

# Física Electrónica

Compilado por: Rosso, Daniel Agustín

24 de septiembre de 2013

Esta carpeta contiene apuntes de la materia física electrónica tomados de las clases del Ing. Alberto Muhana, dictadas en la Universidad Tecnológica Nacional - Facultad Regional Córdoba; además estos apuntes fueron ampliados con la bibliografía recomendada por la cátedra y corregidos personalmente por el Ing. Muhana.

Como mejora habría que vectorizar y mejorar los gráficos ya que, por cuestiones de tiempo, no lo pude hacer, pero si alguien está interesado en hacer esto, cambiar algo del escrito, o cualquier otra sugerencia, mi dirección de mail es rossodaniel@gmail.com, sólo tienen que pedir el archivo fuente y se los envío.

# Índice general

<b>1. Electromagnetismo</b>	<b>5</b>
1. Introducción . . . . .	5
2. Ecuaciones de Maxwell . . . . .	6
2.1. Introducción a las ecuaciones de Maxwell . . . . .	6
2.2. Requerimientos matemáticos . . . . .	6
2.3. Primera ecuación de Maxwell . . . . .	7
2.4. Segunda ecuación de Maxwell . . . . .	9
2.5. Tercera ecuación de Maxwell . . . . .	10
2.6. Cuarta ecuación de Maxwell . . . . .	10
3. Ondas electromagnéticas planas . . . . .	10
4. Energía de las ondas electromagnéticas y vector de Poynting . . .	15
<b>2. Relatividad</b>	<b>20</b>
1. Introducción . . . . .	20
1.1. Analogía de los barquitos . . . . .	20
2. Experimento de Michelson y Morley (1879) . . . . .	22
3. Postulados de la teoría de la relatividad especial de Einstein . . .	25
4. Transformaciones de Galileo (Clásicas) . . . . .	25
5. Transformación de Lorentz . . . . .	27
6. Espacio relativista (contracción de Lorentz) . . . . .	30
7. Tiempo relativista (dilatación del tiempo) . . . . .	30
8. Masa relativista . . . . .	31
9. Energía relativista . . . . .	34
<b>3. Cuantificación de la energía</b>	<b>38</b>
1. Radiación térmica . . . . .	38
1.1. Introducción . . . . .	38
1.2. Teoría clásica de la radiación térmica . . . . .	39
1.2.1. Ley de Kirchoff de la radiación térmica . . . . .	40
1.2.2. Instrumentos de medición . . . . .	41
1.2.3. Leyes de Wien . . . . .	44
1.2.4. Leyes de Rayleigh - Jeans . . . . .	45
1.3. Teoría cuántica de la radiación térmica . . . . .	46
2. El efecto fotoeléctrico . . . . .	49

<b>4. Fundamentos de la física cuántica</b>	<b>54</b>
1. Excitación atómica . . . . .	54
2. Espectros atómicos . . . . .	54
3. Series espectrales . . . . .	55
3.1. Series espectrales del hidrógeno . . . . .	56
4. Modelos atómicos . . . . .	56
4.1. Modelo atómico de Thomson . . . . .	56
4.2. Modelo atómico de Rutherford . . . . .	57
4.3. Modelo atómico de Bohr . . . . .	58
5. Principio de correspondencia . . . . .	63
6. Potenciales críticos de excitación y ionización . . . . .	65
7. Rayos X . . . . .	66
7.1. Introducción . . . . .	66
7.2. Resultados experimentales . . . . .	67
7.3. Fundamentación teórica . . . . .	69
7.4. Difracción de rayos X . . . . .	72
8. Efecto Compton . . . . .	75
<b>5. Mecánica ondulatoria</b>	<b>80</b>
1. Ondas de De Broglie . . . . .	80
2. Principio de incertidumbre . . . . .	85
3. Experiencia de Davisson-Germer . . . . .	88
<b>6. Mecánica cuántica</b>	<b>91</b>
1. Introducción . . . . .	91
2. Ecuación de onda . . . . .	91
3. Ecuación de Schrödinger . . . . .	92
3.1. Forma dependiente del tiempo . . . . .	92
3.2. Forma en estado estacionario . . . . .	94
3.3. Partícula en una caja . . . . .	96
<b>7. Teoría cuántica del átomo de hidrógeno</b>	<b>101</b>
1. Introducción . . . . .	101
2. Ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno . . . . .	101
3. Principio de exclusión de Pauli . . . . .	103
4. Cuantificación espacial . . . . .	104
5. Energía potencial magnética $\mu_m$ . . . . .	105
6. Reglas de selección . . . . .	108
7. Efecto Zeeman Normal . . . . .	108
8. Efecto Zeeman anómalo . . . . .	110
<b>8. Mecánica estadística</b>	<b>112</b>
1. Introducción . . . . .	112
2. Distribución estadística . . . . .	114
2.1. Distribución estadística de Maxwell-Boltzmann . . . . .	116
3. Distribución estadística de Bose-Einstein . . . . .	118

4.	Distribución estadística de Fermi-Dirac . . . . .	120
5.	Teoría de bandas . . . . .	124
5.1.	Conductores . . . . .	125
5.2.	Aisladores . . . . .	125
5.3.	Semiconductores . . . . .	126
<b>9.</b>	<b>Láser</b>	<b>127</b>
1.	Introducción . . . . .	127
2.	Características del láser . . . . .	127
3.	Física del láser . . . . .	128
3.1.	Esquema básico de un láser de tres niveles . . . . .	130
3.2.	Probabilidades de transición . . . . .	132
4.	Tipos de láser . . . . .	134

# Capítulo 1

## Electromagnetismo

### 1. Introducción

Antes de hablar concretamente sobre el electromagnetismo, conviene hacer las siguientes consideraciones:

- Óptica: Es una rama de la física aplicada, que trata de los fenómenos luminosos y de la visión, incluyendo los instrumentos ópticos.

El campo de la óptica incluye el espectro visible, infrarrojo y ultravioleta.

- Colores: Son las diferentes sensaciones que la luz produce con el ojo y depende de la frecuencia.
- Espectro visible: Es una zona de la radiación electromagnética que va desde el violeta (aprox.  $4000\text{\AA} \approx 7 \times 10^{14} \text{Hz}$ ) al rojo (aprox.  $7000\text{\AA} \approx 4 \times 10^{14} \text{Hz}$ ).
- Espectro electromagnético: Es la zona de influencia de las radiaciones de energía, originados por campos eléctricos que se propagan a la velocidad de la luz  $C \approx 3 \times 10^8 \text{m/s}$  en el vacío. Un esquema del espectro electromagnético se observa en la figura 1.1.
- Propiedades de la luz: Las propiedades o fenómenos conocidos de la luz están descritas en función de los experimentos por medio de los cuales fueron descubiertos; por ejemplo:
  - Óptica geométrica (modelo corpuscular): En la cual se estudia principalmente la propagación rectilínea, el fenómeno de reflexión y refracción.
  - Óptica física (modelo ondulatorio): En la cual se estudian los fenómenos de interferencia, difracción, polarización, etc.
  - Óptica cuántica (modelo onda-corpúsculo): Estudia fenómenos como el fotoeléctrico, efecto Compton, excitación atómica, etc.

- Definición de fotón: Es un “paquete” de energía o radiación electromagnética, cuya masa en reposo es nula. La energía de un fotón es  $E = h.\nu$

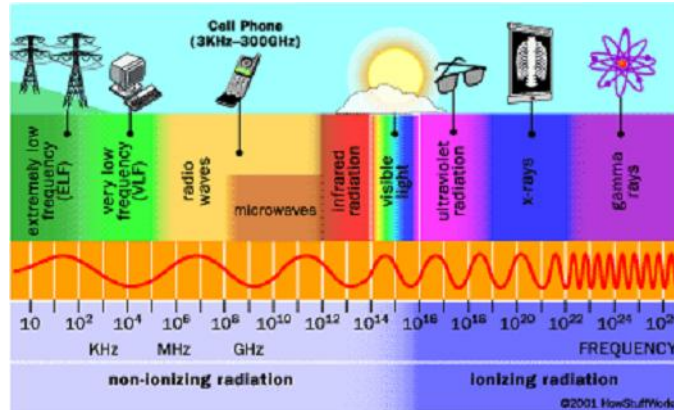


Figura 1.1: Espectro electromagnético

## 2. Ecuaciones de Maxwell

### 2.1. Introducción a las ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones del rotor ( $\nabla \times \vec{E}$ ) y ( $\nabla \times \vec{H}$ ), implican la interdependencia entre los campos eléctricos y magnéticos variables en el tiempo, o sea que un  $\vec{H}$  puede generar un  $\vec{E}$  y viceversa.

También se deducirá que un campo magnético variable en el tiempo, es capaz de transportar energía por medio del espacio libre.

Maxwell sintetizó todas las leyes del electromagnetismo en cuatro ecuaciones, junto a otras relaciones también importantes como por ejemplo:

- Ley de Ohm puntual o vectorial:  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$
- Relación de continuidad:  $\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

### 2.2. Requerimientos matemáticos

Antes de comenzar con las ecuaciones, introduciremos dos teoremas del análisis vectorial que serán de suma importancia

- Teorema de Stokes: Establece que la integral de superficie, o sea el flujo, del rotacional de un campo vectorial sobre una superficie es igual a la integral curvilínea cerrada del campo vectorial a lo largo del contorno que limita la superficie.

$$\oint \vec{F} d\vec{l} = \iint \text{Rot}(\vec{F}) d\vec{s}$$

- Teorema de la divergencia: Relaciona la integral de volumen de la divergencia de un campo vectorial, con el flujo del campo en la superficie cerrada que limita al volumen.

$$\oiint \vec{F} d\vec{s} = \iiint \text{Div}(\vec{F}) d\vec{v}$$

### 2.3. Primera ecuación de Maxwell

Se deduce de la ley de Ampère, la cual expresa que la integral curvilínea del vector intensidad de campo magnético a lo largo de un camino cerrado, es igual a la intensidad de corriente rodeada por dicho camino.

Matemáticamente expresada sería:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = I \quad (1.1)$$

Ahora introduciremos una nueva magnitud, llamada densidad superficial de corriente  $\vec{J} = \frac{\text{Corriente}}{\text{Superficie}} [\text{Amp}/\text{m}^2]$ , entonces podemos expresar a una corriente que atraviesa una superficie como  $I = \iint \vec{J} d\vec{s}$ , sustituyendo este análisis en la ecuación 1.1 quedaría

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \iint \vec{J} d\vec{s} \quad (1.2)$$

El problema con la ley de Ampère expresada de esta forma, es que está incompleta y falla en algunas oportunidades.

Para analizar esto, consideremos el proceso de carga de un capacitor, el cual está representado en la figura 1.2.

Aplicando la ecuación 1.2 al contorno C y a la superficie  $s_1$  (superficie plana), vemos que

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \iint \vec{J} d\vec{s}_1 = i_c$$

Si, por otra parte, se aplica la ley de Ampère al contorno C y a la superficie  $s_2$  (superficie abombada), entonces J es cero en todos los puntos de  $s_2$  debido a que dicha superficie no es atravesada por la corriente.

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \iint \vec{J} d\vec{s}_2 = 0$$

quedando claramente la incompatibilidad de la ley de Ampère.



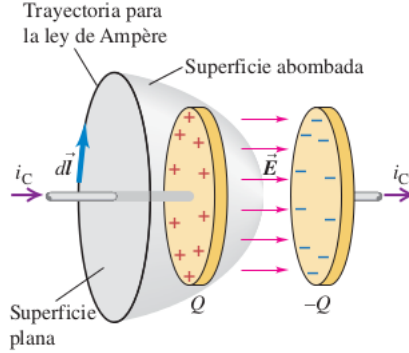


Figura 1.2: Carga de un capacitor

Si consideramos ahora, la suma de ambas expresiones, y además que  $s_1 + s_2 = s$ , podemos expresar a la ecuación 1.2, como

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \oint_s \vec{J} d\vec{s}$$

Los conductores llevan la corriente  $i_c$  (corriente de conducción) hacia una placa y fuera de la otra; la carga  $Q$  se incrementa, y el campo eléctrico  $\vec{E}$  entre las placas aumenta. A medida que el capacitor se carga, el campo eléctrico y el flujo eléctrico a través de la superficie aumentan.

Sabemos por física elemental, que la carga es el producto de la capacitancia por el potencial  $q = C.v$ ; también se sabe que para un capacitor de placas paralelas, podemos expresar  $C = \frac{\epsilon A}{d}$  y  $v = Ed$  al sustituir  $C$  y  $v$  en  $q$

$$q = Cv = \frac{\epsilon A}{d}(Ed) = \epsilon EA = \epsilon \phi_E$$

donde el término  $\phi_E = EA$  es el flujo eléctrico a través de la superficie.

A medida que el capacitor se carga, la tasa de cambio de  $q$  es la corriente de conducción,  $i_C = dq/dt$ .

$$i_c = \frac{dq}{dt} = \epsilon \frac{d\phi_E}{dt}$$

Ahora con un poco de imaginación, “inventamos” una corriente de desplazamiento ficticia  $i_D$ , que sólo tendrá sentido en la región comprendida entre las placas, definida como:

$$i_D = \epsilon \frac{d\phi_E}{dt}$$

Al incluir esta corriente en la Ley de Ampère, obtenemos la Ley de Ampère generalizada, la cual es la primera ecuación de Maxwell en forma integral:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int_s \left( \vec{J} + \epsilon \frac{d\vec{E}}{dt} \right) d\vec{s} \quad (1.3)$$

aplicando el teorema de Stokes a la ecuación 1.3 , encontramos la primera ecuación de Maxwell en forma diferencial-vectorial

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \epsilon \frac{d\vec{E}}{dt}$$

## 2.4. Segunda ecuación de Maxwell

Se deduce de la ley de Faraday, la cual dice que la *fem* inducida en un circuito cerrado, es igual a la velocidad de disminución del flujo magnético total encerrado por el circuito

$$e = - \frac{\partial \phi_m}{\partial t} \quad (1.4)$$

pero como sabemos que el flujo magnético es  $\phi_m = B.A$  y reemplazando en la ecuación 1.4

$$e = - \frac{\partial \phi_m}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_s \vec{B} d\vec{s} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s} \quad (1.5)$$

Como el trabajo eléctrico, es una función potencial, la integral curvilínea a lo largo de una trayectoria cerrada es nula, o sea  $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$ . Si cerramos el circuito con un voltímetro, como lo indica la figura 1.3 obtendremos

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s} \quad (1.6)$$

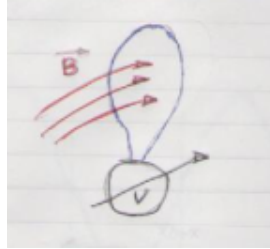


Figura 1.3: Ley de trabajo eléctrico

La cual representa la segunda ecuación de Maxwell en forma integral.

Aplicando el teorema de Stockes a la ecuación 1.6, llegamos a la segunda ecuación de Maxwell en forma diferencial-vectorial:

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

## 2.5. Tercera ecuación de Maxwell

Se deduce del teorema de Gauss, el cual dice que la integral de superficie de la densidad de campo  $\vec{D}$  extendida sobre una superficie cerrada, es igual a la carga encerrada por dicha superficie.

$$\int_s \vec{D} d\vec{s} = Q$$

Ahora introduciremos una nueva magnitud, llamada densidad volumétrica de cargas  $\rho = \frac{Q}{V}$  [Coulomb/m<sup>3</sup>], entonces

$$Q = \int_v \rho dv \quad (1.7)$$

reemplazando 1.7 en la ecuación del teorema de Gauss, llegamos a la tercera ecuación de Maxwell en forma integral

$$\int_s \vec{D} d\vec{s} = \int_v \rho dv \quad (1.8)$$

de acuerdo a lo que expresa el teorema de la divergencia aplicado a la ecuación 1.8, llegamos a la tercera ecuación de Maxwell en forma diferencial-vectorial

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

## 2.6. Cuarta ecuación de Maxwell

Es la ley de Gauss aplicada a campos magnéticos, dice que la integral de  $\vec{B}$  a lo largo de una superficie cerrada es nula. Esto se debe a que no existen monopolos magnéticos.

Matemáticamente llegamos a la cuarta ecuación de Maxwell en forma integral

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = 0 \quad (1.9)$$

Para llevar a la forma vectorial-diferencial, aplicamos el teorema de la divergencia

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

## 3. Ondas electromagnéticas planas

Para realizar este análisis, supondremos el comportamiento ondulatorio de los campos eléctricos y magnéticos y, demostraremos que dicha suposición es

compatible con las ecuaciones de Maxwell, o sea que las funciones de onda de  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  satisfacen la ecuación de onda.

Dicho estudio se hará con ondas planas.

- *Ondas planas:* Se denominan ondas planas a aquellas perturbaciones transversales, generadas debido al campo eléctrico y magnético perpendicular entre si y perpendicular a la velocidad de propagación.

Para simplificar el análisis, supondremos que las ondas se desplazan en el sentido de las x positivas (+x), por lo que  $\vec{E}$  tendrá solo componente en Y y  $\vec{B}$  solamente en Z. Tanto  $E_Y$  como  $B_Z$  dependen de "x" y de "t", o sea del espacio y del tiempo<sup>1</sup>. El gráfico de una onda electromagnética se puede observar en la figura 1.4.

En cualquier instante cada campo es uniforme sobre cualquier plano perpendicular a la dirección de propagación, como se ilustra en la figura 1.5.

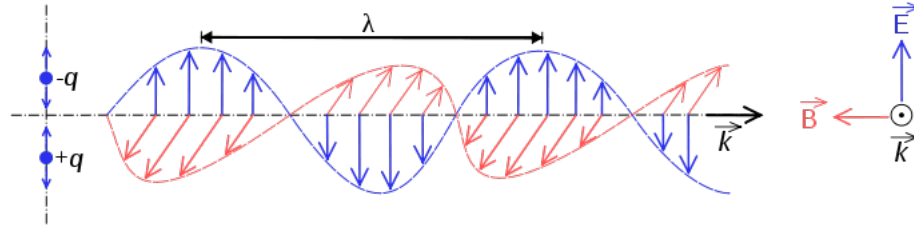


Figura 1.4: Onda electromagnética

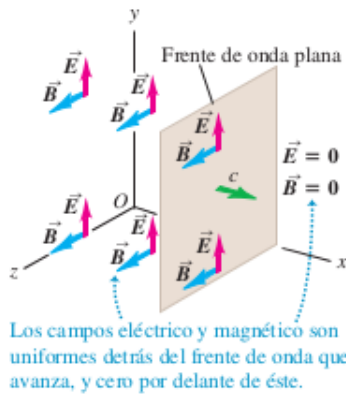


Figura 1.5: Onda plana

Resumiendo las ecuaciones de Maxwell y teniendo en cuenta que el análisis se hará para ondas planas que se propagan en el vacío, donde no hay cargas libres ni corrientes de conducción:

<sup>1</sup>Al campo eléctrico se lo llama  $E_Y$  porque vibra en el plano Y, pero NO es función de y

$$\oint \frac{B_Z}{\mu_o} dl = \int_s \epsilon_o \frac{\partial E_Y}{\partial t} ds \quad (1.10)$$

$$\oint E_Y dl = - \int_s \frac{\partial B_Z}{\partial t} ds \quad (1.11)$$

$$\oint \epsilon_o E_Y ds = 0 \quad (1.12)$$

$$\int B_Z ds = 0 \quad (1.13)$$

Las ecuaciones 1.12 y 1.13 se satisfacen automáticamente porque el análisis se hace en el vacío.

Para la ecuación 1.11, consideraremos una superficie paralela al plano XY y  $B_Z$  es perpendicular a dicha superficie, el elemento rectangular de superficie tendrá dimensiones  $\Delta X$  y  $\Delta Y$ , tal como se ilustra en la figura 1.6.

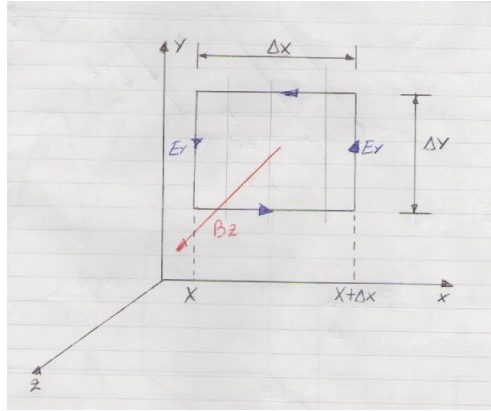


Figura 1.6: Análisis de la segunda ecuación de Maxwell para ondas planas

Vamos a resolver la ecuación 1.11, comenzando por el primer miembro

$$\oint E_Y dl = [E_Y(x + \Delta x) - E_Y(x)] \Delta Y \quad (1.14)$$

los dos términos restantes que cierran el contorno de integración no los ponemos, porque son nulos debido a que como el campo eléctrico no es función de X, ambos puntos tendrán el mismo valor absoluto pero distinto signo debido al sentido de integración.

Del segundo miembro de la ecuación 1.11

$$\int_s - \frac{\partial B_Z}{\partial t} ds = - \frac{\partial B_Z}{\partial t} \int ds = - \frac{\partial B_Z}{\partial t} \Delta X \Delta Y \quad (1.15)$$

igualando las ecuaciones 1.14 y 1.15

$$E_Y(x + \Delta x) - E_Y(x) = -\frac{\partial B_Z}{\partial t} \Delta X$$

$$\frac{E_Y(x + \Delta x) - E_Y(x)}{\Delta X} = -\frac{\partial B_Z}{\partial t}$$

tomando límite en ambos miembros

$$\lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{E_Y(x + \Delta x) - E_Y(x)}{\Delta X} = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} -\frac{\partial B_Z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_Y}{\partial x} = -\frac{\partial B_Z}{\partial t} \quad (1.16)$$

Para el análisis de la primera ecuación de Maxwell, resolveremos 1.10 de manera análoga a la anterior, guiados por el gráfico de la figura 1.7.

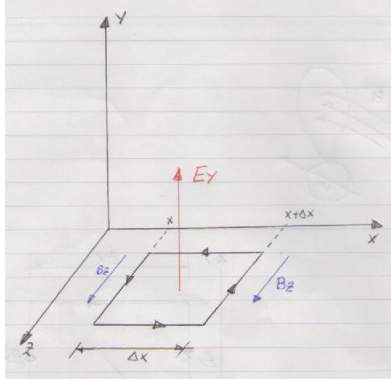


Figura 1.7: Análisis de la primera ecuación de Maxwell para ondas planas

Analizando el primer miembro

$$\oint \frac{B_Z}{\mu_0} dl = \frac{1}{\mu_0} [B_z(x) - B_z(x + \Delta x)] \Delta Z$$

$$\oint \frac{B_Z}{\mu_0} dl = \frac{-1}{\mu_0} [B_z(x + \Delta x) - B_z(x)] \Delta Z \quad (1.17)$$

y el segundo miembro

$$\int_s \epsilon_0 \frac{\partial E_Y}{\partial t} ds = \epsilon_0 \frac{\partial E_Y}{\partial t} \Delta X \Delta Z \quad (1.18)$$

igualando 1.17 y 1.18

$$-\frac{1}{\mu_0} [B_z(x + \Delta x) - B_z(x)] = \epsilon_0 \frac{\partial E_Y}{\partial t} \Delta X$$

tomando límite en ambos miembros

$$\lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{B_Z(x + \Delta x) - B_Z(x)}{\Delta X} = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} -\mu_o \epsilon_o \frac{\partial E_Y}{\partial t}$$

finalmente

$$\frac{\partial B_Z}{\partial x} = -\mu_o \epsilon_o \frac{\partial E_Y}{\partial t} \quad (1.19)$$

las ecuaciones 1.19 y 1.16 son dos ecuaciones simultáneas que relacionan la derivada de un campo con respecto a X, con la derivada del otro campo respecto del tiempo.

Ahora veamos como estas ecuaciones satisfacen la ecuación de onda para verificar la hipótesis de la cual partimos.

Derivemos a 1.16 respecto de X y a 1.19 respecto del tiempo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_Y}{\partial x^2} &= \epsilon_o \mu_o \frac{\partial^2 B_Z}{\partial x \partial t} \\ \frac{\partial^2 B_Z}{\partial x \partial t} &= -\epsilon_o \mu_o \frac{\partial^2 E_Y}{\partial t^2} \end{aligned}$$

por propiedad transitiva se llega

$$\frac{\partial^2 E_Y}{\partial x^2} = \epsilon_o \mu_o \frac{\partial^2 E_Y}{\partial t^2} \quad (1.20)$$

pero sabemos que la ecuación de onda es

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (1.21)$$

cuya solución son las funciones de onda. Comparando 1.20 y 1.21, observamos que

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \epsilon_o}} = c \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

finalmente

$$\frac{\partial^2 E_Y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_Y}{\partial t^2}$$

que es la ecuación de una onda electromagnética plana; donde  $E_Y$  es la función de onda (debido a que es solución a la ecuación de onda).

Como vemos que la hipótesis postulada se cumplió, o sea los campos eléctricos y magnéticos que postulamos, son solución a la ecuación de onda, buscaremos representarlas de una manera amena.

Una solución a este problema, son las funciones conoidales debido a que son periódicas simples, o sea

$$E_Y = E_0 \cos(\omega t - kx) \quad (1.22)$$

donde  $k$  es la constante de velocidad.

Pero recordando la relación 1.16

$$\frac{\partial E_Y}{\partial x} = -\frac{\partial B_Z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_Y}{\partial x} = k E_0 \sin(\omega t - kx)$$

por lo tanto

$$B_Z = - \int k E_0 \sin(\omega t - kx) dt$$

$$B_Z = \frac{k E_0 \cos(\omega t - kx)}{\omega}$$

pero observando la ecuación 1.22

$$B_Z = \frac{k E_Y}{\omega} \quad (1.23)$$

pero como  $k$  es la constante de velocidad

$$\frac{k}{\omega} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{1}{2\pi f} = \frac{1}{\lambda f} = \frac{1}{C}$$

aplicando esta sustitución en la ecuación 1.23

$$C = \frac{E_Y}{B_Z}$$

al dividir la componente del campo eléctrico, por la componente del campo magnético de una onda electromagnética, se obtiene la velocidad de la luz.

## 4. Energía de las ondas electromagnéticas y vector de Poynting

Las ondas electromagnéticas pueden transportar energía y cantidad de movimiento.

Por conocimientos electromagnéticos no contemplados aquí, se sabe que la densidad de energía eléctrica y magnética por unidad de volumen, están representadas por las ecuaciones 1.24 y 1.25 respectivamente.



$$\omega_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (1.24)$$

$$\omega_B = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \quad (1.25)$$

luego, la densidad de energía electromagnética por unidad de volumen, transportada por una onda electromagnética, será

$$\omega = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) \quad (1.26)$$

si consideramos un pequeño cubo de volumen elemental, de dimensiones  $\Delta X \Delta Y \Delta Z$  como se muestra en la figura 1.8 ; la energía dentro de este cubo es

$$\omega = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) \Delta X \Delta Y \Delta Z \quad (1.27)$$

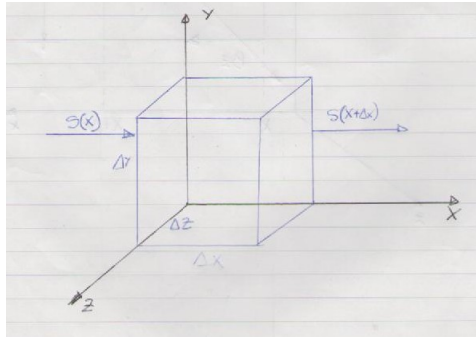


Figura 1.8: Cubo elemental

La variación de energía respecto del tiempo (potencia) es la derivada de la energía respecto del tiempo, o sea la derivada de la ecuación 1.27 respecto del tiempo

$$\frac{d\omega}{dt} = \left( \epsilon_0 E_Y \frac{\partial E_Y}{\partial t} + \mu H_Z \frac{\partial H_Z}{\partial t} \right) \Delta X \Delta Y \Delta Z \quad (1.28)$$

pero recordando lo visto en la ecuación 1.16

$$\frac{\partial E_Y}{\partial x} = -\frac{\partial B_Z}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial H_Z}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial H_Z}{\partial t} = \frac{-1}{\mu_0} \frac{\partial E_Y}{\partial x} \quad (1.29)$$

haciendo el mismo análisis con la ecuación 1.19

$$\frac{\partial B_Z}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_Y}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial E_Y}{\partial t} = \frac{-1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial B_Z}{\partial x} \quad (1.30)$$

reemplazando 1.29 y 1.30 en la ecuación 1.28

$$\frac{d\omega}{dt} = \left[ \epsilon_0 E_Y \left( \frac{-1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial B_Z}{\partial x} \right) + \mu_0 H_Z \left( \frac{-1}{\mu_0} \frac{\partial E_Y}{\partial x} \right) \right] \Delta X \Delta Y \Delta Z$$

$$\frac{d\omega}{dt} = - \left[ E_Y \frac{\partial H_Z}{\partial x} + H_Z \frac{\partial E_Y}{\partial x} \right] \Delta X \Delta Y \Delta Z$$

pero si observamos esta última expresión, se comporta como la derivada de un producto de funciones  $(u.v)' = u'.v + v'.u$ , teniendo en cuenta esto

$$\frac{d\omega}{dt} = - \left[ \frac{\partial(E_Y H_Z)}{\partial x} \Delta X \right] \Delta Y \Delta Z$$

como el incremento  $\Delta X$ , se puede hacer tan pequeño como uno desee, la cantidad dentro del corchete presenta la variación de  $[E_Y; H_Z]$  desde  $X + \Delta X$  hasta  $X$

$$\frac{d\omega}{dt} = - \left[ \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{(E_Y H_Z)_{X+\Delta X} - (E_Y H_Z)_X}{\Delta X} \Delta X \right] \Delta Y \Delta Z$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \left[ \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{(E_Y H_Z)_X - (E_Y H_Z)_{X+\Delta X}}{\Delta X} \Delta X \right] \Delta Y \Delta Z$$

$$\frac{d\omega}{dt} = [(E_Y H_Z)_X - (E_Y H_Z)_{X+\Delta X}] \Delta Y \Delta Z$$

$$\frac{d\omega}{dt} \frac{1}{\Delta Y \Delta Z} = (E_Y H_Z)_X - (E_Y H_Z)_{X+\Delta X} = S_x = E_Y H_Z$$

o sea que la rapidez neta de la variación de energía, por unidad de superficie (potencia por unidad de área) dentro del elemento de volumen depende de la diferencia de los valores  $E_Y$  y  $H_Z$  en las caras izquierda y derecha, y del área  $\Delta Y \Delta Z$  de estas caras; esto sugiere que la variación de  $E_Y$  y  $H_Z$  es la rapidez de variación de flujo de energía por unidad de área.

Vectorialmente:

$$\vec{S}_x = \vec{E}_Y \times \vec{H}_Z \text{ Watt/m}^2$$

A resumidas cuentas, por un lado el vector de Poynting es la potencia por unidad de área transmitida por la onda electromagnética; o sea la energía transmitida por la electromagnética por unidad de tiempo y por unidad de área.

Por otro lado, el vector de Poynting también expresa el sentido de propagación de la onda electromagnética, figura 1.9 .

**Regla de la mano derecha para una onda electromagnética**

- ① Apunte el pulgar de su mano derecha en la dirección de propagación de la onda.
- ② Imagine que hace girar  $90^\circ$  el campo vectorial  $\vec{E}$  en el sentido en que se doblan sus dedos.

Ésa es la dirección del campo  $\vec{B}$ .

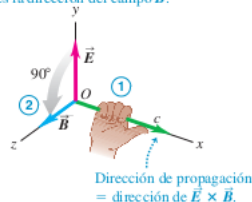


Figura 1.9: Avance de una onda electromagnética

Para una onda plana, el vector  $\vec{S}_x$  está dado por (consideramos el producto cruz resuelto, por eso se saca la notación vectorial):

$$S_x = E_0 \cos(\omega t - kx) \frac{E_0}{\mu_0 C} \cos(\omega t - kx)$$

$$S_x = \frac{E_0^2}{\mu_0 C} \cos^2(\omega t - kx) \quad (1.31)$$

y haciendo un cambio de variables en la ecuación 1.32

$$\sqrt{S_x} = A \cos(\alpha)$$

$$S_x = A^2 \cos^2(\alpha)$$

donde  $\alpha = \omega t - kx$ ,  $A^2 = \frac{E_0^2}{\mu_0 C}$ ,  $A = \frac{E_0}{\sqrt{\mu_0 C}}$   
pero analizando la siguiente relación

$$\frac{1}{\mu_0 C} = \frac{1}{\mu_0 \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_0^2}{\mu_0 \epsilon_0}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$$

y reemplazando este análisis en 1.31

$$S_x = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \quad (1.32)$$

el promedio de la función  $\cos^2(\alpha) = 1/2$

$$S_x(\Delta V) = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\mu_0 C} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \quad (1.33)$$

la gráfica de esto se encuentra en la figura 1.10.

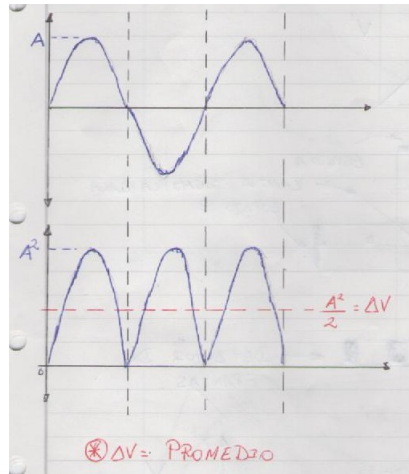


Figura 1.10: Poynting promedio

La formula 1.33 representa el flujo de radiación electromagnética.

Por lo que podemos observar, el flujo de energía por unidad de tiempo y de área es siempre proporcional al cuadrado del campo eléctrico.

Maxwell también predijo que una onda electromagnética plana transporta cantidad de movimiento (o sea  $p = \frac{\omega}{c}$ ), por lo que también existe un flujo de cantidad de movimiento.

## Capítulo 2

# Relatividad

### 1. Introducción

Para comenzar a estudiar y entender la teoría de la relatividad especial, hay un experimento clave, el experimento de Michelson y Morley, que para comprenderlo, comenzaremos con una introducción.

#### 1.1. Analogía de los barquitos

Comenzaremos analizando un río de anchura  $D$  que fluye con velocidad constante  $v$ , tal como se ilustra en la figura 2.1.

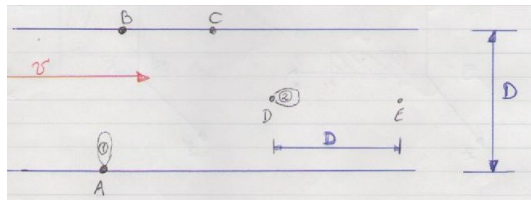


Figura 2.1: Analogía de los barcos

El bote número uno, sale del punto A, va hacia el punto B y regresa.

El bote número dos, en cambio, recorre la misma distancia que el bote uno, pero aguas abajo y luego regresa al punto de donde partió.

Si analizamos al bote uno, en principio, su velocidad tiene sólo una componente perpendicular a la dirección del río, pero debido a la velocidad propia del río, deberá corregir su dirección, sino en lugar de ir a parar al punto B irá a parar al punto C; entonces debe orientarse un poco aguas arriba, para contrarrestar el efecto de la corriente del río y llegar a su destino original, el punto B.

Realizando un análisis gráfico de las componentes de la velocidad se obtiene la figura 2.2 .

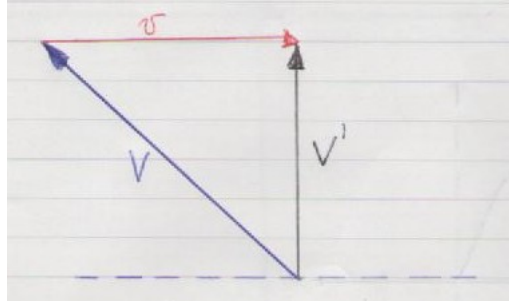


Figura 2.2: Componentes de velocidad

$v$  : Velocidad del río, respecto a la costa

$V$  : Velocidad propia de la embarcación, respecto de las aguas del río

$V'$  : Velocidad de la embarcación respecto a la costa

Se observa que  $V^2 = v^2 + V'^2$ , la velocidad real con la que el bote cruza el río será:

$$V' = \sqrt{V^2 - v^2}$$

$$V' = V \sqrt{1 - \frac{v^2}{V^2}}$$

y el tiempo necesario para realizar esto, será el definido por

$$t_a = \frac{2D}{V'} = \frac{2D/V}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{V^2}}} \quad (2.1)$$

Analizando ahora el bote número dos, cuando navega aguas abajo, su velocidad relativa a la orilla, es igual a la suma de su propia velocidad ( $V$ ) y la del avance del río ( $v$ ), pero al volver, su velocidad se resta con la velocidad del río, resultando el tiempo

$$t_b = \frac{D}{V + v} + \frac{D}{V - v}$$

sacando denominador común y operando

$$t_b = \frac{2D/V}{1 - \frac{v^2}{V^2}} \quad (2.2)$$

Comparando los denominadores de las expresiones 2.1 y 2.2, y recordando que la raíz cuadrada de un número menor que uno es mayor que el radicando, llegamos a la conclusión de que

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{V^2}} > 1 - \frac{v^2}{V^2}$$

por lo tanto, el tiempo empleado por el barco B ( $t_b$ ), es mayor que el tiempo empleado por el barco A ( $t_a$ ).

$$\Delta t = t_b - t_a = \frac{2D}{V} \left[ \left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right)^{-1/2} \right] \quad (2.3)$$

según el binomio de Newton

$$(1 - x)^n \approx 1 - nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} - \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + \dots \quad (2.4)$$

pero si  $x \ll 1$ , la expresión 2.4 se reduce a

$$(1 - x)^n \approx 1 - nx$$

aplicando este análisis a la ecuación 2.3

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{2D}{V} \left\{ \left[ \left(1 - (-1)\frac{v^2}{V^2}\right) \right] - \left[ \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{v^2}{V^2}\right) \right] \right\} \\ \Delta t &= \frac{2D}{V} \left( 1 + \frac{v^2}{V^2} - \frac{v^2}{2V^2} - 1 \right) \\ \Delta t &= \frac{2D}{V} \left( \frac{v^2}{2V^2} \right) \\ \Delta t &= \frac{Dv^2}{V^3} \end{aligned} \quad (2.5)$$

La ecuación 2.5 es aplicable a cualquier móvil, excepto como ya se demostrará, para la luz.

Si hacemos el cociente entre las ecuaciones 2.1 y 2.2, se obtiene una importante relación

$$\frac{t_a}{t_b} = \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right)}$$

si conocemos la velocidad común  $V$  de ambos botes, podemos calcular la velocidad  $v$  del río.

## 2. Experimento de Michelson y Morley (1879)

Este experimento es crucial para comprender la teoría de la relatividad especial de Einstein y tiene una estrecha relación con la analogía de los barcos hecha en la sección anterior.

Este experimento fue ideado con el objetivo de hallar la existencia de un marco de referencia absoluto; o sea totalmente en reposo.

A dicho marco de referencia se lo había llamado éter, el cual debía tener ciertas propiedades, como estar absolutamente en reposo, ser el sustento de las ondas electromagnéticas, invadir y penetrar todo, etc.

Como este experimento demostró que no existe el éter, dio lugar a que Einstein llegara a la conclusión de que todo es relativo, respecto a los sistemas de referencia desde los cuales se realizan las mediciones.

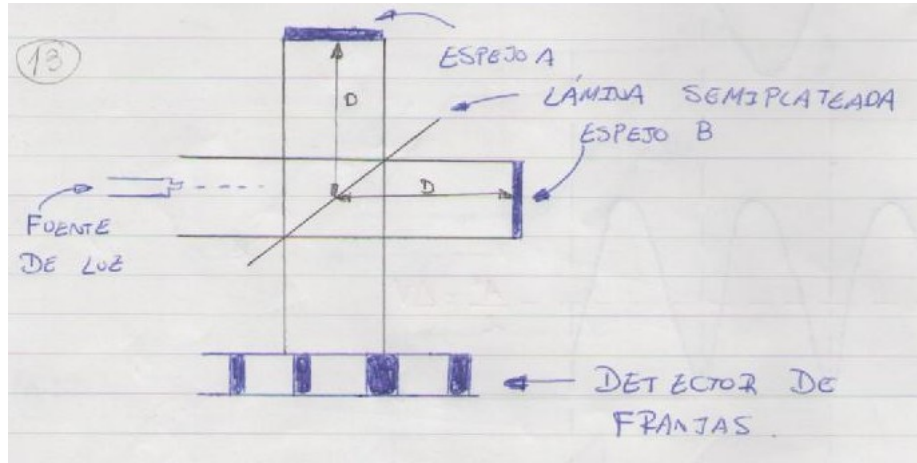


Figura 2.3: Experimento de Michelson y Morley

$V_T$  es la velocidad de la tierra respecto del éter, entonces la luz en el espejo B es paralela a  $V_T$  por lo tanto coincide con el sentido que tiene la tierra respecto del éter.

La analogía con los barcos, es que los barcos representan la luz y el movimiento del río, representa a la traslación de la tierra, o sea

$$V \rightarrow C$$

$$v \rightarrow V_T$$

recordando las fórmulas de la analogía de los barquitos

$$t_a = \frac{2D}{V'} = \frac{2D/C}{\sqrt{1 - \frac{V_T^2}{C^2}}}$$

$$t_b = \frac{2D/V}{1 - \frac{V_T^2}{C^2}}$$

$$\Delta t = t_b - t_a = \frac{2D}{C} \left[ \left(1 - \frac{V_T^2}{C^2}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{V_T^2}{C^2}\right)^{-1/2} \right]$$

conociendo la velocidad de traslación de la tierra  $V_T = 3 \times 10^4 \text{ m/s}$ , entonces



$$x = \frac{V_T^2}{C^2} = \frac{(3 \times 10^4 \text{ m/s})^2}{(3 \times 10^8 \text{ m/s})^2} \ll 1$$

teniendo esto en cuenta y aplicando el binomio de Newton

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{2D}{V} \left( 1 + \frac{V_T^2}{C^2} - 1 - \frac{V_T^2}{2C^2} \right) \\ \Delta t &= \frac{DV_T^2}{C^3} \end{aligned} \quad (2.6)$$

El resultado de la variación de tiempo de la ecuación 2.6 es completamente teórico.

Al realizar las experiencias, obtuvieron que  $\Delta t = 0$  ya que no existían en ese momento instrumentos precisos para medir tan pequeña magnitud, entonces tenían la duda si  $\Delta t$  era efectivamente cero o era indetectable por los instrumentos, de manera que introdujeron un método indirecto de medición por interferometría.

Como es imposible poner al espejo A a  $90^\circ$  respecto de B, en la pantalla se observaron franjas de interferencia, debido a la diferencia de recorrido entre el haz de luz que viene del espejo A y el que viene del espejo B.

Este paso que sigue, es muy importante para la realización del experimento, se gira todo el dispositivo  $90^\circ$ , y se invierten los roles, por ende el espejo B termina estando donde estaba el espejo A.

Entonces la expresión encontrada antes para  $\Delta t = t_b - t_a$ , ahora es reemplazada por  $-\Delta t = t_a - t_b$ , por lo que al girar  $90^\circ$ , existen  $2\Delta t$  y las franjas de interferencia se van superponiendo al momento de la rotación.

Realizando un análisis cinemático llegamos a la ecuación 2.7 y por un análisis interferométrico a la 2.8.

$$\Delta x = 2C\Delta t \quad (2.7)$$

$$\Delta x = \Delta n\lambda \quad (2.8)$$

Igualando la ecuación 2.7 con la 2.8

$$\Delta n\lambda = 2C\Delta t$$

$$\Delta n = \frac{2C\Delta t}{\lambda}$$

pero el  $\Delta t$  es el de la expresión 2.6

$$\Delta n = \frac{2CDV_T^2}{\lambda C^3} = \frac{2DV_T^2}{\lambda C^2}$$

conociendo los datos utilizados en el experimento  $D = 10\text{m}$  y  $\lambda = 5000\text{\AA}$ , podemos calcular el  $\Delta n$ , resultando

$$\Delta n = 0,4 \text{ franjas!}$$

Este resultado también es un resultado teórico, pero al llevarlo a la práctica no se observaron corrimientos, o sea que el valor de  $\Delta n = 0$ , lo cual mostraba que  $\Delta t = 0$ .

Para que todo esto ocurra, la única manera es que  $V_T = 0$ , lo que no indica que la tierra no se mueva, sino que el éter y la tierra se mueven a la misma velocidad lo cual es un absurdo que demuestra la inexistencia del éter inicialmente considerado como marco de referencia absolutamente en reposo, o sea que si el experimento se hace en otro planeta el éter viajará a la velocidad de traslación de ese planeta.

El resultado negativo de este experimento, o sea la inexistencia de un marco de referencia absoluto, resultó positivamente para el análisis de Einstein.

### 3. Postulados de la teoría de la relatividad especial de Einstein

- Todas las leyes físicas pueden ser expresadas de la misma forma en todos los marcos de referencia que se mueven, los unos respecto de los otros con velocidad constante.
- La velocidad de la luz es la misma para todos los observadores, independientemente de sus estados de movimiento.

### 4. Transformaciones de Galileo (Clásicas)

Supongamos que estamos en un sistema  $S$ , y las coordenadas de un evento que ocurre en el tiempo son  $x, y, z$ .

Un observador situado en un sistema de referencia diferente  $S'$ , el cual se mueve con velocidad constante respecto de  $S$ , encontrará que el mismo evento ocurrirá en el tiempo  $t'$  y coordenadas  $x', y', z'$ .

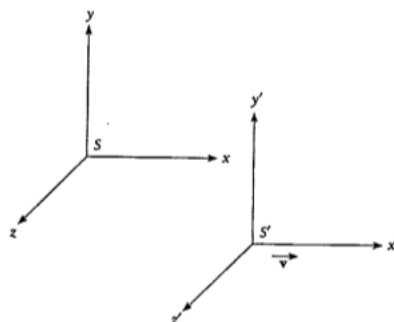


Figura 2.4: Transformación de Galileo

Para la relatividad clásica,  $t = t'$  por lo que la relación entre ambos marcos de referencia serán las expresadas en la tabla 2.1 .

Transformación directa	Transformación inversa
$x = x' + vt'$	$x' = x - vt$
$y = y'$	$y' = y$
$z = z'$	$z' = z$
$t = t'$	$t' = t$

Cuadro 2.1: Tabla de transformadas

Para convertir las componentes de velocidad medidas en  $S$  a sus respectivas equivalentes en  $S'$  , derivemos a cada una de las transformaciones directas, respecto del tiempo

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = v_x - v$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = v_y$$

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} = v_z$$

aunque estas ecuaciones parecen tener sentido, violan los principios postulados por Einstein:

- El primer postulado exige idénticas ecuaciones en  $S$  y  $S'$  , pero las leyes del electromagnetismo adoptan formas muy distintas aplicando estas transformaciones.
- El segundo postulado exige el mismo valor para la velocidad de la luz  $C$  , tanto en  $S$  como en  $S'$  . Sin embargo, si la velocidad de la luz medida en el sistema  $S$  es  $C$  , en el sistema  $S'$  será  $C' = C - v$ .

Es evidente que para satisfacer los postulados de la relatividad de Einstein, se necesitan otro tipo de transformaciones.

## 5. Transformación de Lorentz

Lorentz parte de una suposición razonable, respecto de la relación correcta entre  $x$  y  $x'$

$$x' = k(x - vt) \quad (2.9)$$

donde  $k$  es un factor de proporcionalidad que no depende ni de  $x$ , ni de  $t$  sólo de  $v$ .

Esta consideración es razonable debido a que:

- Es lineal en  $x$  y  $x'$ , de manera que un único evento en el sistema  $S$ , es idéntico a uno que ocurre en  $S'$ .
- Puede reducirse a la ecuación de la mecánica clásica. si  $k = 1$ .
- Proporciona un análisis simple.

Según el postulado de Einstein, las ecuaciones deben tener la misma forma tanto en  $S$  como en  $S'$ , si cambiamos el signo de  $v$  (diferencia de sentido), obtenemos a  $x$  en función de  $x'$  y  $t'$ .

$$x = k(x' + vt') \quad (2.10)$$

sin embargo recordemos que  $t$  y  $t'$  no son iguales.

Reemplazando la ecuación 2.9 en 2.10 :

$$x = k [k(x - vt) + vt'] = k^2x - k^2vt + kvt'$$

$$x = k^2x - k^2vt + kvt'$$

$$x(1 - k^2) = -k^2vt + kvt'$$

$$t' = \frac{x(1 - k^2)}{kv} + \frac{kvt}{kv}$$

$$t' = kt + \frac{x(1 - k^2)}{kv} \quad (2.11)$$

pero según el segundo postulado de Einstein, podemos calcular el valor de  $k$ .

Supongamos el instante  $t = t' = 0$ , los orígenes de los sistemas de  $S$  y  $S'$  están en el mismo lugar y supongamos que en este instante se enciende una bengala y ambos observadores tienen instrumentos capaces de medir la velocidad de la luz, entonces tenemos

$$x' = Ct' \quad (2.12)$$

$$x = Ct \quad (2.13)$$

reemplazando las ecuaciones 2.9 y 2.11 en la 2.12

$$k(x - vt) = Ckt + \frac{Cx(1 - k^2)}{kv}$$

$$kx - kvt = Ckt + Cx \left( \frac{1 - k^2}{kv} \right)$$

$$x \left[ k - C \left( \frac{1 - k^2}{kv} \right) \right] = Ckt + kvt$$

multiplicando y dividiendo por C el segundo término del segundo miembro

$$x \left[ k - C \left( \frac{1 - k^2}{kv} \right) \right] = Ckt + kvt \frac{C}{C}$$

$$x \left[ k - C \left( \frac{1 - k^2}{kv} \right) \right] = Ct \left( \frac{kv}{C} + k \right)$$

$$x = Ct \left[ \frac{k + \frac{kv}{C}}{k - C \left( \frac{1 - k^2}{kv} \right)} \right]$$

pero según la ecuación 2.13  $x = Ct$

$$k - C \left( \frac{1 - k^2}{kv} \right) = k + \frac{kv}{C}$$

$$\frac{kv}{C} = -C \left( \frac{1 - k^2}{kv} \right)$$

$$\frac{k^2 v^2}{C^2} = -(1 - k^2)$$

$$\frac{k^2 v^2}{C^2} = K^2 - 1$$

$$k^2 \left( 1 - \frac{v^2}{C^2} \right) = 1$$

$$k^2 = \frac{1}{\left( 1 - \frac{v^2}{C^2} \right)}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} \quad (2.14)$$

la ecuación 2.14, representa el coeficiente de transformación de Lorentz.

Introduciendo este valor de  $k$  en las ecuaciones 2.9 y 2.10, tenemos una transformación relativista.

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}}$$

debido a que la velocidad de  $S'$  tiene solamente componente en la dirección  $x$ , las demás relaciones serán

$$y = y'$$

$$z = z'$$

y para las transformaciones inversas:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

para el calculo de  $t'$ , partiremos de la ecuación 2.11

$$t' = kt + x \left( \frac{1 - k^2}{kv} \right)$$

$$t' = kt + x \left( \frac{1 - k^2}{kv} \right) \frac{k}{k}$$

$$t' = kt + \frac{kx}{v} \left( \frac{1}{k^2} - 1 \right)$$

$$t' = kt + \frac{kx}{v} \left( 1 + \frac{v^2}{C^2} - 1 \right)$$

$$t' = kt - \frac{kxv}{C^2}$$

$$t' = k \left( t - \frac{xv}{C^2} \right)$$

$$t' = \frac{t - \frac{xv}{C^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}}$$

Si hacemos una análisis similar, se llega a

$$t = \frac{t' + \frac{x'v}{C^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}}$$

Lorentz utilizó estas transformaciones para demostrar que las ecuaciones del electromagnetismo, si se utilizan estas transformaciones, son las mismas en todos los sistemas.

## 6. Espacio relativista (contracción de Lorentz)

Consideremos una barra a lo largo del eje x en el sistema  $S'^1$ , un observador en este sistema determina las coordenadas  $x'_1$  y  $x'_2$ , y por lo tanto la longitud  $L_o$ .

pero según la relación vista en la sección anterior

$$x'_2 = \frac{x_2 + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}}$$

$$x'_1 = \frac{x_1 + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}}$$

$$L_o = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 + vt - x_1 + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}}$$

$$L_o = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}}$$

$$L = L_o \sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}$$

como  $L < L_o$ , será una contracción; si la varilla viaja a grandes velocidades, el observador en  $S'$  la verá más delgada.

## 7. Tiempo relativista (dilatación del tiempo)

La dilatación del tiempo es el fenómeno, por el cual un observador observa que el reloj de otro está marcando el tiempo a un ritmo menor que el que mide su reloj. Esto se suele interpretar normalmente como que el tiempo se ha ralentizado para el otro reloj, pero eso es cierto solamente en el contexto del sistema de referencia del observador. Localmente, el tiempo siempre está pasando al mismo ritmo.

---

<sup>1</sup>Importante: para todos los casos, cuando el observador y lo observado están en el mismo plano, se le agrega el subíndice "0".

$$\begin{aligned}
 t_0 &= t'_2 - t'_1 \\
 t_2 &= \frac{t'_2 + x' \frac{v}{C^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} \\
 t_1 &= \frac{t'_1 + x' \frac{v}{C^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} \\
 t = t_2 - t_1 &= \frac{t'_2 + x' \frac{v}{C^2} - t'_1 - x' \frac{v}{C^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} \\
 t &= \frac{t_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} \tag{2.15}
 \end{aligned}$$

De la ecuación 2.15 , se observa que  $t > t_o$ .

El suceso dura más para el observador que se encuentra en el sistema a velocidad relativa constante  $v$  donde no ocurre el evento, por ende el suceso dura menos para el que se encuentra en el sistema a velocidad relativa constante  $v$  donde ocurre el suceso.

## 8. Masa relativista

Comenzamos analizando un choque elástico entre dos partículas A y B, visto por observadores situados en los sistemas  $S$  y  $S'$  que se encuentran en movimiento relativo uniforme.

Los sistemas  $S$  y  $S'$  están orientados según la figura 2.5 y  $S'$  se mueve en el sentido  $+x$  con respecto a  $S$  a la velocidad  $v$ .

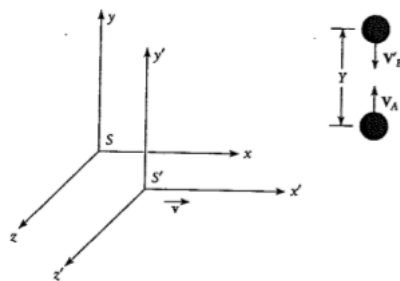


Figura 2.5: Masa relativista

Antes del choque, la partícula A se encuentra en reposo en el sistema  $S$  análogamente la partícula B en el sistema  $S'$ .



En el mismo instante  $A$  se lanza en el sentido  $+y$  a velocidad  $V_A$ , mientras que  $B$  se lanza en el sentido  $-y'$  a la velocidad  $V_B'$  donde

$$V_A = V_B'$$

De aquí que el comportamiento de  $A$ , visto desde  $S$ , sea exactamente el mismo que el de  $B$  visto desde  $S'$ . Cuando las partículas chocan,  $A$  rebota en el sentido  $-y$  a la velocidad  $V_A$ , mientras que  $B$  rebota en el sentido  $+y'$  a la velocidad  $V_B'$ . Si las partículas se lanzan desde posiciones separadas por una distancia  $Y$ , un observador en  $S$  le parecerá que el choque ocurre en  $y = 1/2Y$ , y a uno en  $S'$  le parecerá que ocurre en  $y' = 1/2Y$ . El tiempo  $t_0$  que invierte  $A$  en el recorrido de ida y vuelta, medido en el sistema  $S$ , es, por lo tanto

$$t_0 = \frac{Y}{V_A} \quad (2.16)$$

y es el mismo para  $B$  en  $S'$

$$t_0 = \frac{Y}{V_B'}$$

si se conserva el momentum en el sistema  $S$ , entonces podemos decir

$$m_A V_A = m_b V_b \quad (2.17)$$

donde  $m_a$  y  $m_b$  son las masas de  $A$  y  $B$ ,  $V_A$  y  $V_B$  sus velocidades medidas en el sistema  $S$ . En  $S$ , la velocidad  $V_B$  tiene por valor

$$V_B = \frac{Y}{t} \quad (2.18)$$

donde  $t$  es el tiempo que tarda  $B$  en efectuar su recorrido de ida y vuelta medido en  $S$ . Sin embargo, en  $S'$ , el recorrido de  $B$  requiere el tiempo  $t_0$ , donde

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} \quad (2.19)$$

Aunque los observadores en ambos sistemas ven el mismo evento, discrepan en cuanto al intervalo de tiempo que la partícula lanzada desde el otro sistema requiere para efectuar el choque y volver.

Sustituyendo 2.19 en la ecuación 2.18

$$V_B = \frac{Y \sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}}{t_0}$$

Si sustituimos las expresiones de  $V_A$  y  $V_B$  en la ecuación 2.17

$$m_a = m_b \sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}} \quad (2.20)$$

Según nuestra hipótesis original,  $A$  y  $B$  eran idénticas cuando se encontraban en reposo con respecto a un observador; por tanto, la diferencia entre  $m_a$  y  $m_b$  significa que las mediciones de masa, así como las de espacio y tiempo, dependen de la velocidad relativa entre el observador y lo que él observa.

Para obtener una fórmula que exprese la masa  $m$  de un cuerpo medida mientras está en movimiento en función de su masa  $m_0$  que se mide cuando está en reposo, es suficiente con considerar que  $V_A$  y  $V_B$  sean muy pequeñas, respecto de  $v$ .

Debido a la diferencia de velocidades, se puede considerar a  $m_a$  en reposo, de manera que

$$m_a = m_0$$

y

$$m_b = m$$

reemplazando esto en la ecuación 2.20

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} \quad (2.21)$$

La ecuación 2.21 representa a una sola masa (en estado de reposo y en estado de movimiento) vistas por un mismo observador.

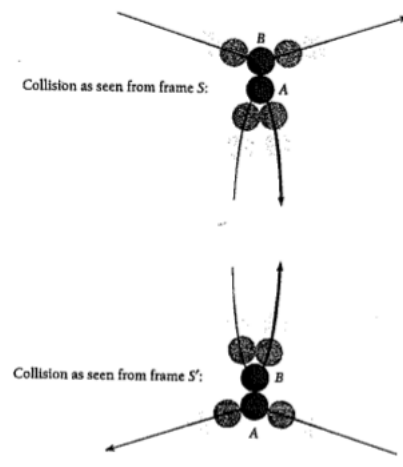


Figura 2.6:

La masa en movimiento aumenta, es decir  $m > m_0$ .

Como la masa aumenta y el volumen disminuye en la dirección del movimiento, por doble motivo la densidad aumenta.

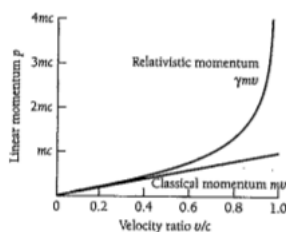


Figura 2.7:

## 9. Energía relativista

La relación más célebre de que Einstein obtuvo de los postulados de la relatividad especial se refiere a la masa y la energía.

Supongamos que a un cuerpo le aplicamos una fuerza constante  $F$ , de tal manera que se desplace una distancia  $s$ , adquiriendo una energía cinética  $T$

$$T = \int_0^S F.ds \quad (2.22)$$

donde  $F$  es la componente de la fuerza aplicada en la dirección del desplazamiento  $ds$  y  $s$  es la distancia sobre la que actúa la fuerza. Utilizando la forma relativística de la segunda ley del movimiento, podemos decir

$$F = \frac{d(mv)}{dt}$$

por lo tanto la expresión 2.22 se convierte en

$$T = \int_0^S \frac{d(mv)}{dt} ds \quad (2.23)$$

pero podemos reemplazar  $v = \frac{ds}{dt}$ , de manera que la expresión 2.23 resulta

$$T = \int_0^{mv} v d(mv)$$

y teniendo en cuenta lo visto en la sección 8, podemos expresar

$$T = \int_0^v v d \left( \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} \right) \quad (2.24)$$

integrando esta última expresión por partes<sup>2</sup> haciendo

---

<sup>2</sup>  $\int x dy = xy - \int y dx$

$$x = v$$

y

$$dy = \frac{dm_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}}$$

de manera que

$$dx = dv \quad y = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}}$$

reemplazando esto en la ecuación 2.24 resulta

$$T = \frac{v^2 m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} - \int_0^v \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} dv \quad (2.25)$$

el segundo término de la expresión 2.25 lo podemos resolver haciendo una sustitución

$$u = 1 - \frac{v^2}{C^2} \quad du = \frac{-2v}{C^2} dv \quad \therefore \quad dv = \frac{du C^2}{-2v}$$

$$\int \frac{m_0 v}{\sqrt{u}} \frac{C^2}{-2v} du = \frac{m_0 C^2}{-2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = m_0 C^2 \sqrt{u} \quad (2.26)$$

de manera que la expresión 2.25 resulta

$$T = \frac{v^2 m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} + m_0 C^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}} \Big|_0^v$$

$$T = \frac{v^2 m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} + m_0 C^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}} \Big|_0^v$$

$$T = \frac{v^2 m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} + m_0 C^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}} - m_0 C^2$$

$$T = \frac{v^2 m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} + m_0 C^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}} - m_0 C^2$$

$$T = \frac{v^2 m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} + m_0 C^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} - m_0 C^2$$

$$T = \frac{v^2 m_0 + m_0 C^2 \left(1 - \frac{v^2}{C^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} - m_0 C^2$$

$$T = \frac{v^2 m_0 + m_0 C^2 - m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} - m_0 C^2$$

$$T = \frac{m_0 C^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} - m_0 C^2$$

según la relatividad de la masa

$$T = mC^2 - m_0C^2 = (m - m_0)C^2 \quad (2.27)$$

La ecuación 2.27 expresa que la energía cinética de un cuerpo es igual al incremento de su masa como consecuencia de su movimiento relativo multiplicado por el cuadrado de la velocidad de luz.

El término  $E = mc^2$  muestra que un cuerpo en movimiento tiene energía, y el término  $E_0 = m_0C^2$  expresa que un cuerpo *en reposo* tiene energía (aparte de la potencial); o sea que podemos decir que un cuerpo tiene energía por el sólo hecho de tener masa.

Podemos demostrar que para velocidades pequeñas respecto de  $C$ , la fórmula 2.27 se reduce en la fórmula de energía cinética clásica

$$T = mC^2 - m_0C^2 = \frac{m_0C^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} - m_0C^2$$

$$T = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{C^2}\right)^{-1/2} - m_0C^2 \quad (2.28)$$

por binomio de Newton se tiene  $(1 - nx)^n \approx 1 - nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \dots$

si se cumple que  $(1 - nx)^n \approx 1 - nx$

o sea si  $v \ll C$

$$\frac{v^2}{C^2} \ll 1$$

y podemos aplicar el binomio

$$T = m_0C^2 \left[1 - (-1/2)\frac{v^2}{C^2}\right] - m_0C^2$$

$$T = m_0C^2 + \frac{m_0C^2v^2}{2C^2} - m_0C^2$$

$$T = \frac{1}{2}m_0v^2 \quad (2.29)$$

la ecuación 2.29 es la expresión de la energía cinética de la física clásica, pero la energía total de una partícula en movimiento, será

$$E = \frac{1}{2}m_0v^2 + m_0C^2$$

## Capítulo 3

# Cuantificación de la energía

### 1. Radiación térmica

#### 1.1. Introducción

La temperatura de un cuerpo es su estado térmico considerado con referencia a su poder de comunicar calor a otros cuerpos (es el potencial impulsor del calor).

El calor es energía en tránsito de un cuerpo a otro, debido a una diferencia de temperatura.

La transmisión del calor se efectúa de tres formas, conducción, convección y radiación.

- Conducción: Es un proceso lento a través de la actividad molecular de una sustancia; o sea vibraciones o choques a escala molecular.
- Convección: Es un proceso más rápido que implica el movimiento de la propia materia. Por ejemplo, transmitir el calor de una estufa por medio de un ventilador
- Radiación: Se produce a la misma manera y a la misma velocidad que la luz, o sea que el calor irradiado se concibe como una onda electromagnética. Todos los cuerpos irradian calor (energía térmica) y un cuerpo caliente emite más calor que el que recibe, en cambio un cuerpo frío recibe más calor del que emite, el resultado es que el cuerpo caliente se enfría si hay contacto térmico. Como otras ondas, las de radiación térmica al chocar con un cuerpo, algunas serán reflejadas, absorbidas o transmitidas.

Siempre se cumple la siguiente relación

$$\rho + \alpha + \tau = 1 \quad (3.1)$$

- $\rho$  coeficiente de reflectividad

- $\alpha$  coeficiente de absorptividad

$-\tau$  coeficiente de transmisividad

En general los cuerpos que son opacos a la luz, también lo son para el calor.

El fracaso de la física clásica se puso de manifiesto cuando no fue capaz de explicar los espectros atómicos de los elementos ni los rayos X.

La interpretación de dichos fenómenos atómicos requería una teoría física fundamentalmente distinta, Niels Bohr (dinamarqués) marcó el camino para la teoría moderna de la mecánica cuántica y se fundó en la teoría cuántica de la radiación térmica introducida por Max Planck en 1901 y aplicada a la luz por Einstein en 1903.

*La teoría cuántica de Planck es la base de la actual teoría atómica y nuclear, y apareció debido al fracaso de la física clásica para explicar la radiación térmica, más concretamente la física clásica no podría explicar la dependencia entre la energía radiante, con la longitud de onda de dicha radiación y la temperatura.*

*Así apareció el concepto de cuantos, paquetes o corpúsculos discretos de energía, o la discontinuidad en todos los problemas de emisión, absorción o transmisión de energía electromagnética, y que tuvo su inicio con el estudio de la radiación térmica.*

## 1.2. Teoría clásica de la radiación térmica

La radiación emitida en forma de calor son ondas electromagnéticas no visibles, llamadas ondas infrarrojas o térmicas entre aproximadamente  $7000\text{\AA}$  y  $1,000,000\text{\AA}$ .

Se observó experimentalmente que para cualquier temperatura, la energía térmica se distribuye en un espectro continuo de longitudes de onda, variando dicha distribución con la temperatura.

A bajas temperaturas ( $T$ ), la radiación térmica tiene longitudes de onda ( $\lambda$ ) relativamente largas (ondas infrarrojas).

Si  $500 \leq T \leq 550^\circ\text{C}$  los cuerpos comienzan a radiar luz visible, lo que indica que la distribución de energía  $W$  en función de la longitud de onda se ha desplazado por acción de la temperatura.

A  $T \geq 3000^\circ\text{C}$ , por ejemplo un filamento incandescente, la radiación contiene longitudes de onda suficientemente cortas para que el cuerpo tenga color rojo-blanco.

El estudio experimental de la radiación provenientes de alambres de platino, realizado por Tyndall permitió a Stefan (1879) llegar a la siguiente fórmula

$$W = \epsilon \sigma T^4 \quad (3.2)$$

$-W$  Flujo de energía radiante

$-\epsilon$  Emisividad  $0 \leq \epsilon \leq 1$

$-\sigma$  Constante de Stefan-Boltzmann  $0,5669 \times 10^{-7} \frac{J}{m^2 \text{seg } K^4}$

$-T$  Temperatura absoluta en grados Kelvin



Boltzmann llegó a lo mismo que Stefan por consideraciones termodinámicas, esta última ecuación también es llamada ley de la cuarta potencia.

A finales del siglo XIX y principios del XX el problema era determinar la relación entre el poder emisor de un cuerpo ( $W$ ) o también llamada emitancia total, con la longitud de onda  $\lambda$  de la radiación emitida cuando varía la temperatura. Para poder realizar esto, se utilizó como tema de estudio la radiación de un cuerpo negro.

### 1.2.1. Ley de Kirchoff de la radiación térmica

Se denomina cuerpo negro a aquel que absorbe todo el calor radiante que incide sobre el (idealmente en la ecuación 3.1 el coeficiente  $\alpha = 1$ ), es decir que absorbe toda la radiación que incide sobre él.

Existe una relación entre el factor de absorción de un cuerpo negro y su poder emisor total; esta relación está dada por la ley de Kirchoff de la radiación térmica, la cual establece que el cociente entre el poder emisor de un cuerpo real y el de un cuerpo negro a la misma temperatura se llama emisividad  $\epsilon$  (del cuerpo real) y es numéricamente igual a su absorptividad  $\alpha$  para la energía radiante proveniente del cuerpo real a la misma temperatura, matemáticamente es la expresión 3.3.

$$\epsilon_1 = \frac{W_1}{W_n} \Big|_{T=cte} = \alpha_1 \quad (3.3)$$

Una aproximación a un ideal de un cuerpo negro sería un recipiente cerrado y vacío en el que sólo hay un orificio donde puede pasar el calor. Una vez dentro, la radiación no tiene probabilidad de salir por el orificio, o sea que este orificio absorbe toda la energía que se le proporciona, o sea cumpliría con las propiedades de un agujero negro, una gráfica de esto se observa en la figura 3.1.

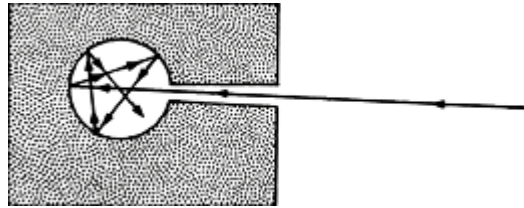


Figura 3.1: Aproximación de un cuerpo negro

De la ecuación 3.3 se observa que un cuerpo real radia menos calor que un cuerpo negro de las mismas dimensiones.

De la ley de Kirchoff, se desprenden dos corolarios muy importantes:

- Un mal reflector es un buen emisor, y un buen reflector es un mal emisor.
- La emisividad no puede ser mayor a uno pues esto es imposible, por la conservación de la energía, por lo que no es posible térmicamente irradiar más energía que un cuerpo negro, en equilibrio.

### 1.2.2. Instrumentos de medición

Como instrumento de medida de la radiación térmica pueden utilizarse:

- Termo-pila: Es un dispositivo experimental consta de una lámpara incandescente que produce la radiación, y una termo-pila de Moll que mide la intensidad de la radiación producida por la lámpara. La radiación incidente sobre la termo-pila provoca el aumento de su temperatura y produce una corriente eléctrica medible, verificándose que la corriente medida depende del poder radiador del elemento emisor, lo que permite medir dicho poder en función de la longitud de onda.
- Bolómetro: Consiste en una cinta metálica muy delgada y ennegrecida provista de conexiones eléctricas; actúa como receptor de las radiaciones y se conecta formando una de las ramas de un puente de Wheatstone; la radiación incidente en la cinta metálica aumenta su temperatura provocando una variación de dicha resistencia, la cual se puede medir mediante el puente de Wheatstone y la ayuda de un amperímetro.
- Radiómetro: Es un tubo de vidrio o cuarzo en el que se ha hecho un vacío parcial; dentro del tubo se encuentra un eje con cuatro paletas muy ligeras. Una cara de las paletas está ennegrecida. Al recibir radiación externa el lado negro de una paleta absorbe más radiación que el lado brillante de la paleta opuesta, lo que hace que la primera paleta se aleje de la fuente de radiación. Dicho efecto produce una rotación constante de las paletas, con una velocidad que depende de la intensidad de la energía radiante.

Estos instrumentos, permitieron a Lammer y Pringsheim en 1899, medir una cantidad  $\mu_\lambda$  llamada densidad de energía monocromática, que representa la energía radiante por unidad de volumen y por unidad de longitud de onda a una temperatura dada, se obtiene una curva como la de la figura 3.2.

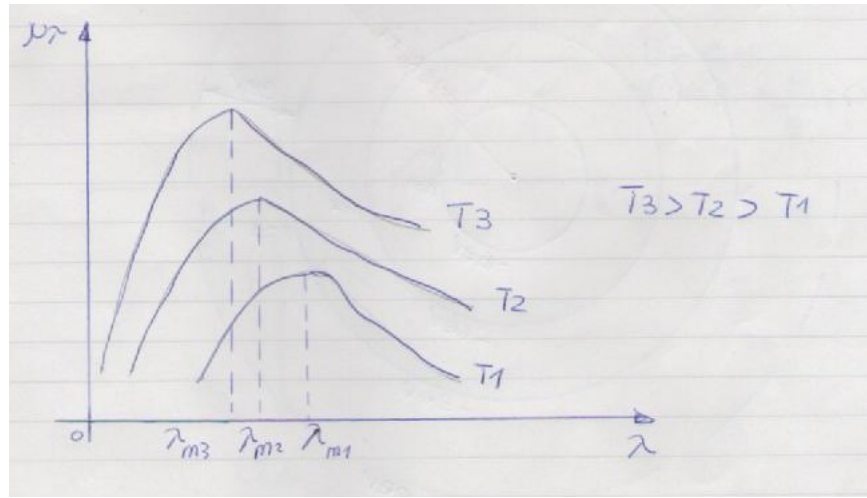


Figura 3.2: Gráfico de la energía radiante por unidad de volumen y por unidad de longitud de onda

- Los máximos están desplazados hacia la izquierda, o sea hacia los  $\lambda$  más pequeños
- $\lambda_m$  es el valor de longitud de onda para el cual, a esa temperatura, la energía radiante por unidad de volumen y por unidad de longitud de onda es máxima.

Lo rescatable de la experiencia realizada por los científicos antes nombrados, es que  $u_\lambda$  crecía hasta un máximo no simétrico y caía.

La densidad de energía se representa también por  $\mu_\nu$ , en lugar de  $\mu_\lambda$ , es decir expresada en función de la frecuencia y no de la longitud de onda.

Por definición,  $\mu_\nu d\nu$  es la energía irradiada por unidad de volumen con frecuencias comprendida entre  $\nu$  y  $\nu + d\nu$ ; mientras que  $\mu_\lambda d\lambda$  es la energía irradiada por unidad de volumen entre las longitudes de onda  $\lambda$  y  $\lambda + d\lambda$ ; como la longitud de onda y la frecuencia se encuentran relacionadas por la expresión

$$\nu\lambda = C. \quad (3.4)$$

Ahora bien  $\mu_\nu d\nu$  debe ser igual a  $\mu_\lambda d\lambda$  debido a que a cada frecuencia le corresponde una longitud de onda, entonces

$$\mu_\nu d\nu = \mu_\lambda d\lambda$$

$$\mu_\nu = \mu_\lambda \left| \frac{d\lambda}{d\nu} \right| \quad (3.5)$$

las barras de valor absoluto, se colocan debido a que la densidad de energía es una magnitud positiva.

Si despejamos  $\lambda$  de la ecuación 3.4

$$\lambda = \frac{C}{\nu}$$

$$\frac{d\lambda}{d\nu} = \frac{C}{\nu^2}$$

pero reemplazando el valor de  $\nu$  de la expresión 3.4

$$\left| \frac{d\lambda}{d\nu} \right| = \frac{\lambda^2}{C}$$

y por lo tanto la ecuación 3.5 se transforma en

$$\mu_\nu = \frac{\lambda^2}{C} \mu_\lambda \left[ \frac{J}{m^3 \frac{1}{seg}} \right] \quad (3.6)$$

obteniéndose el gráfico de la figura 3.3

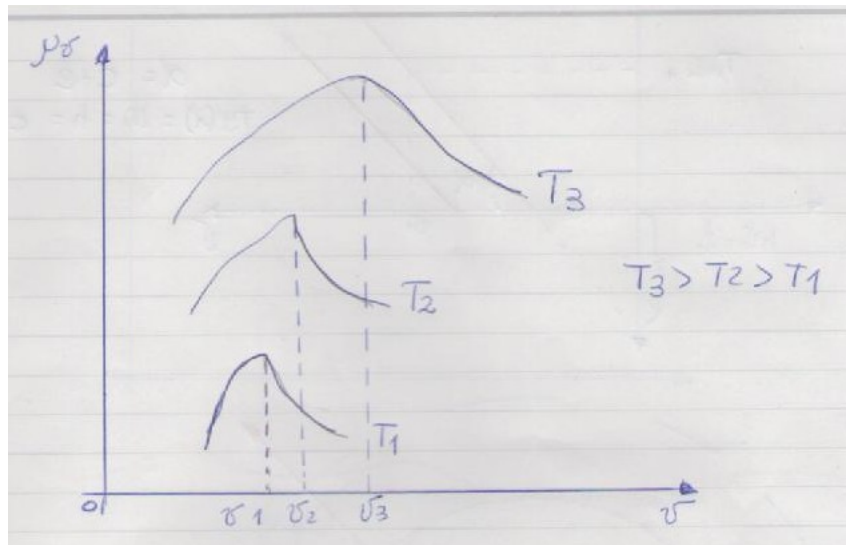


Figura 3.3: Gráfico de la la energía radiante por unidad de volumen por unidad de frecuencia

- Podemos observar, que este gráfico es equivalente al de la figura 3.2 debido a que solo se cambiaron las constantes.
- Ahora los máximos se desplazan hacia la derecha, hacia las mayores frecuencias.

### 1.2.3. Leyes de Wien

De acuerdo con la teoría electromagnética de Maxwell de la luz, la radiación contenida en un recinto cerrado ejerce una presión sobre sus paredes que es proporcional a la densidad de energía de la misma, lo cual autorizó a Wien a tratar la radiación como si fuera una máquina térmica a la que se le podían aplicar los principios de la termodinámica; consideró la radiación de una única longitud de onda  $\lambda$  y analizó los efectos de una expansión adiabática dentro del recinto ocupado por dicha radiación y encontró la siguiente relación entre  $\lambda$  y  $T$ .

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda} \quad (3.7)$$

donde los valores con subíndice son los de antes de la transformación.

De la expresión 3.7 podemos apreciar que

$$\lambda T = \lambda_0 T_0$$

o sea que podemos expresar de manera general

$$\lambda T = cte = K_1 \quad (3.8)$$

Otro resultado importante conseguido por Wien fue determinar que la densidad de energía monocromática y la temperatura antes y después de la transformación adiabática están relacionadas por

$$\frac{\mu_\lambda}{\mu_{\lambda_0}} = \frac{T^5}{T_0^5}$$

por ende

$$\frac{\mu_\lambda}{T^5} = \frac{\mu_{\lambda_0}}{T_0^5}$$

o sea que

$$\begin{aligned} \frac{\mu_\lambda}{\mu_{\lambda_0}} &= \left( \frac{T}{T_0} \right)^5 \\ \frac{\mu_\lambda}{T^5} &= cte = K_2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

para que las ecuaciones 3.8 y 3.9 sean válidas simultáneamente  $\mu_\lambda T^5$  debe ser función del producto  $\lambda T$ , o sea

$$\mu_\lambda \lambda^5 = C_1 f(\lambda, T)$$

el problema es hallar  $f(\lambda, T)$  que fija la forma de la curva y Wien llegó a la siguiente expresión

$$\mu_{(\lambda)} = \frac{C_1}{\lambda^5} e^{\frac{-C_2}{\lambda T}} \quad (3.10)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son dos constantes propias de la distribución y  $C$  es la velocidad de la luz.

Recordando la ecuación 3.6, que nos permite pasar de la densidad de energía en función de la longitud de onda a la densidad de energía en función de la frecuencia, y además que  $\nu\lambda = C$  y si aplicamos estas dos relaciones a la ecuación 3.10 se obtiene

$$\mu(\nu) = \frac{C_1 \nu^3}{C^4} e^{\frac{-C_2 \nu}{C\lambda}} \quad (3.11)$$

Que es la energía por unidad de frecuencia, en esta última ecuación también  $C_1$  y  $C_2$  son constante propias de la distribución y  $C$  nuevamente es la velocidad de la luz.

Esta distribución de energía, se adapta a la curva experimental para cortas longitudes de onda, pero no funciona para longitudes de onda grandes ni para altas temperaturas, puesto que según la fórmula 3.10 para  $T \rightarrow \infty$  se transforma en

$$\mu_\lambda = \frac{C_1}{\lambda^5}$$

sin embargo, según la ley de Stefan-Boltzmann  $\mu_\lambda$  (y  $W_\lambda$ ) debería aumentar incesantemente al tender la temperatura a infinito, lo cual no ocurre en la ecuación. Sin embargo, anda tan bien para pequeñas longitudes de onda, que cualquier ley aceptable de la radiación térmica debe reducirse a dicha función en esa región del espectro.

Lo que si son correctas, son las ecuaciones 3.8 y 3.9 que constituyen las leyes del desplazamiento de Wien.

Wien pudo determinar experimentalmente las constantes a la que están igualadas ambas expresiones, lo cual nos permite determinar el corrimiento de los  $\lambda_m$  o de cualquier  $\lambda$  en abscisas y ordenadas.

- De la ecuación 3.8,  $\lambda_m T = K_1 \cong 0,29 \text{ cm K}$
- De la ecuación 3.9  $\frac{\mu_{\lambda_m}}{T^5} \cong K_2 = 2190 \frac{\text{erg}}{\text{cm}^4 \text{K}}$

#### 1.2.4. Leyes de Rayleigh - Jeans

Es otro intento para llegar a una ley de distribución de la energía de la radiación térmica y es el mejor resultado al que la física clásica podía arribar.

Partieron de la dinámica y la estadística clásica, se consideraron una cavidad de paredes perfectamente reflectoras y que en su interior existían ondas electromagnéticas estacionarias que constituían la radiación térmica, (pegan en una pared y vuelven, pegan en la otra pared y vuelven y así sucesivamente) constituyendo un oscilador armónico-

Conociendo la energía media transportada por cada onda ( $\bar{\epsilon}$ ) y calculando el número de ondas estacionarias de una determinada frecuencia (o bien de una longitud de onda), pueden existir de diferentes  $\nu$  o  $\lambda$  dentro del oscilador, pero solo se analiza la de una sola.

Recurriendo a complicados cálculos matemáticos, se demuestra que

$$\bar{\epsilon} = K T$$

- $\bar{\epsilon}$  Energía promedio de un oscilador armónico
- $K$  Constante de Boltzmann
- $T$  Temperatura absoluta

También se obtiene que el número de ondas estacionarias de una determinada frecuencia o longitud de onda es

$$N_{(\lambda)} = \frac{8\pi}{\lambda^4}$$

para obtener la energía por unidad de volumen por unidad de longitud de onda, o sea  $\mu_{\lambda} = \bar{\epsilon} N_{(\lambda)}$

$$\mu_{(\lambda)} = \frac{8\pi K T}{\lambda^4} \quad (3.12)$$

Como sabemos, de la relación

$$\mu_{(\nu)} = \frac{\lambda^2}{C} \mu_{\lambda} \left[ \frac{J}{m^3 \frac{1}{seg}} \right] \quad (3.13)$$

podemos trabajar la ecuación 3.12 para poder expresarla en función de la frecuencia, resultando

$$\mu_{(\nu)} = \frac{8\pi K T \nu}{C^3} \quad (3.14)$$

Las fórmulas 3.12 y 3.14 se ajustan bastante bien a la distribución experimental de energía en las zonas de altas longitudes de onda, pero no se cumple a bajas longitudes de onda, donde si se cumplen las de Wien.

En definitiva, tanto la ley de Wien como la de Rayleigh - Jeans son insuficientes para explicar las curvas de la radiación térmica obtenidas experimentalmente.

### 1.3. Teoría cuántica de la radiación térmica

En 1901 Max Planck resolvió el tema de la densidad espectral de energía de la radiación térmica postulando que la energía de un oscilador armónico NO puede tomar valores cualesquiera entre 0 y  $\infty$  (continuidad), sino múltiplos enteros de una cantidad finita y discreta llamada *cuanto*, siendo

$$\epsilon_0 = h \nu$$

- $\epsilon_0$  Energía de un cuanto

$-h = 6,625 \times 10^{-34} J \text{ seg}$  constante de Planck

$-\nu$  Frecuencia

$$\epsilon = n h \nu \quad n \in N$$

Planck prosiguió de manera muy análoga a la deducción de la formula de Rayleigh - Jeans, solo que las integrales las substituyó por sumatorias (pasó de lo continuo a lo discreto), y así se dedujo el valor medio de la energía de cada oscilador armónico o cada onda estacionaria.

Teniendo en cuenta las discontinuidades, se llega a

$$\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon_0}{e^{\frac{\epsilon_0}{KT}} - 1}$$

y el número de ondas estacionarias es igual al de la ley de Rayleigh - Jeans o sea

$$N_{(\lambda)} = \frac{8\pi}{\lambda^5}$$

y recordando que de manera que  $\epsilon_0 = h \nu$ , resulta

$$\begin{aligned} \mu_{(\lambda)} &= \bar{\epsilon} N_{(\lambda)} = \frac{8\pi h \nu}{\lambda^4} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1} \\ \mu_{(\lambda)} &= \frac{8\pi h C}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hC}{\lambda T}} - 1} \end{aligned} \quad (3.15)$$

esta última es la ley de Planck de la radiación térmica.

Por la relación antes vista, podemos expresar

$$\mu_{(\nu)} = \frac{8\pi h \nu^3}{C^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1} \quad (3.16)$$

Ahora, como las ecuaciones 3.15 y 3.16 constituyen la teoría general de la radiación térmica, deberíamos poder llegar a lo particular, o sea de la ley de Planck, llegar a la de Wien y Rayleigh-Jeans.

Analizando a largas longitudes de onda, o sea a bajas frecuencias, por desarrollo en serie de la función exponencial y con la condición de que el cociente  $\frac{h\nu}{KT} \ll 1$ , se tiene

$$\begin{aligned} e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1 &= \left( 1 + \frac{h\nu}{KT} - \dots \right) - 1 \\ e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1 &\simeq \frac{h\nu}{KT} \end{aligned} \quad (3.17)$$

reemplazando el resultado de la ecuación 3.17 en 3.16

$$\mu_{(\nu)} = \frac{8\pi KT \nu}{C^3}$$



llegamos a la ecuación de la ley de Rayleigh - Jeans.

Ahora, consideremos lo que ocurre a cortas longitudes de onda, o sea altas frecuencias, de la ecuación 3.15

$$e^{\frac{hC}{KT\lambda}} \gg 1$$

de manera que la expresión

$$e^{\frac{hC}{KT\lambda}} - 1 \simeq e^{\frac{hC}{KT\lambda}}$$

reemplazando esto en 3.16 se llega a la ley de Wien

$$\mu(\lambda) = \frac{8\pi hC}{\lambda^5} e^{\frac{hC}{KT\lambda}}$$

de lo cual se deduce que las constante que le faltaban a Wien eran,

$$C_1 = 8\pi hC$$

$$C_2 = \frac{hC}{K}$$

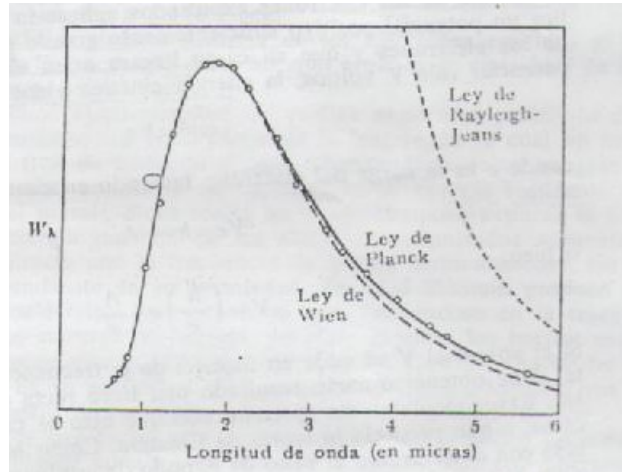


Figura 3.4: Gráfico de las tres leyes

En resumen:

La naturaleza revolucionaria de la teoría de Planck, se basa en el postulado que la energía de un oscilador armónico sólo puede variar por saltos discretos.

Tanto la emisión como la absorción de radiación deben ser procesos discontinuos.

El concepto sobre niveles discretos de energía, no pertenece a la física clásica, si no a la física cuántica.

La emisión sólo puede ocurrir cuando un oscilador sufre una transición discontinua, desde un estado energético a otro, que difiere del anterior en una cantidad  $N h \nu$ , siendo  $\nu$  la frecuencia de la radiación,  $h$  la constante de Planck y  $N$  un número natural.

## 2. El efecto fotoeléctrico

El efecto fotoeléctrico consiste en la transformación de energía luminosa en energía eléctrica.

Fue descubierto por Hertz en 1887 siguiendo experimentos realizados por Hallwach y Lenard y luego la posterior interpretación del fenómeno fue realizada por Einstein, debido que introdujo conceptos cuánticos en base a la teoría de Planck de la radiación térmica.

En la figura 3.5 se muestra el tipo de aparato utilizado para realizar los experimentos, consiste de un tubo de vacío que contiene dos electrodos conectados a un circuito externo y con la lámina metálica cuya superficie va a ser irradiada.

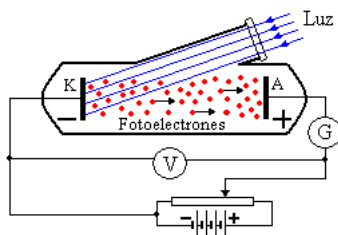


Figura 3.5: Observación del efecto fotoeléctrico

El efecto fotoeléctrico se estudió experimentalmente de manera muy cuidadosa; así se llegó a los siguientes resultados.

- La intensidad de la corriente eléctrica debida a los electrones liberados de una superficie metálica al incidir sobre ella una radiación luminosa de una frecuencia dada, es proporcional a la intensidad de dicha radiación.
- Para una superficie metálica dada hay una frecuencia mínima de la luz incidente capaz de liberar electrones; con la luz de frecuencia inferior no pueden ser liberados. Con luz de frecuencia superior a este valor crítico, la emisión de electrones es inmediata.
- La energía máxima de los electrones emitidos es función lineal de la frecuencia de la luz que provoca su emisión y es independiente de su intensidad.

Estos hechos experimentales no podían explicarse mediante la teoría electromagnética ondulatoria de la luz, según la cual no es posible que un tren de ondas luminosas concentre en un electrón la energía suficiente para expulsarlo

del metal; dicha teoría tampoco puede explicar el hecho de que la energía máxima de los electrones expulsados aumente en proporción directa a la frecuencia de la luz.

Einstein supuso que la energía emitida por cualquier radiador, solo puede emitir y absorber energía en cantidad que son todas exactamente iguales a  $h\nu$ , al cuanto de luz se lo llama *fotón* y es considerado como un paquete o partícula de radiación, y llegó a la siguiente ecuación que describe el *efecto fotoeléctrico*

$$T_{máx} = h\nu - h\nu_0 \quad (3.18)$$

$\nu$  Frecuencia de la luz incidente

$\nu_0$  Frecuencia umbral, por de bajo de la cual no se produce emisión de electrones

$T_{máx}$  Energía cinética máxima

$h$  Constante de Planck

En la ecuación 3.18 podemos llamar a la expresión  $h\nu_0 = \phi_0$  lo cual representa la energía umbral, es la energía que hay que vencer para “arrancar” los electrones y a la expresión  $h\nu$  como energía de la luz incidente; de esta manera

$$T_{máx} = h\nu - \phi_0 \quad (3.19)$$

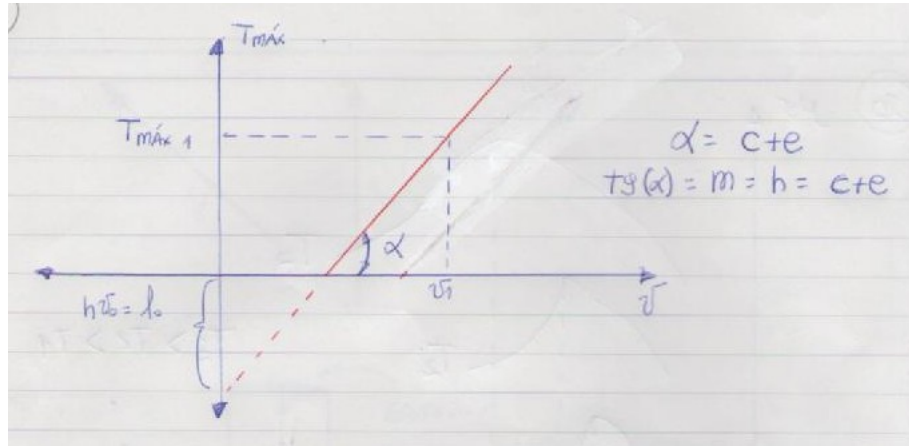


Figura 3.6: Energía cinética

Como la pendiente de la figura 3.6 es  $h\nu$ , no depende del material dentro del tubo, pero lo que si depende del gas es la energía umbral, de manera que si cambiamos el gas dentro del tubo, obtendremos una recta paralela a la de la figura, pero con distinta ordenada al origen, debido a los distintos niveles de energía de los átomos. La energía  $T_{máx}$  NO depende de la intensidad de fotones ( $n$ ) pero si depende de la frecuencia.

Como Einstein no sabía lo que sabemos hoy de los modelos atómicos, no pudo explicar lo que ocurría a niveles atómicos, lo cual se comprendió años más tarde y concluyeron que cuando la luz incide sobre los átomos, le comunica energía a un electrón, parte de esta energía sirve vencer la energía umbral (en el caso que esta energía no resulte vencida, hace saltar a los electrones de un nivel energético a otro), en el caso que si venza la energía  $\phi_0$  y además sobre, esa energía sobrante es la energía cinética con la que el electrón sale del átomo. El  $T_{máx}$  de la ecuación 3.19 es la energía cinética de los electrones de mayor velocidad y corresponde a los extraídos de la última órbita, debido a que se requiere menos energía para sacarlos.

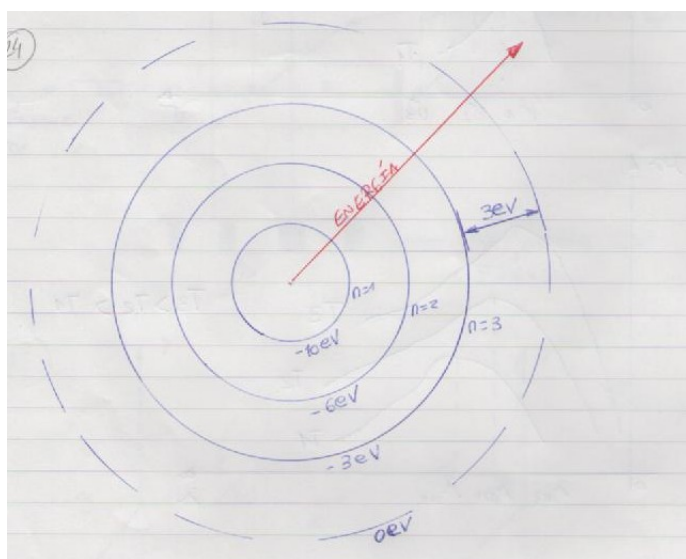


Figura 3.7: Análisis atómicos del efecto fotoeléctrico

Si ahora invertimos la polaridad de la fuente de la figura 3.5, la fuente de tensión va a repeler a los electrones, de esta manera la ecuación 3.18 resultará

$$T_{máx} - ev_0 = h\nu - h\nu_0 - ev_o$$

donde  $e$  es la carga del electrón, ahora si igualamos esta última expresión a cero y despejamos el valor de  $v_0$  obtendremos el llamado *potencial de frenado* el cual se define como el potencial negativo que hay que aplicar para que cese la emisión de electrones

$$h\nu - h\nu_0 - ev_o = 0$$

$$v_0 = \frac{h\nu - h\nu_0}{e}$$

$$v_0 = \frac{h}{e}\nu - \frac{h}{e}\nu_0$$

como vemos, el potencial de frenado también depende del gas dentro del tubo, debido a que en segundo término aparece  $\nu_0$ .

Cuando la frecuencia de la luz incidente  $\nu$  supere a  $\nu_0$  voy a necesitar aplicar potencial de frenado, debido a que antes de esto, la frecuencia incidente no supera a la umbral y por lo tanto no hay emisión de electrones.

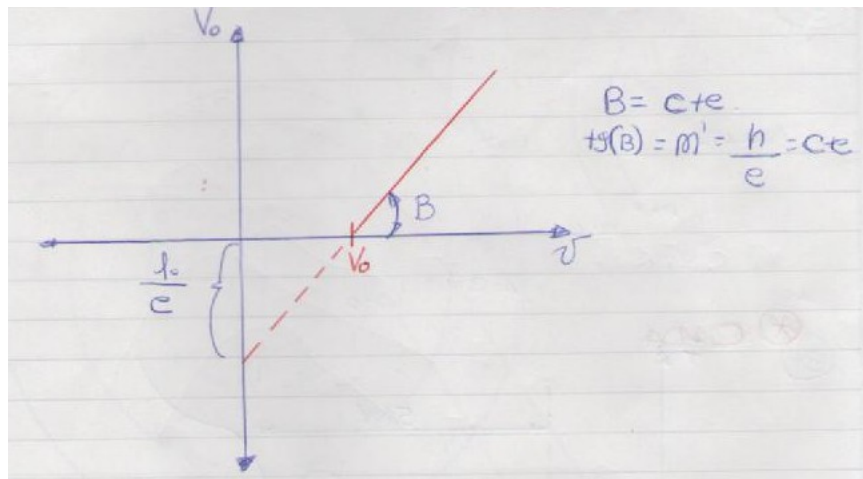


Figura 3.8: Potencial de frenado

La intensidad  $I$  depende de la cantidad de fotones incidentes y no de la frecuencia; o sea  $I = f(N)$ .

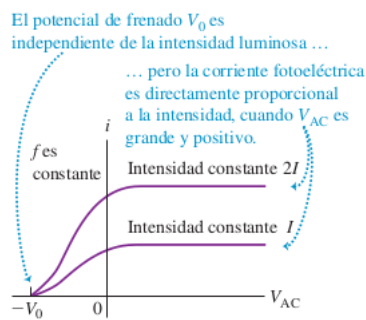


Figura 3.9: Intensidad

- Si  $h\nu$  aumenta
  - $E$  aumenta

- $\lambda$  disminuye
  - $T_{máx}$  aumenta
  - $V_{máx}$  aumenta
  - $t$  disminuye
  - $i$  aumenta
  - $V_0$  aumenta
- Si  $I$  aumenta
- $\nu$  constante
  - $\lambda$  constante
  - $n$  aumenta
  - $T_{máx}$  constante
  - $V_{máx}$  constante
  - $t$  constante
  - $V_0$  constante

## Capítulo 4

# Fundamentos de la física cuántica

### 1. Excitación atómica

Hay dos mecanismos fundamentales que pueden excitar a un átomo a un nivel de energía superior al correspondiente a su estado fundamental y capacitarlo para que pueda irradiar energía.

1. Provocando una interacción del átomo con otra partícula de modo que parte de la energía cinética sea absorbida por el átomo, ejemplos de esto puede ser un choque o que un electrón pase cerca del núcleo del átomo.
2. Cuando el átomo recibe luz en cantidad suficiente para elevarlo a un nivel superior de energía.

### 2. Espectros atómicos

Un espectro es el análisis de longitud de longitud de onda de una fuente luminosa.

Existen cuatro tipos de clases de espectros.

- Continuos de emisión
- De líneas de emisión
- Continuos de absorción
- De líneas de absorción

Continuos emisión: ocurre en los sólidos a altas temperaturas, por ejemplo el filamento de tungsteno o wolframio de una lámpara eléctrica cuando se halla sometido a alta temperatura.



Figura 4.1: Espectro continuo de emisión

De líneas de emisión: se produce por descargas eléctricas en vapor gas de alta temperatura.

Al realizar la experiencia, se obtiene un espectro de líneas. Dichas líneas que se observan corresponden al gas dentro de la cápsula.

En los espectros de emisión, se caracterizan por tener líneas claras en fondo oscuro.

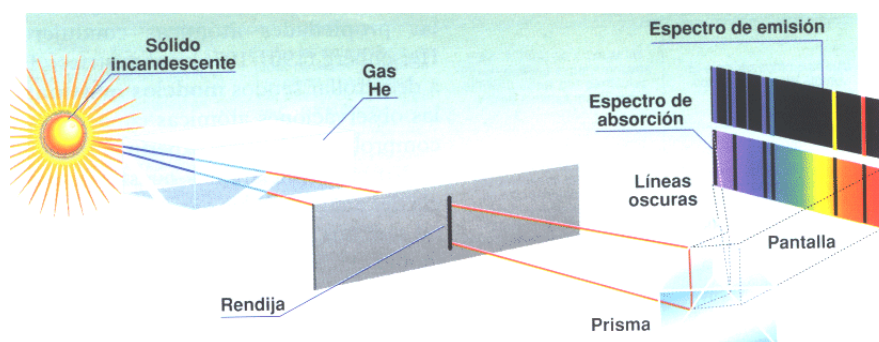


Figura 4.2: Dispositivos para detectar espectros

Continuos de absorción: se producen cuando se hace pasar un espectro continuo de emisión a través de un material de estado líquido o sólido. Los colores faltantes son absorbidos por dicho material.



De líneas de absorción: Se produce cuando la luz pasa a través de gas o vapor, el cual absorbe algunas de las energías incidentes, se observan en la figura 4.2 .

### 3. Series espectrales

Son conjuntos matemáticos que determinan el valor de las longitudes de onda presentes en un espectro atómico.



### 3.1. Series espectrales del hidrógeno

En ausencia de la teoría o modelo atómico, *experimentalmente* los científicos determinaron un conjunto de series espectrales:

- Serie de Lyman, funciona para la emisión ultra violeta del hidrógeno, o sea a altas frecuencias

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

- Serie de Balmer, funciona para la emisión en el espectro visible

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 3, 4, 5, \dots)$$

- Serie de Paschen, funciona para la emisión ultra violeta del hidrógeno, o sea a altas frecuencias

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 4, 5, 6, \dots)$$

- Serie de Brackett, funciona para la emisión infrarroja, o sea a bajas frecuencias

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 5, 6, 7, \dots)$$

- Serie de Pfund, funciona también para la emisión infrarroja

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 6, 7, 8, \dots)$$

Donde en todas las ecuaciones  $R = 1,097 \times 10^7 \frac{1}{m}$  y es llamada constante de Raydberg.

## 4. Modelos atómicos

### 4.1. Modelo atómico de Thomson

En 1905 se tenía como cierto el modelo atómico de *Thomson* que consistía en una masa con carga positiva en el cual quedaban inmersas cargas negativas, tal como lo muestra la figura 4.3. Había una teoría al respecto y hasta experimentalmente decían que se comprobaba, cuando en realidad esos instrumentos de medición eran inadecuados para realizar dichas mediciones.

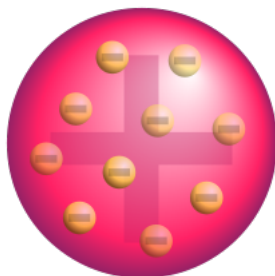


Figura 4.3: Modelo atómico de Thomson

## 4.2. Modelo atómico de Rutherford

En 1912 Rutherford, discípulo de Thomson, mejoró notablemente el modelo anterior. Fue el descubridor del *núcleo atómico*, donde se concentraban todas las cargas positivas. Esto fue posible gracias a su experimento de la lámina de oro, figura 4.4, el cual consistía en bombardear la lámina de oro con partículas  $\alpha$  provenientes de Helio, y según el modelo de Thomson, las partículas alfa atravesarían la lámina metálica sin desviarse demasiado de su trayectoria, debido a que la carga positiva y los electrones del átomo se encontraban dispersos de forma homogénea en todo el volumen del átomo. Como las partículas alfa poseen una gran masa (8.000 veces mayor que la del electrón) y gran velocidad (unos 20.000 km/s), las fuerzas eléctricas serían muy débiles e insuficientes para conseguir desviar las partículas alfa. Además, para atravesar la lámina del metal, estas partículas se encontrarían con muchos átomos, que irían compensando las desviaciones hacia diferentes direcciones. Pero se observó que un pequeño porcentaje de partículas se desviaban figura 4.5. En palabras de Rutherford ese resultado era "tan sorprendente como si le disparases balas de cañón a una hoja de papel y rebotasen hacia ti".

Rutherford concluyó que el hecho de que la mayoría de las partículas atravesaran la hoja metálica, indica que gran parte del átomo está vacío. Y el rebote de las partículas alfa indica un encuentro directo con una zona fuertemente positiva del átomo y a la vez muy densa. El modelo atómico de Rutherford mantenía el planteamiento de Thomson, de que los átomos poseen electrones, pero su explicación sostenía que todo átomo estaba formado por un núcleo y una corteza y que los electrones debían girar necesariamente alrededor del núcleo para que la fuerza electrostática de atracción sea igual a la fuerza centrífuga que lo tira hacia afuera.

Pero había un inconveniente, la teoría electromagnética demuestra que toda carga eléctrica acelerada (electrones con MCUV) siempre emite energía y por lo tanto el electrón iría perdiendo energía de tal forma que con movimiento helicoidal, caería al núcleo, rotando al modelo del átomo de Thomson.

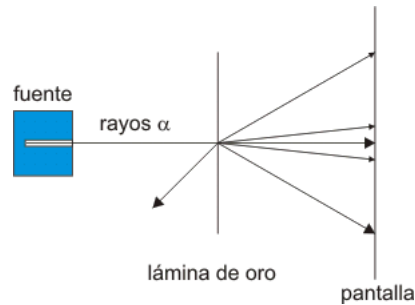
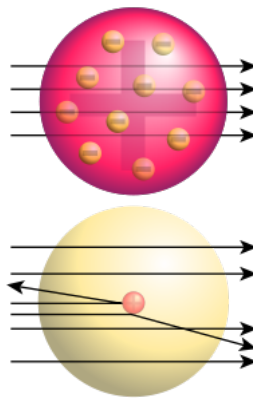


Figura 4.4: Experiencia de Rutherford



Arriba resultados esperados.  
Abajo resultados obtenidos

Figura 4.5: Resultados de la experiencia de Rutherford

### 4.3. Modelo atómico de Bohr

Niels Bohr, dinamarqués, aplicando los conceptos cuánticos de Planck, estabiliza el modelo atómico de Rutherford de tal forma que hoy su modelo atómico se lo toma cuánticamente básico aunque posteriormente como se verá se llega a mucha más precisión.

Para su modelo atómico, Bohr se basó en los cuatro postulados siguientes:

1. En el átomo existen para el electrón orbitas privilegiadas llamadas ondas estacionarias, las cuales no emiten energía alguna.
2. En dichas orbitas estacionarias se cumplen las leyes de la física clásica.
3. La transición energética de un electrón desde una órbita estacionaria a otra, siempre es equivalente a la energía de un fotón, como se ve en la figura 4.6.

4. Para que existan dichas órbitas estacionaras, debe ocurrir que el momento angular (torque  $L$ ) del electrón debe ser igual a  $\hbar n$ ; esto lo vemos en la figura 4.7.

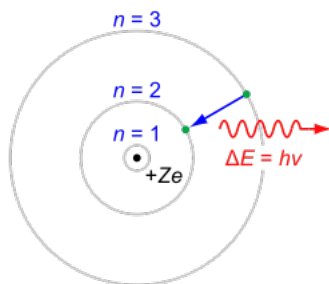


Figura 4.6: Tercer postulado de Bohr

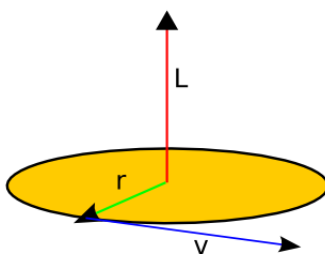


Figura 4.7: Cuarto postulado de Bohr

De esta manera, si  $p = m_e v$ ,  $L$  será  $L = m_e v r = n\hbar$  se define a  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ , finalmente

$$m_e v r = \frac{n\hbar}{2\pi}$$

Nos valdremos del primer postulado (órbita estacionaria) y el segundo postulado (aplicación de la física clásica), y partiendo de la carga del electrón expresada por la ecuación 4.1

$$|q_e| = q_p = 1,6 \times 10^{-19} C = e \quad (4.1)$$

aplicaremos la física clásica, diciendo que la fuerza eléctrica que la fuerza eléctrica y centrífuga que actúa sobre un electrón son de la misma magnitud, o sea  $F_{elec} = F_c$  y recordando que  $Z$  representa la cantidad de protones en el núcleo del átomo, se tiene

La energía dentro de un electrón dentro del átomo se expresa como negativa, es nula en el confín del átomo y positiva fuera del mismo.

$$F_{elec} = F_c$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} = \frac{m_e v^2}{r} \quad (4.2)$$

despejando el radio y la velocidad de la ecuación 4.2

$$r = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e v^2} \quad (4.3)$$

$$v = \sqrt{\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}}$$

La energía total, es la suma de la energía cinética ( $T$ ) y la energía potencial eléctrica  $V$  expresadas por las siguientes ecuaciones

$$T = \frac{1}{2} m_e v^2$$

$$V = \int \vec{F}_{elec} \cdot \vec{dr}$$

$$V = \frac{-Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (4.4)$$

$$E = T + V \quad (4.5)$$

$$E = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

reemplazando la ecuación 4.4 en la 4.5 y multiplicando y dividiendo por 2 al segundo término resulta

$$E = \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r} - \frac{2Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

$$E = \frac{-Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad (4.6)$$

Ahora como sabemos que hay órbitas privilegiadas, intentaremos encontrar expresiones de la velocidad, el radio y la energía en función de la cuantificación de dichas órbitas, en otras palabras pondremos la ecuaciones en función de  $n$ , para esto supondremos cierto el cuarto postulado de Bohr

$$m_e v r = n\hbar \therefore m_e v r = \frac{n\hbar}{2\pi}$$

despejando el radio

$$r = \frac{nh}{2\pi m_e v} \quad (4.7)$$

igualando la ecuación 4.7 con 4.3 y despejando  $v$  resulta

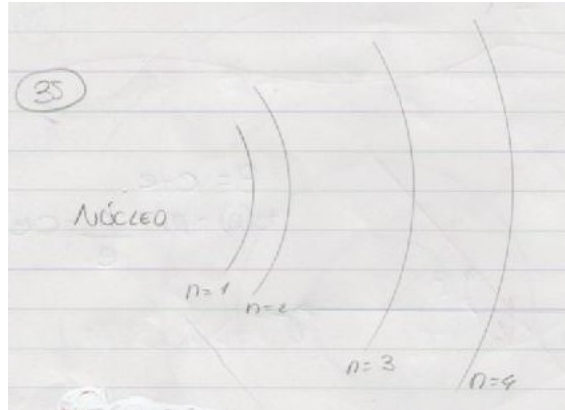
$$\begin{aligned} \frac{nh}{2\pi m_e v} &= \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e v^2} \\ v &= \frac{Ze^2}{2\epsilon_0 h n} \end{aligned} \quad (4.8)$$

como observamos en la ecuación 4.8 la velocidad depende de  $n$  por lo que está cuantificada y además observamos que mientras  $n$  es más grande, la velocidad es menor.

Reemplazando ahora la expresión 4.8 en 4.3 obtendremos la versión cuantificada del radio

$$\begin{aligned} r &= \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \frac{4\epsilon_0 h^2 n^2}{Z^2 e^4} \\ r &= \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e Z e^2} (n^2) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Como vemos en la figura 4.8 , el radio es función del cuadrado de  $n$ .



Las órbitas están cada vez más alejadas.

Figura 4.8: Radio cuantificado

Finalmente para expresar la cuantificación de la energía, reemplazamos la ecuación 4.9 en la 4.6, resultando

$$E = -\frac{Z^2 e^4 m_e}{8\epsilon_0^2 h^2} \left( \frac{1}{n^2} \right)$$

La energía dentro de un electrón dentro del átomo se expresa como negativa, es nula en el confín del átomo y positiva fuera del mismo 4.9.

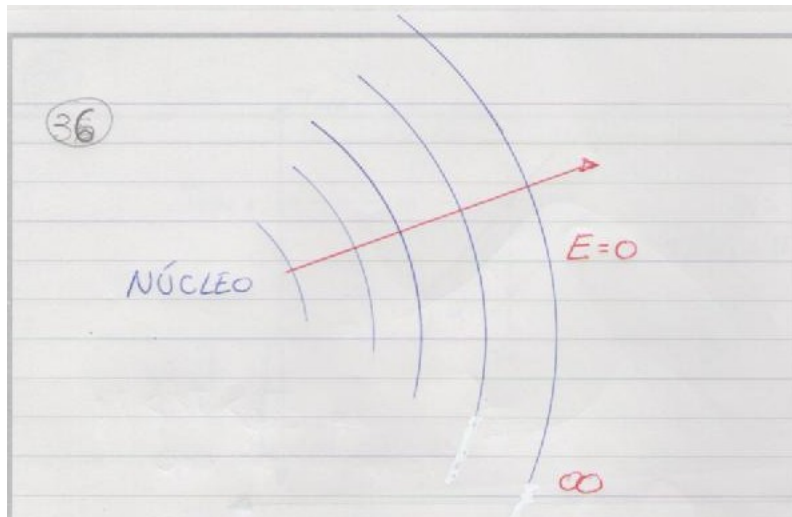


Figura 4.9: Cuantificación de la energía

Ahora, si aplicamos el cuarto postulado de Bohr a las órbitas energéticas de la figura 4.10

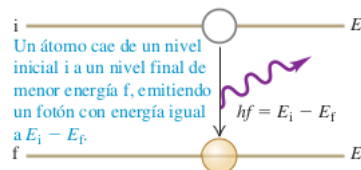


Figura 4.10: Órbitas energéticas

- $E_i$ : Estado excitado
- $E_f$ : Estado fundamental

como la energía  $E_i > E_f$ , al caer el electrón pierde energía y libera un fotón. Expresando esto último matemáticamente

$$E_i - E_f = \left[ -\frac{Z^2 e^4 m_e}{8 \epsilon_0^2 h^2} \left( \frac{1}{n_i^2} \right) \right] - \left[ -\frac{Z^2 e^4 m_e}{8 \epsilon_0^2 h^2} \left( \frac{1}{n_f^2} \right) \right] = h\nu$$

pero como  $\nu = \frac{c}{\lambda}$

$$E_i - E_f = \left[ -\frac{Z^2 e^4 m_e}{8\epsilon_0 h^2} \left( \frac{1}{n_i^2} \right) \right] - \left[ -\frac{Z^2 e^4 m_e}{8\epsilon_0 h^2} \left( \frac{1}{n_f^2} \right) \right] = \frac{hC}{\lambda}$$

$$\frac{1}{\lambda} = -\frac{Z^2 e^4 m_e}{8\epsilon_0^2 h^3 C} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

pero en la expresión anterior, el factor  $-\frac{Z^2 e^4 m_e}{8\epsilon_0^2 h^3 C} = R$ , la constante de Rydberg expresada en las series espectrales de la sección 3.1.

Podemos concluir, que Bohr al realizar esta idealización del átomo, llegó a los mismos resultados que los espectroscopistas.

## 5. Principio de correspondencia

La física clásica y la física cuántica equivalen (o corresponden) para números cuánticos muy elevados.

Expresándolo metafóricamente, podemos decir que en el mundo microscópico, la materia se comporta como una escalera, pero en el mundo macroscópico como un tablón, por esto es que en este último la física clásica y la física cuántica son equivalentes.

### ■ Razonamiento clásico:

Desde el punto de vista clásico y para  $Z = 1$  (el átomo de Hidrógeno), la velocidad del electrón es

$$v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r}} \quad (4.10)$$

pero si se tiene en cuenta la frecuencia de giro  $f = \frac{\text{velocidad angular del electrón}}{\text{circunferencia de la órbita}}$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad \omega = \frac{v}{r}$$

$$f = \frac{v}{2\pi r}$$

reemplazando el valor de 4.10 en esta última ecuación, resulta

$$f = \frac{e}{2\pi\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r^3}} \quad (4.11)$$

ahora introduciremos la expresión cuantificada del radio 4.9 a la expresión 4.11, de esta manera podremos comparar la expresión resultante de la física clásica con otra que deduciremos más adelante respectiva a la física cuántica.

$$r = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e} n^2$$



$$f = \frac{e}{\sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 m_e n^6 \epsilon^3 h^6}{\pi^3 m_e^5 e^6}} 2\pi} = \frac{e}{\frac{2\pi 2\epsilon_0^2 h^3}{\pi m_e e^3}} \left( \frac{1}{n^3} \right)$$

simplificando, multiplicando y dividiendo por dos, llegamos a la ecuación de la frecuencia expresada mediante la física clásica.

$$f = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^3} \left( \frac{2}{n^3} \right) \quad (4.12)$$

■ Razonamiento cuántico:

Según el tercer postulado de Bohr, tenemos<sup>1</sup>.

$$E_i - E_f = -\frac{e^4 m_e}{8\epsilon_0 h^2} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) = h\nu \quad (4.13)$$

Ahora supondremos que  $n_i = 1000$  y que  $n_f = (n - p)$ , donde  $p = 1$ , en otras palabras supondremos que el salto energético es del nivel 1000 al 999, o sea números cuántos muy elevados.

Despejando  $\nu$  de la ecuación 4.13 y agregando  $n_i$  y  $n_f$

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^3} \left[ \frac{1}{(n-p)^2} - \frac{1}{n^2} \right] \\ \nu &= \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^3} \left[ \frac{n^2 - (n^2 - 2np + p^2)}{(n-p)^2 n^2} \right] \\ \nu &= \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^3} \left[ \frac{2np - p^2}{(n-p)^2 n^2} \right] \end{aligned}$$

como partimos de la relación que  $n \gg p$

$$\nu \approx \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^3} \left[ \frac{2np - p^2}{n^3} \right] \quad (4.14)$$

Si comparamos 4.14 y 4.13 observamos que si estamos en la situación de números cuánticos muy elevados (mundo macroscópico) podemos aplicar sin problemas la física clásica.

Para comprender mejor esto, podemos realizar una analogía y ver que pasa lo mismo que cuando teníamos velocidades bajas, podíamos aplicar la física clásica, pero cuando las velocidades eran cercanas a las de la luz, teníamos que aplicar la física relativista.

<sup>1</sup>El término  $-\frac{e^4 m_e}{8\epsilon_0 h^2}$  NO es la constante de Raydberg.

## 6. Potenciales críticos de excitación y ionización

En 1914, Franck y Hertz realizaron una serie de experimentos para determinar experimentalmente los potenciales o energías potenciales de excitación (voltios o electronvoltios) necesarios para que un pase de un nivel energético a otro, o bien los potenciales o energías potenciales de ionización, o sea aquellos voltios o electronvoltios necesarios para que el electrón escape del átomo.

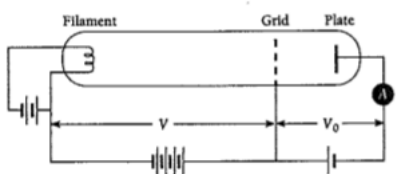


Figura 4.11: Aparato de Frank y Hertz

Entre la rejilla y la placa colectora se mantiene una pequeña diferencia de potencial  $V_0$ , de modo que solamente los electrones que tienen una energía superior a un cierto mínimo contribuyen a la corriente  $i$  que pasa a través del galvanómetro.

Al incrementar el potencial de aceleración  $V$ , aumentan los electrones que llegan a la placa y por lo tanto aumenta la corriente  $i$ .

Este experimento tiene por objetivo probar la cuantificación de la energía y por ende el modelo atómico de Bohr.

Para bajas diferencias de potencial, la corriente aumenta casi constantemente, debido a que los electrones son acelerados por dicho potencial.

A un determinado valor, la corriente cae casi a cero, luego, aumenta nuevamente y al cabo de un tiempo vuelve a caer repentinamente.

Franck y Hertz, explicaron los resultados en términos de colisiones elásticas e inelásticas; para bajos voltajes, los electrones acelerados adquieren poca energía cinética y, al chocar con los átomos del sodio, la colisión es elástica, o sea que se mantiene constante la energía y el momento, esto se debe a que según la mecánica cuántica, un átomo no puede absorber cualquier cantidad de energía hasta que la energía de la colisión exceda un valor requerido.

Cuando un electrón alcanza una energía de  $2.1eV$ , ya es capaz de producir un choque inelástico con el átomo cediendo toda su energía, esto produce el decaimiento en la corriente.

Luego de la colisión, el potencial sigue aumentando y ahora le proporciona nuevamente energía al electrón para que se pueda producir nuevamente la colisión.

Los potenciales más elevados, son múltiplos de los más bajos y son el resultado de varios choques.

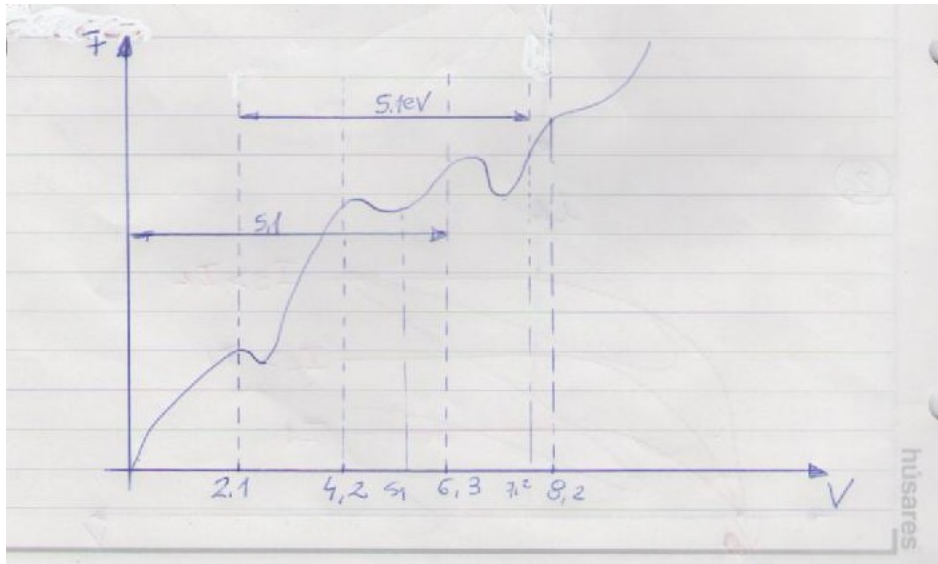


Figura 4.12: Resultados de Franck y Hertz

## 7. Rayos X

### 7.1. Introducción

El efecto fotoeléctrico proporciona una prueba convincente de que los fotones luminosos pueden transferir energía a los electrones, pero como veremos, los rayos X representan justo el fenómeno inverso.

Experimentando con descargas eléctricas en tubos de rayos catódicos y observando distintas fluorescencias en materiales se concluyó que los rayos X son radiaciones electromagnéticas de una multiplicidad de longitudes de onda de alta frecuencia, es decir de alta energía.

- Aplicaciones: Operaciones quirúrgicas, curar enfermedades, etc.
- Producción de rayos X: Se producen en tubos de descarga como el de la figura 4.13. Los materiales usados como blanco, son el wolframio y molibdeno que tienen muy alto punto de fusión, adecuados para soportar la gran energía de los electrones que bombardearan al blanco.
- Propiedades:
  - Penetrar la materia sólida
  - Provocar fluorescencia en compuestos químicos
  - Ionizar átomos
  - Impresionar placas fotográficas

■ Aplicaciones prácticas:

- Descubrimiento de fallas
- Contrabando

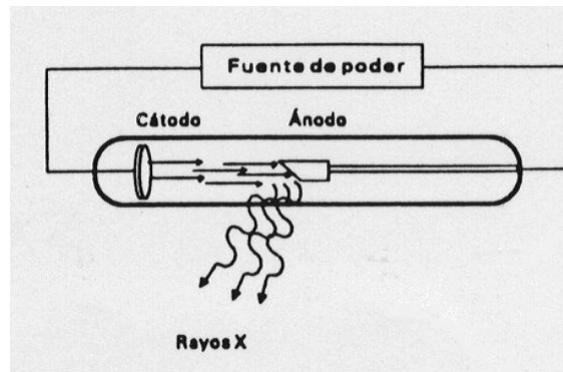


Figura 4.13: Descarga de Rayos X

## 7.2. Resultados experimentales

De los experimentos realizados cuando se bombardearon ánodos de tungsteno y molibdeno con electrones a diferentes potenciales de aceleración se obtiene:

- De la figura 4.14 se observa que los rayos X producidos para un potencial dado  $V$  varían en longitud de onda, pero ninguna tiene una longitud de onda inferior a un determinado  $\lambda_{min}$ .

Al aumentar el potencial  $V$  disminuye el valor de  $\lambda_{min}$ .

- En la figura 4.15 vemos que si el voltaje se analizan dos muestras, una de molibdeno y la otra de wolframio, al mismo potencial, ambas tienen el mismo valor de  $\lambda_{min}$  lo que lo hace independiente del material y completamente dependiente del potencial aplicado.

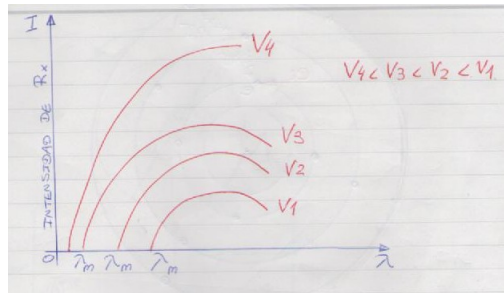


Figura 4.14: Longitud de onda

- Para mayor voltaje, menor energía por tener mayor frecuencia
- Existe un máximo de intensidad

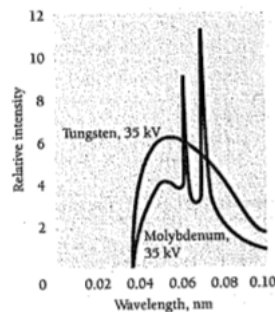


Figura 4.15: Wolframio-molibdeno

Experimentalmente se pudo calcular una expresión para el  $\lambda_{min}$  dada por la ecuación 4.15, debajo de la longitud de onda calculada por dicha ecuación, no aparecen los rayos X.

$$\lambda_{min} = \frac{1,24 \times 10^{-6} [\text{volt.m}]}{V} \quad (4.15)$$

Como conclusión de los resultados experimentales podemos decir:

- Existen dos tipos de espectros de rayos X, continuos y discontinuos, en la figura 4.15 se observa que solamente la curva que describe el molibdeno tiene discontinuidades, pero el wolframio las tiene, nada más que no se muestran en la gráfica.
- Son radiaciones electromagnéticas de una multiplicidad de longitudes de onda

- La máxima energía de los rayos x, depende exclusivamente del voltaje acelerador
- La forma de los espectros depende del material con el que se construye el blanco.

### 7.3. Fundamentación teórica

Podemos fundamentar teóricamente este fenómeno de dos maneras:

- Como fenómeno inverso del fotoeléctrico:

Esto expresa que en lugar de que la energía del fotón se transforme en energía cinética del electrón, esta última se transforma en energía cinética de fotón.

Una longitud de onda corta, significa una frecuencia alta, y una alta frecuencia significa una alta energía del fotón  $h\nu$ . Es por lo tanto lógico interpretar el límite inferior  $\lambda_{min}$  de la ecuación 4.15 como el correspondiente a una energía máxima del fotón  $h\nu_{max}$ , o sea

$$E_{Electrón_{Máx}} = E_{fotón_{Máx}}$$

$$eV = h\nu_{max} = \frac{hC}{\lambda_{min}}$$

despejando  $\lambda_{min}$

$$\lambda_{min} = \frac{hC}{e} \frac{1}{V}$$

como es de esperar, el valor numérico de la constante  $\frac{hC}{e} = 1,24 \times 10^{-6} [volt.m]$

- Desde el punto de vista del origen atómico:

El cual dividiremos a su vez en otras dos partes

- Explicación de los espectros continuos:

No hay choque entre el electrón bombardero y el núcleo, pero el electrón es desviado por las fuerzas electrostáticas. El electrón perdió energía que ganó el átomo; el cual luego de un tiempo la devolverá en forma de radiación electromagnética, emitiendo un fotón.

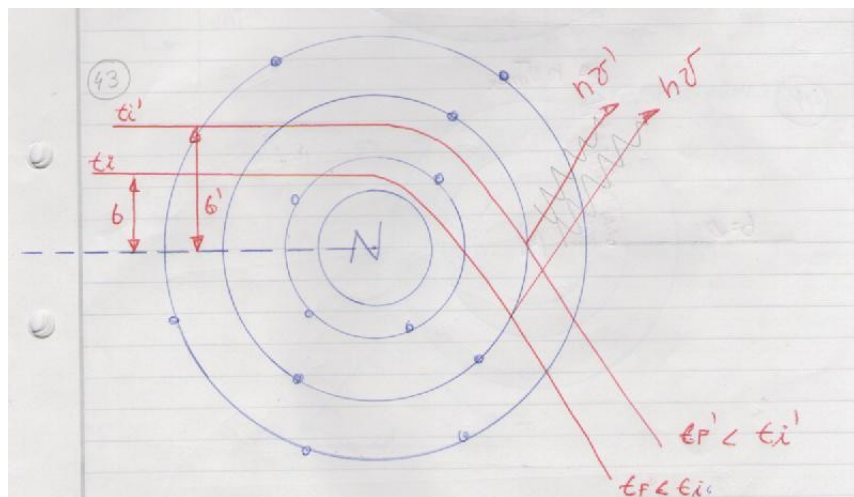


Figura 4.16: Impacto

$b$  : Parámetro de distancia de la trayectoria con respecto al núcleo o parámetro de impacto

*Como el parámetro de impacto  $b$  no está cuantificado, explica los espectros continuos ya que el  $\nu$  depende del parámetro de impacto, el cual puede tomar cualquier número, ya que es continuo.*

Si llamamos  $T_i$  a la energía cinética antes del desvío y  $T_f$  a la después del desvío, y observando que  $v_f < v_i$ , por lo tanto  $T_i < T_f$  podemos expresar la ecuación:

$$T_i - T_f = \frac{1}{2}m_e v_i^2 - \frac{1}{2}m_e v_f^2 = h\nu \quad (4.16)$$

La radiación emitida en los espectros continuos se le denomina radiación de frenado o Bremsstrahlung.

Debido que las fuerzas nucleares son muy poderosas a corto alcance, no permiten que un electrón cuyo parámetro de impacto  $b$  sea nulo, se incruste dentro del núcleo, pero si provocan que detenga su movimiento reduciéndose a cero su energía cinética de la ecuación 4.16.

$$T_i = \frac{1}{2}m_e v_i^2 = h\nu_{\text{máx}} = \frac{hC}{\lambda_{\text{mín}}}$$

$$\lambda_{\text{mín}} = \frac{2hC}{mv_i^2}$$

Esto se indica en la figura 4.17.

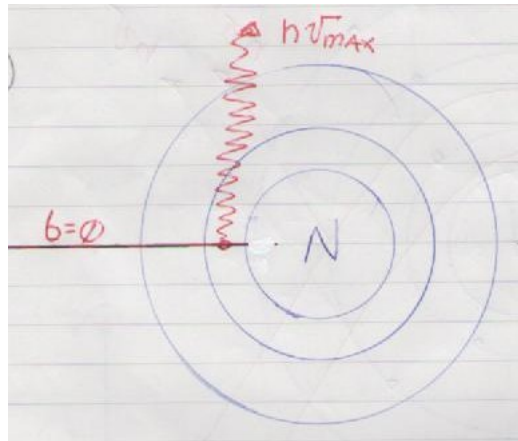


Figura 4.17: Electrón incidente con parámetro de impacto nulo

- Explicación de los espectros discontinuos: Se producen por acomodamiento de las estructuras electrónicas en los átomos que constituyen el blanco.

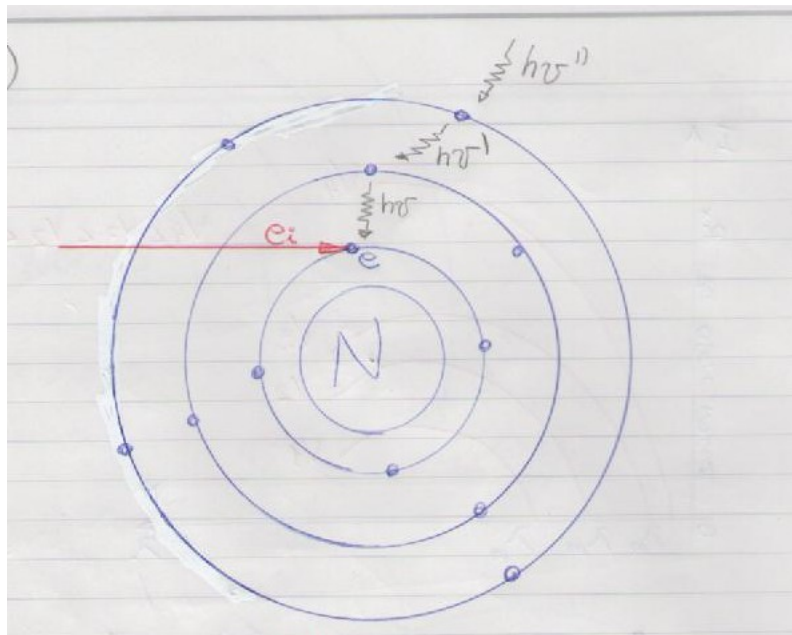


Figura 4.18: Espectros característicos o discontinuos

Si ahora el electrón bombardero *CHOCA* contra un electrón del átomo, ambos son desviados, y en el lugar del electrón que le corre-



spondía al átomo ahora queda un hueco, entonces un electrón que esté relativamente cerca, cae de su órbita superior para cubrir el hueco, dejando otro donde se hallaba originalmente este último, siendo cubierto por otro de otra órbita superior y así sucesivamente, emitiendo fotones en cada salto de cada electrón debido al cambio de energía de un orbital superior a uno inferior, lo que produce un acomodamiento energético.

Como las órbitas SI están cuantificadas, los saltos son discontinuos, explicándose los espectros discontinuos.

Una observación muy importante es que si viene *un solo electrón* y choca con otro, se pueden emitir múltiples frecuencias, en cambio sino choca una sola frecuencia.

## 7.4. Difracción de rayos X

Mediante experiencias realizadas por Max Von Laue (premio Nobel en 1914) llegó a las siguientes conclusiones:

- Los rayos X son radiaciones de muy corta longitud de onda
- Los iones de un cristal están ordenados en una estructura regular tridimensional

Como consecuencia de esto, se abren dos importantes caminos:

- Estudio y medición de las longitudes de onda de los rayos X.
- Estudio de las estructuras cristalinas.

En este documento nos avocaremos al estudio de las longitudes de onda  $\lambda$  de los rayos X, lo cual llevó a Bragg e hijo a obtener el premio Nobel en 1915.

En primer lugar, comenzaron haciendo un estudio de difracción de rayos X, mediante un dispositivo como el de la figura 4.19.

Un haz de rayos X de longitud de onda  $\lambda$  incide formando un ángulo  $\theta$  con la superficie de un cristal que contiene una familia de planos de Bragg<sup>2</sup> separados entre sí por una distancia  $d$ .

Cada haz que llega a los átomos, dispersa parte del mismo haz en todas las direcciones del espacio. La interferencia constructiva tendrá lugar solamente entre aquellos rayos dispersos que sean paralelos y cuyos recorridos difieran en múltiplos enteros de longitudes de onda  $\lambda$ .

---

<sup>2</sup>Se puede considerar que los átomos de un cristal pertenecen a grupos que definen familias de planos paralelos, teniendo cada grupo una separación característica entre los planos que lo componen.

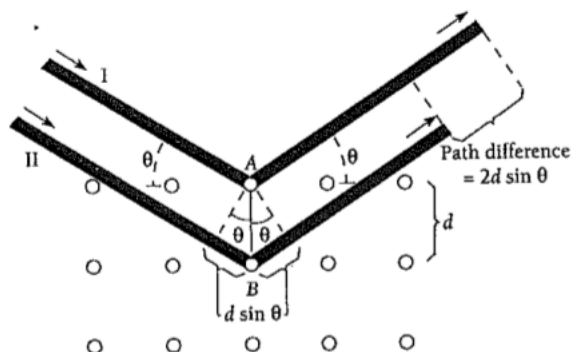


Figura 4.19: Medición de Rayos X por difracción

Si tomamos como ejemplo al rayo que incide sobre el átomo A y el rayo que incide sobre el átomo B, por trigonometría se tiene

$$\text{Sen}(\theta) = \frac{x}{d} \quad (4.17)$$

si despejamos a  $x$  de la ecuación 4.17  $x = d\text{sen}(\theta)$  y esta magnitud es claramente observable en la figura 4.19. Recordando lo dicho anteriormente, para tener interferencia constructiva se debe cumplir

$$\Delta x = n\lambda \quad (4.18)$$

de la ecuación 4.17

$$x = d\text{sen}(\theta)$$

y como la diferencia de recorrido es dos veces esta ecuación, podemos expresar

$$2d\text{sen}(\theta) = n\lambda \quad (4.19)$$

La ecuación 4.19 es conocida como *ecuación de Bragg*.

En su experimento,  $\theta = 65^\circ$ ,  $d = 0,91\text{\AA}$ , y para tener la máxima energía  $n = 1$ , reemplazando estos tres valores en la ecuación 4.19 llegaron a que

$$\lambda = 1,65\text{\AA}$$

Luego, conociendo la distancia entre los planos de Bragg utilizando métodos químicos y cristalográficos, y midiendo  $\theta$ , también pudieron medir  $\lambda$  con un aparato como el de la figura 4.20, al realizar estos análisis obtuvieron exactamente los mismos resultados que por interferometría, y además como calcularon idénticas longitudes de onda pudieron concluir que eran ondas.

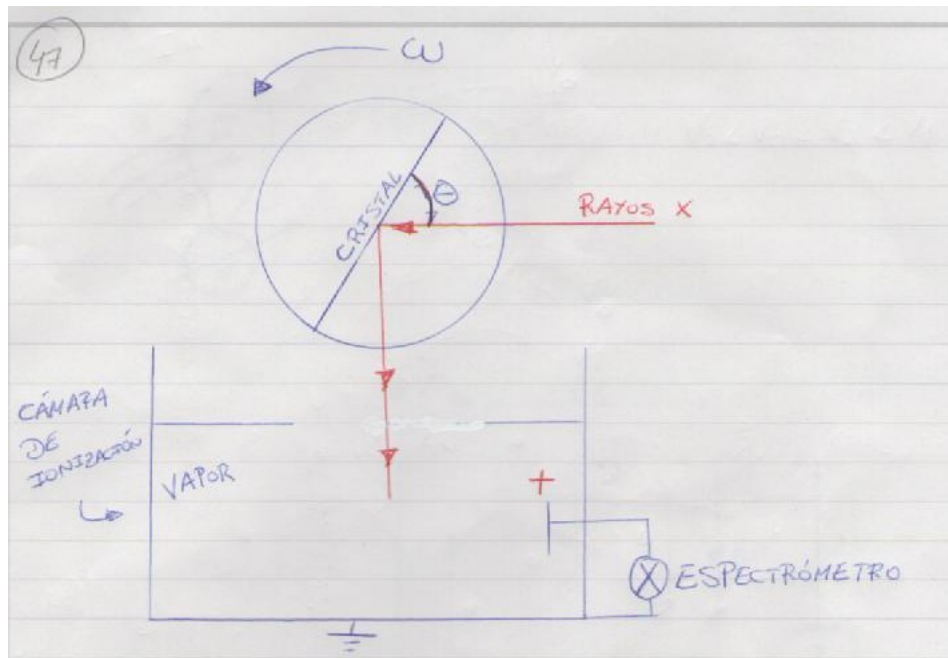


Figura 4.20: Rayos X por espectrómetro

$\theta$  : Variable al girar

Como los electrones de mayor energía son atraídos por el potencial positivo puesto en el terminal indicado con +, el espectrómetro graficado en 4.21, se cargará más negativamente y la separación entre los terminales será cada vez mayor, debido a la repulsión de cargas de igual signo. Cuando medían la separación máxima, significaba que  $n = 1$  en la ecuación 4.19; si conocían  $d$ , podían calcular  $\lambda$  observando el  $\theta$  del aparato de la figura 4.20.

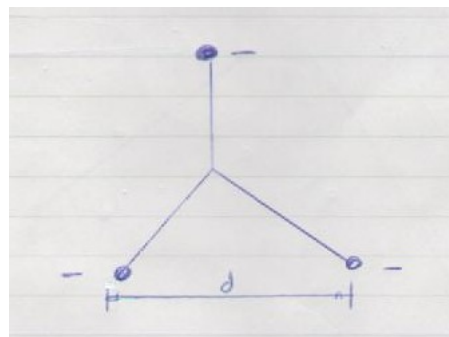


Figura 4.21: Espectrómetro de rayos X

## 8. Efecto Compton

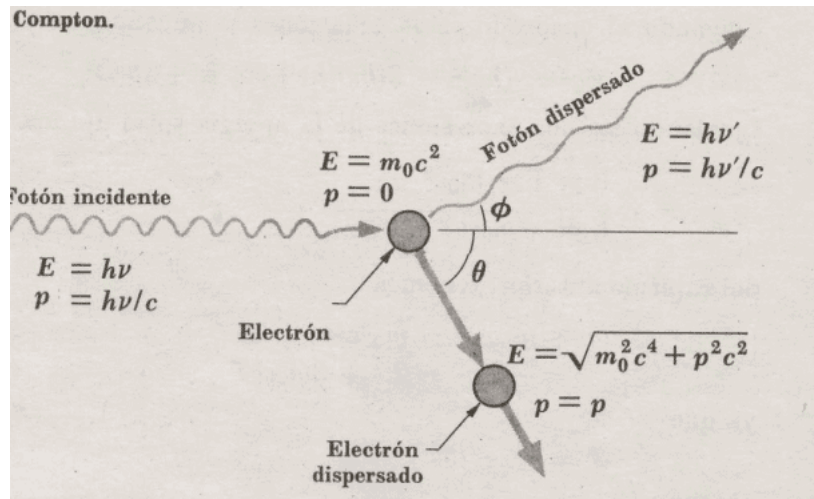
### Propiedades corpusculares de las ondas

La teoría cuántica de la luz afirma que los fotones se comportan como partículas, excepto en lo que respecta a la ausencia de masa en reposo. Si esto es verdadero, nos será posible estudiar choque entre fotones y electrones del mismo modo que en la física clásica.

El efecto Compton, consiste en el bombardeo de rayos X sobre un electrón en “reposo”<sup>3</sup>, y como resultado del impacto los fotones de rayos X se desvían perdiendo energía, o sea perdiendo frecuencia  $\nu$  y por ende, ganando longitud de onda  $\lambda$ .

Como el experimento se realiza considerando la mecánica clásica, es que este demuestra el comportamiento o las propiedades corpusculares de las ondas.

La figura 4.22 muestra como se puede representar un choque entre un fotón de rayos X y un electrón. El fotón se dispersa fuera de su dirección original, mientras que el electrón adquiere cantidad de movimiento y se pone en movimiento.



- El electrón blanco está en reposo, por eso la cantidad de movimiento es nula.
- Luego del choque, el fotón dispersado tiene energía y cantidad de movimiento distintas a las incidentes.
- Luego del impacto, el electrón adquiere energía cinética y cantidad de movimiento.

Figura 4.22: Efecto Compton

Si recordamos lo visto en relatividad, podemos expresar a la energía

<sup>3</sup>Podemos considerar en reposo a los electrones de las órbitas alejadas del núcleo, debido que si el radio aumenta, la velocidad disminuye.

$$E = \sqrt{m_0^2 C^4 + p^2 C^2}$$

pero como el fotón no tiene masa en reposo, su energía total es

$$E = pC$$

y como

$$E = h\nu$$

el momentum (cantidad de movimiento) para un fotón es

$$p = \frac{h\nu}{C}$$

El momentum a diferencia de la energía, es una cantidad vectorial entonces debemos analizar lo que ocurre en cada dirección

- Cantidad de movimiento sobre el eje X:

$$\frac{h\nu}{C} + 0 = \frac{h\nu'}{C} \cos(\phi) + p \cos(\theta) \quad (4.20)$$

- Cantidad de movimiento sobre el eje Y:

$$0 + 0 = \frac{h\nu'}{C} \sin(\phi) - p \sin(\theta) \quad (4.21)$$

multiplicamos por  $C$  las ecuaciones 4.20 y 4.21 y despejamos los términos que dependen de  $\theta$ .

$$\text{de 4.20} \rightarrow C p \cos(\theta) = h\nu - h\nu' \cos(\phi)$$

$$\text{de 4.21} \rightarrow C p \sin(\theta) = h\nu' \sin(\phi)$$

elevando ambas expresiones al cuadrado y sumando miembro a miembro

$$p^2 C^2 [\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)] = [h\nu' \sin(\phi)]^2 + [h\nu - h\nu' \cos(\phi)]^2$$

$$p^2 C^2 = (h\nu')^2 \sin^2(\phi) + (h\nu)^2 - 2[h\nu h\nu' \cos(\phi)] + \cos^2(\phi) (h\nu')^2$$

$$p^2 C^2 = (h\nu)^2 - 2h\nu h\nu' \cos(\phi) + (h\nu')^2 \quad (4.22)$$

La energía del electrón dispersado, es la suma de la energía cinética y la energía en reposo;

$$E = T + m_0 C^2 = \sqrt{m_0^2 C^4 + p^2 C^2} \quad (4.23)$$

elevando 4.23 al cuadrado

$$T^2 + 2Tm_0 C^2 + m_0^2 C^4 = m_0^2 C^4 + p^2 C^2$$

$$T^2 + 2Tm_0C^2 = p^2C^2 \quad (4.24)$$

pero, se puede considerar que en el choque, el fotón pierde una cantidad de energía igual a la que gana el electrón en forma de energía cinética  $T$ , o sea

$$T = h\nu - h\nu' \quad (4.25)$$

reemplazando 4.25 en 4.24

$$p^2C^2 = (h\nu)^2 - 2(h\nu)(h\nu') + (h\nu')^2 + 2(h\nu - h\nu')m_0C^2 \quad (4.26)$$

igualando 4.26 con 4.22

$$(h\nu)^2 - 2h\nu h\nu' \cos(\phi) + (h\nu')^2 = (h\nu)^2 - 2(h\nu)(h\nu') + (h\nu')^2 + 2(h\nu - h\nu')m_0C^2$$

$$-h\nu h\nu' \cos(\phi) + (h\nu')^2 = - (h\nu)(h\nu') + (h\nu')^2 + (h\nu - h\nu')m_0C^2$$

$$h(\nu - \nu')m_0C^2 = h^2\nu\nu'[1 - \cos(\phi)]$$

$$C\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)m_0C^2 = h\frac{C}{\lambda}\frac{C}{\lambda'}[1 - \cos(\phi)]$$

$$C\left(\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda\lambda'}\right)m_0C^2 = \frac{h}{\lambda\lambda'}[1 - \cos(\phi)]$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0C}[1 - \cos(\phi)]$$

si denominamos

$$\frac{h}{m_0C} = \lambda_{Compton} = \lambda_c$$

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c[1 - \cos(\phi)] \quad (4.27)$$

La ecuación 4.27 proporciona la variación de la longitud de onda que se espera que experimente un fotón al ser dispersado un ángulo  $\phi$  por una partícula de masa en reposo  $m_0$ ; el proceso es independiente de la longitud de onda del fotón incidente.

- Cambio máximo de longitud de onda que puede ocurrir, tendrá lugar cuando  $\phi = 180$ , cuando la variación de longitud de onda sea el doble de la longitud de onda *Compton*, lo que ocasiona una mayor pérdida de energía.

- El cambio mínimo ocurre cuando  $\phi = 0$ , de manera que la ecuación es nula y por lo tanto no hay cambio de energía. Podemos pensar que lo que ocurre es apenas un rozamiento y no un choque.

La demostración experimental de esto, se puede hacer mediante un dispositivo como el de la figura 4.23, un haz de rayos X de longitud de onda conocida, se dirige hacia un blanco y las longitudes de onda de los rayos X dispersados se terminan para varios ángulos  $\phi$ .

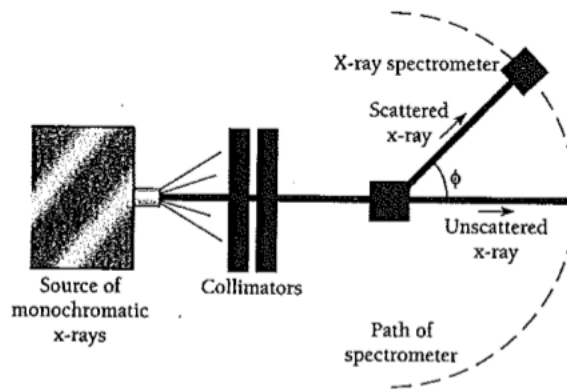


Figura 4.23: Experimento Compton

Los resultados que se obtienen al hacer esta demostración, son los de la figura 4.24

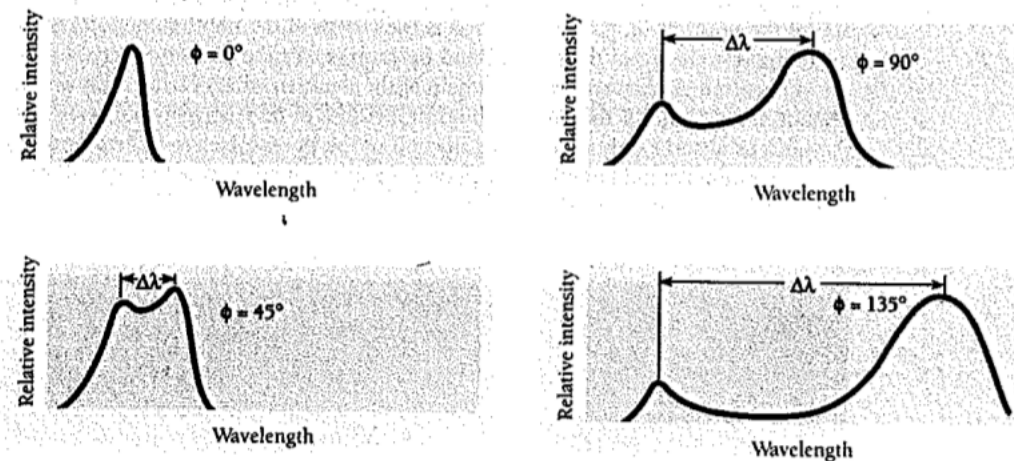


Figura 4.24: Dispersión Compton

Cuando se coloca el detector con un ángulo fijo  $\phi$ , no solo se observa  $\lambda'$  como lo indica la teoría<sup>4</sup>, sino que también aparece  $\lambda$ , para este mismo ángulo; o sea que hay fotones dispersados que no han perdido energía, esto se debe a que el choque se efectuó con un electrón de los más cercanos al núcleo, y como las fuerzas nucleares son muy fuertes a corto alcance, los mantienen muy unidos al núcleo, de esta manera es como si los fotones chocaran con una gran masa y por lo tanto dichos choques serán elásticos.

Como observamos en la figura, también aparecen multiplicidad de longitudes de onda entre  $\lambda$  y  $\lambda'$ , esto lo podemos explicar pensando que los dos casos anteriores, son los casos extremos (que choque con un electrón de la última órbita o uno muy cercano al núcleo), pero entre estos dos existen distintos choques semi plásticos que corresponden a los choques con electrones más o menos alejados del núcleo.

En todo este experimento, se consideró que la masa de un fotón no depende de la velocidad, o sea no varía con la velocidad, pero si varía con la frecuencia  $\nu$ , por ser onda electromagnética.

Si en lugar de fotones, hubiésemos tenido que usar otra partícula que no sea onda electromagnética, su masa si variaría con la velocidad.

---

<sup>4</sup>estos corresponden a los fotones que chocan con los electrones de la última órbita



## Capítulo 5

# Mecánica ondulatoria

### Propiedades ondulatorias de las partículas

#### 1. Ondas de De Broglie

En 1924 De Broglie propuso una hipótesis revolucionaria, en ausencia de base experimental, cuando sostuvo que la materia en movimiento posee propiedades de onda y de partícula<sup>1</sup>.

En 1927 Davison-Germer comprobaron dicha hipótesis mediante el experimento de la difracción de partículas en cristales.

El principio de dualidad onda-corpúsculo, sirvió de punto de partida para el desarrollo posterior de la mecánica cuántica.

Para un fotón de luz de frecuencia  $\nu$ , podemos expresar

$$E = mC^2 = h\nu = (mC) C = pC$$

$$h\nu = pC$$

$$h = \frac{pC}{\nu} \tag{5.1}$$

recordando que

$$\nu = \frac{C}{\lambda} \tag{5.2}$$

reemplazando 5.2 en la ecuación de 5.1 y despejando  $\lambda$

$$\lambda = \frac{h}{mC}$$

---

<sup>1</sup>Comportamiento de la materia como onda-corpúsculo (ondícula).

lo cual representa la longitud de onda de un fotón, no cabe duda que es un fotón debido a que viaja a la velocidad de la luz.

De Broglie estableciendo por intuición de simetría en la naturaleza, concibió una fórmula completamente general que se aplica tanto a fotones como a partículas materiales

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} \quad (5.3)$$

La ecuación 5.3 representa la longitud de onda asociada a una partícula en movimiento, observamos que si  $v \rightarrow 0$   $\lambda \rightarrow \infty$ , lo cual no tiene sentido físico.

Partiendo de  $E = mC^2 = h\nu$ , despejando  $\nu$

$$\nu = \frac{mC^2}{h} \quad (5.4)$$

Si llamamos  $\omega$  a la velocidad de onda que *tendría* la onda De Broglie, podremos aplicar la fórmula  $\omega = \nu\lambda$ , el valor de  $\nu$  lo tenemos dado por la ecuación 5.4 y la longitud de onda está expresada por 5.3

$$\omega = \lambda\nu = \frac{h}{mv} \cdot \frac{mC^2}{h}$$

$$\omega = \frac{C^2}{v}$$

pero como  $v \ll C$

$$\omega > C \quad (5.5)$$

Si observamos la ecuación 5.5, la velocidad de la onda de De Broglie debería ser mayor a la velocidad de la luz, lo cual no puede ser.

Para comprender este inesperado resultado (que no tiene sentido físico, debido a que contradice la relatividad) veremos los conceptos de velocidad de onda  $\omega$  y velocidad del grupo de ondas  $\mu$ .

La amplitud de las ondas de De Broglie de un cuerpo en movimiento esta relacionada con la probabilidad de que sea encontrado en un punto y en un momento determinado <sup>2</sup>.

En realidad, se necesita que la representación de un cuerpo en movimiento corresponda a un *paquete o grupo de ondas*, como el de la figura 5.1.

---

<sup>2</sup>Más concretamente, el cuadrado de la función de onda asociada a la partícula en movimiento sea igual a la densidad de probabilidad.

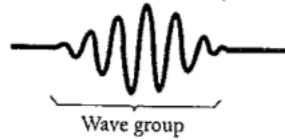


Figura 5.1: Grupo de ondas

Un ejemplo conocido de cómo se originan los grupos de ondas, es cuando se producen simultáneamente dos ondas sonoras de la misma amplitud, pero de frecuencia ligeramente distinta, el sonido que oímos es igual al promedio de las dos frecuencias originales y una amplitud que aumenta y disminuye periódicamente como se ve en la figura 5.2.

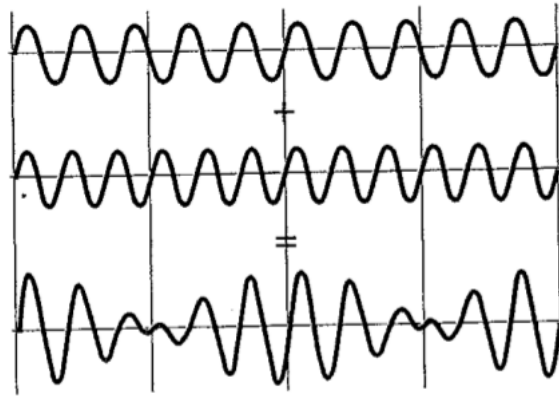


Figura 5.2: Suma de ondas sonoras

Una manera de describir matemáticamente un grupo de ondas es hacerlo en términos de una superposición de ondas individuales, cada una con longitud de onda diferente, que al interferir entre sí dan por resultado variaciones en las amplitudes que definen la forma del grupo.

Supongamos que un grupo de ondas se produce por la combinación de dos ondas de la misma amplitud  $A$ , pero que difieren en su frecuencia angular y en su constante de propagación en  $d\omega$  y  $dk$ . De esta manera

$$y_1 = A \cos(\omega t - kx)$$

$$y_2 = A \cos[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x]$$

El desplazamiento resultante  $y$  en un tiempo  $t$  y en una posición  $x$  es la suma de  $y_1$  e  $y_2$ .

Si recordamos la identidad

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

y también

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

entonces hacemos  $y = y_1 + y_2$

$$y = 2A\cos\left[\frac{1}{2}(2\omega + d\omega)t - (2k + dk)x\right]\cos\left[\frac{1}{2}d\omega t - \frac{1}{2}dkx\right]$$

puesto que  $d\omega$  y  $dk$  son pequeños comparados con  $\omega$  y  $k$ , podemos considerar

$$2\omega + d\omega \approx 2\omega$$

$$2k + dk \approx 2k$$

$$y = 2A\cos(\omega t - kx)\cos\left(\frac{d\omega}{2}t - \frac{dk}{2}x\right) \quad (5.6)$$

La ecuación 5.6 representa una onda de frecuencia angular  $\omega$  y constante de propagación  $k$  que tiene sobrepuesta una modulación de frecuencia angular  $1/2d\omega$  y constante de propagación  $1/2dk$ . El efecto de la modulación es producir grupos de ondas sucesivos.

La velocidad de fase  $W$  es

$$W = \frac{\omega}{k}$$

mientras que la velocidad  $\mu$  del grupo de ondas es

$$\mu = \frac{d\omega}{dk}$$

La frecuencia angular y la constante de propagación de las ondas de De Broglie, asociadas con un cuerpo en movimiento de masa en reposo  $m_0$  y velocidad  $v$ , son:

$$\omega = 2\pi\nu$$

reemplazando a  $\nu$  por la expresión de la ecuación 5.4

$$\omega = \frac{2\pi mC^2}{h}$$

reemplazando la masa relativista

$$\omega = \frac{2\pi m_0 C^2}{h\sqrt{1 - v^2/C^2}}$$

y

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$k = \frac{2\pi mv}{h}$$

$$k = \frac{2\pi m_0 v}{h\sqrt{1 - v^2/C^2}}$$

La velocidad de grupo  $\mu$  de las ondas de De Broglie asociada con el cuerpo, es

$$\mu = \frac{d\omega}{dk}$$

como el numerador y el denominador son funciones de la velocidad, podemos dividir ambos términos por  $dv$

$$\mu = \frac{\frac{d\omega}{dv}}{\frac{dk}{dv}} \quad (5.7)$$

ahora

$$\frac{d\omega}{dv} = \frac{2\pi m_0 v}{h \left(1 - \frac{v^2}{C^2}\right)^{3/2}} \quad (5.8)$$

$$\frac{dk}{dv} = \frac{2\pi m_0}{h} \left[ \frac{\left(1 - \frac{v^2}{C^2}\right)^{1/2} - \frac{v}{2} \left(1 - \frac{v^2}{C^2}\right)^{-1/2} \left(\frac{-2v}{C^2}\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{C^2}\right)} \right] \quad (5.9)$$

multiplicando y dividiendo 5.9 por  $\left(1 - \frac{v^2}{C^2}\right)^{1/2}$

$$\frac{dk}{dv} = \frac{2\pi m_0}{h} \left[ \frac{\left(1 - \frac{v^2}{C^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{v^2}{C^2}\right)^{1/2} - \frac{v^2}{C^2} \left(1 - \frac{v^2}{C^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{v^2}{C^2}\right)^{-1/2}}{\left(1 - \frac{v^2}{C^2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{C^2}\right)^{1/2}} \right]$$

$$\frac{dk}{dv} = \frac{2\pi m_0}{h} \left[ \frac{1 - \frac{v^2}{C^2} + \frac{v^2}{C^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{C^2}\right)^{3/2}} \right] \quad (5.10)$$

volviendo a la ecuación 5.7 y reemplazando 5.8 y 5.10 se tiene

$$\mu = \frac{\frac{2\pi m_0 v}{h \left(1 - \frac{v^2}{C^2}\right)^{3/2}}}{\frac{2\pi m_0}{h \left(1 - \frac{v^2}{C^2}\right)^{3/2}}}$$

$$\mu = v \quad (5.11)$$

La ecuación 5.11 expresa que *la velocidad del grupo de ondas asociada a una partícula en movimiento, es igual a la velocidad del cuerpo en movimiento*, como son iguales, nos quedamos con la velocidad de grupo de ondas y llegamos a la mecánica cuántica.

## 2. Principio de incertidumbre

El hecho de que un cuerpo en movimiento se considere como un grupo de ondas de De Broglie en vez de como una entidad localizada, sugiere que existe un límite fundamental para la precisión con la que podemos medir sus propiedades corpusculares.

Un argumento lógico para esto, se basa en la naturaleza de un grupo de ondas, nos permite relacionar la incertidumbre  $\Delta x$  inherente a la medición de la posición de una partícula con la incertidumbre  $\Delta p$  inherente a la medición simultánea de la cantidad de movimiento.

Cuando se combinan las ondas de De Broglie<sup>3</sup> y llamando a las funciones  $\phi_1$  y  $\phi_2$  en lugar de  $Y_1$  y  $Y_2$  como lo llamamos en la sección anterior, se tiene

$$\phi_1 = A \cos(\omega t - kx)$$

$$\phi_2 = A \cos[(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x]$$

al sumar estas dos expresiones de la misma manera que se hizo anteriormente, resulta

$$\phi = 2A \cos(\omega t - kx) \cos\left(\frac{\Delta\omega t}{2} - \frac{\Delta k}{2}x\right) \quad (5.12)$$

la gráfica de la ecuación 5.12 se representa en la figura 5.3.

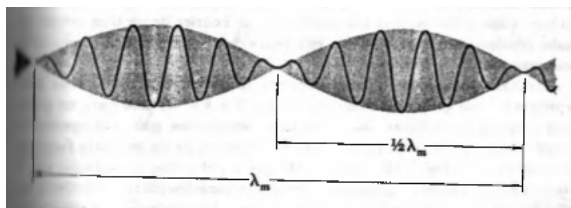


Figura 5.3: Grupos de ondas que resultan de la interferencia de trenes de ondas que tienen la misma amplitud, pero están ligeramente corridos en fase.

Como se ve en la figura 5.3 la longitud de cada grupo de ondas, es igual a la mitad de la longitud de onda de modulación  $\lambda_m$  además, se puede suponer

<sup>3</sup>No el grupo de ondas, sino las ondas asociadas a una partícula.

razonablemente que dicha extensión es del mismo orden de magnitud que la incertidumbre  $\Delta x$ , debido a que la partícula no puede escaparse de ese grupo de ondas; de esta manera, se tiene

$$\Delta x = \frac{1}{2} \lambda_m$$

$$2\Delta x = \lambda_m \quad (5.13)$$

pero si  $k$  es la constante de propagación de la onda que tiene longitud de onda  $\lambda_m$

$$k_m = \frac{2\pi}{\lambda_m} \therefore \lambda_m = \frac{2\pi}{k_m}$$

pero, de acuerdo a la ecuación 5.12 se observa que

$$k_m = \frac{1}{2} \Delta k$$

de manera que

$$\lambda_m = \frac{2\pi}{\frac{1}{2} \Delta k} \quad (5.14)$$

ahora, igualando la ecuación 5.13 con 5.14

$$\lambda_m = \frac{2\pi}{\frac{1}{2} \Delta k} = 2\Delta x$$

y despejando  $\Delta k$

$$\Delta k = \frac{2\pi}{\Delta x} \quad (5.15)$$

según la ecuación 5.3 de De Broglie, podemos expresar que

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (5.16)$$

y

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (5.17)$$

introduciendo 5.16 en 5.17

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi p}{h} \therefore p = \frac{h}{2\pi} k$$

Por lo tanto, una indeterminación o incertidumbre en  $\Delta k$  en la constante de propagación del grupo de ondas asociado a una partícula en movimiento, da como resultado una indeterminación  $\Delta p$  en su cantidad de movimiento, resultando

$$\Delta p = \frac{h}{2\pi} \Delta k \quad (5.18)$$

reemplazando 5.15 en la ecuación 5.18

$$\Delta p = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{\Delta x}$$

$$\Delta p = \frac{h}{\Delta x}$$

$$\Delta p \Delta x \approx h$$

y la fórmula final del principio de incertidumbre, es:

$$\Delta p \Delta x \geq h \quad (5.19)$$

En la fórmula 5.19 el signo mayor, es debido a que  $\Delta p$  y  $\Delta x$  son *mínimos irreducibles*, como consecuencia de la naturaleza ondulatoria de los cuerpos en movimiento; o sea que cualquier incertidumbre instrumental o estadística que se produzca, incrementará el producto, por esto sacamos el igual.

Podemos decir finalmente, que si de una magnitud se tiene la certeza en una medición, la indeterminación del otro parámetro es infinita.

El principio de indeterminación, establece que el producto de la incerteza de la posición de un cuerpo en un instante determinado, multiplicado por la indeterminación de su cantidad de movimiento, es mayor o igual que la constante de Planck; en otras palabras podemos decir que no se puede medir con absoluta certeza simultáneamente la posición y la cantidad de movimiento de una partícula.

$$\text{si } \Delta x \uparrow \therefore \Delta p \downarrow$$

$$\text{si } \Delta x \downarrow \therefore \Delta p \uparrow$$

Una interpretación gráfica se da en la figura 5.4, en la cual vemos que para el ejemplo de la fotografía, la indeterminación en la posición es nula mientras que la indeterminación en la cantidad de movimiento es infinita; de manera opuesta, en la filmación si conocemos el tiempo de filmación, podemos calcular sin incertezas la cantidad de movimiento, provocando una incerteza en la posición infinita.



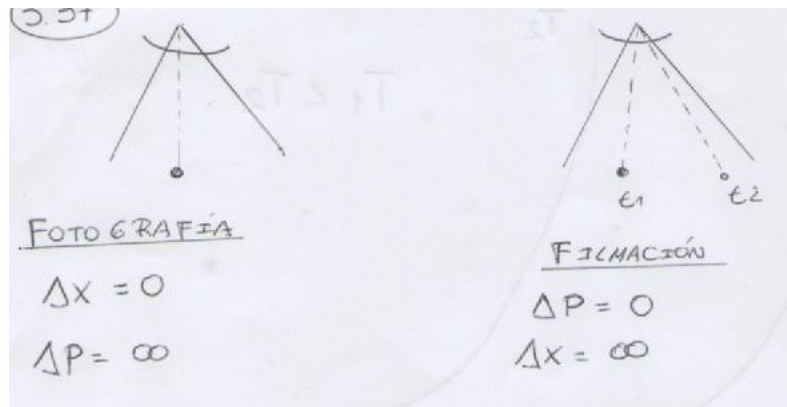


Figura 5.4: Principio de Incertidumbre

### 3. Experiencia de Davisson-Germer

Así como el efecto Compton es un experimento que demuestra la naturaleza corpuscular de las ondas, el experimento de Davisson y Germer demuestra la naturaleza ondulatoria de las partículas. Por lo tanto la onda puede ser considerada como una partícula y viceversa.

En este experimento, se produce la difracción de electrones, por lo tanto quedaría demostrado el comportamiento dual *onda-corpúsculo* que es propio de la mecánica cuántica.

Davisson y Germer estudiaron la dispersión de electrones en sólidos, utilizando un aparato como el de la figura 5.5 .

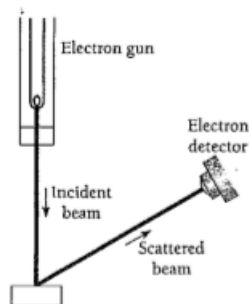


Figura 5.5: Experiencia de Davidson y Germer

La energía de los electrones en el rayo primario, el ángulo de incidencia sobre el blanco y la posición del detector pueden ser variables. La física clásica predice que los electrones dispersados emergen en todas direcciones dependiendo poco del ángulo de incidencia y aun menos de la energía de los electrones primarios.

Davisson y Germer, comprobaron estas predicciones utilizando un bloque de níquel como blanco. En el curso de su trabajo tuvieron un accidente que permitió la entrada de aire al aparato, lo que provocó la oxidación de la superficie del níquel. Para reducir a níquel puro, el óxido de níquel formado, se lo calentó a altas temperaturas. Luego se volvió a colocar y, al seguir con la experiencia, obtuvieron resultados muy distintos, en lugar de una variación continua en la intensidad de los electrones dispersados según el ángulo de incidencia, se observaron máximos y mínimos cuya posición dependía de la energía de los electrones.

La hipótesis de De Broglie sugería la interpretación de que las ondas de electrones las difractaba el blanco, en forma similar a como son difractados por dos planos de un átomo de cristal. Esta interpretación se confirmó cuando se aclaró que el efecto de calentamiento del bloque de níquel a altas temperaturas era producir un monocristal a partir de muchos cristales pequeños que lo componían, quedando todos los átomos dispuestos en una red regular, tal como se muestra en la figura 5.6 .

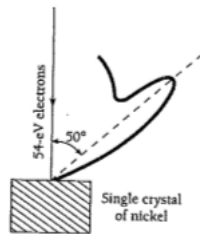


Figura 5.6: Difracción de electrones

Al realizar este experimento, pudieron verificar de tres maneras distintas los resultados obtenidos:

1. Por detección experimental:

El detector de la figura 5.5 es variable, entonces pudieron detectar el ángulo de máxima dispersión.

2. Por la ecuación de Bragg:

$$n\lambda = 2dsen(\theta) \quad (5.20)$$

Conociendo todos los datos de la ecuación 5.20, pudieron calcular la longitud de onda que dio  $1,65\text{\AA}$  demostrando que los electrones pueden difractarse, o sea que las partículas tienen comportamiento de ondas.

3. Por la hipótesis de De Broglie:

Sin dudas, esta es la más importante y para demostrarla comencemos planteando la energía cinética de un electrón recordando que su velocidad es mucho menor que la de la luz

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \left(\frac{m}{m}\right) \therefore \frac{1}{2} \frac{m^2 v^2}{m} = T$$

$$T = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} \quad (5.21)$$

si despejamos la cantidad de movimiento de la ecuación 5.21, resulta

$$mv = p = \sqrt{2mT} \quad (5.22)$$

la longitud de onda del electrón utilizando la fórmula de De Broglie, es por consiguiente

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mT}} = 1,65 \text{Å}$$

Lo cual constituye una conformación directa de la hipótesis de De Broglie sobre las propiedades ondulatorias de los cuerpos en movimiento.

## Capítulo 6

# Mecánica cuántica

### 1. Introducción

La mecánica cuántica trata la relación entre magnitudes observables, pero el principio de incertidumbre, altera radicalmente la definición de “magnitud observable” en el campo atómico, ya que dice que no se puede determinar la posición y la cantidad de movimiento con precisión simultáneamente. De esta manera, las cantidades cuyas relaciones busca la mecánica cuántica son *probabilidades*.

### 2. Ecuación de onda

Como indicamos anteriormente, la cantidad variable que caracteriza las ondas de De Broglie se conoce con el nombre de *función de onda*. Se representa con la letra  $\psi$ , el valor de la función de onda asociada a un cuerpo en movimiento en un punto particular del espacio y en un instante determinado, está relacionado con la probabilidad de encontrar el cuerpo en aquel punto y en ese instante. El cuadrado del valor absoluto de la función de onda  $|\psi|^2$  se conoce como *densidad de probabilidad*.

Ya que por definición  $|\psi|^2$  es proporcional a la probabilidad  $P$  de encontrar el cuerpo descrito por  $\psi$ , se debe cumplir que la integral de  $|\psi|^2$  en todo el volumen sea finita, ya que el cuerpo está en alguna parte; o sea

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dv \quad (6.1)$$

Si la ecuación 6.1 es 0, la partícula no existe y la integral evidentemente no puede tener resultando  $\infty$  y tener este significado; de tal manera  $|\psi|^2$  no puede ser negativa o compleja, debido al camino seguido para definirla, en otras palabras la única posibilidad dada es que su integral sea una cantidad finita para que  $\psi$  describa apropiadamente un cuerpo real.

Generalmente es conveniente tener  $|\psi|^2$  igual a la probabilidad  $P$  de encontrar la partícula descrita por  $\psi$ , entonces se cumple la siguiente relación

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dv = 1$$

ya que

$$\int_{-\infty}^{\infty} P dv = 1 \quad (6.2)$$

o sea la ecuación 6.2 significa que la partícula existe en algún lugar, en todo momento.

### 3. Ecuación de Schrödinger

La ecuación de Schrödinger, que es la ecuación fundamental de la mecánica cuántica, es una ecuación de onda en la variable  $\varphi$  en su versión dependiente del tiempo y en la variable  $\psi$  en su versión independiente. Antes de abordar este tema, repasaremos la ecuación de onda general dada por la ecuación 6.3, que gobierna a una onda cuya cantidad variable es  $y$  que se propaga en la dirección  $x$  con la velocidad  $v$ .

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (6.3)$$

Todas las soluciones a la ecuación 6.3 deben ser de la forma  $y = F(t \pm \frac{x}{v})$ , tomamos este tipo de soluciones debido a que nos interesa el equivalente ondulatorio de una partícula libre, es decir, una partícula que no esté bajo la influencia de ninguna fuerza y que, por lo tanto, viaja en una trayectoria recta a velocidad constante.

#### 3.1. Forma dependiente del tiempo

Partiendo de la función de onda mecánica<sup>1</sup> tenemos

$$y = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) \right] - i A \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) \right] \quad (6.4)$$

por la relación de Euler  $e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i \sin(\theta)$ , podemos expresar a la ecuación 6.4 como

$$y = A e^{-i\omega(t-x/v)} \quad (6.5)$$

Cuando se sustituye en la ecuación 6.5  $\omega$  por  $2\pi\nu$  y  $v$  por  $\lambda\nu$ , obtenemos

---

<sup>1</sup>Solución a la ecuación de onda.

$$y = Ae^{-2\pi i\nu(t-x/\lambda\nu)}$$

que por analogía con la función de un grupo de ondas asociado a una partícula en movimiento, podemos expresar

$$\varphi = Ae^{-2\pi i(\nu t - \frac{\nu}{v}x)}$$

Considerando  $E = h\nu \therefore \nu = \frac{E}{h}$ ,  $\lambda = \frac{v}{\nu}$  y además que  $\lambda = \frac{h}{p}$  podemos expresar

$$\varphi = Ae^{-2\pi i(\nu t - \frac{x}{\lambda})}$$

$$\varphi = Ae^{-2\pi i(\frac{E}{h}t - \frac{p}{h}x)} \quad (6.6)$$

$$\varphi = Ae^{\frac{-2\pi i}{h}(Et - px)} \quad (6.7)$$

la ecuación 6.7 es la función del grupo de ondas asociada a una partícula en movimiento dada por la energía y la cantidad de movimiento, pero es función de la posición y el tiempo; o sea  $\varphi = f(x; t)$ .

Derivando la función 6.7 dos veces respecto a  $x$  resulta

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = Ae^{\frac{-2\pi i}{h}(Et - px)} \left( \frac{-2\pi i}{h} \right) (-p)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = Ae^{\frac{-2\pi i}{h}(Et - px)} \left( \frac{-2\pi i}{h} \right)^2 (p)^2$$

pero como  $\varphi = Ae^{\frac{-2\pi i}{h}(Et - px)}$  podemos expresar

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \varphi \left( \frac{2\pi i}{h} \right)^2 (p)^2$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \varphi \frac{4\pi^2 i^2 p^2}{h^2} = -\frac{4\pi^2}{h^2} p^2 \varphi$$

finalmente

$$p^2 \varphi = -\frac{h^2}{4\pi^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (6.8)$$

ahora, derivando la ecuación 6.7 una vez respecto del tiempo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = Ae^{\frac{-2\pi i}{h}(Et - px)} \left( \frac{-2\pi i}{h} \right) E$$

pero por lo dicho anteriormente

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = E \varphi \left( \frac{-2\pi i}{h} \right)$$

$$E\varphi = \frac{-h}{2\pi i} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (6.9)$$

A velocidades pequeñas comparadas con la de la luz, la energía total  $E$  de una partícula es la suma de su energía cinética  $T$  y su energía potencial  $V$ , donde  $V$  es una función general de la posición  $x$  y de tiempo  $t$

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 + V = \frac{p^2}{2m} + V$$

multiplicando ambos términos por  $\varphi$

$$E\varphi = \frac{\varphi p^2}{2m} + \varphi V \quad (6.10)$$

reemplazando las ecuaciones 6.8 y 6.9 en la 6.10

$$\frac{-h}{2\pi i} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \varphi V$$

multiplicando todo por  $(-1)$

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \varphi V \quad (6.11)$$

La ecuación 6.11 es la *Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo en una sola dimensión*.

Para generalizar la ecuación 6.11 al espacio, debemos utilizar el Laplaciano

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{h^2}{8\pi m} \nabla^2 \varphi - \varphi V$$

resultando

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{h^2}{8\pi^2 m} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) - \varphi V \quad (6.12)$$

como ya es claro, la ecuación 6.12 es la *Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo en el espacio*.

Como la ecuación  $\varphi$  satisface a las ecuaciones 6.11 y 6.12, podemos decir que la solución a la ecuación de la mecánica cuántica es la función del grupo de ondas asociada a una partícula en movimiento.

### 3.2. Forma en estado estacionario

En muchas situaciones, la energía potencial de una partícula no depende explícitamente del tiempo; las fuerzas que actúan sobre ella y por lo tanto  $V$ , varían solamente con la posición de la partícula. Cuando esto se cumple, la ecuación de Schrödinger se puede simplificar eliminando todo lo referente a  $t$ .

Partiendo de 6.6 podemos expresar

$$\varphi = Ae^{-2\pi i \left( \frac{E}{h} t - \frac{p}{h} x \right)} = Ae^{\left( \frac{-2\pi i E}{h} t \right)} e^{\left( \frac{2\pi i p}{h} x \right)} \quad (6.13)$$

llamando  $\psi$  a la parte que varía con la posición de la ecuación 6.13, de manera que solo sea función de  $x$ , o sea  $\psi = f(x)$  y  $\psi \neq f(t)$

$$\psi = e^{\left(\frac{2\pi i p}{h} x\right)}$$

entonces podemos expresar a la ecuación 6.13 como

$$\varphi = \psi e^{\left(\frac{-2\pi i E}{h} t\right)} \quad (6.14)$$

$\varphi$  : función del grupo de ondas asociada a una partícula.

$\psi$  : función del grupo de ondas asociada a una partícula, independiente del tiempo.

Reemplazando la ecuación 6.14 en la ecuación de Schrödinger en una dimensión, se tiene

$$\frac{h}{2\pi i} \psi e^{\left(\frac{-2\pi i E}{h} t\right)} \left( \frac{-2\pi i E}{h} \right) = \frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} e^{\left(\frac{-2\pi i E}{h} t\right)} - V \psi e^{\left(\frac{-2\pi i E}{h} t\right)}$$

simplificando el término común  $e^{\left(\frac{-2\pi i E}{h} t\right)}$

$$-\psi E = \frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - V \psi$$

llevando todo al primer miembro y multiplicando por  $(-1)$

$$\psi E + \frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - V \psi = 0$$

$$\frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (E - V) \psi = 0$$

multiplicando todo por  $\frac{8\pi^2 m}{h^2}$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V) \psi = 0 \quad (6.15)$$

La ecuación 6.15 es la ecuación de *Schrödinger* en estado estacionario, pero solamente en una dimensión, realizamos el mismo procedimientos que antes para llevarlo al espacio.

$$\nabla^2 \psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V) \psi = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V) \psi = 0$$



### 3.3. Partícula en una caja

El interés de desarrollar este tema es triple:

- Recordar la solución de ecuaciones diferenciales.
- La aplicación de la solución de la ecuación de Schrödinger a un caso concreto.
- Demostrar la cuantificación de la energía de la partícula dentro de la caja, es decir que dicha partícula no puede tener cualquier valor de energía dentro de la caja.

Podemos especificar el movimiento de la partícula diciendo que está restringida a viajar a lo largo del eje  $x$  entre  $x = 0$  y  $x = L$  por paredes infinitamente duras y con energía infinita como se muestra en la figura 6.1; además la partícula no pierde energía cuando choca con estas paredes, de modo que su energía permanece constante. También debemos decir que la energía potencial  $V$  de la partícula es infinita en ambos lados de la caja, mientras que  $V$  permanece constante, por conveniencia igual a cero, en el interior.

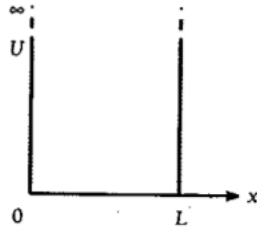


Figura 6.1: Paredes de potencial infinito

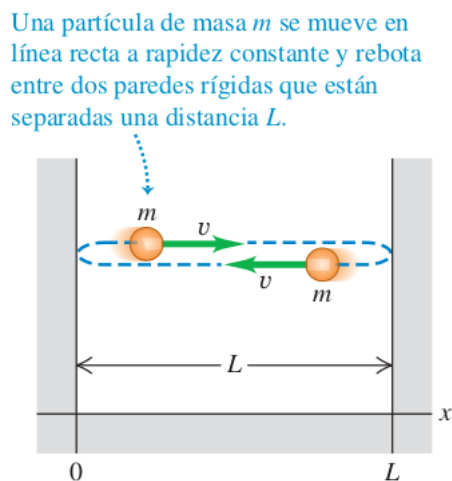


Figura 6.2: Partícula en una caja de ancho  $L$

Ya que la partícula no puede tener una cantidad infinita de energía, no puede existir fuera de la caja, y así su función de onda  $\psi$  es cero para  $x \leq 0$  y  $x \geq L$ . Nuestra tarea es encontrar el valor de  $\psi$  dentro de la caja.

Bajo estas condiciones, la ecuación de Schrödinger se convierte en:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{h^2}{8\pi^2 m} E \psi = 0 \quad (6.16)$$

existen tres posibles soluciones a la ecuación 6.16 las cuales son

$$\psi_1 = A \cos \left( \sqrt{\frac{8m\pi^2 E}{h^2}} x \right) \quad (6.17)$$

$$\psi_2 = B \sin \left( \sqrt{\frac{8m\pi^2 E}{h^2}} x \right) \quad (6.18)$$

o bien

$$\psi_3 = \psi_1 + \psi_2$$

Estas soluciones están sujetas a la condición de frontera de que  $\psi = 0$  para  $x = 0$  y para  $x = L$ , debido a que la probabilidad de encontrar la partícula en dichos puntos es nula.

Puesto que  $\cos(0) = 1$ , y por las condiciones impuestas la única forma de que la ecuación 6.17 pueda describir a la partícula, es que  $A$  sea siempre cero.

Ya que  $\sin(0) = 0$ , podemos decir que la constante  $B$  es distinta de cero y considerar a la ecuación 6.18 como solución; además ya que la otra solución es cero, podemos también considerar la suma.

Si  $x = L$  la probabilidad  $P$  de encontrar a la partícula, es nula, entonces podemos escribir a la ecuación 6.18 como

$$P \propto |\psi|^2 = 0$$

$$\psi = B \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{8\pi^2 m E}{h^2}} L \right) \quad (6.19)$$

y como  $B$  es distinto de cero, la única posibilidad es que el seno haga nula la expresión, de esta manera podemos decir

$$B \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{8\pi^2 m E}{h^2}} L \right) = 0$$

$$\sqrt{\frac{8\pi^2 m E}{h^2}} L = n\pi \quad (6.20)$$

despejando la energía de la ecuación 6.20

$$E = \frac{h^2 n^2}{8mL^2} \quad \left\{ n = 1, 2, 3, \dots \right.$$

de esta última ecuación, se observa claramente que la energía de la partícula puede tener solamente ciertos valores, estos valores son los que constituyen los niveles de energía.

Es significativo que la partícula no pueda tener energía cero; si la tuviera, la función de onda  $\psi$  tendría que ser cero en cualquier lugar de la caja y esto significaría que la partícula no podría estar allí presente. Esto es un resultado de la mecánica cuántica, que no tiene contrapartida en la mecánica clásica, donde todos los valores de energía, incluyendo el cero, son posibles.

Volviendo a la solución de  $\psi$  y reemplazando 6.20 en 6.19

$$\psi = B \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{8\pi^2 m}{h^2} \frac{h^2 n^2}{8mL^2}} \right)$$

$$\psi = B \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{8\pi^2 m}{h^2} \frac{h^2 n^2}{8mL^2}} \right)$$

$$\psi = B \operatorname{sen} \left[ \left( \frac{n\pi}{L} \right) x \right] \quad (6.21)$$

Para saber el valor de  $B$  en la ecuación 6.21, podemos expresar

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dx$$

pero si lo aplicamos a la caja

$$P = \int_0^L \psi^2 dx = 1 \quad (6.22)$$

reemplazando 6.21 en 6.22

$$\int_0^L \psi^2 dx = B^2 \text{sen}^2 \left[ \left( \frac{n\pi}{L} \right) x \right] dx = 1$$

según la relación trigonométrica

$$\text{sen}^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

podemos expresar

$$\int_0^L \psi^2 dx = \frac{B^2}{2} \left\{ \int_0^L dx - \int_0^L \cos \left[ \left( \frac{2n\pi}{L} \right) x \right] dx \right\} = 1$$

$$\frac{B^2}{2} \left[ L - \text{sen}(2n\pi) \frac{L}{2n\pi} \right] = 1$$

$$\frac{B^2}{2} L - \frac{LB^2}{4n\pi} \text{sen}(2n\pi) = 1$$

pero el segundo término de esta última ecuación es nulo, debido a que el argumento del seno es múltiplo entero de  $\pi$ , o se que

$$B = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

reemplazando este valor en la ecuación 6.21 resulta

$$\psi = \sqrt{\frac{2}{L}} \text{sen} \left[ \left( \frac{n\pi}{L} \right) x \right] \quad (6.23)$$

podemos observar que la función del grupo de ondas está cuantificada.

Si elevamos al cuadrado la ecuación 6.23 podemos calcular la probabilidad de encontrar a la partícula, lo que es evidente que también debe estar cuantificado.

$$P = \psi^2 = \frac{2}{L} \text{sen}^2 \left[ \left( \frac{n\pi}{L} \right) x \right]$$

Los gráficos de  $\psi$  y  $\psi^2$  están en la figura 6.3, de esta manera podemos ver las siguientes diferencias:

- Probabilidad clásica: En cualquier parte de la caja, la probabilidad de encontrar a la partícula es la misma, o sea la probabilidad se mantiene constante.

- Probabilidad cuántica: Es variable con  $n$  y por ende no es constante. Supongamos que queremos saber cual es la probabilidad de encontrar a la partícula en el centro de la caja, debemos también definir un  $n$ ; como se observa en la figura, si  $n = 1$  la probabilidad es máxima, pero si  $n = 2$  es mínima.

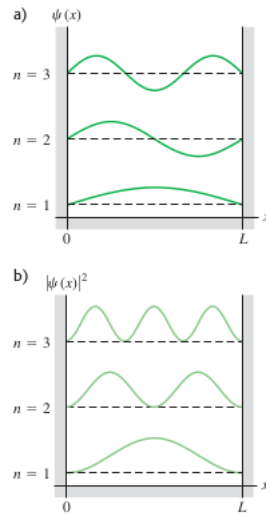


Figura 6.3: Función del grupo de ondas y probabilidad

## Capítulo 7

# Teoría cuántica del átomo de hidrógeno

### 1. Introducción

En el tema anterior se desarrolló partícula en una caja y utilizando la ecuación de Schrödinger en una sola dimensión se dedujo la energía, la función del grupo de ondas, la probabilidad de encontrar dicha partícula en la caja y que todas estas estaban cuantificadas por un único número cuántico  $n$ .

Extrapolando el tema anterior, veremos que la partícula será el electrón y la caja será el átomo de hidrógeno, para ello se utilizará la ecuación de Schrödinger en tres dimensiones.

### 2. Ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno

Un átomo de hidrógeno está formado por un protón y un electrón, como el electrón es mucho más rápido que el protón, consideraremos que este último está en estado estacionario y que el electrón se mueve a su alrededor pero sin posibilidad de escapar debido al campo eléctrico del protón.

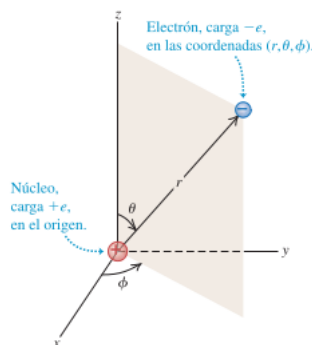
La ecuación de Schrödinger para el electrón en tres dimensiones, que es la que debemos emplear para el átomo de Hidrógeno es

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V) \psi = 0 \quad (7.1)$$

pero como la energía potencial  $V$ , a causa de la energía potencial electrostática de una carga  $-e$  a una distancia  $r$  de otra carga  $+e$ , es

$$V = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (7.2)$$

como vemos en la ecuación 7.2, la energía potencial es función de  $r$ , debemos trabajar en coordenadas esféricas, como muestra la figura 7.1 y la conversión de coordenadas cartesianas a esféricas son las mostradas en el cuadro 7.1.



$r$  :Longitud del radio vector desde el origen hasta el electrón  
 $\theta$  :Ángulo entre el radio-vector y el eje  $+z$  (ángulo cenital)  
 $\phi$  :Ángulo entre la proyección del radio vector en el plano  $xy$  y el eje  $+x$  (ángulo azimutal)

Figura 7.1: Coordenadas esféricas

$$x = r \sin(\theta) \cos(\phi)$$

$$y = r \sin(\theta) \sin(\phi)$$

$$z = r \cos(\theta)$$

Cuadro 7.1: Coordenadas esféricas

Entonces podemos descomponer a la ecuación de Schrödinger de la ecuación 7.1, con el fin de separar variables, en tres funciones auxiliares; o sea cada una de ellas depende de una sola variable de las coordenadas esféricas, de manera que

$$\psi = R(r)\tau(\theta)F(\varphi)$$

Para que cada una de las funciones anteriores sea una identidad deben cumplirse ciertas condiciones matemáticas; apelando a las funciones asociadas de Legendre y Laguer, se obtienen las soluciones a dichas ecuaciones pero quedan expresadas en función de ciertos coeficientes y relaciones matemáticas que deben cumplir para ser solución, que en definitiva son los números cuánticos. Dicho en otras palabras, los números cuánticos son aquellos valores que hacen que tanto  $R$ ,  $\tau$  y  $F$  partes de la ecuación de Schrödinger sean solución de  $\psi$ .

- de  $R(r) \Rightarrow$  se saca el número cuántico  $n$
- de  $\tau(\theta) \Rightarrow$  se saca el número cuántico  $l$
- de  $F(\varphi) \Rightarrow$  se saca el número cuántico  $m_l$

luego con la contribución de Pauli se obtiene el último número cuántico, el  $m_s$ .  
En conclusión los números cuánticos son cuatro

- Número cuántico principal( $n$ ): Fundamentalmente<sup>1</sup> cuantifica la energía del electrón.

Puede tomar valores  $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$ <sup>2</sup>

- Número cuántico de orbital( $l$ ): Fundamentalmente cuantifica la *magnitud* del momento angular.

Toma valores  $l = 0, 1, 2, 3, \dots, (n - 1)$

- Número cuántico magnético( $m_l$ ): Cuantifica fundamentalmente la dirección del momento angular; en otras palabras, es como decir que cuantifica los planos en que puede girar el electrón.

Puede tomar valores  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$

- Número cuántico de spin( $m_s$ ): Cuantifica el sentido de giro del electrón sobre su propio eje.

Puede tomar solamente dos únicos valores  $m_s = \pm 1/2$

### 3. Principio de exclusión de Pauli

El principio de exclusión de Pauli dice que *en un mismo átomo* no pueden existir dos o más electrones en el mismo estado cuántico, o sea con la misma combinación de números cuánticos; de lo contrario estaríamos hablando del mismo electrón.

Tomando minuciosamente la ecuación de Schrödinger puede demostrarse lo siguiente

- $2n^2 \Rightarrow$  Número máximo de electrones por nivel
- $n^2 \Rightarrow$  Número máximo de planos orbitales por nivel
- $2(2l + 1) \Rightarrow$  Número máximo de electrones por subnivel
- $(2l + 1) \Rightarrow$  Número máximo de planos orbitales diferentes por subnivel

---

<sup>1</sup>Decimos fundamentalmente porque, como se verá, también cuantifican otras cosas.

<sup>2</sup> $n = \infty$  significa que el electrón está en el confín del átomo.



También de las ecuaciones en que se subdivide la ecuación de Schrödinger en tres dimensiones, se llega a lo siguiente

$$E = \frac{-me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \left( \frac{1}{n^2} \right)$$

observemos que es al mismo resultado que llegó Bohr.

Además, también se deduce que el momento angular está definido por

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$$

## 4. Cuantificación espacial

El número cuántico orbital  $l$  determina la magnitud del momento angular del electrón. El vector  $L$  es perpendicular al plano en el que tiene lugar el movimiento de rotación, y su dirección y sentido están dados por la regla de la mano derecha.

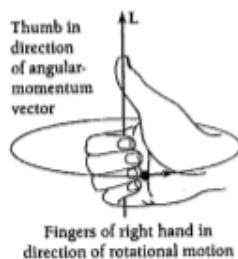


Figura 7.2:

Si pensamos que un electrón que gira alrededor de un núcleo es un diminuto circuito que, como dipolo magnético, tiene también un campo magnético. En consecuencia, un electrón atómico que posee momento angular interactúa con un campo magnético externo  $B$ . El número cuántico magnético  $m_l$  especifica la dirección de  $L$ , determinando la componente de  $L$  en la dirección del campo.

Si hacemos que la dirección del campo magnético sea paralela al eje  $z$ , la componente de  $L$  en esta dirección es

$$L_z = m_l \hbar$$

como los valores posibles de  $m_l$  para un valor dado de  $l$  van desde  $+l$  hasta  $-l$ , pasando por cero, de modo que las posibles orientaciones del vector momento angular son  $2l + 1$ , por ejemplo si

- $l = 2$
- $|L| = \sqrt{2(2+1)}\hbar = \sqrt{6}\hbar$

Entonces el valor del módulo de  $L$  está definido, pero como  $m_l$  puede tomar valores entre  $-2, -1, 0, 1, 2$  lo que le da la dirección hacia donde apunta el vector  $L$ , nos falta demostrar de que manera hace variar dicha posición.

Podemos expresar a

$$L_z = m_l \hbar = L \cos(\theta) = \sqrt{l(l+1)} \hbar \cos(\theta)$$

pero

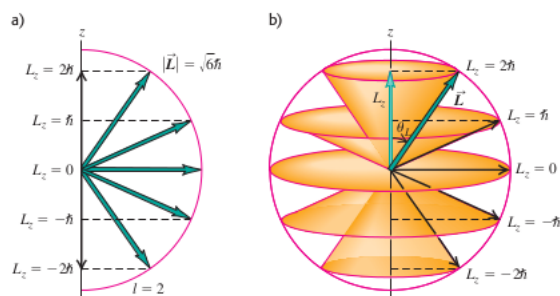
$$\cos(\theta) = \frac{L_z}{L} = \frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}}$$

de manera que

$$\theta = \arccos\left(\frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}}\right)$$

si observamos la última ecuación, vemos que para un determinado  $l$ , la inclinación está dada por  $m_l$ .

**41.2** a) Cuando  $l = 2$ , la magnitud de  $\vec{L}$  es  $\sqrt{6}\hbar = 2.45\hbar$ , pero la dirección de  $\vec{L}$  no está definida. En esta representación vectorial semiclásica,  $\vec{L}$  forma un ángulo de  $35.3^\circ$  con el eje  $z$ , cuando la componente  $z$  tiene su valor máximo de  $2\hbar$ . b) Conos de las posibles direcciones de  $\vec{L}$ .



## 5. Energía potencial magnética $\mu_m$

Cuando un átomo se encuentra dentro de un campo magnético externo  $\vec{B}$ , además de su energía normal, posee energía potencial magnética  $\mu_m$  que depende de su momento magnético y de la orientación de este momento respecto del campo.

Entonces definimos al momento magnético  $\vec{\mu}$  en la misma dirección que  $\vec{L}$  pero en sentido contrario como indica la figura 7.3.

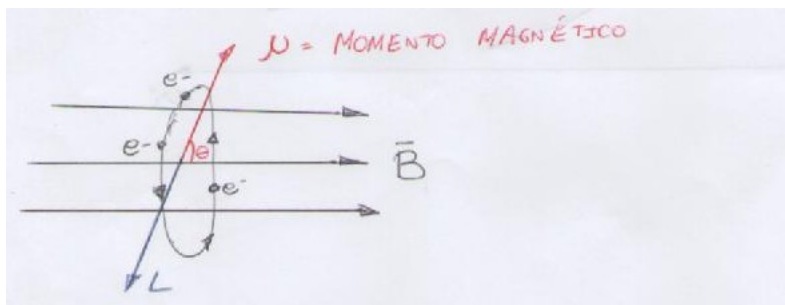


Figura 7.3: Energía potencial magnética

El torque  $\vec{\tau}$  sobre un átomo en un campo magnético de densidad de flujo  $B$  es

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

resolviendo este producto vectorial, se tiene

$$\tau = \mu B \sin(\theta) \quad (7.3)$$

donde  $\theta$  es el ángulo formado entre  $\mu$  y  $B$ . El torque máximo ocurre cuando el dipolo es perpendicular al campo, y cero cuando es paralelo o antiparalelo a él. Para la energía potencial magnética  $\mu_m$  debemos establecer una configuración de referencia para la que  $\mu_m$  sea cero por definición<sup>3</sup>.

De esta manera se tiene

$$\mu_m = \int_{90}^{\theta} \tau d\theta \quad (7.4)$$

reemplazando 7.3 en 7.4

$$\begin{aligned} \mu_m &= \mu B \int_{90}^{\theta} \sin(\theta) d\theta \\ \mu_m &= -\mu B \cos(\theta) \end{aligned} \quad (7.5)$$

Analizando la ecuación 7.5 vemos que cuando  $\mu$  se orienta en la misma dirección que  $B$ , entonces  $\mu_m = -\mu B$  tiene su valor mínimo. Esto es una consecuencia natural, debido a que un dipolo tiende a alinearse de acuerdo con un campo magnético externo.

Por otra parte, sabemos que

<sup>3</sup>Puesto que experimentalmente solo se observan variaciones de energía potencial, la elección de la configuración de referencia es arbitraria.

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (7.6)$$

si en la ecuación 7.6 tomamos como el intervalo de tiempo a un período  $T$  y a  $q$  como la carga del electrón, podemos expresar

$$i = \frac{-e}{T} = -e\nu \quad (7.7)$$

El momento magnético de una espira de corriente, es

$$\mu = iA \quad (7.8)$$

si reemplazamos 7.7 en 7.8 y además tenemos en cuenta que el área de la figura 7.3 es  $\pi r^2$

$$\mu = -e\nu\pi r^2 \quad (7.9)$$

pero por otra parte, sabemos que

$$L = mvr \quad (7.10)$$

en movimiento circular uniforme

$$v = \omega r = 2\pi\nu r \quad (7.11)$$

reemplazando 7.11 en 7.10

$$L = mvr = 2\pi m\nu r^2 \quad (7.12)$$

dividiendo 7.9 sobre 7.12

$$\frac{\mu}{L} = \frac{-e\nu\pi r^2}{2\pi m\nu r^2} = -\frac{e}{2m}$$

el término  $-e/2m$  se denomina *razón giro-magnética del electrón* y despejando  $\mu$  de la última ecuación, obtenemos el *momento giro-magnético* del electrón, resultando

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m}\vec{L} \quad (7.13)$$

observamos que como dijimos en el inicio, el vector momento magnético tiene sentido opuesto al de  $\vec{L}$ .

Reemplazando 7.13 en 7.5

$$\mu_m = -\left(-\frac{e}{2m}\right)LB\cos(\theta)$$

$$\mu_m = \left(\frac{e}{2m}\right)LB\cos(\theta)$$

Recordando lo visto anteriormente,

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}} \\ \mu_m &= \left(\frac{e}{2m}\right) \sqrt{l(l+1)} \hbar B \frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}} \\ \mu_m &= m_l \left(\frac{e\hbar}{2m}\right) B\end{aligned}\tag{7.14}$$

En la ecuación 7.14 el término  $\left(\frac{e\hbar}{2m}\right)$ , se denomina *magnetón de Bohr*.

## 6. Reglas de selección

También de la ecuación de Schrödinger se deducen las reglas de selección, las cuales expresan cuales son las transiciones permitidas independientemente de  $n$ .

$$\Delta l = \pm 1\tag{7.15}$$

$$\Delta m_L = 0; \pm 1\tag{7.16}$$

Las ecuaciones 7.15 y 7.16 representan a las reglas de selección, las cuales hay que interpretarlas en un sentido probabilístico, donde estas son las transiciones permitidas y cualquier otra diferente es altísimamente improbable que ocurra, aunque no imposible.

## 7. Efecto Zeeman Normal

Consiste en el desdoblamiento de las líneas espectrales debido a la presencia de un campo magnético exterior; a este efecto también se lo llama estructura fina.

Supongamos que tenemos átomos dentro de un campo magnético exterior, y que estando en el nivel energético  $n = 3$  (por ejemplo) se efectúan las transiciones del subnivel dos al subnivel uno.

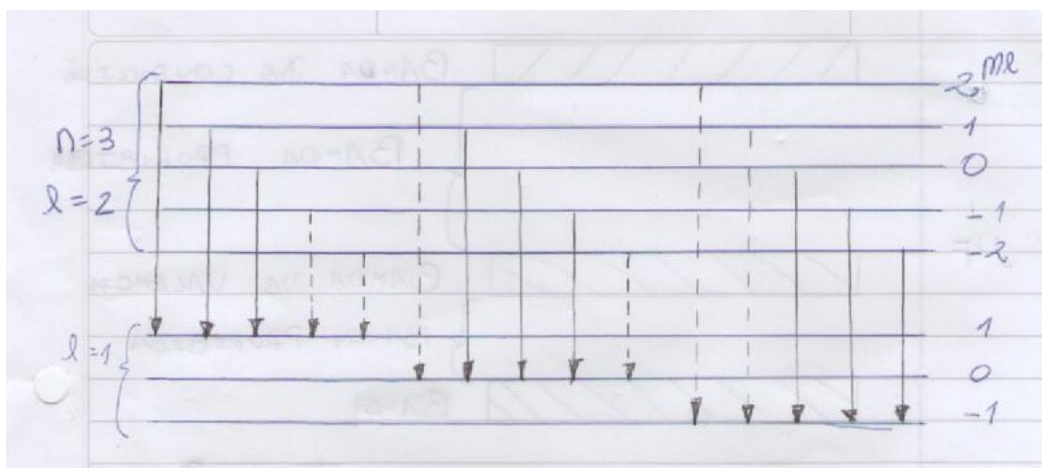


Figura 7.4: Todas las transiciones de  $l = 2$  a  $l = 1$

Las 15 transiciones mostradas en la figura 7.4 son las transiciones probables que ocurran, pero debido a las reglas de selección, solo quedan nueve (las de trazo continuo).

En esas transiciones, la energía total del electrón es

$$E_T = E_0 + \mu_m$$

dividiendo todo por  $h$

$$\frac{E_T}{h} = \frac{E_0}{h} + \frac{\mu_m}{h}$$

de manera que resulta

$$\nu = \nu_0 + \nu' = \nu_0 + m_l \left( \frac{e}{4\pi m} \right) B$$

si valuamos a  $\nu$  en  $m_l = 1, 0$  y  $-1$  resulta

$$\nu \Big|_1 = \nu_0 + \left( \frac{e}{4\pi m} \right) B$$

$$\nu \Big|_0 = \nu_0$$

$$\nu \Big|_{-1} = \nu_0 - \left( \frac{e}{4\pi m} \right) B_0$$

Al graficar esto, se obtiene la figura 7.5 y se concluye que los valores de  $\nu_1$  y  $\nu_2$  coinciden teórico y experimentalmente.

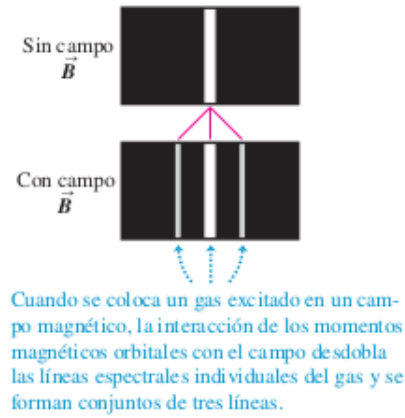


Figura 7.5: Efecto Zeeman normal

El hecho de existir un campo magnético exterior  $\vec{B}$  hace que el electrón tenga además de la energía  $E_0$ , la energía potencial magnética  $\mu_m$  que se suma y se resta de  $E_0$  porque está cuantificada; para este ejemplo  $m_l$  adopta los valores 1 y  $-1$  y en el caso de cero corresponde a la energía convencional  $E_0$  la cual se deduce del modelo atómico de Bohr y de la ecuación de Schrödinger.

En un esfuerzo para explicar la estructura fina de las líneas espectrales, los investigadores propusieron que el electrón posee un momento angular intrínseco, independiente de cualquier momento angular orbital que pueda tener y, asociado con este momento angular, un cierto momento magnético.

Estos estudios descartaron la idea de que los electrones eran esferas cargadas negativamente.

## 8. Efecto Zeeman anómalo

Respecto al efecto Zeeman anómalo lo que se observa son nuevas líneas espectrales, además de las anteriores; esto ocurre por la presencia de un campo magnético intrínseco debido a los espín del electrón, los cuales generan un momento magnético de espín.

Así como existe el momento angular orbital ( $L$ ) también existe el momento angular de espín ( $S$ ), el cual se genera por el hecho de que el electrón es una carga que gira.

$$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar$$

pero como  $s = \pm \frac{1}{2}$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$$

$$S_z = m_s \hbar$$

siendo  $m_s = \pm \frac{1}{2}$ .

Llamando  $V_m'$  a la energía potencial magnética de espín y  $V_m$  a la ya conocida energía de orbital, podemos decir

$$E_T = E + V_m + V_m'$$

$$\nu = \nu_0 + \nu' + \nu''$$

En la práctica cuando hay campo magnético exterior, y al trabajar con muchos átomos aparecen un sin número de líneas espectrales, lo solo debido al desdoblamiento por efecto Zeeman normal y anómalo, sino también por los campos magnéticos intrínsecos de los demás átomos sobre uno.



## Capítulo 8

# Mecánica estadística

### 1. Introducción

La mecánica estadística es la rama de la física que relaciona las propiedades macroscópicas de un conjunto de partículas con las propiedades microscópicas de las partículas mismas.

- A la mecánica estadística no le interesa el movimiento o interacción de las partículas individuales; si no su comportamiento más probable.
- No trata de determinar la historia de la partícula, sino la probabilidad que tiene, en un instante cualquiera, de encontrarse en una posición y con una cantidad de movimiento determinada.
- La mecánica estadística se aplica tanto a problemas clásicos (moléculas en un gas) como a problemas de la mecánica cuántica (electrones libres en un conductor o fotones en una cavidad).
- La mecánica estadística constituye una poderosa herramienta de la física teórica.

El objetivo de la mecánica estadística es determinar el estado de un sistema, estudiando como las partículas de dicho sistema se distribuyen en el espacio.

Si hallamos la probabilidad de todas las distribuciones del sistema, se podrá determinar la distribución más probable, y afirmar que el sistema tiende a comportarse según esa distribución de posición y cantidad de movimiento.

- Número de subestados( $g_i$ ): Llamaremos  $g_i$  al número de *subestados, físicamente distintos* con la misma energía  $\mu_i$ , por ejemplo si hay 10 subestados con una energía de 5 Joules, el valor de  $g_i$  será de 10.
- Microestados: Es un estado microscópico que muestra *cuales* partículas tienen determinada energía; por ejemplo las partículas a,b y c tienen energía  $\mu_1$  y la partícula d tiene energía  $\mu_2$ .

El número total de estados con que una partícula puede existir es

$$\sum_i g_i$$

El número total de formas en que  $N$  partículas pueden distribuirse en los distintos estados, o sea el número total de microestados es

$$\left( \sum_i g_i \right)^N = M \quad (8.1)$$

donde  $M$  representa el número total de microestados.

Al número de partículas con la misma energía  $\mu_i$  se las denomina  $n_i$ ; o sea que la sumatoria de todos los  $n_i$  da como resultado el número total  $N$  de partículas

$$\left( \sum_i n_i \right) = N$$

- Macroestado: Es un estado macroscópico del sistema donde importa cuantas partículas tienen determinada energía.

Para entender mejor el concepto de macroestado y microestado, realizamos el siguiente ejemplo.

- Número total de partículas  $N = 4$
- Dos estados de energía, el subestado  $\mu_1$  con energía  $g_1 = 1$ , y el subestado  $\mu_2$  con energía  $g_2 = 1$ <sup>1</sup>

$$\sum_i^n g_i = (1 + 1) = 2$$

---

<sup>1</sup>Si por ejemplo  $g_2 = 3$ ,  $\sum_i^n g_i = (1 + 3) = 4$

Cuáles?		Cuántas?	
$\mu_1$	$\mu_2$	$n_1$	$n_2$
abcd	-	4	0
abc	d		
abd	c	3	1
adc	b		
abc	a		
ab	dc		
ac	bd		
ad	bc	2	2
bc	ad		
db	ac		
a	bcd		
b	acd	1	3
c	abd		
d	abc		
-	abcd	0	4

Cuadro 8.1: Número posible de micro y macroestados

Si aplicamos la fórmula 8.1

$$\left( \sum_i g_i \right)^N = M = 2^4 = 16$$

## 2. Distrubución estadística

Se estudiará como se distribuye una cantidad de energía entre un conjunto de partículas, idénticas<sup>2</sup>, o sea que se trata de hallar cuántas partículas tienen una cantidad de energía  $\mu_1$ , cuantas  $\mu_2$ , etc, o sea

$$n_i = f(u_i)$$

Existen tres tipos de partículas a considerar:

1. Partículas idénticas distinguibles de cualquier spín. Por ejemplo, moléculas de un gas que están lo suficientemente separadas para poder distinguir una de otra.

La ley de distribución estadística de la energía en función de las moléculas es la de *Maxwell - Boltzmann* (estadística clásica).

2. Partículas idénticas indistinguibles con spín cero o entero (es decir, que giran en un sólo sentido, o no giran). Por ejemplo, bosones que no obedecen al principio de exclusión de Pauli.

<sup>2</sup>Fotones, moléculas o electrones.

La ley de distribución estadística de la energía en función de los bosones, es la estadística de *Bose-Einstein*.

Ejemplos de bosones, son los fotones, partículas  $\alpha$ , núcleos o átomos de Helio, etc.

3. Partículas idénticas indistinguibles con spín  $\pm 1/2$ . Por ejemplo, fermiones que obedecen al principio de exclusión de Pauli.

La ley de distribución estadística de las energías en función de los fermiones, es la estadística de *Fermi-Dirac*.

Los fermiones más importantes, son los protones, neutrones y electrones.

---

- Para moléculas: Por cálculos estadísticos se demuestra que el número total de microestados que corresponden a un macroestado es:

$$N! \frac{g_1^{n_1} g_2^{n_2} \cdots}{n_1! n_2! \cdots} = N! \prod \left( \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} \right)$$

La probabilidad  $P$  de un cierto macroestado, es el número de microestados que corresponden a un macroestado, por la ley de Pascal, podemos decir que la probabilidad de un cierto macroestado es

$$P = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

$$P = \frac{N!}{M} \prod \left( \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} \right) \quad (8.2)$$

Al utilizar la ley de Pascal, estamos sujetos a la estadística clásica.

- Para bosones: el número de formas diferentes de colocar  $n_i$  partículas indistinguibles entre  $g_i$  estados de energía es

$$\frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i! (g_i - 1)!}$$

La probabilidad  $P$  de la distribución total de  $N$  partículas, es el producto de las diferentes distribuciones de las partículas, entre los estados de energía

$$P = \prod \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i! (g_i - 1)!}$$

- Para fermiones: el número de formas diferentes de colocar  $n_i$  partículas indistinguibles entre  $g_i$  estados de energía es

$$\frac{g_i!}{n_i! (g_i - n_i)!}$$

$$P = \prod \frac{g_i!}{n_i! (g_i - n_i)!}$$

## 2.1. Distribución estadística de Maxwell-Boltzmann

Para poder aplicar esta distribución estadística, se deben cumplir dos condiciones

- Conservación del número de moléculas

$$\sum n_i = n_1 + n_2 + n_3 + \dots = N \quad (8.3)$$

- Conservación de la energía

$$\sum n_i \mu_i = n_1 \mu_1 + n_2 \mu_2 + n_3 \mu_3 + \dots = U \quad (8.4)$$

La distribución más probable se obtiene (para números grandes de  $N$ ) derivando a la expresión 8.2 e igualándola a cero y luego se despejará el valor de  $n_i$  para obtener el máximo de probabilidad.

$$P = \frac{N!}{M} \prod \left( \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} \right) \quad (8.5)$$

Para poder manipular la expresión, tomaremos logaritmo natural de la probabilidad

$$\ln(P) = \ln(N!) - \ln(M) + \sum n_i \ln(g_i) - \sum \ln(n_i!) \quad (8.6)$$

si aplicamos la aproximación de Stirling<sup>3</sup> a la ecuación 8.6 resulta

$$\ln(P) = N \ln(n) - N - \ln(M) + \sum n_i \ln(g_i) - \sum n_i \ln(n_i) + \sum n_i$$

pero como  $\sum n_i = N$  por la condición impuesta

$$\ln(P) = N \ln(n) - \ln(M) + \sum n_i \ln(g_i) - \sum n_i \ln(n_i) \quad (8.7)$$

derivando la ecuación 8.7 respecto de  $n_i$  y expresándolo en forma de diferencial

$$d\ln(P) = \sum \ln(g_i) dn_i - \sum n_i d\ln(n_i) - \sum \ln(n_i) dn_i \quad (8.8)$$

pero como

$$d\ln(n_i) = \frac{1}{n_i} dn_i$$

la ecuación 8.21 resulta

$$d\ln(P) = \sum \ln(g_i) dn_i - \sum dn_i - \sum \ln(n_i) dn_i \quad (8.9)$$

---

3

$\ln(x!) \approx x \ln(x) - x$

nuevamente por la condición impuesta de que la cantidad de moléculas se mantiene constante,  $\sum dn_i = 0$ ; reemplazando esto en la ecuación 8.9 y además, como queremos calcular el máximo de probabilidad la igualamos a cero, resultando

$$dLn(P) = \sum Ln(g_i) dn_i - \sum Ln(n_i) dn_i = 0$$

$$dLn(P) = \sum [Ln(g_i) - Ln(n_i)] dn_i \quad (8.10)$$

Al diferenciar las ecuaciones 8.3 y 8.4 resulta

$$\sum dn_i = d \sum n_i = dN = 0 \quad (8.11)$$

$$\sum d n_i \mu_i = d \sum n_i \mu_i = dU = 0 \quad (8.12)$$

de acuerdo al método de los multiplicadores indeterminados de Lagrange, multiplicando a las expresiones 8.11 y 8.12 por  $-\alpha$  y por  $-\beta$  respectivamente y, teniendo en cuenta que  $\alpha$  y  $\beta$  son independientes de  $n_i$ , podemos expresar

$$\sum -\alpha dn_i = 0$$

$$\sum -\beta d n_i \mu_i = 0$$

como ambas expresiones son cero, si las sumamos a la ecuación 8.10 no altera la expresión, de manera que resulta

$$dLn(P) = \sum [Ln(g_i) - Ln(n_i) - \alpha - \beta \mu_i] dn_i = 0$$

como  $dn_i$  es distinto de cero, para que se cumpla la igualdad la cantidad encerrada entre corchetes debe ser cero

$$[Ln(g_i) - Ln(n_i) - \alpha - \beta \mu_i] = 0$$

$$Ln\left(\frac{g_i}{n_i}\right) = \alpha + \beta \mu_i$$

$$\frac{g_i}{n_i} = e^{\alpha + \beta \mu_i}$$

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha + \beta \mu_i}}$$

finalmente

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha} e^{\beta \mu_i}} \quad (8.13)$$

la ecuación 8.13 representa la *distribución estadística de Maxwell-Boltzmann*, pero como vemos, tiene coeficientes indeterminados; por la teoría cinética de los gases ideales, se deduce que:

$$e^{-\alpha} = \frac{nh^3}{V} \left( \frac{\beta}{2\pi m} \right)^{3/2} = \frac{1}{e^\alpha}$$

$$e^\alpha = \frac{V}{nh^3} \left( \frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2}$$

$$\alpha = Ln \left[ \frac{V}{nh^3} \left( \frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2} \right]$$

$$\beta = \frac{1}{KT}$$

### 3. Distribución estadística de Bose-Einstein

Aquí las partículas idénticas son indistinguibles y las diferentes distribuciones posibles de colocar  $n_i$  partículas entre  $g_i$  estados de energía  $\mu_i$ , como ya vimos, es

$$\frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i! (g_i - 1)!}$$

pero como  $(n_i + g_i) \gg 1 \therefore (n_i + g_i - 1)! \approx (n_i + g_i)!$   
de esta manera, podemos expresar a la probabilidad, como

$$P = \prod \frac{(n_i + g_i)!}{n_i! (g_i - 1)!} \quad (8.14)$$

procedemos de la misma manera que en la sección anterior, para poder trabajar matemáticamente tomamos logaritmo natural de la expresión 8.14

$$Ln(P) = \sum \{Ln[(n_i + g_i)!] - Ln(n_i!) - Ln[(g_i - 1)!]\}$$

por Stirling, se tiene

$$Ln(P) = \sum [(n_i + g_i) Ln(n_i + g_i) - (n_i + g_i) - n_i Ln(n_i) + n_i - (g_i - 1) Ln(g_i - 1) + (g_i - 1)] \quad (8.15)$$

derivando la ecuación 8.15 respecto de  $n_i$  y expresándolo en forma de diferencial

$$dLn(P) = \sum Ln(n_i + g_i) dn_i + \sum dn_i - \sum dn_i - \sum dn_i - \sum Ln(n_i) dn_i$$

$$dLn(P) = \sum Ln(n_i + g_i) dn_i - \sum dn_i - \sum Ln(n_i) dn_i \quad (8.16)$$

igualando la expresión 8.16 a cero para calcular el máximo, y además como  $\sum dn_i = 0$

$$dLn(P) = \sum [Ln(n_i + g_i) - Ln(n_i)] dn_i = 0 \quad (8.17)$$

al igual que en la sección anterior, decimos que

$$\sum dn_i = d \sum n_i = dN = 0 \quad (8.18)$$

$$\sum d n_i \mu_i = d \sum n_i \mu_i = dU = 0 \quad (8.19)$$

de acuerdo al método de los multiplicadores indeterminados de Lagrange, multiplicando a las expresiones 8.18 y 8.19 por  $-\alpha$  y por  $-\beta$  respectivamente y, teniendo en cuenta que  $\alpha$  y  $\beta$  son independientes de  $n_i$ , podemos expresar

$$\sum -\alpha dn_i = 0 \quad (8.20)$$

$$\sum -\beta d n_i \mu_i = 0$$

sumando estas dos últimas expresiones a 8.17

$$\sum [Ln(n_i + g_i) - Ln(n_i) - \alpha - \beta \mu_i] dn_i = 0$$

en este caso, la cantidad dentro del corchete debe ser cero para que se cumpla la igualdad

$$Ln(n_i + g_i) - Ln(n_i) - \alpha - \beta = 0$$

$$Ln\left(\frac{n_i + g_i}{n_i}\right) = \alpha + \beta \mu_i$$

$$Ln\left(1 + \frac{g_i}{n_i}\right) = \alpha + \beta \mu_i$$

$$1 + \frac{g_i}{n_i} = e^{\alpha + \beta \mu_i}$$

$$\frac{g_i}{n_i} = e^{\alpha + \beta \mu_i} - 1$$

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha + \beta \mu_i} - 1} \quad (8.21)$$

La ecuación 8.21 representa la *Distribución estadística de Bose-Einstein para bosones*.

Para fotones que es un caso particular de bosones,  $\alpha = 0$ , pues el número de fotones en la cavidad estudiada puede no ser constante, o sea dos fotones pueden unirse o separarse, lo que hace que la cantidad de partículas total no permanezca constante, pero si la cantidad de energía total.



Si esto último se cumple  $\sum dn_i \neq 0$ , por lo tanto en la ecuación 8.20 el valor de  $\alpha$  debe ser indiscutidamente cero, quedando

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\beta\mu_i} - 1} \quad (8.22)$$

La ecuación 8.22 representa la *Distribución estadística de Bose-Einstein para fotones*.

El valor de  $\beta = \frac{1}{KT}$ .

#### 4. Distribución estadística de Fermi-Dirac

En este caso las partículas idénticas son indistinguibles y cumplen con el principio de exclusión de Pauli, o sea que cada estado puede estar ocupado por sólo una partícula.

El número de formas diferentes para agrupar  $n_i$  partículas entre los  $g_i$  estados es

$$\frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!}$$

la probabilidad

$$P = \prod \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!}$$

$$\ln(P) = \sum \{\ln(g_i!) - \ln(n_i!) - \ln[(g_i - n_i)!]\} \quad (8.23)$$

por la aproximación de Strilling podemos expresar

$$\ln(P) = \sum [\ln(g_i!) - n_i \ln(n_i) + n_i - (g_i - n_i) \ln(g_i - n_i) + (g_i - n_i)] \quad (8.24)$$

derivando la ecuación 8.24 respecto de  $n_i$  y expresándolo en forma de diferencial

$$d\ln(P) = \sum \left[ -n_i \frac{dn_i}{n_i} - \ln(n_i) dn_i + dn_i - (g_i - n_i) \frac{dn_i}{g_i - n_i} + \ln(g_i - n_i) dn_i - dn_i \right]$$

$$d\ln(P) = \sum [-\ln(n_i) dn_i + \ln(g_i - n_i) dn_i] \quad (8.25)$$

igualando la expresión 8.25 para obtener el máximo de probabilidad

$$d\ln(P) = \sum [-\ln(n_i) + \ln(g_i - n_i)] dn_i = 0 \quad (8.26)$$

por los multiplicadores de Lagrange, se tiene

$$\sum -\alpha dn_i = 0 \quad (8.27)$$

$$\sum -\beta d n_i \mu_i = 0 \quad (8.28)$$

sumando las expresiones 8.26, 8.27 y 8.28

$$-Ln(n_i) + Ln(g_i - n_i) - \alpha - \beta \mu_i = 0$$

$$Ln\left(\frac{g_i - n_i}{n_i}\right) = \alpha + \beta \mu_i$$

$$\frac{g_i}{n_i} - 1 = e^{\alpha + \beta \mu_i}$$

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha} e^{\beta \mu_i} + 1} \quad (8.29)$$

la ecuación 8.29 representa la *Distribución estadística de Fermi-Dirac para fermiones*.

Para electrones

$$\alpha = \frac{-\mu_f}{KT} \quad y \quad \beta = \frac{1}{KT} \quad (8.30)$$

Reemplazando el valor de las constantes expresados en la ecuación 8.30 en la ecuación 8.29, resulta

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\frac{\mu_i - \mu_f}{KT}} + 1} \quad (8.31)$$

- La *energía de Fermi*  $\mu_f$  es aquella energía que corresponde al estado completo de mayor energía.

$$\mu_f = \left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{2/3} \frac{h^2}{2m}$$

- El *índice de ocupación*  $f(\mu_i)$  de un estado de energía  $\mu_i$ , es el número medio de partículas en cada uno de los estados de dicha energía y se define como

$$f(\mu_i) = \frac{n_i}{g_i}$$

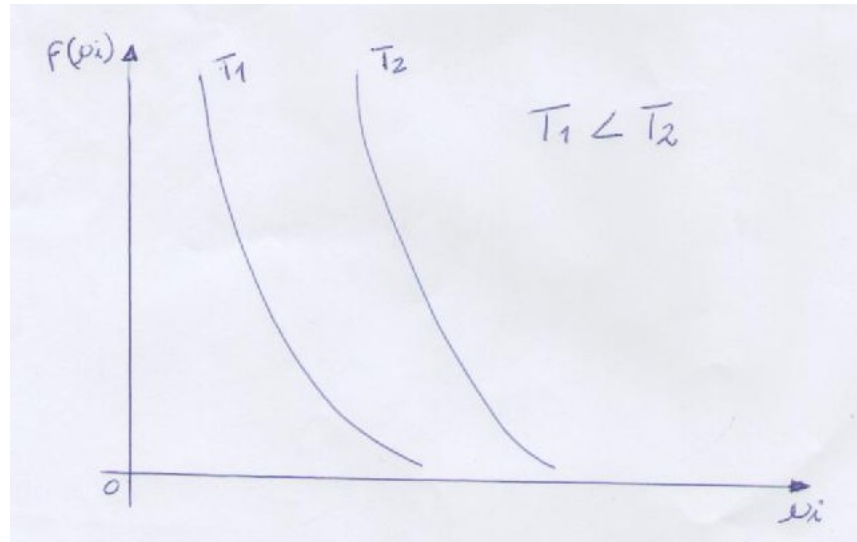


Figura 8.1: Estadística de Maxwell-Boltzmann

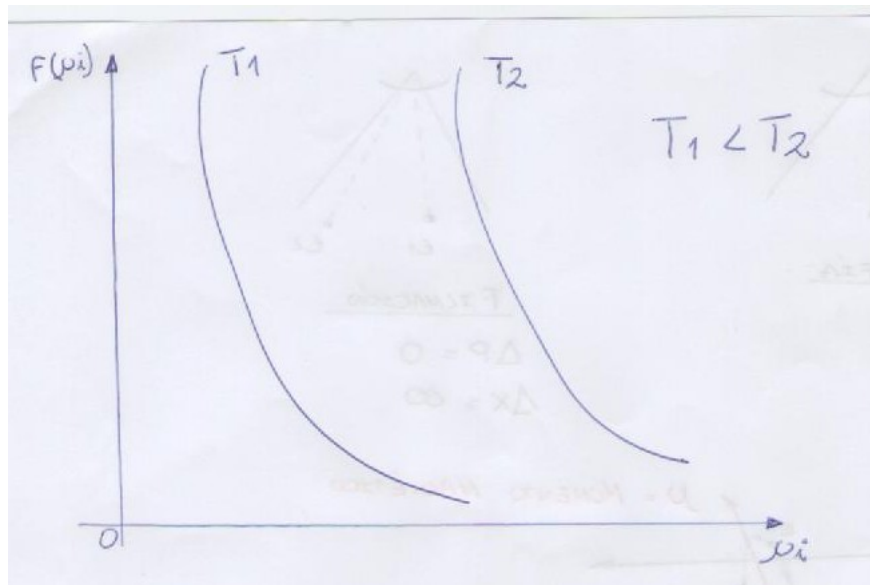


Figura 8.2: Estadística de Bose-Einstein

Para hacer una análisis del gráfico de la estadística de Fermi-Dirac, partamos de la ecuación 8.31

- Si  $\mu_i = \mu_f$  y como por el principio de exclusión de Pauli hay un elec-

trón por cada estado,  $g_i = 1$ ; esto implica que independientemente de la temperatura, si  $\mu_i = \mu_f$

$$f(\mu_i) = \frac{n_i}{g_i} = n_i = \frac{1}{2}$$

- Si  $\mu_i > \mu_f$  y además  $T = 0K$

$$f(\mu_i) = \frac{n_i}{g_i} = \frac{1}{e^\infty + 1} = 0$$

esto significa que no hay ocupación por encima del nivel de Fermi.

- Si  $\mu_i < \mu_f$  y además  $T = 0K$

$$f(\mu_i) = \frac{n_i}{g_i} = \frac{1}{e^{-\infty} + 1} = 1$$

- Si  $\mu_i = \mu_f$  y además  $T \neq 0K$

$$f(\mu_i) = \frac{n_i}{g_i} = \frac{1}{e^0 + 1} = \frac{1}{2}$$

esto significa que está la mitad del nivel ocupado.

Graficando el análisis 1 y 2, obtenemos la figura 8.3 y del tercero se obtiene 8.4.

En lo referente a los metales, si son considerados en su interior como un “gas de electrones”, la  $\mu_f$  representa la energía de los electrones “libres” o de valencia.

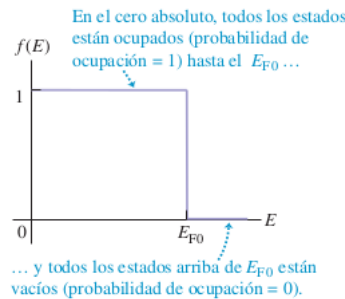


Figura 8.3: Energía de Fermi

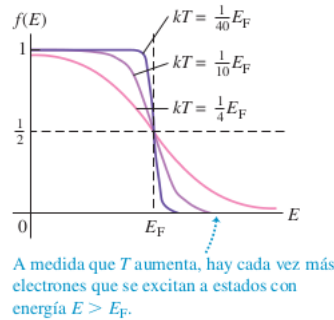


Figura 8.4: Fermi-Dirac

## 5. Teoría de bandas

Así como cuando hablamos de un átomo, graficamos las líneas de energía que van creciendo cuánticamente desde cerca del núcleo alejándose; en un sólido existen enormes cantidades de electrones correspondientes a la gran cantidad de átomos. En este caso, en lugar de hablar de niveles (líneas) de energía, se habla de bandas de energía que siempre se van ocupando desde la más cercana al núcleo, hacia las periféricas, figura 8.5.

Existen dos tipos de bandas

- La banda de valencia: está ocupada por los electrones de valencia de los átomos, es decir, aquellos electrones que se encuentran en la última capa o nivel energético de los átomos. Los electrones de valencia son los que forman los enlaces entre los átomos, pero no intervienen en la conducción eléctrica.
- La banda de conducción: está ocupada por los electrones libres, es decir, aquellos que se han desligado de sus átomos y pueden moverse fácilmente. Estos electrones son los responsables de conducir la corriente eléctrica.

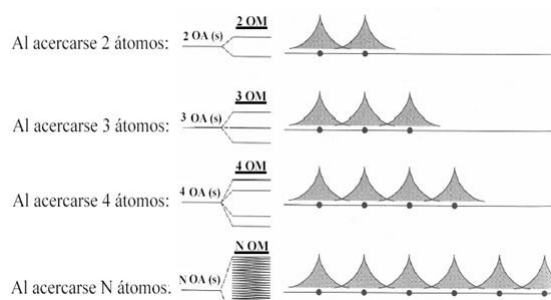


Figura 8.5: Solapamiento de orbitales

## 5.1. Conductores

Un conductor eléctrico (muy comúnmente los metales como aluminio, cobre, plata, oro, etc.) son los que conducen la corriente eléctrica.

Generalmente tienen uno, dos y hasta tres electrones libres, y son los elementos que están a la izquierda de la tabla periódica, con muy poca energía exterior, puede pasar un electrón de la banda de valencia a la banda de conducción.

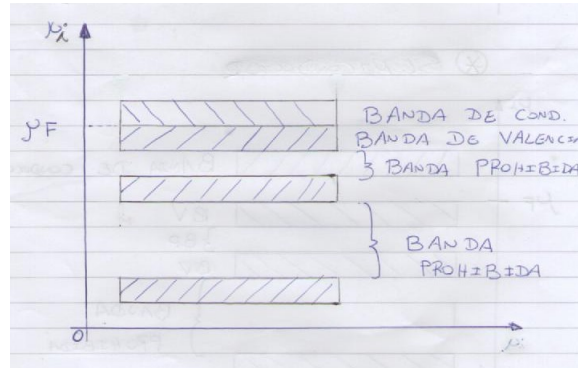


Figura 8.6: Bandas de energía en un conductor

## 5.2. Aisladores

Un aislante es una material que se opone a la corriente eléctrica, por ejemplo sustancias como goma, plástico, madera, etc y en general tienen 5,6,7 u 8 electrones libres en su última órbita que se apantallan entre si, no permitiendo el paso de la corriente eléctrica, suelen tener elementos químicos de la parte derecha de la tabla periódica. Necesitan una enorme cantidad de energía para que los electrones pasen de la banda de valencia a la banda de conducción.

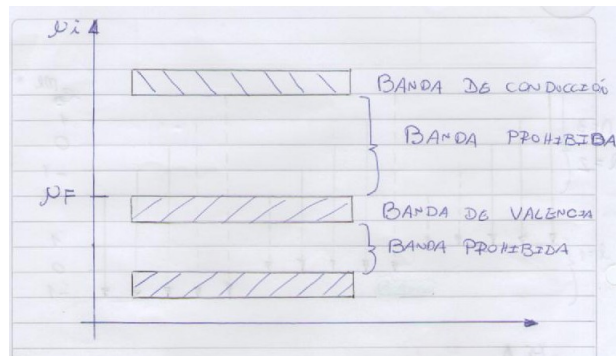


Figura 8.7: Bandas de energía en un conductor

### 5.3. Semiconductores

Son materiales generalmente formados por elementos del grupo cuatro de la tabla periódica. Tienen cuatro electrones libres y sus propiedades son intermedia entre conductores y aisladores.

Son muy utilizados en la industria electrónica, sobre todo el silicio y el germanio, para la fabricación de diodos, transistores, chips, etc.

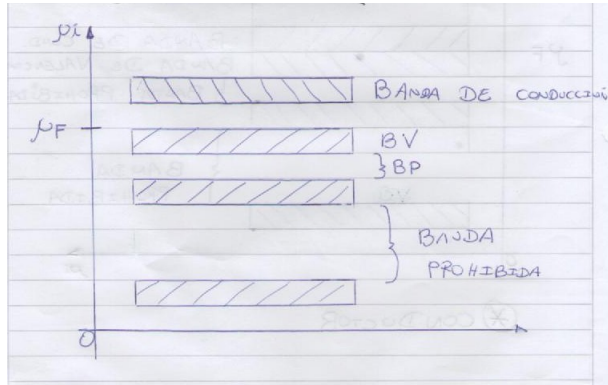


Figura 8.8: Brechas energéticas

# Capítulo 9

## Láser

### 1. Introducción

Un láser (de la sigla inglesa light amplification by stimulated emission of radiation, amplificación de luz por emisión estimulada de radiación) es un dispositivo que utiliza un efecto de la mecánica cuántica, la emisión inducida o estimulada, para generar un haz de luz coherente de un medio adecuado y con el tamaño, la forma y la pureza controlados.

El primer láser funcionó en 1960 inventado por Maimann empleando un cristal de rubí.

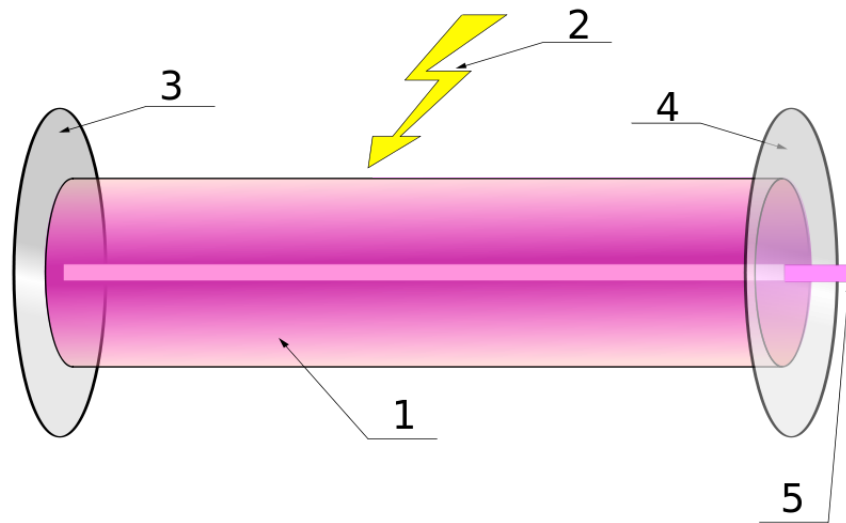
### 2. Características del láser

- Radiación coherente: la radiación emitida por una fuente láser, todos los fotones emitidos están en fase tanto temporal como espacialmente.
- Gran direccionalidad: el haz luminoso es prácticamente una línea recta, dicho en otras palabras, es la antítesis de la luz que proviene de una linterna.
- Elevada intensidad: está relacionado con la potencia.
- Alto grado de monocromatizidad: tiene alta precisión en frecuencia y longitud de onda, si bien son varias las frecuencias, están muy cerca de la frecuencia principal, lo que permite tomar como una única frecuencia.
- Emisión de luz polarizada: la luz vibra en un sólo plano.
- Bajo rendimiento: el láser como dispositivo, tiene un rendimiento de aproximadamente el 3 %, por lo cual es necesaria mucha energía para obtener muy poca emisión estimulada.



### 3. Física del láser

Los láser constan de un medio activo capaz de generar el láser, en la figura 9.1 se representa un esquema básico de un láser.



1. Medio activo para la formación del láser
2. Energía bombeada para el láser
3. Espejo reflectante al 100 %
4. Espejo reflectante al 99 %
5. Emisión del rayo láser

Figura 9.1: Esquema básico de un láser

Hasta 1916 se conocían dos tipos de transiciones

- Emisión espontánea: ocurre cuando un electrón se encuentra en un nivel de energía elevado, tiende a caer espontáneamente a un nivel de energía inferior con la subsiguiente emisión de luz; tal como se muestra en la figura 9.2. Este tipo de emisión, es la responsable de la mayor parte de la luz que vemos.

Por el hecho de caer, el fotón emite una frecuencia igual a la diferencia de energía de los dos niveles, sobre la constante de Planck.

- Absorción estimulada: ocurre cuando el electrón se encuentra inicialmente en un nivel inferior y se lo eleva a un nivel superior, absorbiendo un fotón; esto se observa en la figura 9.3.

Para poder producir esta absorción, la frecuencia de bombeo óptico la cual es la encargada de excitar, debe tener una frecuencia igual a la diferencia de los niveles energéticos.

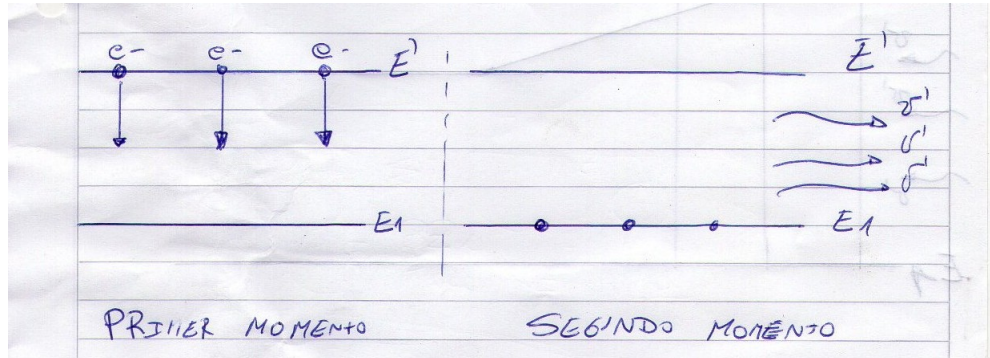


Figura 9.2: Emisión espontánea

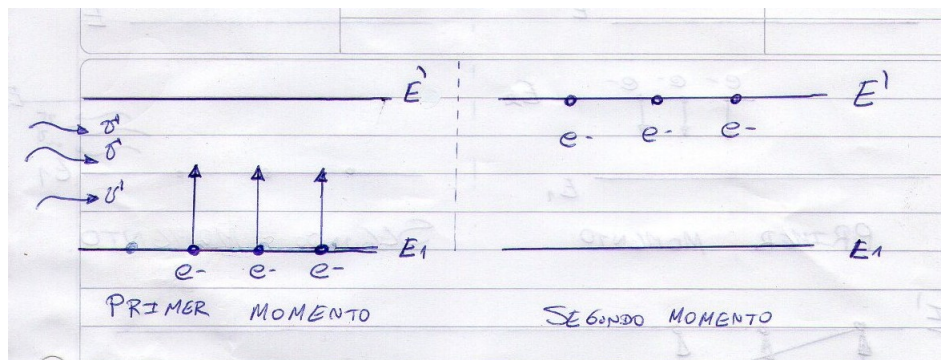
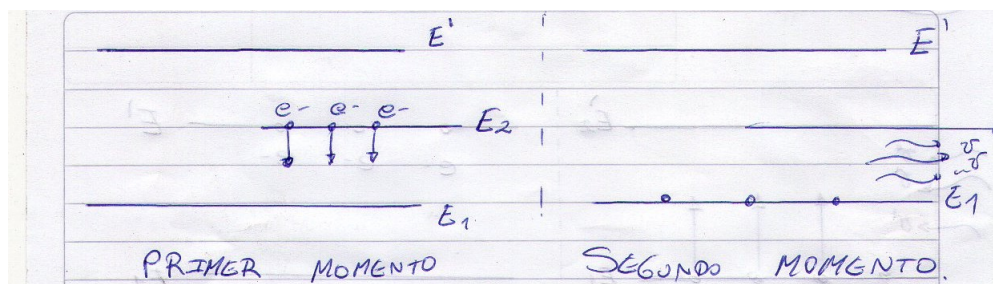


Figura 9.3: Absorción estimulada

La revolución ocurre en 1910 cuando Einstein descubre un nuevo tipo de transición, llamada *emisión estimulada*.



$E_2$  :Nivel metaestable

Figura 9.4: Emisión estimulada

Para entender este último tipo de emisión, necesitamos definir *estado metaestable*: es un nivel energético excitado de un átomo en el cual la transición espontánea desde este, al nivel fundamental, está prohibida por las *reglas de selección*. Recordemos que dichas reglas son estadísticas, de manera que, alguna transición de una enorme cantidad, puede violar estas reglas; cuando esto ocurre cae un fotón desde  $E_2$  a  $E_1$  con frecuencia  $\nu$  creando un campo propicio para que en un mismo instante caigan todos los demás electrones desde el nivel metaestable al nivel fundamental, todos con la misma frecuencia. O sea, un simple fotón de frecuencia  $\nu$  que violó las reglas de selección es la “llave” que induce o estimula a millones de fotones de frecuencia  $\nu$ . A esta emisión, se la denomina emisión estimulada.

Otra forma de ver la emisión estimulada, es cuando un electrón cae por azar violando las reglas de selección produciendo un fotón  $h\nu$ , esa radiación espontánea alcanza a otro átomo de la misma especie cuyo electrón está en  $E_2$ , bajo estas condiciones Einstein postuló que se produce la emisión de radiación estimulada por el que violó las reglas de selección, o sea que ese estímulo es el que provoca la radiación o emisión estimulada, amplificándose notablemente la cantidad de fotones emitidos.

En el medio activo del esquema de la figura 9.1 logra la amplificación de la radiación, una de las formas de que se lleva a cabo esta amplificación, es por interferencia constructiva de las ondas mediante la sucesivas reflexiones en los espejos, por esto es importante tener en cuenta la distancia entre los espejos.

### 3.1. Esquema básico de un láser de tres niveles

Mediante la excitación del medio activo (bombeo óptico), se produce la absorción estimulada o sea los electrones pasan de  $E_1$  a  $E'$  como se muestra en la figura 9.5.

Luego, mediante una emisión espontánea los electrones pasan de  $E'$  a  $E_2$ , figura 9.6, con lo cual se consigue *invertir la población* del nivel metaestable respecto del nivel fundamental, es decir que ahora el nivel  $E_2$  está mucho más poblado que el nivel  $E_1$ .

Cuando se produce la absorción estimulada, hay más posibilidades de que los electrones pasen del nivel  $E$  al  $E'$  antes que a  $E_2$ ; del mismo modo, cuando se produce la emisión espontánea, los electrones tienen más posibilidades de pasar de  $E'$  a  $E_2$  antes que a  $E$ .

Cada transición completa  $E_1 - E' - E_2$  demora aproximadamente un nano segundo, o sea que en un segundo hay tiempo suficiente para que lleguen al nivel metaestable millones de electrones, por lo tanto en esta gran cantidad de electrones, alguno viola las reglas de selección produciéndose la emisión estimulada.

Un ejemplo gráfico de esto, se observa en la figura 9.7.

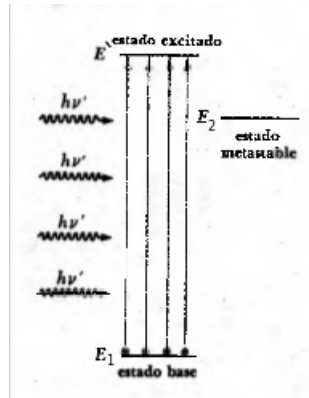


Figura 9.5: Absorción estimulada láser

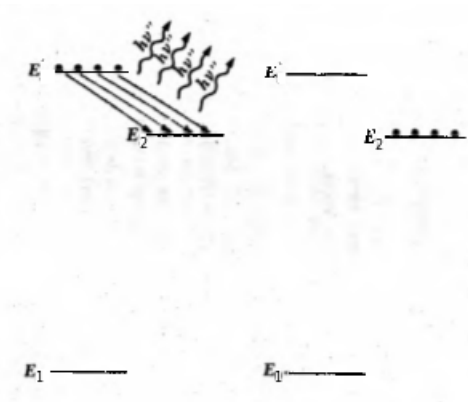


Figura 9.6: Inversión de población

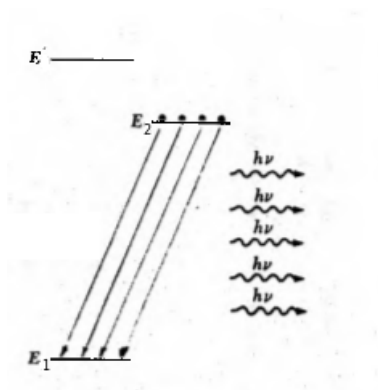


Figura 9.7: Fenómeno láser

### 3.2. Probabilidades de transición

- $N_1$ : Número de átomos por unidad de volumen en el estado  $E_1$
- $N_2$ : Número de átomos por unidad de volumen en el estado  $E_2$
- $\mu(\nu_{12})$ : Energía en función de la frecuencia de transición
- $B_{12}$ : Coeficiente de Einstein de la probabilidad de absorción inducida
- $B_{21}$ : Coeficiente de Einstein de la probabilidad de emisión inducida
- $A_{21}$ : Coeficiente de Einstein de la probabilidad de emisión espontánea

Todo lo relacionado con  $E'$  y  $E_1$  no sirve a los efectos del láser, por lo tanto se considera como ruido.

En equilibrio térmico, el número de átomos o transiciones por emisión, tiene que ser igual al número de átomos o transiciones por absorción, o sea

$$N_2 A_{21} + N_2 \mu(\nu_{12}) B_{21} = N_1 \mu(\nu_{12}) B_{12} \quad (9.1)$$

En la ecuación 9.1 los términos representan:

- $N_2 A_{21}$ : número de átomos por emisión espontánea
- $N_2 \mu(\nu_{12}) B_{21}$ : número de átomos por emisión inducida
- $N_1 \mu(\nu_{12}) B_{12}$ : número de átomos por absorción inducida
- $\mu(\nu_{12})$ : Estímulo

Reacomodando los términos

$$\mu(\nu_{12}) [N_1 B_{12} - N_2 B_{21}] = N_2 A_{21}$$

$$\mu(\nu_{12}) = \frac{N_2 A_{21}}{N_2 \left( \frac{N_1}{N_2} B_{12} - B_{21} \right)}$$

$$\mu(\nu_{12}) = \frac{A_{21}}{\left( \frac{N_1}{N_2} B_{12} - B_{21} \right)} \quad (9.2)$$

por mecánica estadística, sabemos que

$$f(\mu_i) = \frac{n_i}{g_i} = \frac{1}{e^{\mu_i/KT} - 1} \quad (9.3)$$

para los estados  $N_1$  y  $N_2$  la ecuación 9.3 resulta

$$f(\mu_1) = \frac{n_1}{g_1} = \frac{1}{e^{\mu_1/KT} - 1}$$

$$f(\mu_2) = \frac{n_2}{g_2} = \frac{1}{e^{\mu_2/KT} - 1}$$

reemplazando  $n_1$  y  $n_2$  por  $N_1$  y  $N_2$  resulta

$$N_1 = \frac{g_1}{e^{\mu_1/KT} - 1}$$

$$N_2 = \frac{g_2}{e^{\mu_2/KT} - 1}$$

para altas frecuencias, el término  $e^{\mu_2/KT} \gg 1$ , de manera que

$$N_1 = \frac{g_1}{e^{\mu_1/KT}}$$

$$N_2 = \frac{g_2}{e^{\mu_2/KT}}$$

considerando que  $g_1 = g_2$  y haciendo el cociente  $N_1/N_2$

$$\frac{N_1}{N_2} = e^{\frac{\mu_2 - \mu_1}{KT}} \quad (9.4)$$

la relación 9.4 se conoce como relación de Boltzmann.

Sabemos que  $\mu_2 - \mu_1 = h\nu_{21}$ , si reemplazamos esto y la relación 9.4 en la ecuación 9.2 resulta

$$\mu(\nu_{12}) = \frac{A_{21}}{\left( e^{\frac{h\nu_{21}}{KT}} B_{12} - B_{21} \right)} \quad (9.5)$$

Si en la ecuación 9.5 la temperatura  $T$  tiende a infinito la energía  $\mu(\nu_{12})$  también tiene que tender a infinito, como  $e^0 = 1$ , para que esto suceda se debe cumplir que  $B_{21} = B_{12}$ , entonces

$$\mu(\nu_{12}) = \frac{A_{21}}{B_{21}} \left( \frac{1}{e^{\frac{h\nu_{21}}{Kt}} - 1} \right) = \mu_\nu \quad (9.6)$$

La ecuación 9.7 representa la ecuación de Planck.

La ley de Planck vista en el capítulo de radiación térmica es

$$\mu_\nu = \mu(\nu_{12}) = \frac{8\pi\nu^3 h}{C^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu_{21}}{Kt}} - 1} \quad (9.7)$$

comparando las expresiones 9.6 y 9.7

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi\nu^3 h}{C^3} \quad (9.8)$$

donde  $A_{21}$  es el ruido y  $B_{21}$  es la emisión láser.

Observamos que hay que tratar de disminuir la relación de la ecuación 9.8, y que esta es proporcional al cubo de la frecuencia, entonces se pueden elaborar las siguientes conclusiones

- A menores frecuencias el láser es más efectivo.
- Cuando  $A_{21} \ll B_{21}$  hay acción láser, lo cual se da para bajas frecuencias. Por eso es que primero fue descubierto el maser.
- Cuando  $A_{21} \gg B_{21}$  no hay acción láser.
- A mayores frecuencias es menor la probabilidad de emisión inducida frente a la emisión espontánea
- El hecho que  $N_2 \gg N_1$  se refiere a la inversión de población, condición necesaria para que exista la emisión láser.

## 4. Tipos de láser

Según el medio activo los hay, sólidos, líquidos o gaseosos.

Materiales de construcción de los láser

- De rubí, se obtiene fundiendo oxido de aluminio con cromo.
- De mercurio  $H_g$
- Nitrógeno molecular  $N_2$
- Argón
- Helio, neón (muy popular)