sqrt{a}} \quad (2.38)$$

$$\frac{L_b}{L_b + M} = \frac{1}{1 + k\sqrt{a}} \quad (2.39)$$

$$\frac{L_b + M}{L} = \frac{1 + k\sqrt{a}}{1 + a + 2k\sqrt{a}} = \frac{V_{2oc}}{V_1} = \frac{1}{N} \quad (2.40)$$

donde N puede identificarse como la razón de vueltas de un transformador ideal (acoplamiento unidad) o la razón de voltaje en circuito abierto. La sustitución de (2.38) a (2.40) en (2.36) y (2.35) y la introducción de la variable

$$K = \frac{1}{1 + k\sqrt{a}} - \frac{1}{N} \quad (2.41)$$

dan las soluciones siguientes:

$$R_t = R_2 \left[N_2 + \left(\frac{\omega L}{R_2} \right) K^2 \right]$$

y

$$B_i = -\frac{1}{\omega L} \left\{ \frac{\left[\left(\frac{\omega L}{R_2} \right)^2 \frac{K}{(1 + K\sqrt{a})N^2} \right] + 1}{\left(\frac{\omega L}{R_2} \right)^2 \left(\frac{K}{N} \right)^2 + 1} \right\} = -\frac{1}{\omega L} E \quad (2.43)$$

Si el coeficiente de acoplamiento es la unidad, puede demostrarse que $K = 0$, $R_t = N^2 R_2$ y que $B_i = -1 / \omega L$. Así, el factor E en (2.43) representa el factor por el que B_i se aparta del valor ideal.

Las expresiones (2.42) y (2.43) son exactas. Por consiguiente, para $k < 1$, es útil expresar la razón de transformación de impedancias real en forma tal, que se muestre el alejamiento respecto al comportamiento de un transformador ideal. La desviación respecto a la unidad del factor D entre corchetes en (2.44) exhibe este alejamiento:

$$\frac{R_t}{R_2} = N^2 \left[1 + \left(\frac{\omega L}{R_2} \right)^2 \frac{K^2}{N^2} \right] = N^2 D \quad (2.44)$$

Las figuras 2.17 a 2.19 muestran la variación de R_t / R_2 vs. la posición $1 / N$ de la derivación para diversos valores de K y de $\omega L / R_2$. Obsérvese que $1 / N$ representa la parte fraccionaria del número total de vueltas incluido entre el contacto y tierra. En las figuras 2.20 y 2.21 se muestra el efecto de la posición del contacto sobre los factores D y E de (2.44) y (2.43) para $k = 0,1$. Las figuras 2.22 a 2.25 ilustran las mismas cantidades para $k = 0,25$ y $0,5$, respectivamente. Mediante estas curvas, es posible determinar la razón de transformación correcta y la suceptancia (capacitiva) de sintonía para una posición dada del contacto.

La observación de estas figuras muestra que mientras $\omega L / R_2 \leq 1$, el alejamiento del caso acoplado en unidad es despreciable. De este modo. Los cálculos con estas curvas son necesarios sólo para circuitos de banda ancha, en los cuales Q_t es bajo o en los que $\omega L / R_2$ excede la unidad.

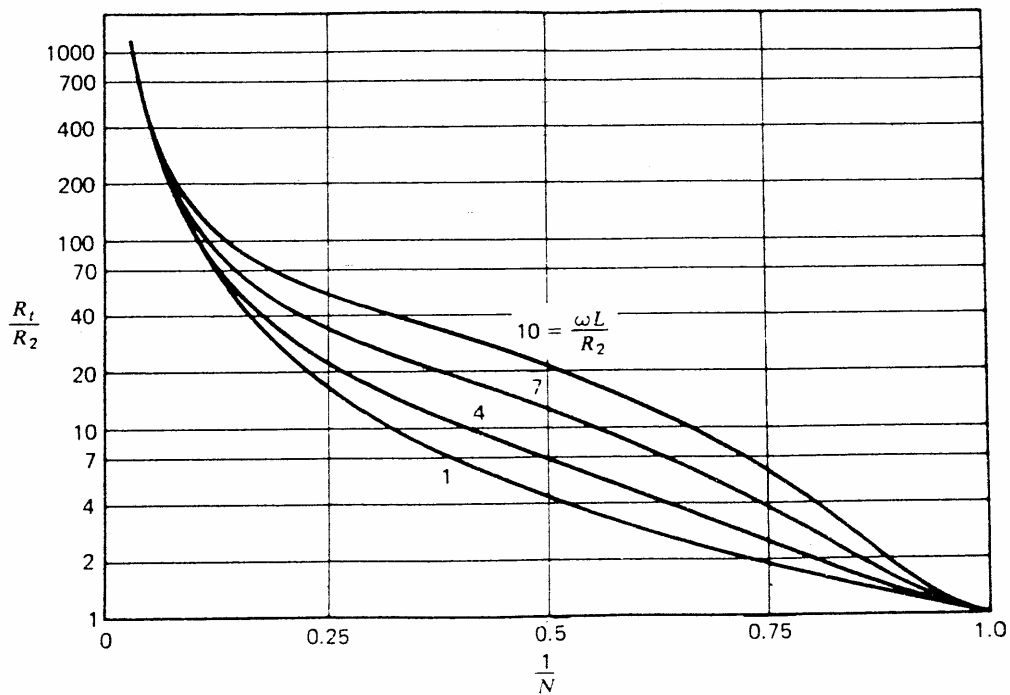


Fig. N° 2-17 R_t/R_2 y la posición ($1/N$) para $k=0,1$

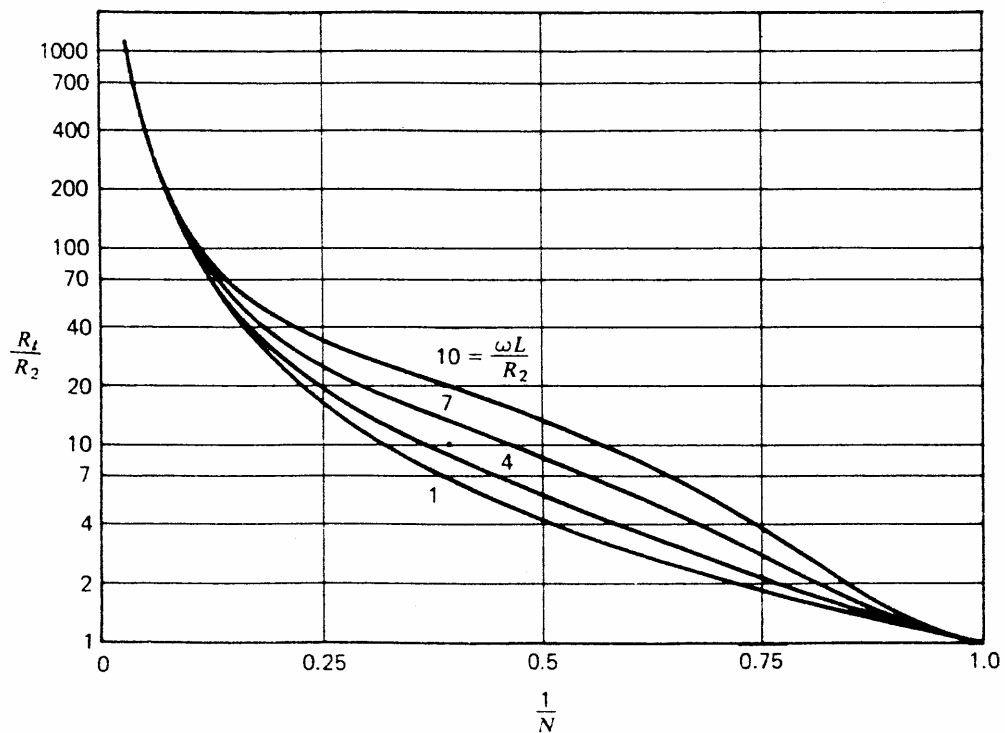


Fig. N° 2-18 R_t/R_2 y la posición ($1/N$) para $k=0,25$

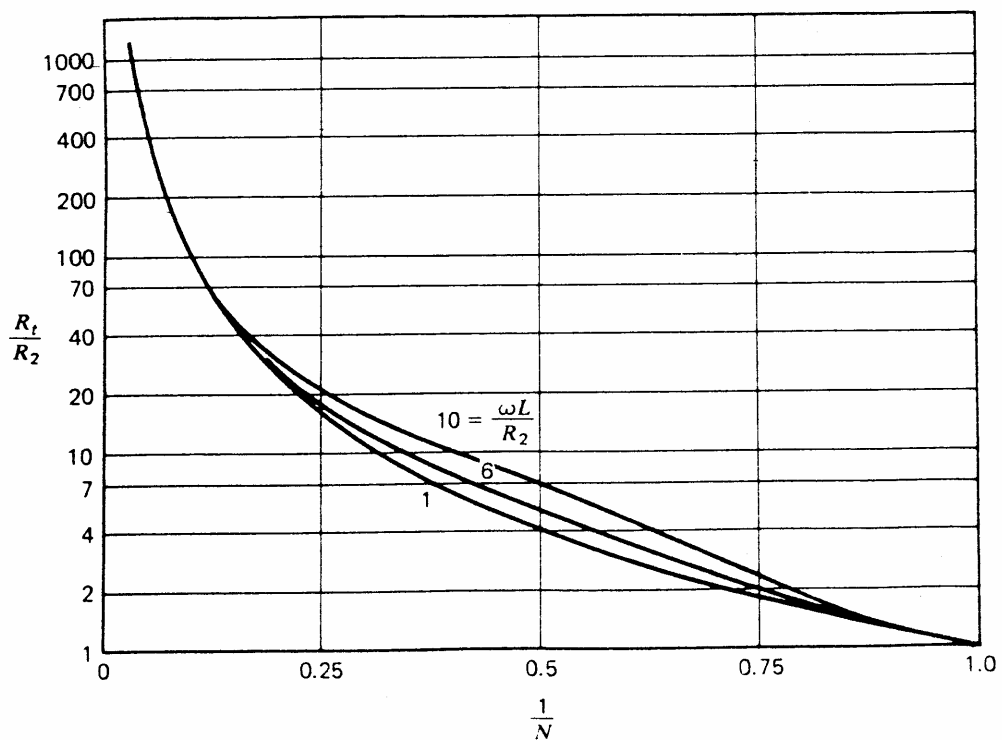


Fig. N° 2-19 R_t/R_2 y la posición ($1/N$) para $k=0,5$

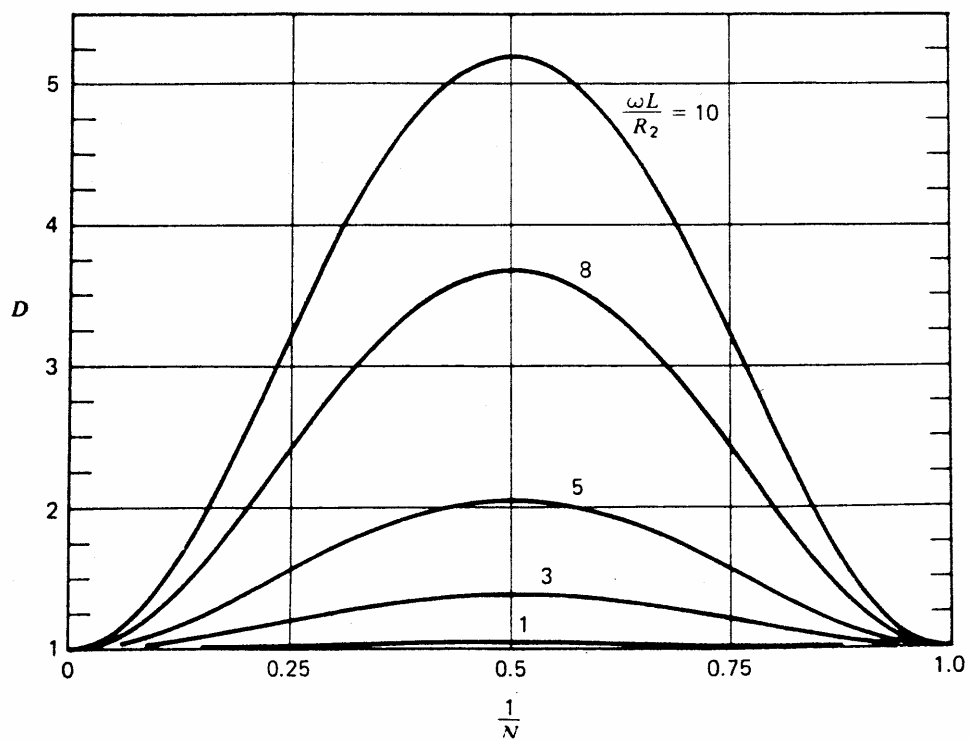


Fig. N° 2-20 Gráficas de D y posición de la derivación ($1/N$) para $k=0,1$

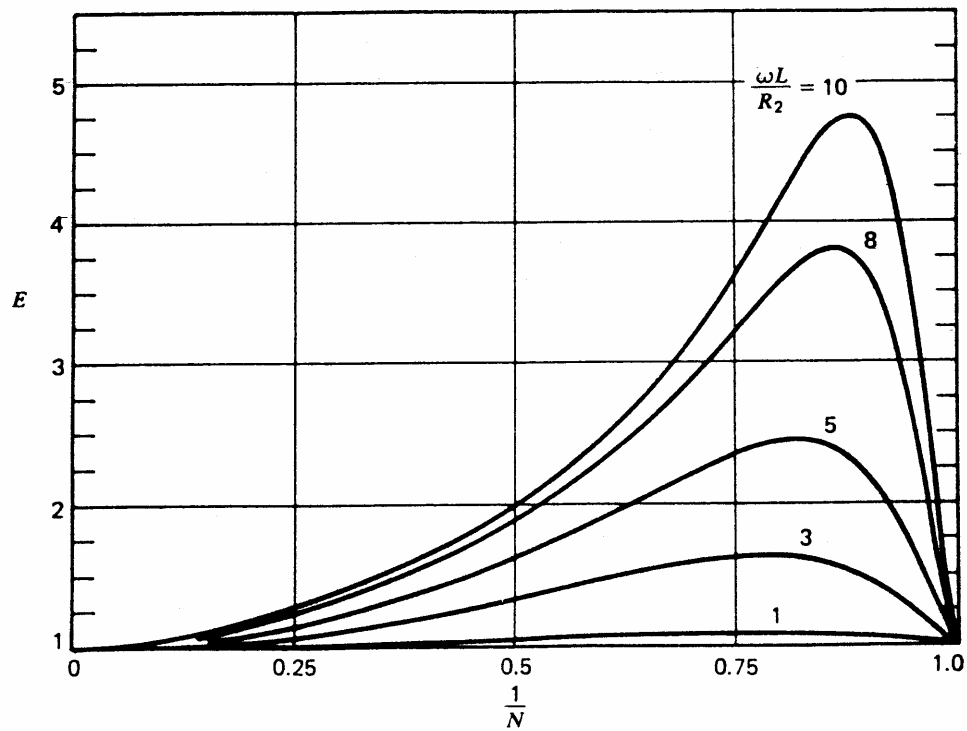


Fig. N° 2-21 Gráficas de E y posición de la derivación ($1/N$) para $k=0,1$

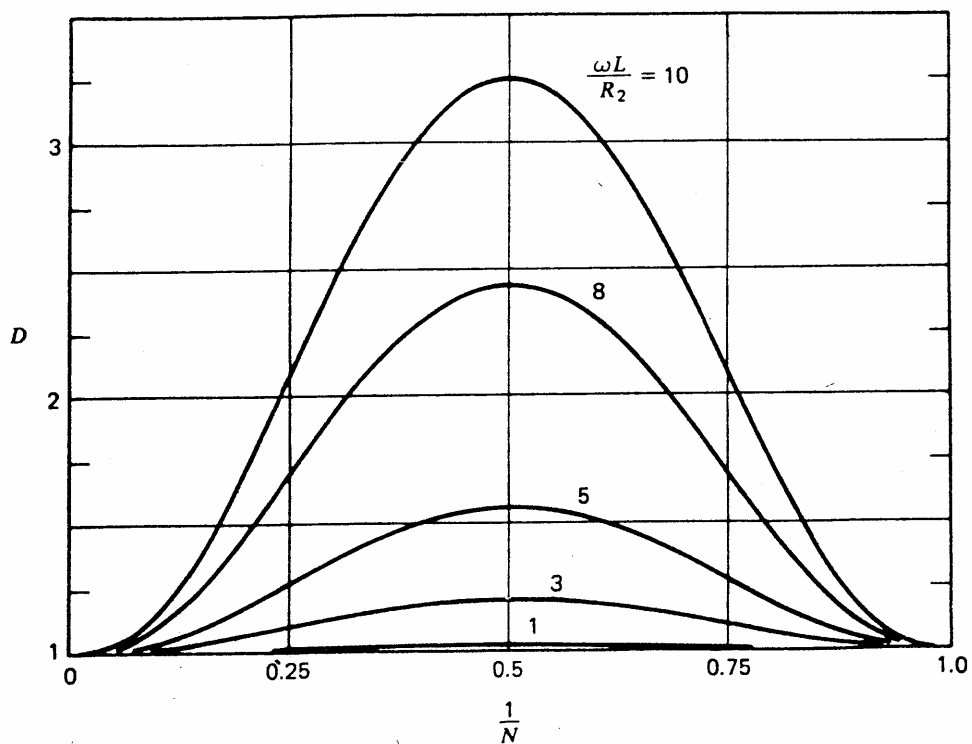


Fig. N° 2-22 Gráficas de D y posición de la derivación ($1/N$) para $k=0,25$

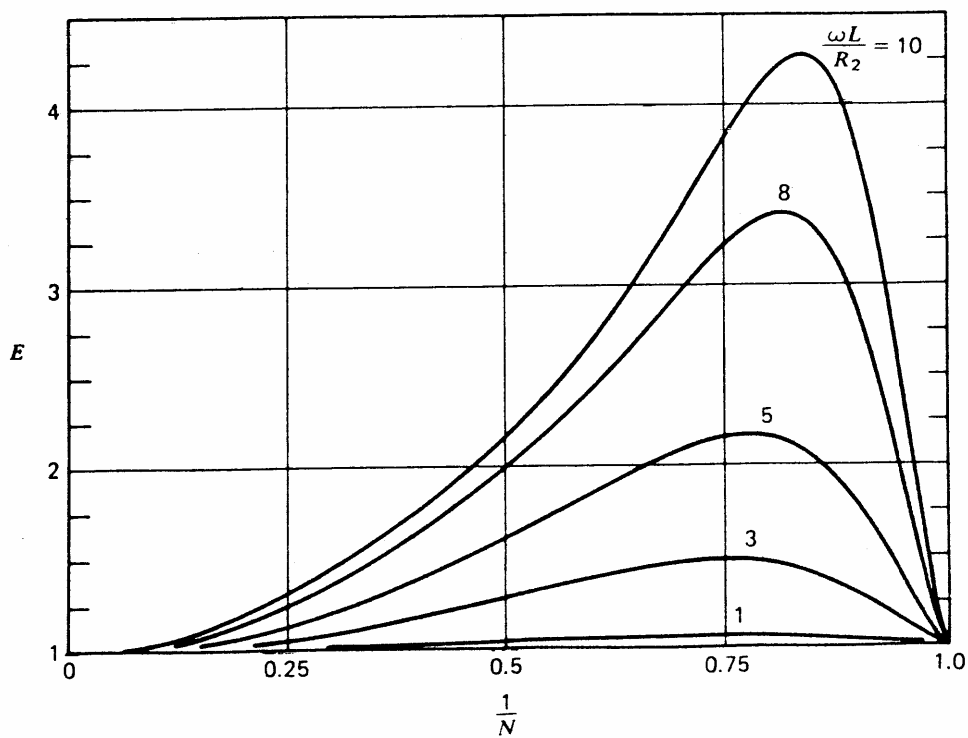


Fig. N° 2-23 Gráficas de E y posición de la derivación ($1/N$) para $k=0.25$

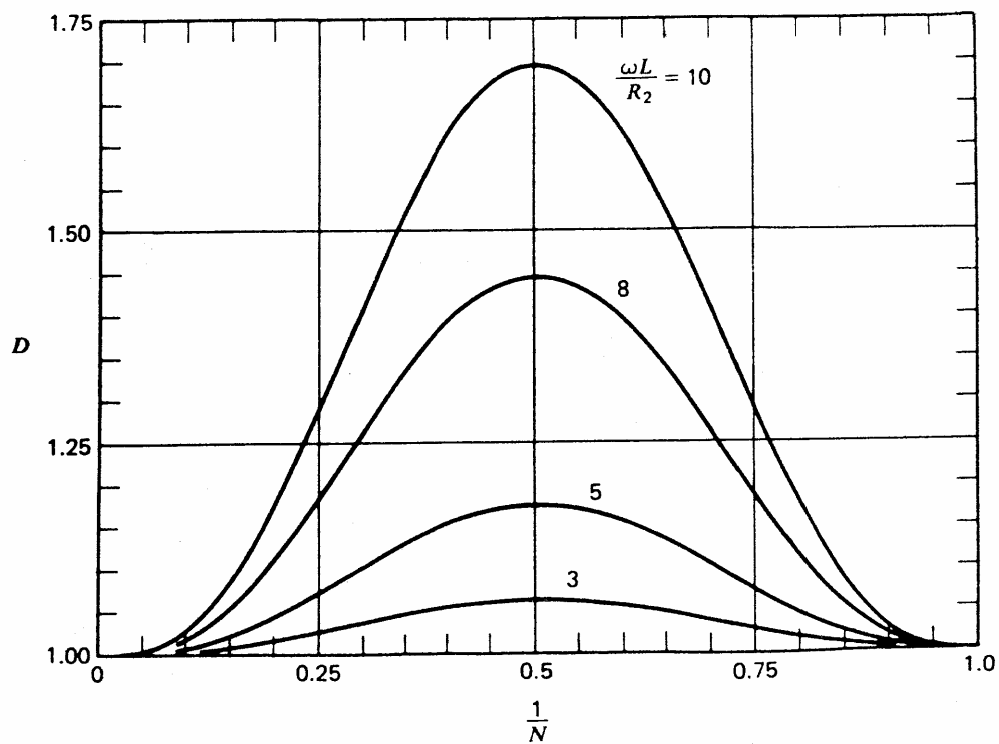


Fig. N° 2-24 Gráficas de D y posición de la derivación ($1/N$) para $k=0.5$

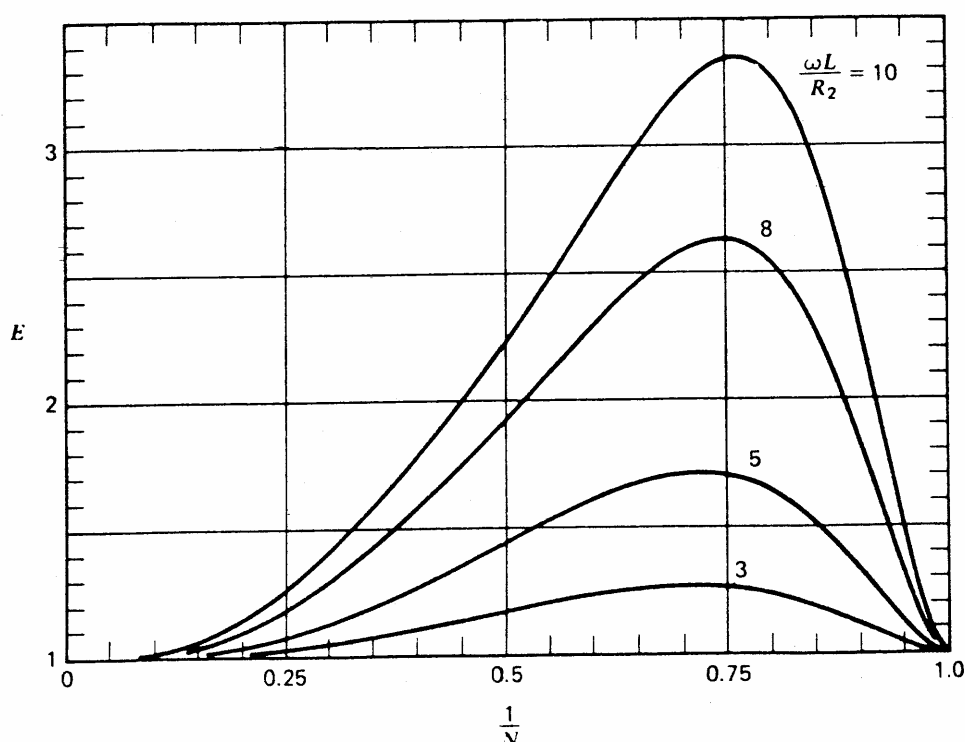


Fig. N° 2-25 Gráficas de E y posición de la derivación ($1/N$) para $k=0,5$

Transformador de Sintonía Única

Un circuito de transformador con un sólo lado sintonizado, como se muestra en la figura 2.26, otorga una forma alternativa de obtener adaptación de impedancias y puede también proporcionar aislamiento entre los circuitos de entrada y salida (para corriente continua), introduciendo si se desea una inversión de fase. El procedimiento de diseño debe dar los valores de inductancia de primario y de secundario (L_1 y L_2), de inductancia mutua (M), de coeficiente de acoplamiento (k), y de capacitancia de sintonía C que satisfaga los valores específicos de R_t , R_2 , f_0 y B .

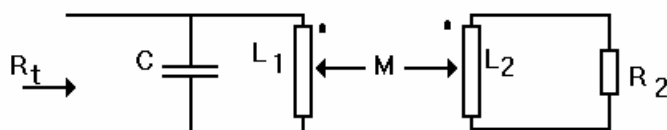


Fig. N °2-26

Mediante la deducción del circuito equivalente adecuado para la transformación, como se ilustra en la figura 2.27, puede representarse el transformador sintonizado simple por su equivalente que se muestra en la figura 2.28, el que tiene la forma de la figura 2.7. El transformador con carga de secundario R_2 , mostrado en la figura 2.27a, se puede representar por el circuito de la figura 2.27b, que tiene las mismas corrientes de mallas I_1 y I_2 . La impedancia de entrada de cualquiera de ellos está dada por:

$$\frac{V_1}{I_1} = Z_{(j\omega)} = j\omega L_1 + \frac{(j\omega M)^2}{R_2 + j\omega L_2} \quad (2.45)$$

Es evidente de esta ecuación que si la inductancia mutua se multiplica por un factor α y la impedancia de secundario por α^2 , no cambiarán la impedancia de entrada y la corriente de primario. No obstante, el circuito equivalente tiene ahora los valores mostrados en la figura 2.27c y ésta puede simplificarse a la forma mostrada en la 2.27d, si se escoge el valor de α tal que sea $\alpha = M / L_2$, de tal manera que la inductancia $\alpha^2 L_2 - \alpha M = 0$. Los valores de circuito en la figura 2.27d se muestra en términos del coeficiente de acoplamiento definido por

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (2.46)$$

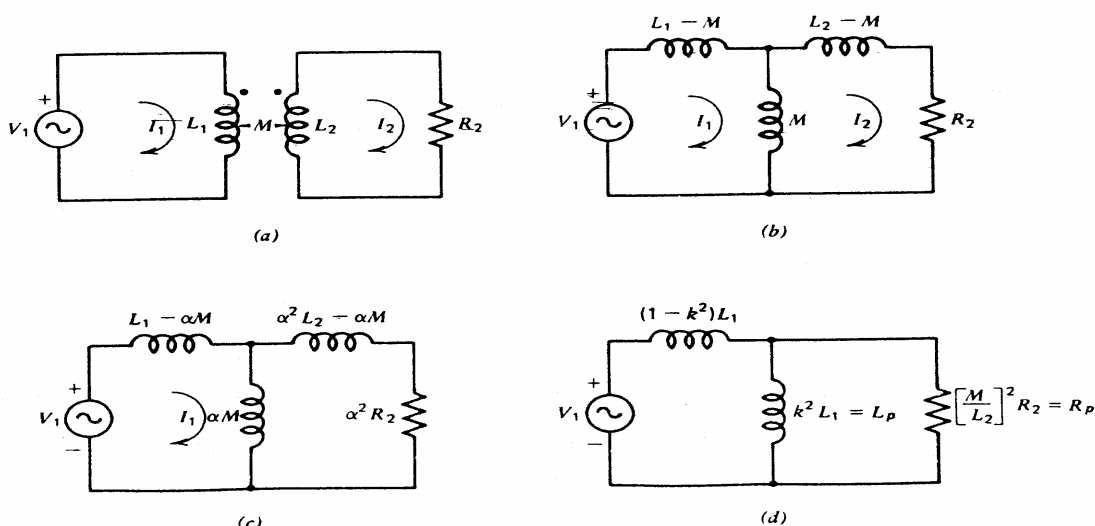
La combinación paralelo de R_p y L_p puede convertirse a su equivalente serie de la tabla 2.5.2, con el Q_p definido a la frecuencia de resonancia del sistema como:

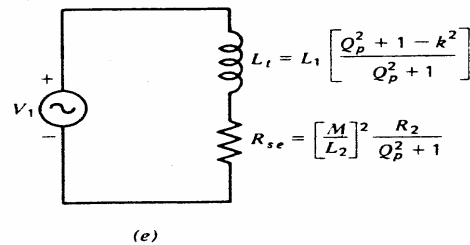
$$Q_p = \frac{R_p}{\omega_0 L_p} = \frac{\left(\frac{M}{L_2}\right)^2 R_2}{\omega_0 k^2 L_1} = \frac{R_2}{\omega_0 L_2} \quad (2.47)$$

Las fórmulas de conversión exactas dan

$$R_{SE} = \frac{R_p}{Q_p^2 + 1} = \frac{\left(\frac{M}{L_2}\right)^2 R_2}{Q_p^2 + 1} \quad (2.48)$$

$$L_{SE} = \frac{k^2 L_1 Q_p^2}{Q_p^2 + 1} \quad (2.49)$$



**Fig. N° 2-27**

Si se combinan L_{SE} con la inductancia $(1 - k^2) L_1$ de la figura 2.24d, la inductancia total se hace

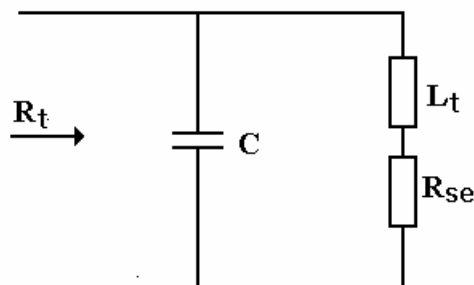
$$L_t = L_1 \left(\frac{Q_p^2 + 1 - k^2}{Q_p^2 + 1} \right) \quad (2.50)$$

Como se muestra en el circuito equivalente final de la figura 2.24e. De esta manera, el circuito de la figura 2.23 se ha convertido en el de la figura 2.25, para el que se aplican las fórmulas aproximadas de la tabla 2.2.1 si $Q_t \geq 10$. A partir de los valores especificados de R_t , R_2 , f_0 y B . de 2.46, 2.47, y 2.48, se obtiene:

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} \quad (2.51)$$

$$L_2 = \frac{R_2}{\omega_0 Q_p} \quad (2.52)$$

$$L_1 = L_t \left(\frac{Q_p^2 + 1}{Q_p^2 + 1 - k^2} \right) \quad (2.53)$$

**Fig. N° 2-28**

Ninguna de estas cantidades puede calcularse sin escoger arbitrariamente el valor de Q_p o de k . Mediante reagrupación en las ecuaciones anteriores, se puede demostrar que

$$Q_t = \frac{Q_p^2 + 1 - k^2}{Q_p k^2} \quad (2.54)$$

$$k^2 = \frac{Q_p + 1}{Q_p Q_t + 1} \quad (2.55)$$

y que

$$Q_p = Q_t \left[\frac{k^2}{2} + \left(\frac{k^4}{4} + \frac{k^2 - 1}{Q_t^2} \right)^{1/2} \right] \quad (2.56)$$

La última ecuación muestra que si k se hace lo suficientemente pequeño, el valor de Q_p se hace complejo. De esta manera, existe un límite inferior para el valor realizable de k con uno especificado de Q_t . Tomando derivadas, los valores mínimos permisibles de k y el valor correspondiente de Q_p se encuentran como

$$Q_p(k_{\min}) = \frac{1}{Q_t} \left[(Q_t^2 + 1)^{1/2} - 1 \right] \quad (2.57)$$

y

$$k_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{Q_t} \left[(Q_t^2 + 1)^{1/2} - 1 \right] \quad (2.58)$$

En la figura 2.29 se traza la gráfica de k_{\min} y $Q_p(k_{\min})$ y el de Q_t . El diseñador de circuitos puede escoger arbitrariamente a Q_p , pero está entonces obligado a usar el valor de k que resulta de la ecuación (2.55). En transformadores de RF no siempre es posible obtener valores altos del coeficiente de acoplamiento; por lo tanto, la información que da la figura 2.29 es útil, pues da un límite inferior para k que se puede usar con un Q_t especificado. La figura 2.30 muestra valores correspondientes de Q_p y k para varios valores de Q_t tomados de (2.55). Las restricciones de diseño que impone este método son: (1) $Q_t > 10$ de tal suerte se aplique las relaciones aproximadas de la tabla 2.2.1; (2) Q_p debe escogerse de tal manera que $0 < Q_p < Q_t$; y (3) $k_{\min} < k < 1$.

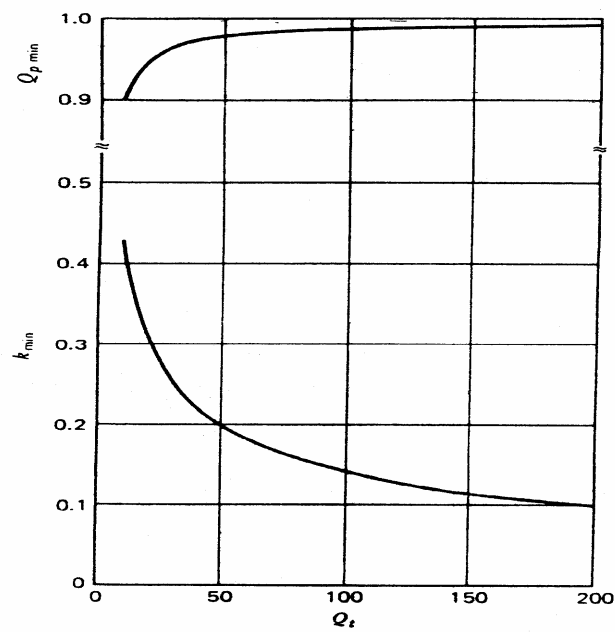


Fig. N° 2-29

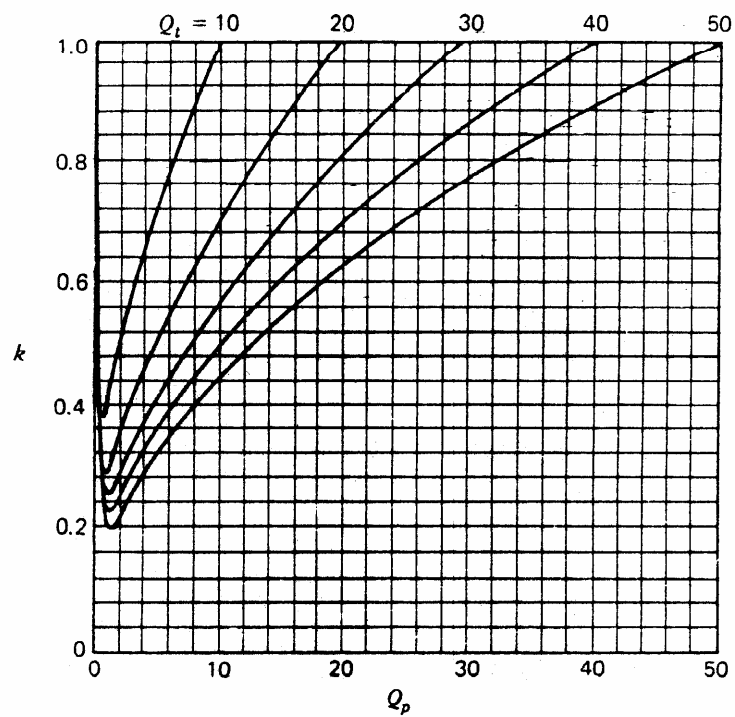


Fig. N° 2-30

Diseño simplificado para $Q_p > 10$

Si son aceptables los valores altos de k que resultan, las ecuaciones de diseño pueden simplificarse con el supuesto de que $Q_p > 10$. Las relaciones se hacen:

$$R_s \approx \frac{(w_0 M)^2}{R_2} \quad (2.59)$$

$$L_s \approx K^2 L_1 \quad (2.60)$$

$$L_t = L_1 \quad (2.61)$$

$$K_2 \approx \frac{Q_p}{Q_t} \quad (2.62)$$

$$R_t \approx R_2 \left(\frac{L_1}{M} \right)^2 \quad (2.63)$$

$$N \approx \frac{L_t}{M} \quad (2.64)$$

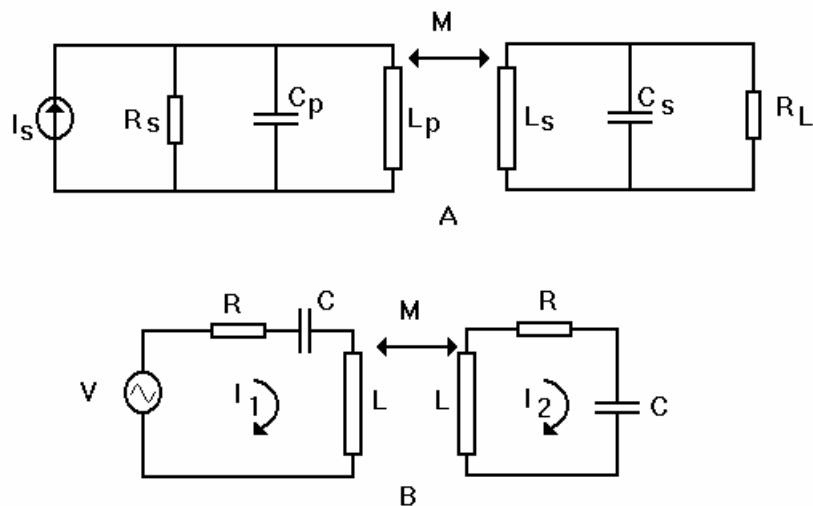
$$L_2 = \frac{R_2}{w_0 Q_p} \quad (2.65)$$

Transformador de Doble Sintonía

Los transformadores con circuitos sintonizados en el primario y en el secundario, como se muestra en la figura 2.31, se han usado extensamente en etapas de FI de receptores, pues permiten más flexibilidad en el ajuste de la forma de la curva de selectividad. Aunque ahora está siendo sustituidos por filtros de cerámica, de cristal y de onda acústica superficial, los transformadores de doble sintonía se usan aún donde deban acoplarse diferentes niveles de impedancias y en discriminadores de FM.

En la figura 2.30 el transistor de excitación o FET se representa por una fuente de corriente en paralelo con una resistencia R_s que incluye también las pérdidas en L_p . En forma similar, R_L incluye la resistencia de entrada de la etapa siguiente y la resistencia de pérdida en L_s . Para un análisis simplificado, se harían las suposiciones siguientes:

- 1 - los circuitos primarios y secundarios son idénticos, de tal suerte que $R_s = R_L = R$, $C_s = C_p = C$ y $L_s = L_p = L$
- 2 - el Q de estos circuitos es mayor que 10, por lo que se aplican las aproximaciones de alto Q
- 3 - la banda de frecuencia de interés, en su totalidad, es pequeña comparada con la frecuencia de resonancia f_0 , de tal manera que la fuente de voltaje equivalente a la de Thévenin, que aparece en la figura 2.31 se puede considerar constante, y el voltaje que atraviesa la carga secundaria, como proporcional a la corriente en el secundario.

**ig. N° 2-31**

Con estas suposiciones, se puede derivar el circuito de figura 2.31b del de la 2.31a, la inductancia mutua está dada por

$$M = k \sqrt{L_p L_s} \quad (2.66)$$

donde k es el coeficiente de acoplamiento. Las ecuaciones de mallas para el circuito son:

$$\begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R + j(X_L - X_C) & \pm j\omega M \\ j\omega M & R + j(X_L - X_C) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

y las soluciones para I_1 e I_2 son:

$$I_2 = \frac{\pm j\omega M V}{[R + j(X_L - X_C)]^2 + (\omega M)^2} \quad (2.68)$$

$$I_1 = \frac{V [R + j(X_L - X_C)]}{[R + j(X_L - X_C)]^2 + (\omega M)^2} \quad (2.69)$$

La impedancia vista por la fuente de voltaje es:

$$Z_{IN} = \frac{V}{I} = R + j(X_L - X_C) + \frac{(\omega M)^2 R}{R^2 + (X_L - X_C)^2} - j \frac{(X_L - X_C)(\omega M)^2}{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (2.70)$$

En resonancia $X_L = \omega_0 L = X_C = 1 / \omega_0 C$, y:

$$Z_{IN} = R + \frac{(\omega_0 M)^2}{R} \quad (2.71)$$

Para transferencia máxima de potencia en resonancia, $R = (\omega_0 M)^2 / R$,

El circuito Q en resonancia, se define como: $\omega_0 M = R$ (2.72)

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} \quad (2.73)$$

con (2.66) y (2.72), se puede demostrar que el coeficiente de acoplamiento para la condición de máxima transferencia de potencia (llamado acoplamiento crítico) es

$$k_c = Q^{-1} \quad (2.74)$$

Para $k \leq k_c$, la curva de A_v vs. Frecuencia, tiene un pico único en la frecuencia de resonancia, con amplitud máxima para $k = k_c$; para $k > k_c$, la curva de repuesta tiene dos picos. Este funcionamiento se ilustra en la figura 2.31, en la que se supone la ganancia de voltaje proporcional a I_2 .

Para el caso de “sobreactuación” ($k > k_c$) la razón de ganancia pico a la de “valle” en f_0 está dada aproximadamente por

$$\frac{A_{vm}}{A_{vo}} = 0,5 \left(kQ + \frac{1}{kQ} \right) \quad (2.75)$$

y se controla por la elección de k y Q . El ancho de banda del circuito se define a menudo como $B = f_2 - f_1$, donde f_1 y f_2 son las frecuencias a las que la ganancia baja hasta A_{vo} , como se muestra en la figura. Otras frecuencias de interés son aquellas en las que ocurren picos de ganancia, a saber, f_a y f_b . Puede demostrarse que:

$$f_b - f_a = (k^2 Q^2 - 1)^{1/2} \quad (2.76)$$

$$f_2 - f_1 = \sqrt{2} (f_b - f_a) \quad (2.77)$$

Como alternativa al transformador de doble sintonía se pueden usar dos etapas amplificadoras de sintonía única en cascada, sintonizadas a las frecuencias f_a y f_b respectivamente. Debe notarse que si van a acoplarse impedancias desiguales a los dos lados del circuito, se puede sacar una derivación de la bobina del primario, del secundario o de ambos, como se vio anteriormente.

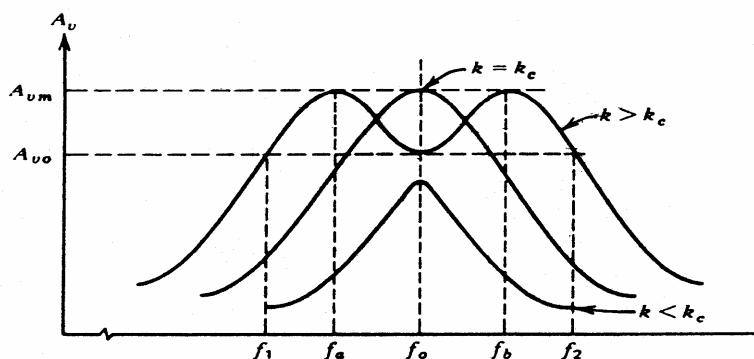


Fig. N° 2-32