

Contenido

Capítulo	Pág.
1. Seis experimentos	15
2. Circuitos	47
3. Algebra compleja	81
4. Potencia promedio y corriente efectiva	127
5. Análisis de circuitos simples	169
6. Método de análisis por sustitución	197
7. Resonancia en serie	221
8. Métodos gráficos	261
9. Ecuaciones de redes	299
10. Solución de las ecuaciones de red	333
11. Teoremas de redes	365
12. Circuitos acoplados y transformadores	399
13. Elementos no lineales	423
14. Series de Fourier	449
15. Series exponenciales y la integral de Fourier	499
16. Respuesta transitoria y el plano de frecuencia compleja ..	521
17. La transformación de Laplace	559
18. Redes con dos pares de terminales	593
19. Filtros eléctricos	635
20. Circuitos trifásicos balanceados	697
21. Circuitos trifásicos desbalanceados	729

Apéndice

	Pág.
1. Determinantes	763
2. Bibliografía	769
3. Respuestas a los problemas	773
4. Funciones trigonométricas	779

I

Seis Experimentos

1. Ley de Kirchhoff sobre las corrientes

El análisis de circuitos, como toda ciencia, se desarrolla partiendo de la observación y la experimentación. La teoría es la generalización de la evidencia experimental, y la teoría relacionada con los circuitos eléctricos es realmente notable porque, basada en solamente media docena de experimentos se ha hecho una estructura teórica, vasta y poderosa. Dos de estos experimentos se han llamado de Kirchhoff, otro es la ley de Ohm, dos más son relativos a inductancia y capacitancia y uno que se refiere a la potencia. Una de las leyes atribuidas a Kirchhoff, dice que la suma de todas las corrientes eléctricas que fluyen a un punto de unión, es cero. Esto se ha encontrado cierto, cada vez que se ha hecho el experimento. Refiriéndonos a la Fig. 1-1, si cinco alambres se han soldado juntos y la corriente en cada alambre se mide, y si la corriente hacia el punto de unión se considera positiva (corriente en dirección de la flecha de la figura) y la corriente que sale de este punto negativa (corriente en contra de la flecha de referencia), entonces la suma de las cinco corrientes es cero:

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 = 0 \quad (1-1)$$

Esta ecuación implica, por supuesto, que algunas de las corrientes sean positivas y otras negativas.

No es difícil de creer que esta ecuación es verdadera, porque si no lo fuera habría una acumulación de electricidad en la unión

Nosotros no estamos preparados para admitir esto; la electricidad no se acumula en una unión. Tal vez nos precipitemos un poco al aceptar la continuidad del flujo de electricidad, porque es análogo al flujo del agua en las tuberías. Piénsese en la Fig. 1-1 como que representa cinco tubos, y que i_1 e i_2 , así como todas las demás, representan los litros de agua por minuto que circulan en cada tubo; la Ec. 1-1 se puede obviamente aplicar al agua. Pero el conocimiento de que la Ec. 1-1 se puede aplicar también a la electricidad requiere experimentos con electricidad. Kirchhoff hizo muchas mediciones en gran número de uniones de varias clases y materiales antes de quedar satisfecho de que *siempre* es verdadera. Nuestra confianza en esta ley se ha ido fortaleciendo porque en casi un siglo, desde que Kirchhoff la obtuvo, no se le han encontrado variaciones.

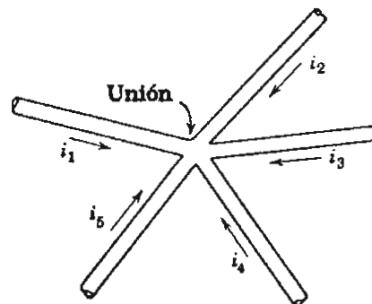


FIG. 1-1. La suma de todas las corrientes que fluyen hacia una unión es cero

Los *signos algebraicos* de las corrientes deben manejarse con cuidado; para definir una corriente que circule en un alambre, es necesario conocer (1) la *cantidad* de corriente, esto es, el número de amperes * y (2) la dirección en que fluye. El símbolo i se usa para representar una corriente, como en la Ec. 1-1, e i significa un número como + 10 o - 10 o - 8 o + 6. Entenderemos que $i = + 10$ es una corriente de 10 amperes en una dirección, mientras que $i = - 10$ es una corriente de 10 amperes en la dirección opuesta. ¿Pero cuál es cuál? Es *positiva* o *negativa* únicamente por comparación con una dirección especificada, por lo tanto debe especificarse una dirección de referencia en el diagrama del circuito. Puede dibujarse una flecha junto al conductor como en la Fig. 1-1. Entonces $i = + 10$, es una corriente en la dirección de la flecha, mientras

* Puede usarse el término *Ampere* ya que es la definición correcta y está de acuerdo con el código internacional.

que $i = - 10$ es una corriente en la dirección opuesta a la de la flecha.

La dirección de referencia tiene un significado físico simple. Nos muestra el modo en que un amperímetro debe conectarse en un circuito para tener la polaridad correcta. Si suponemos un amperímetro con escalas graduadas en ambos sentidos desde cero, con un sentido marcado + y el otro -, este amperímetro deberá conectarse en el circuito de modo que marque en la parte + de la escala cuando la corriente fluye en la dirección de la flecha, entonces, si la lectura del amperímetro es + la letra i indica un número positivo; si es -, i es un número negativo.

Es digno de repetirse que una flecha de referencia no nos muestra en qué dirección fluye la corriente; sólo nos muestra cuándo una corriente dada debe llamarse negativa o positiva.

El hecho de que el símbolo i pueda representar tanto un número positivo como un número negativo no ofrece confusión, con el signo algebraico enfrente del símbolo i . En cualquier ecuación (como en la Ec. 1-1) la letra i puede estar precedida por un signo + o -, como $+i$ o $-i$. Siguiendo las reglas usuales, si $i = 5$, $-i = -5$; si $i = -10$, $-i = +10$, etc., etc.

No hay ninguna diferencia en el resultado final debido a la dirección que se dé a las flechas de referencia en el diagrama del circuito, pero las ecuaciones deben ser consistentes con las flechas. Si alguna de las flechas en la Fig. 1-1 se hubiera invertido en dirección, el signo algebraico que precede a los términos correspondientes en la Ec. 1-1 también debería invertirse.

Una flecha no es el único modo de mostrar una dirección de referencia. Algunas veces es más conveniente nombrar con letras los puntos del diagrama de un circuito como en la Fig. 1-2. Entonces, si la corriente fluye de un punto a a un punto b , el símbolo i_{ab} representa un número positivo. Si la corriente fluye en la dirección opuesta, de b a a , i_{ab} representa un número negativo. La dirección de referencia de i_{ab} es de a a b .

2. Ley de Kirchhoff sobre voltajes

La otra ley de Kirchhoff dice que la suma de todos los voltajes alrededor de un circuito cerrado es cero, la Fig. 1-2 muestra parte de una red de resistencias y una batería.

La red puede contener también otra clase de elementos y puede

ser tan complicada como se deseé. Kirchhoff encontró, que la suma de los voltajes alrededor de cualquier circuito cerrado como *a-b-c-d-a* es siempre igual a cero. El voltaje del punto *a* al punto *b* es la diferencia de potencial eléctrico; es la cantidad en que el potencial eléctrico de *a*, es mayor que el potencial eléctrico de *b*. Si a este voltaje se le llama v_{ab} , entonces la ley de Kirchhoff sobre voltaje nos dice que

$$v_{ab} + v_{bc} + v_{cd} + v_{da} = 0 \quad (1-2)$$

Algunas de estas diferencias de potencial pueden ser, por supuesto, negativas y algunas positivas, y (esto es anticipar nuestra discusión un poco), la diferencia de potencial en cada rama depende de la resistencia, la corriente en la resistencia, y de si hay en ella baterías o generadores.

La ley de Kirchhoff sobre voltajes se ha encontrado que es perfectamente válida para un circuito como el *d-c-f-e-d* que contiene una batería, o para uno más extenso como el *a-b-c-f-e-d-a*. En el primer circuito

$$v_{dc} + v_{cf} + v_{fe} + v_{ed} = 0 \quad (1-3)$$

En esta ecuación v_{cf} es el voltaje entre las terminales de la batería; v_{dc} y las otras, son caídas de voltaje a través de las resistencias.

El voltaje es la diferencia de potencial entre dos puntos. Para describir un voltaje necesitamos especificar (1) un número (de volts) y (2) una dirección. El símbolo v se usa para el voltaje. Nos expresa el número de volts por su magnitud y la dirección por su polaridad. Para dar la dirección, se indica primero en el diagrama del circuito una dirección de referencia de un punto a otro, tanto por una flecha como llamando por letras a los puntos; ver la Fig. 1-3. Si el potencial es actualmente más alto en la cola de la flecha (o en la primera letra del subíndice) v es un número positivo, mientras

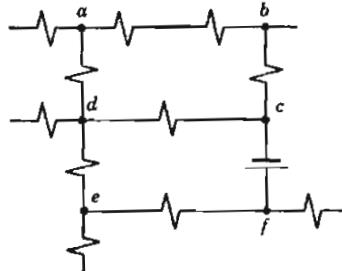


FIG. 1-2. La suma de todos los voltajes alrededor de un circuito cerrado es cero

que si el potencial es más alto en la punta de la flecha (o en la segunda letra del subíndice), v es un número negativo.

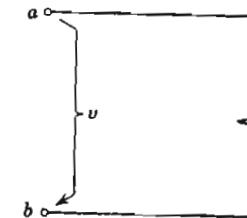


FIG. 1-3. Dirección de referencia del voltaje

Entonces, si el voltaje es positivo la flecha de referencia apunta desde el punto de mayor potencial al de menor. Esto significa (como veremos en las siguientes páginas) que el *voltaje positivo tiende a enviar corriente en la dirección de la flecha de referencia del voltaje*.

Si un voltímetro se conecta a un circuito (como el de la Fig. 1-3 por ejemplo) con la terminal de voltímetro marcada convencionalmente +, conectada a la cola de la flecha (punto *a* en la figura) y la terminal sin marca del voltímetro, conectada a la punta de la flecha (punto *b*), entonces una lectura positiva del voltímetro será producida por un voltaje positivo entre los dos puntos (*a* a *b*). Si el voltímetro marca hacia abajo de la escala, el voltaje v es negativo.*

Cuando se utilizan símbolos de doble subíndice, la dirección de referencia de v_{ab} es de *a* hacia *b*. Si v_{ab} es un número positivo, v_{ba} es un número negativo porque

$$v_{ab} = -v_{ba} \quad (1-4)$$

3. Ley de Ohm

En 1826 Georg Ohm publicó un artículo en el que sus mediciones de electricidad fueron resumidas en una relación simple entre la corriente y el voltaje, utilizando una constante a la que llamamos

* Nuestra definición de voltaje hace que la flecha de referencia apunte en la dirección en que la corriente es llevada a través del voltímetro (como a través de cualquier otra resistencia) por un voltaje positivo.

Existen otros medios de indicar la dirección de referencia además de las flechas o los subíndices dobles, tal como un paréntesis con uno de sus extremos marcados con +, por ejemplo. Es prudente entender todos los métodos comunes y utilizar aquél que sea más conveniente en un problema dado.

la resistencia del circuito. Es difícil para nosotros entender que esta ley, ahora tan familiar, fue rechazada por años y ridiculizada amargamente por otros científicos de la época de Ohm.*

La ley de Ohm relaciona la corriente que circula por un material conductor (tal como un pedazo de alambre) con el voltaje entre los extremos del material escribiendo

$$v = Ri \quad (1-5)$$

Donde R se le llama a la resistencia del pedazo de material conductor. Para metales, y casi todos los otros conductores, R es constante; esto es, no depende de la cantidad de corriente. En algunos materiales, y notablemente en los materiales cristalinos llamados *semiconductores*, R no es constante y este hecho es muy útil en rectificadores, amplificadores, pararrayos telegráfico, celdas fotoeléctricas y otros aparatos. Los *transistores* utilizan la resistencia variable de un semiconductor. Pero para todos los materiales conductores comunes, el valor de R es una constante que no depende de la cantidad de corriente.

Ohm encontró que la resistencia de una pieza de metal depende de su tamaño y forma. Pero la *resistividad* del material depende solamente de su composición y estado físico. La resistividad se visualiza fácilmente como la resistencia de un cubo del material; la dimensión del cubo es igual a la unidad de longitud a lo largo de cada arista, y la resistividad del material es la resistencia medida entre dos caras opuestas del cubo. La unidad de resistividad (en el sistema mks) es el Ohm-metro, que es la resistencia entre caras opuestas de un metro cúbico del material. **

Es conveniente visualizar la resistividad de este modo, en términos de un cubo de material, pero el concepto básico de resistividad no incluye ninguna cantidad específica o ninguna forma particular de la sustancia. La resistividad es una propiedad del material *en un punto*. † En un material homogéneo, como es el cobre, la resistividad es la misma en todos los puntos, pero si la naturaleza del material varía de punto a punto, la resistividad variará también de punto a punto. Es evidente que la definición de resistividad basada

* Esta y otras historias están relatadas en el libro del mismo autor *Explorando la Electricidad* (Referencia 1). (Las referencias están en lista en el Apéndice 2, en el orden en que aparecen en el texto).

** No es la resistencia de un metro cúbico de material, porque esta medida implicaría proyecciones sobre un eje fijo son siempre iguales, entonces las dos líneas giratorias deberán ser iguales una a otra; por tanto la Ec. 3-44 es necesaria.

† Es la relación entre la fuerza del campo eléctrico y la densidad de corriente en ese punto. Véase por ejemplo el Cap. V de *Fundamentos de Ondas Eléctricas* (Referencia 2).

en el concepto de un cubo unitario es correcta únicamente si el cubo es homogéneo.

La resistencia de un conductor específico puede calcularse basándose en la resistividad del material. Considere un alambre o una barra de metal, como en la Fig. 1-4, por la que circule corriente.

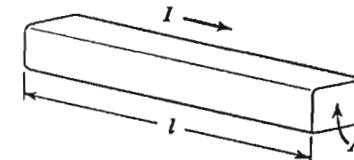


FIG. 1-4. Cálculo de la resistencia

La longitud del conductor en la dirección del flujo de corriente es \$l\$ (metros), el área de la sección transversal del conductor perpendicular a la dirección del flujo es \$A\$ (metros cuadrados), la resistividad del metal es uniformemente \$\rho\$ (ohms-metro). La resistencia (en ohms) del alambre o barra será entonces

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad (1-6)$$

Pueden usarse, por supuesto, unidades diferentes a las del sistema mks, y los valores de resistividad se han publicado en una variedad de unidades, de este modo, la resistividad del cobre standard recocido a 20°C, es cualquiera de las siguientes:

$$1.7241 \times 10^{-8} \text{ ohm-metro}$$

$$1.7241 \times 10^{-8} \text{ ohm-centímetro}$$

$$0.6788 \times 10^{-6} \text{ ohm-pulgada}$$

0.017241 ohms por metro de longitud y milímetro cuadrado de sección transversal

10.371 ohms por pie de longitud y 1-mili-circular de sección transversal.

La última equivalencia es conveniente para alambres redondos y unidades inglesas, el mili-circular es el área de un círculo de $\frac{1}{1000}$ de pulgada de diámetro. La penúltima equivalencia es la Standard Internacional de Cobre Recocido. * Los primeros dos valores son las unidades métricas comunes de la resistividad.

* Ver National Bureau of Standard Circular 31, o Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, Vol. 32, Pág. 2164, 1913. "Los siguientes valores se tomaron

La conductividad de un material conductor es la recíproca de la resistividad. La unidad de la conductividad en el sistema mks es el mho por metro.

Cuando se dice que la resistencia de un elemento metálico del circuito es independiente de la corriente que circula por él (o lo que es lo mismo, independiente del voltaje entre las terminales del elemento) no quiere decir, ciertamente, que la resistencia sea independiente de otras condiciones físicas. La resistencia es afectada notablemente por los cambios de temperatura. La afecta ligeramente la presión, y la condición metalúrgica del metal es importante. Así, el cobre estirado en frío no tiene la misma resistencia que el cobre recocido, y la resistencia de un alambre de cobre puede cambiarse si lo calentamos y después le permitimos enfriarse hasta su temperatura inicial.

Ligeras impurezas en el metal pueden afectar grandemente su resistencia; por ejemplo, una simple traza de fósforo en el cobre aumenta su resistencia. Cuando se dice que la resistencia de un elemento de un circuito es independiente de la corriente, implica que esto es cierto siempre que *todos los otros factores que pueden afectar la resistencia permanezcan constantes*.

La cantidad de variación de la resistencia con la temperatura, depende del material. Para metales, la resistencia es más o menos proporcional a la temperatura. Si esta simple relación fuese exacta, la resistencia sería proporcional a la temperatura arriba del cero absoluto, esto es, arriba de -273°C . De hecho, los experimentos muestran que la resistencia a temperaturas ordinarias es proporcional a la temperatura arriba de un cierto valor de referencia que no es el cero absoluto. Este valor de referencia difiere para los diferentes metales; para el cobre standard recocido es de -234.5°C (ver nota al pie de la Pág. 21). La Fig. 1-5 muestra la manera en que la resistencia del cobre varía con la temperatura. Nótese que la parte recta de la línea resistencia-temperatura, que nos da el valor correcto de la resistencia para todas las temperaturas practicadas, si se extiende interceptará al eje horizontal (resistencia cero) en -234.5°C .

como normales para el cobre standard recocido. A 20 grados centígrados, la resistencia de un alambre de cobre recocido de un metro de longitud y una sección transversal uniforme de un milímetro cuadrado es de $1/58 \text{ ohms} = 0.017241 \dots \text{ohm}$. A 20 grados centígrados el coeficiente de variación de la resistencia con la temperatura, del cobre recocido, medido entre terminales de potencial rígidamente unidas al alambre (masa constante) es $0.00393 = 1/254.5$ por grado centígrado... [éstos] son valores medios deducidos de un gran número de pruebas".

mientras que la línea real es curva y se aproxima a la resistencia cero a -273° . *

Es conveniente calcular la resistividad de un metal a cualquier temperatura con la siguiente fórmula, que es aplicable a la parte recta de la curva de la Fig. 1-5:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{t_2 + T}{t_1 + T} \quad (1-7)$$

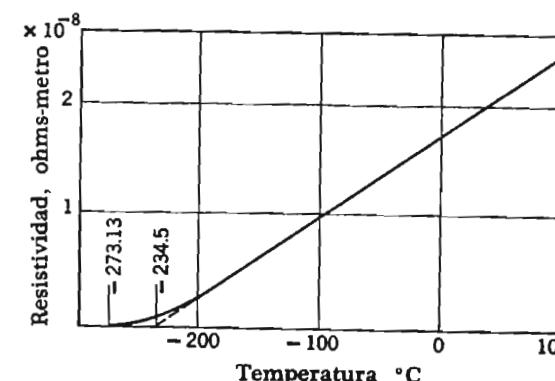


FIG. 1-5. Variación de la resistencia del cobre con la temperatura

Al usar esta fórmula, la resistividad ρ_2 a la temperatura t_2 debe encontrarse. Es necesario conocer la resistividad ρ_1 a otra temperatura t_1 . Las temperaturas son centígrados. T es la temperatura abajo de cero, a la cual la resistividad sería (si la curva de la Fig. 1-5 fuese una línea recta) igual a cero. Para cobre standard $T = 234.5$. Los valores de resistividad y de T están dados en la Tabla 1-1 para ciertos metales.

Algunos materiales no metálicos, como el carbón, pueden tratarse igual a aquellos metales en las aplicaciones de la ley de Ohm, esto es, que la corriente a través de una resistencia de carbón es prácticamente proporcional a la diferencia de potencial.

* Nótese también que la sugerión de que la resistencia es casi proporcional a la temperatura absoluta, si no es exacta tampoco está grandemente equivocada. Las razones físicas fundamentales de la ley de Ohm, y la relación de temperatura observada, pueden encontrarse en la física de los estados sólidos y la mecánica ondulatoria. Por decirlo crudamente, en el metal existen muchos electrones libres para moverse. En presencia de un campo eléctrico, estos electrones se mueven y existe una corriente. La libertad para moverse es obstruida por la vibración térmica irregular de los átomos del metal, y esta resistencia a la corriente eléctrica se incrementa cuando la agitación térmica se incrementa a altas temperaturas.

TABLA 1-1

RESISTIVIDAD DE METALES Y COEFICIENTES DE TEMPERATURA DE LA RESISTIVIDAD

Metal	Resistividad a 20°C. ohms- metro	Conducti- vidad, por ciento de co- bre standard recocido	Coefficiente de tempe- ratura de re- sistencia de la referencia, resistividad por grado centígrado a 20°C	Tempera- tura de re- ferencia, T, en la ecuación 1-7
Cobre standard recocido	1.7241×10^{-8}	100	0.00393	234.5
Cobre recocido	1.76×10^{-8}	98	0.00385	240
Cobre estirado en frío, medio	$1.76-1.78 \times 10^{-8}$	97-98	0.00383 av	241
Cobre estirado en frío	1.77×10^{-8}	97.3	0.00382	242
Aluminio, 99.97 % puro	2.66×10^{-8}	64.6	0.00427	214
Aluminio prome- dio comercial estirado en frío	2.83×10^{-8}	61.0	0.00403	228
Hierro puro	$7-8 \times 10^{-8}$	21-25	0.002	
Oro	2.44×10^{-8}	70.8	0.0034	
Hierro puro	10×10^{-8}	17	0.005	
Platino	10×10^{-8}	17	0.003	
Plata	1.63×10^{-8}	106	0.0038	
Acero, carbón, de medio a duro	$20-50 \times 10^{-8}$	3-9	0.002-0.005	
Estatío	11.5×10^{-8}	15	0.0042	
Tugsteno	5.51×10^{-8}	31	0.0045	
Zinc	5.8×10^{-8}	30	0.0037	

camente proporcional al voltaje aplicado bajo condiciones ordinarias y la ley de Ohm puede aplicarse convenientemente.

La resistencia de carbón cambia con la temperatura, así como la resistencia de un metal, pero en dirección opuesta: la resistividad del carbón es menor a altas temperaturas. De este modo la resistividad del carbón a 500 grados centígrados es, aproximadamente, un cuarto menor que a la temperatura ambiente. Se dice que el carbón tiene una característica de temperatura negativa.

Las soluciones electrolíticas muestran también una relación lineal entre el voltaje aplicado entre electrodos y la corriente que circula a través de la solución, pudiéndose aplicar la ley de Ohm. La resistencia de las soluciones decrece cuando la temperatura aumenta, y así

ellas (lo mismo que el carbón y a diferencia de los metales) tienen una característica de temperatura negativa. El efecto de la temperatura es muy grande. La resistencia a 100°C es típicamente de sólo un tercio con respecto a la que tiene la temperatura ambiente. El coeficiente de temperatura depende, tanto de la sustancia en solución como de la concentración.

4. Autoinductancia

Joseph Henry trabajando alrededor de 1830, en la universidad que es ahora de Princeton, encontró que la electricidad que circula en un circuito tiene una propiedad análoga a la cantidad de movimiento en mecánica. La corriente es difícil de iniciarse, pero una vez iniciada tiende a continuar. La cantidad de movimiento de un objeto pesado es Mv , el producto de la velocidad del objeto y una característica del mismo llamada *masa*; similarmente, el "momento electrocinético" de la electricidad que fluye en un circuito es Li , el producto de la corriente y una característica del circuito llamado *inductancia*.

Henry reconoció esta analogía con la cantidad de movimiento. Michael Faraday trabajó durante los mismos años en Londres explicándola al visualizar un campo magnético en el espacio alrededor del conductor. (Ver Referencia 1.) El término "momento electrocinético" fue usado algunos años después por Clerk Maxwell en su tratado matemático sobre este asunto. Utilizando el símbolo λ para la *inercia electrocinética*,

$$\lambda = Li \quad (1-8)$$

donde L es la inductancia e i es la corriente.

La segunda ley de Newton de la mecánica dice que la fuerza necesaria para cambiar la velocidad de un cuerpo con masa es igual a la rapidez con que varía la cantidad de movimiento:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} (M\mathbf{v}) = M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = Ma \quad (1-9)$$

siendo a la aceleración. La relación eléctrica análoga nos dice que el voltaje necesario para producir un cambio de la corriente en un circuito inductivo, es igual a la razón de cambio del momento electrocinético:

$$v = \frac{d}{dt} (L i) \quad (1-10)$$

Si la inductancia es constante, esta ecuación toma la forma familiar

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (1-11)$$

llamándose *autoinductancia* de un circuito a L .

Otra expresión útil que incluye a la inductancia se encuentra por integración. De la Ec. 1-11,

$$di = \frac{1}{L} v dt \quad \text{o} \quad i = \frac{1}{L} \int v dt \quad (1-11a)$$

5. Inductancia mutua $L_{12} = L_{21}$

También se encontró (por Faraday) que una corriente que cambia en un circuito inducirá un voltaje en un circuito cercano. Si los circuitos adyacentes se numeran 1 y 2, el voltaje inducido en el circuito 1 por una corriente cambiante en el circuito 2 será

$$v_1 = L_{12} \frac{di_2}{dt} \quad (1-12)$$

similarmente, si la corriente en el circuito 1 varía, inducirá un voltaje en el circuito 2:

$$v_2 = L_{21} \frac{di_1}{dt} \quad (1-13)$$

L_{12} y L_{21} se les llama *inductancias mutuas*. Nótese la diferencia en concepto entre L_{12} y L_{21} ; el primer número del subíndice es el número del circuito en el que se induce el voltaje, y el segundo es el del circuito en el que existe la corriente cambiante. Es un hecho, aunque no obvio, que las dos inductancias mutuas de un par de circuitos acoplados son iguales, esto es,

$$L_{12} = L_{21} \quad (1-14)$$

Esta igualdad la aceptaremos (en el presente punto de discusión) como un hecho experimental, posteriormente será posible deducirla de relaciones más generales de la energía.

6. El campo magnético

Faraday explicó, tanto la inductancia como la inductancia mutua, basándose en el campo magnético que rodea a un conductor por el que circula corriente. El campo magnético es importante para la teoría de los circuitos, no solamente como un concepto, sino también porque permite los cálculos de la inductancia partiendo de las dimensiones de un circuito.

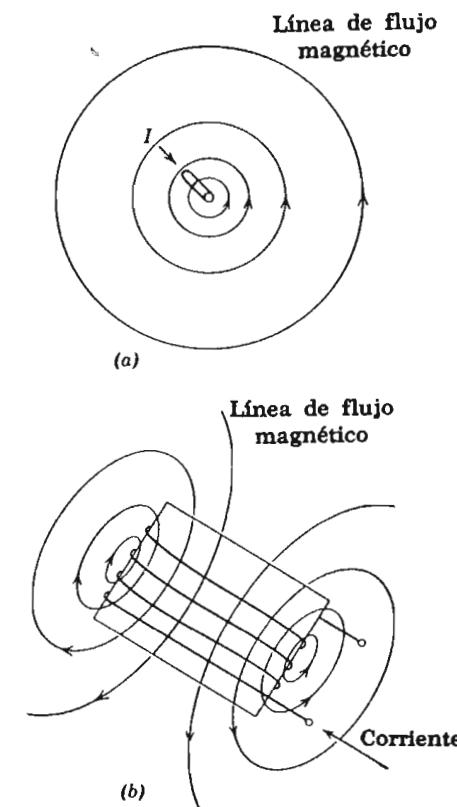


FIG. 1-6. Campos magnéticos alrededor de (a) un conductor aislado largo y recto, y (b) una bobina

Faraday visualizó líneas de "flujo" en un campo magnético.* Cada línea representa una cierta cantidad de flujo magnético (1 weber o si se prefiere, alguna fracción de 1 weber). La dirección de una línea de flujo es la dirección de la fuerza sobre un polo magnético. La densidad de las líneas de flujo (se encuentran sumamente cercanas unas de otras) está en proporción a la magnitud de la fuerza sobre el polo magnético. Es una característica de un campo magnético, que todas y cada una de las líneas de flujo sean curvas cerradas. Se encontró que el campo alrededor de un conductor aislado recto y largo, por el que circula corriente, es un conjunto de círculos concéntricos como los de la Fig. 1-6a; y las líneas del flujo magnético alrededor de una bobina de alambre, son ovales como se ven en la Fig. 1-6b.

Faraday, calculó los *enlaces de flujo*. Esta cantidad es el producto del número de espiras y vueltas de una bobina y el número de líneas de flujo (medidas en webers) que pasan a través de una bobina. De donde:

$$\text{Enlaces de flujo} = N\Phi \quad (1-14a)$$

No todas las líneas de flujo enlazan cada espira de la bobina, sin embargo deben tomarse en cuenta. De este modo, 6 de las líneas mostradas en la Fig. 1-6b enlazan a las 4 espiras de la bobina y 2 de las líneas enlazan solamente 2 espiras cada una; haciendo la suma: 6 líneas por 4 espiras más 2 líneas por 2 espiras, nos dan un total de 28 enlaces de flujo. Este concepto también es aplicable para los enlaces de flujo fraccionarios que resultan si una línea de flujo pasa a través del conductor, enlazando parte, pero no toda la corriente del mismo.

Faraday, demostró que esta cantidad, de enlaces de flujo magnético, es igual al momento electrocinético del circuito; esto es, puede relacionarse con la inductancia por la Ec. 1-8:

$$\text{Enlaces de flujo} = N\Phi = \lambda = Li \quad (1-14b)$$

Entonces, si el campo magnético se conoce, partiendo de la geometría del circuito, es una cosa simple calcular la inductancia de

$$L = \frac{\lambda}{i} = \frac{N\Phi}{i} \quad (1-14c)$$

* Un campo magnético es una condición del espacio. Es fácil pensar en un campo magnético como algo más tangible, con líneas de flujo como bandas de hule. Este concepto, aunque ayuda al principiante, es peligroso a la larga. También la palabra "flujo" es quizás inapropiada, porque parece como si alguna cosa fluyera.

Vemos que la inductancia es igual al número de enlaces de flujo producidos por un ampere de corriente. Se puede encontrar que el voltaje inducido, es igual a la rapidez con que varían los enlaces de flujo, combinando las Ecs. 1-14b, con la 1-10:

$$v = \frac{d}{dt} (Li) = \frac{d}{dt} (N\Phi) \quad (1-14d)$$

Que se conoce comúnmente como la ley de Faraday del voltaje inducido.

Se podrá también ver, que los enlaces de flujo de un campo magnético con el circuito o circuitos, que él enlaza, no pueden cambiar excepto en respuesta a un voltaje (si el voltaje es igual a cero la rapidez con que varía los enlaces de flujo es cero). En ninguna circunstancia pueden cambiar abruptamente (puesto que el voltaje inducido sería infinito si $N\Phi$ fuera discontinuo y esto es imposible). Esto nos lleva al teorema de los *enlaces de flujo constantes* que puede considerarse como análogo al principio de conservación de la cantidad de movimiento en un sistema mecánico.*

7. Fórmulas de inductancia

Largas listas de fórmulas se encuentran disponibles en manuales y otros libros de referencias, para calcular la inductancia de circuitos de diferentes configuraciones partiendo de sus dimensiones, pero solamente daremos aquí unas pocas.

BOBINA LARGA. La inductancia L (en henrys)** de una bobina larga de la Fig. 1-7 es aproximadamente

$$L = \frac{\mu N^2 A}{l} \quad (1-15)$$

donde μ es la permeabilidad, $4\pi \cdot 10^{-7} = 12.566 \cdot 10^{-7}$ para el aire.

N es el número de espiras de la bobina.

A es el área de la sección transversal de la bobina (metros cuadrados).

l es la longitud de la bobina (metro).

No es necesario que la sección transversal sea circular.

Esta fórmula es sólo aproximada, porque supone que todas las líneas de flujo enlazan todas las espiras de la bobina y en realidad a

* Ver Sección 13 del Cap. 17 (Ej. 3) para ulterior discusión de este principio.

** Código internacional.

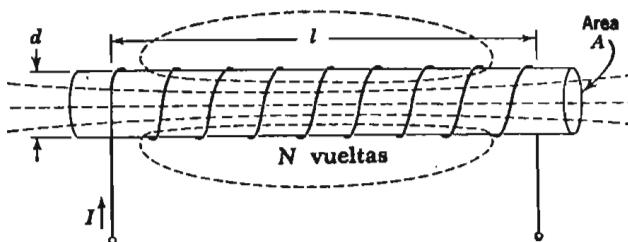


FIG. 1-7. Inductancia de una bobina larga

algunas de las líneas les falta enlazar las espiras finales, como se indica en el diagrama. Como esta dispersión del flujo es mayor en los extremos de la bobina, la aproximación será buena si la bobina es larga, pero es pobre para una bobina corta. Si la longitud de la bobina es diez veces su diámetro ($l/d = 10$) la inductancia es 4% menos que el valor dado por la fórmula; si $l/d = 4$, el error es del 10%.

BOBINA CORTA. Existe un buen número de fórmulas aproximadas, para la inductancia de un solenoide corto, de un solo alambre, en espiras circulares. La más simple es el resultado de una ligera modificación de la Ec. 1-15:

$$L = \frac{\mu N^2 A}{l + 0.45d} \quad (1-16)$$

donde d (ver Fig. 1-7) es el diámetro de la bobina. (El diámetro d se mide propiamente de centro a centro del alambre, pero el alambre se supone delgado). Esta fórmula es correcta para una bobina no muy larga, y su aproximación está dentro del 1%, si la longitud de la bobina es mayor que aproximadamente la mitad del diámetro (el error es de 1% cuando $l/d = 0.4$). Las unidades serán las mismas que para la Ec. 1-15. Esta fórmula usual es algunas veces más conveniente, para uso práctico, de la siguiente forma:^{*}

$$L = \frac{r^2 N^2}{10l + 9r} \text{ microhenrys} \quad (1-17)$$

en donde r es el radio de la bobina ($r = \frac{1}{2}d$) y tanto el radio como la longitud se miden en pulgadas. Se ha supuesto que el alambre, el armazón de la bobina y todo lo que esté inmediato a ésta, no son

* Acreditada por Terman en la Referencia 3 a H. A. Wheeler.

magnéticos (esto es, no contienen hierro) de modo que la permeabilidad no varía apreciablemente de la del aire, pero esta suposición es necesaria en todas las fórmulas para selenoides rectos. Si esto no fuera cierto, el cálculo de la inductancia sería difícil, si no imposible.[†]

BOBINA TOROIDAL. Si la bobina larga de la Fig. 1-7 pudiera doblarse a formar un círculo con los extremos unidos, el resultado sería

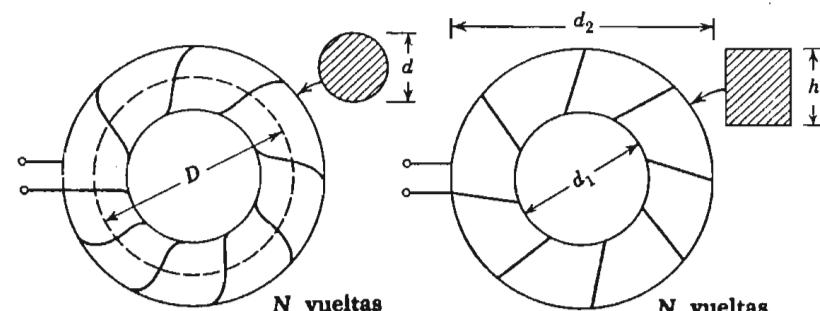


FIG. 1-8. Bobina toroidal, sección transversal circular

FIG. 1-9. Bobina toroidal, sección transversal rectangular

una bobina toroidal o en forma de dona, como se indica en la Fig. 1-8. Una variación de esta forma resulta, si la sección transversal del núcleo es rectangular como en la Fig. 1-9. Esta última es fácil de calcular y su inductancia en henrys es

$$L = \frac{\mu N^2}{2\pi} h \ln \frac{d_2}{d_1} \quad (1-18)$$

donde d_1 y d_2 son los diámetros interior y exterior como se ve en la Fig. 1-9, medidos en cualquier unidad, siempre que se usen las mismas para ambos.

h , es el espesor (altura de la sección transversal rectangular) en metros.

[†] Todas estas fórmulas para la inductancia también suponen que el núcleo u otro material cercano no son conductores, y que la bobina está hecha de alambre delgado, de modo que un campo magnético variable no induzca corrientes parásitas en dicho material; ^u también puede suponerse que la rapidez de variación de la corriente es tan lenta que las corrientes inducidas son despreciablemente pequeñas. Esta última suposición para el valor aquí definido se llamó inductancia a baja frecuencia o de corriente continua.

N , es el número de espiras.

μ , es la permeabilidad del material del núcleo = $4\pi \cdot 10^{-7}$ para el aire.

\ln , indican el logaritmo natural, o logaritmo de base e .

Toda bobina toroidal ideal, tiene su campo magnético confinado enteramente en el espacio en forma de anillo interior a la bobina, no existiendo campo fuera del toroide. Por tanto, el toroide tiene la ventaja práctica de que no existe campo disperso que produzca efectos inductivos indeseables en otros circuitos cercanos, y la ventaja teórica de que el campo, y por tanto la inductancia, pueden fácilmente calcularse a partir de principios básicos (ver por ejemplo la Referencia 2). También, si el núcleo está hecho de material magnético como el hierro, la inductancia puede calcularse, si la permeabilidad es conocida, pues el campo existe enteramente en el material magnético (ver sin embargo la nota al pie de la Pág. 31).

Si el material del núcleo no es magnético (aire, plástico, madera, etc.), la fórmula puede escribirse convenientemente (de la Referencia 3)

$$L = 0.01170N^2h \log_{10} \frac{d_2}{d_1} \text{ microhenrys} \quad (1-19)$$

y los símbolos tienen el mismo significado que en la Ec. 1-18 excepto que h estará entonces medida en *pulgadas* y \log_{10} es el logaritmo común. Una fórmula similar (Referencia 3) para la bobina toroidal de sección transversal circular como la mostrada en la Fig. 1-8 es

$$L = 0.01595N^2(D - \sqrt{D^2 - d^2}) \text{ microhenrys} \quad (1-20)$$

donde d y D son los diámetros indicados en la Fig. 1-8 en *pulgadas* y N es el número de espiras.

Estas fórmulas para los toroides no están limitadas a toroides delgados, pues pueden aplicarse también a toroides gruesos. Es decir, no es necesario que $d \ll D$.

Las anteriores son unas pocas de las más simples y más útiles fórmulas de inductancia. De ellas es posible una cierta generalización. En todas, la inductancia es proporcional al cuadrado del número de espiras. Refiriéndonos a la Ec. 1-14c, cada espira sumada a la bobina incrementa los eslabonamientos del flujo de dos formas:

aumenta el número de espiras N y también incrementa el flujo Φ que abarca las espiras. Esto es, aumenta la inductancia incrementando, tanto el número de espiras como el flujo. En general, la inductancia es mayor si la sección transversal es mayor. Por el contrario, la inductancia es menor si la trayectoria del flujo es mayor. Estas relaciones están bastante claras en la Ec. 1-15, pero están un poco confusas por la forma de las otras ecuaciones. En todas las ecuaciones sin embargo, es evidente que si todas las dimensiones de una bobina se incrementan en la misma proporción, la inductancia se incrementará también en la misma proporción.

8. Capacitancia

Es conocido, desde los primeros experimentos en la Universidad de Leyden, alrededor de 1746, que la electricidad se puede almacenar en una "botella de Leyden", en un "condensador", o "capacitor". En efecto, siempre que dos conductores eléctricos están a diferentes potenciales, existe cierto almacenamiento de carga sobre ellos. Se dice que existe, en tal caso, un *campo eléctrico* en el espacio entre ambos conductores y las líneas de flujo del campo terminarán en las cargas eléctricas almacenadas.

Un condensador o capacitor (ambos términos son de uso común, pero *capacitor* es preferido oficialmente y será usado de aquí en adelante en este libro) es un dispositivo incluido en un circuito, con el propósito de almacenar carga eléctrica. Un capacitor está formado por grandes hojas de metal muy juntas, separadas usualmente por una delgada hoja de papel, plástico u otro material aislante. Sin embargo, si el capacitor es variable, las placas tienen únicamente un espacio de aire entre ellas. Cualquiera que sea la construcción física, los experimentos muestran que la cantidad de carga eléctrica de un capacitor, es proporcional a la diferencia de potencial o voltaje entre las placas:

$$q = Cv \quad (1-21)$$

C , es un factor de proporcionalidad llamado *capacitancia* del capacitor. La carga q , es una medición de la electricidad quitada de un conjunto de placas del capacitor y sumada al otro conjunto de placas; así, las placas positivas tienen una carga q añadida a ellas y las placas negativas, una carga q quitada de ellas.

Para el análisis de circuitos, nosotros deseamos relacionar el voltaje entre las terminales de un capacitor y la corriente en estas terminales. La corriente es la rapidez con que la carga fluye a la capacitancia: $i = dq/dt$. Diferenciando ambos miembros de la Ec. 1-21,

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(Cv) \quad (1-22)$$

y si la capacitancia es constante (como generalmente sucede),

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (1-23)$$

Esta relación puede también expresarse como una integral. La carga es la integral con respecto al tiempo de la corriente: $q = \int i dt$.

Usando esta relación en la Ec. 1-21

$$Cv = \int_0^t i dt \quad o \quad v = \frac{1}{C} \int_0^t i dt \quad (1-24)$$

La Ec. 1-24 está escrita como una integral *definida* sobreentendiendo, que el tiempo cero es el instante en que tenemos carga cero en el capacitor.

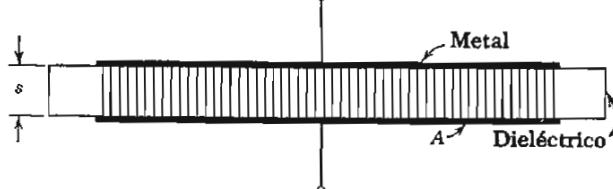


FIG. 1-10. Capacitor simple

La capacitancia del capacitor C depende de las dimensiones de las placas, la separación entre ellas y la naturaleza del material entre la placas. Para muchos materiales C es constante.* La capacitancia

* Para algunos materiales, sin embargo, a los que se les ha aplicado el nombre poco feliz de ferroeléctricos, la constante dieléctrica es variable, empezando en valores extremamente altos como pueden ser los de 10 000 o más veces la del aire, pero decreciendo cuando la intensidad del campo eléctrico aplicado es incrementada. Un capacitor en el que se utilice este material dieléctrico, tiene una capacitancia alta pero variable. El material cerámico de bario titanato, es un caso típico de esta clase de dieléctricos.

puede calcularse de las dimensiones del capacitor y de un valor llamado la constante dieléctrica (o permittividad) que caracteriza al material no conductor de entre las placas. Si nosotros estamos interesados en las capacitancias de conductores de muy diferentes formas, el cálculo puede ser tan complicado como el de la inductancia. Afortunadamente, nosotros estamos generalmente interesados en la capacitancia de un par de placas paralelos u hojas de metal, con alguna clase de material dieléctrico entre ellas, como se indica en la Fig. 1-10. Si las placas son grandes en comparación con el espacio entre ellas (de modo que el campo eléctrico que orla los bordes de las placas puede depreciarse sin introducir un error apreciable) la capacitancia es simplemente

$$C = \frac{\epsilon A}{s} \quad (1-25)$$

donde ϵ es la constante dieléctrica del material aislante.

$(\epsilon_0 = 8.855 \cdot 10^{-12}$ En el vacío)

A , es el área de cualquiera de las dos superficies paralelas metálicas (metros cuadrados).

s , es el espacio entre las dos superficies metálicas (metros).

C , es la capacitancia (farádica).

9. Constante dieléctrica

La Fig. 1-10 nos muestra una hoja de material sólido dieléctrico entre las placas metálicas del capacitor. Si no existiera material dieléctrico, el presente valor de ϵ en la Ec. 1-25 sería $8.855 \cdot 10^{-12}$; esto es, la constante dieléctrica del espacio vacío, que se ha denotado por ϵ_0 . Cuando se encuentra presente cualquier sustancia material, la constante dieléctrica (o permitividad) es más alta. Los valores de las constantes dieléctricas de muchos materiales se han determinado experimentalmente y los resultados se hallan tabulados en libros de referencias. Actualmente es usual tabular no ϵ para el material en cuestión, siendo la relación ϵ/ϵ_0 . Esta relación se ha llamado comúnmente K , y es la constante dieléctrica *relativa* de la sustancia en cuestión, comparada con el vacío:

damente altos como pueden ser los de 10 000 o más veces la del aire, pero decreciendo cuando la intensidad del campo eléctrico aplicado es incrementada. Un capacitor en el que se utilice este material dieléctrico, tiene una capacitancia alta pero variable. El material cerámico de bario titanato, es un caso típico de esta clase de dieléctricos.

$$K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (1-26)$$

Unos pocos valores experimentales se encuentran en la Tabla 1-2. Debe recordarse que la constante dieléctrica varía con la temperatura y en los gases con la presión, así como que los valores son dependientes en alguna forma de la frecuencia a la que se está haciendo la medición.*

La mayoría de los capacitores no son como la Fig. 1-10, aunque esta forma física simple se usa algunas veces cuando la capacitancia requerida es pequeña. Usualmente las hojas metálicas y las hojas dieléctricas están apiladas alternativamente y ambos lados de las hojas metálicas intermedias contribuyen al área útil del capacitor. Los capacitores de papel y de lámina plástica están frecuentemente enrollados en forma cilíndrica para mayor conveniencia y economía.

TABLA 1-2

CONSTANTES DIELECTRICAS RELATIVAS (PERMITIVIDAD)

$K = \epsilon/\epsilon_0$; valores obtenidos para 20°C y presión atmosférica; frecuencia menor que 1 megaciclo, a menos que se indique otra cosa. Las sustancias marcadas * son completamente variables y K puede diferir de las muestras por 10 o 20%, o inclusive más.†

Aire	1.0006	Crystal abovedado (ventana)*	6
Hidrógeno	1.0003	Mica de buena calidad *	7
Agua pura	78	Porcelana *	6.5
Alcohol etílico	25.7	Hule vulcanizado *	3
Aceite, petróleo *	2.1	Teflón (a todas frecuencias)	2.1
Parafina, cera *	2.25	Poliestireno (a todas freq.)	2.55
Papel seco *	3.5	Polietileno (a todas freq.)	2.26
Papel aceitado *	3.5	Oxidos de titanio y titanatos *	10 a 10 000

* Tablas excelentes y exhaustivas se encuentran en *Materiales Dieléctricos y sus Aplicaciones* de von Hippel (Referencia 4).

Se puede hacer mención de los capacitores electrolíticos. El material dieléctrico es una capa de óxido formada electroquímicamente en la superficie de la placa metálica, que es usualmente de aluminio. La capacitancia es alta porque la película de óxido es extremadamente

* De este modo K , para el poliestireno, un excelente material dieléctrico es, 2.56 a 1 000 ciclos por segundo, 2.55 a 100 megaciclos por segundo y 2.54 a 25 000 megaciclos por segundo. Para la mayoría de los materiales, la variación es mayor.

delgada. Sin embargo, el voltaje aplicado al capacitor deberá tener siempre la misma polaridad o la película dieléctrica se destruirá (voltajes alternos no pueden aplicársele a menos de que exista una fuerte polarización negativa de corriente continua). También los capacitores electrolíticos se deterioran con la edad y tienen, relativamente, altas pérdidas y corrientes de fuga. Utilizando la constante dieléctrica relativa K en la Ec. 1-26,

$$C = 8.855 \frac{KA}{s} \text{ micromicrofarads} \quad (1-27)$$

con el espesor s y el área A medidos en metros y metros cuadrados. Para utilizar s y A en centímetros y centímetros cuadrados, divídase la fórmula entre 100. Si s y A están medidos en pulgadas y pulgadas cuadradas, la fórmula será $C = 0.2244 KA/s$ micromicrofarads.

Existe una cosa, tal como *capacitancia mutua*, entre circuitos que no están conectados conductivamente pero que tienen influencia uno en el otro debido a un campo eléctrico mutuo. Un ejemplo importante es la capacitancia mutua entre una línea de transmisión a alto voltaje y una línea de teléfono que corre cercana a ella; el campo eléctrico de la línea de transmisión puede interferir con la operación de la línea telefónica si no se tuvo cuidado en el diseño. La capacitancia mutua, sin embargo, es importante rara vez en el análisis de circuitos.

10. Campo eléctrico

Entre las placas de un capacitor (y además en cualquier parte en la vecindad de una carga eléctrica) se encuentra un campo eléctrico. La dirección de este campo es (por definición) la dirección de la fuerza que actúa sobre una partícula exploradora cargada positivamente y la intensidad del campo E es proporcional a la magnitud de la fuerza. Si la carga sobre la partícula exploradora es q , la fuerza $F = qE$.

Las líneas de flujo eléctrico se han visualizado como saliendo de la carga eléctrica positiva y terminando en la carga negativa. Por tanto, las líneas de flujo (o líneas de fuerza) de un capacitor de placas paralelas estarán como se indica en la Fig. 1-11.

El voltaje o diferencia de potencial es por definición la integral de la intensidad del campo eléctrico.

$$v = \text{diferencia de potencial} = \int E \cdot ds \quad (1-28)$$

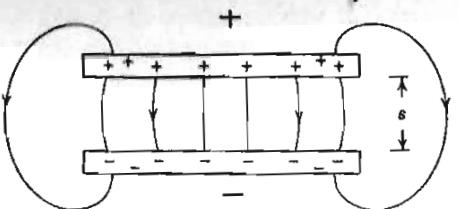


FIG. 1-11. Líneas de fuerza entre placas paralelas cargadas

Si en la Fig. 1-11, la integración se efectúa a lo largo de una de las líneas de fuerza, recta y corta, entre las placas, el resultado es especialmente simple. La intensidad del campo E es constante, así el voltaje entre placas será meramente $E \cdot s$, siendo s la distancia entre las placas.

Supóngase que una pequeña carga eléctrica positiva q es liberada de la placa superior de la Fig. 1-11. Como estará en una región de intensidad de campo E , se ejercerá sobre ella una fuerza $F = qE$. La carga se dirigirá hacia la placa inferior; al moverse se efectuará un trabajo sobre ella por el campo eléctrico, y de acuerdo con la familiar ley de la mecánica el trabajo es $w = F \cdot s$. Como $F = qE$, el trabajo es $w = qE \cdot s$, pero acabamos de decir que el voltaje es $v = E \cdot s$, por lo que $w = qv$.

Así hemos encontrado que cuando la electricidad se mueve de un punto de un potencial a un punto de otro potencial, el trabajo efectuado es el producto de la cantidad de electricidad y la diferencia de potencial o voltaje, a través de la que se mueve:

$$w = F \cdot s = qE \cdot s = qv \quad (1-29)$$

donde w , es el trabajo (watts-segundo o joules)

v , es la diferencia de potencial (volts).

q , es la carga (coulombs).

F , es la fuerza (newtons).

s , es la distancia (metros).

$$\frac{W}{q} = V$$

11. Energía, trabajo y potencia

Esta ecuación es más general de lo que es aparentemente, según la breve discusión dada. Fue derivada del espacio entre las placas, pero (excepto por la complicación algebraica) podría haberse derivado para el movimiento de cargas eléctricas en cualquier lado. Es

especialmente importante en la teoría de los circuitos cuando se aplica a la electricidad que fluye en un conductor.

Si el voltaje entre dos puntos en un circuito es v y una cantidad de electricidad q , pasa a través del circuito de un punto a otro, el trabajo efectuado es $w = qv$. Si diferenciamos cada miembro de esta ecuación con respecto al tiempo, a la izquierda la derivada del trabajo es la potencia y a la derecha (según Ec. 1-22) la derivada de la carga es la corriente:

$$p = \frac{dw}{dt} = \frac{dq}{dt} v = vi \quad (1-30)$$

Aquí tenemos la importante y probablemente familiar ecuación, que nos dice que la potencia (en watts) es igual al producto de la diferencia de un potencial (en volts) y la corriente (en amperes).

La Fig. 1-12 nos muestra una resistencia. Si el voltaje aplicado entre a y b es llamado v y la corriente de a a b es i , la potencia suministrada por el circuito externo a la resistencia en cada instante es $p = vi$. Por tanto, la energía total recibida por la resistencia en un intervalo de tiempo t , es

$$w = \int_0^t p dt = \int_0^t vi dt \quad (1-31)$$

Si el voltaje y la corriente son ambas constantes durante el intervalo de tiempo en cuestión, esto podrá escribirse como el producto $w = vit$ en lugar de la integral, pero la Ec. 1-31 es general y puede aplicarse cuando, el voltaje, la corriente, o ambas varíen. El trabajo o energía w en la Ec. 1-31 es suministrada por un generador o batería a la resistencia de la Fig. 1-12 y convertido en dicha resistencia en calor.

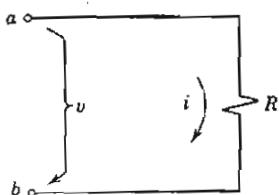


FIG. 1-12. Potencia a una resistencia

Los generadores y baterías son dispositivos que proveen energía eléctrica. Un generador provee energía eléctrica a partir de energía mecánica; una batería la provee a partir de energía química. Existe un buen número de otras fuentes menores de energía eléctrica: un termopar provee electricidad a partir del calor; ciertos tipos de celdas fotoeléctricas proveen energía eléctrica a partir de la luz, y los cristales piezoelectricos nos dan energía eléctrica a partir de energía mecánica. Vamos a hablar de todos estos dispositivos bajo el nombre de *fuentes*.

12. Fuentes

Puesto que una fuente es capaz de suministrar energía eléctrica, será capaz de forzar corriente *contra* el campo eléctrico; figuradamente, será capaz de hacer que la corriente fluya "cuesta arriba". Se dice que la fuente tiene dentro de ella una *fuerza electromotriz*. La batería ordinaria de un automóvil, por ejemplo, tiene una fuerza electromotriz de aproximadamente 6 volts; esto quiere decir que cuando no hay corriente circulando, existe una diferencia de potencial entre los terminales de la batería de aproximadamente 6 volts. La Fig. 1-13 nos muestra una fuente (quizás una batería) a la que una resistencia está conectada. Los signos + y - de las terminales de la fuente muestran la polaridad de la fuerza electromotriz. Debido a la fuente, el punto *a* está a un potencial mayor (positivo) que el punto *b*. La flecha dentro del círculo muestra la dirección en la que la fuerza electromotriz tiende a dirigir la corriente. La corriente fluye en la resistencia de *a* a *b* y en la fuente fluye de *b* a *a*. La fuerza electromotriz interna de *b* a *a* produce un voltaje externo de *a* a *b*.

Es conveniente para los propósitos del análisis de circuitos el considerar dos clases de fuentes ideales. Una es la *fuente de potencial constante*; esto es, una fuente que produce una diferencia de potencial

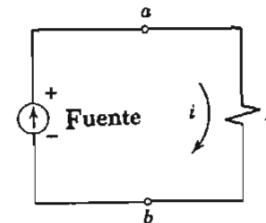


FIG. 1-13. Una fuente y una resistencia

constante entre sus terminales independientemente de la corriente. Una batería práctica o generador puede actuar como una fuente de potencial constante ideal con una resistencia en serie, como en la Fig. 1-14. Supongamos que una batería tiene un voltaje terminal de 6 volts cuando no hay corriente; si la corriente empieza a fluir, el voltaje terminal cae a un valor ligeramente menor. Es conveniente explicar esto, diciendo que la batería es equivalente a una fuente con una fuerza electromotriz constante de 6 volts y una resistencia interna (*R* en la Fig. 1-14) que es responsable de la reducción del voltaje terminal cuando existe una corriente.

El otro tipo de fuente teórica es la de *corriente constante*. Esta produce una corriente constante a través de ella misma, independientemente del voltaje terminal. Varios dispositivos prácticos se pueden considerar como aproximadamente fuentes de corriente constante; existen unos pocos de los llamados generadores de corriente constante y en gran parte de los circuitos electrónicos, puede asumirse que un tubo amplificador es equivalente a una fuente de corriente constante, con una resistencia en paralelo como en la Fig. 1-15.

Las resistencias *R* en la Fig. 1-14 y *r* en la Fig. 1-15, toman en cuenta el hecho de que los generadores y baterías prácticos y los tu-

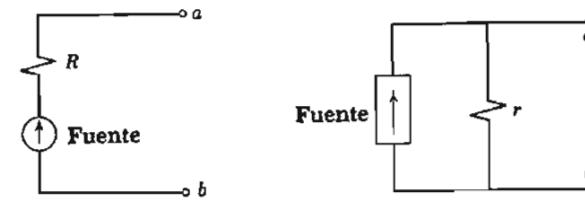


FIG. 1-14. Fuente de voltaje constante con una resistencia en serie

FIG. 1-15. Fuente de corriente constante con una resistencia en paralelo

bos electrónicos no son fuente de potencial constante o de corriente constante. Estos son más bien, aproximaciones mejores o peores de estos ideales.

13. Sumario

En este capítulo se discuten las leyes experimentales en las que se basan las teorías de los circuitos, y son:

1. Ley de Kirchhoff de corriente, Ec. 1-1.
2. Ley de Kirchhoff de voltaje, Ec. 1-2.
3. Ley de Ohm, que define la resistencia, Ec. 1-5.
4. Ley de Faraday del voltaje inducido, Ec. 1-14d.
5. Una ley concerniente a la capacitancia, Ec. 1-22.
6. Una ley concerniente a la potencia eléctrica, Ec. 1-30.

El resto del libro tratará las deducciones a partir de estas leyes que comprenden la teoría de los circuitos, estas deducciones hacen que las relaciones generales anteriores puedan ser aplicables a los circuitos y casos prácticos. Relacionaremos una con otra en las formas útiles y aprenderemos a hacer las cosas que los ingenieros electricistas necesitan hacer.

14. Símbolos

Una breve relación de símbolos gráficos para resistencias, inductancia y otros elementos de los circuitos nos será útil. Las referencias son con respecto a la Fig. 1-16.

FUENTES. Es conveniente seguir el sistema que algunos autores han adoptado de utilizar círculos para las fuentes de potencial constante y rectángulos delgados y largos para las fuentes de corriente constante. La polaridad se indica con una flecha que muestra la dirección de la fuerza electromotriz o por signos + y - que nos muestran el potencial relativo de las terminales. Es obvio que no es necesario utilizar ambos medios para indicar la polaridad, aunque la Fig. 1-16 incluye ambos sistemas para comparación.

RESISTENCIA. Se muestran tres símbolos, pudiendo aparecer todos ellos en la práctica común. Los dos primeros son representacio-

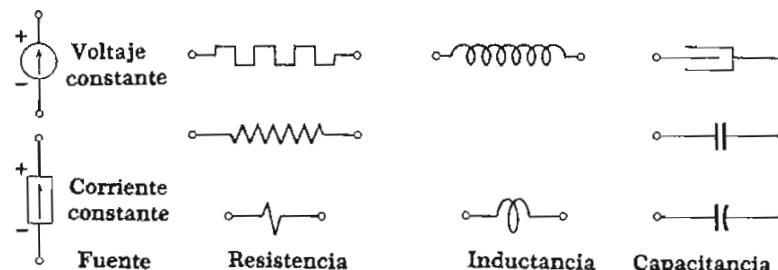


FIG. 1-16. Símbolos gráficos

nes convencionales de resistencias. El tercero es una forma simplificada del segundo.

INDUCTANCIA. El símbolo superior es una representación convencional de una bobina. El símbolo inferior es la misma forma simplificada.

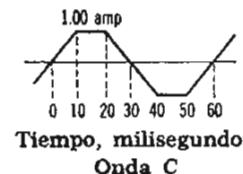
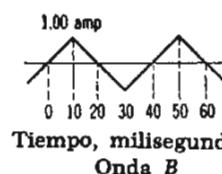
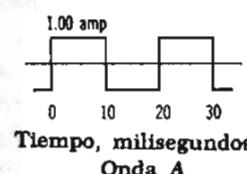
CAPACITANCIA. El símbolo superior es el más antiguo y es un diagrama convencional de una botella de Leyden y en la actualidad ya poco se ve. El símbolo intermedio proviene de un condensador de placas paralelas y es probablemente el símbolo más común para capacidores en la literatura eléctrica. El símbolo inferior ha sido adoptado por el Instituto Americano de Ingenieros Electricistas. No es muy usado por los físicos y no tiene popularidad fuera de Norteamérica, desafortunadamente este símbolo sugiere una naturaleza así-métrica o unilateral que el capacitor no tiene.

Otros símbolos para resistencia, inductancia y capacitancia se ven ocasionalmente, pero los mostrados son con los que se necesita estar más familiarizado.

PROBLEMAS

(Nota: Los números de sección que siguen a los problemas muestran hasta dónde deberá haberse estudiado antes de que se asigne el problema.)

1. En la unión de la Fig. 1-1, $i_1 = 5$ amperes, $i_3 = 7$ amperes e $i_5 = -4$ amperes. Se conoce que $i_2 = i_5$. Encontrar i_2 e i_6 . § 1
2. En el circuito de la Fig. 1-2, $v_{ab} = 5$, $v_{da} = 3$, $v_{bc} = 3$, $v_{fc} = 20$, y $v_{fe} = 5$, todas medidas en volts. Encontrar v_{de} y v_{dc} . § 2
3. Una barra de cobre es de 1 m de largo y un centímetro de diámetro (sección transversal circular). Si es de cobre standard recocido, ¿cuál es su resistencia, de extremo a extremo? Si su historia pasada no es conocida, pero la barra es de cobre, ¿qué resistencia puede esperarse razonablemente? La temperatura es de 0°C . § 3
4. Este problema es el mismo que el Prob. 3 excepto que la temperatura es de 50°C . § 3
5. Un circuito contiene un elemento con ductancia de 0.1 henry (y resistencia despreciable). La corriente que pasa por el elemento es la onda triangular, mostrada en la figura como la onda B. Encontrar el voltaje entre las terminales del elemento, trazando una curva del voltaje como una función del tiempo. § 4



PROBLEMA 5

Nota: En el trazado de los resultados para éste y los siguientes problemas de este capítulo, el dibujo puede ser a mano, pero el trabajo deberá ser nítido y a escala. Deberán indicarse las escalas y especificarse valores de interés. No es necesario tener una fórmula matemática para cada parte de una curva, pero cada una deberá marcarse "recta", "parabólica", etc.

6. Repítase el Prob. 5 para la onda C. Discútase la probabilidad de tener corriente de la forma de la onda A en este circuito, considerando a la onda A un caso límite de la onda C conforme se van haciendo los lados más inclinados. § 4

7. Un voltaje de forma de la onda A se aplica al elemento inductivo del Prob. 5. (El máximo es ± 1.00 volts). Represéntese la corriente. Repítase para un voltaje de forma de onda B. § 4

8. Repítase el Prob. 7 para voltaje de forma de onda C. El máximo es ± 1.00 volts.) Represéntese la corriente. § 4

9. Un circuito contiene un elemento con capacitancia de 20 microfarads (esto es $20 \cdot 10^{-6}$ farads). El voltaje entre las terminales de la capacitancia está dado por la onda B (ver figura con el Prob. 5), siendo el máximo ± 1.00 volts. Represéntese la corriente, § 8

10. Repítase el Prob. 9 para las ondas C (el máximo es ± 1.00 volts) y para la onda A considerando a la onda A como un caso límite de la onda C. (La última es interesante en conexión con un generador de onda cuadrada.) § 8

11. Trazar las ondas de voltaje que producirán las ondas de corriente A y B en la capacitancia del Prob. 9. § 8

12. Trazar la onda de voltaje que producirá una onda de corriente C en la capacitancia del Prob. 9. § 8

13. Un alambre de cobre de 100 pies de longitud (AWG No. 24) se va a devanar en una bobina de inductancia. El núcleo o forma no es magnético (permeabilidad igual a la del aire). Encontrar la

inductancia si el alambre se devana sobre un palo de escoba de 1 pulgada de diámetro, con diez vueltas por pulgada de longitud. § 7

14. 33 m (100 pies) de longitud de alambre de cobre fino se devana sobre una forma no magnética (una caja de cereal) de 10 cm (4 pulgadas) de diámetro. Encontrar la inductancia si la longitud axial de la bobina es de (a) 10 cm (4 pulgadas), (b) 20 cm (8 pulgadas). § 7

15. El alambre del Prob. 13 está devanado sobre una tabla de 2.5 por 7.5 cm (1 por 3 pulgadas) de sección transversal, 10 vueltas por cada 2.5 cm (10 vueltas por cada pulgada). Encontrar la inductancia. ¿Qué orden de exactitud debe esperarse en el resultado? § 7

16. El alambre del Problema 14 se devana sobre un núcleo toroidal de 15 cm (6 pulgadas) de diámetro exterior (extremo a extremo) con un agujero de 5 cm (10 pulgadas). El devanado está distribuido uniformemente alrededor del toroide. Encontrar la inductancia. § 7

17. El toroide del Prob. 16 se cambia para que tenga una sección transversal cuadrada, pero retiene las mismas dimensiones exteriores ($d_2 = 15$, $d_1 = 25$ cm en la Fig. 1-9). Si la longitud del alambre continúa siendo 33 m (100 pies) encontrar la inductancia. § 7

18. Las dos placas de un capacitor están separadas 1 ml en el aire. Encontrar la capacitancia si el área de la superficie de cada placa es de 1 cm². § 8

19. Una tira de hoja metálica de 10 cm de ancho y algunos metros de largo se cubre por una tira de papel encerado de 0.02 ml de espesor. Otra tira similar de hoja metálica se coloca encima y después una segunda tira de papel encerado. Las cuatro tiras se oprimen ahora juntas firmemente y se arrollan en un rollo como el papel de una máquina sumadora. Se ha hecho, por tanto, un "condensador de papel". ¿Qué tan largas deben ser las tiras para suministrar una capacitancia de 1 microfarad? (Nótese que a ambos lados de una tira de hoja metálica contribuyen a la capacitancia después de que el arreglo de metal y papel se ha enrollado.) § 9

20. En un tubo de rayos catódicos el chorro de electrones lleva una corriente de 5 microamperes ($5 \cdot 10^{-6}$). Los electrones están acelerados por un campo eléctrico con una diferencia de potencial de 1 500 volts. ¿En qué cantidad de tiempo se efectúa un trabajo de 1 watt-segundo por el chorro de electrones debido al campo eléctrico? § 11

✓ 21. Una corriente de 1 miliampere carga un capacitor de C farads. Cuando la corriente se inicia no hay carga en el capacitor; la corriente se interrumpe cuando el voltaje entre las terminales del capacitor es de 30 volts. Encontrar la energía recibida por el capacitor desde el circuito externo.

§ 11

22. Un voltaje de 1 volt es aplicado a las terminales de un inductor de L henrys. Encontrar la energía suministrada por el circuito externo cuando se incrementa la corriente del inductor de (a) 0 a 1 amperes; (b) 1 a 2 amperes (c) 2 a 3 amperes.

§ 11

23. Una bobina en un circuito se ha idealizado a una inductancia de 0.1 henrys y una resistencia de 10 ohms en serie. (a) Trazar el voltaje entre las terminales de la bobina cuando la corriente es la onda B del Prob. 5. (b) Repetir para la onda C .

§ 8

24. La capacitancia de un aislador de disco cerámico del tipo de titanato es de 40 000 micromicrofarads; el área es de 0.6 pulgadas cuadradas, el espesor es de 0.020 pulgadas. Encontrar la constante dieléctrica relativa K .

§ 9

25. Un circuito tiene capacitancia y resistencia en serie; los valores son 20 microfarads y 500 ohms respectivamente. (a) Trazar el voltaje entre las terminales del circuito cuando la corriente es la onda A del Prob. 5. (b) Repetir para la onda C .

§ 8

2

Circuitos

1. Idealización

Los circuitos prácticos están hechos de alambres, bobinas y accesorios eléctricos de diferentes grados de complejidad. Es difícil que siempre sea posible señalar una parte de un circuito práctico y decir: esta es una resistencia y nada más, o una inductancia, una capacitancia y nada más. En efecto, si se es cuidadoso es imposible expresar lo anterior, porque aun una pieza recta de alambre tiene inductancia y capacitancia distribuidas y aun un buen capacitor tiene una pequeña resistencia e inductancia.

Pero antes de que los métodos matemáticos puedan aplicarse, es necesario trasladar un circuito desde el mundo práctico de las cosas materiales a un mundo ideal más simple. Afortunadamente casi siempre es posible suponer que los circuitos están compuestos de resistencias puras, inductancias puras, capacitancias puras y fuentes ideales de energía. Esto se puede hacer cuando es posible despreciar las diferencias (ligejas, suponemos nosotros) entre los circuitos prácticos e ideales.

Para pasar del mundo real al mundo ideal tenemos que deshacernos de una nube de trivialidades. Los hechos esenciales eléctricos permanecen entonces en una forma clara y simple. Este proceso de *idealización* es necesario siempre para resolver cualquier problema de ingeniería o científico. La ciencia eléctrica es afortunada en requerir, relativamente poca idealización.

El proceso opuesto, o sea, la *realización*, nos regresa al mundo

de la realidad. Despues de que se ha resuelto un problema, despues de que se ha diseñado un circuito, debe ponerse en forma de partes materiales. Los símbolos matemáticos deben convertirse en hierro y cobre. Esto puede o no ser fácil y puede no ser siempre posible.

Idealicemos un timbre de puerta. Tiene una bobina de alambre, devanada en un núcleo de hierro. Otra pieza de hierro, la armadura, se mueve cuando este núcleo es magnetizado. Como un elemento del circuito, la bobina del timbre tiene resistencia.

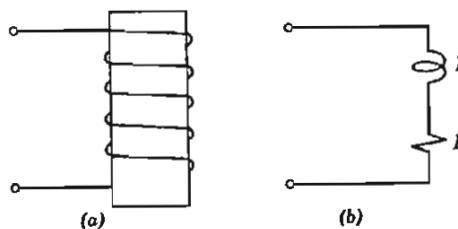


FIG. 2-1. Concentración de R y L . (a) Bobina real. (b) Equivalente agrupado

También tiene inductancia. ¿Es esencial la inductancia o puede eliminarse en el proceso de idealización? Es importante probablemente y la inductancia no puede eliminarse. También hay una capacitancia de espira a espira de la bobina que puede despreciarse, porque esta pequeña capacitancia no significa nada en un timbre. Todo el resto acerca de la forma física no es esencial para nosotros, exceptuando la forma de la bobina y la presencia del núcleo de hierro. Este núcleo, por su alta permeabilidad afecta la inductancia. ¿Podemos considerar a la inductancia constante, haciendo caso omiso de la posible saturación magnética del hierro? Probablemente lo podemos hacer porque una parte considerable del campo magnético está en el aire. ¿Debemos considerar el voltaje que se induce en la bobina cuando la armadura se mueve? Probablemente no lo necesitemos, porque el timbre es una clase ineficiente de motor y la "fuerza contraelectromotriz" o "impedancia de movimiento" será muy pequeña comparada con la caída de voltaje en la resistencia de la bobina.

Cuando este timbre de puerta se ha idealizado hasta este extremo ¿qué queda? Una bobina con resistencia e inductancia permanecen como los elementos esenciales a nuestro análisis del circuito eléctrico. Esta bobina se muestra esquemáticamente en la Fig. 2-1a. El paso siguiente es el de separar la resistencia de la inductancia.

2. Concentración

En realidad cada centímetro de alambre devanado en la bobina del imán del timbre contribuye a la inductancia y también a la resistencia. Sería menos confuso si la resistencia estuviera en una parte del circuito y la inductancia en otro. La inductancia y la resistencia están de hecho, *distribuidas* a lo largo del alambre y nosotros deseáramos que estuvieran *concentradas* o *agrupadas* en elementos separados del circuito.

Afortunadamente podemos considerarlas como agrupadas. Siendo posible porque y solamente porque, *la misma corriente debe fluir a través* de la inductancia y de la resistencia. Esto es cierto en el timbre verdadero y también es cierto en el circuito equivalente agrupado de la Fig. 2-1b.

Este paso de la concentración es tan obvio que generalmente se da por supuesto. Pero algunas veces debe hacerse con cuidado y no en todo el circuito. Supóngase que a la capacitancia entre las capas de alambre con el que el electroimán del timbre se ha devanado la tomáramos en cuenta. No sería cierto entonces que la misma corriente fluye de extremo a extremo de la bobina. Parte de la corriente sería derivada por la capacitancia. Cualquiera concentración de resistencia, inductancia y capacitancia en agrupamientos sería, en el mejor de los casos, una aproximación. Un efecto como este, de capacitancia distribuida es de importancia predominante en las bobinas de radiofrecuencia, pero realmente despreciable en timbres.

Como otro ejemplo, las líneas de transmisión tienen resistencia, inductancia y capacitancia distribuidas de extremo a extremo. Las líneas largas, sean para radiofrecuencia, teléfono o transmisión de potencia, es mejor considerarlas como circuitos con constantes distribuidas,* en vez de cualquier agrupamiento aproximado de los parámetros.

3. Ecuaciones del circuito

Después de idealizar un problema y concentrar los elementos del circuito, se deberá escribir una ecuación apropiada. Las leyes experimentales del Cap. 1 se aplicarán; resultando generalmente una ecuación diferencial. Si el circuito tiene solamente resistencia a la

* Como por ejemplo en el libro del mismo autor *Líneas Eléctricas de Transmisión* (Referencia 5).

que una fuente electromotriz de alguna clase se conectó, la ecuación del circuito es simplemente la ley de Ohm:

$$i = \frac{e}{R} \quad (2-1)$$

R , es la resistencia, e la fuerza electromotriz. La corriente es siempre, en cualquier instante proporcional a la fuerza electromotriz, que es también el voltaje aplicado a las terminales de la resistencia. Si el voltaje es constante, es decir, que no varía con el tiempo (como en la Fig. 2-2a) la corriente es también constante; si el voltaje es alterno (como en la Fig. 2-2b) la corriente alterará también con el voltaje. Si el voltaje es aplicado instantáneamente, siendo cero antes de que algún interruptor sea cerrado e igual a V inmediatamente después, la corriente también aparecerá bruscamente saltando de cero a $i = V/R$

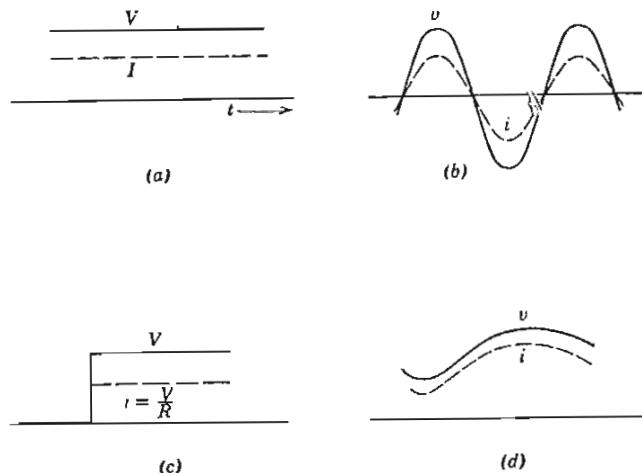


FIG. 2-2. Corriente en una resistencia

como en la Fig. 2-2c; si el voltaje varía de una manera arbitraria con el tiempo, la corriente variará de la misma manera (Fig. 2-2d).

4. Circuito inductivo

Sin embargo, si se encuentra una inductancia presente, así como la resistencia, el problema y su solución son más interesantes. La inductancia en la electricidad es análoga a la masa en mecánica, como

ya fue discutido en la sección 4 del Cap. 1; la resistencia es análoga (por lo menos de modo cualitativo) a la fricción. La corriente es análoga a la velocidad. Así como los carros, botes y otros cuerpos con masa arrancan despacio y se aproximan a su velocidad estable gradualmente, así la corriente se inicia gradualmente en un circuito inductivo. La corriente empieza e incrementarse tan pronto como el voltaje es aplicado, incrementándose rápidamente al principio y de ahí más y más despacio hasta que se approxima al valor estacionario. Esto se indica en la Fig. 2-3b.

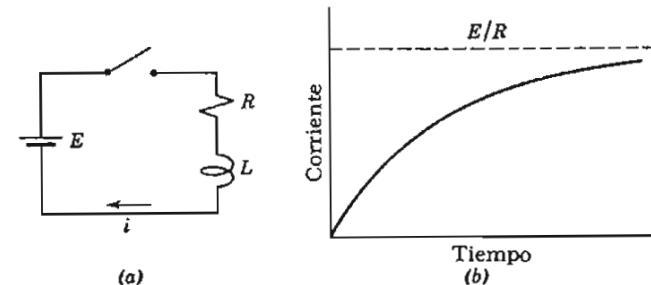


FIG. 2-3. Circuito con resistencia e inductancia

Por otro lado, un cuerpo pesado tiende a continuar moviéndose por inercia por algún tiempo después de que la fuerza impulsora ha sido eliminada. Así una corriente eléctrica continúa en un circuito inductivo después de que la fuente de energía se ha eliminado. Supongamos que la corriente en la inductancia de la Fig. 2-4a es i_0 , en un instante que podemos llamar $t = 0$. (No es necesario para nosotros saber qué causó esta corriente, pero será resultado de la operación de los interruptores mostrados en el diagrama.) Cualquiera

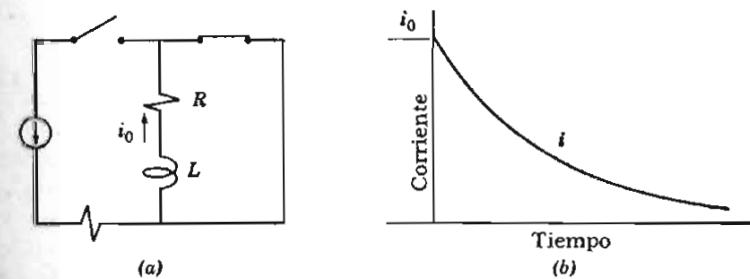


FIG. 2-4. Disminución de la corriente en un circuito inductivo

que sea la causa tendremos $i = i_0$ cuando $t = 0$. Después del tiempo $t = 0$ no existe fuente de energía en el circuito y la corriente tiende a desaparecer, así como un coche o bote tiende a pararse después de que la potencia fue cortada. La corriente decreciente se muestra en la Fig. 2-4b.

5. Corriente natural

Para estudiar esta corriente cuantitativamente, vamos a escribir la ecuación del circuito para el de la Fig. 2-4a.

Tenemos una red cerrada que consiste de una inductancia y reactividad. La ley de voltaje de Kirchhoff dice que la suma de los voltajes debe ser igual a cero. El voltaje entre las terminales de la resistencia es Ri (Ec. 1-5) y el voltaje entre las terminales de la inductancia es $L \frac{di}{dt}$ (Ec. 1-11). Por lo tanto (de la Ec. 1-2):

$$Ri + L \frac{di}{dt} = 0 \quad (2-2)$$

Físicamente la corriente es decreciente y tiene una derivada con respecto al tiempo, negativa, así que el voltaje terminal entre las terminales de la inductancia es negativo; el voltaje positivo entre terminales de la resistencia es balanceado por un voltaje igualmente negativo entre las terminales de la inductancia. En otras palabras, la inductancia está suministrando energía durante este tiempo en que la corriente decrece, exactamente igual como un cuerpo con masa libera su energía cinética cuando su velocidad decrece.

Para encontrar la forma de la curva de corriente en la Fig. 2-4b, se debe resolver para i la Ec. 2-2. Esta es una ecuación diferencial simple de la clase que puede resolverse por integración. Primero se separan las variables:

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt \quad (2-3)$$

después se integra cada miembro de la ecuación:

$$\int_{i_0}^i \frac{di}{i} = \int_0^t -\frac{R}{L} dt \quad (2-4)$$

Los límites inferiores de la integración son la corriente inicial y el tiempo inicial: $i = i_0$ cuando $t = 0$. Los límites superiores son la corriente y el tiempo en cualquier instante posterior, cuando el tiempo es t y la corriente es i . Integrando,

$$\ln i - \ln i_0 = -\frac{R}{L}(t - 0) \quad (2-5)$$

o también

$$\ln \frac{i}{i_0} = -\frac{R}{L} t \quad (2-6)$$

El símbolo \ln indica el logaritmo natural y recordando su relación con la función exponencial escribimos

$$\frac{i}{i_0} = e^{-(R/L)t} \quad \text{o} \quad i = i_0 e^{-(R/L)t} \quad (2-7)$$

De este modo se demuestra que la corriente en la Fig. 2-4 tiende a cero exponencialmente. La función exponencial se aproxima al eje horizontal pero no llega a alcanzarlo, así, la solución matemática nos dice que la corriente se aproxima a cero pero no llega a este valor. De hecho, sin embargo, la corriente llega a ser tan pequeña que no existe modo de detectarla.

Esta corriente exponencial de la Ec. 2-7, es típica de los circuitos inductivos; y es la corriente que fluye en un circuito de esta clase cuando no existe fuerza electromotriz. Es la corriente que puede existir, la única que puede existir, cuando no existe fuerza impulsora para mantenerla. Se le llama corriente *natural* y es la corriente para la que este circuito particular ofrece *impedancia a cero*.

6. Corriente forzada *RIS*

Consideremos a continuación la forma de la corriente creciente de la Fig. 2-3. La inductancia y resistencia en el circuito son las mismas de la Fig. 2-4, pero ahora hay una batería como fuente de fuerza electromotriz constante E . El voltaje terminal en los extremos de la resistencia y la inductancia juntas, debe ser siempre igual a E y la ecuación del circuito se escribe (utilizando la ley de voltaje de Kirchhoff).



$$Ri + L \frac{di}{dt} = E \quad (2-8)$$

El hecho de que el interruptor se abre en el tiempo de referencia $t = 0$, nos da la condición inicial: cuando $t = 0$, $i = 0$.

A fin de resolver para la corriente, el primer paso es el de separar las variables escribiendo:

$$dt = \frac{L di}{E - Ri} \quad (2-8a)$$

Integrando ambos miembros, con las condiciones iniciales como límites inferiores,

$$\int_0^t dt = \int_0^i \frac{L di}{E - Ri} \quad (2-8b)$$

Efectuando la integración y substituyendo los límites:

$$t = -\frac{L}{R} \left[\ln \left(i - \frac{E}{R} \right) \right]_0^i = -\frac{L}{R} \left[\ln \left(i - \frac{E}{R} \right) - \ln \left(-\frac{E}{R} \right) \right] \quad (2-8c)$$

$$-\frac{R}{L} t = \ln \left(1 - \frac{R}{E} i \right) \quad (2-8d)$$

Cambiando de la forma logarítmica a la exponencial:

$$1 - \frac{R}{E} i = e^{-(R/L)t}$$

(componente forzada)
(componente natural)

$$(2-9)$$

y finalmente:

$$i = \frac{E}{R} (1 - e^{-(R/L)t}) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-(R/L)t} \quad (2-10)$$

Se observará que la corriente en la Fig. 2-3 se aproxima exponencialmente a su valor estable de E/R .

Es particularmente interesante que la corriente pueda ser expresada en la Ec. 2-10 como la suma de 2 términos:

1. Un término es de la forma exponencial encontrada en la sección precedente como la corriente *natural* de este circuito, o sea, la corriente que no requiere fuerza electromotriz para circular.

2. El otro término es E/R , la corriente estable que continúa mientras se aplique la fuerza electromotriz y que tiene la misma

forma (constante, corriente directa) que la fuerza electromotriz. Recibe el nombre de componente *forzada*.

Nótese que la componente forzada satisfará por sí misma la ecuación diferencial. Si substituimos E/R por i en la Ec. 2-8, el primer miembro quedará idéntico a E (la derivada con respecto al tiempo es cero). Es cierto para cualquier circuito que la componente forzada sola satisface la ecuación diferencial. Cuando la componente natural se substituye en una ecuación como la 2-8 hace al primer miembro idéntico a cero. La ecuación diferencial se satisface por lo tanto, con la componente forzada sola o con una corriente resultado de la componente forzada más (o menos) *cualquier cantidad* de la componente natural.

Se puede preguntar ¿si la componente forzada sola, satisface la ecuación diferencial, por qué necesitamos la componente natural? La respuesta es que la componente natural debe añadirse para satisfacer las condiciones iniciales. La componente natural *dé* la conexión entre la corriente inicial y la corriente final *estable*. Únicamente la componente natural puede hacer esto de modo que es consistente con la ecuación del circuito. La componente natural sirve a este propósito y después desaparece. Debido a que la componente natural desaparece, después se ha nombrado también componente *transitoria* de la corriente.

7. Fuerza electromotriz alterna

Si la fuerza electromotriz aplicada a un circuito es alterna (Fig. 2-5), la ecuación diferencial del circuito permanece casi igual a la Ec. 2-8, pues el segundo miembro que era una constante E , será una función senoidal del tiempo. Si e es la fuerza electromotriz en cualquier instante, se puede escribir

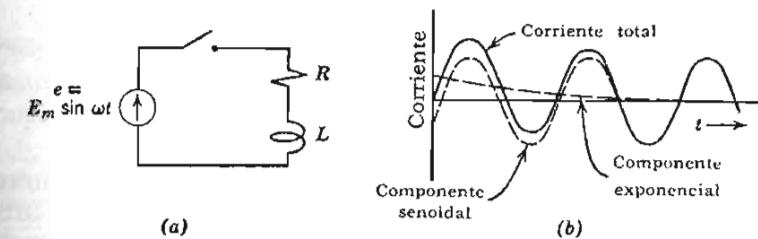


FIG. 2-5. Circuito inductivo con fuerza electromotriz alterna

$$e = E_m \operatorname{sen} \omega t \quad (2-11)$$

E_m es la fuerza electromotriz máxima y es una constante; ω es una constante relacionada con la frecuencia y t es el tiempo. Entonces la ecuación del circuito es

$$Ri + L \frac{di}{dt} = E_m \operatorname{sen} \omega t \quad (2-12)$$

La solución de esta ecuación diferencial es menos directa, pero puede probarse por sustitución en la Ec. 2-12 que una solución para la corriente es

$$i = \frac{E_m}{Z} [\operatorname{sen}(\omega t - \phi) + e^{-(R/L)t} \operatorname{sen} \phi] \quad (2-13)$$

Z y ϕ son parámetros que representan combinaciones de las constantes del circuito:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad \text{y} \quad \phi = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \quad (2-13a)$$

Z recibe el nombre de impedancia del circuito y ϕ el de ángulo de fase, pero para nuestro presente propósito es suficiente considerar que Z y ϕ se utilizan en la Ec. 2-13 únicamente para hacerla más simple.

La naturaleza física de la corriente representada por la Ec. 2-13 es de importancia en la presente ecuación. Hay dos partes en la ecuación: una es una función senoidal del tiempo y la otra es una función exponencial del tiempo, multiplicada por una constante. Estas componentes se han trazado separadamente con líneas discontinuas en la Fig. 2-5 y la suma, la corriente total se muestra como una línea sólida.

La componente senoidal de la corriente es la componente *forzada*. Tiene la misma forma (senoidal) que la fuerza electromotriz aplicada, la misma frecuencia y continúa mientras se aplique la fuerza electromotriz. Esta es la corriente estacionaria.

La componente exponencial de la corriente es la componente *natural*. Tiene la forma $e^{-(R/L)t}$ que es característica de este circuito inductivo, forma que ha aparecido también en las Ecs. 2-7 y 2-10. Su magnitud inicial es $(E_m/Z) \operatorname{sen} \phi$. Esto es únicamente para cubrir

la diferencia entre el valor inicial de la componentes forzada a $t = 0$ que es $-(E_m/Z) \operatorname{sen} \phi$ y el valor inicial de la corriente total que es cero. Despues de que la componente natural desaparece exponencialmente deja a la componente forzada como la corriente estacionaria.

8. Circuito capacitivo

Veamos ahora el circuito de la Fig. 2-6 que comprende resistencia y capacitancia. Suponiendo que el capacitor está cargado inicialmente y que entonces se cierra el interruptor, permitiendo al capacitor que descargue a través de la resistencia. Está claro que todas las veces que se cierra el interruptor el voltaje entre las terminales de la resistencia será igual al que existe entre las terminales del capacitor. Vamos a llamar a este voltaje terminal v . La corriente a través de la resistencia es, por la ley de Ohm (Ec. 1-5), $i = v/R$; la corriente del capacitor (Ec. 1-23) es $i = Cdv/dt$. Por la ley de corriente Kirchhoff (Ec. 1-1), estas dos corrientes suman cero:

$$i = -C \frac{dv}{dt} = \frac{v}{R} \quad (2-14)$$

En palabras, la Ec. 2-14 nos dice que la corriente del capacitor y la corriente de la resistencia son opuestas.

La solución de esta ecuación es exactamente como la de la ecuación 2-2. Se separan las variables y se integra la ecuación; los límites inferiores de integración son las condiciones iniciales. Si la carga inicial en el capacitor es tal que su voltaje terminal es igual a v_0 en el instante de cerrar el interruptor y si en este instante el tiempo es $t = 0$, entonces

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dt}{RC} \quad \text{y} \quad \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\int_0^t \frac{dt}{RC} \quad (2-15)$$

Integrando,

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\frac{t}{RC} \quad \text{or} \quad \frac{v}{v_0} = e^{-t/RC} \quad (2-16)$$

Como la corriente en la resistencia es v/R , la corriente es

$i = \frac{v_0}{R} e^{-t/RC}$

(2-17)

Vemos que tanto el voltaje terminal como la corriente decrecen exponencialmente con el tiempo.

Entonces, encontramos la corriente *natural* en un circuito capacitivo; tal como se encuentra en un circuito inductivo, su forma es exponencial. El exponente depende de la capacitancia y la resistencia del circuito y de nada más. No existe corriente forzada en este circuito simple, porque no hay fuerza electromotriz que la impulse y únicamente la componente natural puede existir.

La Fig. 2-6 muestra esta corriente natural de un circuito capacitivo. Hasta que se cierra el circuito en $t = 0$ la corriente es cero. Cuando el interruptor se cierra, el voltaje completo del capacitor v_0

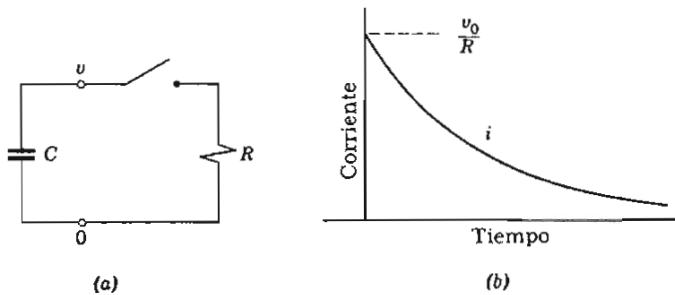


FIG. 2-6. Descarga de un condensador

se aplica instantáneamente a la resistencia y la corriente es v_0/R , pero como el capacitor se va descargando, su voltaje cae y la corriente va disminuyendo en proporción como se muestra.

Sigue en Cap 18. s. 2, 3, 4.

9. Analogía mecánica

La analogía mecánica del circuito RC es menos común que la de un circuito RL . En el sistema de analogías que compara la fuerza y el voltaje, la velocidad y la corriente, la masa y la inductancia, un resorte es análogo a un capacitor. Su desplazamiento (alargamiento o compresión) es análogo a la carga del capacitor y su fuerza al voltaje del capacitor.

La Fig. 2-6 muestra un capacitor cargado inicialmente, que descarga a través de una resistencia. La analogía mecánica es un resorte comprimido inicialmente, que regresa a su posición sin comprimir trabajando contra la fricción. Dispositivos familiares de esta clase

son el sistema de resortes y amortiguadores de un automóvil, o mejor, el mecanismo de resorte y amortiguador de una cámara automática. Posiblemente el ejemplo más familiar es el sistema automático para cerrar puertas, en el que un resorte cierra la puerta mientras un amortiguador previene el golpe.

En esta analogía del sistema para cerrar puertas, se desprecia la masa de la puerta. Sin embargo, por muy ligera que la puerta sea, es inevitable que tenga alguna masa. Esta masa es análoga a la inevitable inductancia de un circuito capacitivo. La inductancia, como la masa de la puerta, puede quizás no tomarse en cuenta como resultado de la idealización del sistema, pero de hecho no puede eliminarse completamente.

Sería razonable, por consiguiente, considerar a continuación la ecuación diferencial de un circuito que contenga las tres clases de elementos: resistencia, inductancia y capacitancia. Vamos, sin embargo, a posponer la consideración de la conducta natural o transitoria de tal circuito, a un capítulo posterior y regresemos ahora a un estudio sistemático y cuidadoso de la corriente de *estado estacionario*, no solamente en estos circuitos simples sino también en los de alguna complejidad. Estaremos entonces preparados para regresar en los Caps. 16 y 17 y completar las soluciones para la corriente, incluyendo tanto la componente transitoria como la del estado estacionario.

10. Corriente directa estacionaria

Nota: Cuando el voltaje aplicado a un circuito es alterno, la corriente del estado estacionario es también alterna. Cuando el voltaje es constante o directa la corriente del estado estacionario, es una corriente directa constante.

Los circuitos de corriente directa no necesitan estudiarse por separado de los circuitos de corriente alterna. Se aplican los mismos métodos, las mismas leyes y los mismos teoremas. Algunas veces se dice que la corriente directa puede tratarse como corriente alterna de frecuencia cero. Es más preciso decir, que la conducta de la corriente directa es el límite al que se aproxima la corriente alterna cuando la frecuencia tiende hacia cero.

Los cálculos de corriente directa incluyen únicamente la resistencia del circuito. La inductancia no es efectiva; una corriente no variable no produce voltaje entre las terminales de la inductancia. La

capacitancia es equivalente a un circuito abierto porque donde hay un capacitor no puede pasar una corriente estacionaria. Lo anterior hace el trabajo relativamente fácil.

Regresemos ahora a las consideraciones de corriente alterna y cuando surja un problema de corriente continua, podrá ser tratado como un caso simple especial de las relaciones más generales y comprensibles de la corriente alterna.

11. Corriente alterna estacionaria

La expresión matemática para una corriente alterna senoidal puede escribirse

$$i = I_m \cos \omega t \quad (2-18)$$

En cualquier tiempo t , la corriente es i . I_m es la corriente máxima, que es una constante; ω es una constante relacionada con la frecuencia.

La Fig. 2-7 nos muestra a i como una función de t . Un ciclo es el tiempo que hay de una cresta positiva a la siguiente cresta posi-

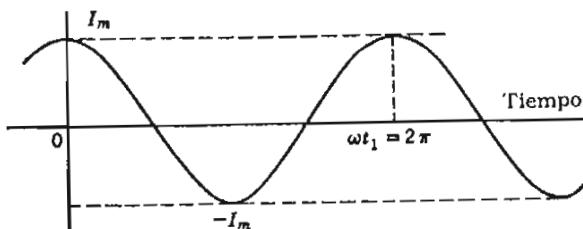


FIG. 2-7. Corriente alterna

tiva. El valor de ωt al final de un ciclo completo es 2π y en este punto, la función coseno empieza a repetirse. Por lo tanto, $\omega t_1 = 2\pi$ y t_1 , el tiempo de un ciclo, es $2\pi/\omega$. Partiendo de esto, el número de ciclos en un segundo es $\omega/2\pi$. Al número de ciclos por segundo lo llamamos la *frecuencia f* y

$$f = \omega/2\pi \text{ ciclos por segundo} \quad (2-19a)$$

A ω la llamamos la *frecuencia en radianes* y

$$\omega = 2\pi f \text{ radianes por segundo} \quad (2-19b)$$

En los Estados Unidos la frecuencia común para la energía eléctrica es de 60 ciclos por segundo; $\omega = 377$. La frecuencia empleada en las transmisiones de radio es de alrededor de 1 000 000 ciclos por segundo, para la cual $\omega = 6 280 000$, aproximadamente.

La Ec. 2-18 expresa la corriente como una función coseno. Es posible, igualmente, utilizar la función seno $i = I_m \sin \omega t$. Nosotros preferimos la forma coseno por conveniencia. Cuando es necesario utilizar ampliamente una forma general de la función senoidal escribiremos

$$i = I_m \cos (\omega t + \theta) \quad (2-20)$$

entonces ajustando θ la curva de la Fig. 2-7 puede deslizarse hacia los lados según se deseé, llamando a θ el *ángulo de fase*.

12. Corriente alterna a través de una resistencia

La Fig. 2-8a, nos muestra una resistencia. Nosotros hablamos de su *resistencia R* que es por definición (Ec. 1-5)

$$R = \frac{v}{i} \quad (2-21a)$$

También hablamos de su *conductancia G*. La conductancia de una resistencia es la recíproca de su resistencia, esto es

$$G = \frac{1}{R} = \frac{i}{v} \quad (2-21b)$$

Algunas veces es más conveniente utilizar R en vez de G en las ecuaciones del circuito y otras veces es más conveniente utilizar G que R . Debemos estar preparados para los dos casos.

Con una corriente alterna como la de la Ec. 2-18, el voltaje entre terminales de la resistencia es

$$v = Ri = R(I_m \cos \omega t) = V_m \cos \omega t \quad (2-22)$$

en la que

$$V_m = RI_m \quad (2-23)$$

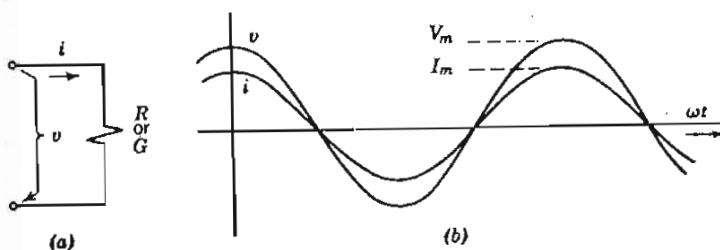


FIG. 2-8. Voltaje y corriente en una resistencia

V_m es el valor máximo de la onda de voltaje. La Fig. 2-8b nos muestra a i y v como funciones del tiempo;* ambas son ondas coseno y en cada instante v es proporcional a i . Los valores de las crestas, V_m e I_m , están indicados.

Se pueden escribir ecuaciones similares en función de la conductancia:

$$i = Gv = G(V_m \cos \omega t) = I_m \cos \omega t \quad (2-22a)$$

en la que

$$I_m = GV_m \quad (2-23a)$$

Estas ecuaciones se aplican, por supuesto, al mismo elemento, y las mismas curvas ilustran la relación.

13. Corriente alterna a través de una inductancia

Cuando la corriente fluye a través de un inductor (elemento hipotético que tiene inductancia L pero no resistencia) el voltaje terminal en este inductor está dado por

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (2-24)$$

* En la Fig. 2-8 y en las siguientes la variable independiente se indica como ωt en lugar de t . Esto no hace ninguna diferencia esencial puesto que ω es meramente una constante y se hace por conveniencia. Los valores de ωt son ángulos y es más conveniente y acostumbrado hablar de intervalos cortos a lo largo del eje horizontal, como intervalos de ángulo en vez de tiempo. Así, en la Fig. 2-9 el ángulo se marca $\pi/2$; si el eje estuviera graduado en t en vez de ωt , este intervalo tendría que ser $\pi/2\omega$.

que es la Ec. 1-11. Asumiendo que es corriente alterna senoidal como la de la Ec. 2-18,

$$v = L \frac{d}{dt} (I_m \cos \omega t) = LI_m \frac{d}{dt} \cos \omega t = -\omega LI_m \sin \omega t \quad (2-25)$$

Siendo la corriente una función coseno del tiempo, el voltaje será, siguiendo la diferenciación en la Ec. 2-25, una función seno negativa. La corriente y el voltaje están trazados en la Fig. 2-9. Como se

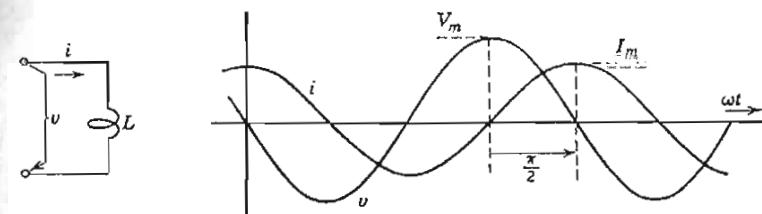


FIG. 2-9. Voltaje y corriente en un inductor

ve, ambas son ondas senoidales, pero una está desplazada hacia un lado con respecto a la otra. Con una conversión trigonométrica en la Ec. 2-25 el voltaje se puede escribir

$$v = -\omega LI_m \sin \omega t = \omega LI_m \cos (\omega t + \pi/2) \quad (2-26)$$

Esto nos pone la expresión para el voltaje, en forma de una función coseno, comparable a la Ec. 2-18 para la corriente y dándonos una comparación fácil de amplitud y fase.

El valor máximo de la onda de voltaje V_m , como se ve en la Ec. 2-26, será

$$V_m = \omega LI_m \quad (2-27)$$

Esto es, V_m está relacionada con I_m por el factor ωL . Expresiones similares que incluyen a ωL aparecen tan seguido que se le dio un nombre especial y un símbolo, a esta cantidad. Se le llama *reactancia inductiva* y está marcada por X . Entonces

$$X = \omega L = 2\pi fL \quad (2-28)$$

La Ec. 2-27 puede escribirse en función de X :

$$V_m = XI_m \quad (2-29)$$

El valor máximo de la onda de corriente en la Fig. 2-9 es alcanzado un tiempo después que el valor máximo de la onda de voltaje. Se dice que la onda de corriente está *atrasada* con respecto a la onda de voltaje y este atraso es de $\frac{1}{4}$ de ciclo. Desde un punto de vista diferente, se puede decir que el voltaje *adelanta* a la onda de corriente por $\frac{1}{4}$ de ciclo.

Este adelanto de $\frac{1}{4}$ de ciclo del voltaje se indica con el ángulo de fase de $\pi/2$ en la Ec. 2-26; la ecuación nos dice esencialmente que el voltaje tiene la misma variación senoidal que la corriente pero (debido a $\pi/2$) cada punto de la onda de voltaje aparece $\frac{1}{4}$ de ciclo antes que el correspondiente punto de la onda de corriente. Se verá que añadiendo cualquier cantidad (tal como $\pi/2$) al argumento de la función coseno, se hace que la onda de seno aparezca antes, deslizándola hacia la izquierda un ángulo igual a la cantidad en cuestión ($\pi/2$ en nuestro ejemplo). El ángulo se mide en radianes.

Resumiendo, la corriente a través de un inductor está atrasada $\frac{1}{4}$ de ciclo (también llamado 90 grados) con respecto al voltaje terminal y las amplitudes de la corriente y el voltaje están relacionadas por la reactancia inductiva X .

14. Corriente alterna a través de una capacitancia

Cuando se aplica voltaje a las terminales de un capacitor (suponiendo susceptancia pura) la corriente está dada por la Ec. 1-23:

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (2-30)$$

Si el voltaje es alterno senoidal de modo que $v = V_m \cos \omega t$, la corriente es

$$i = C \frac{d}{dt} (V_m \cos \omega t) = -\omega CV_m \sin \omega t = \omega CV_m \cos (\omega t + \pi/2) \quad (2-31)$$

las ondas de corriente y voltaje se muestran en la Fig. 2-10, siendo ambas ondas senoidales. La onda corriente a través de una capaci-

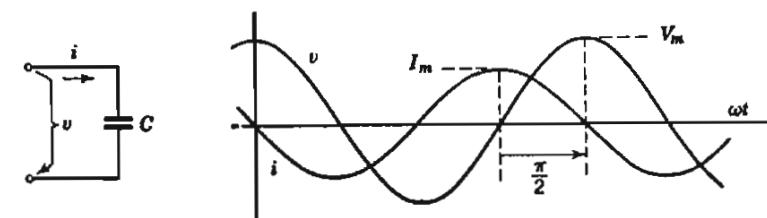


FIG. 2-10. Corriente y voltaje en un capacitor

tancia pura *adelanta* a la onda de voltaje $\frac{1}{4}$ de ciclo ($\pi/2$ radianes o 90 grados). El valor máximo de la onda de corriente es, de la Ec. 2-31

$$I_m = \omega CV_m \quad (2-32)$$

La corriente y el voltaje máximos de un capacitor están relacionados por la cantidad ωC . Encontramos conveniente también, darle un nombre a esta cantidad y la llamamos *susceptancia capacitiva*. El símbolo para la susceptancia es B . En función de la susceptancia la Ec. 2-32 se escribe

$$I_m = BV_m \quad (2-33)$$

donde

$$B = \omega C \quad (2-34)$$

15. Teorema para circuitos lineales

Es de gran importancia que cualquier resistencia, inductor o capacitor por el que circule corriente senoidal, tiene entre sus terminales un voltaje senoidal. Esto se ha demostrado en las tres secciones precedentes. La suma o diferencia de dos ondas senoidales cualesquiera de la misma frecuencia, es otra onda senoidal y debido a esto se sobreentiende que *si la corriente o voltaje de cualquier parte, de alguna red (lineal), es senoidal, la corriente y voltaje en todas sus partes será senoidal*.

Este enunciado asume que (1) la red está compuesta por elementos lineales que tienen resistencia, inductancia y capacitancia constantes y (2) que los voltajes se están aplicando y las corrientes están circulando por un tiempo tal, que los disturbios transitorios hayan desaparecido.

16. R y L en serie

Consideremos a continuación un circuito con dos elementos en serie como en la Fig. 2-11. Esto puede representar la inductancia y resistencia de una bobina inductiva después de la concentración de

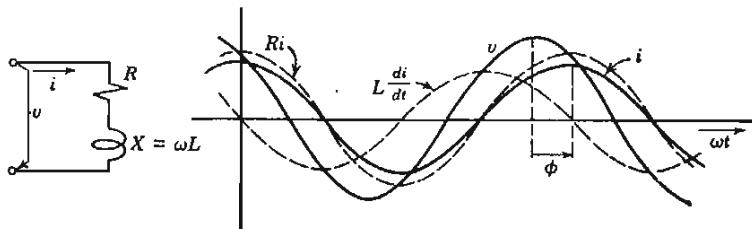


FIG. 2-11. R y L en serie

L y R en agrupamientos hipotéticos, pero nos referiremos a ellos como si fueran elementos puros separados, en serie.

La corriente se tomará otra vez como $i = I_m \cos \omega t$. Como el voltaje entre las terminales de la resistencia es Ri y el voltaje entre las terminales de la inductancia es $L \frac{di}{dt}$, el voltaje terminal total es

$$\begin{aligned} v &= Ri + L \frac{di}{dt} = RI_m \cos \omega t + L \frac{d}{dt}(I_m \cos \omega t) \\ &= RI_m \cos \omega t - \omega LI_m \operatorname{sen} \omega t \\ &= I_m (R \cos \omega t - X \operatorname{sen} \omega t) \end{aligned} \quad (2-35)$$

La Fig. 2-11 nos muestra la onda de corriente como una línea llena marcada i . Una de las componentes del voltaje, la caída por resistencia, es una línea no continua, en fase con la corriente; la otra componente del voltaje, la componente de inductancia (el segundo término de la Ec. 2-35), es una onda que adelanta a la onda de corriente $\frac{1}{4}$ de ciclo. (Se recordará que la corriente a través de una inductancia pura, siempre está atrasada con respecto al voltaje 90 grados). Estas dos curvas no continuas se suman para encontrar la onda de voltaje total, que se muestra como la línea sólida v ,

17. Ángulo de fase

El ángulo de fase entre el voltaje total y la corriente es ϕ . En este circuito, como en todos los circuitos inductivos, la corriente está atrasada con respecto al voltaje. Sin embargo, debido a que existe una resistencia así como una reactancia inductiva en el circuito, el ángulo de atraso es un poco menor de 90 grados. Claramente, el ángulo de atraso estará cercano a los 90 grados, si X es mucho mayor que R , y cercano a cero, si R es mucho mayor que X . Deberíamos ser capaces de encontrar, partiendo de la Ec. 2-35, por medio de la trigonometría, el valor de ϕ .

Utilicemos la fórmula trigonométrica standard:

$$a \cos z - b \operatorname{sen} z = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(z + \phi) \quad \text{donde } \phi = \tan^{-1} \frac{b}{a} \quad (2-36)$$

Aplicándola a la Ec. 2-35 obtendremos para el voltaje

$$v = I_m \sqrt{R^2 + X^2} \cos(\omega t + \phi) = V_m \cos(\omega t + \phi) \quad \text{donde } \phi = \tan^{-1} \frac{X}{R} \quad (2-37)$$

Esta expresión nos muestra que la onda de voltaje precede a la onda de corriente por el ángulo ϕ ; en otras palabras, el ángulo de atraso de la corriente con respecto al voltaje es ϕ , que es el ángulo cuya tangente es X/R .

18. Impedancia

La Ec. 2-37, también nos muestra que el máximo de la onda de voltaje es $I_m \sqrt{R^2 + X^2}$. Esto es, que la relación entre el voltaje máximo y la corriente máxima es

$$\frac{V_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + X^2} = |Z| \quad (2-38)$$

Esta relación es una cantidad de importancia en el trabajo en los circuitos y la representaremos, como en la Ec. 2-38, por el símbolo $|Z|$. Es la relación de la amplitud del voltaje a la amplitud de la corriente, y se le llama la *magnitud de la impedancia* del circuito. El ángulo ϕ de la Ec. 2-37 se le llama *ángulo de la impedancia*.

La Ec. 2-38 nos da la magnitud de la impedancia de un circuito con resistencia y reactancia inductiva en serie, como en la Fig. 2-11. Nótese que si la reactancia inductiva fuera infinitamente pequeña, de modo que sólo la resistencia quedara, la impedancia sería igual a la resistencia. O de otro modo, si la resistencia fuera muy poca, de modo que sólo la reactancia fuera considerada, la magnitud de la impedancia sería igual a la reactancia.

EJEMPLO. La resistencia de una bobina de alambre es de 1.50 ohms; su inductancia es de 5.30 milihenrios. Encontrar su impedancia para una corriente de 60 ciclos; encontrar la magnitud de la impedancia y el ángulo de fase.

Primero se encuentra la reactancia:

$$X = \omega L = 2\pi(60)(5.30)10^{-3} = 2.00 \text{ ohms}$$

Entonces, la magnitud de la impedancia es

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{(1.50)^2 + (2.00)^2} = 2.50 \text{ ohms}$$

y después

$$\tan \phi = \frac{X}{R} = \frac{2.00}{1.50} = 1.33$$

de donde se obtiene que el ángulo de impedancia es

$$\tan^{-1} 1.33 = 53.1^\circ$$

Esto indica que el voltaje entre terminales de la bobina será 2.50 veces la corriente en amperes y la onda de corriente estará atrasada con respecto a la onda de voltaje 53.1 grados.

19. G y C en paralelo

Otro arreglo interesante de dos elementos es la conexión en paralelo de una resistencia y un capacitor, como en la Fig. 2-12. La conductancia de la resistencia es G y la capacitancia del capacitor es C . (Este es uno de los muchos casos en los que es más fácil hablar de la conductancia de una resistencia, que dé su resistencia).

Suponemos que el voltaje aplicado a las terminales de la combinación en paralelo de G y C es $v = V_m \cos \omega t$. Puesto que la corriente de

la resistencia es Gu y la corriente del capacitor es $C \frac{dv}{dt}$, la corriente total a través de ambas es

$$\begin{aligned} i &= Gu + C \frac{dv}{dt} = GV_m \cos \omega t + C \frac{d}{dt}(V_m \cos \omega t) \\ &= GV_m \cos \omega t - \omega CV_m \sin \omega t \\ &= V_m (G \cos \omega t - B \sin \omega t) \end{aligned} \quad (2-39)$$

Aquí tenemos una combinación de G , conductancia y B , susceptancia, que tiene la misma forma matemática de la combinación de R y X , resistencia y reactancia en la Ec. 2-35. Igual que R y X fueron

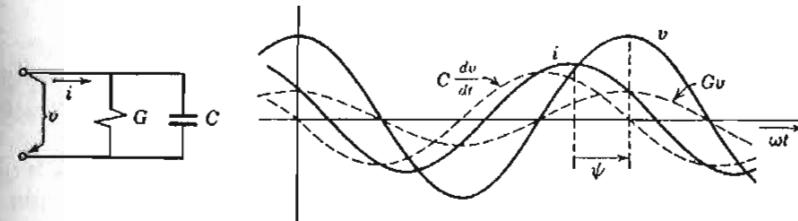


FIG. 2-12. G y C en paralelo

combinadas en una sola cantidad llamada impedancia, así G y B se han combinado convenientemente en una cantidad llamada admittance. La Ec. 2-36 se utiliza otra vez, permitiéndonos escribir la Ec. 2-39 para la corriente como

$$i = V_m \sqrt{G^2 + B^2} \cos(\omega t + \psi) \quad \text{donde } \psi = \tan^{-1} \frac{B}{G} \quad (2-40)$$

Las curvas de la Fig. 2-12 requieren poca explicación. El voltaje v produce corriente, a través de la resistencia, en fase consigo mismo y la corriente a través del capacitor, que adelanta al voltaje $\frac{1}{4}$ de ciclo. La corriente total es la suma de estas dos y como en la Ec. 2-40, es una onda que adelanta al voltaje un ángulo de fase que llamamos ψ .

Si la conductancia de la resistencia es grande (esto indica que tiene una resistencia baja) la corriente a través de ella será grande y si el capacitor es pequeño, la corriente adelantará al voltaje un ángulo pequeño. Si el capacitor es grande y por tanto, tiene una capacitancia grande y una susceptancia grande, de modo que B es mucho más

grande que G , la corriente estará adelantada muy cerca de 90 grados con respecto al voltaje.*

20. Admitancia

En la Fig. 2-12 la onda de corriente y la de voltaje pueden relacionarse por una cantidad conocida como admitancia. La *magnitud de la admitancia* se indica por $|Y|$ y es igual a la razón de la amplitud de corriente a la amplitud del voltaje. Esto es:

$$|Y| = \frac{I_m}{V_m} = \sqrt{G^2 + B^2} \quad (2-41)$$

El *ángulo de la admitancia* es el ángulo de fase por el cual el voltaje está atrasado con respecto a la corriente; usaremos el símbolo ψ como en la Ec. 2-40.

Se recordará, que hemos discutido en un párrafo anterior, la *impedancia* de un circuito con dos elementos en serie y en esta sección la *admitancia* de un circuito con dos elementos en paralelo. Conservaremos por un tiempo la idea de que la impedancia es aplicable a elementos en serie, mientras que la admitancia es aplicable a elementos en paralelo. Nos saldremos un poco de nuestro camino manteniendo este concepto, pero éste nos ayudará a evitar confusiones.

EJEMPLO. Un capacitor tiene una capacitancia de 0.191 microfarads; está conectado en paralelo, como en la Fig. 2-12, con una resistencia de conductancia de 0.50 mhos (2.0 ohms de resistencia). Encontrar la admitancia de los dos en paralelo, a una frecuencia de 1 megaciclo por segundo.

Susceptancia del capacitor:

$$B = \omega C = 2\pi(10^6)0.191(10^{-6}) = 1.20 \text{ mhos} \quad (2-42)$$

* A primera vista parece paradójico que la corriente (que se piensa que es un efecto) pueda preceder al voltaje que la causa. Una pequeña consideración nos muestra que realmente no tenemos un efecto antes que su causa. La causa que nos da medio ciclo de la corriente, no es el medio ciclo de voltaje que va a continuación de ella; la causa de la corriente en cualquier instante es la onda de voltaje —la onda de voltaje entera— que en todo tiempo precede a este instante. Si el voltaje fuera desconectado abruptamente esta desconexión no afectaría de ningún modo la corriente de cualquier instante previo; pero cualquier cambio en el voltaje, en un tiempo anterior que el instante en cuestión (si el lapso de tiempo no fuera muy grande), afectaría a la corriente en dicho instante. Repetimos que estamos discutiendo la corriente en el *estado estacionario*.

Entonces la magnitud de la admitancia es:

$$|Y| = \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{(0.50)^2 + (1.20)^2} = 1.30 \text{ mhos} \quad (2-43)$$

El ángulo se encuentra:

$$\tan \psi = \frac{B}{G} = \frac{1.20}{0.50} = 2.40$$

$$\psi = 67.4^\circ$$

21. R y C en serie

En la Sección 17 consideramos un circuito con resistencia e inductancia en serie; vamos ahora a considerar un circuito con resistencia y capacitancia en serie como en la Fig. 2-13.

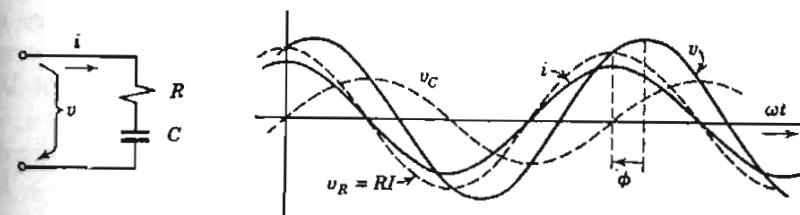


FIG. 2-13. R y C en serie

Asúmase que la corriente es $i = I_m \cos \omega t$. El voltaje entre las terminales de las resistencias es $v_R = Ri = RI_m \cos \omega t$; esta es una onda en fase con la corriente. El voltaje a través de las terminales del capacitor debe ser, de acuerdo con la Ec. 2-30, una onda en la que $i = C dv/dt$. Puesto que $i = I_m \cos \omega t$, el voltaje del capacitor v_C debe ser:

$$v_C = \frac{I_m}{\omega C} \sin \omega t \quad (2-44)$$

El voltaje terminal total es por tanto

$$v = RI_m \cos \omega t + \frac{I_m}{\omega C} \sin \omega t = I_m \left(R \cos \omega t + \frac{1}{\omega C} \sin \omega t \right) \quad (2-45)$$

Esta Ec. 2-45 es idéntica a la Ec. 2-35 (que tiene que ver con la impedancia de R y L en serie) si nosotros escribimos $1/\omega C = -X$. X es la reactancia. Podemos, por tanto, definir la *reactancia de un capacitor* como

$$X = -\frac{1}{\omega C} \quad (2-46)$$

sustituyendo en la Ec. 2-45 tenemos

$$\begin{aligned} v &= I_m (R \cos \omega t - X \sin \omega t) \\ &= I_m \sqrt{R^2 + X^2} \cos (\omega t + \phi) \quad \text{donde } \phi = \tan^{-1} \frac{X}{R} \end{aligned} \quad (2-47)$$

Esta es idéntica en su forma a la Ec. 2-37. Nótese, sin embargo, que la reactancia de un capacitor es una cantidad negativa, mientras que la reactancia de una bobina es una cantidad positiva. Por la Ec. 2-46, la capacitiva X es negativa necesariamente haciendo a ϕ en la Ec. 2-47 un ángulo negativo y esto nos dice, que la corriente en la Fig. 2-13 está atrasada con respecto al voltaje por un ángulo negativo, o en otras palabras, adelantada con respecto al voltaje por un ángulo positivo, como muestra la figura.

La magnitud de la impedancia de una resistencia y un capacitor en serie es V_m/I_m y puesto que la Ec. 2-47 nos da V_m como $I_m \sqrt{R^2 + X^2}$, tenemos que

$$|Z| = \frac{V_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (2-48)$$

que es la misma que la Ec. 2-38.

22. G y L en paralelo

El circuito de la Fig. 2-14 luce como imposible, porque tiene una rama que contiene inductancia sin resistencia en ella y nosotros sabemos que no es posible físicamente. Sin embargo, si la reactancia inductiva es grande y la resistencia es pequeña —como en un transformador de potencia o en un reactor de alta frecuencia— la resistencia de la bobina puede omitirse en el proceso de idealización. La rama

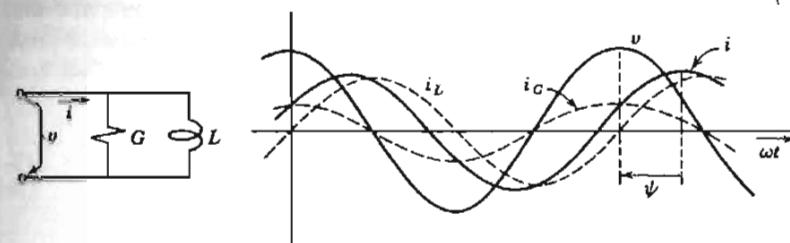


FIG. 2-14. G y L en paralelo

inductiva de la Fig. 2-14 puede, por tanto, representarnos un artefacto en el que la resistencia, aunque no es verdaderamente cero, es infinitamente pequeña.

Asumamos, como lo hemos hecho en otros ejemplos, que el voltaje aplicado a las terminales de la combinación en paralelo de G y L es $v = V_m \cos \omega t$. La corriente en la resistencia es $i_G = Gv = GV_m \cos \omega t$. La corriente en el inductor (para satisfacer la Ec. 2-24) debe ser $i_L = (V_m/\omega L) \sin \omega t$, para

$$L \frac{di_L}{dt} = L \frac{V_m}{\omega L} \omega \cos \omega t = V_m \cos \omega t = v$$

La corriente total, es la suma de la corriente en la resistencia y la corriente en el inductor

$$i = GV_m \cos \omega t + \frac{V_m}{\omega L} \sin \omega t = V_m \left(G \cos \omega t + \frac{1}{\omega L} \sin \omega t \right) \quad (2-49)$$

La corriente a través de una resistencia y un capacitor en paralelo viene dada por la Ec. 2-39; esta Ec. 2-49, para la corriente a través de una resistencia y un inductor en paralelo puede hacerse idéntica a la Ec. 2-39 escribiendo $1/\omega L = -B$. Vamos a definir, por tanto, la *susceptancia inductiva* como

$$B = -\frac{1}{\omega L} \quad (2-50)$$

Usando este símbolo en la Ec. 2-49 da

$$i = V_m(G \cos \omega t - B \sin \omega t) \quad (2-51)$$

La admitancia de la conexión en paralelo de G y B se encuentran fácilmente por la Ec. 2-51, que puede cambiarse y tener la misma forma de la Ec. 2-40.

$$|Y| = \frac{I_m}{V_m} = \sqrt{G^2 + B^2} \quad \text{donde } \psi = \tan^{-1} \frac{B}{G} \quad (2-52)$$

Esta ecuación se aplica al circuito de la Fig. 2-14 y al circuito de la Fig. 2-12 con G y C en paralelo, pero con esta diferencia: cuando B es una susceptancia *inductiva* es una cantidad negativa. El ángulo ψ , ángulo con que el voltaje está atrasado con respecto a la corriente, es por tanto un ángulo negativo en un circuito inductivo, como en la Fig. 2-14 y la corriente está atrasada con respecto al voltaje como siempre debe ser en un circuito inductivo.

23. R, L y C en serie

Un circuito que contiene los tres elementos en serie se muestra en la Fig. 2-15. En las secciones precedentes, hemos considerado circuitos con R y L en serie y con R y C en serie. La presente discusión

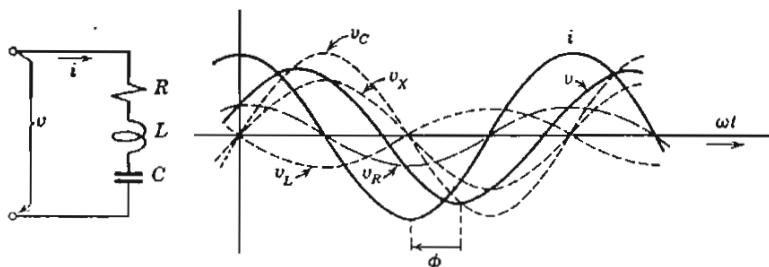


FIG. 2-15. R, L y C en serie

seguirá la misma línea de razonamiento y de hecho, introduce algunas nuevas ideas.

Asumimos que la corriente es $i = I_m \cos \omega t$. El voltaje entre las terminales de la resistencia será entonces $v_R = Ri = RI_m \cos \omega t$. El

voltaje entre las terminales del inductor es $L di/dt$ (Ec. 2-24) y es por tanto $v_L = -\omega LI_m \sin \omega t$. El voltaje entre las terminales del capacitor, según la Ec. 2-45 es $v_C = (I_m/\omega C) \sin \omega t$. El voltaje total entre terminales de los tres elementos en serie es la suma de éstos:

$$\begin{aligned} v &= v_R + v_L + v_C = RI_m \cos \omega t - \omega LI_m \sin \omega t + \frac{I_m}{\omega C} \sin \omega t \\ &= I_m \left[R \cos \omega t - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \sin \omega t \right] \end{aligned} \quad (2-53)$$

Esta ecuación puede ponerse en la misma forma que las Ecs. 2-35 y 2-47, definiendo la reactancia del circuito formado por R , L y C como

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad (2-54)$$

Este valor de X , no solamente es adecuado matemáticamente sino que también es la definición razonable, porque dice que la reactancia de un inductor y un capacitor en serie, es la suma de la reactancia del inductor y el capacitor separadamente. Esto es, la Ec. 2-54 se obtiene sumando las Ecs. 2-28 y 2-46.

La reactancia de este circuito serie, puede ser positiva o negativa. Es positiva si ωL es mayor que $1/\omega C$, esto es, si la caída de voltaje en el inductor es mayor que la caída del voltaje en el capacitor y el circuito es predominantemente inductivo. Si, de otro modo, la caída de voltaje en el capacitor es mayor, el circuito es predominantemente capacitivo y X es negativo.

Existe la posibilidad de que ωL pueda ser igual a $1/\omega C$. Si esto sucede, la reactancia total del circuito es cero. La corriente queda solamente limitada por la resistencia. Esta condición llamada resonancia, es muy importante en el trabajo de comunicaciones y se discutirá en detalle en el Cap. 7.

La Fig. 2-15, muestra las ondas de voltaje entre terminales de cada elemento del circuito serie, así como en la corriente y el voltaje total. También una onda llamada v_x muestra la suma de v_L y v_C ; entonces v_x es el voltaje entre las terminales de los dos elementos reactivos juntos, que se suma a v_R para dar el voltaje total v .

La figura se trazó para un circuito en el que la reactancia capacitiva, es un poco mayor que la reactancia inductiva (a la frecuencia

dada). Esto hace capacitivo al circuito completo y la onda de i adelanta a v por un poco menos de 90 grados.

Nótese que para una frecuencia mayor, con ω mayor, la reactancia inductiva sería mayor y la reactancia capacitiva menor. La condición de resonancia se encontraría para una frecuencia mayor de la mostrada en la figura y para frecuencia arriba de la frecuencia de resonancia, el circuito sería predominantemente inductivo.

24. Ejemplo

En el circuito de la Fig. 2-15 $R = 8.00$ ohms, $L = 2.38$ milihenrys y $C = 14.14$ microfarads. Encontrar la impedancia (magnitud y ángulo) para una frecuencia de 500 ciclos por segundo.

$$\omega = 2\pi f = 3142$$

$$X_L = \omega L = (3.142 \cdot 10^3)(2.38 \cdot 10^{-3}) = 7.50$$

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{(3.142 \cdot 10^3)(14.14 \cdot 10^{-6})} = -22.5$$

$$X = X_L + X_C = 7.50 - 22.5 = -15.0$$

La impedancia se encuentra:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{(8.00)^2 + (15.0)^2} = 17.0 \text{ ohms}$$

El ángulo de la impedancia es:

$$\phi = \tan^{-1} \frac{X}{R} = \tan^{-1} \frac{(-15.0)}{(8.00)} = -61.9^\circ$$

Como otra parte de este problema, encontrar la frecuencia de resonancia para este circuito. Por definición, la resonancia ocurre a la frecuencia en que $X = 0$. Esto es, hay resonancia cuando

$$X_L + X_C = 0 \quad \text{o} \quad \omega L = \frac{1}{\omega C} \quad \text{or} \quad \omega^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\omega^2 = \frac{10^9}{(2.38)(14.14)} = 29.7 \cdot 10^6 \quad \omega = 2\pi f = 5.45 \cdot 10^3$$

La frecuencia de resonancia será por tanto

$$f = 868 \text{ ciclos por segundo}$$

Se notará que es una frecuencia más alta que la utilizada en el cálculo precedente y así en resonancia, X_L es mayor, X_C es (numéricamente) menor y la reactancia total, a la frecuencia de resonancia, es cero. A la frecuencia de resonancia, 868 ciclos por segundo, $|Z| = R = 8.00$ ohms y $\phi = 0$.

25. Sumario

El capítulo se inicia con conceptos esenciales para la teoría del circuito, *idealización* de un circuito práctico y *realización* de un resultado teórico.

Se discuten ecuaciones diferenciales de circuitos simples. Se muestra que la corriente tiene dos componentes: la corriente *forzada* o de estado estable y la corriente *natural* o transitoria.

En el resto del capítulo se le da atención especial a las corrientes de estado estacionario. Los elementos del circuito R , L y C se discuten de uno en uno, después de dos en dos y luego tres en serie. Se presentan las ideas de *reactancia* y *susceptancia*. Se utiliza la *impedancia* para combinar resistencia y reactancia en *serie* y la *admitancia* para combinar conductancia y susceptancia en *paralelo*.

26. Una nueva ayuda matemática

El siguiente paso lógico sería discutir otras combinaciones de resistencia, inductancia y capacitancia en conexiones de serie y paralelo más elaboradas. Esto vamos a hacerlo en los siguientes capítulos. Pero para hacer más fácil el trabajo, presentaremos primero un método matemático más simple. Si las manipulaciones trigonométricas de este capítulo se extendieran a problemas más complicados, el trabajo matemático se volvería cansado y complicado. Afortunadamente todo el trabajo de rutina puede acortarse y muchas de las ideas de los circuitos pueden presentarse más claras y simples, utilizando una notación matemática, que se da bajo el inapropiado y lamentable nombre de álgebra compleja.

PROBLEMAS

1. La corriente a través del filamento de un bulbo de luz eléctrica se calcula partiendo del conocido voltaje aplicado. El voltaje es alterno, 60 ciclos por segundo y es aproximadamente el voltaje promedio

de las lámparas. Cuando la lámpara se idealiza para el análisis del circuito, ¿qué resulta, qué efectos que existan realmente en la lámpara pueden despreciarse? § 3

2. El acumulador de un automóvil suministra potencia a la luz trasera del automóvil. La corriente se va a calcular. Idealice el circuito incluyendo la batería. § 3

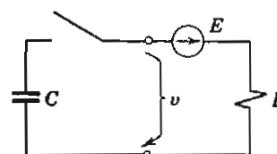
3. La batería del Prob. 2 se utiliza para hacer sonar la bocina. Idealice el circuito (si usted no sabe cómo trabaja una bocina dígalo). § 3

4. El voltaje aplicado a la lámpara del Prob. 1, es alterno a 1 000 000 de ciclos por segundo (frecuencia de radio). ¿Cambiará esto sus respuestas a las preguntas del Prob. 1? § 3

5. Por un circuito consistente de R y L en serie, circula 1.00 amperio en el tiempo $t = 0$. Si $R = 15$ ohms y $L = 450$ milihenrys ($L = 0.450$ henrys) ¿cuál será la corriente a los (a) 0.03 segundos, (b) 0.10 segundos, (c) 1.00 segundos. § 5

6. Si en el circuito del Prob. 5 la corriente es de 0.10 amperes en el tiempo $t = 0.10$ segundos, ¿cuál fue la corriente en $t = 0$? § 5

7. En el circuito de la Fig. 2-3, (a) cuál es la componente forzada (estado estable) de la corriente, (b) cuál es la componente natural (transitoria) y (c) cuál es la corriente total en todos los casos para $t = 0.18$ segundos? $E = 10$ volts, $R = 7.5$ ohms, $L = 1.35$ henrys; el switch se cierra en $t = 0$. § 6



Prob. 8.

8. Una fuente de fuerza electromotriz constante E está en serie con R y C como en la figura. Escríbase nuevamente la Ec. 2-14 para que corresponda, dando atención cuidadosa a los signos. Resuélvase la nueva ecuación para encontrar la corriente i , e indíquese las componentes natural y forzada. § 8

9. Si $i = I_m \sin \omega t$, escríbase una expresión equivalente para i en la forma coseno de la Ec. 2-20. Hágase lo mismo si $i = I_m \sin (\omega t + \pi/6)$. § 11

10. Si $v = V_m \sin (\omega t + \pi)$ escríbase una expresión equivalente

para v en la forma coseno de la Ec. 2-20. Hágase lo mismo si $v = V_m \cos (\omega t - \pi/2)$. § 11

11. La frecuencia es de 60 ciclos por segundo. Una resistencia de 100 ohms y una inductancia de 0.10 henrys están en serie. Encontrar la reactancia inductiva y la magnitud y el ángulo de la impedancia. § 18

12. (a) Repítase el Prob. 11 con una frecuencia de 500 ciclos por segundo. (b) Repítase otra vez con una frecuencia de 10^6 ciclos por segundo. (Nótese, sin embargo, que estos valores difícilmente se podrían realizar para esta alta frecuencia). § 18

13. Una resistencia de 12 ohms está conectada en paralelo con un capacitor de 5.0 microfarads. Encontrar la susceptancia capacitiva a 5 000 000 ciclos por segundo y la admitancia de la combinación (magnitud y ángulo). § 20

14. (a) Repítase el Prob. 13 para 2 000 ciclos por segundo y también (b) para 10^6 ciclos por segundo. § 20

15. La resistencia y el capacitor del Prob. 13 se conectan en serie. Encontrar la reactancia capacitiva del capacitor y la impedancia (magnitud y ángulo) de la combinación en serie para 2, 5 y 1 000 kilociclos por segundo. § 21

16. La ecuación de un circuito es

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = 0$$

(a) Dibujar un diagrama del circuito. (b) ¿Es $i = I_m \cos \omega t$ una solución de esta ecuación? Si lo es, para qué valores de ω ? Para qué valores de I_m ? (c) ¿Es físicamente posible el circuito? (d) ¿Para qué condiciones iniciales podría resultar la corriente i ? § 8

17. Un reactor con una inductancia de 10 henrys y una resistencia pequeña se conecta en paralelo con una resistencia de 2 500 ohms. Encontrar la susceptancia inductiva de la bobina y la admisión (magnitud y ángulo) de la combinación en paralelo, para 60, 120 y 180 ciclos por segundo. § 22

18. Una bobina que tiene 65.0 ohms de resistencia y 351 milihenrys de inductancia se conecta en serie con un capacitor de $C = 0.50$ microfarads. Trácense las dos curvas: (a) magnitud y (b) ángulo de la impedancia de la combinación en serie, como funciones de la frecuencia de 0 a 5 000 ciclos por segundo. § 24

19. Una resistencia, un capacitor y un inductor se conectan en paralelo. (a) Defina la susceptancia de la combinación. (b) Defina

la frecuencia de la resonancia (estas definiciones deberán ser consistentes con otras de este capítulo). (c) Calcular la frecuencia de resonancia en función de L , C y G . (d) Para frecuencia arriba de la resonancia ¿es positiva o negativa la susceptancia?. ¿y abajo de la resonancia?

§ 24

✓ 20. Trácese la reactancia (incluyendo el signo correcto) como función de la frecuencia para una inductancia y una capacitancia conectadas en serie. $L = 1.0$ milihenrys, $C = 0.1$ microfarads. En un bosquejo a mano libre muéstrese la forma correcta de la curva, dando escalas numéricas de reactancia y frecuencia (de 0 a 25 kilociclos escala lineal).

§ 24

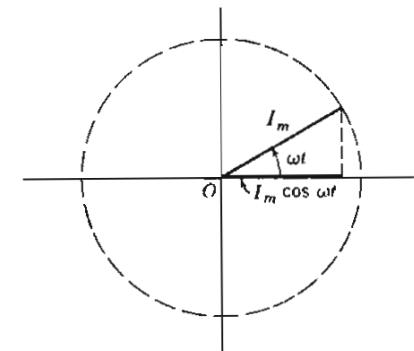
3

Algebra Compleja

1. Líneas giratorias

Para hacer fáciles las matemáticas de la corriente alterna, deseamos una representación conveniente de una función senoidal variable. En el último capítulo se usaron repetidamente ecuaciones de la forma $i = I_m \cos(\omega t + \phi)$. Esta expresión trigonométrica es correcta pero es más bien incómoda para manipular y podemos hacerlo mejor.

FIG. 3-1. Una línea giratoria



Es del conocimiento común, que si una línea como la nombrada I_m en la Fig. 3-1 gira, como el radio de una rueda, a velocidad constante alrededor del origen O , la longitud de su proyección en el eje horizontal varía senoidalmente con el tiempo. Si I_m es la longitud de

la recta, la longitud de su proyección sobre el eje horizontal es $I_m \cos \omega t$, donde ω es la velocidad angular de la línea, suponiendo que gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj y t es el tiempo que ha transcurrido desde el instante en que la línea giratoria estaba en posición horizontal.

De esta manera, una línea giratoria de longitud constante puede representar una cantidad variable senoidalmente, tal como una corriente eléctrica. La línea de longitud I_m , se requiere que sea giratoria con relación a los ejes de la Fig. 3-1 a una velocidad constante, efectuando una revolución por ciclo de la corriente alterna, lo que quiere decir que tiene una velocidad angular igual a ω y la proyección de la línea sobre el eje horizontal nos da el valor de la corriente en cada instante.

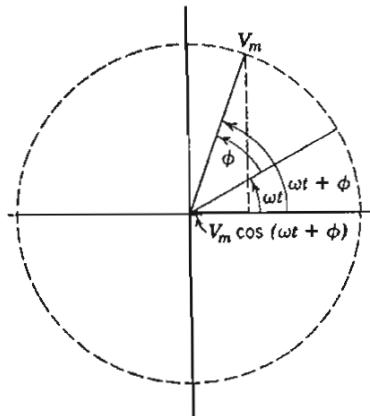


FIG. 3-2. Ángulo de fase

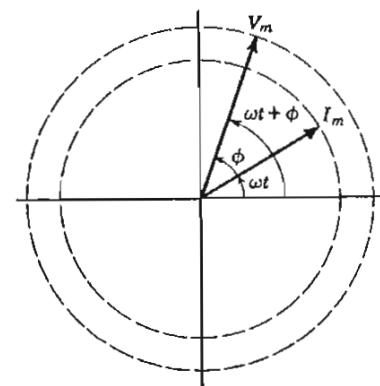


FIG. 3-3. Voltaje y corriente para R y L en serie

Una línea giratoria puede entonces representar una corriente $I_m \cos \omega t$ o un voltaje $V_m \cos \omega t$. Para representar un voltaje tal como $V_m \cos (\omega t + \phi)$ es necesario solamente, utilizar otra línea giratoria adelantada un ángulo ϕ . Esta línea tiene un ángulo $\omega t + \phi$ como el mostrado en la Fig. 3-2.

La Fig. 2-11 de la Pág. 66 muestra las ondas de corriente y voltaje para un circuito con resistencia y reactancia inductiva en serie. La corriente es $i = I_m \cos \omega t$ y el voltaje, como en la Ec. 2-37, es $v = V_m \cos (\omega t + \phi)$. Esta corriente y este voltaje pueden representarse por las líneas giratorias de las Figs. 3-1 y 3-2; por conveniencia se

han combinado en un solo diagrama en la Fig. 3-3. Ambas líneas rectas son giratorias con relación a los ejes y cuando ellas giran y continúan girando indefinidamente, una de ellas adelantará siempre a la otra el ángulo de la fase ϕ . Así, sólo un diagrama muestra gráficamente las magnitudes de voltaje y corriente en un circuito particular, y su desfasamiento está dado por el ángulo de fase ϕ .

Este diagrama es llamado "diagrama senoidal" por algunos y "diagrama fasorial" por otros. Hace unos pocos años, el término "diagrama vectorial" era usado comúnmente, pero las otras varias implicaciones de la palabra "vector" producían ambigüedad. La palabra "fasor" aunque desagradable, ha recibido cierto reconocimiento oficial y será usada con relucencia en este libro, para indicar una línea que representa, por rotación, una función variable senoidal del tiempo.

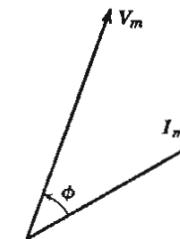


FIG. 3-4. Las líneas giratorias de la Fig. 3-3

Se acostumbra utilizar puntas de flecha para los fasores tal como en las figuras. Estas cabezas de flechas no tienen el propósito de mostrar la dirección de los fasores, porque la dirección es obviamente hacia fuera del origen, pero pueden servir para distinguir entre fasores de corriente y fasores de voltaje, mientras que otras flechas indican fasores de flujo magnético.

Un fasor de la Fig. 3-3 representa un voltaje alterno y el otro una corriente alterna que está atrasada con respecto al voltaje por un ángulo de fase ϕ . Las dos líneas radiales indican todo lo que se conoce acerca de estas cantidades. El resto del diagrama puede quitarse sin pérdida de información y la Fig. 3-4 no es significativa, porque con tal de que ambas líneas giratorias sean dibujadas con el ángulo correcto que separa una de otra, deberán visualizarse como girando juntas a velocidad sincronizada alrededor de su origen común y cualquier dibujo de ellas es meramente una instantánea y cualquier otra instantánea sería válida.

Puesto que tenemos opción, escojamos nuestra instantánea en el

momento en que el ángulo del fasor de corriente es cero. El resultado es la Fig. 3-5, en la que como orientación se dice que I_m es el *fasor de referencia*. Siempre que dibujamos un diagrama fasorial el primer

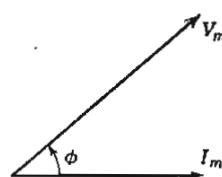


FIG. 3-5. Las líneas giratorias en el instante $t = 0$

paso es seleccionar alguno de los fasores como referencia con ángulo cero (o cualquier ángulo deseado). Todos los demás fasores deberán dibujarse entonces con los ángulos *relativos* correctos.

2. Plano complejo

Esta representación de los voltajes y corrientes alternas por líneas giratorias se probará que es marcadamente útil en la comprensión de los circuitos de corriente alterna. Para obtener el beneficio completo de la idea, deberá ponerse en forma matemática y hay una triquiñuela matemática para hacerlo. Para ver cómo se utiliza la triquiñuela, regresemos a tratar algunas ideas matemáticas muy elementales.*

Empecemos con los números positivos: podemos establecer una correspondencia entre números positivos y puntos de una línea, tal como la de la Fig. 3-6 comenzando en el punto 0 y extendiéndonos



FIG. 3-6. Números positivos

indefinidamente hacia la derecha. A continuación, definamos las operaciones algebraicas ordinarias: adición, substracción, multiplicación, división, potencias al cuadrado y raíces cuadradas. (Estas operaciones, por supuesto, son bien conocidas por nosotros). Cuando estas operaciones se efectúan con números positivos los resultados son otros números positivos, pudiendo localizarse todos ellos en la línea—excepto cuando se resta un número mayor de otro número menor. La resta de un número mayor de otro menor da una nueva

* La introducción a los números complejos dada aquí es un poco más sofisticada que la que a menudo se encuentra en los libros de ingeniería eléctrica. De este modo se evitan ciertos errores comunes. Esta presentación aunque dada con extrema simplicidad y tocando solamente los puntos necesarios para nuestro uso, sigue la guía de un tratamiento matemático.

clase de números para los que tenemos lugar en nuestra línea. Decidimos llamarlos números *negativos* y los distinguimos escribiendo un símbolo delante del número (una linea corta horizontal; por ejemplo, -2 , -6) y hacemos lugar para estos números negativos en el diagrama extendiendo nuestra recta a la izquierda del punto 0, como en la Fig. 3-7. A los números positivos junto con los números negativos los llamamos números *reales*.

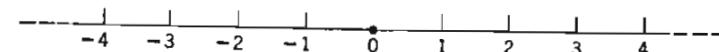


FIG. 3-7. Números reales

Ahora es necesario desarrollar nuevas definiciones para la multiplicación de estos números negativos. Para tener un sistema simple y consistente de reglas para multiplicar todos los números reales, decidiremos que el producto de dos números negativos es positivo y que el producto de uno positivo y uno negativo es negativo.

El resultado de cualquier operación algebraica de todos estos números reales es otro número real, excepto cuando se intenta la raíz cuadrada de un número negativo. Ningún número real multiplicado por sí mismo nos dará un número negativo, debido a la manera en que se ha definido la multiplicación y la raíz cuadrada de un número negativo no encuentra lugar en nuestro sistema.

Por consiguiente, inventaremos otra nueva clase de números. Este es un número cuyo cuadrado es un número negativo por definición y decidimos llamarlo número *imaginario*. (Es una infeliz elección de nombre, porque este número no es más imaginario que otros pero, sin embargo, es su nombre). Nosotros los distinguimos escribiendo un símbolo enfrente del número; los matemáticos utilizan la letra i con este propósito (por ejemplo, $i2$, $i4$), pero los ingenieros electricistas utilizan j ($j2$, $j4$) para evitar confusiones con el símbolo i de la corriente. Vamos a hacer lugar para estos nuevos números en nuestro diagrama, extendiendo una línea hacia arriba por el punto 0 y también hacia abajo para los números imaginarios negativos, como en la Fig. 3-8a.

Si dos números reales se suman, la suma es otro número real. Si dos números imaginarios se suman, la suma es un número imaginario. Si un número real y un número imaginario se suman, el resultado se llama número *complejo*. Así, si nosotros sumamos un 2 real y un 1 imaginario, la suma es el número complejo $(2 + j1)$. Utilizando el

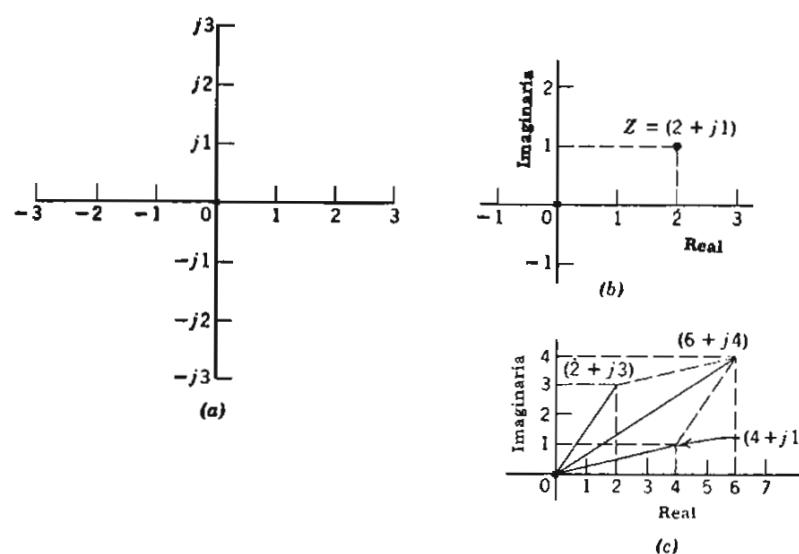


FIG. 3-8. Representación gráfica de los números complejos. (a) Números reales e imaginarios. (b) Plano complejo. (c) Adición de números complejos

símbolo **Z** para representar* este número complejo, $Z = (2 + j1)$. Nótese que los números reales e imaginarios son casos especiales de números complejos: un número real, es un número complejo con su componente imaginaria igual a cero (por ejemplo, $3 + j0$) y un número imaginario es un número complejo sin componente real.

Un número complejo puede representarse en la Fig. 3-8a por dos puntos, uno en la línea de los reales y otro en la de los imaginarios, pero es más conveniente adoptar la convención de representarlo por un solo punto escogido de modo que su proyección sobre la línea de los reales nos dé la componente real del número complejo y su proyección sobre la línea recta de los imaginarios nos dé la componente imaginaria del número complejo. De esta manera, el punto **Z** en la Fig. 3-8b representa el número complejo $(2 + j1)$. Toda esta clase de puntos que representan todos los números complejos llenan el plano íntegro de la Fig. 3-8b.

El plano utilizado de esta manera para representar números complejos, se llama *plano complejo*; las dos líneas se llaman ejes real e imaginario, respectivamente. Se ha especificado por conveniencia,

* Como cuestión de notación, se acostumbra utilizar el tipo itálico negrilla para los símbolos que representan números complejos como $Z = x + jy$, o $W = u + jv$.

que los ejes deberán formar ángulos rectos entre ellos y que ambos ejes tengan la misma escala. Esto es importante y algunas veces se olvida, que la escala en el eje de los imaginarios debe ser la misma que la escala en los ejes de los reales. Habiendo llegado a los números complejos, nuestra tarea de inventar un sistema numérico consistente queda completa. No se necesita otra clase de números, porque veremos que el resultado de cualquier operación algebraica con cualquier número complejo es otro número complejo y que existe un lugar para él en el plano complejo.

3. Definiciones

Es necesario extender algunas de las definiciones de álgebra elemental para aplicarlas a los números complejos. Podemos, por supuesto, definir operaciones con cantidades complejas de cualquier manera que deseemos (o más bien, el hombre que primero inventó las cantidades complejas tuvo este privilegio). Nos guaremos por los siguientes principios. Adoptaremos definiciones que son consistentes con las definiciones bien conocidas aplicadas a los números reales y reduciremos a esas definiciones conocidas cuando las cantidades complejas tienen componente imaginaria igual a cero, adoptando definiciones que sean útiles y convenientes. Primero necesitamos una definición de igualdad.

IGUALDAD. Dos números complejos son iguales, si sus componentes reales son iguales y sus componentes imaginarios son también iguales. Entonces, si $Z = x + jy$ y $W = u + jv$, podemos decir que $Z = W$ si, y solamente si, $x = u$ y $y = v$.

ADICIÓN Y SUBSTRACCIÓN. La suma de dos números complejos tiene una componente real igual a las sumas de las componentes reales y una componente imaginaria igual a la suma de las componentes imaginarias. Entonces, $(2 + j3) + (4 + j1) = (6 + j4)$. Para restar, cámbiense los signos de las componentes del sustraendo y efectúese una suma.

El método del paralelogramo utilizado para sumar y restar vectores, se aplica a la adición y sustracción de cantidades en el plano complejo, como en la Fig. 3-8c.

MULTIPLICACIÓN. El producto de un número real y un número imaginario es imaginario, de este modo $2(j3) = j6$. El producto de dos números imaginarios es real: $(j2)(j3) = -6$ y $(j3)(-j4) = -(j3)(j4) = +12$. Se debe dar énfasis especial al hecho de que

$(j1)(j1) = -1$. Esto es cierto por definición y nos suministra la base para toda el álgebra de los complejos.
Escrito de otro modo,

$$j1 = \sqrt{-1} \quad (3-1)$$

Los números complejos se multiplican con las reglas ordinarias del álgebra suplementadas por las reglas anteriores para los números imaginarios. Como un ejemplo:

$$\begin{aligned} (2 + j3)(4 + j1) &= 2 \cdot 4 + 2 \cdot j1 + j3 \cdot 4 + j3 \cdot j1 \\ &= 8 + j2 + j12 - 3 = 5 + j14 \end{aligned}$$

Estas cantidades se muestran en la Fig. 3-9. Más generalmente,

$$\begin{aligned} (a + jb)(c + jd) &= (ac - bd) + j(ad + bc) \quad (3-2) \end{aligned}$$

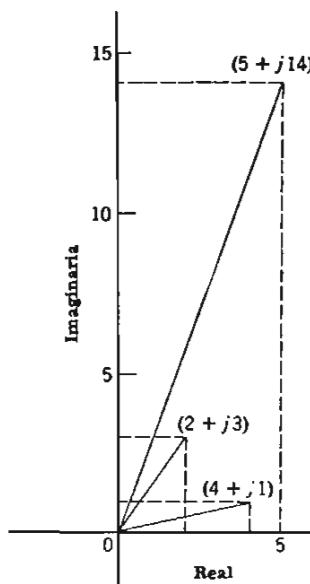


FIG. 3-9. Multiplicación de números complejos

División. A modo de ilustración, consideremos la división de $(5 + j10)$ entre $(2 + j1)$:

$$\frac{5 + j10}{2 + j1} \quad (3-3)$$

El primer paso es multiplicar numerador y denominador por $(2 - j1)$, utilizando la Ec. 3-2:

$$\frac{(5 + j10)(2 - j1)}{(2 + j1)(2 - j1)} = \frac{(10 + 10) + j(-5 + 20)}{(4 + 1) + j(-2 + 2)} = \frac{20 + j15}{5} \quad (3-4)$$

Como resultado de este juego de manos matemático (que se llama *racionalización*) encontramos que el denominador es ahora un número real y puede dividirse a cada componente del numerador para dar $4 + j3$. Esto es

$$\frac{5 + j10}{2 + j1} = 4 + j3 \quad (3-5)$$

Este proceso puede generalizarse escribiendo letras en lugar de números:

$$\begin{aligned} \frac{a + jb}{c + jd} &= \frac{(a + jb)(c - jd)}{(c + jd)(c - jd)} = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + j \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \quad (3-6) \end{aligned}$$

CONJUGADO. El proceso de hacer del denominador un número real, como se exemplifica en las Ec. 3-4 y 3-6, se llama *racionalización del cociente*. Esto se hace multiplicando el denominador por su conjugado.

Por definición, el conjugado de un número complejo es otro número complejo con la misma componente real y con una componente imaginaria opuesta. Se utiliza un asterisco para indicar el conjugado; esto es, si A es un número complejo, A^* es su conjugado.† Para escribir la definición en símbolos,

$$\text{si } A = a + jb \text{ entonces } A^* = a - jb \quad (3-7)$$

La Fig. 3-10 muestra un par de cantidades complejas conjugadas. Obviamente los conjugados siempre vienen en pares; cada uno es el conjugado del otro. El producto de los conjugados es siempre real.

† Algunos autores utilizan \bar{A} para el conjugado.

$$A \cdot A^* = (a + jb)(a - jb) = (a^2 + b^2) + j(-ab + ab) = a^2 + b^2 \quad (3-8)$$

También es verdad que la suma de un par de conjugados es siempre real, pero este hecho no es utilizable para nosotros en este momento.

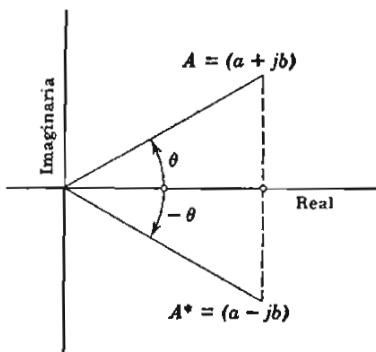


FIG. 3-10. Un par conjugado

POTENCIA. Los cuadrados y potencias mayores de cantidades complejas, se obtienen por multiplicación repetida. El cuadrado de un número real es real y positivo. El cuadrado de un número imaginario es real y negativo. El cuadrado de un número complejo, es generalmente, complejo.

Las potencias de $j1$ son de particular interés. Por definición, $(j1)^2 = -1$. También,

$$\begin{aligned} (j1)^3 &= (j1)^2(j1) = (-1)(j1) = -j1 \\ (j1)^4 &= (j1)^2(j1)^2 = (-1)(-1) = +1, \text{ etc.} \end{aligned} \quad (3-9)$$

Por conveniencia, la unidad imaginaria $j1$ se abrevia comúnmente a j . Esto es quizás desafortunado porque puede producir confusión. Es como si la cantidad -1 fuera escrita solamente $-$. Esta notación hace que j parezca una cantidad algebraica, un número, en lugar de un símbolo para etiquetar los números imaginarios. No obstante, es permisible si se ha entendido claramente \dagger y nos conduce a escribir ecuaciones como la 3-9 en la forma abreviada:

Como $j = j1 = \sqrt{-1}$, entonces

$$j^2 = -1 \quad (jx)^2 = j^2x^2 = -x^2$$

\dagger Si no se ha entendido claramente pueden aparecer algunos resultados extraños. La discusión de un error que es común en los libros de texto está dada por H. M. Bacon y H. H. Skilling en *Electrical Engineering*, volumen 54, Págs. 460-462, 1935.

$$\begin{array}{ll} j^4 = +1 & (jx)^4 = j^4x^4 = x^4 \\ j^5 = j & (jx)^5 = j^5x^5 = jx^5 \\ j^3 = -j & (jx)^3 = j^3x^3 = -jx^3 \end{array} \quad (3-10)$$

Una discusión adicional de potencias y raíces vendrá más apropiadamente después de haber sido desarrollada la forma exponencial de las cantidades complejas.

4. Forma trigonométrica

Se habrá notado que en las Fig. 3-8c, 3-9 y 3-10, han sido trazadas líneas del origen a los puntos en el plano complejo. Estas líneas no son necesarias, pero es un medio conveniente de señalar los puntos especificados. También, las longitudes y ángulos de tales líneas radiales son cantidades significativas.

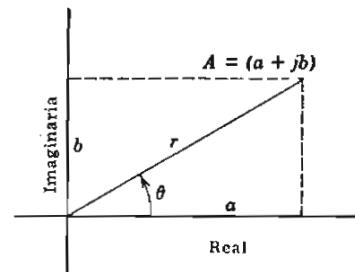


FIG. 3-11. Componentes de A

Una cantidad compleja $A = (a + jb)$ se indica en la Fig. 3-11. Se ha trazado una recta radial desde el origen al punto $(a + jb)$. Si a la longitud de esta recta radial se le llama r , y a su ángulo con el eje de los reales θ , entonces $a = r \cos \theta$ y $b = r \sin \theta$ y

$$A = a + jb = r \cos \theta + jr \sin \theta = r(\cos \theta + j \sin \theta) \quad (3-11)$$

De este modo una cantidad compleja A puede expresarse en función de una magnitud r y un ángulo θ . Por supuesto, la magnitud y el ángulo son ambos números reales.

Como asunto de notación es conveniente y acostumbrado escribir una cantidad compleja en lo que se llama forma *polar*, como $A = r/\theta$, indicando a "A igual a r y un ángulo θ ". Este es solamente otro modo de escribir una cantidad compleja y no significa ni más ni menos que la forma *rectangular* $A = a + jb$. Si r y θ son conocidos, se pue-

den encontrar a y b ; o si a y b son conocidos, pueden encontrarse r y θ .*

$$\begin{aligned} a &= r \cos \theta & r &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ b &= r \sin \theta & \theta &= \tan^{-1} \frac{b}{a} \end{aligned} \quad (3-12)$$

5. Teorema de Euler

La Ec. 3-11 expresa una cantidad compleja en forma algebraica en función de a y b y en forma trigonométrica en función de r y θ . Una tercera expresión usual es la forma exponencial y vamos a desarrollarla ahora. El primer paso es recordar la definición de función exponencial.

La función exponencial es, por definición, igual al límite al que se aproximaría una serie infinita:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (3-13)$$

* La forma $r - \sqrt{a^2 + b^2}$ es usualmente mejor para el análisis, pero para cálculo numérico es más conveniente utilizar $r = \frac{a}{\cos[\cot^{-1}(a/b)]}$ o una forma similar. Las reglas de

cálculo "Trig" o mejor aún, "Decitrig" están diseñadas para este cálculo. Si no se tiene a mano una de estas reglas, el siguiente método de cálculo, utilizando cualquier regla de cálculo y una tabla trigonométrica como la del Apéndice 4 es recomendable.

Método	Ejemplo
Empezar con las componentes real e imaginaria.	Por ejemplo, $3 + j4$
Divídase el número mayor entre el menor con la regla de cálculo (Magnitudes, omitiendo el signo).	$4/3 = 1.333$
Búsquese esta relación en una tabla trigonométrica en la columna encabezada \cot ; lea y anote el ángulo correspondiente, decidiendo el octante de este dato. Este es θ .	El ángulo de $3 + j4$ debe estar entre 45° y 90° ; se lee en la tabla, de 1.333, el valor 53.13° .
En el mismo renglón, de la tabla trigonométrica (mismo ángulo) léase el número de la columna \cos .	Léase 0.8000. (Este, $\cos 53.13^\circ$ se lee en la columna encabezada \cos).
Moviendo la regleta de la regla, pero sin mover el cursor, divida la componente mayor entre el número de la columna \cos de la escala. Anótese el resultado; éste es r .	$\frac{4.00}{0.8000} = 5.00$
	Por tanto, el resultado es $5.00/53.13^\circ$

Esta serie nos recuerda a las series que definen las funciones trigonométricas.

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \quad (3-14)$$

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \quad (3-15)$$

Las series seno y coseno, aunque más bien similares a las series exponenciales, tienen una inversión de signos muy marcada de los términos alternados.

Una inversión de signos similar sucede en las series exponenciales si el exponente es imaginario. Considérese $e^{j\theta}$ que puede encontrarse haciendo $x = j\theta$ en la Ec. 3-13:

$$e^{j\theta} = 1 + j\theta + \frac{(j\theta)^2}{2!} + \frac{(j\theta)^3}{3!} + \frac{(j\theta)^4}{4!} + \frac{(j\theta)^5}{5!} + \dots \quad (3-16)$$

Como $(j\theta)^2 = -\theta^2$, $(j\theta)^3 = -j\theta^3$ y así sucesivamente, esta serie puede escribirse

$$e^{j\theta} = 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + j\frac{\theta^5}{5!} - \dots \quad (3-17)$$

Vamos a agrupar los términos que no contienen j y los que sí la contienen obteniendo

$$e^{j\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \right) + j \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right) \quad (3-18)$$

y la comparación con las Ec. 3-14 y 3-15 nos muestra que

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (3-19)$$

Este es el resultado para el que estábamos trabajando. Es un teorema importante de la teoría de la variable compleja, conocido como el *teorema de Euler*.

6. Forma exponencial

Cuando el teorema de Euler, Ec. 3-19, se sustituye en la forma trigonométrica de una cantidad compleja, la Ec. 3-11, nos da una

forma exponencial de la expresión. Cualquier número complejo puede escribirse

$$A = a + jb = r(\cos \theta + j \sin \theta) = re^{j\theta} \quad (3-20)$$

A en la Ec. 3-20, es una cantidad compleja. Está indicada en la Fig. 3-11 por la línea de longitud r que forma un ángulo θ con el eje de los reales. Cuando una cantidad compleja se expresa en forma exponencial como $A = re^{j\theta}$, significa lo mismo que $A = \underline{r}/\theta$. Significa que A es una cantidad de magnitud r y ángulo θ .

Hagamos ahora $r = 1$. La cantidad $e^{j\theta}$ que resulta, se observa que es una cantidad compleja de magnitud 1 y ángulo θ . Esta es una sorprendente y simple interpretación y se muestra en la Fig. 3-12; la cual puede verse como una representación gráfica del teorema de Euler.

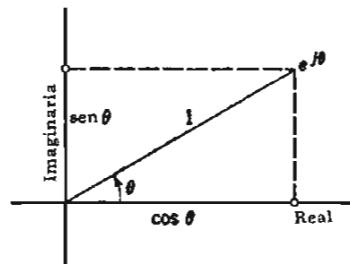


FIG. 3-12. Teorema de Euler

7. Multiplicación y división en la forma exponencial

Una gran ventaja de las formas polar o exponencial de una cantidad compleja es la facilidad de efectuar multiplicaciones y divisiones. Las definiciones de multiplicación y división continúan tal como se dieron en la sección 3, pero ahora encontramos medios más simples de efectuar las operaciones. (Por otro lado, la adición y sustracción no pueden efectuarse en las formas polar o exponencial; los números complejos deberán expresarse en forma rectangular para sumarse o sustraerse.)

La multiplicación de dos cantidades complejas en la forma exponencial puede efectuarse de acuerdo con las reglas ordinarias para

la multiplicación de dos exponentiales. Así, el producto de $A = Ae^{j\alpha}$ y $B = Be^{j\beta}$ es *

$$A \cdot B = (Ae^{j\alpha})(Be^{j\beta}) = AB e^{j(\alpha+\beta)} \quad (3-21)$$

Esta multiplicación se ilustra en la Fig. 3-13. El proceso puede ponerse en palabras como sigue (y esta definición debería recordarse): La magnitud del producto es el producto de las magnitudes de los factores y el ángulo del producto es la suma de los ángulos.

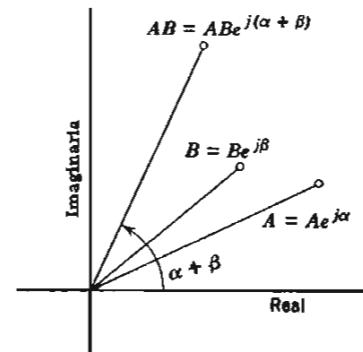


FIG. 3-13. Multiplicación

La multiplicación de cantidades complejas en la forma exponencial por el método de la Ec. 3-21, es exactamente equivalente a la multiplicación de cantidades complejas en la forma rectangular por el método de la Ec. 3-2. En cualquier problema particular se utilizará aquel que sea más conveniente. Sin duda alguna, la multiplicación es más sencilla en la forma exponencial, porque en esta forma requiere solamente una operación de la regla de cálculo y la multiplicación en la forma rectangular requiere cuatro. Sin embargo, si dos cantidades complejas están expresadas en la forma rectangular (esto es, como $a + jb$) el producto también se desea en la forma rectangular, entonces podría ser más conveniente efectuar la multiplicación en la forma rectangular, pero por regla general, es mejor hacerla en las formas exponencial o polar.

La división de una cantidad compleja entre otra, más bien complicada en la forma rectangular, es simple en la forma exponencial. La magnitud del cociente es el cociente de las magnitudes y el ángulo del cociente es la diferencia de los ángulos. En símbolos:

$$\frac{A}{B} = \frac{Ae^{j\alpha}}{Be^{j\beta}} = \frac{A}{B} e^{j(\alpha-\beta)} \quad (3-22)$$

* El símbolo A indica la magnitud (o módulos) de la cantidad compleja A . A es un número real.

Prácticamente, sin excepción alguna, la división es más fácil en la forma exponencial.

8. Potencias y raíces

Las potencias de los números complejos se encuentran muy convenientemente en la forma exponencial. Si $re^{j\theta}$ es un número complejo, su n -ésima potencia es

$$(re^{j\theta})^n = r^n e^{jn\theta} \quad (3-23)$$

Esta fórmula es general e incluye a las raíces también, pues las raíces son potencias fraccionarias, pero puede escribirse si se desea una forma explícita para las raíces:

$$\sqrt[n]{re^{j\theta}} = \sqrt[n]{r} e^{j\theta/n} \quad (3-24)$$

Las raíces de los números complejos son marcadamente interesantes. Cualquier número tiene dos raíces cuadradas, tres raíces cúbicas y así sucesivamente. Es familiar que la $\sqrt{4}$ es tanto $+2$ como -2 . Similarmente $\sqrt{-4}$ es tanto $+j2$ como $-j2$. Esto viene del hecho de que $(j2)(j2) = -4$ y también $(-j2)(-j2) = -4$.

Un número real tiene solamente una raíz cúbica real, pero cualquier número tiene tres raíces cúbicas, cuando tanto las raíces reales como las complejas se cuentan. De este modo, las raíces cúbicas de 1 son, por supuesto, 1 y también $(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2})$ y $(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2})$. Estas tres raíces cúbicas de 1 se muestran en la Fig. 3-14.

Las tres raíces cúbicas de 1 lucen un poco menos formidables cuando se escriben en la forma polar como $1/0^\circ$, $1/120^\circ$ y $1/-120^\circ$. Además, en esta forma es fácil ver que son en efecto raíces cúbicas de 1, porque si cualquiera de ellas se eleva a la tercera potencia resulta 1. De este modo

$$(1/120^\circ)^3 = (1)^3/(120) \cdot 3 = 1/360^\circ \quad (3-25)$$

y $1/360^\circ$ es idéntico a $1/0^\circ$. Similarmente $(1/-120^\circ)^3 = 1/-360^\circ$ y esto también es lo mismo que $1/0^\circ$.

Es igualmente correcto decir que $1/240^\circ$ es la raíz cúbica de 1, porque $(1/240^\circ)^3 = 1/720^\circ$ y esta es indistinguible de $1/0^\circ$. Sin embargo, sigue habiendo solamente tres raíces cúbicas de 1, porque $1/240^\circ$ es idéntico a $1/120^\circ$ que contamos como una de las tres raíces. Ver Fig. 3-14. Existen ilimitadas formas de expresar las raí-

ces cúbicas, pero en un diagrama c cuando se escriben en forma rectangular sólo hay tres valores distintos.

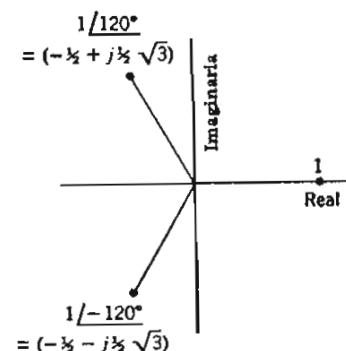


FIG. 3-14. Raíces cúbicas de 1

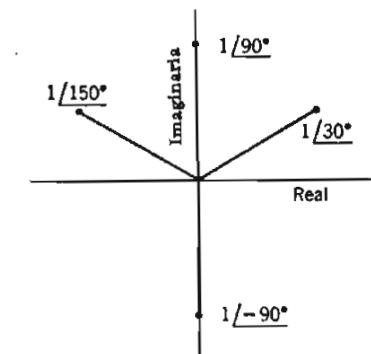


FIG. 3-15. La cantidad $1/90^\circ$ y sus tres raíces cúbicas

De una manera similar hay tres raíces cúbicas de 8, que son $2/0^\circ$, $2/120^\circ$ y $2/-120^\circ$.

Consideremos ahora las raíces cúbicas de la cantidad $8/90^\circ$. La Ec. 3-24 nos da una raíz: $2/30^\circ$. Las otras dos raíces cúbicas tienen la misma magnitud y están separadas 120° . Estas raíces son $2/(30 + 120)^\circ$ y $2/(30 - 120)^\circ$ como puede probarse elevando al cubo. Ver Fig. 3-15. Similarmente, las raíces cuartas de cualquier cantidad compleja son iguales en magnitud y están separadas 90° en el plano complejo. Las raíces quintas están separadas 72° y así sucesivamente.*

Estas operaciones con las cantidades complejas serán ahora ilustradas por unos pocos ejemplos numéricos.

9. Ejemplos

EJEMPLO 1. Encontrar el producto de **A** y **B** si **A** = $1.5e^{j\pi/6}$ y **B** = $1.2e^{j\pi/4}$.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (1.5)(1.2)e^{j(\pi/6 + \pi/4)} = 1.8e^{j5\pi/12} \quad (3-26)$$

* La ambigüedad del signo de la raíz cuadrada, la multiplicidad de las raíces de índice mayor y muchas paradojas relacionadas con las cantidades complejas, provienen del hecho de que $si e^{jx} = a + jb$, x es multivalente. Por el teorema de Euler, $e^{jx} = e^{j(x+2\pi)}$.

Generalmente es más conveniente trabajar en grados que en radianes, así el problema puede repetirse en diferente notación:

$$A \cdot B = (1.5)(1.2) / 30^\circ + 45^\circ = 1.8 / 75^\circ \quad (3-27)$$

Nótese que una forma algebraica tal como e^{j75° no es deseable, si no es que no tiene significado, cuando se considera la definición del exponencial como una serie infinita según Ec. 3-13.

EJEMPLO 2. Encontrar el producto de $j1$ y $5/30^\circ$.

$$(j1)(5/30^\circ) = (1/90^\circ)(5/30^\circ) = 5/120^\circ \quad (3-28)$$

Básicamente j es un símbolo para marcar una cantidad imaginaria. Se mostró que puede considerarse como una cantidad algebraica $j = \sqrt{-1}$. También es frecuente referirse a él como un *operador que hace girar una línea* 90° en el plano complejo, de este modo, en la Ec. 3-28, $j(5/30^\circ) = 5/30 + 90^\circ$. Ver Fig. 3-16.

EJEMPLO 3. Dividir:

$$\frac{10 + j5}{10/45^\circ} = \frac{11.18/26.6^\circ}{10/45^\circ} = 1.118/-18.4^\circ$$

EJEMPLO 4. Encontrar la raíz cuadrada de $-0.90 + j1.20$. Primero calcúlese que $-0.90 + j1.20 = 1.50/126.8^\circ$ tal como en la Fig. 3-17. Entonces

$$\sqrt{1.50/126.8^\circ} = \sqrt{1.50/126.8^\circ}/2 = 1.225/63.4^\circ$$

Esta nos da una de las raíces cuadradas de $-0.90 + j1.20$. Debería haber otra y vemos que se encuentra interpretando a $-0.90 + j1.20$ no como $1.50/126.8^\circ$ sino como $1.50/-233.2^\circ$. Ver Fig. 3-17 para este valor también, nótese que un punto en el plano complejo puede interpretarse de ambos modos. Entonces

$$\sqrt{1.50/-233.2^\circ} = 1.225/-116.6^\circ$$

Esta es la otra raíz cuadrada de $-0.90 + j1.20$.

Una raíz cuadrada es la negativa de la otra. En el diagrama esto significa que la línea que representa una raíz, es igual pero opuesta a la línea que representa la otra.

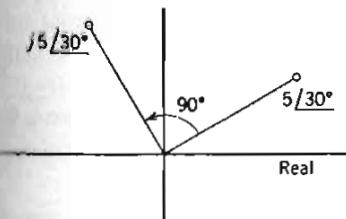


FIG. 3-16. El símbolo j como un operador rotacional

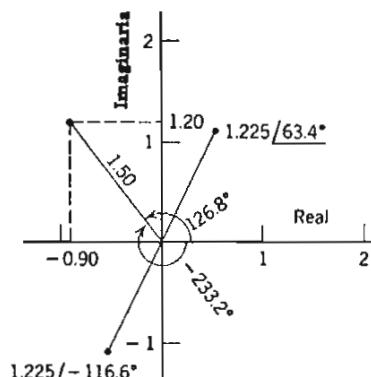


FIG. 3-17. Raíces cuadradas

10. Una línea giratoria en el plano complejo

En la Sección 1 de este capítulo, consideramos una recta radial giratoria. Una línea tal como la de la Fig. 3-11 forma un ángulo θ con los ejes y si θ es constante la línea es fija, no giratoria. Pero la línea puede hacerse girar si el ángulo se hace que se incremente con el tiempo. Escribábase ωt en lugar de θ ; entonces la línea que forma un ángulo de ωt con el eje gira con una velocidad angular ω , pues su ángulo con el eje se incrementa constantemente. Cuando t se incrementa, ωt se incrementa en proporción y cada vez que el ángulo ωt se ha incrementado 2π , la línea efectúa un giro completo alrededor del origen. Poniendo ωt en la Ec. 3-20 en lugar de θ , tenemos una expresión matemática para una línea giratoria: $re^{j\omega t}$. Esta es una línea de longitud constante r que gira a velocidad constante ω alrededor del origen en el plano complejo.

También vimos en la Sección 1 la proyección de una línea giratoria sobre un eje fijo. Ahora $re^{j\omega t}$ es una línea giratoria y la componente real de $re^{j\omega t}$ es la proyección de esta línea giratoria sobre un eje fijo. Para expresar la componente real simbólicamente seguimos el ejemplo de los matemáticos y escribimos Re para significar "la componente real de". Así la componente real de la línea giratoria $re^{j\omega t}$ es $\text{Re}\{re^{j\omega t}\}$.

Con esta notación tomamos las componentes reales de los dos

últimos miembros de la Ec. 3-20 (teorema de Euler) y escribimos la ecuación:

$$\operatorname{Re}\{re^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{r(\cos \omega t + j \operatorname{sen} \omega t)\} \quad (3-29)$$

Pero la componente real de $(\cos \omega t + j \operatorname{sen} \omega t)$ es, por supuesto, $\cos \omega t$, así

$$\operatorname{Re}\{re^{j\omega t}\} = r \cos \omega t \quad (3-30)$$

Esto prueba, si necesitamos probarlo, que la proyección de una línea giratoria sobre un eje fijo es una cantidad variable senoidalmente.

11. Expresiones complejas para la corriente y el voltaje

Ahora aplicaremos nuestras nuevas matemáticas a la electricidad. Encontraremos que el álgebra compleja hace la manipulación de las corrientes alternas más simple de lo que era en el Cap. 2. La parte difícil de todo el trabajo se habrá hecho al principio; después de esto los cálculos con corriente alterna se harán como los cálculos con corriente directa y casi con la misma facilidad. En las próximas 15 ó 20 páginas seguiremos los siguientes pasos:

1. Las cantidades complejas se usarán para representar voltajes y corrientes alternas. Una cantidad compleja indicará con su magnitud la cantidad de voltaje o corriente, y con su ángulo la fase del voltaje o corriente. Estas cantidades complejas se llamarán *fasores* o transformadas de voltaje y corriente.

2. En un circuito que contiene elementos conectados en serie, el voltaje y la corriente se relacionará por la *impedancia compleja*; y en un circuito con elementos en paralelo por la *admitancia compleja*.

3. Con estas cantidades complejas —impedancia, admitancia y las transformadas de voltaje y corriente— el análisis de los circuitos de corriente alterna es similar al análisis de los circuitos de corriente continua; “la ley de Ohm para la corriente alterna” se aplicará a una variedad de circuitos para mostrar su uso.

Primero representamos la corriente con una cantidad compleja. Supongamos que una corriente senoidal es

$$i = I_m \cos \omega t \quad (3-31)$$

Utilizando la notación de la Ec. 3-30, escribimos

$$i = \operatorname{Re}[I_m e^{j\omega t}] \quad (3-32)$$

Reconocemos a $I_m e^{j\omega t}$ como una línea giratoria y a i como su proyección sobre el eje de los reales. Así, la corriente se expresa como la componente real de una línea $I_m e^{j\omega t}$ que está girando en el plano complejo. Al principio de este capítulo, en conexión con las Fig. 3-1 hasta la 3-5, fue señalado que una línea giratoria podía representar un voltaje alterno o corriente, con su proyección sobre un eje fijo. La Ec. 3-32 dice la misma cosa matemáticamente.

Supóngase que la corriente de la Ec. 3-31 es producida por el voltaje

$$v = V_m \cos (\omega t + \phi) \quad (3-33)$$

Utilizando la notación compleja, este voltaje puede escribirse

$$v = \operatorname{Re}\{V_m e^{j(\omega t + \phi)}\} \quad (3-34)$$

La cantidad entre llaves en la Ec. 3-34 es una línea giratoria. Con un cambio algebraico, puesto que

$$V_m e^{j(\omega t + \phi)} = (V_m e^{j\phi}) e^{j\omega t} \quad (3-35)$$

nuestro voltaje alterno puede escribirse

$$v = V_m \cos (\omega t + \phi) = \operatorname{Re}\{(V_m e^{j\phi}) e^{j\omega t}\} \quad (3-36)$$

De esta forma separamos $V_m e^{j\phi}$, una línea fija en el plano complejo, del factor $e^{j\omega t}$ que da rotación.

El fasor utilizado para representar el voltaje en la Fig. 3-5 es la línea $V_m e^{j\phi}$.

La cantidad compleja $V_m e^{j\phi}$ es el corazón de la expresión de voltaje en la Ec. 3-36. Contiene la información esencial acerca de la magnitud y la fase. Es tan útil que se le ha dado un símbolo y un nombre especial. El símbolo empleado es una *V* itálica negrilla; hacemos $V_m e^{j\phi}$ igual a $\sqrt{2} V$. (Por razones que no vienen al caso en este momento,* preferimos representar $V_m e^{j\phi}$ por $\sqrt{2} V$ en lugar de por *V*.) Así, por definición

$$V_m e^{j\phi} = \sqrt{2} V \quad \text{o} \quad V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} e^{j\phi} \quad (3-37)$$

* La razón para esta $\sqrt{2}$ se explicará en el siguiente capítulo. Es para hacer las magnitudes de *V* e *I* iguales a los valores efectivos o valores promedios cuadráticos de voltaje y corriente. Al presente este factor puede verse como inconveniente, pero después se comprobará en una decidida ventaja.

Como preparación para trabajo posterior, podemos llamar a V la transformada del voltaje.*

12. Transformadas

Está claro que si el voltaje actual es conocido, se puede escribir su transformada o viceversa. Por ejemplo, si conocemos que un voltaje es $v = 10 \cos(\omega t + \pi/4)$, podemos inmediatamente escribir como su transformada $V = 7.07e^{j\pi/4}$, o en la notación abreviada de la Sección 4, $V = 7.07//45^\circ$. Por otro lado, si se conoce que la transformada es $V = 7.07//45^\circ$ entonces, la función del voltaje con respecto al tiempo es $v = 10 \cos(\omega t + \pi/4)$.

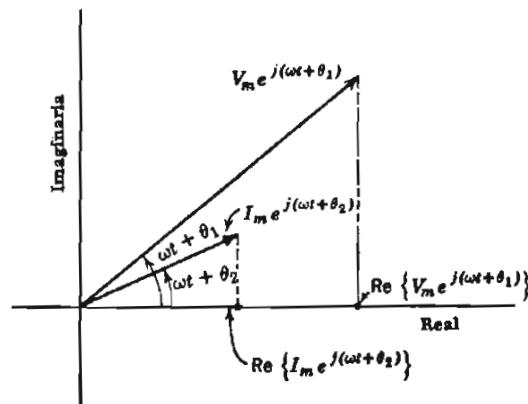


FIG. 3-18. Líneas giratorias en el plano complejo

En los problemas de circuitos, como ya veremos, esta clase de cambios debe ser familiar y las siguientes ecuaciones son convenientes para futuras referencias. Expresan en símbolos generales, tanto para voltaje como corriente, la relación entre las funciones de v e i con respecto al tiempo y sus transformadas V e I . Si

$$v = V_m \cos(\omega t + \theta_1) = \operatorname{Re}\{\sqrt{2} V e^{j\omega t}\} \text{ entonces } V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} e^{j\theta_1} \quad (3-38)$$

y si

$$i = I_m \cos(\omega t + \theta_2) = \operatorname{Re}\{\sqrt{2} I e^{j\omega t}\} \text{ entonces } I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\theta_2} \quad (3-39)$$

V y v , o I e i , se llaman pares de transformadas.

* La palabra "transformada" se copió de la teoría de la transformación de Laplace. v y V corresponden a las funciones de t y s respectivamente. Ver Cap. 17.

Siendo V e I cantidades complejas pueden representarse por líneas radiales en el plano complejo. El voltaje y la corriente se muestran como proyecciones de líneas giratorias en la Fig. 3-18; sus transformadas, V e I , se muestran en la Fig. 3-19.*

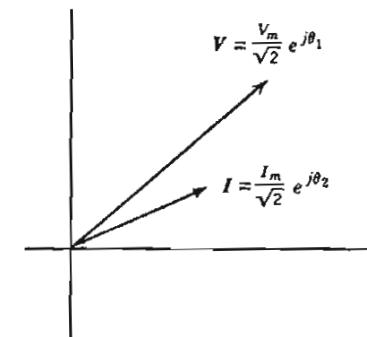


FIG. 3-19. Diagrama fasorial o de transformación

13. Análisis de circuitos con el álgebra compleja

Utilizando transformadas reduciremos las ecuaciones diferenciales a meras ecuaciones algebraicas. Esta es una gran ventaja. En el Cap. 2 tratamos con las ecuaciones diferenciales de los circuitos, expresando las corrientes y voltajes como funciones trigonométricas, senos o cosenos. Aun para circuitos pequeños la trigonometría es un poco cansada. Vamos ahora a desarrollar un método más fácil.

Empezaremos escribiendo la ecuación diferencial de un circuito. Consideraremos un circuito que contiene R , L y C en serie, como en la Fig. 3-20. (Este se consideró antes en la Sec. 2-23). La ecuación diferencial iguala el voltaje aplicado a la suma de los voltajes entre terminales de cada uno de los tres elementos del circuito (utilizando las Ecs. 1-5, 1-11 y 1-24):

$$v = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \quad (3-40)$$

Puesto que deseamos que la corriente sea senoidal, escribimos $i = \operatorname{Re}\{\sqrt{2} I e^{j\omega t}\}$ como en la Ec. 3-39. Con corriente senoidal, el vol-

* Excepto por el factor arbitrario de $\sqrt{2}$, la Fig. 3-19 es una instantánea de las líneas giratorias de la Fig. 3-18 tomada en el instante $t=0$. La línea que representa una transformada es similar a la que hemos llamado fasor.

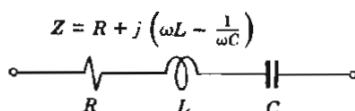


FIG. 3-20. Impedancia de elementos en serie

taje será, con seguridad, senoidal también y se puede escribir en la forma de la Ec. 3-38: $v = \operatorname{Re}\{\sqrt{2} Ve^{j\omega t}\}$. Estas expresiones se substituyen ahora en la Ec. diferencial 3-40, dando

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{\sqrt{2} Ve^{j\omega t}\} &= R \cdot \operatorname{Re}\{\sqrt{2} I e^{j\omega t}\} + L \frac{d}{dt} \operatorname{Re}\{\sqrt{2} I e^{j\omega t}\} \\ &\quad + \frac{1}{C} \int \operatorname{Re}\{\sqrt{2} I e^{j\omega t}\} dt \quad (3-41) \end{aligned}$$

Esta ecuación puede reacomodarse.* Puesto que V e I , definidas las Ecs. 3-38 y 3-39, no son funciones del tiempo, pueden manipularse como constantes para realizar la diferenciación e integración indicadas:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{\sqrt{2} Ve^{j\omega t}\} &= \operatorname{Re}\{\sqrt{2} RI e^{j\omega t}\} + \operatorname{Re}\left\{\sqrt{2} LI \frac{d}{dt} e^{j\omega t}\right\} \\ &\quad + \operatorname{Re}\left\{\sqrt{2} \frac{1}{C} I \int e^{j\omega t} dt\right\} \\ &= \operatorname{Re}\{\sqrt{2} RI e^{j\omega t}\} + \operatorname{Re}\{\sqrt{2} j\omega LI e^{j\omega t}\} \\ &\quad + \operatorname{Re}\left\{\sqrt{2} \frac{1}{j\omega C} I e^{j\omega t}\right\} \quad (3-42) \end{aligned}$$

Las componentes reales de las tres cantidades complejas del segundo miembro de la ecuación pueden sumarse ahora:

* Las reglas para las operaciones que incluyen solamente componentes reales se derivan fácilmente de las definiciones de las operaciones con complejos de la Sección 3 de este capítulo.

1. Adición y substracción: $\{A\} + \operatorname{Re}\{B\} = \operatorname{Re}\{A + B\}$.
2. Multiplicación y división por un número real: Si N es real, $N \operatorname{Re}\{A\} = \operatorname{Re}\{NA\}$.
3. Multiplicación y división por un número complejo: $(\operatorname{Re}\{A\})(\operatorname{Re}\{B\}) \neq \operatorname{Re}\{AB\}$. Es aparente de la Ec. 3-2 que el producto de las componentes reales no es igual a la componente real del producto.
4. Diferenciación con respecto a una variable real (como el tiempo) es el valor límite de la división por un número real. Por tanto $\frac{d}{dt} \operatorname{Re}\{A\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{d}{dt} A\right\}$.
5. La integración con respecto a una variable real (como el tiempo) es el valor límite de la suma de productos de un número complejo y un número real. Por tanto $\int \operatorname{Re}\{A\} dt = \operatorname{Re}\left\{\int A dt\right\}$.

$$\operatorname{Re}\{\sqrt{2} Ve^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\left\{\sqrt{2} \left(RI + j\omega LI + \frac{1}{j\omega C} I\right) e^{j\omega t}\right\} \quad (3-43)$$

Aquí la componente real de una cantidad compleja se iguala a la componente real de otra cantidad compleja. Estas componentes reales serán iguales si las cantidades complejas son iguales,* así tenemos

$$\sqrt{2} Ve^{j\omega t} = \sqrt{2} \left(RI + j\omega LI + \frac{1}{j\omega C} I\right) e^{j\omega t} \quad (3-44)$$

La ecuación es ahora algebraica en lugar de diferencial. La transformación se completa dividiendo ambos miembros de la ecuación entre $\sqrt{2} e^{j\omega t}$. La ecuación cesa de relacionar funciones de tiempo e incluye solamente constantes:

$$V = RI + j\omega LI + \frac{1}{j\omega C} I = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) I \quad (3-45)$$

Aquí tenemos una relación simple y usual entre la transformada del voltaje, la transformada de corriente y un grupo de constantes del circuito que se llama *impedancia*.

14. Impedancia compleja

Por definición, la impedancia compleja es la razón de V a I . En la Ec. 3-45 es la cantidad entre paréntesis. El símbolo Z se utiliza para la impedancia compleja y escribimos

$$Z = \frac{V}{I} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (3-46)$$

La Ec. 3-45 se escribe como

$$V = ZI \quad (3-47)$$

y nos da una relación entre el voltaje y la corriente alterna que es tan simple como la ley de Ohm. En efecto, es llamada algunas veces "ley de Ohm para la corriente alterna". Se verá, de la Ec. 3-46, que la

* Para que la Ec. 3-43 sea válida en todo tiempo y no siendo V , I , R , L , C y ω funciones del tiempo, la Ec. 3-44 es necesaria, así como suficiente. Interpretando geométricamente, si dos líneas de longitud constante giran a la misma velocidad constante y sus proyecciones sobre un eje fijo son siempre iguales, entonces las dos líneas deberán ser iguales una a otra; por tanto la Ec. 3-44 es necesaria.

Para ayudar a visualizar, la Ec. 3-43 puede interpretarse como igualando las proyecciones de las líneas que giran en el plano complejo, la Ec. 3-44 iguala a las líneas giratorias mismas y la Ec. 3-45 iguala instantáneas de las líneas giratorias.

impedancia Z es una cantidad compleja* con una componente real igual a la *resistencia* y una componente imaginaria igual a la *reactancia* del circuito.

Z tiene varios equivalentes comunes, algunos de los cuales se recopilaron aquí como una referencia conveniente:

$$\begin{aligned} Z &= |Z| e^{j\phi} = |Z| \angle \phi = \sqrt{R^2 + X^2} \angle \tan^{-1} \frac{X}{R} = R + jX \\ &= \frac{V}{I} = \frac{|V| e^{j\theta_1}}{|I| e^{j\theta_2}} = \frac{|V|}{|I|} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{|V|}{|I|} e^{j\phi} = \frac{|V|}{|I|} \angle \phi \end{aligned} \quad (3-48)$$

15. Ejemplos

EJEMPLO 1. *Impedancia inductiva.* La resistencia de una bobina de alambre es de 1.50 ohms y su inductancia de 5.30 milihenrys. Ver Fig. 3-21a. (a) ¿Cuál es su impedancia a una corriente de 60

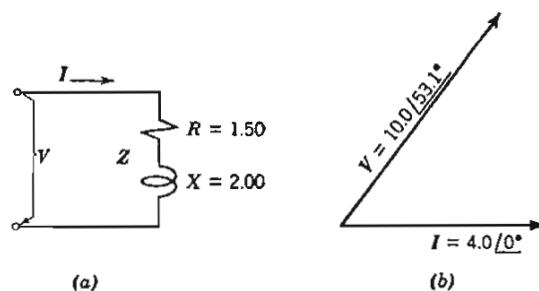


FIG. 3-21. Diagrama de transformadas de un circuito inductorivo

cps? (b) Si la corriente a través de la bobina es $i = 5.66 \cos \omega t$ amperes. ¿Cuál es el voltaje terminal?

SOLUCIÓN. (a) La resistencia es de 1.50 ohms. La reactancia, ωL , a 60 cps es $5.30 \cdot 10^{-3} \cdot 2\pi \cdot 60 = 2.00$ ohms. La impedancia es por tanto

$$Z = R + jX = 1.50 + j2.00$$

* Nótese particularmente que Z es la razón de las cantidades complejas V e I y que no es la razón de las cantidades reales v e i . No hay duda de que la razón de los valores reales instantáneos del voltaje y la corriente, v e i , podrían calcularse, pero no es la impedancia, sino alguna función peculiar con respecto al tiempo con muy poco interés y sin uso.

La impedancia será más usual en la forma polar:

$$Z = \sqrt{(1.50)^2 + (2.00)^2} / \tan^{-1}(X/R) = 2.50/53.1^\circ$$

(b) Para encontrar el voltaje, primero encontramos la transformada de la corriente dada a través de la bobina. I_m de la corriente dada es 5.66; su ángulo de fase es cero. Por la Ec. 3-39, la transformada es

$$I = \frac{5.66}{\sqrt{2}} e^{j0} = 4.00/0^\circ$$

La Ec. 3-47, la "ley de Ohm para la corriente alterna", nos da ahora la transformada del voltaje:

$$V = ZI = (2.50/53.1^\circ)(4.00/0^\circ) = 10.0/53.1^\circ$$

Esta transformada del voltaje se muestra en la Fig. 3-21b. La onda actual de voltaje alterno se encuentra aplicando la Ec. 3-38. Puesto que la magnitud de V es 10.0, $V_m = \sqrt{2} \cdot 10.0 = 14.14$. El ángulo de V es 53.1 grados. Por tanto

$$v = 14.14 \cos(\omega t + 53.1^\circ)$$

EJEMPLO 2. Un circuito (Fig. 3-22) tiene 5 ohms de resistencia y 5 ohms de reactancia inductiva en serie. Encontrar la corriente, siendo el voltaje conocido de

$$v = \sqrt{2} \cdot 100 \cos \omega t$$

SOLUCIÓN. El primer paso es encontrar V , la transformada del voltaje. Conociendo v , podemos usar la Ec. 3-38 para escribir V :

$$V = 100e^{j0} = 100/0^\circ$$

A continuación se escribe la impedancia compleja. Puesto que $Z = R + jX$,

$$Z = 5 + j5 = 7.07/45^\circ$$

Aplicando la "ley de Ohm para la corriente alterna", Ec. 3-47,

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{100/0^\circ}{7.07/45^\circ} = 14.14/-45^\circ$$

como se muestra en la Fig. 3-22.

Esta es la transformada de la corriente. La corriente actual se encuentra entonces utilizando la Ec. 3-39 para escribir

$$i = \sqrt{2} \cdot 14.14 \cos(\omega t - 45^\circ)$$

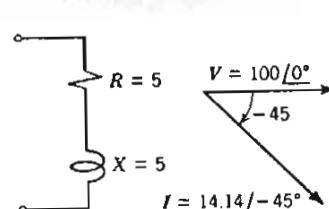


FIG. 3-22. Circuito y diagrama de las transformadas

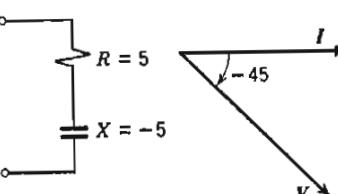


FIG. 3-23. Circuito capacitivo

EJEMPLO 3. Un circuito (Fig. 3-23) tiene una resistencia de 5 ohms y una reactancia capacitativa en serie de -5 ohms. La corriente puede representarse por su transformada $I = 8/0^\circ$. Encontrar la transformada del voltaje terminal.

SOLUCIÓN.

$$Z = R + jX = 5 - j5 = 7.07 \angle -45^\circ$$

$$V = ZI = (7.07)(8.0) \angle -45^\circ = 56.6 \angle -45^\circ$$

(No llevamos la solución tan lejos como para encontrar el voltaje instantáneo v , sino que paramos en V).

Nos familiarizaremos tanto con V e I en las páginas posteriores, que empezaremos a llamarlos voltaje y corriente. Nos contentaremos al resolver lo relativo a la corriente, en llegar hasta I y no insistir en escribir una expresión para i , o en aceptar V por v . Por el momento, sin embargo, es bueno recordar cuidadosamente que V e I son transformadas del voltaje y la corriente actuales, con los que se relacionan según las Ecs. 3-38 y 39.

EJEMPLO 4. En la Sec. 2-24, se encontró la impedancia para un circuito consistente de $R = 8.00$ ohms, $L = 2.38$ milihenrys y $C = 14.14$ microfarads, en serie. Repitamos el cálculo en notación compleja. La frecuencia es de 500 ciclos por segundo.

SOLUCIÓN. La impedancia total es:

$$\begin{aligned} Z &= R + j(\omega L - 1/\omega C) \\ &= 8.00 + j\left(2\pi \cdot 500 \cdot 2.38 \cdot 10^{-3} - \frac{10^6}{2\pi \cdot 500 \cdot 14.14}\right) \\ &= 8.00 + j(7.50 - 22.5) = 8.00 - j15.0 = 17.0 \angle -61.9^\circ \end{aligned}$$

La impedancia de este circuito serie es predominantemente capacitiva. Nótese que el ángulo de una impedancia inductiva es positiva y que el de una impedancia capacitiva es negativo.

16. Otros circuitos

Ya hemos visto que los circuitos con menos de tres elementos pueden tratarse por simple omisión de términos innecesarios en la expresión de la impedancia. En la Ec. 3-46, los términos individuales son familiares. R es la resistencia del circuito. La cantidad entre paréntesis es la reactancia, siendo ωL la reactancia del elemento inductivo y $-1/\omega C$ la reactancia del elemento capacitivo (Ecs. 2-28 y 2-46, respectivamente).

Si no hay reactancia capacitativa en el circuito, el tercer término se desvanece simplemente, obteniendo

$$Z = R + j\omega L \quad (3-49)$$

Por otro lado, si no hay inductancia se omite el segundo término y

$$Z = R - j\frac{1}{\omega C} \quad (3-50)$$

Cuando se encuentra la impedancia para un circuito que incluye más de tres elementos en serie, R en la Ec. 3-46 puede ser la suma de algunas resistencias y L la suma de varias inductancias. C , sin embargo, no es la suma de las capacitancias en serie; las reactancias y no las capacitancias, se suman; y si C_1, C_2, \dots , están en serie, tenemos

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega C_2} + \dots \quad (3-51)$$

o se encuentra la capacitancia equivalente de

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots \quad (3-52)$$

(Algunos autores usan el término *elastancia* para la cantidad $1/C$.)

Si se conectan en *paralelo* elementos o ramas, la corriente total es la suma de las corrientes en las ramas. En la Fig. 3-24a, por ejemplo, la corriente a través de R y la corriente a través de Z sumadas dan la corriente total. La corriente total puede encontrarse calculando las corrientes de las dos ramas individualmente y sumándolas. Sin embargo, es más fácil calcular la transformada de la corriente de cada rama y sumar las transformadas que son meramente

números complejos, que calcular las corrientes que son función del tiempo, y entonces tener que sumar las funciones trigonométricas del tiempo.

La suma de las transformadas de las corrientes actuales es permisible porque estamos tratando con ecuaciones de diferenciales lineales. La transformada de la suma de dos corrientes es la suma de las transformadas de las corrientes. Los siguientes ejemplos nos mostrarán cómo se hace.

EJEMPLO 1. Conectar una resistencia de 3.00 ohms en paralelo con la bobina de la Fig. 3-21a, como se muestra en la Fig. 3-24a. La transformada del voltaje aplicado es 10.0 volts. Encontrar la corriente total.

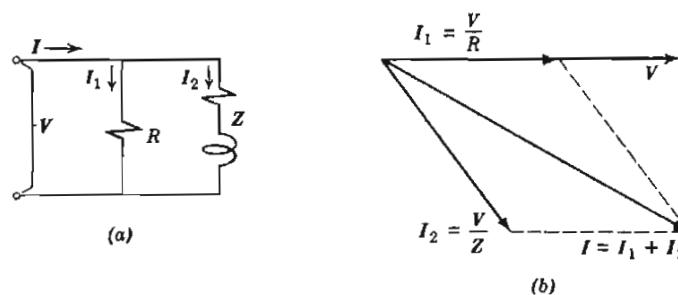


FIG. 3-24. Corriente en ramas paralelas y corriente total

SOLUCIÓN. El primer paso es escribir la transformada del voltaje aplicado: $V = 10/0^\circ$. En este problema, el voltaje se toma como cantidad de referencia y por consiguiente se asume un ángulo igual a cero. La transformada del voltaje se muestra en la Fig. 3-24b. El siguiente paso es calcular la corriente en la resistencia de 3.00 ohms:

$$I_1 = \frac{V}{R} = \frac{10/0^\circ}{3.00} = 3.33/0^\circ$$

A continuación, se calcula la corriente en la bobina. Utilizando la Ec. 3-47:

$$I_2 = \frac{V}{Z} = \frac{10/0^\circ}{2.50/-53.1^\circ} = 4.00/-53.1^\circ$$

Estas dos corrientes se indican en el diagrama de las transformadas. La corriente total se encuentra entonces sumando las dos transfor-

madas; las componentes real e imaginaria de cada una se calculan (por las Ec. 3-12) para sumarse:

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 = 3.33/0^\circ + 4.00/-53.1^\circ \\ &= (3.33 + j0) + (2.40 - j3.20) \\ &= (5.73 - j3.20) = 6.55/-29.2^\circ \end{aligned}$$

De este modo, sumando las transformadas de las corrientes de ambas ramas, se encuentra la transformada de la corriente total. La función de i con respecto al tiempo se puede escribir fácilmente si se desea. Se ve que la corriente atrasa el voltaje 29.2 grados.

EJEMPLO 2. El voltaje terminal aplicado al circuito de la Fig. 3-25 se representa por $V = 260/0^\circ$. La resistencia, reactancia inductiva, y reactancia capacitativa tienen los valores mostrados en ohms. Encontrar la transformada de la corriente total. Encontrar la impedancia de entrada.

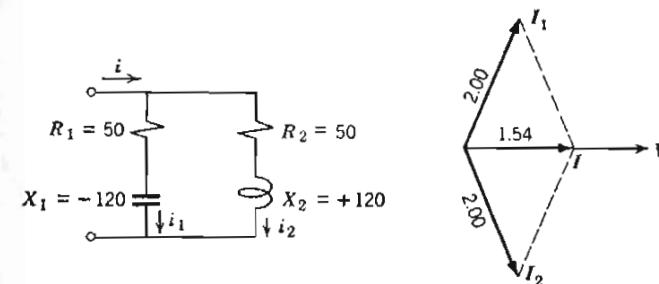


FIG. 3-25. Circuitos en paralelo

SOLUCIÓN.

$$Z_1 = R_1 + jX_1 = 50 - j120 = 130/-67.4^\circ$$

$$Z_2 = R_2 + jX_2 = 50 + j120 = 130/+67.4^\circ$$

$$I_1 = \frac{V}{Z_1} = \frac{260/0^\circ}{130/-67.4^\circ} = 2.00/67.4^\circ$$

$$I_2 = \frac{V}{Z_2} = \frac{260/0^\circ}{130/67.4^\circ} = 2.00/-67.4^\circ$$

Ver el diagrama de las transformadas en la Fig. 3-25.

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 = 2.00/\underline{67.4^\circ} + 2.00/\underline{-67.4^\circ} \\ &= (0.770 + j1.85) + (0.770 - j1.85) \\ &= 1.54 + j0 = 1.54/\underline{0^\circ} \end{aligned}$$

La impedancia de entrada es:

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{260/\underline{0^\circ}}{1.54/\underline{0^\circ}} = 169/\underline{0^\circ}$$

Un problema como este puede resolverse, por supuesto, sin utilizar cantidades complejas, pero la solución sería más complicada. Aun con circuitos relativamente simples, el uso del álgebra "compleja" es notablemente más fácil.

El resultado de este ejemplo es interesante por sí mismo. Cada rama del circuito lleva 2 amperes y, sin embargo, la corriente total es de solamente 1.54 amperes, menos que la corriente en cualquiera de las ramas. La Fig. 3-26 muestra las ondas de corriente i_1 , i_2 como

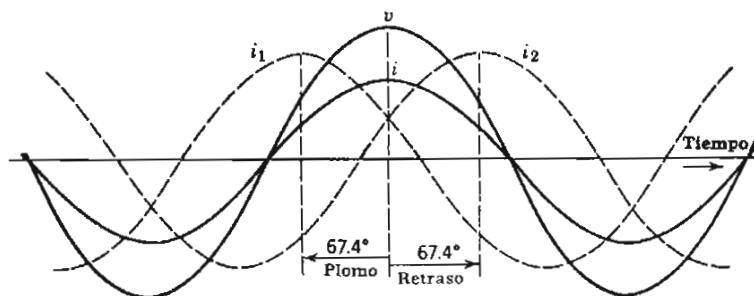


FIG. 3-26. Ondas de corriente y voltaje

líneas no continuas, una adelantada al voltaje 67.4° y la otra atrasada al voltaje 67.4° . Estas dos ondas de corriente se suman en cada instante de tiempo para dar la corriente total que se muestra como una línea llena. La amplitud de la onda de corriente total se ve que es menor que la amplitud de sus componentes.

17. Transformación de operaciones

En la Sección 13, una ecuación diferencial se transforma en una ecuación algebraica diferenciando e integrando las funciones expo-

nenciales del tiempo de voltaje y corriente. Se puede obtener un atajo para la misma ecuación transformada con la siguiente regla:

Escriba la ecuación diferencial para el circuito. Ahora escriba otra ecuación similar excepto que V reemplaza a v , I reemplaza a i , $j\omega$ reemplaza d/dt y $1/j\omega$ reemplaza a $\int \dots dt$. Esta segunda ecuación es la ecuación transformada.

El circuito serie de R , L , y C puede considerarse como ejemplo. Su ecuación diferencial es (Ec. 3-40):

$$v = RI + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \quad (3-53)$$

Siguiendo la regla del párrafo anterior, escribimos

$$V = RI + Lj\omega I + \frac{1}{C} \frac{1}{j\omega} I \quad (3-54)$$

y esta es la ecuación transformada 3-45.

18. Admitancia compleja

Aplicaremos este método de transformación a la ecuación del circuito con elementos de capacitancia, inductancia y resistencia (o conductancia) conectados en paralelo como en la Fig. 3-27. Para

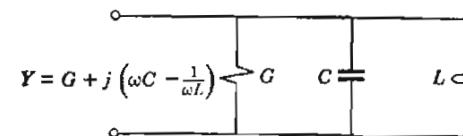


FIG. 3-27. Elementos en paralelo

esta conexión en paralelo, la ecuación diferencial se basa en la ley de Kirchhoff de corriente:

$$i = Gv + C \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} \int v dt \quad (3-55)$$

(Los tres términos del segundo miembro provienen de las Ecs. 2-22a, 2-30 y 2-11a, respectivamente). Ahora vamos a seguir la regla que se acaba de dar, que convierte automáticamente la Ec. 3-55 en

$$I = GV + j\omega CV + \frac{1}{j\omega L} V \quad (3-56)$$

y esta es la ecuación transformada deseada.*

En la discusión de este circuito de elementos en paralelo es conveniente definir la admitancia compleja. La definiremos como $Y = I/V$. En la Ec. 3-56.

$$Y = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \quad (3-57)$$

y la Ec. 3-56 puede escribirse

$$I = YV \quad \text{o} \quad Y = \frac{I}{V} \quad (3-58)$$

La componente *real* de la admitancia es la conductancia G . La componente *imaginaria* de la admitancia es la susceptancia. Llamando B a la susceptancia, como en el Cap. 2, $B = (\omega C - 1/\omega L)$ y la Ec. 3-57 puede escribirse

$$Y = G + jB \quad (3-59)$$

La Ec. 3-57 es una expresión para la admitancia de un circuito con G , C y L en paralelo. Si solamente uno o dos de los tres elementos se encuentran presentes, la fórmula se simplifica correspondientemente; si algunos elementos de una clase se conectan en paralelo pueden combinarse. Nótese que en esta conexión en paralelo la L total *no* se encuentra sumando los diferentes valores de L , más bien la $1/L$ total se encuentra sumando los diferentes valores de $1/L$:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots \quad (3-60)$$

Es especialmente importante que cada rama de la Fig. 3-27 contenga una sola clase de parámetro. Si una rama fuera una bobina con resistencia e inductancia, la Ec. 3-57 para la admitancia *no* sería aplicable directamente.

* Que esta ecuación transformada es correcta, puede verificarse sustituyendo las Ecs. 3-38 y 3-39 para voltaje y corriente en la ecuación diferencial y simplificando como antes, o se puede verificar en general el rigor de la transformación de operaciones, de una vez por todas.

La transformación de una ecuación diferencial a una ecuación algebraica nos ayuda cuando, en teoría de la corriente alterna, se encuentra una nueva situación. En la Sección 12-1 de este libro, las ecuaciones que incluyen inductancia mutua son transformadas. Las ecuaciones para líneas de transmisión se transforman similarmente en la Pág. 5. (Nota) de *Líneas de Transmisión Eléctrica*; (Referencia 5). Las ecuaciones de guía de ondas se transforman en la Pág. 208 de *Ondas Eléctricas* (Referencia 2). La misma transformación se considera en la Sección 2 del Cap. X de *Corrientes Eléctricas Transitorias* (Referencia 6).

La admitancia de un circuito se relaciona obviamente con la impedancia del circuito. Si todo lo que es visible de un circuito es un par de terminales, podemos aplicar voltaje a las terminales y medir la corriente resultante. La razón de la corriente al voltaje es la admittance de entrada del circuito (Ec. 3-58). Pero la razón del voltaje a la corriente es la impedancia de entrada (Ec. 3-46). Claramente esta admittance e impedancia son recíprocas; esto es, cuando hablamos de admittance e inductancia de entrada de un circuito dado.

$$Y = \frac{1}{Z} \quad (3-61)$$

Esta muy importante relación se utilizará continuamente de ahora en adelante.

10. Ejemplos

Ejemplos adicionales mostrando el uso de la admittance y la impedancia se darán a continuación.

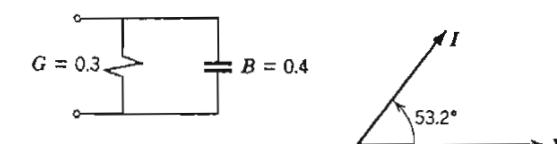


FIG. 3-28. Circuito y diagrama de las transformadas

EJEMPLO 1. Encontrar la admittance del circuito de la Fig. 3-28. El voltaje aplicado se representa por $V = 10/0^\circ$; encontrar la corriente.

SOLUCIÓN

$$Y = G + jB = 0.3 + j0.4 = 0.5/53.2^\circ$$

$$I = VY = (10/0^\circ)(0.5/53.2^\circ) = 5.0/53.2^\circ$$

Nótese que la corriente adelanta al voltaje, como era de esperarse en un circuito capacitivo.

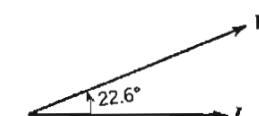
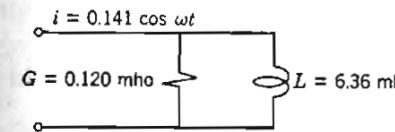


FIG. 3-29. Un circuito y su diagrama de las transformadas

EJEMPLO 2. La corriente al circuito de la Fig. 3-29 es $i = 0.141 \cos \omega t$. La frecuencia es 500 cps, haciendo $\omega = 3141$. Encontrar el voltaje terminal necesario (magnitud y ángulo de fase), para los valores de inductancia y resistencia indicados.

SOLUCION. Para encontrar el voltaje, encontramos primero \mathbf{Y} . Para esta conexión en paralelo \mathbf{Y} se encuentra sumando G de la resistencia y jB del inductor. Pero $B = -1/\omega L$ (Ecs. 2-50 y 3-60), así que

$$B = -\frac{1}{(3141)(6.36)10^{-3}} = -0.050$$

$$\mathbf{Y} = G + jB = 0.120 - j0.050 = 0.130/-22.6^\circ$$

Entonces, según la Ec. 3-58, $\mathbf{V} = \mathbf{I}/\mathbf{Y}$. \mathbf{I} se encuentra a partir de i (Ec. 3-39):

Por tanto

$$i = 0.141 \cos \omega t \quad \mathbf{I} = 0.100/0^\circ$$

entonces

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{Y}} = \frac{0.100/0^\circ}{0.130/-22.6^\circ} = 0.769/22.6^\circ$$

Esta es la transformada \mathbf{V} y su función con respecto al tiempo v es

$$v = \sqrt{2}(0.769) \cos(\omega t + 22.6^\circ)$$

(Nótese que el ángulo de fase se expresa en grados y debemos, por tanto, entender que ωt son grados también.)

Esta v es el voltaje que íbamos a determinar. La solución se lleva al final, encontrando la función actual del voltaje con respecto al tiempo en lugar de detenernos como es más usual en el cálculo de la transformada $\mathbf{V} = 0.769/22.6^\circ$.

EJEMPLO 3. En el circuito de la Fig. 3-30, encontrar la admitancia de entrada en las terminales mostradas y también la impedancia de entrada.

SOLUCION. La admitancia no se encuentra sumando simplemente los parámetros de los elementos en paralelo como en los ejemplos previos. Abordemos el problema utilizando la definición $\mathbf{Y} = \mathbf{I}/\mathbf{V}$; podemos asumir un voltaje \mathbf{V} aplicado a las terminales y

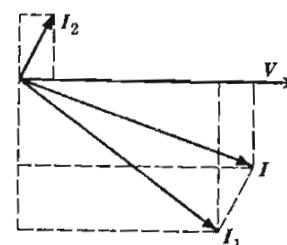
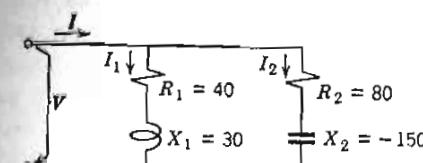


FIG. 3-30. Un circuito y su diagrama de las transformadas

encontramos \mathbf{I} . Conociendo del diagrama del circuito que $\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2$, el primer paso es encontrar la corriente en cada rama. Siendo \mathbf{V} conocido (o asumido), esto puede hacerse encontrando primero la impedancia en cada rama:

$$\mathbf{Z}_1 = R_1 + jX_1 = 40 + j30 = 50/36.9^\circ$$

$$\mathbf{Z}_2 = R_2 + jX_2 = 80 - j150 = 170/-61.9^\circ$$

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_1} = \frac{\mathbf{V}}{50/36.9^\circ} = 0.02\mathbf{V}/-36.9^\circ = (0.016 - j0.012)\mathbf{V}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_2} = \frac{\mathbf{V}}{170/-61.9^\circ} = 0.00588\mathbf{V}/61.9^\circ = (0.00277 + j0.00518)\mathbf{V}$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = (0.01877 - j0.00682)\mathbf{V} = (0.0200/-20.0^\circ)\mathbf{V}$$

$$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} = 0.0200/-20.0^\circ$$

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{\mathbf{V}}{(0.0200/-20.0^\circ)\mathbf{V}} = 50.0/20.0^\circ$$

Y y **Z** se llaman admitancia e impedancia de *entrada* o admitancia e impedancia *terminales*; son razones entre corriente y voltaje en las terminales de entrada.

Un diagrama de las transformadas muestra la \mathbf{V} asumida y la corriente resultante. Es siempre una buena práctica bosquejar un diagrama cuando se trabaja con cantidades de corriente alterna.*

* Aparte de otras ventajas, el bosquejo nos asegura contra errores serios. Al trabajar este ejemplo particular el autor invirtió un signo en la solución algebraica y solamente lo captó cuando el diagrama mostró una discrepancia obvia con el resultado numérico.

EJEMPLO 4. Encontrar la impedancia terminal de cada uno de los circuitos de la Fig. 3-31. Trace la impedancia y también la admitancia en el plano complejo.

SOLUCION. El primer circuito es una conexión en serie y su impedancia es por tanto

$$Z_1 = R + jX = 2.0 + j1.5 = 2.5 / 36.9^\circ$$

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{2.5 / 36.9^\circ} = 0.40 / -36.9^\circ$$

El segundo circuito es una conexión en paralelo. Su admitancia es

$$Y_2 = G + jB = 0.32 - j0.24 = 0.40 / -36.9^\circ$$

$$Z_2 = \frac{1}{Y_2} = \frac{1}{0.40 / -36.9^\circ} = 2.5 / 36.9^\circ$$

Se verá que los dos circuitos, aunque físicamente distintos completamente, tienen la misma impedancia y admitancia. Estas están trazadas como cantidades complejas en la Fig. 3-31.

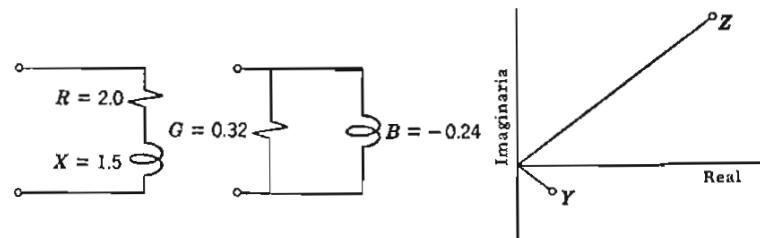


FIG. 3-31. Circuitos diferentes con impedancias iguales

Deberá notarse particularmente que la impedancia y la admitancia, aunque son cantidades complejas, no representan funciones variables senoidalmente del tiempo como lo hacen V e I . El diagrama de la Fig. 3-30 puede visualizarse como girando a velocidad sincrónica; los valores instantáneos del voltaje y la corriente se representan entonces por las proyecciones de las cuatro líneas sobre el eje fijo; las cuatro líneas giran juntas, relacionadas rígidamente una a otra como los rayos de una rueda (ver Fig. 3-3). Z y Y no hacen

nada de esta clase y pueden ser trazadas en un plano complejo, como en la Fig. 3-31, pero a diferencia de los fasores que representan voltaje y corriente, ellos no giran y no representan funciones senoidales del tiempo.

20. Conexiones equivalentes serie y paralelo

La solución anterior muestra un ejemplo numérico de una relación general. Un circuito de elementos conectados en paralelo siempre puede encontrarse que es equivalente (a una frecuencia) a una conexión serie y viceversa. Para determinar la relación general, encontramos G y B de una conexión en paralelo que nos dé la misma impedancia terminal que una conexión serie de R y X conocidas.

Refiriéndonos a la Fig. 3-32, la impedancia del circuito con R y X en serie es

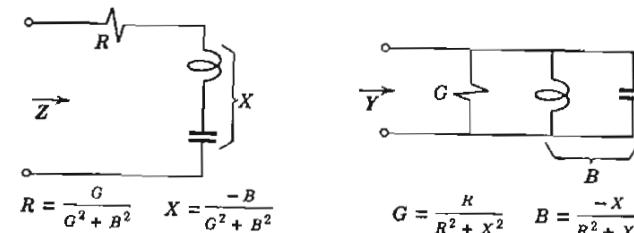


FIG. 3-32. Equivalentes serie y paralelo

$$Z = R + jX \quad (3-62)$$

Su admitancia es por tanto

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} \quad (3-63)$$

Pero con el circuito conectado en paralelo:

$$Y = G + jB \quad (3-64)$$

Para que los dos circuitos sean iguales sus Y deben ser iguales. Por tanto

$$G + jB = \frac{1}{R + jX} \quad (3-65)$$

Dos cantidades complejas son iguales si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias también. Las componentes real e

imaginaria del primer miembro de la Ec. 3-65 son aparentes, pero necesitamos encontrar las componentes real e imaginaria del segundo miembro. Esto se hace por racionalización (como en la Ec. 3-4): se multiplican el numerador y el denominador por $R - jX$ (el conjugado del denominador) para dar

$$G + jB = \frac{R - jX}{(R + jX)(R - jX)} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} \quad (3-66)$$

Igualando las partes reales y las imaginarias:

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2}$$

y

$$X = -\frac{B}{G^2 + B^2}$$

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad (3-67)$$

$$B = \frac{-X}{R^2 + X^2} \quad (3-68)$$

De este modo hemos encontrado G y B del circuito paralelo en función de R y X de la conexión serie equivalente. La solución puede, por supuesto, cambiarse de modo de obtener los valores de R y X , que hacen un circuito serie equivalente a una conexión en paralelo con G y B conocidas. Los valores resultantes de R y X están dadas en la Fig. 3-32.

Diversas conclusiones pueden deducirse de las Ecs. 3-67 y 3-68. En la conexión en paralelo, G depende tanto de R como de X , del circuito serie.* B también depende, tanto de R como de X . Inversamente R depende de G y B y X también de G y B .

R es siempre un número positivo; G es también positivo siempre. Si X es positivo (como para la reactancia inductiva de una bobina), B debe ser negativo; esto significa que si el elemento reactivo en el circuito serie es una reactancia *inductiva*, el elemento correspondiente en el circuito paralelo equivalente, debe ser *inductivo* también.

* No es verdad que esta R es recíproca a esta G ; no hay ninguna razón por la que debería serlo, porque R y G se aplican a diferentes resistencias. Una es en el circuito serie y otra en el circuito en paralelo, de la Fig. 3-32.

Es verdad que R y G de una resistencia pura única, son recíprocas. También es verdad que X y B de un inductor puro único (sin pérdidas) o capacitor, son recíprocos cambiados de signo (Ecs. 2-46 y 2-50). Pero estas relaciones recíprocas, solamente son verdaderas cuando las letras se refieren a elementos ideales aislados. Pero si una bobina tiene resistencia e inductancia, no es correcto decir que G de la bobina es igual a $1/R$ de la misma o que su B es igual a $-1/X$.

Para circuitos equivalentes serie y paralelo, la admittance es la reciproca de la impedancia. Pero la R de uno y la G del otro, la X del uno y la B del otro, no tienen una simple relación reciproca. Están relacionadas por las Ecs. 3-67 y 3-68.

(para tener susceptancia negativa). Si por otro lado X fuera negativa (como para un capacitor), B en el circuito equivalente, tendría que ser positiva correspondiendo a una susceptancia capacitiva.

Finalmente, vemos que un circuito paralelo puede ser equivalente a un circuito serie solamente a una frecuencia. Puesto que X varía con la frecuencia, tanto los valores de G como los de B (en las Ecs. 3-67 y 3-68) variarán también con la frecuencia. Consecuentemente, aunque las Ecs. 3-67 y 3-68 son válidas matemáticamente a todas las frecuencias, un circuito físico hecho de una resistencia y un inductor conectados en paralelo, puede ser equivalente a un circuito serie existente solamente a una frecuencia.

21. Signo algebraico

La Tabla 3-1 se da para una referencia fácil cuando se trabaja con circuitos. Su propósito principal es mostrar de una ojeada el signo apropiado de las cantidades reactivas, de acuerdo con las definiciones dadas en este capítulo y en los precedentes. (Algunos autores usan un sistema diferente, pero la convención de signos dada aquí es consistente con los mejores usos y con el Standard Americano (referencia 7).

TABLA 3-1

	Inductor	Capacitor
Reactancia X :	ωL	$-\frac{1}{\omega C}$
Susceptancia B :	$-\frac{1}{\omega L}$	ωC
En serie:	$Z = R + jX = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$	
En paralelo:	$Y = G + jB = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$	

22. Ejemplo

Una bobina tiene una resistencia de 100 ohms y una inductancia de 0.050 henrys (Fig. 3-33). Encontrar la conductancia y susceptancia de la bobina a 500, 1 000 y 1 500 ciclos por segundo.

Este es un enunciado pobre del problema, pero su falta de explicación no es peor que la que a menudo se encuentra en la práctica;

la única interpretación razonable es: "encontrar la conductancia y susceptancia del circuito equivalente (conectado en paralelo)..."

G y B equivalente, se encuentran substituyendo los valores numéricos en las Ecs. 3-67 y 3-68:

$$G = \frac{100}{R^2 + X^2} \quad B = \frac{-2\pi f(0.050)}{R^2 + X^2}$$

$$R^2 + X^2 = (100)^2 + (2\pi \cdot 0.050)^2 f^2$$

El cálculo para las tres frecuencias especificadas se hace más fácilmente en forma tabular * como se muestra en la Tabla 3-2, los resultados aparecen como partidas ⑥ y ⑦. Para mostrar la variación de la conductancia y susceptancia equivalentes con la frecuencia, están trazadas en la Fig. 3-33c. Se verá que tanto G como B van disminuyendo conforme se incrementa la frecuencia, pero G lo hace más rápidamente.

Otras relaciones interesantes se ven cuando la razón de B a G se calcula y se traza, (será llamada Q en el Cap. 7) y cuando el

TABLA 3-2

Partida Operación Cantidad

①	2π(0.05)	①	$f = 500$	1000	1500
②	$(2\pi)^2$	②	$X = 157$	314	471
③	$(100)^2$	③	$X^2 = 2.47 \cdot 10^4$	$9.87 \cdot 10^4$	$22.2 \cdot 10^4$
④	$R^2 + X^2$	④	$R^2 = 1.00 \cdot 10^4$	$1.00 \cdot 10^4$	$1.0 \cdot 10^4$
⑤	$③ + ④$	⑤	$R^2 + X^2 = 3.47 \cdot 10^4$	$10.87 \cdot 10^4$	$23.2 \cdot 10^4$
⑥	$100/⑤$	⑥	$G = 28.8 \cdot 10^{-4}$	$9.21 \cdot 10^{-4}$	$4.30 \cdot 10^{-4}$
⑦	$-②/⑤$	⑦	$B = -45.2 \cdot 10^{-4}$	$-28.9 \cdot 10^{-4}$	$-20.3 \cdot 10^{-4}$

valor de la inductancia en el circuito paralelo equivalente, $-1/\omega B$, se encuentra.

La tabulación se continúa 2 renglones más para obtener estas cantidades.

$$\begin{array}{llll|l} ⑧ & |⑦/⑥| & Q = & 1.57 & 3.14 & 4.71 \\ ⑨ & -0.159/①⑦ & L' = & 0.0704 & 0.0550 & 0.0522 \end{array}$$

* El arreglo es altamente conveniente, siempre que un cálculo se haga varias veces con valores numéricos diferentes. Se reconocerá ésta, como una forma utilizada ahora para los computadores digitales programadores electrónicos, pero es y ha sido, un valioso medio de ahorrar tiempo en los cálculos ordinarios a mano. En la columna encabezada "operación", el asiento ③ + ④ significa que a la partida ③ se le sumará la partida ④, y 100/⑤ significa que 100 se dividirá entre la partida ⑤.

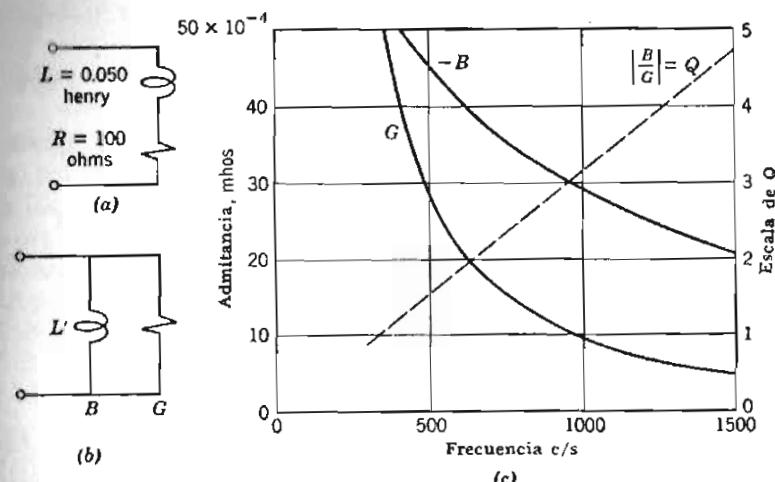


FIG. 3-33. Una bobina con L y R y el circuito paralelo equivalente a varias frecuencias

La razón de B a G se encuentra que es directamente proporcional a la frecuencia. La inductancia en el circuito equivalente se ve que se aproxima a 0.050, tendiendo a hacerse igual a la inductancia de la bobina actual cuando la frecuencia se hace muy grande, esto es de esperarse porque a una frecuencia suficientemente alta, el efecto por resistencia es insignificante y solamente el elemento inductivo es significativo, tanto en el circuito actual como en el equivalente.

23. Advertencia

A riesgo de ser tediosos, se puede hacer énfasis otra vez en lo extremadamente fácil que es el tomar la conductancia como la recíproca de la resistencia y la susceptancia como la recíproca de signo contrario de la reactancia, cuando estas simples relaciones no se aplican. Este error puede hacerse fácilmente, por ejemplo, si se pregunta con referencia al circuito paralelo de la Fig. 3-33b ¿"cuáles son la resistencia y reactancia de este circuito"? Para evitar problemas, rehagamos la pregunta: ¿"Cuáles son la resistencia y reactancia de un circuito serie equivalente a este circuito paralelo"? Cuando se ha comprendido completamente que R y G se refieren actualmente a elementos diferentes, en diferentes (pero equivalentes) circuitos, queda claro que no se puede esperar una simple relación recíproca.

Por esto, en los presentes capítulos donde estamos trabajando para familiarizarnos con las ideas de admitancia e impedancia: *siempre que usted piense en G y B, piense en elementos en paralelo; cuando usted piense en R y X, piense en elementos en serie.*

Es verdad que en trabajos posteriores *R* y *X* vendrán a significar las componentes real e imaginaria de *Z*, mientras que *G* y *B* las componentes de *Y*. Los signos algebraicos serán entonces manipulados sin que nos den interpretaciones físicas como elementos. Esto es, para el futuro y la manipulación correcta entonces seguirá automáticamente a la interpretación correcta de ahora.

24. Sumario

Este capítulo empieza mostrando que la proyección de una línea giratoria sobre un eje fijo es una cantidad variable senoidalmente.

Entonces, se presenta el álgebra de las cantidades complejas. Se definen las operaciones. Se desarrolla el teorema de Euler. Se presenta la forma exponencial de las cantidades complejas. Se obtiene una expresión matemática para una línea giratoria en el plano complejo.

Expresando el voltaje y la corriente alternos en forma exponencial, se transforman las ecuaciones diferenciales de los circuitos en ecuaciones algebraicas. Se utilizan cantidades complejas llamadas *transformadas* del voltaje y la corriente. Se muestra un método rápido de transformar ecuaciones. Se presentan, la *impedancia* y la *admitancia* complejas. Se muestra que la impedancia de un circuito serie es $R + jX$ y que la admitancia de un circuito paralelo es $G + jB$.

Se consideran los circuitos equivalentes de elementos en serie (*R* y *X*) y de elementos en paralelo (*G* y *B*). Se presenta una útil forma de tabulación para los problemas aritméticos.

En la discusión de las transformadas se presenta un factor de $\sqrt{2}$ en las matemáticas para dar un valor "efectivo". El siguiente capítulo concierne principalmente con la explicación de esta $\sqrt{2}$.

PROBLEMAS

1. Efectuar las siguientes operaciones. Para cada una mostrar las cantidades complejas en un bosquejo del plano complejo. Para sumas y restas indíquense los paralelogramos. § 3

- a. $(1 + j3) + (3 + j1)$
- b. $(2 - j4) + (3 + j4)$
- c. $(-3 + j5) - (1 + j6)$
- d. $(4 + j3) + (4 + j3)^*$
- e. $(1 + j3)(3 + j1)$
- f. $(2 - j4)(3 + j4)$

$$g. \frac{22 + j6}{3 + j2}$$

$$h. \frac{8 + j6}{-3 - j1}$$

2. Efectuar las siguientes operaciones. Dibujar bosquejos como en el Problema 1. § 3

- a. $(2 + j5) + (1 - j1)$
- b. $(3 - j2) + (-2 - j3)$
- c. $(-4 - j2) - (-3 + j1)$
- d. $(2 - j5) + (2 - j5)^*$
- e. $(2 + j5)(1 - j2)$
- f. $(3 - j2)(3 - j2)^*$

$$g. \frac{174}{4 - j10}$$

$$h. \frac{-6 + j2}{-2 + j4}$$

$$\frac{20 + 20j}{20} = 1 + j1$$

3. Cambie las siguientes cantidades complejas de la forma rectangular a la forma polar. (Tres por lo menos se harán por el método dado en la nota al pie de la página, al final de la Sección 4; los otros pueden hacerse por este método o cualquier otro). § 4

$$a. -4 + j3 \quad b. 5e^{j\theta} \quad c. -5 + j12 \quad d. 13e^{j\theta} \quad e. -60 + j11 \quad f. 8 + j15$$

$$g. 7 - j24 \quad h. 8e^{j\theta} \quad i. -40 - j9 \quad j. 15e^{j\theta}$$

$$k. \frac{a^2 + b^2}{a} \left[\cos \left(\tan^{-1} \frac{b}{a} \right) + j \sin \left(\tan^{-1} \frac{b}{a} \right) \right]$$

4. (a) ¿Cuántas raíces cuartas complejas diferentes tiene una cantidad? (b) Encontrar y trazar todos los valores de $\sqrt[4]{5 + j8.66}$. (c) Encontrar y trazar todos los valores de $\sqrt[4]{14.14 - j14.14}$. § 8

5. Utilizando los resultados del Problema 3 encontrar los siguientes productos: $(-4 + j3)(-5 + j12)(7 - j24)(-40 - j9)$. § 7

6. Utilizando los resultados del Problema 3 encontrar los siguientes productos: $(-60 + j11)(8 + j15)(12 - j35)(-16 - j63)$. § 7

7. Encontrar todos los valores complejos diferentes de (a) $\sqrt[4]{-100}$; (b) $\sqrt[4]{j35}$. Decir en (a) y (b) qué raíces son conjugadas de cada una. § 8

8. (a) Dar las componentes real e imaginaria de *A* si $A = (5 + j5)^3$. (b) Dar en forma polar los valores complejos diferentes de *W* si $W = \sqrt[4]{j32}$. Mostrar los valores calculados en un bosquejo del plano complejo. Decir cuáles son conjugados de cada uno. § 8

9. Demostrar que $e^{j\pi/2} = j1$ o que no lo es. Esta es una demo-

tracción estrictamente algebraica sin referirse a líneas, ángulos o planos.

§ 5

10. Calcular los valores numéricos de e^{jx} partiendo de las series (Ec. 3-17) para los siguientes valores de x : $x = \frac{1}{2}, 1, \pi/2, 2$. Expressar los resultados en forma rectangular y polar. (Utilíicense suficientes términos de las series para dar el resultado correcto con 1% de aproximación.)

§ 5

11. Repítase el Problema 10 para $x = \pi/6, 2\pi/6, 3\pi/6, 4\pi/6$.

§ 5

12. Encontrar las componentes real e imaginaria de $\ln(Ae^{j\alpha})$. (A y α son reales; \ln significa el logaritmo natural.)

§ 8

13. Encontrar las componentes real e imaginaria de $(10 - j5)/(-3 + jx)$.

§ 3

14. En la Ec. 2-35 en lugar de utilizar formas trigonométricas para la corriente y el voltaje, utilíicense las formas exponenciales $i = \operatorname{Re}\{\sqrt{2}Ie^{j\omega t}\}$ y $v = \operatorname{Re}\{\sqrt{2}Ve^{j\omega t}\}$. Resuélvase la ecuación para V/I .

§ 14

15. En la Ec. 2-39 en lugar de utilizar las formas trigonométricas para la corriente y el voltaje utilíicense las formas exponenciales dadas en el Problema 14. Resuélvase la ecuación para V/I .

§ 14

16. El voltaje $v = 250 \cos(377t)$ es aplicado a un circuito de R y L en serie $R = 7.00$ ohms, $L = 63.7$ milihenrys. Encontrar la transformada del voltaje, la impedancia compleja, la transformada de la corriente, e i .

§ 15

17. Repetir el problema 16; la resistencia del circuito se incrementó a 10.0 ohms.

§ 15

18. La resistencia y el inductor del problema 16 se reconectaron en paralelo, en lugar de en serie. Se aplica el mismo voltaje. Encontrar i .

§ 16

19. Repetir el problema 18; la resistencia se ha incrementado a 10.0 ohms.

§ 16

20. Una resistencia de 0.50 mho se conecta en paralelo con un capacitor de 0.191 microfads (como en la Fig. 2-12). Encontrar la combinación serie equivalente de R y C , a 1.0, 1.5 y 2.0 megaciclos.

§ 22

21. Los siguientes tres elementos están en serie: $R = 17$ ohms, $L = 10.0$ milihenrys, $C = 27.7$ microfarads. Conectar dos elementos en paralelo, que sean equivalentes (igual impedancia de entrada) a 600 ciclos por segundo.

§ 22

4

Potencia Promedio y Corriente Efectiva

1. Corriente alterna efectiva

El significado de una unidad de corriente directa, un ampere, es bien conocido. Es una medida de la razón del paso de la electricidad. Aunque puede definirse para propósitos legales en función de la plata depositada electrolíticamente por una solución, mientras que desde el punto de vista científico se define en función del campo magnético que la corriente produce, el concepto es simple y no hay dudas acerca de la naturaleza de sí misma.

Una unidad de corriente alterna no se concibe tan fácilmente. En un circuito por el que circula corriente alterna, la corriente en realidad varía de instante en instante como se indica en la onda de la Fig. 4-1. ¿Cuál es la cantidad de corriente que se especifica?

Un modo de especificar la cantidad de corriente alterna es dar el valor máximo instantáneo I_m , o sea, la amplitud de la onda. Sin embargo, seguramente sería engañoso decir que el número de amperes de corriente alterna es igual a I_m , para una onda cuyas crestas alcanzarían I_m sólo momentáneamente cada medio ciclo y que no es de ningún modo equivalente a una corriente estacionaria o permanente que sea continuamente igual a este mismo valor.

Alguna forma de valor promedio de la onda de corriente podría sugerirse como una medida. Un promedio de una onda de corriente senoidal a través de un ciclo completo no indicaría nada, porque su

promedio es cero. La corriente es negativa tanto como es positiva. Sin embargo, la corriente promedio durante cualquier medio ciclo positivo puede calcularse y es $2I_m/\pi = 0.637 I_m$. ¿Es esta una medida deseable de la corriente alterna?

Para contestar a esta pregunta es necesario considerar el propósito al medir la corriente alterna. ¿Qué utilización le vamos a dar a esta medición? La respuesta es que deseamos encontrar qué es capaz de hacer la corriente. Esto debe expresarse usualmente en función de la potencia. Sea que la corriente alterna opere un receptor telefónico, un alta voz o un motor eléctrico, caliente una lámpara eléctrica o el filamento de un tubo al vacío, concernirá primariamente con su habilidad de efectuar un trabajo. También, la potencia es una medida de la dificultad de producir la electricidad y por tanto, determina cuánto debemos pagar por ella.

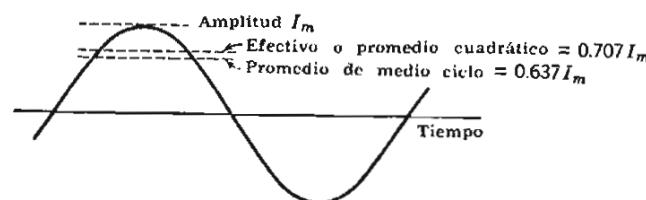


FIG. 4-1. Valores efectivos y promedio

Nosotros deseamos poder decir de una corriente alterna que tiene un valor efectivo que se expresa como un cierto número de amperes y que signifique que la potencia obtenible de esta corriente alterna es la misma que la potencia obtenible de un número igual de amperes de corriente directa. Antes de que esta definición se pueda completar, será necesario discutir la potencia.

2. Potencia

La potencia se define como la capacidad de efectuar un trabajo; es energía por unidad de tiempo; la potencia eléctrica se mide en watts y 1 watt es 1 joule por segundo.

La potencia eléctrica es el producto de la corriente por el voltaje * como en la Ec. 1-30:

* En general, la potencia es proporcional al producto del voltaje por la corriente. Para ser igual, como en la Ec. 4-1, las unidades deben ser un conjunto consistente. Watts, volts y amperes son un conjunto consistente. (Pero kilowatts, volts y amperes no lo son).

$$p = vi \quad (4-1)$$

Esta potencia proviene de un generador o de una batería. La energía electromagnética sigue el circuito y reaparece como energía calorífica en una resistencia, o como energía mecánica en un motor o altavoz, como luminescencia en una lámpara fluorescente, como energía química en una batería cargada o quizás en cualquier otra forma no eléctrica.*

Vamos a pensar específicamente en una resistencia. El voltaje entre sus terminales es v y la corriente a través de la resistencia es i en un instante particular. No tiene importancia que la corriente sea constante o variable; la potencia en este instante particular es $p = vi$. Por sustituciones obvias en esta expresión, la potencia puede escribirse en función de la corriente sólo o únicamente del voltaje:

$$p = vi = (iR)(i) = i^2 R \quad (4-2)$$

$$p = vi = v(v/R) = v^2/R \quad (4-3)$$

Si la corriente es alterna, esta ecuación se aplica a cada instante de la onda alterna. La Fig. 4-2 muestra una onda de corriente a través de una resistencia y la onda correspondiente de voltaje entre sus

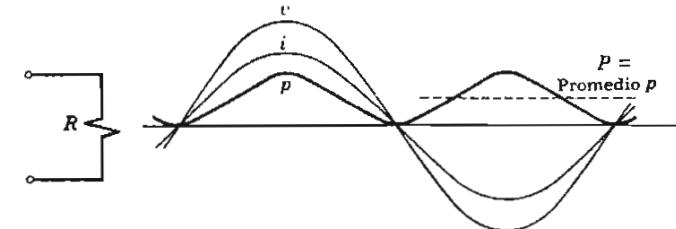


FIG. 4-2. Potencia promedio e instantánea en una resistencia

terminales. Multiplicando estas dos en cada instante, se obtiene la curva de potencia instantánea p . Se verá que la potencia varía entre $V_m I_m$ y cero.

* Para ser preciso, es necesario considerar que la parte del circuito en la que estamos interesados se encuentra dentro de una superficie cerrada imaginaria, que pasa a través de las terminales del circuito. El promedio de energía electromagnética del estado estacionario que entra a través de esta superficie se transforma a formas no electromagnéticas, como el calor, etc. (El campo de Poynting es aplicable; ver Referencia 2 o cualquier libro de teoría electromagnética). Si la potencia de la red va hacia afuera, existen generadores u otras fuentes dentro de la superficie cerrada. Ver American Standard, Referencia 8, 05.21.005 et seq.

3. Potencia promedio

La curva de la potencia instantánea tiene muy poco uso práctico y lo que realmente necesitamos es la potencia *promedio*. Si la potencia instantánea es

$$p = i^2 R \quad (4-4)$$

entonces la potencia promedio (que llamaremos P) es

$$P = \text{Promedio } p = \text{Promedio}(i^2 R) = (\text{Promedio } i^2) \cdot R \quad (4-5)$$

Esta expresión para la potencia promedio P incluye prominentemente el promedio de la corriente al cuadrado. Nótese que el promedio de i^2 no es la misma cosa que el cuadrado del promedio de i . La Fig. 4-3 muestra un ciclo de una onda de corriente alterna como una curva llena. La curva rayada muestra a i^2 . El valor de i^2 es positivo en cada instante porque el cuadrado es positivo tanto si la co-

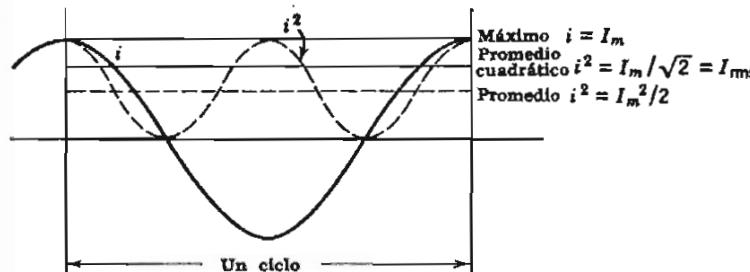


FIG. 4-3. Valores instantáneo y promedio de $i = I_m \cos \omega t$ (Dibujada para $I_m = 1$)

rriente es positiva como si es negativa. El promedio de i^2 a través de un ciclo está indicado por una recta horizontal rayada. El promedio de i a través de un ciclo por otro lado, es cero y el cuadrado del promedio de i es cero.

El valor promedio del cuadrado del voltaje es también importante. La Ec. 4-5 se basó en la Ec. 4-2 para la potencia en función de la corriente. Sin embargo, utilizando la Ec. 4-3 y expresando la potencia en una resistencia en función del voltaje,

$$P = \text{Promedio } p = \text{Promedio } (v^2/R) = (\text{Promedio } v^2)/R \quad (4-6)$$

Aquí la potencia promedio está expresada en función del promedio del cuadrado del voltaje.

4. Valores de la potencia promedio cuadrática

Nosotros deseábamos en la Sección 1 poder decir de una corriente alterna que tiene un valor efectivo, un cierto número de amperes, indicando que la potencia obtenible de esta corriente alterna es la misma que la potencia obtenible de un número igual de amperes de corriente directa. Puesto que la potencia de la corriente directa es $p = i^2 R$ (Ec. 4-2), deberíamos poder escribir una ecuación para la corriente alterna de la forma $P = I^2 R$. La pregunta es: ¿Podemos? Y, si podemos, ¿Qué es I ? La respuesta está dada por la Ec. 4-5: Podemos escribir $P = I^2 R$, si hacemos

$$I^2 = \text{Promedio } i^2 \quad (4-7)$$

entonces

$$I = \sqrt{\text{Promedio } i^2} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (4-8)$$

Esta I (que se distingue por ser una mayúscula itálica) es la raíz cuadrada del promedio del cuadrado de la corriente. Su valor está indicado por una recta horizontal en la Fig. 4-3. Se llama corriente promedio cuadrática o corriente *rms*, y algunas veces se utiliza el símbolo I_{rms} para indicarla. También se llama valor *efectivo* de la corriente. El punto importante es, que la potencia promedio para una resistencia, debida a una corriente periódica alterna unidireccional, de cualquier forma de onda es (según la Ec. 4-5):

$$P = I^2 R \quad o \quad P_{av} = I_{rms}^2 R \quad (4-9)$$

donde I se define como la Ec. 4-8.

Una medición similar se requiere para el voltaje efectivo, y se ve que el voltaje promedio cuadrático es la cantidad necesaria. Podemos escribir

$$P = V^2/R \quad o \quad P_{av} = V_{rms}^2/R \quad (4-10)$$

y la Ec. 4-6 indica que es correcto si definimos V como

$$V = \sqrt{\text{promedio } v^2} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \quad (4-11)$$

Este, entonces, es el voltaje efectivo o *rms*, algunas veces indicado por V_{rms} .

Queda aún otra pregunta. La Ec. 4-1 dice que $p = vi$. ¿Podemos escribir para la corriente alterna que $P = VI$, con V e I siendo las cantidades *rms* definidas por las Ecs. 4-11 y 4-8? Para demostrar que esto es verdad, consideremos primero que $v = iR$ y por tanto $v^2 = i^2 R^2$. Por tanto,

$$(v^2 \text{ promedio}) = (i^2 \text{ promedio})R^2$$

y obteniendo las raíces cuadradas,

$$\sqrt{(v^2 \text{ promedio})} = \sqrt{(i^2 \text{ promedio})} \cdot R$$

Esto nos da una forma de la ley de Ohm aplicada a una resistencia que incluye valores rms:

$$V = IR \quad \text{o} \quad V_{\text{rms}} = I_{\text{rms}}R \quad (4-12)$$

Ahora podemos escribir, combinando las Ecs. 4-9 y 4-12,

$$P = I^2R = (IR)I = VI \quad \text{o} \quad P_{\text{av}} = V_{\text{rms}}I_{\text{rms}} \quad (4-13)$$

Así, obtenemos tres expresiones sumamente usadas para la potencia consumida en una resistencia: las Ecs. 4-9, 4-10 y 4-13. Estas se aplican a la corriente de cualquier forma de onda o aun a la corriente directa y emplean los valores efectivos o rms de la corriente y el voltaje, definidos por las Ecs. 4-8 y 4-11.

5. Relaciones RMS para ondas senoidales

$J = \text{Fotowiz}$, $V = \text{Varowiz}$

Las Ecs. 4-8 y 4-11 definen los valores promedios cuadráticos de las ondas de cualquier forma. A continuación especificaremos acerca de ondas senoidales.

En la Fig. 4-2, se muestra una curva de potencia instantánea; tiene la apariencia de una senoide desplazada de doble frecuencia. Para ver que es también su verdadera forma, consideraremos que es una curva de $p = i^2R$. Sea $i = I_m \cos \omega t$. Según una identidad trigonométrica común:

$$p = i^2R = I_m^2(\cos \omega t)^2R = I_m^2R \cdot \frac{1}{2}(\cos 2\omega t + 1) \quad (4-14)$$

Esta es la expresión para la potencia instantánea mostrada por la curva de la Fig. 4-2.

La potencia promedio P puede ahora encontrarse por inspección. Puesto que el promedio de $\cos 2\omega t$ para cualquier número entero de ciclos es cero, este término desaparece al promediarse, quedando como expresión para la potencia promedio:

$$P = \frac{I_m^2}{2}R = \left(\frac{I_m}{\sqrt{2}}\right)^2R \quad (4-15)$$

Una comparación con la Ec. 4-9 muestra que la cantidad entre paréntesis es el valor efectivo o rms de la onda senoidal. Esto es, que para una onda senoidal solamente,

$$I_{\text{rms}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad \text{o} \quad I_{\text{max}} = \sqrt{2} I_{\text{rms}} \quad (4-16)$$

Ver Fig. 4-3.

El mismo resultado se puede lograr más formalmente como sigue: asúmase $i = I_m \cos \omega t$ como una onda senoidal típica. El cuadrado es $i^2 = I_m^2(\cos \omega t)^2$ e I_{rms}^2 , promedio de i^2 , se encuentra integrando con respecto al tiempo para un ciclo y dividiendo entre el tiempo de duración de un ciclo. El tiempo de duración de un ciclo, T , es $2\pi/\omega$. Por tanto

$$I_{\text{rms}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} I_m^2(\cos \omega t)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T A^2 dt. \\ = \frac{I_m^2 \omega}{2\pi} \left(\frac{\pi}{\omega}\right) = \frac{I_m^2}{2} \quad (4-17)$$

$$I_{\text{rms}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (4-18)$$

Esto es,

$$\text{Valor rms} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\text{valor máximo}) = 0.707 (\text{valor máximo}) \quad (4-19)$$

Esta relación debe llegar a sernos tan familiar como 2 por 2; se debe tener cuidado en no aplicarla nunca a ondas de forma no senoidal; error común.

Con una integración similar puede demostrarse que para una onda senoidal

$$\text{Promedio de medio ciclo} = \frac{2}{\pi} (\text{valor máximo}) = 0.637 I_m. \\ (\text{valor máximo}) \quad (4-20)$$

La razón del valor máximo al valor rms se llama algunas veces el factor de cresta, de pico o de amplitud. El factor de cresta puede encontrarse para una onda de cualquier forma. Para una onda senoidal es, según la Ec. 4-16 o 4-18,

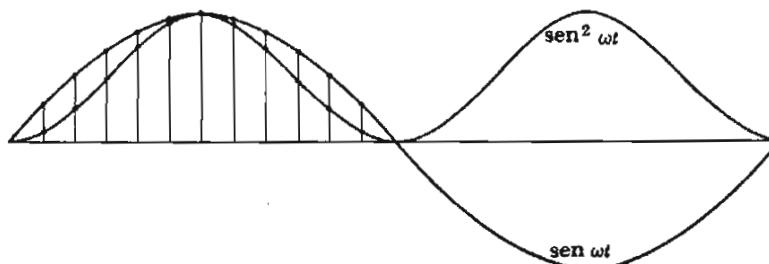
$$\text{Factor de cresta (onda senoidal)} = \sqrt{2} = 1.414 \quad \frac{I_m}{I_{\text{rms}}} \quad (4-21)$$

La razón del valor rms al valor promedio de medio ciclo se llama, a veces, *factor de forma*. Para una onda senoidal es, según las Ecs. 4-19 y 4-20,

$$\text{Factor de forma (onda senoidal)} = \frac{1/\sqrt{2}}{2/\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1.11 \quad (4-22)$$

Una comprobación numérica de estos valores de factor de cresta y factor de forma se obtiene de la razón de los promedios calculados con la Fig. 4-4.

El factor de cresta y el factor de forma pueden encontrarse para ondas de cualquier forma por integración o por algún proceso numérico de promediar. Sin embargo, excepto el factor de cresta de una onda senoidal, no son utilizados muy a menudo.



Grados	Ordenadas	Ordenadas al cuadrado
0	0.00000	0.00000
15	0.25882	0.06699
30	0.50000	0.25000
45	0.70711	0.50000
60	0.86603	0.75000
75	0.96593	0.93302
90	1.00000	1.00000
105	0.96593	0.93302
120	0.86603	0.75000
135	0.70711	0.50000
150	0.50000	0.25000
165	0.25882	0.06699
Promedio total rms	7.59578	6.00002
	0.63298	0.50000
		0.70711

FIG. 4-4. Promedio y rms de una función seno

6. Ejemplo numérico

Un cálculo numérico, aunque necesariamente aproximado, ayuda a aclarar el significado de estas varias relaciones. En la Fig. 4-4 se muestra una onda senoidal. Encontramos primero el promedio de esta función senoidal durante el medio ciclo positivo. No es posible por medios numéricos promediar *todas* las ordenadas de la curva, así que promediaremos las ordenadas de puntos separados por intervalos de 15 grados. La tabla debajo de la Fig. 4-4 nos da estas 12 ordenadas; la suma es 7.59578; el promedio obtenido dividiendo entre 12, es 0.633... Esta es una aproximación del valor exacto obtenido por integración y que es $2/\pi$ o 0.637... (Ec. 4-20.)

A continuación, elevemos al cuadrado cada una de las 12 ordenadas; los valores se dan en la tercera columna de la tabla. Estos valores están trazados y una curva que pase por éstos (curva de la función seno al cuadrado) tiene la misma forma que la curva de potencia instantánea en la Fig. 4-2. Ahora promediamos los valores al cuadrado; la suma de los cuadrados es 6.00002 y el promedio de los cuadrados es 0.50000. La raíz cuadrada del promedio (valor promedio cuadrático de la onda senoidal) es la raíz cuadrada de 0.50000 o 0.70711. Esto concuerda (en las 5 primeras cifras significativas) con el valor exacto de $1/\sqrt{2}$ de la Ec. 4-18.

Este cálculo muestra la diferencia entre el rms y la media. También ilustra un método numérico para encontrar el valor rms de una onda. Los resultados del cálculo confirman los valores numéricos previamente obtenidos por el análisis exacto de medio ciclo para los valores del promedio de medio ciclo y rms de una función senoidal.

7. Uso práctico de los valores rms

Los valores efectivos o rms del voltaje y la corriente son tan comúnmente usados, que siempre se sobreentiende que se refiere a ellos cuando se da un valor numérico para voltaje o corriente alternos. Si se establece que una corriente alterna es de 10 amperes, se entiende que ese 10 es su valor rms; si esta onda de corriente es senoidal su valor máximo es de 14.1 amperes. Un circuito de 120 volts se entiende que suministra un valor rms de 120 volts. Todos los voltímetros y amperímetros ordinarios para corriente alterna, están calibrados para indicar valores rms.

Los valores rms de voltaje y corriente también se usan casi siempre, en cálculos. Esto es tan común en efecto, que es usual omitir los subíndices de V_{rms} y I_{rms} en todos los cálculos ordinarios, escribiendo únicamente V e I para indicar valores efectivos rms.

La discusión anterior sobre potencia promedio estipuló que el promedio debe tomarse a través de un ciclo o algún número entero de ciclos. Esta es la única manera en que P pueda tener un significado exacto. En la práctica, sin embargo, estamos interesados usualmente en potencia promedio a través de un intervalo no especificado de tiempo. Excepto para intervalos extremadamente cortos de tiempo, esto no nos lleva a dificultades apreciables. Si el promedio práctico de la potencia se obtiene sobre un tiempo igual a algunos cientos de ciclos, el error posible por incluir la potencia de una fracción de un ciclo al final del intervalo; es casi despreciable.

Las mediciones físicas, como las efectuadas con un voltímetro, están hechas siempre sobre el tiempo de muchos ciclos y no se encuentran dificultades. Sin embargo, en cálculos, el significado exacto de P debe ser recordado. Es posible que el valor rms de medio ciclo, o un cuarto de ciclo, pueda ser el mismo que el del ciclo completo. Esto puede resultar por simetría, como en la onda senoidal de la Fig. 4-4, y frecuentemente es una ayuda en los cálculos. Pero básicamente el valor rms se obtendrá de algún número entero de ciclos.

8. Potencia en una inductancia

La potencia promedio en una inductancia es, en estado estacionario, cero. Esto está determinado por el siguiente cálculo.

Llámemos a la corriente i , que puede ser cualquier función de tiempo esto es, la corriente puede tener cualquier forma de onda. El voltaje entre terminales de la inductancia, es $L di/dt$. La potencia instantánea p es vi , e igual $(L di/dt)(i)$. Encontremos la potencia promedio a través de un ciclo; un ciclo es un intervalo de tiempo, que llamamos T , durante el cual la corriente puede tener cualquier forma de onda, pero en el que i debe tener el mismo valor al principio y al final del ciclo. Entonces

$$P = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T i \left(L \frac{di}{dt} \right) dt = \frac{L}{T} \int_{i=i_0}^{i_0} i di = \frac{L}{T} \left[\frac{i^2}{2} \right]_{i_0}^{i_0} = 0 \quad (4-23)$$

Los límites de la primera integral son valores de t . En la segunda integral, puesto que la variable de integración es i , será necesario

poner como límites los valores de i correspondientes a $t = 0$ y $t = T$. No necesitamos conocer el valor de i para el tiempo cero; únicamente lo designaremos como i_0 . Sabemos que la corriente deberá regresar al mismo valor para ser otra vez i_0 en T , final del ciclo. Por tanto, para la integral de corriente los límites de integración inferior y superior serán i_0 (indicando que la corriente comienza y termina con el mismo valor). Como resultado, la integral definida y por tanto la potencia promedio, son cero.

Esta es una demostración general, vamos a darle particular atención a una inductancia con corriente y voltaje senoidal. Si hacemos $i = I_m \operatorname{sen} \omega t$, el voltaje será $v = Ld(I_m \operatorname{sen} \omega t)/dt = \omega L I_m \cos \omega t$. La potencia instantánea es:

$$\begin{aligned} p &= vi = \omega L I_m^2 \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t \\ &= \omega L I_m^2 \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\omega t \right) \end{aligned} \quad (4-24)$$

La Fig. 4-5a muestra las ondas de corriente, voltaje y potencia. Las ordenadas de la curva de voltaje son proporcionales en cualquier lugar, a la pendiente de la curva de corriente. La potencia en cada

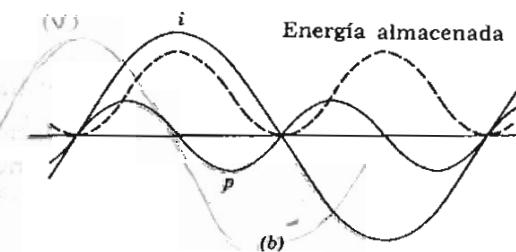
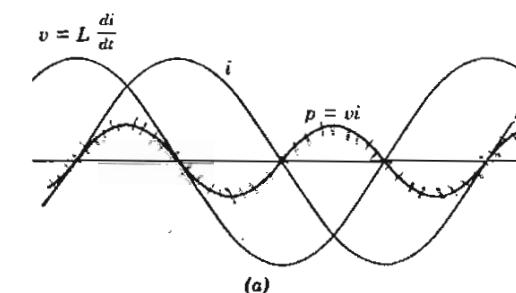


FIG. 4-5. Potencia de inductancia y energía almacenada

instante es el producto de la corriente y el voltaje. Cuando la corriente y el voltaje tienen signos opuestos, uno positivo y otro negativo, la potencia es negativa. ¿Qué significa esto?, ¿qué es una razón negativa de consumo de energía?

Potencia negativa significa que la energía está siendo regresada de la inductancia al circuito de donde venía, después de un breve periodo de almacenamiento en el campo magnético del inductor. Analicémosla durante un ciclo, refiriéndonos a las Figs. 4-5a y b.

Cuando la corriente es cero, la energía almacenada es cero. (Se recordará que la energía almacenada en el campo magnético es* $\frac{1}{2}Li^2$). La potencia en la inductancia siendo vi , es también cero cuando la corriente es cero. El voltaje estará en su valor máximo positivo porque la razón de cambio de la corriente es grande y positiva.

Cuando la corriente se incrementa de cero a su valor máximo positivo existe potencia hacia el inductor y la energía se almacena en su campo magnético. La energía almacenada es proporcional al cuadrado de la corriente.

Cuando la corriente es máxima, di/dt es cero, el voltaje entre terminales del inductor es cero, la potencia hacia el inductor es cero y la energía almacenada es máxima.

Cuando la corriente decrece y tiene una pendiente negativa, el voltaje es negativo y la potencia es también negativa. Esto significa que la energía está siendo devuelta del campo magnético del inductor al circuito. La polaridad del voltaje terminal se ha invertido, pero la dirección de la corriente no. Las direcciones de la corriente y el voltaje se relacionan ahora como si fueran las de un generador, una batería o cualquier otra fuente y el inductor está actuando (temporalmente, por $\frac{1}{4}$ ciclo) como una fuente de fuerza electromotriz. Durante este cuarto de ciclo, el inductor no permite a la corriente invertirse en respuesta a la inversión del voltaje aplicado a sus terminales, el inductor no permitirá a la corriente invertirse hasta que la energía almacenada por él, se haya disipado completamente y no pueda actuar como una fuente opuesta a la fuerza del voltaje aplicado.

En cada medio ciclo, este almacenamiento y disipación de la energía se repiten. En promedio, la inductancia pura suministra tanta

* Esta fórmula se obtiene fácilmente de

$$W = \int p dt = \int vi dt = L \int i di = \frac{1}{2} Li^2$$

$$e = -\frac{L I^2 \omega}{2} \cos 2\omega t + \frac{L I_0^2 \omega}{2}$$

energía como la que recibe y la potencia promedio consumida por ella es cero. No es importante que la inductancia pura sin resistencia, sea imposible físicamente. La conclusión esencial es que las partes inductivas de un circuito idealizado no consumen potencia.

9. Potencia en una capacitancia

La potencia promedio consumida por una capacitancia pura, también es cero en estado estacionario. Esto se demuestra integrando la potencia instantánea para obtener la promedio, como se hizo para la inductancia en la sección precedente; el cálculo es casi el mismo y no se repetirá.

La Fig. 4-6, muestra el voltaje aplicado a una capacitancia; la corriente que adelanta al voltaje $\frac{1}{4}$ ciclo; la onda de frecuencia doble de la potencia instantánea y la energía almacenada en el campo eléctrico.

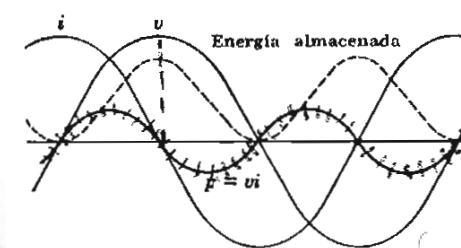


FIG. 4-6. Potencia y energía en una capacitancia

"la pot. promedio es 0
no consume energía
solo almacena una cantidad y le
devuelve".

$$P = i v$$

$$\int pdt = \int iv dt = \frac{1}{2} \int q dq =$$

$$= \frac{1}{2} Q^2 = \frac{1}{2} C V^2$$

trico del capacitor. La energía almacenada $\frac{1}{2}Cv^2$, es la integral con respecto al tiempo de la potencia instantánea. Es interesante y será posteriormente de gran importancia en conexión con el fenómeno de resonancia, que la energía almacenada en una capacitancia es máxima, en la cresta de la onda de voltaje, justamente cuando la energía almacenada en la inductancia es cero, y es cero en la cresta de la onda de corriente, cuando la energía almacenada en la inductancia es máxima.

10. Potencia en una impedancia

Una forma de calcular la potencia para un circuito o red, es determinar la resistencia de cada rama, calcular la corriente en dicha rama, encontrar el consumo de potencia como I^2R (Ec. 4-9) y sumar

el consumo de potencia en todas las diferentes ramas para obtener la potencia total consumida.

Es útil a menudo calcular la potencia promedio para una red entera, en función del voltaje y la corriente *terminales* y hay dos formas básicas de hacer esto. La primera da un resultado en función de potencia y factor de potencia. La segunda nos da un resultado en función de potencia activa y potencia reactiva.

11. Potencia y factor de potencia

Considérese una red de cualquier clase con un par de terminales como en la Fig. 4-7. La impedancia de entrada en este par de terminales se sabe que es $Z = Z/\phi$. Se aplica el voltaje senoidal V y la corriente senoidal I fluye en la red. La corriente instantánea, el voltaje y la potencia son

$$i = I_m \cos \omega t \quad (4-25)$$

$$v = V_m \cos(\omega t + \phi) \quad (4-26)$$

$$p = vi = V_m I_m [\cos(\omega t + \phi)] (\cos \omega t) \quad (4-27)$$

La Fig. 4-8 muestra las ondas de voltaje y corriente, el ángulo de fase ϕ está indicado. La figura debe necesariamente dibujarse para mostrar algún ángulo de fase específico, así con el propósito de ilustración, se asume que la corriente atrasa al voltaje por algo menos de $\frac{1}{4}$ ciclo. Esto implica una impedancia de resistencia e inductancia. La discusión y las matemáticas, sin embargo, no están limitadas a esta clase particular de una impedancia; sino que son completamente generales.

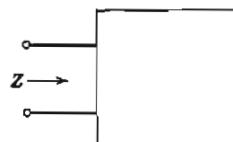


FIG. 4-7. Impedancia de entrada

La curva de la potencia instantánea p es el producto de v e i . Como la corriente no atrasa mucho al voltaje en la Fig. 4-8, p es negativa solamente una pequeña parte de cada medio ciclo. La potencia promedio P es por tanto completamente apreciable, como se

$V = I_m V_m \cos^2 \omega t \cos \phi - V_m I_m \cos \omega t \sin \omega t \cdot \sin \phi$
= $I_m V_m \cos^2 \phi + I_m V_m \cos \phi \cos 2\omega t - V_m I_m \sin^2 \omega t \sin^2 \phi$

POTENCIA PROMEDIO Y CORRIENTE EFECTIVA
es independiente del tiempo.
también fluctúa entre 0 y
el valor $\frac{1}{2} I_m^2 V_m^2 \cos^2 \phi$

muestra. Para encontrar la cantidad de P , trabajaremos con la Ec. 4-27. La identidad trigonométrica

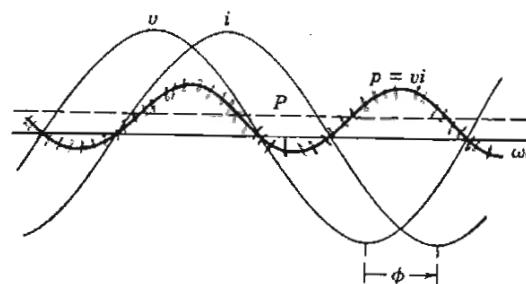


FIG. 4-8. Potencia instantánea p y potencia promedio P

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) + \cos(x + y)] \quad (4-28)$$

se utiliza para convertir la Ec. 4-27 en

$$p = \frac{V_m I_m}{2} [\cos \phi + \cos(2\omega t + \phi)] \quad (4-29)$$

El promedio de la Ec. 4-29 es P , como se ve a continuación. El promedio de $\cos(2\omega t + \phi)$ es cero, porque el promedio (a través de uno o más ciclos) de cualquier término que varíe senoidalmente con el tiempo es cero; este término por lo tanto no contribuye en nada al promedio de p . El término restante de la Ec. 4-29, $\frac{1}{2}V_m I_m \cos \phi$, es una constante. La potencia promedio es por tanto

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos \phi \quad (4-30)$$

Tal como en otras expresiones para la potencia, es más conveniente utilizar valores efectivos rms de voltaje y corriente, en vez de valores máximos. Sustituyendo $V_m = \sqrt{2}V$ y $I_m = \sqrt{2}I$,

$$P = VI \cos \phi \quad o \quad P_{av} = V_{rms} I_{rms} \cos \phi \quad (4-31)$$

Esta ecuación dice que la potencia que entra a cualquier red es el producto de los valores efectivos del voltaje terminal y la corriente y el coseno del ángulo de fase. Se aplica únicamente a voltaje y corriente senoidales.

El coseno del ángulo de fase se usa tan a menudo que se le ha dado un nombre especial. Por razones que son obvias en la Ec. 4-31 se ha llamado *factor de potencia*. Por tanto, cuando la corriente y el voltaje son senoidales, el factor de potencia se define como

$$F_p = \cos \phi \quad (4-32)$$

$$y^* \quad \text{Paparente} \quad P = V I F_p \quad (4-33)$$

$$R I^2 = V_R I \quad V \cos \phi = R I^2 \quad \text{Pot real} = P$$

12. Potencia activa y reactiva

El valor del factor de potencia puede ser cualquiera entre uno y cero. Si el voltaje y la corriente están en fase uno con otro, como cuando alimentan a una impedancia resistiva pura, el factor de potencia es 1 y la potencia promedio es VI . Si la impedancia es reactiva pura, el factor de potencia es cero y la potencia promedio es cero.

Solamente cuando la impedancia de una carga es puramente resistiva, es cuando la potencia promedio es igual a VI . Unicamente con una carga resistiva, la corriente en el circuito se emplea completamente en llevar potencia del generador a la resistencia de carga. Cuando hay reactancia así como resistencia presentes, una componente de la corriente en el circuito se emplea en transportar la energía que periódicamente se almacena y descarga en la reactancia. Esta energía almacenada que es absorbida y liberada alternativamente por el campo magnético de una inductancia, o el campo magnético de un capacitancia, se suma a la corriente en el circuito, pero no se suma a la potencia *promedio*.

Desde este punto de vista, la potencia promedio en un circuito se llama *potencia activa* y la potencia que suministra la energía almacenada en los elementos reactivos (como en las Figs. 4-5 y 4-6) se llama *potencia reactiva*. La potencia activa, como en la Ec. 4-31, es

$$P = VI \cos \phi \quad (4-34)$$

y la potencia reactiva, designada Q , es

$$Q = VI \sin \phi \quad (4-35)$$

* Más generalmente, con ondas no senoidales para las que la Ec. 4-32 no tiene significado, se ha tomado la Ec. 4-33 como la definición del factor de potencia.

En ambas ecuaciones, V e I son valores efectivos del voltaje y la corriente terminales y ϕ es el ángulo de fase que la corriente atrasa al voltaje.†

La interpretación geométrica de estas ecuaciones es beneficiosa. En la Fig. 4-9a, V e I están indicadas. Para calcular la potencia, encuéntrese la proyección de I sobre V y multiplíquese por V . Puesto

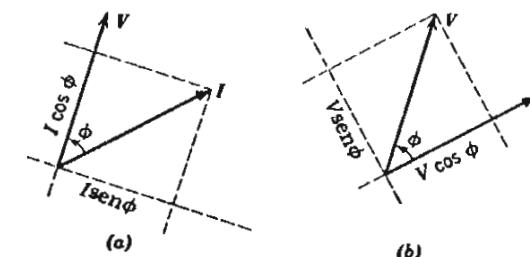


FIG. 4-9. Componentes en fase y en cuadratura

que la proyección de I sobre V es $I \cos \phi$, este método está de acuerdo con la Ec. 4-34. La potencia activa se considera entonces que es el producto del voltaje por la componente en fase o activa de la corriente.

Similarmente, la potencia *reactiva*, es el producto del voltaje por la componente en cuadratura o reactiva de la corriente. Q es la proyección de V sobre una recta normal a V , como en la Fig. 4-9b, multiplicada por V .

Alternativamente se muestran las mismas V e I en la Fig. 4-9b. Aquí la proyección de V sobre I se encuentra, obteniéndose $V \cos \phi$.

† El signo algebraico de la potencia reactiva ha sido sujeto de debates por más de 80 años. La alternativa de la convención adoptada en la Ec. 4-35, es invertir el signo de Q , lo que queda mejor escribiendo $(-\phi)$ en lugar de ϕ en las Ecs. 4-35 y 4-36; la Ec. 4-37 será entonces $S = V^*I$ en lugar de $S = VI^*$.

Físicamente la convención de signos utilizada aquí encamina hacia el concepto de que la resistencia inductiva consume potencia reactiva Q de una manera análoga al consumo de ingenieros de potencia. Este concepto luce más aceptable para la mayoría de los transformadores y motores de inducción) consumen P , pero actúan como fuentes de Q . Parece ser que la mayoría de los ingenieros de potencia prefieren y utilizan actualmente el primer concepto.

La convención opuesta, definiendo S como V^*I , fue adoptada por el American Institute of Electrical Engineers y aprobada por la American Standards Association en 1941 (ver Referencia 8). Sin embargo, el asunto fue reabierto y fue recomendada la inversión del signo por el American Institute of Electrical Engineers Standards Committee; la recomendación, con las razones y discusiones aparecieron publicada en *Electrical Engineering*, Vol. 68, Pág. 512, de noviembre de 1946. Parece ser muy probable que la convención más común continuará, por ser comúnmente aceptada por los ingenieros practicantes y por esa razón se utiliza en este libro.

La proyección de V sobre una recta normal a I nos da $V \sin \phi$. Estas, cuando se multiplican por I dan P y Q , respectivamente. Los resultados finales son entonces los mismos si encontramos las componentes de la corriente en fase y en cuadratura con el voltaje, o las componentes del voltaje en fase y en cuadratura con la corriente.

13. Potencia compleja

Considérese, en la Fig. 4-9b, que V , $V \cos \phi$ y $V \sin \phi$, están cada una multiplicadas por I , valor rms de la corriente. Cuando las componentes del voltaje se multiplican por la corriente se convierten en P y Q , respectivamente. Definiremos ahora una nueva cantidad que llamaremos S , potencia compleja, de la que P y Q son las componentes.

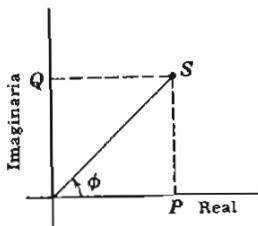


FIG. 4-10. Potencia compleja

P , Q y S se muestran en la Fig. 4-10. P y Q están medidas a lo largo de los ejes real e imaginario, en lo que se ha llamado plano de la potencia compleja. Geométricamente, la Fig. 4-10 es similar a la Fig. 4-9b, girada para hacer que la transformada de la corriente coincida con el eje de los reales.

Por definición:

$$\begin{aligned} S &= P + jQ = VI \cos \phi + jVI \sin \phi \\ &= VI(\cos \phi + j \sin \phi) = VIe^{j\phi} = VI/\phi \end{aligned} \quad (4-36)$$

Aquí hemos utilizado la fórmula de Euler para mostrar que la "potencia compleja" es una cantidad compleja, con magnitud igual al producto del voltaje y corriente terminales (ambos rms) y con ángulo igual al ángulo de fase, con el que la corriente atrasa al voltaje, como en la Fig. 4-10.

La magnitud de S , VI , se llama potencia aparente.

La Ec. 4-36 no es siempre la forma más fácil que se usa para calcular S . Cuando, como en la Fig. 4-11, el voltaje y la corriente están expresados como transformadas * de la forma $I = Ie^{j\theta}$ y $V = Ve^{j(\theta+\phi)}$, la fórmula más conveniente para S es

$$S = VI^* \quad (4-37)$$

I^* , el conjugado de I , es $Ie^{-j\theta}$ como en la Fig. 4-11. Para demostrar que la Ec. 4-37 es correcta,† de acuerdo con la definición de S en la Ec. 4-36, sustitúyase por V e I^* .

$$S = VI^* = Ve^{j(\theta+\phi)}Ie^{-j\theta} = VIe^{j\phi} \quad (4-38)$$

Derivemos ahora, de la Ec. 4-37, una expresión para la potencia que no incluya ni la impedancia ni el ángulo de fase explícitamente; una expresión así, es conveniente para el trabajo teórico. De la Ec. 4-36,

$$S = P + jQ \quad S^* = P - jQ$$

Primer sumando y luego restando, obtenemos estas fórmulas:

$$S + S^* = 2P \quad S - S^* = 2jQ$$

$$P = \frac{1}{2}(S + S^*) \quad Q = \frac{1}{2j}(S - S^*)$$

Ahora la Ec. 4-37 nos da $S = VI^*$, y sabemos que $S^* = V^*I$, así que

$$P = \frac{1}{2}(VI^* + V^*I) \quad Q = \frac{1}{2j}(VI^* - V^*I) \quad (4-39)$$

La primera de éstas se utiliza a menudo y la última solamente rara vez.

* Es importante notar que S es un número complejo pero no representa una cantidad que varía senoidalmente. V e I son instantáneas de rectas que están girando en el plano complejo. El ángulo ϕ es arbitrario, porque depende del instante en que se tome la instantánea (esta instantánea es en $t = 0$, pero la elección del tiempo cero es también arbitraria) y V e I pueden tener cualquier orientación en el plano complejo siempre que el ángulo relativo θ entre ellos se mantenga. S por el contrario, está fija en el plano complejo; es independiente del ángulo arbitrario θ y está localizada por el ángulo relativo ϕ . Ver FIG. 4-11.

† Es otro ejemplo de una cantidad compleja que no representa una onda senoidal. La Ec. 4-40 muestra la relación entre S y Z .

Los estudiantes, frecuentemente preguntan por qué S no es igual a VI ; ¿por qué se usa el conjugado? La única respuesta es que el producto VI no es una cantidad usual, mientras que el producto VI^* sí lo es. VI no es independiente del ángulo arbitrario θ ; VI^* sí es independiente de θ . Las componentes de VI no significan nada en particular; las componentes de VI^* son P y Q .

Otra forma usual de la Ec. 4-36 resulta cuando se introduce la impedancia. La Ec. 3-48 da $Z = (V/I)e^{j\phi}$. Entonces, de la Ec. 4-36,

$$S = VIe^{j\phi} = I^2 \frac{V}{I} e^{j\phi} = I^2 Z = I^2 R + jI^2 X \quad (4-40)$$

Puesto que $S = P + jQ$, vemos que

$$P = I^2 R \quad \text{y} \quad Q = I^2 X \quad (4-41)$$

Esta expresión para P , desde luego es ya familiar y sabemos que es muy útil. La expresión similar para Q será útil de la misma manera: esto es, la potencia reactiva Q de cada elemento reactivo, puede calcularse de la corriente. Nótese particularmente que I en las Ecs. 4-41 es el valor real rms, no un número complejo.

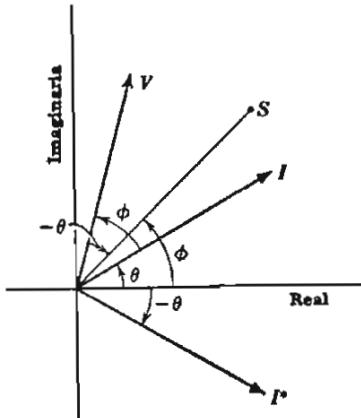


FIG. 4-11. Cálculo de S

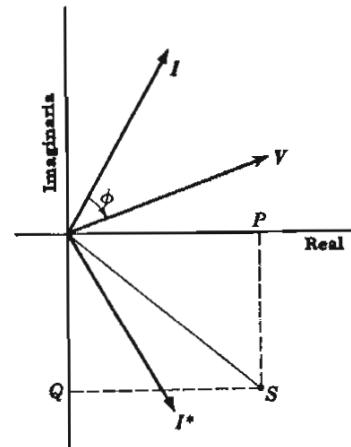


FIG. 4-12. Ejemplo de potencia reactiva negativa

Si la impedancia de una rama de un circuito consiste de resistencia y reactancia inductiva, esta rama consumirá tanto P como Q . Las Figs. 4-9, 4-10 y 4-11, se aplican a un circuito inductivo, con la corriente atrasando al voltaje, y muestran a P y Q positivos. Si la impedancia de una rama de un circuito consiste de resistencia y reactancia capacitiva, la situación es diferente. En el ejemplo mostrado en la Fig. 4-12, la corriente adelanta al voltaje, el ángulo ϕ es negativo, S se encuentra en el cuarto cuadrante del plano complejo y Q

es negativa. El consumo de Q por una carga capacitiva es negativo. En la Ec. 4-35 es evidente que Q será siempre negativa cuando la corriente adelanta al voltaje. (Ver nota al pie de la Pág. 145).

En lugar de decir, que el consumo de potencia reactiva por un capacitor es negativo, se puede decir que el capacitor *produce potencia* reactiva. Así como un generador es una fuente de potencia activa, un capacitor es una fuente de potencia reactiva. La inductancia *consume* potencia reactiva y la capacitancia *produce* potencia reactiva. Para la capacitancia, así como para la inductancia, $Q = I^2 X$, pero X es negativa.

Si dos máquinas sincrónicas se conectan al mismo sistema de potencia y se excita más fuertemente una de ellas que la otra, la máquina sincrónica sobreexcitada producirá potencia reactiva y la máquina con baja excitación consumirá potencia reactiva. Esto se aplica, sea que la máquina se llame generador, motor sincrónico o condensador sincrónico.*

14. Conservación de la potencia

Es evidente por la ley de la conservación de la energía que debe haber un balance en un sistema eléctrico. La energía eléctrica total generada debe ser igual a la energía eléctrica total consumida. En el estado estable esto da como resultado un balance de la potencia promedio P : la potencia total generada debe ser igual a la potencia total consumida.

Existe un balance similar de la potencia reactiva. Q representa la razón de intercambio de la energía almacenada entre los elementos reactivos y los generadores; y cuando el sistema eléctrico entero se considera, la ley de la conservación de la energía requiere que la Q total sea cero. Esto es, la Q total que ha sido *producida* en captores y generadores sobreexcitados, debe ser igual a la Q total que ha sido *consumida* en inductores y generadores con baja excitación.

15. Unidades

La potencia compleja y sus componentes P y Q son desde luego iguales dimensionalmente porque son el producto del voltaje y la co-

* Una discusión adicional sobre la potencia reactiva en conexión con maquinaria esencia fuera de lugar en este libro. El uso de P y Q en los sistemas de transmisión está discutido ampliamente en la Referencia 5. P se utiliza frecuentemente y Q ocasionalmente, en teoría de redes de comunicación.

rriente y el seno o coseno, que no tiene dimensión. Las tres pueden medirse apropiadamente en "volts-amperes". La potencia aparente, la magnitud de la potencia compleja S , también se mide en volts-amperes. Para Q , sin embargo, se acuñó un nombre especial con las letras iniciales de "volt-amperes reactivos" y la unidad de Q es el var. Para P también, se utiliza un nombre individual: la unidad de P es el watt. El watt fue la unidad mecánica establecida, mucho antes de que cualquier sistema de unidad eléctrica fuera proyectado.

El watt es a menudo una unidad inconvenientemente pequeña y las potencias grandes se miden comúnmente en kilowatts (1 kw = 1 000 w) o en megawatts (1 Mw = 1.000.000 w). La potencia requerida para comunicaciones es por otro lado, a menudo mucho menor que un watt y el miliwatt (1 mw = 0.001w) o el microwatt (1 μ w = 0.000 001w) puede emplearse.

Similarmente, los kilovars (abreviando kvar) y los megavars (Mvar) se usan para grandes cargas reactivas. Las unidades mili- y micro- no son comunes.

El volt-ampere y más usualmente el kilovolt-ampere y el megavolt-ampere, se utilizan para medir la magnitud de S .

16. Ejemplos

EJEMPLO 1. Como en la Fig. 4-13, se aplica un voltaje alterno con un valor efectivo de 115 volts, a una impedancia $Z = 75 + j38$ ohms. Encontrar la potencia recibida por la impedancia.

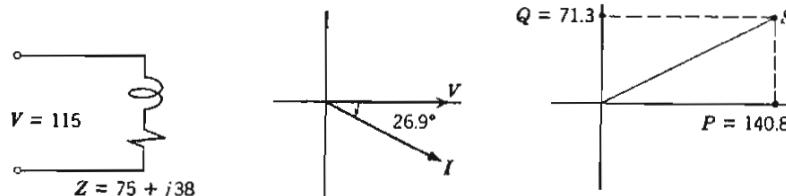


FIG. 4-13. Ejemplo 1

SOLUCIÓN. Primero escribese la transformada del voltaje $V = 115/0^\circ$. El valor rms del voltaje está dado como 115. No hace ninguna diferencia qué ángulo se asuma; arbitrariamente asignemos el ángulo cero al voltaje. Esto es, tomamos el voltaje como el fasor de

referencia. El siguiente paso es calcular la transformada de la corriente. Puesto que

$$V = 115/0^\circ$$

y

$$Z = 75 + j38 = 84.0/26.9^\circ$$

entonces

$$I = \frac{115/0^\circ}{84.0/26.9^\circ} = 1.37/-26.9^\circ$$

Un pequeño diagrama de transformadas se ha dibujado en la Fig. 4-13. Siempre se debería dibujar tales diagramas cuando se está trabajando con problemas; ellos nos ayudarán a evitar malas interpretaciones obvias y errores.

Ilustramos tres maneras de calcular la potencia:

Primer método: $P = VI \cos \phi$

$$\begin{aligned} &= (115)(1.37)(\cos 26.9^\circ) = (115)(1.37)(0.893) \\ &= 140.8 \text{ watts} \end{aligned}$$

Segundo método: $P = I^2 R$

$$= (1.37)^2(75) = 140.8 \text{ watts}$$

Tercer método: $P + jQ = VI^*$

$$\begin{aligned} &= (115/0^\circ)(1.37/26.9^\circ) \\ &= 157.5/26.9^\circ \text{ volt-ampères} \end{aligned}$$

$$P = 157.5 \cos 26.9^\circ = 140.8 \text{ watts}$$

$$Q = 157.5 \sin 26.9^\circ = 71.3 \text{ vars}$$

Para una solución numérica como ésta, el tercer método es bastante diferente del primero. El segundo método es más rápido y fácil que cualquiera de los otros.

EJEMPLO 2. Un receptor telefónico tiene, a 600 ciclos por segundo, una impedancia $Z = 95 + j132.0$. Encontrar la potencia su-

ministrada al receptor,* siendo la corriente de 7 miliamperes con una frecuencia de 600 cps.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} P &= I^2 R = (7.0 \cdot 10^{-3})^2 (95.0) \\ &= (49.0 \cdot 10^{-6})(95.0) \\ &= 4.65 \cdot 10^{-3} \text{ watts o } 4.65 \text{ miliwatts} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3. Un generador alimenta a una soldadura, un calentador y un motor, como se muestra en la Fig. 4-14. Se usa un capacitor para suministrar la potencia reactiva para la soldadora y el motor, permitiendo que el generador opere a factor de potencia unitario. Encontrar la potencia activa que debe suministrar el generador y la potencia reactiva que debe suministrar el capacitor. Si el capacitor no se usara, ¿qué potencia aparente tendría que ser suministrada por el generador? El voltaje del generador es de 120 volts rms.

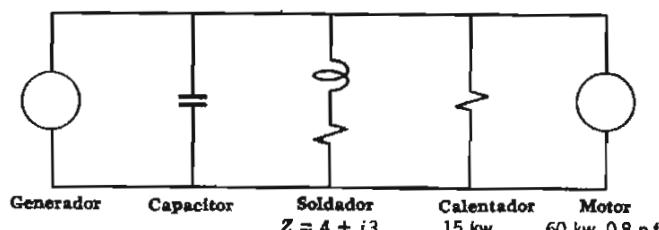


FIG. 4-14. Ejemplo 3

SOLUCIÓN. Las necesidades del motor, calentador y soldadora son como siguen:

Motor. Aunque los datos no nos dicen si la corriente adelanta o atrasa al voltaje, se puede asumir que atrasa puesto que un motor de este tamaño es probablemente un motor de inducción. El factor de potencia está dado:

$$F_p = 0.8 = \cos \phi \quad \text{de modo que } \sin \phi = 0.6$$

$$P = VI \cos \phi$$

$$VI = \frac{P}{\cos \phi} = \frac{60}{0.8}$$

$$Q = VI \sin \phi$$

$$Q = \frac{60}{0.8} 0.6 = 45 \text{ kilovars}$$

* No es importante en este problema, que el valor efectivo de corriente alterna de resistencia efectiva varía con la frecuencia, pero el valor de resistencia dado arriba, se especifica que es correcto para la frecuencia de la corriente dada.

Calentadores : 15 kilowatts.

$$\text{Soldadora: } |I| = \frac{|V|}{|Z|} = \frac{120}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{120}{5} = 24.0 \text{ amperes}$$

$$P = I^2 R = (24.0)^2 4 = 2304 \text{ watts}$$

$$Q = I^2 X = (24.0)^2 3 = 1728 \text{ vars}$$

Los kilowatts y kilovars totales son:

	P.	Q
Motor	60	45
Calentador	15	0
Soldadora	2.3	1.7
Total	77.3	46.7

$$S = 77.3 + j46.7 = 90.2 / 31.2^\circ$$

Conclusión: Potencia activa del generador, 77.3 kilowatts. Potencia reactiva del capacitor, si se usa, 46.7 kvar. Potencia aparente del generador si no se usa el capacitor, 90.2 kva. Con toda probabilidad, no debería usarse un capacitor, porque sería más barato incrementar el tamaño del generador para que suministre 90.2 kva, que comprar un capacitor que suministre 46.7 kvar.

EJEMPLO 4. La fuerza electromotriz de una fuente de potencia (un generador o un oscilador), mostrada en la Fig. 4-15, es E . En serie con este generador, está una impedancia fija Z_g . Una carga, de impedancia Z_t , se conecta como se indica. ¿Cuál debería ser el valor

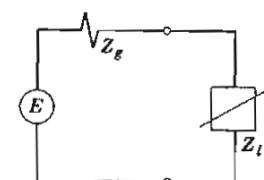


FIG. 4-15. Potencia máxima transferida

de Z_l para la carga con el fin de recibir la mayor cantidad posible de potencia del generador?

SOLUCIÓN. Sea

$$Z_g = R_g + jX_g \quad Z_l = R_l + jX_l \quad (4-42)$$

Claramente la impedancia Z_l no debe ser excesiva, porque la corriente hacia la carga se aproximaría entonces a cero, y la potencia que es igual a I^2R_l , sería pequeña. Además, Z_l no debe ser cercana a cero porque entonces la potencia sería pequeña, porque R_l es pequeña. La Z_l correcta deberá ser algún valor intermedio.

Una expresión para la potencia P_l de la carga puede escribirse:

$$P_l = I^2R_l = \left(\frac{E}{|Z_g + Z_l|} \right)^2 R_l = \frac{E^2 R_l}{|(R_g + R_l) + j(X_g + X_l)|^2} \quad (4-43)$$

En esta fórmula para la potencia, I es el valor rms de la corriente (no es un número complejo); y se encuentra arriba por lo tanto, dividiendo el voltaje rms E , entre la *magnitud* de la impedancia. La magnitud de un número complejo, es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus componentes y tenemos:

$$P_l = \frac{E^2 R_l}{(\sqrt{(R_g + R_l)^2 + (X_g + X_l)^2})^2} = \frac{E^2 R_l}{(R_g + R_l)^2 + (X_g + X_l)^2} \quad (4-44)$$

Nosotros deseamos el valor máximo de esta expresión. R_l y X_l pueden variar independientemente y pueden tener cualquier valor deseado. E , R_g y X_g no pueden variar. Consideremos primero el resultado de variar X_l , manteniendo a R_l constante. Por simple inspección de la fórmula vemos que P_l será máxima cuando $X_l = -X_g$, porque esto hace mínimo al denominador cualquiera que sea el valor de R_l . Por consiguiente, hagamos $X_l = -X_g$; entonces

$$P_l = \frac{E^2 R_l}{(R_g + R_l)^2} \quad (4-45)$$

Ahora estudiemos los efectos de variar R_l . Para encontrar el valor de R_l que hace máxima a P_l , diferenciemos y hagamos la derivada igual a cero:

$$\frac{dP_l}{dR_l} = E^2[(R_g + R_l)^{-2} - 2R_l(R_g + R_l)^{-3}] = 0 \quad (4-46)$$

$$2R_l = R_g + R_l \quad (4-47)$$

$$R_l = R_g \quad (4-48)$$

La potencia máxima suministrada a la carga, se obtiene por consiguiente, haciendo la resistencia de la carga igual a la resistencia del generador y la reactancia de la carga igual y opuesta a la reactancia del generador, en otras palabras, hacer $Z_l = Z_g^*$. Una carga de esta clase recibe la mitad de la potencia proporcionada por la fuente, la otra mitad es suministrada a la resistencia R_g .

En un circuito real se debe esperar que la impedancia Z_g sea la impedancia interna del generador más la impedancia de las líneas de conexión y cualquier otro elemento en el circuito. La conclusión en este ejemplo es de gran importancia práctica, particularmente en ingeniería de comunicaciones y se discutirá en un capítulo posterior (Cap. 11, Sección 14).

17. Instrumentos

Los amperímetros y voltímetros de corriente directa miden cantidades promedio. Por otro lado, los amperímetros y voltímetros que miden cantidades de corriente alterna están diseñados usualmente para indicar el valor rms de corriente o voltaje. Este hecho implica, no solamente que la escala de los instrumentos de corriente alterna está calibrada para leer el valor rms cuando una onda senoidal de corriente pasa a través de él, sino que también la deflexión del instrumento es proporcional al valor rms *sin importar cuál sea la forma de la onda de corriente*. Esto depende, por supuesto, del mecanismo de operación del instrumento.

Hay tres tipos principales de mecanismos de operación en instrumentos indicadores, uno promedio y dos rms. Los tres se muestran en la Fig. 4-16. Se utilizan en conexión con diferentes circuitos para una amplia variedad de propósitos. Los tres principios básicos de

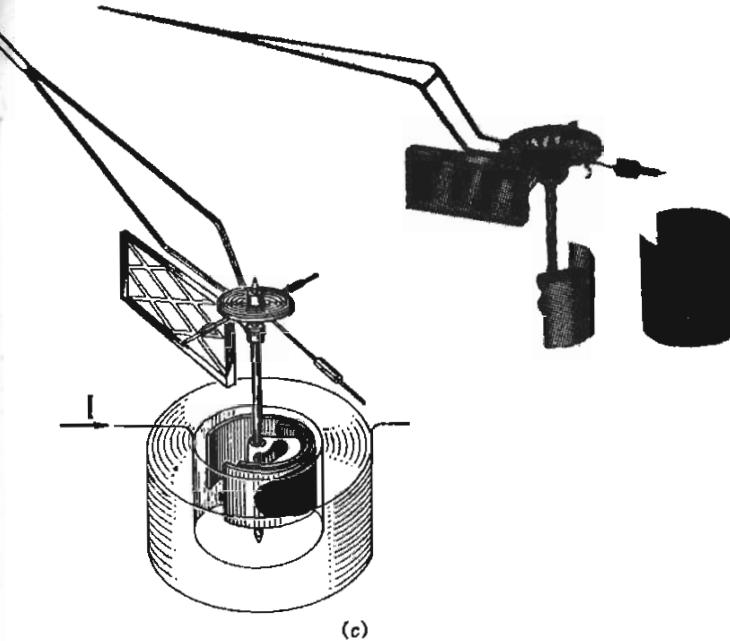
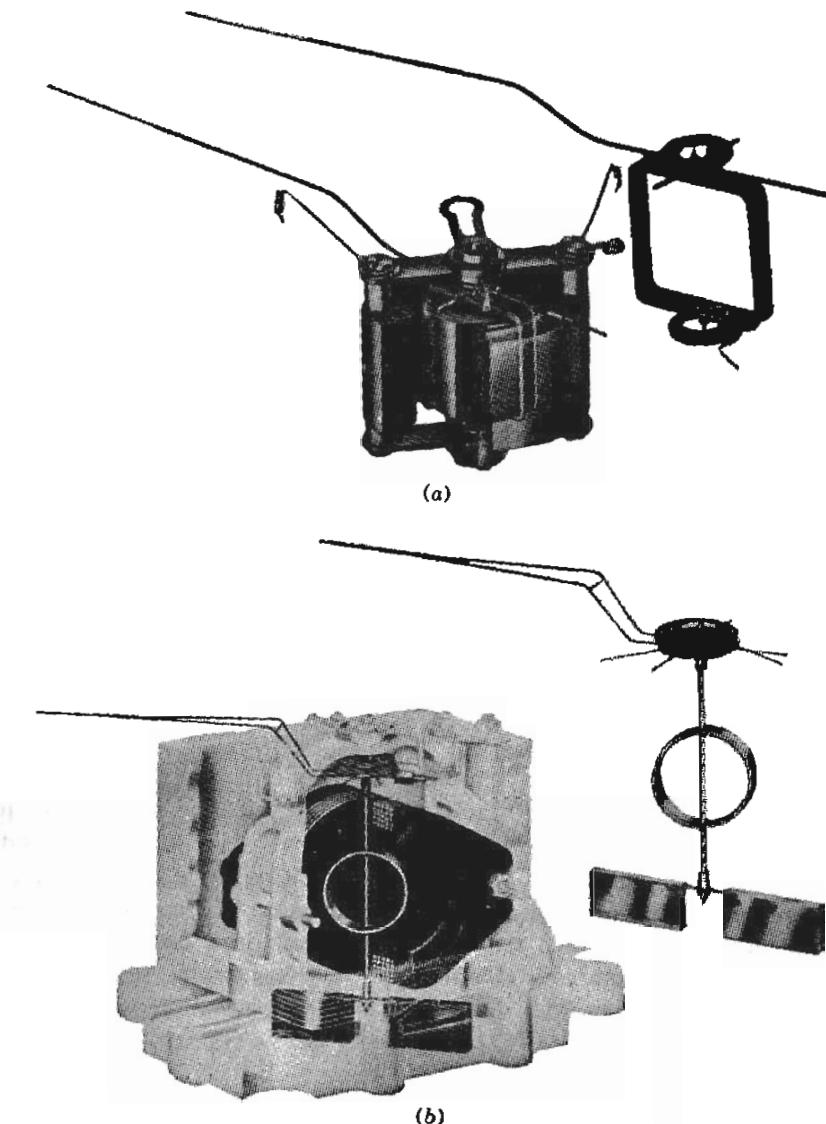


FIG. 4-16. Mecanismos de operación de instrumentos eléctricos

(a) Bobina móvil. Un alambre que lleva corriente, colocado en un campo magnético, tiende a moverse en ángulo recto a dicho campo. En el instrumento mostrado, el núcleo cilíndrico es el imán permanente y el conductor está devanado en una bobina de múltiples vueltas.

La bobina está pivotada en su centro; la fuerza produce un par giratorio al que se oponen unos resorte. Siendo el flujo del campo constante, el par en la bobina es proporcional a la corriente; la posición del puntero es por tanto una medida del flujo de corriente.

(b) Dínamómetro. La bobina móvil en el instrumento electrodinámometro, gira en el campo magnético producido por la corriente en las bobinas estacionarias. El par resultante es por consiguiente una función del producto de la corriente en la bobina móvil y la de las bobinas fijas.

Si la corriente en las bobinas fijas es la corriente en la línea principal y la corriente en la bobina móvil es derivada de la línea principal a través de una alta resistencia, de modo que sea proporcional al voltaje, el instrumento indicará potencia.

La pantalla magnética laminada, que se muestra parcialmente cortada, sirve para guiar los campos externos alrededor del mecanismo y hacer mínimos sus efectos en la indicación. El amortiguamiento se consigue con un par de aletas amortiguadoras de aluminio, que giran en compartimentos.

(c) Aspa de hierro dulce. Las aspas de hierro fija y móvil, en el mecanismo se magnetizan por la corriente en la bobina actuante. Como polos iguales se repelen, se produce una fuerza entre las aspas. El aspa móvil gira sobre un eje pivotado. Controlado por un resorte, la posición del puntero es una medida de la corriente en la bobina. Como este mecanismo no distingue polaridad, puede usarse en corriente directa o alterna pero es más comúnmente usado para mediciones de corriente alterna.

El diagrama de la izquierda muestra el mecanismo ensamblado. A la derecha está una fotografía del aspa de hierro móvil acoplada al eje del puntero y junto a ella el aspa de hierro fija con su sujetador de bronce y dentro de la cual se coloca el aspa móvil cuando se ensambla.

El amortiguamiento se obtiene con una paleta ligera de aluminio que gira con muy poco claro en una cámara cerrada. Cuando se usa en corriente alterna el par operante es pulsante, pero la construcción rígida armada del puntero elimina efectivamente la vibración.

Estas tres ilustraciones han sido suministradas por cortesía de Weston Electrical Instrument Corporation, Newark, N. J., y las legendas descriptivas han sido adaptadas de publicaciones de Weston con su permiso.

operación se discutirán primero y después se mencionarán algunas explicaciones específicas.

18. Instrumento de bobina móvil

Básicamente, un tipo general —el instrumento de *bobina móvil* o d'Arsonval— tiene un imán permanente y una bobina de alambre que lleva corriente. En la forma usual mostrada en la Fig. 4-16a, la bobina está libre para moverse sobre pivotes; la bobina está dentro del campo del imán permanente y cuando existe una corriente en ella da como resultado un par que tiende a girar la bobina. La rotación de la bobina está restringida por un resorte helicoidal, de modo que el movimiento de la bobina y por lo tanto el del puntero, es proporcional a la corriente que circula en la bobina.

Este es el tipo de movimiento común para los amperímetros de corriente directa. La corriente directa por medirse se pasa a través de la bobina del instrumento. Es también el movimiento usual para los voltímetros de corriente continua; para usarse como voltímetro el instrumento se conecta en serie con una alta resistencia, a las dos terminales entre las que desea medirse el voltaje. La corriente a través de la resistencia y, por tanto, a través del instrumento, es proporcional al voltaje. Por lo tanto, con una calibración apropiada de la escala, la deflexión del puntero puede hacerse que indique directamente el voltaje. Aun cuando se utilice como voltímetro, el instrumento es operado por *corriente*.

Si la corriente a través del instrumento está variando y las variaciones de la corriente son tan rápidas que el puntero no puede seguirlas, la bobina móvil y el puntero asumen una posición determinada por el par promedio. La indicación del instrumento es, por lo tanto, proporcional a la corriente *promedio*. Si una corriente alterna se hace pasar a través del instrumento el puntero no deflexionará (excepto posiblemente para una ligera vibración a la frecuencia de la corriente alterna) porque el par en la bobina móvil actuará primero en una dirección y luego en la otra, siendo el promedio cero. Este tipo de instrumento parecería ser inútil para medir corriente alterna, pero varios métodos indirectos que miden corriente alterna con un movimiento d'Arsonval se describirán a continuación.

El tipo de instrumento d'Arsonval puede hacerse muy sensitivo a pequeñas corrientes, utilizando una bobina de muchas vueltas de alambre fino y colgando la bobina con una delicada fibra que sirve

tanto de soporte como de resorte restrictor. En esta forma recibe el nombre de galvanómetro.

Utilizando una bobina excesivamente ligera, quizás el equivalente de una sola vuelta, y sustituyendo el puntero por un rayo de luz sobre un espejo, el movimiento de d'Arsonval puede hacerse que siga variaciones de corriente a razón de algunos cientos y aún de algunos miles de ciclos por segundo. El dispositivo se utiliza entonces para indicar corriente instantánea, no promedio y se llama oscilógrafo. El oscilógrafo de d'Arsonval ha sido sustituido ampliamente ahora, por el más conveniente osciloscopio de rayos catódicos.

Es posible diseñar este tipo de mecanismo de amperímetro con la bobina conductora de corriente fija y el imán permanente en forma de una aguja pivotada libre para girar. No existe una diferencia esencial en el principio, pero el diseño práctico es menos satisfactorio usualmente y tales instrumentos son raros excepto para usarse como amperímetros toscos y baratos de automóvil.

19. Instrumento del tipo dinamómetro *Tus*

El siguiente instrumento de tipo general —*tipo dinamómetro*— tiene dos bobinas. Ver Figs. 4-16b y 4-17. Una pivotada como en el tipo d'Arsonval y la otra está fija. No hay imán permanente. La bobina fija produce un campo magnético que reacciona con la corriente en la bobina móvil para producir un par. El par es proporcional a la corriente en la bobina móvil y también (siendo proporcional al campo magnético) a la corriente en la bobina fija. Por lo tanto, el par es proporcional al producto de las dos corrientes.

Si la bobina fija y la móvil se conectan en serie y la misma corriente fluye a través de las dos, el par es proporcional al cuadrado de dicha corriente. Con esta conexión el instrumento dinamómetro es un amperímetro. El par es proporcional y, por tanto, el desplazamiento es aproximadamente proporcional al cuadrado de la corriente. La escala del instrumento se calibra comúnmente para leer corriente directamente. Esto requiere, por supuesto, divisiones desiguales con la escala muy amontonada cerca del principio, a lo cual se llama escala con ley al cuadrado.

El dinamómetro es un tipo de amperímetro altamente exacto, aunque no común, tanto para corriente directa como alterna. Está calibrado para leer corriente directa correctamente. Cuando pasa a través de las dos bobinas en serie, corriente alterna o corriente varia-

ble de cualquier forma de onda, el par en cada instante es proporcional al cuadrado de la corriente instantánea. El par promedio es proporcional promedio de los cuadrados de las corrientes instantáneas y, por tanto, la indicación del puntero es automáticamente el valor rms de la corriente.

El instrumento dinamómetro ha sido descrito como un amperímetro. Cuando se conecta en serie con una alta resistencia, el mismo tipo de instrumento se convierte en voltímetro, midiendo voltaje efectivo o rms.

Sin embargo, actualmente el mayor uso del instrumento dinamómetro es como vatímetro. Una bobina (usualmente la bobina fija porque puede hacerse más conveniente de alambre grueso) lleva la corriente de un circuito y la otra bobina (usualmente la bobina móvil) se conecta en serie con una alta resistencia y se coloca entre las terminales del circuito. Ver Fig. 4-17. El instrumento puede entonces,

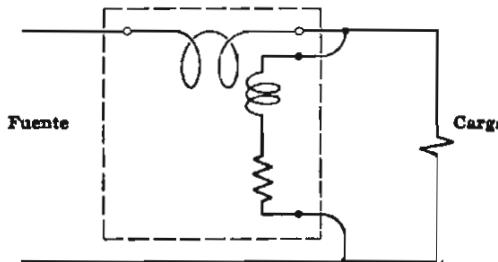


FIG. 4-17. Instrumento dinamómetro usado como vatímetro

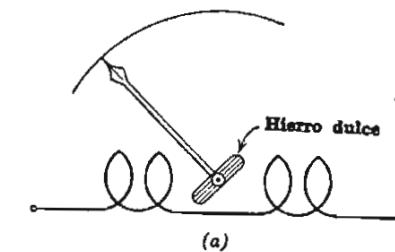
calibrarse para leer la potencia consumida en el circuito. La corriente en la bobina fija es i . La corriente en la bobina móvil es proporcional a v . El par en el instrumento es proporcional a vi . La indicación del instrumento es el promedio de los valores instantáneos de vi . Es, por tanto, la potencia promedio. Conectado de esta manera, el dinamómetro es el tipo usual de vatímetro. Mide correctamente la potencia de corriente directa o de corriente alterna de cualquier forma de onda. El instrumento dinamómetro cuando se calibra como vatímetro tiene una escala prácticamente uniforme.

20. Instrumento de tipo de hierro dulce (III.S)

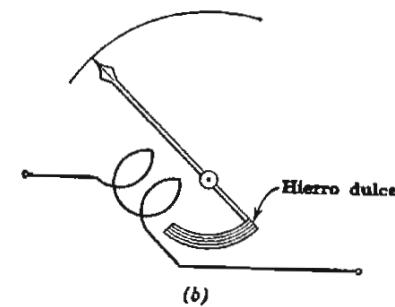
El tercer tipo general de instrumento —tipo de hierro dulce— tiene una bobina fija que produce un campo magnético. Ver Fig. 4-16c. Una pieza de hierro dulce sin magnetización permanente se le da

forma apropiada y pivoteada de modo que pueda moverse con el campo de la bobina cuando circula corriente.*

Cualquiera que sea la forma del hierro dulce en cada instrumento —aguja, disco, barra o aspa— el principio de operación puede explicarse considerando que el hierro dulce se convierte en un imán por inducción cuando un campo magnético es producido por la corriente en el instrumento. El magnetismo inducido en el hierro dulce es proporcional a la fuerza del campo. La fuerza que actúa sobre el hierro es proporcional al magnetismo inducido en el mismo multiplicada por la intensidad del campo. La fuerza que actúa sobre el hierro es, por tanto, proporcional al cuadrado de la intensidad del campo magnético y, por consiguiente, al cuadrado de la corriente en el instrumento.



(a)



(b)

FIG. 4-18. Primeros tipos simples de movimiento de hierro dulce

* Para ayudar a visualizar la acción de los instrumentos de hierro dulce, puede mencionarse que uno de los primeros modelos tenía una aguja de hierro colocada en ángulo con el eje del campo de la bobina; ver Fig. 4-18a. Cuando el campo se incrementaba en fuerza, la aguja giraba a quedar más paralela al eje del campo magnético. Otro de los primeros modelos (Fig. 4-18b) tenía un núcleo de hierro que se introducía dentro del

De aquí se sigue que el par que actúa contra el resorte del instrumento, cualquiera que sean los detalles del diseño, es proporcional al cuadrado de la corriente. Si el instrumento se calibra para indicar corriente directa y se utiliza para corriente alterna o pulsante, el instrumento indica el valor rms.

Igual que el amperímetro o voltímetro dinamómetro, el instrumento de hierro dulce tiene una escala con divisiones amontonadas en el extremo inferior. La escala puede hacerse casi uniforme dándole forma apropiada y colocando en determinada forma la pieza de hierro. Una gran cantidad de inventiva se ha utilizado en el diseño de este importante tipo de instrumento de corriente alterna.

Estos tres tipos de instrumento tienen varias ventajas y desventajas. La característica que nos concierne en esta presente discusión, es que el movimiento d'Arsonval es inherentemente un instrumento de lectura promedio, mientras que los tipos dinamómetro y hierro dulce son dispositivos de lectura rms. Estos instrumentos calibrados todos para leer lo mismo con corriente directa, no leen lo mismo con corriente alterna o pulsante. El tipo apropiado para utilizar está determinado por el propósito. Para encontrar el calor disipado, o para cualquier otra medición de potencia, los instrumentos rms son apropiados. Para encontrar corriente promedio, como por ejemplo, la corriente suministrada por un rectificador para cargar una batería, la corriente pulsante rectificada deberá medirse con un instrumento d'Arsonval.

21. Mediciones de alta frecuencia

Los instrumentos del tipo de hierro dulce y dinamómetro pierden su exactitud si la frecuencia de la corriente es mayor de unos pocos cientos, ó cuando mucho de 1 000 ciclos por segundo. Para medir corriente o voltaje de alta frecuencia, se emplean métodos indirectos; se utilizan amperímetros con rectificador y termopar, los voltímetros de tubo al vacío son comunes.

El instrumento con *rectificador* tiene un movimiento d'Arsonval conectado en el circuito de un rectificador de onda completa, como se muestra en la Fig. 4-19. La corriente a través del instrumento es I_d .

campo de la bobina por la fuerza magnética. Un tipo más moderno tiene un disco de hierro que está inclinado, tanto con respecto al eje de sus pivotes como al eje del campo de la bobina; cuando el disco gira tiende a quedar más paralelo con el eje de la bobina y por tanto con las líneas de flujo magnético. Otro diseño moderno tiene un aspa semicilíndrica de hierro, que gira al puntero cuando es movida por el campo magnético.

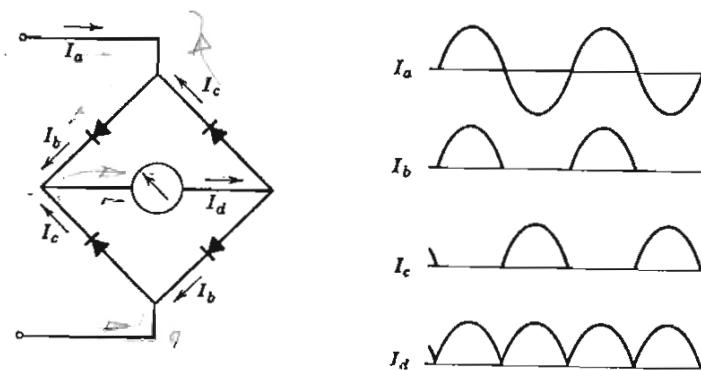


FIG. 4-19. Conexiones y corriente en un amperímetro rectificador

La deflexión del instrumento es por tanto, proporcional al promedio de I_d , la corriente rectificada. Esta es el promedio de medio ciclo de la corriente alterna, si la onda de corriente alterna es simétrica. Como se desea el valor rms, en lugar del promedio de medio ciclo, la escala está calibrada tomando en cuenta el factor de forma (Ec. 4-22) de una onda senoidal, que es 1.11. El instrumento dará por consiguiente, el valor rms de una onda senoidal, pero para una onda de cualquier otra forma, la lectura del medidor rectificador no es muy útil, porque no es ni promedio, ni rms.

Si se utiliza un amperímetro de hierro dulce en lugar de un instrumento d'Arsonval, indicaría los valores rms automáticamente. Sin embargo, la mayor sensibilidad del movimiento d'Arsonval hace deseable su uso.

El instrumento con *termopar* tiene una resistencia a través de la que pasa la corriente que desea medirse; ver Fig. 4-20. Esta resistencia se calienta cuando la corriente fluye, calentando la unión de un termopar que está unido a ella. La otra unión del termopar está a la

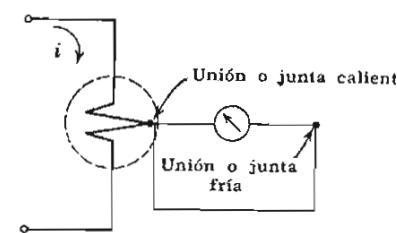


FIG. 4-20. Circuito de un amperímetro termopar

temperatura ambiente, así que cuando la resistencia calienta al termopar produce una pequeña fuerza electromotriz que hace circular corriente a través del instrumento de tipo d'Arsonval. La lectura del instrumento depende de la fuerza electromotriz del termopar, que a su vez está determinada por el aumento de temperatura de la resistencia, por lo que la escala puede calibrarse para indicar la corriente en el circuito principal. Como el efecto de la corriente en el circuito principal es calentar la resistencia y como el calor es igual a i^2R , el instrumento con termopar es inherentemente un instrumento rms, dándonos valores rms sin importar la forma de la onda.

Los instrumentos con rectificador pueden utilizarse con bastante exactitud en el rango de audiofrecuencia.* El instrumento con termopar se utiliza desde audiofrecuencias hasta muy altas radiofrecuencias y es el amperímetro standard en radiofrecuencia.

22. Voltímetro de tubo al vacío

El dispositivo usual para medir voltajes de radiofrecuencia es el voltímetro de tubo al vacío. El voltímetro de tubo al vacío de "onda completa, ley del cuadrado", usualmente calibrado con voltaje senoidal de 60 ciclos, nos da una indicación que es prácticamente voltaje rms para cualquier forma de onda y para cualquier frecuencia superior a la muy alta radiofrecuencia. El voltaje por medirse se aplica

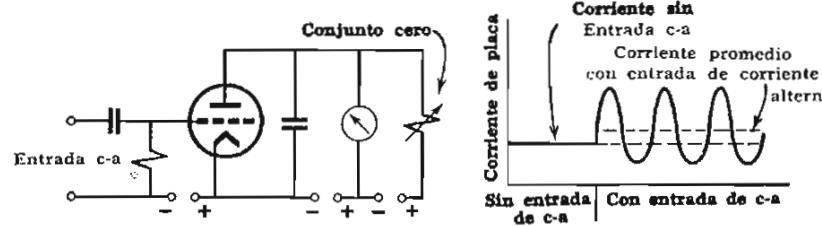


FIG. 4-21. Circuito de un voltímetro simple de tubo al vacío

a la rejilla de un triodo y la corriente promedio de placa se mide con un instrumento d'Arsonval. Cuando el voltaje alterno se aplica a la rejilla, la corriente promedio de placa se incrementa debido a la característica no lineal del tubo. El circuito de un voltímetro simple de tubo al vacío, se muestra en la Fig. 4-21, así como las curvas que ilustran el principio de operación. Un análisis cuantitativo, que depende

* Ver por ejemplo, Harris, Referencia 9.

de la característica de tubo, se encontrará en libros sobre mediciones electrónicas (por ejemplo Terman y Pettit, Referencia 10). Ver Sección 4 del Cap. 13.

23. Voltímetro de pico

Algunas veces se necesita un voltímetro de pico para medir el máximo, cresta o pico de la onda de voltaje, en vez del voltaje rms. No puede desechar por ejemplo, encontrar el voltaje máximo en un circuito pulsante: el voltaje de pico de cada pulso. Se utiliza un rectificador o tubo diodo, en serie con un capacitor tal como en la Fig. 4-22. El capacitor empieza a cargarse hasta el voltaje de pico, mientras el voltaje aplicado alcanza su máximo y entonces, cuando el vol-

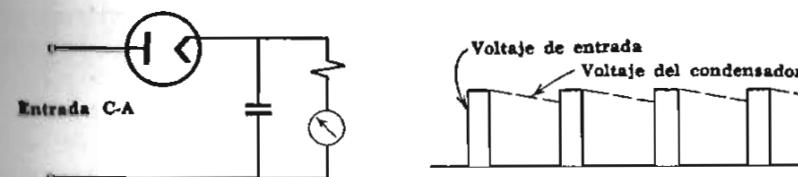


FIG. 4-22. Circuito del voltímetro de pico

taje aplicado disminuye, el capacitor permanece con el voltaje de pico entre sus terminales, porque es incapaz de descargarse a través del rectificador. Un voltímetro de d'Arsonval con extremada alta resistencia, se utiliza para leer el voltaje del capacitor. La alta resistencia es necesaria para prevenir una descarga apreciable del capacitor a través del medidor.

El voltímetro de pico suministra una tercera clasificación de los instrumentos: (1) promedio, (2) rms y (3) pico.

24. Osciloscopio de rayos catódicos

Se pueden mencionar de paso, otros dos instrumentos comunes. Uno es el osciloscopio de rayos catódicos en el que un rayo o chorro de electrones a alta velocidad se deflecta por medio de un campo eléctrico, Fig. 4-23. Se produce un campo eléctrico entre un par de placas, debido al voltaje aplicado que es el que desea indicarse y este campo eléctrico ejerce una fuerza sobre los electrones tal como la que los

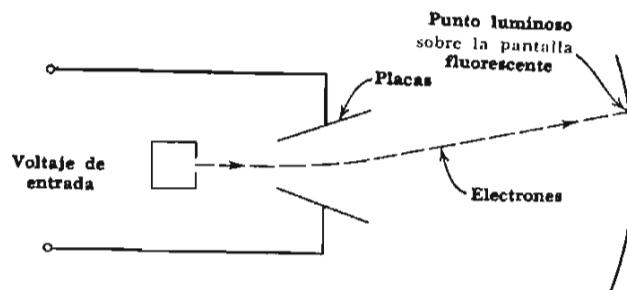


FIG. 4-23. Principio del osciloscopio de rayos catódicos

campos eléctricos ejercen sobre todas las partículas cargadas. Se observará que el osciloscopio de rayos catódicos con deflexión electroestática, es esencialmente un dispositivo para medición de voltaje; medirá corriente únicamente indicando el voltaje que la corriente produce entre las terminales de una resistencia. Indica valores instantáneos, más bien que promedios de cualquier clase.

25. Vatihorímetro

El *vatihorímetro* se utiliza en casi cada casa y edificio, para medir la energía consumida. El vatihorímetro usual es esencialmente un pequeño motor de inducción. Un disco de aluminio se hace girar por un par, proporcional en cada instante al producto del voltaje y la corriente. Si el disco estuviese restringido en su movimiento por un resorte helicoidal podría utilizarse como un vatímetro indicador, siendo su deflexión proporcional a la potencia promedio. Sin embargo, actualmente se le permite al disco girar continuamente y su velocidad controlada magnéticamente, es proporcional al par promedio y por tanto a la potencia promedio.

La Fig. 4-24 es un diagrama muy simplificado de un vatihorímetro de inducción. La corriente de línea activa dos de los imanes (mos trados en sección transversal como cuadrados sombreados) y el voltaje de línea hace que una corriente fluya por la bobina altamente reactiva del tercer imán. Aclaremos que este último produce corrientes de eddy en el disco de aluminio, como se sugiere por las líneas punteadas; estas corrientes de eddy fluyen en el campo magnético de los imanes de la corriente de línea y por tanto, existe un par que actúa sobre el disco, proporcional a la intensidad de las corrientes de eddy y a la intensidad del campo magnético. Por consiguiente, el par es

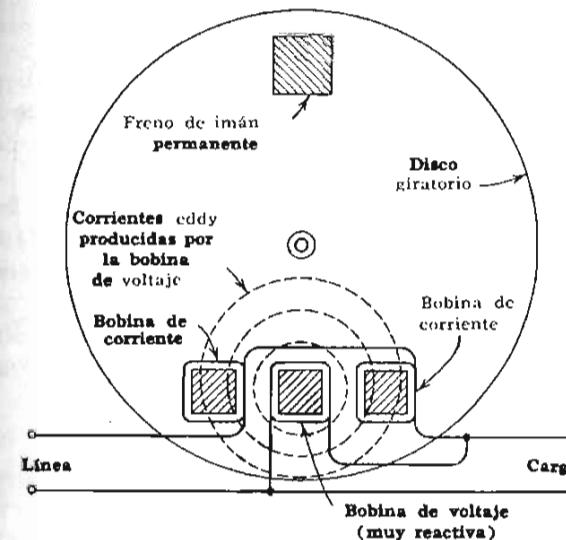


FIG. 4-24. Diagrama simplificado de un vatihorímetro de inducción

proporcional al producto de la corriente de línea, el voltaje de línea y (debido al ajuste cuidadoso de las relaciones de fase) el coseno del ángulo de fase entre la corriente y el voltaje.

El principio no es muy diferente del de el vatímetro dinamométrico. En el vatihorímetro de inducción el disco de aluminio ejerce la función de la bobina móvil, y una corriente proporcional al voltaje de linea se induce en el disco. Las bobinas de corriente de línea en el vatihorímetro corresponden a la bobina fija del instrumento dinamómetro, produciendo un campo magnético que causa una fuerza que se ejerce sobre el disco móvil. El disco, frenado por un imán permanente, gira con una velocidad proporcional al par promedio y por tanto a la potencia promedio.

El número total de revoluciones del disco de un vatihorímetro es contado por un tren de engranes similar a un reloj. Puesto que la velocidad es proporcional a la potencia promedio, el contador de revoluciones indica el producto de la potencia y el tiempo. Este producto es energía, medida en kilowatt-horas. La lectura del contador es por lo tanto una indicación de la energía consumida y dice cuánto debe pagar el consumidor.

26. Sumario

Este capítulo comienza con la idea de medir cantidades alternas en función de la potencia. La potencia instantánea y promedio se toman en consideración. Se definen los valores rms de corriente y voltaje y se menciona su importancia práctica.

Se discute la potencia instantánea y promedio en una resistencia, en una inductancia y en una capacitancia. Se define el factor de potencia. Se presentan los conceptos de potencia activa, reactiva y compleja. Se mencionan las unidades de potencia.

Se describen someramente los instrumentos para medir cantidades rms y promedio, incluyendo ciertos dispositivos electrónicos para mediciones de alta frecuencia.

PROBLEMAS

1. Verificar por integración que el promedio de una onda de corriente senoidal a través de medio ciclo es $2I_{m}/\pi$. § 1

2. ¿Está usted seguro de que las Ecs. 4-13 se aplican a ondas que no son senoidales? Explíquelo. § 4

3. El valor rms de un voltaje alterno senoidal de 60 cps es de 120 volts. ¿Cuál es el voltaje máximo de la onda? ¿Cuál es el promedio de medio ciclo? § 5

4. El valor rms de una corriente alterna senoidal de 1 000 cps es de 10.0 amperes. ¿Cuál es la corriente máxima de la onda? ¿Cuál es el promedio de medio ciclo? § 5

5. El voltaje de salida de un rectificador de onda completa es una sucesión de medias ondas senoidales como se ve en la Fig. 14-17, Pág. 477. Encontrar el valor rms de este voltaje de salida, siendo el máximo 1. § 5

6. El voltaje de salida de un rectificador de media onda retiene solamente las medias ondas senoidales positivas, como se ve en la Fig. 14-15, Pág. 475. Encontrar el valor rms de este voltaje de salida, siendo el máximo 1. § 5

7. Encontrar el valor rms de la onda cuadrada marcada A, en el Prob. 5 del Cap. 1 (Pág. 44). ¿Cuáles son los factores de cresta y forma? Encontrar el valor rms de la onda marcada C. § 5

8. Encontrar el valor rms de la onda triangular marcada B en el Prob. 5, Cap. 1. § 5

9. Llenar los pasos faltantes en la derivación de W en la nota

al pie de la Sección 8. Hacer todas las integrales definidas, dando especial atención a los límites. § 8

10. Integrar la potencia instantánea para obtener la potencia promedio de una capacitancia pura. (Este cálculo se mencionó pero no se incluyó en la Sección 9.) § 9

11. (a). Estimar el factor de potencia del circuito para el que se aplica la Fig. 4-8; explique las bases de su estimación. (b) Dibuje curvas similares a la Fig. 4-8 para un circuito de resistencia y capacitancia con factor de potencia de 25%. § 11

12. Cuando un voltaje senoidal rms de 2300 volts, 60 cps de frecuencia, se aplica a las dos terminales de un bloque, la corriente es 5 amperes y el factor de potencia es de 0.20. Se sabe que el bloque contiene un capacitor. Puede resultar consumo de potencia en el bloque porque el capacitor tiene:

(a) una conductancia en paralelo; siendo G independiente de la frecuencia.

(b) Una resistencia en serie, siendo R independiente de la frecuencia.

(c) Dieléctrico pobre, teniendo 0.2 de factor de potencia a todas las frecuencias.

Encontrar, para cada una de estas tres probabilidades, qué corriente y factor de potencia habría si la magnitud del voltaje aplicado permanece igual pero la frecuencia se incrementa a 180 cps. § 11

13. Un motor de inducción (monofásico) recibe 6.3 amperes a 118 volts, 60 cps. La potencia eléctrica del motor es de 0.5 kilowatts. Encontrar el factor de potencia y el ángulo de adelanto o atraso de la corriente. Encontrar la potencia reactiva y la potencia compleja. Dibujar un diagrama fasorial. § 16

14. La corriente de un micrófono es de 34 ma, el voltaje terminal es de 9.8 volts. Un osciloscopio muestra que el ángulo entre el voltaje y la corriente es de 42°. Encontrar la potencia de entrada y la impedancia efectiva. Dibujar un diagrama fasorial. § 16

15. Un motor de inducción monofásico trabajando a 245 volts, 60 cps, 0.80 factor de potencia, recibe 1.75 kw de potencia activa. Se va a conectar un capacitor en paralelo para lograr que las dos juntas tengan 0.50 kwa de potencia reactiva. Encontrar la capacitancia necesaria. Dibujar el diagrama fasorial. § 16

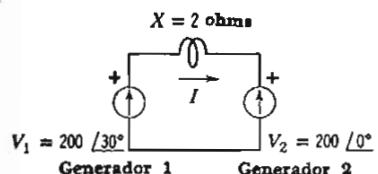
16. Encontrar la potencia P suministrada por uno de estos generadores al otro. Dígase cuál está produciendo y cuál absorbiendo potencia eléctrica (y cómo lo sabe usted). Dibujar un diagrama fasorial mostrando V_1 , V_2 e I . Ver Sección 9-2 si es necesario. § 16

17. El devanado de un generador tiene 1 ohm de resistencia y 9 ohms de reactancia. El voltaje terminal del generador es de 2 400 volts en circuito abierto (esto es, sin carga conectada en las terminales del generador). (a) ¿Qué impedancia en las terminales del generador recibiría la mayor potencia activa? (b) ¿Cuánta potencia? (c) ¿Cómo podría obtenerse esta carga con una conexión en serie de R y C ? (d) ¿Y por una conexión en paralelo de R y C ? § 16

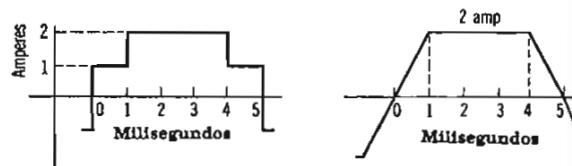
18. Si el generador del Prob. 17 se cargara con una resistencia sola, ¿qué resistencia recibiría la potencia máxima? § 16

19. Una batería está siendo cargada con un rectificador a través de un reactor de resistencia. La corriente fluye en pulsos; habiendo 60 pulsos por segundo. En una repisa se encuentran amperímetros de los siguientes tipos y pueden usarse: d'Arsonval, electrodinámico, hierro dulce, rectificador y termopar. (a) Si el objeto es el de medir cuánto se está cargando la batería, ¿qué instrumentos pueden usarse apropiadamente? Haga una lista en el orden en que usted los preferiría. (b) Si el objeto es el de encontrar la cantidad de calor desarrollada en la resistencia en serie con la batería, ¿qué instrumentos podría usted usar? Haga una lista en el orden en que usted los preferiría. Tanto en (a) como en (b), explique su preferencia.

§ 21



Prob. 16



Problema 22

20. La corriente suministrada por un rectificador de media onda a una carga resistiva, es una serie de medias ondas senoidales espaciadas como se muestra en la Fig. 14-15 (Pág. 475). Si la cresta de cada media onda es I_m , ¿qué corriente indicaría en el circuito un amperímetro (a) d'Arsonval y (b) dinamómetro? (c) ¿Qué potencia promedio se envía a la carga R ? § 20

21. En la Ec. 4-45, muestre cómo varía la potencia de la carga con la resistencia de la misma (esto es, trazar P_1/E^2 como una función de R_1/R_g). § 16

22. Se muestran dos ondas, medio ciclo cada una. Encontrar la corriente efectiva (rms) de cada onda. Comparar las dos. § 5

5

Análisis de Circuitos Simples

1. Análisis de circuitos

El análisis de un circuito usualmente significa un estudio para determinar todas las corrientes y voltajes, cuando las fuentes, impedancias y el esquema de conexiones se han dado. La síntesis o diseño de un circuito, por otro lado, implica que las impedancias y sus diagramas de conexiones se determinen apropiadamente para unas necesidades dadas. Debe tenerse pericia en el análisis antes de intentar un estudio organizado de la síntesis.

Los capítulos precedentes han dado los suficientes principios de los circuitos eléctricos para permitirnos poner ahora atención a los métodos de análisis. Una gran parte del análisis del circuito se hace sustituyendo por un circuito dado, otro que es equivalente pero más simple.

2. Equivalencia de redes de dos terminales

El bloque de la Fig. 5-1 contiene una red eléctrica con dos terminales. Esta red es equivalente a otra red de dos terminales si la impedancia de entrada de una es igual a la impedancia de entrada de la otra. También son iguales si las admitancias de entrada son iguales, porque la admisión es la recíproca de la impedancia y si las impedancias son iguales, lo son también las admisiones.

En el párrafo anterior por *impedancia de entrada* se entiende la razón entre las transformadas del voltaje terminal y la corriente

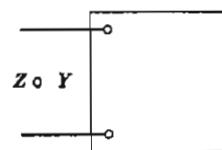


FIG. 5-1. Red de dos terminales

entrante en la red. La impedancia es una cantidad compleja y las componentes real e imaginaria de la impedancia de entrada, se llaman comúnmente *resistencia de entrada* y *reactancia de entrada*. Esto es por definición; pero no indica necesariamente que la resistencia de entrada sea la resistencia de cualquier resistencia en particular — y usualmente son funciones de la frecuencia y no se obtienen físicamente como elementos individuales. Similarmente las componentes real e imaginaria de la *admitancia de entrada* se llaman respectivamente, *la conductancia de entrada* y *la susceptancia de entrada*.

Se trabajará con rectores.

COMBINACIÓN EN SERIE. Un elemento único es equivalente a varios elementos en serie si su impedancia es igual a la suma de las impedancias de ellos. Esto es, que en la Fig. 5-2a existe equivalencia, si

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 \quad (5-1)$$

Entre las terminales de los cuatro elementos en serie, si la corriente es I , el voltaje es $Z_1I + Z_2I + Z_3I + Z_4I = (Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4)I$. Entre las terminales del elemento único equivalente, si la corriente es I , el voltaje es ZI , y según la Ec. 5-1, $= IZ (Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4)I$. Así queda comprobada la equivalencia.

La admitancia del elemento equivalente se encuentra en función de las admitancias individuales como sigue. Según la Ec. 5-1, como $Z = 1/Y$, por tanto,

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2} + \frac{1}{Y_3} + \frac{1}{Y_4} \quad (5-2)$$

De donde Y del elemento equivalente, se encontrará

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{\frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2} + \frac{1}{Y_3} + \frac{1}{Y_4}} \\ &= \frac{Y_1 Y_2 Y_3 Y_4}{Y_1 Y_2 Y_3 + Y_1 Y_2 Y_4 + Y_1 Y_3 Y_4 + Y_2 Y_3 Y_4} \end{aligned} \quad (5-3)$$

Un importante caso particularmente especial, es el de dos admittancias en serie. Entonces

$$Y = \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} \quad (5-4)$$

COMBINACIÓN EN PARALELO. Un elemento único es equivalente a un número de elementos en paralelo, si su admitancia es igual a la

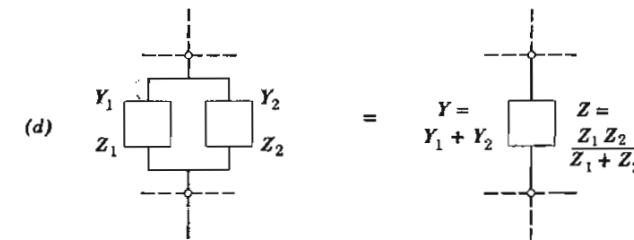
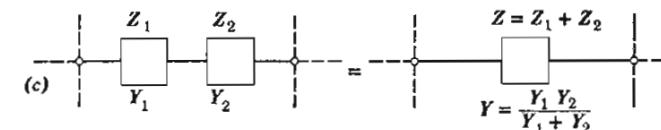
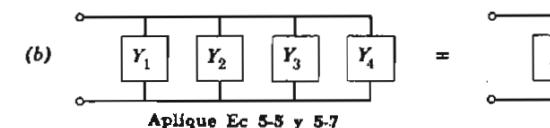
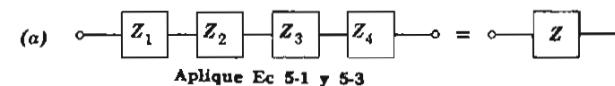


FIG. 5-2. Sustitución de elementos únicos por combinaciones serie y paralelo; (a) y (b) de cuatro elementos y (c) y (d) el caso especial de dos elementos

suma de las admitancias de ellos. Esto es, que en la Fig. 5-2b hay equivalencia, si

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 \quad (5-5)$$

La impedancia equivalente se encuentra en función de las impedancias individuales, como sigue. De la Ec. 5-5,

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4} \quad (5-6)$$

Resolviendo para la Z equivalente:

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4}} = \frac{Z_1 Z_2 Z_3 Z_4}{Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_3 Z_4 + Z_2 Z_3 Z_4} \quad (5-7)$$

Otra vez, el más importante caso especial es el de la impedancia de dos elementos en paralelo:

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (5-8)$$

Estos muy importantes casos especiales de dos elementos en serie y en paralelo, están ilustrados en las Figs. 5-2c y d. Las Figs. 5-2c y d sugieren que los elementos en cuestión son parte de redes más extensas, pero la idea básica es que la red puede simplificarse por sustitución de un elemento único, por los dos elementos (o más) a los que es equivalente. Haciendo la sustitución de elementos únicos por combinaciones paralelo y serie de elementos, de acuerdo con estas fórmulas simples, las redes complicadas de dos terminales pueden reducirse paso a paso hasta obtener un solo elemento único entre las dos terminales. Este es un método tremadamente útil.

3. Reducción de redes

EJEMPLO 1. Dado el circuito de la Fig. 5-3a, encontrar una resistencia única equivalente a esta combinación de cuatro resistencias.

SOLUCIÓN. No existen dos resistencias en serie para comenzar con ellas, pero hay tres en paralelo. Podemos por tanto, combinar estas tres en una sola resistencia única equivalente, de resistencia R' como en la Fig. 5-3b: utilizando la Ec. 5-7, la resistencia equivalente R' de estas tres resistencias es

$$R' = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 1$$

El circuito, ahora reducido al de la Fig. 5-3b, tiene a R_4 y a R' en serie, la solución final (de la Ec. 5-1) es obviamente

$$R = R_4 + R' = 2 + 1 = 3$$

EJEMPLO 2. Reducir la red de la Fig. 5-4 a una impedancia única equivalente.

SOLUCIÓN. El primer paso es encontrar equivalentes para las dos ramas en paralelo. (Las dos ramas en paralelo se identificarán por los subíndices *bce* y *bde*; el elemento único equivalente a las dos en paralelo por *be*). De la Ec. 5-1.

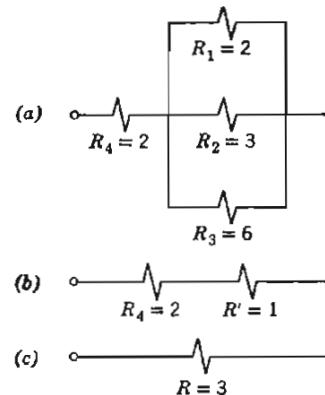


FIG. 5-3. Ejemplo 1. (a) Circuito por simplificarse. (b) Despues del primer paso. (c) Solución

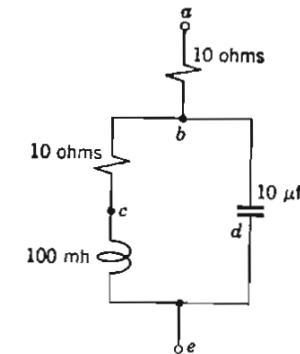


FIG. 5-4. Ejemplo 2

$$Z_{bce} = Z_{bc} + Z_{ce} = 10.0 + j0.1\omega$$

También

$$Z_{bde} = -j \frac{1}{10\omega 10^{-6}} = -j \frac{10^5}{\omega}$$

Combinando las dos en paralelo para encontrar una impedancia única equivalente, de la Ec. 5-8,

$$Z_b = \frac{(10.0 + j0.1\omega)(-j10^5/\omega)}{(10.0 + j0.1\omega) - (j10^5/\omega)}$$

La multiplicación en el numerador y la suma en el denominador, dan

$$Z_b = \frac{10^4 - j10^6/\omega}{10.0 + j(0.1\omega - 10^5/\omega)}$$

Esta es la impedancia única equivalente de *b* a *e*. La resistencia en serie entre *a* y *b* debe ahora sumarse:

$$Z_{ae} = 10.0 + \frac{10^4 - j10^6/\omega}{10.0 + j(0.1\omega - 10^5/\omega)} \quad (5-9)$$

Esta z_{ae} , respuesta de nuestro problema, es una expresión matemática que se aplica para todas las frecuencias. Nos encaramos ahora, por primera vez con esta importante pregunta, "¿es realizable físicamente?". ¿Podemos sacar los cuatro elementos (dos resistencias, un inductor y un capacitor) del circuito de la Fig. 5-4 y reemplazarlos por una impedancia única equivalente, hecha de partes físicamente posibles que puedan comprarse o construirse? La respuesta a esta pregunta tiene dos partes: (1) para cualquier frecuencia especificada, si es físicamente realizable; pero (2) una impedancia que sea equivalente a *todas* las frecuencias *no* es físicamente realizable.

Especifiquemos como un ejemplo, la equivalencia a 60 cps. A 60 ciclos, $\omega = 2\pi f = 377$ (este es un número que merece recordarse). Sustituyendo 377 por ω en la expresión para z_{ae} :

$$\begin{aligned} Z_{ae} &= 10.0 + \frac{10^4 - j2650}{10.0 + j(37.7 - 265)} = 10.0 + \frac{10^4 - j2650}{10.0 - j227} \\ &= 10.0 + \frac{1.034 \cdot 10^4 / -14.8^\circ}{227 / -87.5^\circ} = 10.0 + 45.5 / 72.7^\circ \\ &= 10.0 + (13.5 + j43.4) \\ &= 23.5 + j43.4 \\ &= 49.4 / 61.5^\circ \end{aligned}$$

Entonces vemos que sería posible sustituir por el circuito íntegro de la Fig. 5-4, una impedancia de 23.5 ohms de resistencia y 43.4 ohms de reactancia inductiva, si la frecuencia fuera de 60 cps y nunca otra diferente.

Para otra frecuencia, z_{ae} podría representarse por otra impedancia diferente, físicamente realizable; y para otra tercera frecuencia, por otra diferente aún. Aunque la Ec. 5-9 para z_{ae} es correcta para todas las frecuencias, no es posible construir ninguna impedancia única que satisfaga esta ecuación, a más de una frecuencia.

4. Distribución de la corriente

La simplificación de una red por la combinación de impedancias en serie y admitancias en paralelo, es a menudo la primera etapa del análisis. Cuando una red de dos terminales se reduce a una impedancia única, se conoce la relación entre el voltaje terminal y la corriente terminal. En efecto, la impedancia de entrada a una red de dos terminales, se dice que *caracteriza* a la red, signifi-

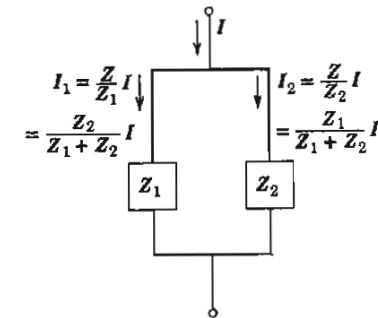
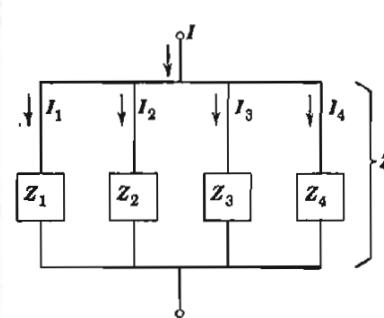


FIG. 5-5. Distribución de corriente entre ramas paralelas
FIG. 5-6. División de corriente entre dos ramas paralelas

cando que la impedancia de entrada (naturalmente función de la frecuencia, como en la Ec. 5-9) indica todo lo que debe conocerse acerca de la red de dos terminales, sobre el resto, incluyendo otras redes conectadas, fuentes, cargas e instrumentos de medición. Una red de dos terminales no importa qué tan complicada sea, queda ampliamente caracterizada por la función de una impedancia única.

Sin embargo, dentro de la red de dos terminales, hay mucho por conocerse. ¿Cómo se divide la corriente entre las varias ramas? ¿y cuáles son los potenciales en los varios nodos?, aunque la potencia total de entrada se encuentra del voltaje terminal y la corriente, la distribución detallada de la disipación de potencia puede requerirse—quizás para evitar sobrecalentamientos de los elementos individuales. Investiguemos primero la distribución de corrientes.

La Fig. 5-5 muestra algunos elementos conectados en paralelo. Para encontrar la distribución de corriente, notaremos primero que existe el mismo voltaje entre las terminales de todos los elementos. Entonces podemos escribir para cada elemento y para la impedancia equivalente Z :

$$V = I_1 Z_1 = I_2 Z_2 = I_3 Z_3 = I_4 Z_4 = IZ \quad (5-10)$$

De aquí podemos encontrar cualquiera de las corrientes individuales si conocemos la corriente total y la impedancia equivalente:

$$I_1 = \frac{Z}{Z_1} I \quad I_2 = \frac{Z}{Z_2} I \quad \text{etc.} \quad (5-11)$$

Esta es la fórmula general. Un caso especial que se aplica cuando hay solamente dos ramas en paralelo se ilustra en la Fig. 5-6. Combinando la Ec. 5-11 con la Ec. 5-8,

$$I_1 = \frac{Z}{Z_1} I = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} I \quad (5-12)$$

$$I_2 = \frac{Z}{Z_2} I = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} I$$

Tanto la Ec. 5-11 como la 5-12 es importante que se memoricen, ahorrando tiempo a la larga.

5. Distribución del voltaje

La distribución del voltaje entre un número de elementos en serie se encuentra por reglas similares e igual de simples. La corriente debe ser la misma a través de todos los elementos. Por tanto, refiriéndonos a la Fig. 5-7,

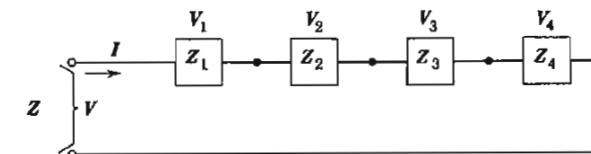


FIG. 5-7. Distribución de voltaje entre elementos en serie

$$I = \frac{V_1}{Z_1} = \frac{V_2}{Z_2} = \frac{V_3}{Z_3} = \frac{V_4}{Z_4} = \frac{V}{Z} \quad (5-13)$$

De donde

$$V_1 = \frac{Z_1}{Z} V \quad V_2 = \frac{Z_2}{Z} V \quad \text{etc.} \quad (5-14)$$

La relación de las Ecs. 5-14, tan aparente que difícilmente necesita demostración, se llama algunas veces ecuación del potenciómetro. Las Ecs. 5-11 y 5-14 se expresan en función de impedancia Z . Pueden también expresarse igualmente en función de admittance Y , convirtiéndose en

$$I_1 = \frac{Y_1}{Y} I \quad \text{etc.} \quad (5-15)$$

y

$$V_1 = \frac{Y}{Y_1} V \quad \text{etc.} \quad (5-16)$$

Estas ecuaciones son de igual importancia teórica que las Ecs. 5-14 y 5-11 y se llaman sus parejas. Sin embargo, prácticamente las ecuaciones en función de impedancias son de uso más frecuente.

6. Ejemplo

Vamos a ilustrar la distribución de corriente y voltaje, con referencia a la red de la Fig. 5-4. Usaremos las impedancias a 60 ciclos

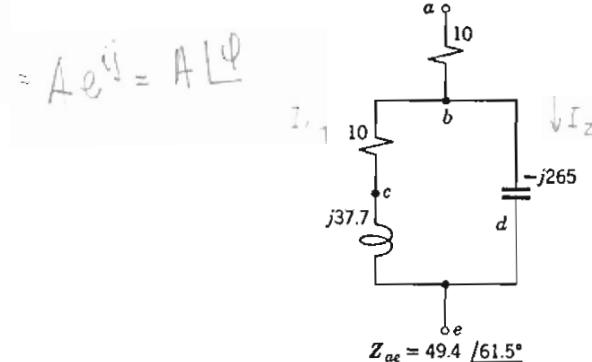


FIG. 5-8. Red de la Fig. 5-4; las impedancias se indican en ohms

como en la Fig. 5-8, calculadas con las ecuaciones de la Sec. 3:

$$Z_{bce} = 10.0 + j37.7 = 39.0 / 75.1^\circ$$

$$Z_{bde} = -j \frac{10^5}{377} = -j265$$

Vamos a asumir un voltaje aplicado a 100 volts y tomemos este voltaje como fasor de referencia (Fig. 5-9). La corriente total de entrada será

$$I_{ae} = \frac{100 / 0^\circ}{49.4 / 61.5^\circ} = 2.02 / -61.5^\circ$$

Ahora, de las Ecs. 5-12, esta corriente total se dividirá entre las dos ramas paralelas como sigue:

$$\begin{aligned} I_{bce} &= \frac{(-j265)(2.02 / -61.5^\circ)}{(10.0 + j37.7) - j265} = \frac{(-j265)(2.02 / -61.5^\circ)}{10.0 - j227} \\ &= \frac{535 / -151.5^\circ}{227 / -87.5^\circ} = 2.36 / -64.0^\circ \end{aligned}$$

$$I_{bde} = \frac{(39.0 / 75.1^\circ)(2.02 / -61.5^\circ)}{227 / -87.5^\circ} = 0.347 / 101.1^\circ$$

Siempre que una división de corriente o de voltaje se calcula, es posible una comprobación obvia de los resultados, sumando las corrientes de las componentes. Esta oportunidad de encontrar errores es demasiado valiosa para olvidarse.

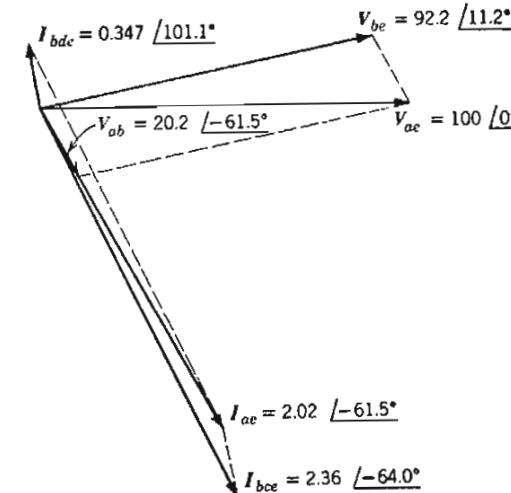


FIG. 5-9. Diagrama de transformadas del circuito de la Fig. 5-8

$$\begin{aligned} I_{ac} &= I_{bce} + I_{bde} = 2.36 / -64.0^\circ + 0.347 / 101.1^\circ \\ &= (1.035 - j2.12) + (-0.0667 + j0.340) \\ &= 0.968 - j1.78 = 2.03 / -61.5^\circ \end{aligned}$$

La comparación con el valor original de I_{ae} muestra una aproximación razonable para el cálculo con regla.

Ya encontramos la corriente en cada rama de la red. Queda por encontrar la distribución del voltaje. Encontremos V_{ab} y V_{be} (como la resistencia y la reactancia de la rama inductiva son probablemente las constantes de una bobina única, el potencial del punto c no tiene significación física y lo pasaremos por alto). Aunque hay un método más fácil, utilicemos las Ecs. 5-14:

$$V_{ab} = \frac{(10)(100)}{49.4 / 61.5^\circ} = 20.2 / -61.5^\circ$$

Para encontrar V_{be} es conveniente utilizar $Z_{be} = 45.5/72.7^\circ$ para facilitar el cálculo, obtenido

$$V_{be} = \frac{(45.5/72.7^\circ)(100)}{49.4/61.5^\circ} = 92.2/11.2^\circ$$

Otra vez es posible la comprobación de la exactitud de los resultados:

$$\begin{aligned} V_{ae} &= V_{ab} + V_{be} = 20.2/-61.5^\circ + 92.2/11.2^\circ \\ &= (9.6 - j17.8) + (90.4 + j17.9) = 100.0 + j0.1 \end{aligned}$$

Que es razonablemente bueno para trabajo con regla de cálculo.

7. Uso del diagrama de transformadas

El dibujo del diagrama de transformadas de las cantidades incluidas, debería ser parte del análisis de cada circuito. Si el dibujo de los diagramas es hecho cuidadosamente, constituye un análisis gráfico del circuito y no se necesita nada más. Sin embargo, usualmente es más fácil hacer el análisis numéricamente con regla de cálculo, dibujando sólo esquemas a mano libre de los diagramas de transformadas. Estos esquemas no deberán *nunca* omitirse (a no ser que el problema sea tan simple que pueda verse el diagrama mentalmente, sin utilizar lápiz y papel) porque no solamente ayudan a comprender lo que se hace, sino que también ayudan a ahorrar tiempo, evitando errores aritméticos obvios y groseros, tal como la inversión de un signo o la colocación errónea de un punto decimal.

Vamos por consiguiente, a dibujar un diagrama de transformadas de las corrientes y voltajes del ejemplo que acabamos de terminar. Esto habría sido mejor hacerlo según se iba trabajando la solución. Se debería dibujar primero la transformada de referencia V_{ae} tal como en la Fig. 5-9. Esta puede tener cualquier longitud conveniente para representar 100 volts (su valor rms, por supuesto) y la escala de todas las transformadas de voltaje de este diagrama, se deciden cuando se escoge esta longitud.

El primer cálculo nos da I_{ae} que se dibuja entonces al ángulo negativo apropiado de 61.5 grados. La escala que determina la longitud de esta transformada puede también escogerse por con-

veniencia, porque ésta es la primera corriente del diagrama. A continuación se dibuja a la misma escala I_{bce} e I_{bde} , que se sumarán para obtener I_{ae} como se indica con líneas punteadas en la figura.

A continuación se calculan y trazan V_{ab} y V_{be} . Naturalmente V_{ab} es colineal con I_{ae} porque es el voltaje entre las terminales de una resistencia, si no fueran colineales no sería correcto. V_{be} deberá estar en cuadratura con I_{bde} , corriente del capacitor—aquí se ha deslizado un error de 0.1 grados, pero éste se encuentra aritméticamente y no con el diagrama. También I_{bce} de la rama inductiva debería estar atrasado 75.1 grados con respecto al voltaje V_{be} , pero el mismo ligero error aparece aquí. Finalmente V_{ab} y V_{be} se suman para obtener V_{ae} . Así, todas las relaciones simples que son obvias en el diagrama del circuito se ven satisfechas y podemos estar seguros de que no se ha cometido ningún error radical.

8. Un ejemplo de resonancia

Refiriéndonos otra vez a la Fig. 5-4 sería interesante conocer si hay alguna frecuencia a la que esta combinación serie-paralelo de elementos puede representarse por una resistencia única pura en lugar de la impedancia inductiva que encontramos para 60 cps. El estudio del diagrama de transformadas de la Fig. 5-9 nos lleva a sospechar que esto puede ser posible, a una frecuencia superior a la de 60 cps la corriente en el capacitor I_{bde} llegaría a ser mayor y la corriente I_{bce} a través de la rama inductiva tendería a disminuir y su suma, la corriente total I_{ae} , estaría a una determinada frecuencia, en fase con el voltaje aplicado V_{ae} . La impedancia equivalente Z_{ae} sería entonces real únicamente.

¿Cómo podemos calcular la frecuencia que hará real a Z_{ae} ? Para que Z_{ae} sea real, la parte imaginaria de Z_{ae} en la Ec. 5-9 debe ser cero. Para encontrar la parte imaginaria de Z_{ae} se deberá racionalizar la fracción en esa ecuación. Utilizando el método de la Ec. 3-6, el numerador y el denominador de la fracción, se multiplican por el conjugado del denominador obteniendo

$$\frac{[10^4 - j10^6/\omega][10.0 - j(0.1\omega - 10^5/\omega)]}{(10.0)^2 + (0.1\omega - 10^5/\omega)^2}$$

El denominador es ahora real, así que si la parte imaginaria del numerador puede hacerse igual a cero, toda la expresión para Z_{ae} será únicamente real. Efectuemos por consiguiente la multiplicación in-

dicada en el numerador; reteniendo únicamente los términos imaginarios e igualándolos a cero:

$$10^4(0.1\omega - 10^5/\omega) + (10^6/\omega)10.0 = 0$$

$$10^3\omega - \frac{10^9}{\omega} + \frac{10^7}{\omega} = 0$$

Resolviendo para la frecuencia:

$$\omega^2 - 10^6 + 10^4 = 0 \quad \omega = 995$$

$$f = \frac{995}{2\pi} = 158 \text{ cps}$$

Esto nos dice que la impedancia equivalente es una resistencia pura, si la frecuencia es de 158 cps. Calculemos la impedancia equivalente para esta frecuencia.

Utilizando otra vez la Ec. 5-9, hacemos $\omega = 995$. Entonces

$$\begin{aligned} Z_{ae} &= 10.0 + \frac{10,000 - j1005}{10.0 + j(99.5 - 100.5)} = 10.0 + \frac{10,000 - j1005}{10.0 - j1.0} \\ &= 10.0 + 1000 = 1010 \text{ ohms} \end{aligned}$$

Vemos que para esta frecuencia de 158 cps, el equivalente de las dos ramas paralelas del circuito, es una resistencia pura con el sorprendentemente alto valor de 1 000 ohms.

Una relación interesante aparece cuando comparamos la reactancia de la rama inductiva del circuito con la de la rama capacitiva a esta frecuencia particular de 158 cps. Para la inductancia, $X = \omega L = 99.5$ ohms. Para la capacitancia, $X = -1/\omega C = -100.5$ ohms. Por tanto, las reactancias son casi iguales y opuestas para esta frecuencia. Las magnitudes de impedancia de las dos ramas son casi las mismas: la impedancia de la rama inductiva es $Z_{bce} = 10 + j99.5 = 100.0/84.26^\circ$.

DIVISIÓN DE LA CORRIENTE. Con 100 volts aplicados (ver Fig. 5-10) la corriente I_{ae} que entra en las terminales, es

$$I_{ae} = \frac{100/0^\circ}{1010/0^\circ} = 0.0990/0^\circ$$

Esta pequeñísima corriente, en fase con el voltaje aplicado, se mues-

tra en la Fig. 5-10. La caída de voltaje en la resistencia de 10 ohms, entre a y b es

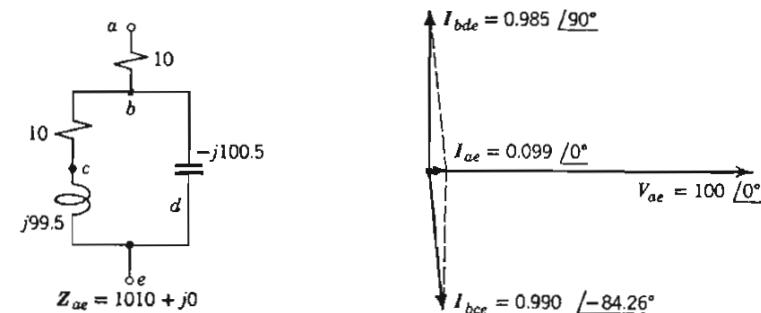


FIG. 5-10. Corriente e impedancias a frecuencia de resonancia

$$V_{ab} = (0.0990/0^\circ)(10/0^\circ) = 0.990/0^\circ$$

Sustrayéndolo al voltaje aplicado de 100 volts, nos da el voltaje entre terminales de las ramas paralelas:

$$V_{be} = 100/0^\circ - 0.990/0^\circ = 99.0/0^\circ$$

La corriente en cada una de las ramas paralelas se encuentra ahora, partiendo de este voltaje:

$$I_{bce} = \frac{99.0/0^\circ}{100.0/84.26^\circ} = 0.990/-84.26^\circ = 0.099 - j0.985$$

$$I_{bde} = \frac{99.0/0^\circ}{100.5/-90^\circ} = 0.985/+90^\circ = 0.0 + j0.985$$

(Otra vez hacemos aquí una comprobación: sumando estas dos, obtenemos $0.099 + j0$, que se ve que es valor correcto de I_{ae}).

Las corrientes de las dos ramas están dibujadas en la Fig. 5-10. Aunque son casi iguales en magnitud, la corriente a través de la rama inductiva, tiene un ángulo negativo de casi 84 grados y la corriente a través del capacitor tiene un ángulo positivo de 90 grados. La corriente total I_{be} es muy pequeña (haciendo a la impedancia equivalente muy alta) y exactamente en fase con el voltaje (haciendo real a la impedancia equivalente).

Se notará que la corriente a través de cada rama del circuito paralelo es relativamente grande, a esta frecuencia de resonancia; solamente la corriente total es muy pequeña. Esto es, porque la suma de las dos corrientes de la rama es pequeña, porque están casi a 180 grados fuera de fase una de otra. La mejor representación física puede obtenerse quizás, visualizando una corriente sustancial circulando hacia atrás y hacia adelante en el lazo del circuito paralelo, con una corriente muy pequeña suministrada por una fuente externa, para alimentar las pérdidas. Hay una gran circulación de potencia reactiva (como se discutió en el Cap. 4) en el circuito resonante, que se mantiene a sí misma. Sin embargo, hay una pequeña pérdida de potencia activa en la resistencia del circuito resonante y estas pérdidas deben suministrarse con potencia activa del circuito externo.

En esta sección la resonancia ha sido tratada únicamente como un ejemplo, quizás algo especial, del análisis de circuitos. En el Cap. 7 se tratará con atención sistemática, la resonancia en forma general.

9. Métodos del análisis de circuitos

El método de sustitución, con la reducción de una red a una impedancia única, ha sido ilustrado en dos ejemplos. Una red se simplifica paso a paso hasta que queda una sola impedancia. Para completar el análisis, se deberán encontrar las corrientes en las diferentes ramas y los voltajes de los diferentes nodos. En un ejemplo (Sec. 6) se utilizaron las fórmulas que dan la distribución de corriente y voltaje. En el otro (Sec. 8) el método siguió este patrón: de un voltaje se determinó una corriente; de esta corriente otros voltajes (si se necesitan) y así sucesivamente.

Hay muchos métodos de analizar circuitos y cada ingeniero aprenderá a utilizar un buen número de ellos, escogiendo los métodos para resolver el problema a mano. Algunos como posteriormente veremos, son bastante generales. Otros como los ilustrados en este capítulo, son rápidos y fáciles. Todos deberán usarse con juicio, no utilizando los métodos más poderosos si se puede utilizar alguna otra forma más simple. Como dice R. H. Frazier en un texto similar (Ref. 11) no es apropiado utilizar un martíete para clavar tachuelas y por otro lado, un martillo ligero no es útil para hincar pilotes.

10. Método de escalera

Un ejemplo de una red que puede analizarse fácilmente con un método simple se indica en la Fig. 5-11. Es una red del tipo de es-

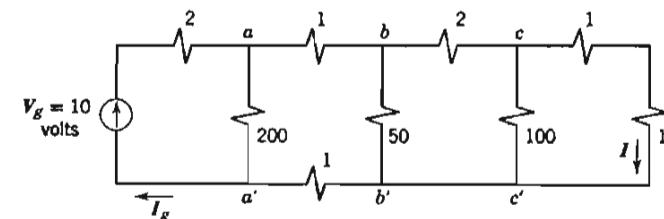


FIG. 5-11. Red tipo escalera, los elementos son resistencia pura con sus valores mostrados en ohms

calera, muy común, tanto en sistemas de comunicación como de potencia. Para atacar este análisis por los métodos que se han discutido se requeriría primero combinar la resistencia de 10 ohms (seguramente una carga) con la resistencia de 1 ohm que está en serie (posiblemente la impedancia de una sección de una línea de teléfono, potencia o radiofrecuencia); el resultado se combina entonces con la resistencia de 100 ohms, con la que las dos primeras están en paralelo y el resultado de esto con el valor en serie de 2 ohms; el equivalente de todo está en paralelo con el elemento de 50 ohms y se combinan, el resultado está en serie con 2 resistencias de 1 ohm cada una. Todas están en paralelo con la resistencia de 200 ohms y finalmente se suma el elemento en serie de 2 ohms.

El valor del voltaje aplicado se divide entonces entre la resistencia equivalente de la red entera, para determinar la corriente a través de la fuente y a través del primer elemento de 2 ohms; la división de corriente entre la resistencia de 200 ohms y el equivalente de todo el resto de la red, se calculará entonces; la última fluirá por los elementos de 1 ohm y a su vez se divide entre la resistencia de 50 ohms y el resto del sistema. Este método continúa (se hace tedioso hasta describirlo y si cada elemento tiene una impedancia compleja, el cálculo aritmético consumirá mucho tiempo) hasta que al final, cada corriente, incluyendo la de la carga de 10 ohms, se ha encontrado.

No hay ningún error en este análisis y sigue el plan ilustrado en las secciones precedentes de este capítulo. Sin embargo, el método siguiente es una alternativa mucho más fácil.

Sea la corriente en la carga de 10 ohms igual a I . El voltaje entre c y c' es entonces $11I$. La corriente que circula por el elemento de 100 ohms es $11I/100 = 0.11I$, y la corriente de b a c es $I + 0.11I = 1.11I$. Continuando

$$V_{bc} = (1.11I)(2) = 2.22I$$

$$V_{bb'} = 11I + 2.22I = 13.22I$$

$$I_{bb'} = \frac{13.22I}{50} = 0.264I$$

$$I_{ab} = I_{bc} + I_{bb'} = 1.11I + 0.264I = 1.374I$$

Esta corriente fluye por ambas resistencias de 1 ohm, entre ab y $a'b'$, por lo que

$$V_{aa'} = (1.374I)(2) + 13.22I = 15.97I$$

$$I_{aa'} = \frac{15.97I}{200} = 0.080I$$

$$I_g = 1.374I + 0.080I = 1.454I$$

$$V_g = (1.454I)(2) + 15.97I = 18.88I$$

La corriente en la carga, respuesta a nuestro problema, es por lo tanto

$$I = \frac{V_g}{18.88} = \frac{10}{18.88} = 0.530 \text{ amperes}$$

Sustituimos ahora, 0.530 por I en todas las expresiones de corriente y voltaje de la solución anterior. Por tanto,

$$V_{aa'} = (15.97)(0.530) = 8.45 \text{ volts}$$

Este método, aunque descrito comúnmente en los libros de análisis de circuitos, parece no tener un nombre aceptado generalmente. Por lo tanto, nos referiremos a él, como el *método de escalera* porque es muy útil para redes de esta forma; y debido a que las redes tipo escalera son muy importantes, tanto en sistemas de comunicaciones como en sistemas de potencia.

La esencia del método de escalera es encontrar un punto clave en el que pueda asumirse la corriente, obteniendo soluciones para otros voltajes y corrientes fácilmente.

11. Ejemplo

Este método no está restringido a redes tipo escalera obvias. Puede aplicarse correctamente, por ejemplo, a la misma red que fue tratada primeramente en este capítulo y que se muestra otra vez, en la Fig. 5-12. Encontremos por el método de escalera, la im-

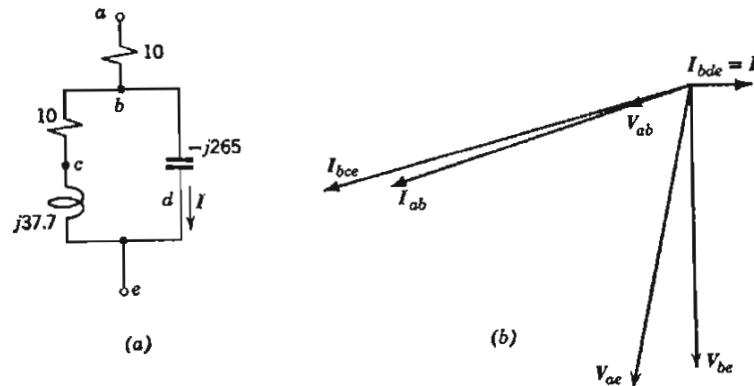


FIG. 5-12. Red con sus impedancias a 60 ciclos dadas en ohms y su diagrama de transformadas

pedancia de entrada a 60 ciclos. Supóngase que la corriente del capacitor sea I . Entonces

$$V_{be} = Z_{bde}I = -j265I$$

Empezamos en este momento a trazar el diagrama de transformadas de la Fig. 5-12 y continuaremos añadiendo cada corriente y voltaje conforme se vayan calculando.

$$I_{bce} = \frac{V_{be}}{Z_{bce}} = \frac{-j265I}{10 + j37.7} = \frac{265I/-90^\circ}{39.0/j75.15^\circ} = 6.80I/-165.15^\circ$$

$$\begin{aligned} I_{ab} &= I(1 + 6.80/-165.15^\circ) = (1 - 6.60 - j1.74)I \\ &= (-5.60 - j1.74)I = 5.85I/-162.7^\circ \end{aligned}$$

$$V_{ab} = 10I_{ab} = (-56.0 - j17.4)I$$

$$\begin{aligned} V_{ae} &= V_{ab} + V_{be} = (-56.0 - j17.4 - j265)I = (-56.0 - j282.4)I \\ &= 288I/-101.2^\circ \end{aligned}$$

Ahora cada una de las corrientes y voltajes han sido calculados. Cada una de ellas se ha añadido al diagrama de transformadas. Puesto que el diagrama parece razonable, podemos pensar que no se han cometido grandes errores. La impedancia es el objeto del cálculo, así que dividiendo el voltaje de entrada entre la corriente de entrada se obtiene:

$$Z_{ae} = \frac{288I / -101.2^\circ}{5.85I / -162.7^\circ} = 49.3 / 61.5^\circ$$

Este resultado puede compararse con la impedancia obtenida por combinaciones en paralelo y serie, en la Sec. 3. Si se desea encontrar la distribución de corrientes y voltajes en la red, como resultado de algún voltaje aplicado dado, es trabajo de un momento aplicar la razón apropiada a cada uno de los valores anteriores. Se observará que el diagrama de transformadas está orientado en forma diferente que el de la Fig. 5-9, para la misma red. Esto se debe a que asumimos a $I = I_{bde}$ como referencia, y en la primera solución se tomó como transformada de referencia a V_{ac} .

Finalmente, se puede observar que no está fuera de razón aplicar el método escalonado de análisis a la red de la Fig. 5-12, porque esta red puede dibujarse en forma de escalera si se desea. Una buena cantidad de redes que no parecen de tipo escalera, pueden cambiarse a dicha forma redibujándolas simplemente, o quizás, redibujándolas y haciendo una o dos simplificaciones al mismo tiempo.

12. Diagrama funicular

A menudo es conveniente utilizar un método gráfico o semigráfico de sumar un número de voltajes, colocando sus fasores extremo con extremo en lo que se llama diagrama funicular.* Este método es enteramente permisible. Se mostrará un ejemplo o dos de cómo se hace.

La Fig. 5-13a, muestra un diagrama de impedancias conectadas en serie, con una fuente de fuerza electromotriz alterna. Tomemos la corriente I como nuestro fotor de referencia; el fotor para el voltaje entre las terminales de R_1 , que es R_1I , estará en fase con la corriente y estará por lo tanto en ángulo cero. Este fotor está dibujado

* Funiculo. Cuerda pequeña. (Diccionario Webster).

en la Fig. 5-13b. Nótese que este voltaje es del punto a al punto b y está indicado por V_{ab} .

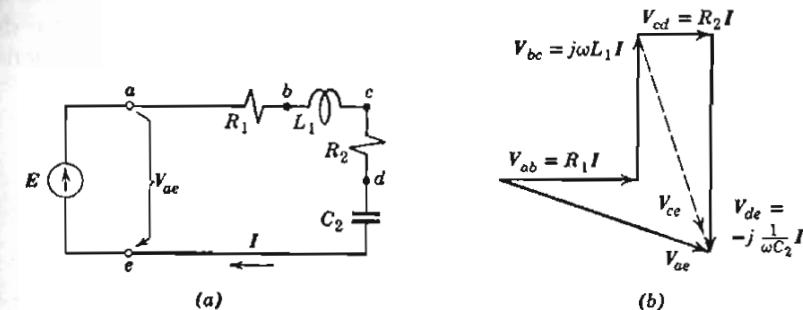


FIG. 5-13. Diagrama funicular

A continuación (debemos ser cuidadosos en proceder de elemento en elemento en el orden en que están conectados en el circuito y por conveniencia vamos en la dirección de referencia asumida para la corriente). Tenemos que el voltaje entre las terminales L , es $j\omega L_1 I$. Esta, debida a la j , está a 90 grados de V_{ab} . Usando el método funicular este segundo fotor se coloca con su extremo en la cabeza del primero y es V_{bc} en el diagrama. Entonces V_{cd} que es igual a $R_2 I$ se suma dibujándolo al extremo de V_{bc} . Finalmente, se suma V_{de} ; este es el voltaje entre las terminales del capacitor. La reactancia de un capacitor es una cantidad negativa; el voltaje entre sus terminales es $-j(1/\omega C_2)I$; el fotor estará por lo tanto a un ángulo de -90 grados del fotor de referencia y se dirige hacia abajo en el diagrama.

Este método no es más que una representación gráfica de la ley de Kirchhoff que dice que

$$V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} + V_{de} = V_{ae} \quad (5-17)$$

Consecuentemente se dibuja una flecha diagonalmente desde el extremo posterior de V_{ab} a la cabeza de V_{de} , que es V_{ae} .

Un punto interesante de este método es que los voltajes entre puntos intermedios pueden leerse en el diagrama. Por ejemplo, el voltaje del punto c al punto e , voltaje entre las terminales de la resistencia y el capacitor en serie, se muestra en la figura como una línea punteada. Es correcto claramente porque $V_{ce} = V_{cd} + V_{de}$.

Una aplicación especial útil del método funicular se encuentra en los circuitos trifásicos. El círculo en la Fig. 5-14a representa un ge-

nerador trifásico (una máquina con tres devanados que generan voltajes aproximadamente 120 grados fuera de fase uno de otro). El voltaje se mide en las terminales de la máquina a , b y c . V_{ab} se toma

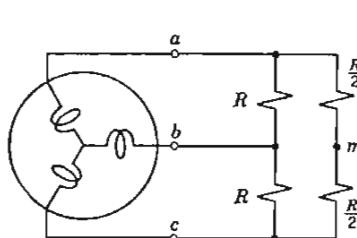


FIG. 5-14. Generador y carga trifásicos

como voltaje de referencia; su magnitud es de 110 volts. V_{bc} se mide y se encuentra igual a $115 \angle -118^\circ$. Estos valores se dibujan uno a continuación de otro en la Figura 5-14b. El voltaje terminal restante no necesita medirse. Debe ser V_{ca} mostrado como una recta punteada, porque es necesario que

$$V_{ab} + V_{bc} + V_{ca} = 0 \quad (5-18)$$

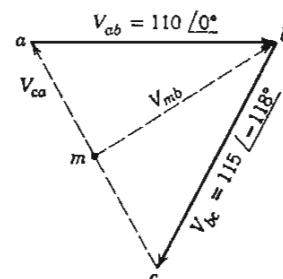
En palabras: los tres voltajes de línea a línea (siendo voltajes alrededor de un circuito cerrado) deben sumar cero y los tres fasores deben formar un triángulo cerrado.

Para ilustrar la posibilidad de encontrar voltajes intermedios, asumimos que existe una carga en el generador trifásico (como se muestra) y que entre las líneas c y a , la carga consiste de dos resistencias iguales en serie. ¿Qué voltaje hay entre el punto m , punto medio y la terminal b ?

El voltaje deseado está representado por una recta trazada en el triángulo de voltajes, del punto m (punto medio de V_{ca}) al punto b , que es la cabeza de b . Esto es cierto porque

$$V_{ma} + V_{ab} = V_{mb} \quad (5-19)$$

que es el voltaje deseado y $V_{ma} = \frac{1}{2}V_{ca}$. Por tanto, $V_{mb} = \frac{1}{2}V_{ca} + V_{ab}$ y pueden trazarse estos voltajes de m a b en el diagrama.



Es fácil obtener resultados completamente incorrectos de los diagramas funiculares en circuitos complicados, a menos que el significado básico del diagrama se mantenga con cuidado en la mente. El diagrama funicular no tiene magia propia; es una forma de sumar gráficamente transformadas, usualmente de acuerdo con una de las leyes de Kirchhoff. Si hay alguna posible duda acerca de la interpretación, se deberá escribir la ley algebraicamente y todas las transformadas se dibujan como radios desde un punto común (origen del plano complejo); se podrán entonces verificar las relaciones sin ambigüedad.

Un diagrama funicular puede interpretarse como un diagrama fasorial; puede representar voltajes alternos (o corrientes) por proyección. El diagrama entero (como el de la Fig. 5-13b) puede concebirse como girando con una velocidad angular ω , el diagrama permanece rígido mientras gira y en cualquier instante, la proyección de cualquier fasor sobre un eje horizontal fijo, nos da el valor instantáneos del voltaje alterno (o corriente). Para que el diagrama se interprete de esta manera, la longitud de caída fasor debe ser el valor máximo, en vez del rms, de la onda senoidal.

13. Sumario

Para deducir una red complicada a una red simple, se puede sustituir un elemento de impedancia a admitancia único por un número de elementos en serie o en paralelo. Se desarrollaron fórmulas y se dieron ejemplos. Se determinó la distribución de corriente entre impedancias paralelas y de voltaje entre impedancias en serie. Se dieron ejemplos.

Se explicó el método de escalera para análisis.

Se presentó el diagrama funicular, que es un método gráfico.

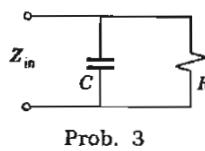
En el siguiente capítulo se continuará esta discusión, dando medios de simplificar una red por sustitución cuando la combinación de elementos en serie o paralelo no es posible.

PROBLEMAS

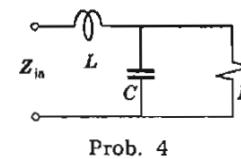
- Como se ilustra en la Fig. 5-2, se dice que ciertos circuitos son *equivalentes*. Si dos circuitos son equivalentes de esta manera, ¿se disipa la misma potencia en ambos, suponiendo que se aplica el mismo voltaje? Demuestre que su respuesta es correcta. §2

- ✓ 2. Una bobina con impedancia $Z_1 = 75 + j38$ se conecta en paralelo con otra bobina de impedancia $Z_2 = 40 + j17$. (a) Encontrar la impedancia de las dos en paralelo. (b) La corriente total que circula por las bobinas en paralelo es de 10 amperes (rms), a 60 cps. Encontrar la corriente en cada bobina. §4

- ✓ 3. En la Fig. R = 600 ohms, f = 1000 cps. Se requiere que la impedancia de entrada sea $Z_{in} = 400 + jX_{in}$. ¿Qué valor debe tener C? (X_{in} no está especificada)



Prob. 3



Prob. 4

4. Se añadió al circuito del Prob. 3, como se muestra, una inductancia, permaneciendo lo demás igual. Se requiere ahora que la impedancia de entrada sea $Z_{in} = 400 + j0$. ¿Qué valor debe tener L?

Nota: Este es un circuito práctico para igualación de impedancia, haciendo que una carga de 600 ohms, parezca en sus terminales una de 400 ohms.

§3

5. Si se aplica 4.0 volts, 100 cps, al circuito del Prob. 4, encontrar la corriente en cada elemento. Encontrar el voltaje entre las terminales de cada elemento. Dibujar un diagrama fasorial. Encontrar la potencia consumida en la resistencia y la potencia de entrada en las terminales; compárelas.

§4

6. El circuito determinado en el Prob. 4 se opera a frecuencias que varían de 800 a 1200 cps. Calcular la impedancia de entrada a través de este rango de frecuencia; trace las componentes real e imaginaria de la impedancia (dos curvas).

§3

7. Una bobina que tiene una inductancia de 0.05 henrys y una resistencia de 8.0 ohms está en serie con un capacitor de 1.00 microfarads. Encontrar la frecuencia a la que $Z_{in} = R_{in} + j0$ (frecuencia 10% mayor que la frecuencia de resonancia). (b) Encontrar R_{in} para esta frecuencia mayor. (c) Encontrar Y_{in} y (d) Encontrar G_{in}

8. En el circuito del Prob. 7: (a) Encontrar Z_{in} a una frecuencia 10% que la frecuencia de resonancia. (b) Encontrar R_{in} para esta frecuencia mayor. (c) Encontrar Y_{in} y (d) Encontrar G_{in} para esta frecuencia.

§8

9. Repetir el Prob. 8 para una frecuencia 10% menor que la frecuencia de resonancia. §8

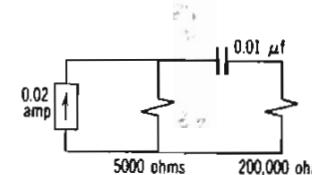
10. Para el circuito del Prob. 7 encontrar dos frecuencias a las que $R_{in} = |X_{in}|$. Encontrar Z_{in} e Y_{in} para estas frecuencias. §8

11. Para el circuito del Prob. 7, trazar $|Y|$ como una función de la frecuencia, de 600 a 800 cps. §8

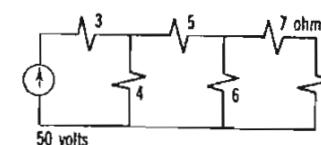
12. La bobina del Prob. 7, teniendo $L = 0.05$ henrys y $R = 8.0$ ohms, se conecta ahora en *paralelo* con el capacitor de 1.00 μf . Encontrar la frecuencia para la que la impedancia de entrada de esta combinación en paralelo es $Z_{in} = R_{in} + j0$ (frecuencia de resonancia) y encontrar R_{in} para esta frecuencia. §8

13. Para el circuito del Prob. 12, trazar $|Z|$ como una función de la frecuencia, de 600 a 800 cps. §8

14. En el circuito de acoplamiento R-C mostrado, ¿cuál es el voltaje (magnitud y ángulo) entre las terminales de la resistencia de 200 000 ohms? (a) La frecuencia es de 100 cps. (b) La frecuencia es de 1000 cps. §9



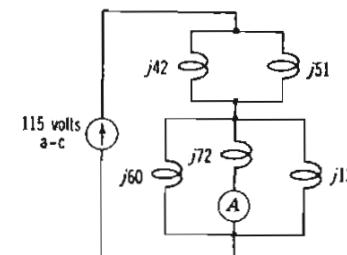
Prob. 14



Prob. 15

15. Se muestra una red de resistencias con sus valores dados en ohms. Encontrar la corriente en la resistencia de 8 ohms debida a la fuente de 50 volts. §9

16. Las cifras dadas en el diagrama son ohms de reactancia. La resistencia es despreciable. ¿Cuál es la lectura del amperímetro A?



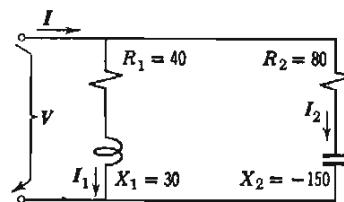
Prob. 16

17. Un generador de 75 voltos, 1000 cps, con 5 ohms de resistencia interna, se conecta a una resistencia y una bobina en paralelo. La bobina tiene 20 ohms de reactancia y 4 ohms de resistencia; la resistencia tiene 30 ohms. Encontrar la corriente en la bobina (magnitud y ángulo y especifique su referencia para el ángulo). §9

18. El generador del Prob. 17 desacelera para producir 60 voltos a 800 cps. Encontrar la corriente en la bobina como anteriormente. §9

19. Si en el Prob. 4, $R = 600$ ohms y la impedancia de entrada requerida es de $Z_{in} = 900 + j0$, ¿puede utilizarse el circuito del Prob. 4 con este propósito? Si no es así, proyecte algún otro circuito que sí pueda, utilizando solamente elementos reactivos. §9

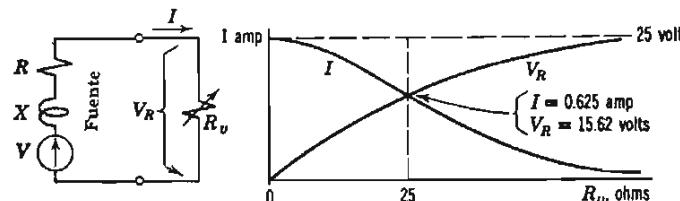
20. Un circuito tiene los parámetros mostrados, cuando la frecuencia de la corriente es de 60 cps. La frecuencia se cambia a



Prob. 20

90 cps. (a) Encontrar la impedancia de entrada a 90 cps. (b) Encontrar la admitancia de entrada a 90 cps. Dibujar en el plano complejo la admitancia de cada rama y la admitancia total. (c) Dibujar un diagrama fasorial mostrando las tres corrientes y los cinco voltajes, indicando sus relaciones con cada uno de los otros. §9

21. Una fuente de voltaje constante opera a una frecuencia de 400 cps la fuente tiene una resistencia interna R y una resistencia X como se muestra. Las mediciones con una carga de resistencia variable dan los resultados mostrados en el diagrama. Encontrar V , R y X de la fuente. §9



$$V = R + jX$$

$$V = 0.625 \times R + R_v + jX$$

22. Una bobina, una resistencia y un capacitor están en serie. La bobina tiene 20 ohms de resistencia y 1 milihenry de inductancia. La resistencia es de 10 ohms; el capacitor es de 10^{-9} farads. La frecuencia es tal, que la corriente adelanta al voltaje, 45 grados. Encontrar: (a) La frecuencia, (b) La corriente y (c) El voltaje entre terminales de la bobina, magnitud y ángulo. Dibujar un diagrama funicular. El voltaje aplicado al circuito en series es de 10 voltos rms. §12

23. En la Fig. 5-14 determinar V_{ca} , (a) por cálculo y (b) gráficamente. §12

6

Método de Análisis por Sustitución

1. Redes de dos terminales

En el capítulo anterior se consideró la sustitución de una red de impedancias, de dos terminales, por una impedancia única y se dieron ejemplos. Se hizo repetido uso de la sustitución de una impedancia por dos en serie, de acuerdo con la fórmula

$$Z = Z_1 + Z_2 \quad (6-1)$$

y de una impedancia por dos en paralelo, de acuerdo con la fórmula

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (6-2)$$

La Fig. 5-2 muestra las sustituciones básicas en dos terminales.

2. Redes de tres terminales; sustitución Y y Δ

Una sustitución casi similar es posible con las redes de tres terminales. En la Fig. 6-1 están marcadas las tres terminales *a*, *b* y *c*. Estas terminales están conectadas en la Fig. 6-1*a* por tres elementos de impedancia, en forma de una *Y*. Las mismas terminales están conectadas en la Fig. 6-1*b* con tres elementos diferentes de impedancia en la forma de una *Δ*. Es posible hacer la *Δ* equivalente a la

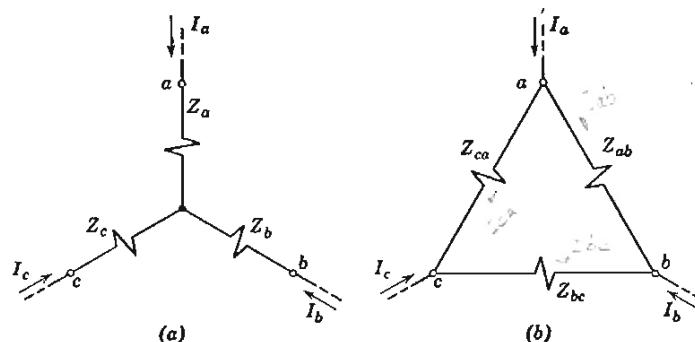


FIG. 6-1. Circuitos Y y Δ que son equivalentes si las Ecs. 6-16, 17 y 18 se satisfacen

Y de modo que puedan sustituirse una por la otra, sin efecto sobre las corrientes o voltajes terminales. Como veremos, es a menudo un paso valioso hacia la simplificación de una red.

Derivemos las fórmulas que relacionan los valores de las impedancias conectadas en Y, Z_a , Z_b y Z_c con las impedancias conectadas en Δ , Z_{ab} , Z_{bc} y Z_{ca} que proporcionarán la equivalencia. Supongamos que tanto la Y como la Δ son parte de alguna red más extensa. Las corrientes procedentes del resto de la red que entran en las terminales se llaman I_a , I_b e I_c . Los voltajes de terminal a terminal se llaman V_{ab} , V_{bc} y V_{ca} .

La Y y la Δ son equivalentes si una puede sustituirse por la otra sin afectar al resto de la red. Esto requiere que las mismas tres corrientes entrantes sean producidas por los mismos tres voltajes de terminal a terminal, en ambos casos. Resolvamos para encontrar las tres corrientes entrantes en la conexión Δ y también las tres corrientes que entran a la Y y veamos qué es necesario hacer para que las corrientes sean iguales en los dos casos.

La corriente que entra a la Δ de la Fig. 6-1b en la terminal a, es la suma de las corrientes en las dos ramas.

$$I_a = I_{ab} + I_{ac} \quad (6-3)$$

Como hemos usado la convención de que I_{ac} significa corriente en una dirección e I_{ca} significa corriente en la otra, $I_{ac} = -I_{ca}$ y por tanto;

$$I_a = I_{ab} - I_{ca} \quad (6-4)$$

Por la ley de Ohm, $I_{ab} = V_{ab}/Z_{ab}$ e $I_{ca} = V_{ca}/Z_{ca}$. Estas relaciones se sustituyen en la Ec. 6-4 y escribiendo dos ecuaciones similares para las otras dos terminales de la Δ , obtenemos

$$I_a = \frac{V_{ab}}{Z_{ab}} - \frac{V_{ca}}{Z_{ca}} \quad (6-5)$$

$$I_b = \frac{V_{bc}}{Z_{bc}} - \frac{V_{ab}}{Z_{ab}} \quad (6-6)$$

$$I_c = I_{ca} = \frac{V_{ca}}{Z_{ca}} - \frac{V_{bc}}{Z_{bc}} \quad (6-7)$$

No es tan fácil escribir las ecuaciones para las corrientes en la Y, pero los voltajes de terminal a terminal pueden escribirse en función de las corrientes:

$$V_{ab} = I_a Z_a - I_b Z_b \quad (6-8)$$

$$V_{bc} = I_b Z_b - I_c Z_c \quad (6-9)$$

$$V_{ca} = I_c Z_c - I_a Z_a \quad (6-10)$$

Las tres corrientes pueden encontrarse ahora por solución simultánea. Para obtener la solución, * es necesario sin embargo, notar que

$$I_a + I_b + I_c = 0 \quad (6-11)$$

Las tres corrientes entrantes deben sumar cero porque no tienen lugar a donde ir y esta condición (que se aplica a valores instantáneos) se satisface si la suma de las tres transformadas es cero como en la Ec. 6-11. †

La Ec. 6-11 expresada como $I_c = -I_a - I_b$, se utiliza para eliminar I_c en la Ec. 6-10, obteniéndose

* La Ec. 6-11 es necesaria para la solución, porque 6-8, 6-9 y 6-10 no son ecuaciones independientes. Un intento de resolver sin 6-11 nos llevará a una identidad $0=0$. Físicamente no se puede esperar obtener una respuesta hasta que todos los hechos pertinentes se hayan introducido matemáticamente. Este es un principio de gran importancia.

† No se hace ningún intento en este capítulo o en los posteriores para distinguir las cantidades complejas utilizando tipo negrilla. Quizás la falta de ella no ha sido notada por el lector. Si es así, es evidente que tal distinción tipográfica no es necesaria realmente. El tipo negrilla ayuda indudablemente mientras las cantidades complejas no son familiares, pero la notación compleja es tan común en el trabajo con los circuitos de corriente alterna que se ha acostumbrado considerar que todos los símbolos para corriente, voltaje, impedancia y admittance representan números complejos mientras no se indique otra cosa.

Hemos avanzado tanto, que de aquí en adelante difícilmente será necesario utilizar Z en lugar de z para la impedancia. Sin embargo, será muy necesario escribir $|Z|$ para la magnitud absoluta de la impedancia, en las comparativamente raras ocasiones en que esta cantidad se usa.

$$\begin{aligned} V_{ca} &= -I_a Z_c - I_b Z_c - I_c Z_a \\ &= -I_a (Z_a + Z_c) - I_b Z_c \end{aligned} \quad (6-12)$$

Las Ecs. 6-8 y 6-12 pueden resolverse ahora simultáneamente * para I_a , I_b e I_c pueden encontrarse de la Ec. 6-11, dando

$$I_a = \frac{V_{ab} Z_c - V_{ca} Z_b}{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a} \quad (6-13)$$

$$I_b = \frac{V_{bc} Z_a - V_{ab} Z_c}{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a} \quad (6-14)$$

$$I_c = \frac{V_{ca} Z_b - V_{bc} Z_a}{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a} \quad (6-15)$$

Ahora tenemos las Ecs. 6-5, 6 y 7 para la Δ , y las Ecs. 6-13, 14 y 15 para la Y. Comparémoslas; los dos conjuntos de ecuaciones son idénticos si (y solamente si):

$$Z_{ab} = \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_c} \quad \left. \right\} \quad (6-16)$$

$$Z_{bc} = \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_a} \quad \left. \right\} \quad (6-17)$$

$$Z_{ca} = \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_b} \quad (6-18)$$

como podemos ver, sustituyendo estas expresiones en las Ecs. 6-5, 6 y 7. Por tanto, llegamos a la conclusión de que la Δ es equivalente a la Y si las impedancias de la Δ están relacionadas con las impedancias de la Y de acuerdo con las Ecs. 6-16, 17 y 18.

3. Fórmulas

La Fig. 6-2 es para ayudar a visualizar y recordar esta relación entre la Δ y la Y equivalentes, cada una de las tres Ecs. 6-16, 17 o

* Es más conveniente resolverlas por medio de determinantes. Si el método de resolución por determinantes no es familiar, véase el Apéndice 1. La solución para I_a es como sigue:

$$I_a = \frac{\begin{vmatrix} V_{ab} & -Z_b \\ V_{ca} & -Z_c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_a & -Z_b \\ -(Z_a + Z_c) & -Z_c \end{vmatrix}} = \frac{-V_{ab} Z_c + V_{ca} Z_b}{-Z_a Z_c - Z_b Z_a - Z_b Z_c}$$

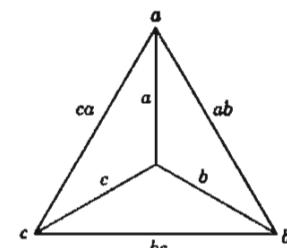


FIG. 6-2. Diagrama para mostrar el modelo de subíndices utilizado en las ecuaciones

18 pueden expresarse en palabras como sigue: la impedancia de cualquier lado de la Δ equivalente es igual a la suma de los tres productos de las impedancias de la Y multiplicadas entre sí en pares, dividida entre la impedancia de la rama opuesta de la Y. Refiriéndonos a la Ec. 6-16, Z_c es opuesta (como en la Fig. 6-2) a Z_{ab} .

Nótese que solamente una de estas Ecs. 6-16, 17 o 18, es realmente necesaria, porque las tres ecuaciones son exactamente similares y no hacen ninguna diferencia a qué terminal se le llame a , b o c . Cualquier lado de la Δ equivalente puede encontrarse de las tres impedancias conocidas de la Y, recordando únicamente una ecuación.

La relación inversa es igualmente usual—la relación, esto es, que permite encontrar una Y equivalente de una Δ conocida. Esta relación puede calcularse de los circuitos, o puede encontrarse por resolución simultánea de las Ecs. 6-16, 17 y 18. Esto es,

$$Z_a = \frac{Z_{ab} Z_{ac}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \quad (6-19)$$

Las otras dos Ecs. para Z_b y Z_c pueden también escribirse, pero sería un trabajo innecesario porque la Ec. 6-19 proporciona información completa: la impedancia de cualquier rama de la Y es igual al producto de los lados adyacentes de la Δ dividida entre la suma de las tres impedancias Δ .

Para entender estas ecuaciones algunas veces es conveniente escribirlas en otra forma. La conversión Y- Δ (Ec. 6-16) puede escribirse

$$Z_{ab} = Z_a + Z_b + \frac{Z_a Z_b}{Z_c} \quad (6-16a)$$

Viendo la Fig. 6-2, esto puede interpretarse como que significa que el lado de la Δ entre a y b , es igual a la suma de las ramas de la Y

que conectan a a b , más de un término de corrección que toma en cuenta la presencia de Z_c .

La conversión inversa Δ -Y (Ec. 6-19) puede escribirse

$$Z_a = \frac{Z_{ab}Z_{ac}}{Z_{ab} + Z_{ac} + (Z_{bc})} \quad (6-19a)$$

con la interpretación de que la rama de la Y correspondiente a la terminal a , es igual a la impedancia equivalente de los dos lados de la Δ que están conectados a la terminal a , más un término adicional en el denominador que toma en cuenta el hecho de que Z_{bc} no es un corto circuito.

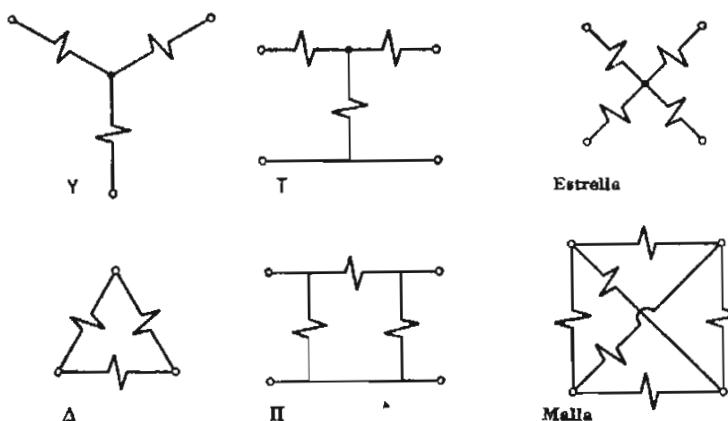


FIG. 6-3. Redes en estrella y malla

Estas mismas relaciones, una para cambiar una Y en una Δ y la otra para cambiar una Δ en una Y, pueden expresarse en función de admitancias en lugar de impedancias (así como las relaciones en dos terminales se expresaron en ambas formas en la Fig. 5.2). Estas ecuaciones son:

$$Y_{ab} = \frac{Y_a Y_b}{Y_a + Y_b + Y_c} \quad (6-20)$$

(Lado de la Δ = producto de dos ramas adyacentes de la Y dividido entre la suma de las admitancias de la Y).

$$Y_a = \frac{Y_{ab}Y_{bc} + Y_{bc}Y_{ca} + Y_{ca}Y_{ab}}{Y_{bc}} \quad (6-21)$$

(Rama de la Y = admitancias de la Δ en pared divididas entre el lado opuesto de la Δ).

Las redes de tres terminales utilizadas en esta discusión han sido llamadas redes Y y Δ , habiendo sido sugeridos los símbolos por las formas de los diagramas de los circuitos. Las mismas redes son llamadas a veces T y II, con diagramas como los de la Fig. 6-3 en mente. En la figura estas combinaciones T y II lucen como redes de cuatro terminales, pero las dos terminales inferiores están conectadas juntas, así que de hecho sólo hay tres terminales eléctricas distintas.

4. Redes con cuatro o más terminales

Si se añaden más ramas a la Y se obtiene una estrella; realmente Y es una estrella, la estrella más simple posible. La Δ es la malla más simple. Una estrella de cuatro terminales y una malla de cuatro terminales se muestran en la Fig. 6-3. En general una malla tiene cada terminal conectada a cada una de las otras terminales. Por tanto, una malla general de n terminales tiene $\frac{1}{2}n(n - 1)$ elementos, mientras que una estrella de n terminales tiene n elementos. Esto significa que una malla tiene más elementos que una estrella, si tiene más de tres terminales.

Una malla equivalente a una estrella puede encontrarse por medio de la fórmula

$$Y_{ab} = \frac{Y_a Y_b}{Y_a + Y_b + \dots + Y_n} \quad (6-22)$$

Esta es una generalización de la transformación Y- Δ dada como la Ec. 6-20 y su significado se comprenderá de dicha ecuación. La obtención es algo complicada y no se dará aquí.* Por otra parte, la transformación estrella-malla no es siempre conveniente porque añade ramas a la red y su uso hace ordinariamente a un problema más complicado de lo que era antes.

La sustitución opuesta de una estrella por una malla no es posible en general. La estrella tiene menos elementos que la malla y las ecuaciones estrella-malla (una de las cuales es la Ec. 6-22) no pueden resolverse simultáneamente para Y_a , Y_b , etc. Existen $\frac{1}{2}n(n - 1)$

* Una obtención elegante utilizando matrices es dada por Guillemin en la Pág. 132 de su *Introductory Circuit Theory* (Referencia 12). En algunos libros se ofrece una, aparentemente, simple comprobación pero que es inadecuada; no confiarse.

ecuaciones y únicamente n incógnitas y las ecuaciones pueden no satisfacerse por ningún conjunto de valores de las n incógnitas.

5. Ejemplos

EJEMPLO 1. Las transformaciones Δ -Y y Y- Δ , son sin embargo, tremadamente usuales. Permiten la simplificación de una red por sustitución, cuando la red no contiene ningún par de impedancias en serie, que puedan sumarse (Ec. 6-1) o cualquier par en paralelo que puedan combinarse (por la Ec. 6-2). Un ejemplo es el circuito común de un puente, mostrado en la Fig. 6-4. ¿Cómo pueden encontrarse las corrientes en el circuito de este puente?

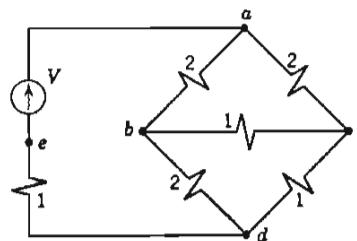


FIG. 6-4. Circuito de un puente

Una forma es sustituir una Y por la Δ abc, o una Y por la Δ bcd. Otra forma es sustituir una Δ por la Y con centro en b (con ramas hacia a, c y d) o una Δ por la Y con centro en c (con ramas hacia a, b y d).

Como un ejemplo sumamente simple, reduzcamos el circuito de la Fig. 6-4 a una impedancia única entre las terminales de la fuente V, siendo todos los elementos, resistencias puras con los valores mostrados en el diagrama. La parte pasiva del sistema se ha dibujado nuevamente en la Fig. 6-5a en la que cada línea recta representa una resistencia.

El primer paso en la solución es sustituir una Y por la Δ abc. El resultado se muestra en la Fig. 6-5b. Nótese que aparece un nuevo nodo como resultado de la sustitución; se le llama f. Los valores numéricos de las resistencias se obtienen como sigue, utilizando la Ec. 6-19:

$$R_{af} = \frac{2 \cdot 2}{2 + 2 + 1} = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$R_{bf} = \frac{2 \cdot 1}{2 + 2 + 1} = \frac{2}{5} = 0.4$$

$$R_{cf} = \frac{2 \cdot 1}{2 + 2 + 1} = \frac{2}{5} = 0.4$$

En el siguiente paso, para la Fig. 6-5c, la combinación en serie reduce el número de ramas a 2; aquí es donde aparece el beneficio de la sustitución Δ -Y. Si una sustitución se ha planeado mal, puede no dar como resultado una simplificación y en tal caso el trabajo se hizo inútilmente.

Combinaciones adicionales en paralelo y en serie, como se muestran, nos llevan a una resistencia única equivalente como resultado. Su valor es 2.684.

EJEMPLO 2. Simplifiquemos la misma red utilizando un esquema de reducción diferente. Esta vez se sustituirá una Δ por la Y con centro en b en la Fig. 6-6. Este es el paso de (a) a (b) de la Fig. 6-5. Esta transformación elimina un nodo; el punto b desaparece después de la sustitución. La transformación proporciona ramas en

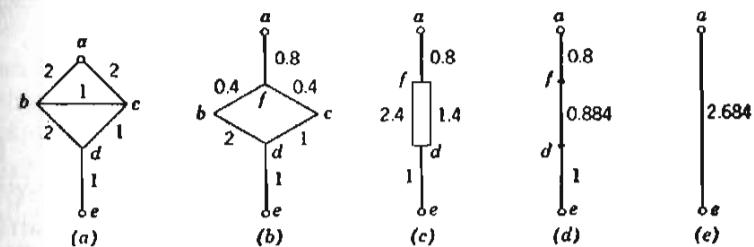


FIG. 6-5. Reducción incluyendo una sustitución Δ -Y. Los números son resistencias en ohms

paralelo que pueden combinarse por el método familiar y los pasos obvios posteriores mostrados en la Fig. 6-6, nos llevan a la resistencia única equivalente con el mismo valor obtenido con el otro esquema de reducción.

En este caso la sustitución Δ -Y y de la Fig. 6-5 nos da el mismo resultado pero un poco más simple que la sustitución Y- Δ de la Fig. 6-6. Es de mucho valor utilizar algún tiempo revisando varias posibilidades y dibujando diagramas de algunos esquemas de reducción (tal como las Fig. 6-5 y 6-6 sin valores numéricos) antes de comenzar el cálculo, siendo esto especialmente cierto en redes más complicadas. Se pueden ahorrar horas de tiempo con un poco de razonamiento anticipado.

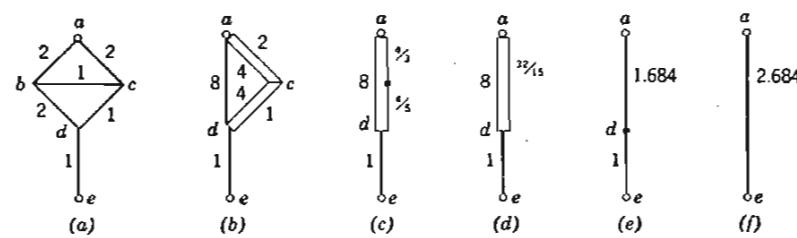


FIG. 6-6. Reducción incluyendo una sustitución Y-Δ. Los números son resistencias en ohms

Como una ilustración de lo que no debería hacerse, considérese en este ejemplo la posibilidad de sustituir una Δ por la Y centrada en el nodo d . Esta sustitución no es errónea, pero no es ventajosa, nos lleva a una red que requiere otra sustitución Y- Δ o Δ -Y, antes de que pueda hacerse otro progreso.

6. Factores de distribución

Para completar el análisis de una red que ha sido simplificada por sustitución, es más conveniente y usual determinar la corriente y el voltaje en cada elemento calculando factores de distribución.

Empezamos asumiendo que la corriente total (o si se prefiere el voltaje aplicado) es 1.00. Los voltajes y las corrientes individuales se encuentran entonces paso a paso, trabajando hacia atrás a partir de la impedancia única equivalente de la red original. El método es suficientemente evidente en el ejemplo siguiente, en el que se encuentran los factores de distribución con referencia a la Fig. 6-5.

EJEMPLO. Asúmase $I_{ae} = 1.00$. Entonces $V_{ae} = 2.684$. $V_{de} = 1.00$. La corriente se divide entre fbd y fcd (Fig. 6-5b) en relación inversa a sus resistencias; utilizando las Ecs. 5-12:

$$I_{fbd} = \frac{1.4}{2.4 + 1.4} 1.00 = 0.368$$

$$I_{fcd} = \frac{2.4}{2.4 + 1.4} 1.00 = 0.632$$

Comprobación: $I_{fbd} + I_{fcd} = 1.000 = I_{ae}$)

La información obtenida hasta aquí se introduce en la Fig. 6-7a, los números cercanos a las ramas son corrientes y los números en los nodos son voltajes relativos al nodo e .

El siguiente paso es encontrar el voltaje en los nodos b y c :

$$V_{be} = V_{bd} + V_{de} = I_{bd}Z_{bd} + V_{de} = (0.368)(2) + 1.00 = 1.736$$

$$V_{ce} = V_{cd} + V_{de} = I_{cd}Z_{cd} + V_{de} = (0.632)(1) + 1.00 = 1.632$$

Estos voltajes también se añaden en la Fig. 6-7a. Nótese que los voltajes se obtienen partiendo de corrientes calculadas previamente y que estos voltajes se usarán ahora a su vez para encontrar otras corrientes.

La red de la Fig. 6-7b difiere en que tiene una Δ en lugar de una Y entre los nodos a , b y c . Los voltajes en estos nodos permanecen, por supuesto, iguales; los valores se incluyen en la Fig. 6-7b. El paso siguiente y final es calcular las corrientes en la Δ . Las impedancias se toman de la Fig. 6-5:

$$I_{ab} = \frac{V_{ae} - V_{be}}{Z_{ab}} = \frac{2.684 - 1.736}{2} = 0.474$$

$$I_{ac} = \frac{2.684 - 1.632}{2} = 0.526$$

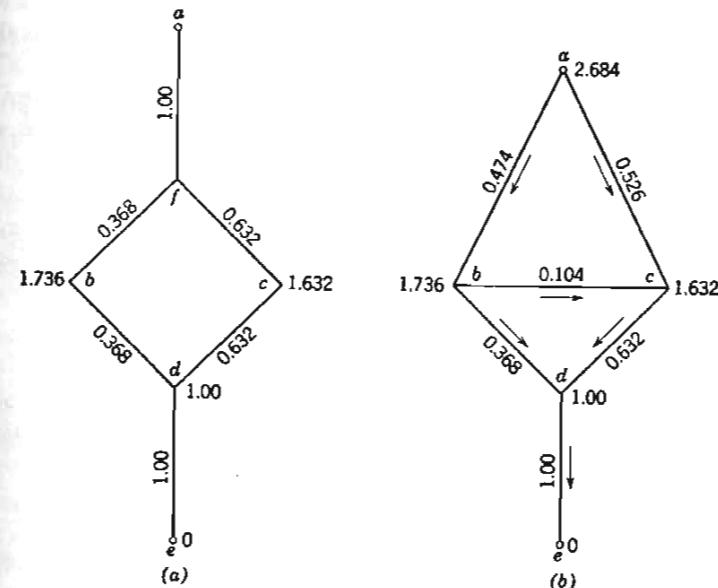


FIG. 6-7. Distribución de voltajes y corrientes entre nodos y ramas

(Comprobación de las corrientes en el nodo a : $0.474 + 0.526 = 1.000$.)

$$I_{bc} = \frac{V_{be} - V_{ce}}{Z_{bc}} = \frac{1.736 - 1.632}{1} = 0.104$$

(Comprobación de las corrientes en el nodo b : $0.474 - 0.104 = -0.368 = 0.002$ en el nodo c : $0.526 + 0.104 - 0.632 = 0.002$. Estas comprobaciones imperfectas no son de hecho resultado de errores, sino del número limitado de cifras significativas utilizadas).

Con estos resultados incluidos en la Fig. 6-7b, se muestran todos los factores de distribución. Todos ellos pueden convertirse en amperes y volts cuando algún valor físico, tal como el voltaje aplicado en volts, se da. Ha sido completado por lo tanto, el análisis de la red.

En un problema más complicado, los factores de distribución se obtendrán de la misma manera. Serán en general cantidades complejas.

7. Realizabilidad física

Las Y y Δ equivalentes que son realizables físicamente para una frecuencia cualquiera, no son realizables usualmente para un rango de frecuencias. En esto son como la impedancia única, que pueden encontrarse como equivalente de dos o más impedancias en paralelo (Sec. 5-3).

Considérese el circuito de acoplamiento de un amplificador de acoplamiento con resistencia, mostrado en la Fig. 6-8a. ¿Puede sustituirse una T equivalente por esta Π ? (¿Una Y por esta Δ ?).

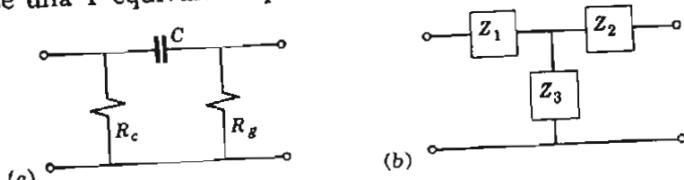


FIG. 6-8. Red T equivalente a un circuito de acoplamiento

Las impedancias de la Fig. 6-8b pueden calcularse por medio de la Ec. 6-19. Z_1 es

$$Z_1 = \frac{(R_c) \left(-\frac{j}{\omega C} \right)}{R_c + R_g - j/\omega C} = \frac{\frac{R_c}{\omega^2 C^2} - j \frac{R_c(R_c + R_g)}{\omega C}}{(R_c + R_g)^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad (6-23)$$

Z_2 y Z_3 son de una forma similar. Supongamos que estamos interesados en una sola frecuencia: ω es constante. El denominador de la expresión para Z_1 será entonces un número constante. El numerador tiene una parte real y una parte imaginaria negativa, indicando que Z_1 puede realizarse como una resistencia y una capacitancia en serie. Una red T física puede por tanto, construirse de modo que sea equivalente a la Π para una frecuencia.

Supongamos, sin embargo, que estamos interesados en una equivalencia a través de una ancha banda de frecuencias. La resistencia tendría que variar con la frecuencia, debido a la presencia de ω en la ecuación. Las resistencias reales no varían de esta manera con la frecuencia. La reactancia capacitativa habría de variar inversamente con la frecuencia debido a ω en el segundo término del numerador, y esta es la forma en que lo hace de acuerdo con la conducta real de los capacitores, pero además, existe una ω en el denominador que hace la realizabilidad física de la reactancia capacitativa imposible, así como la de la resistencia.

Sin embargo Z_1 , Z_2 y Z_3 expresadas como funciones de la frecuencia en ecuaciones como la 6-23, son válidas para todas las frecuencias, para el propósito de análisis y matemáticas.

8. Sustitución de fuentes de potencia

Las sustituciones discutidas hasta ahora en este capítulo se refieren a impedancias, a elementos pasivos. Otro tipo de sustitución que es usual a menudo es la sustitución de fuentes. Una fuente de corriente constante puede sustituirse en una red, por una fuente de voltaje constante equivalente o viceversa. Consideremos ahora como puede hacerse esto.

Una fuente de voltaje constante, como se recordará, es una fuente de potencia capaz de mantener un voltaje constante entre sus terminales, cualquiera que sea la corriente. Una fuente de corriente constante es una fuente de potencia, capaz de mantener una corriente de salida constante, cualquiera que sea el voltaje terminal.

No deberá visualizarse esto como diferentes clases de máquinas. Quizás es mejor pensar de una fuente de voltaje constante como un generador con un buen regulador de voltaje acoplado, que ajusta el campo del generador para mantener un voltaje terminal constante; y una fuente de corriente constante como en el mismo generador con equipo de regulación diferente, que ajusta el campo del generador

para mantener la corriente terminal constante. Ambos dispositivos se pueden conseguir prácticamente entre límites razonables, por medio de los equipos modernos de control electrónico. Ambos fallarán, por supuesto, en condiciones extremas; una fuente de voltaje constante, no puede en la práctica suministrar corriente infinita a un cortocircuito, ni una fuente de corriente constante puede en la realidad suministrar voltaje infinito cuando las terminales están en circuito abierto. Como otros elementos, el dispositivo práctico se idealiza para el estudio de circuitos.

Considérese la fuente de voltaje constante de la Fig. 6-9a. El voltaje de la fuente es siempre V y está en serie con la fuente una impedancia Z_v .

Considérese también la fuente de corriente constante de la Fig. 6-9b. La corriente a través de esta fuente es siempre I y hay una impedancia Z_i en paralelo con sus terminales.

Cada una de éstas está indicada dentro de un cuadrado de líneas no continuas y cada una de ellas alimentan una impedancia de carga Z_L . Nuestro propósito es el de mostrar que una puede ser equivalente

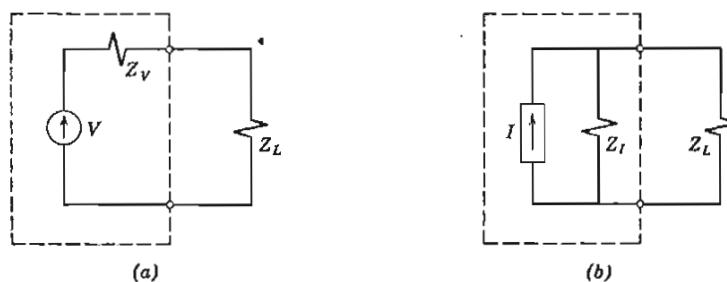


FIG. 6-9. Fuentes equivalentes. (a) Voltaje constante. (b) Corriente constante

a la otra. Se mostrará que son equivalentes, mostrando que la corriente en Z_L es la misma para ambas sin importar el valor de Z_L .

La demostración es fácil. La corriente de la fuente de voltaje constante a la carga es

$$I_L = \frac{V}{Z_v + Z_L} \quad (6-24)$$

La corriente de la fuente de corriente constante se divide; la parte de la fuente de corriente I que va a la carga es (de la Ec. 5-12).

$$I_L = \frac{Z_i}{Z_i + Z_L} I \quad (6-25)$$

Estas dos expresiones serán idénticas y consecuentemente los dos dispositivos dentro de los cuadrados de líneas no continuas, de la Fig. 6-9 serán equivalentes, si $Z_v = Z_i$ y $Z_i I = V$.

Por tanto, llegamos a la conclusión de que una fuente de voltaje constante en serie con una impedancia Z , puede sustituirse por una fuente de corriente constante que tenga en paralelo el *mismo* valor de impedancia, o viceversa, estipulando que el voltaje constante en un caso y la corriente constante en el otro caso están relacionadas por:

$$V = ZI \quad \text{o} \quad I = \frac{V}{Z} \quad (6-26)$$

Puede hacerse notar que Z_i puede ser la impedancia equivalente de cualquier red pasiva de dos terminales. La demostración no está ilimitada por lo tanto, a una carga consistente en una impedancia única, sino que se aplica a una fuente alimentadora en cualquier red pasiva sin importar lo complicada que sea. En la Sec. 11-4 el teorema de superposición permitirá extender también esta declaración a redes activas.

Este teorema nos permite reemplazar fuentes de corriente constante con fuentes de voltaje constante o viceversa, siempre que consideremos conveniente hacerlo, con la siguiente excepción. Una fuente de voltaje constante que no tiene impedancia en serie no puede reemplazarse por una fuente de corriente y una fuente de corriente constante que no tiene impedancia en paralelo no puede reemplazarse por una fuente de voltaje constante. Cualquiera de las dos nos lleva a una equivalencia que es indeterminada. Afortunadamente estas fuentes altamente ideales, para las que la sustitución no es posible, se encuentran raramente, si sucede alguna vez.

9. Ejemplos

EJEMPLO 1. Una batería tiene un voltaje terminal sin carga de 6.0 volts. Cuando la corriente a través de la batería es de 100 amperes el voltaje terminal cae a 5.0 volts. La representación usual de una batería es una fuente de voltaje constante en serie con una resistencia de 0.01 ohms como se muestra en la Fig. 6-10a. Encon-

trar una representación equivalente con una fuente de corriente constante.

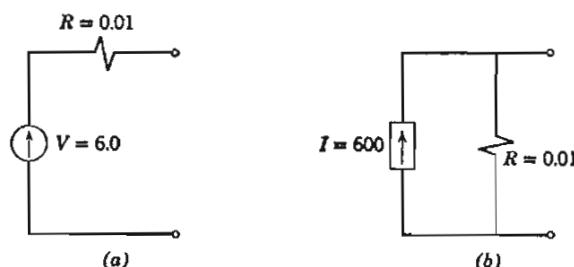


FIG. 6-10. Representaciones equivalentes de una batería

SOLUCIÓN. La equivalencia se muestra en la Fig. 6-10b. El único cálculo necesario es encontrar la corriente de la fuente de corriente constante en el circuito equivalente. Esta, según la Ec. 6-26 es

$$I = V/Z = V/R = 6.0/0.01 = 600 \text{ amperes}$$

De acuerdo con el teorema, los dos circuitos de la Fig. 6-10 son indistinguibles en sus terminales. Esto es correcto. Se verá por ejemplo, que ambas tienen 6.0 volts de voltaje terminal sin carga, y ambas tienen 600 amperes en corto-circuito.

Esto no significa que estos circuitos sean similares internamente. Por ejemplo, no se pierde potencia en el circuito de voltaje constante cuando no hay carga aplicada, pero en el circuito de corriente constante existe una pérdida estable de 3 600 watts cuando no hay carga aplicada a las terminales.

Afortunadamente, para uso práctico la batería real se parece más a la Fig. 6-10a que a la Fig. 6-10b. Esto es, que la batería real es casi un dispositivo con fuerza electromotriz constante y una pequeña resistencia interna en serie. No hay duda de que una batería real tiene una pequeña cantidad de dispersión interna así como la resistencia en serie, con la que se descarga muy despacio permanentemente. Quizá la batería práctica está representada con más veracidad, por una fuente de voltaje casi constante con una pequeña resistencia en serie y una pequeña conductancia en paralelo (muy alta resistencia en paralelo), pero con respecto a su influencia sobre el resto de la red, cualquiera de las dos representaciones de la Fig. 6-10 es adecuada y correcta.

EJEMPLO 2. Un tubo al vacío amplificador puede representarse como una fuente de voltaje constante, con un voltaje ($-\mu e_g$) en serie con R_p , como en la Fig. 6-11a, siendo μ el factor de amplificación del tubo, e_g el voltaje aplicado a la rejilla y R_p la resistencia de placa del tubo. Esta representación se usa más comúnmente para triodos. Encontrar la representación equivalente como una fuente de corriente constante.

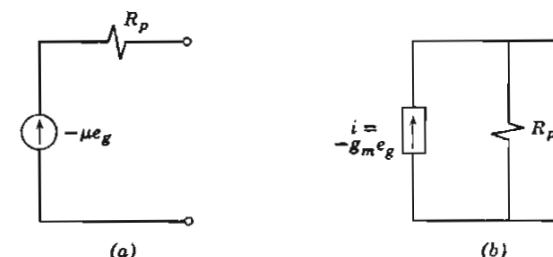


FIG. 6-11. Representaciones equivalentes de un tubo al vacío amplificador

SOLUCIÓN. Se muestra la equivalencia en la Fig. 6-11b. El único cálculo es el de la corriente:

$$i = V/Z = \frac{-\mu e_g}{R_p} = -g_m e_g$$

La forma final es una función de la transconductancia que es por definición $g_m = \mu/R_p$. Este circuito equivalente con una fuente de corriente constante es a menudo el más conveniente para pentodos con alto R_p .

La corriente y el voltaje, i y e_g en estas expresiones, pueden ser valores rms o pueden ser valores instantáneos. Si son valores instantáneos, son tales que cambiarán rápidamente con el tiempo. Esto es permisible. Cuando la fuente en la Fig. 6-11b se llama fuente de corriente constante, significa que la corriente a través de ella no depende de la carga conectada— significa que la corriente de la fuente es constante con respecto al voltaje terminal, no que la corriente de la fuente sea necesariamente constante con respecto al tiempo.

10. Sumario

Este capítulo proporciona equivalencias entre redes pasivas en estrella o malla, que tienen en general n terminales. Para el caso

especial de tres terminales ($n = 3$), la estrella se llama Y o T y la malla se llama Δ o II (Ecs. 6-16 y 6-19). Para el caso especial de dos terminales ($n = 2$), la estrella degenera en dos elementos en serie y la malla en dos elementos en paralelo (Ecs. 6-1 y 6-2). Todos estos casos están comprendidos en la Ec. 6-22.

Este capítulo muestra la equivalencia entre una fuente de voltaje constante con impedancia en serie y una fuente de corriente constante con impedancia en derivación.

Existe una cantidad de otros importantes métodos de análisis de circuitos por sustitución. No estamos aún preparados para la derivación de ellos y su discusión se pospondrá al Cap. 11 en "Teoremas de Redes". Los teoremas de Thévenin y Norton y los teoremas de sustitución y compensación están entre los esquemas que se han ideado para reducir una red dada a otra más simple. Posteriormente cuando estos teoremas se estudien deberá recordarse que son parte básica del objeto de este capítulo.

11. Redes equivalentes a todas las frecuencias

Deberá añadirse, más bien como un apéndice que como una parte esencial de este capítulo, que es posible encontrar redes físicamente realizables que son equivalentes a otras redes dadas a *todas* las frecuencias.

La condición necesaria para que dos redes de dos terminales sean equivalentes es la de que tengan la misma impedancia de entrada a todas las frecuencias. Si la impedancia de una, que llamaremos Z , es la misma función de la frecuencia que de la otra, a la que llamaremos Z' , las dos redes son indistinguibles y son por consecuencia, teóricamente intercambiables. Si ambas estuvieran contenidas en una caja con solo las terminales accesibles, ninguna prueba eléctrica, tanto de estado estacionario como transitorio, podría distinguir una de la otra.

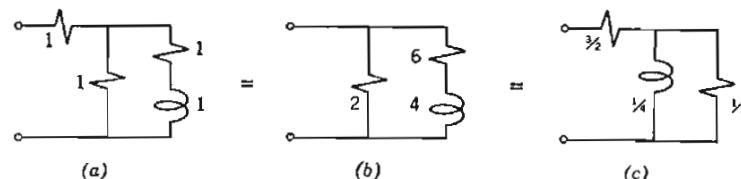


FIG. 6-12. Redes equivalentes a todas las frecuencias. Las resistencias están dadas en ohms y las inductancias en henrys

No estamos preparados en este momento para hacer otra cosa que dar ejemplos, aunque existen medios generales para encontrar estas equivalencias. (Ver Sec. 19 del Cap. 10). La Fig. 6-12 muestra tres de estas redes equivalentes. Las constantes se han escogido para simple ilustración más que por importancia práctica.

La impedancia de entrada de la red de la Fig. 6-12a es la suma de la resistencia de 1 ohm y las dos ramas combinadas en paralelo:

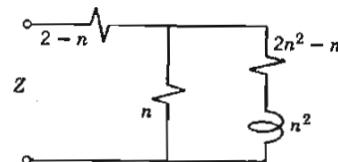
$$Z = 1 + \frac{(1)(1 + j\omega 1)}{(1) + (1 + j\omega 1)} = \frac{3 + j\omega 2}{2 + j\omega} \quad (6-27)$$

La impedancia de entrada a la red de la Fig. 6-12b es

$$Z' = \frac{(2)(6 + j\omega 4)}{2 + 6 + j\omega 4} = \frac{3 + j\omega 2}{2 + j\omega} \quad (6-28)$$

Claramente Z y Z' son idénticas a todas las frecuencias. Es igualmente fácil demostrar que la red de la Fig. 6-12c tiene también la misma función de impedancia.

FIG. 6-13. Igual Z para todos los valores de n



Podemos generalizar en efecto. La red de la Fig. 6-13 tiene la impedancia Z de la Ec. 6-27 para cualquier valor del coeficiente en n . Las tres redes de la Fig. 6-12 corresponden respectivamente a $n = 1, 2, \text{ y } \frac{1}{2}$. Sin embargo, no todos los valores de n son físicamente realizable; claramente n no puede ser mayor que 2, ni puede ser menor que $\frac{1}{2}$, sin requerir resistencias negativas imposibles.

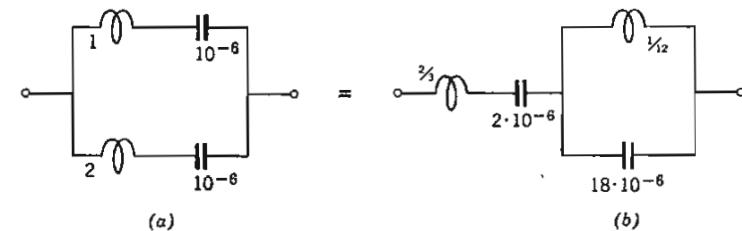


FIG. 6-14. Redes reactivas equivalentes a todas las frecuencias. Las inductancias están dadas en henrys y las capacitancias en farads

La Fig. 6-14 muestra otro par de redes que son equivalentes para todas las frecuencias. Están compuestas de elementos reactivos puros y las equivalencias de esta clase son de importancia práctica en el diseño y construcción de redes tales como filtros eléctricos. Aunque no estamos preparados aún para diseñar estas redes equivalentes, no es un problema serio probar su equivalencia calculando la impedancia de entrada de cada una.

Finalmente, está la bien conocida red de la Fig. 6-15, que contiene R , L y C , para la que la impedancia de entrada es R a todas las frecuencias, estipulando que $L/C = R^2$. Esto significa que una red

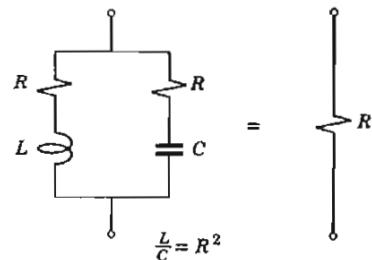


FIG. 6-15. La impedancia es R para todas las frecuencias estipulando que $L/C = R^2$

como la de la Fig. 6-15 es, para todas las frecuencias, indistinguible de una resistencia única R . Además, significa que una red es equivalente a otra red de la misma forma y con la misma resistencia, pero con inductancia y capacitancia diferentes siempre que la razón de la inductancia a la capacitancia sea la misma. Esto proporciona por supuesto, un número ilimitado de circuitos equivalentes, realizables físicamente todos.

Esta red de la Fig. 6-15 no se ha presentado para ilustrar ningún principio. No es particularmente útil. Es justamente una curiosidad natural que pertenece a nuestro museo de circuitos peculiares.

El siguiente capítulo tratará con otra curiosidad natural, el circuito resonante de baja pérdida, que es igualmente interesante y tiene la ventaja inestimable de su grandísima importancia práctica.

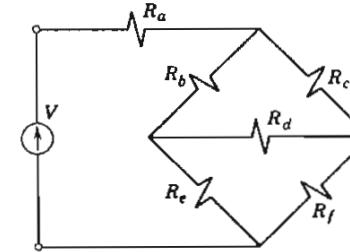
PROBLEMAS

1. El diagrama muestra el circuito de un puente. Si $V = 20$ volts y cada una de las resistencias es de 2 ohms excepto R_r que es de 4 ohms, encontrar (a) una resistencia equivalente única entre las terminales del generador y (b) la corriente que circula por R_f . § 6
2. En el circuito del puente mostrado, $R_a = 1$, $R_b = R_f = 5$,

$R_e \equiv R_r = 7$, $R_d = 2$. Encontrar la corriente en cada rama de puente. § 6

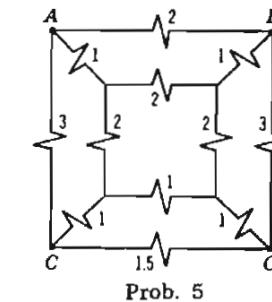
3. El circuito de un puente es el mismo que el especificado en el problema 2 excepto que se ha añadido una reactancia inductiva de 8 ohms a la resistencia de 2 ohms de R_d en la rama central. Encontrar la corriente en cada rama con esta inductancia incluida. § 6

Probs. 1 al 4



4. En el circuito del puente mostrado, sea $V = 10$ volts. $R_a = R_d = 1$ ohm; $R_b = R_c = R_r = 10$ ohms; $R_f = 20$ ohms; Encontrar la corriente que circula por R_d (magnitud y dirección). § 6

5. El diagrama muestra las partes esenciales de un sistema de distribución de potencia. Los números son reactancias inductivas en ohms a 60 cps. En un estudio de cortocircuito se asume que una de las terminales de un generador de corriente alterna se conecta al punto A y la otra al punto O. Si se supone que el voltaje del generador es 100, encontrar la corriente en cada rama y el voltaje en cada unión de la red. § 6



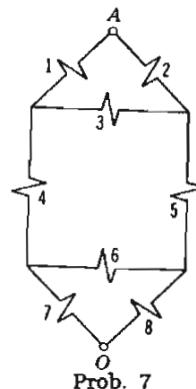
Prob. 5

6. Repetir el problema 5, suponiendo que una de las terminales del generador está conectada al punto A y la otra al punto C. (Se asume una falla en posición diferente de la red de potencia). § 6

7. En el diagrama, las ramas están numeradas. Las impedancias de las ramas (reactancias inductivas todas) son como siguen:

$$\begin{array}{ll} Z_1 = j10 & Z_5 = j3 \\ Z_2 = j8 & Z_6 = j1 \\ Z_3 = j1 & Z_7 = j4 \\ Z_4 = j3 & Z_8 = j50 \end{array}$$

Reducir a una impedancia equivalente única entre A y O, y encontrar los factores de distribución de corriente. § 6



Prob. 7

8. En la red del problema 7 las impedancias son:

$$\begin{array}{ll} Z_1 = 2 + j10 & Z_5 = 1 + j3 \\ Z_2 = 1 + j8 & Z_6 = 1 + j1 \\ Z_3 = 1 + j1 & Z_7 = 2 + j4 \\ Z_4 = 1 + j3 & Z_8 = 5 + j50 \end{array}$$

Reducir a una impedancia equivalente única entre A y O. § 6

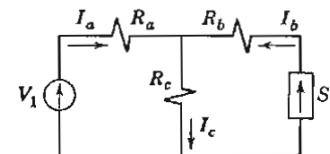
9. Una red de tres terminales Δ es reemplazada por una red equivalente Y. Una rama de la Δ tiene 100 ohms de resistencia y 1 henry de reactancia, otra 200 ohms y 2 henrys y la tercera 300 ohms y 3 henrys. (a) Si puede encontrar una Y equivalente realizable físicamente (p-r) para la Δ a todas las frecuencias, hágalo. (b) Si no puede hacer una Y equivalente p-r a la Δ para todas las frecuencias, entonces hágala equivalente para 60 cps. (c) Indique definitivamente cuál hizo, la (a) o la (b). § 7

10. Repetir el Prob. 9 para una red Δ que tiene, como tercera rama 300 ohms y 1 henry en vez de 300 ohms y 3 henrys. § 7

11. En el circuito mostrado $V_1 = 24$ volts y la fuente marcada S_2 es una fuente de corriente constante que lleva siempre 5 amperes. Cada resistencia es de 6 ohms. Encontrar I_c . § 9

12. En el circuito mostrado $R_a = 4$ ohms, $R_b = 6$ ohms, $R_c = 10$ ohms, $V_1 = 10$ volts. La otra fuente, S_2 es una fuente de voltaje constante que suministra 8 volts. (a) Cambiar la T de resistencia por una equivalente Δ y encontrar la corriente en cada fuente I_1 e I_2 . (b) Sustituir fuentes de corrientes constantes equivalentes por las fuentes de voltaje constante en el circuito original y encontrar I_3 . (c) ¿Es $I_1 + I_2 = I_3$? § 9

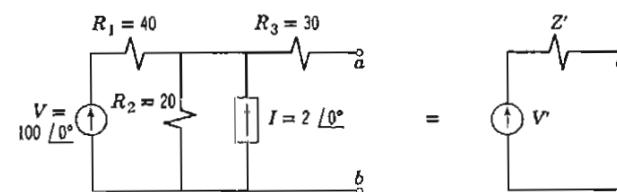
Probs. 11 y 12



13. Derivar la Ec. 6-19 por dos métodos: (a) Directamente de los circuitos y (b) de las Ecs. 6-16, 6-17 y 6-18. § 3

14. Una red en estrella de cuatro terminales está compuesta de las cuatro resistencias de 1 ohm, 2 ohms, 10 ohms y 2.5 ohms. (a) Encontrar una malla de cuatro terminales equivalente. (b) Como una comprobación parcial encontrar la resistencia entre la terminal de la resistencia de 1 ohm y la terminal de la resistencia de 10 ohms, estando las otras dos terminales no conectadas (es obviamente 11 ohms) y comparar con la resistencia entre las mismas terminales de la malla equivalente. § 4

15. Demostrar que la impedancia de entrada del circuito en paralelo de la Fig. 6-15 es R para todas las frecuencias. Asúmase cualesquiera valores para R , L , C , y f y encontrar la corriente en cada



Prob. 16

rama; hacer esto para dos frecuencias diferentes. Dibujar diagramas fasoriales para cada frecuencia.

§ 11

16. (a) Encontrar V' y Z' para hacer estas dos redes equivalentes en las terminales $a-b$. (b) Repetir considerando $R_1 = 0$.

§ 9

17. Demostrar que la red de la Fig. 6-13 tiene la impedancia Z de la Ec. 6-27 para cualquier valor del coeficiente n .

§ 11

18. Encontrar la impedancia de cada uno de los circuitos mostrados en la Fig. 6-14; demostrar que son iguales para todas las frecuencias.

§ 11

7

Resonancia en Serie

1. Resonancia en serie

El circuito en serie RLC de la Fig. 7-1 es tan interesante y al mismo tiempo tan importante que es a la vez un placer y una necesidad estudiarlo con excepcional cuidado. Su característica más obvia, es la de tener baja impedancia para la corriente a una frecuen-

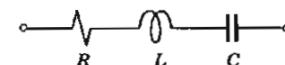


FIG. 7-1. Circuito resonante en serie

cia particular y relativamente alta impedancia, para todas las frecuencias que son significativamente diferentes, tanto más altas, como más bajas.

La expresión para la impedancia se escribe de la manera usual. Hay tres elementos en serie:

$$Z = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (7-1)$$

Los términos de reactancia están entre paréntesis. La reactancia inductiva es positiva y la reactancia capacitiva es negativa. Es evidente que hay alguna frecuencia, algún valor de ω , a la que estas

reactancias individuales serán iguales y opuestas, haciendo la reactancia total del circuito igual a cero. Por definición, ésta es la frecuencia de *resonancia*. Si se llama f_0 a la frecuencia de *resonancia* y a $2\pi f_0$ se le designa por ω_0 , tendremos que, en resonancia:

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \quad \text{o} \quad \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad (7-2)$$

De aquí,

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{o} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (7-3)$$

y la frecuencia de resonancia está dada por:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (7-4)$$

Los rasgos característicos de resonancia son más impresionantes si la resistencia del circuito es pequeña. Primero discutamos circuitos en los que la reactancia de ambos elementos reactivos (tanto $\omega_0 L$ como $1/\omega_0 C$) es por lo menos de 10 a 100 veces mayor que R . Esta razón se llamará Q , factor de calidad del circuito.

2. Impedancia

En resonancia, la impedancia total es R ; es un valor pequeño y una resistencia pura. Para una frecuencia mayor el término ωL en la Ec. 7-1 va haciéndose más importante y la impedancia se incrementa rápidamente con la frecuencia. Como se muestra en la Fig. 7-2, la impedancia se incrementa casi en proporción al incremento de frecuencia arriba de la de resonancia (excepto para frecuencias muy cercanas a la de resonancia). La reactancia total del circuito en este rango de frecuencia más alta es positivo, así tiene el carácter de una impedancia inductiva y la corriente atrasa al voltaje.

La Fig. 7-3 muestra un diagrama de transformadas del voltaje resultante de una corriente dada en el circuito resonante en serie. La Fig. 7-3a se ha dibujado para una frecuencia ligeramente arriba de la de resonancia. Las componentes del voltaje entre las terminales de los tres elementos del circuito sumadas, dan el voltaje total aplicado V . La Fig. 7-3b muestra los mismos voltajes en resonancia. Aunque las componentes de los voltajes no cambiaron mucho, su

suma es extremadamente pequeña y está, como muestra el diagrama, en fase con la corriente.

Es sorprendente algunas veces, encontrar que tanto el voltaje entre las terminales de L de la Fig. 7-1, como también el voltaje en

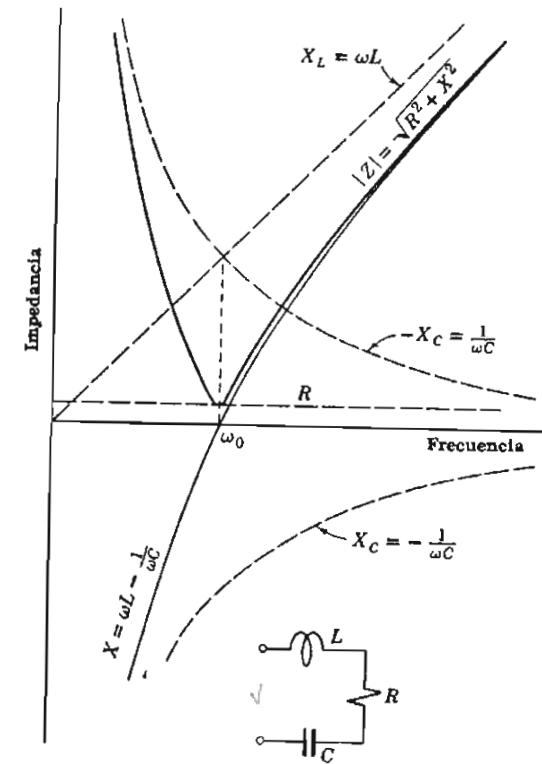


FIG. 7-2. Impedancia de un circuito en serie resonante y sus tres componentes

las terminales de C , pueden ser muchas veces mayores que el voltaje total entre terminales. Sin embargo, esto es un hecho, y dichos altos voltajes no solamente no pueden medirse con un voltímetro (el medidor tiene una alta impedancia de entrada, de modo que no interfiere las condiciones de resonancia) sino que pueden llegar a ser peligrosos fácilmente. El peligro mayor está en el dieléctrico del condensador C , pues aunque el voltaje de entrada se mantenga a unos pocos volts, el voltaje del condensador o del inductor, es 50 o 100 veces mayor, siendo incrementado en resonancia por el factor Q , *la calidad* del circuito.

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R}$$

y el operador descuidado puede recibir una descarga más que desagradable.

La Fig. 7-3c, muestra los voltajes a una frecuencia un poco menor de la de resonancia. El voltaje se ha incrementado a varias veces su valor en resonancia (suponiendo igual corriente), que corresponde a una impedancia mayor.

3. Reactancia

La Z de la Fig. 7-2 puede verse como una representación gráfica de la magnitud del voltaje V de la Fig. 7-3 en función de la frecuencia, porque en el diagrama de transformadas, I se mantiene constante.

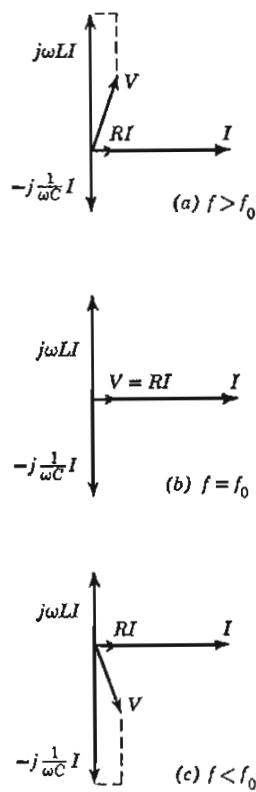


FIG. 7-3. Diagramas de transformadas a frecuencias cercanas a la resonancia

Existen varias características de la Fig. 7-2 lo suficientemente importantes para que merezcan comentarios. Primero, las curvas de reactancia de un inductor (una línea recta) y de reactancia de un condensador (una hipérbola rectangular) están dibujadas como funciones de la frecuencia; estas curvas se usarán una y otra vez conforme avancemos. Su suma es la *reactancia neta* del circuito y aparece como una curva que sube desde un valor negativo grande, asintótico al eje vertical, cruza el eje horizontal en la frecuencia de resonancia y llega a valores positivos indefinidamente grandes como curva asintótica a la línea recta ωL . Esta curva también es de una gran importancia y llegará a sernos familiar.

Se muestra una recta de resistencia constante. Suponemos que la resistencia del circuito es constante, independiente de la frecuencia, pero de hecho hace poca diferencia que lo sea o no, porque el efecto de la resistencia a frecuencias lejos de la resonancia es prácticamente despreciable. El asunto esencial es tener el valor correcto de resistencia a frecuencias cercanas a resonancia.

Finalmente, la curva de impedancia se obtiene como la suma vectorial de R y X. Esto es, $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$. La curva de impedancia es una curva en forma de V, ligeramente redondeada en la parte inferior hasta ser tangencial a la recta de R. Excepto a frecuencias cercanas de la resonancia, Z es casi idéntica (en magnitud) a X.

4. Admitancia

Realmente, como asunto práctico, casi toda la información importante acerca de la conducta del circuito resonante, se encuentra contenida en el extremo redondeado de la parte inferior de la curva en forma de V, donde no podemos verla bien. Por esta razón es mucho más útil dibujar curvas de la cantidad recíproca, la admitancia, como en la Fig. 7-4. Esto hace posible mostrar muy claramente el efecto de diferentes valores de la resistencia del circuito, un efecto casi imperceptible en el extremo inferior de la V en la Fig. 7-2.

Puesto que la admitancia es muy pequeña a frecuencias alejadas de la resonancia (suponiendo una baja pérdida), es innecesario mostrar en nuestro diagrama la escala completa de frecuencias desde el cero; en vez de eso dibujamos la Fig. 7-4 con una escala de frecuencia extendida, de modo que solamente una pequeña parte del rango total de frecuencia está incluido—quizás el 10% a cada lado de la frecuencia de resonancia. Se ha usado una escala logarítmica.

mica de frecuencia; esto no es importante (aunque se acostumbra bastante cuando se tratan funciones de la frecuencia) pero tiene la

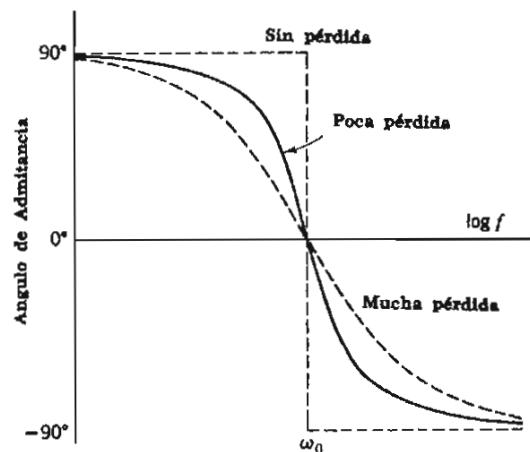
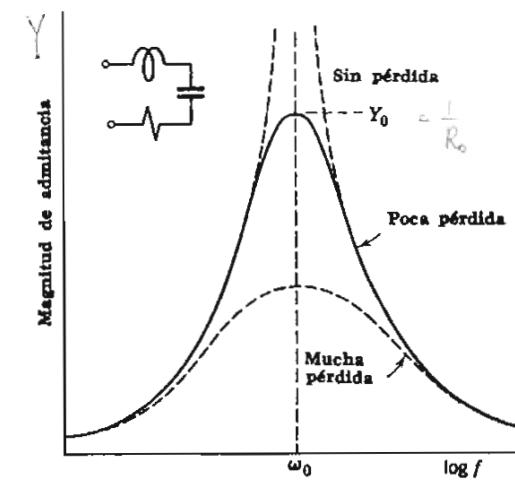


FIG. 7-4. Admitancia de un circuito serie en resonancia; magnitud y ángulo ventaja de hacer la curva de resonancia simétrica con respecto a la recta vertical ω_0 .

Así la Fig. 7-4 puede considerarse recíproca de la curva de impedancia de la Fig. 7-2. También puede considerarse en conexión con

los diagramas de la Fig. 7-3. La admitancia (razón de la corriente al voltaje) será entonces mayor en la Fig. 7-3b (en resonancia) y menor a las frecuencias arriba y abajo de la resonancia. Otra información obtenible en los diagramas de transformadas es el ángulo de la admitancia. Este, está trazado como una curva separada en la Fig. 7-4. El ángulo de I relativo a V es positivo a baja frecuencia, como en la Fig. 7-3c, cero a la frecuencia de resonancia y negativo a frecuencias más altas.

En la Fig. 7-4, el efecto de alta o baja resistencia —esto es, de alta o baja pérdida en el circuito— se muestran fácilmente. La altura de la curva de resonancia está determinada por la resistencia del circuito sola; el valor de la cresta es $1/R$. Así la curva de alta pérdida, como se muestra, es más achatada que la curva de baja pérdida. Si no hubiera ninguna pérdida ($R = 0$) la curva de resonancia sería infinitamente alta. Por otro lado, a frecuencias un poco alejadas de la resonancia, la pérdida hace poca diferencia y las tres curvas de la Fig. 7-4 tienden a confundirse.

3. Formulación de ecuaciones

La admitancia de un circuito serie en resonancia, como se muestra en la Fig. 7-4, es la recíproca de la impedancia. Partiendo del valor de Z , dado en la Ec. 7-1,

$$Y = \frac{1}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad (7-5)$$

Esta ecuación puede ponerse en forma más conveniente, así que antes de calcular Y , hagamos ciertos cambios en Z . Primero, sabemos de la Ec. 7-3 que L , C y la frecuencia de resonancia, están relacionadas por $C = 1/\omega_0^2 L$; usando esto para eliminar a C y partiendo de la Ec. 7-1;

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{\omega_0^2 L}{\omega}\right) \quad (7-6)$$

Previamente nos habíamos referido al factor de calidad Q . Definámoslo ahora * (con el subíndice 0 refiriéndonos a las condiciones de la frecuencia de resonancia) como

* El símbolo Q tiene diferentes significados de uso común: Factor de calidad, carga eléctrica y potencia reactiva. Estos tres significados no tienen relación alguna. Puesto que no se usarán en la misma ecuación, hay muy poco peligro de confusión.

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R_0}$$

Fador de calidad.

(7-7)

Y escribimos

$$Z = R + j\omega_0 L \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = R_0 \left[\frac{R}{R_0} + jQ_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] \quad (7-8)$$

Esta es una expresión nítida, pero no está bien adaptada para el cálculo porque ω cerca de resonancia, es casi igual a ω_0 , y en el paréntesis tenemos la pequeña diferencia de dos cantidades relativamente grandes. Esto puede evitarse introduciendo un nuevo símbolo para representar, no la frecuencia, sino la diferencia entre la frecuencia actual y la frecuencia de resonancia—la “desintonización”. En realidad, la desintonización no está en ciclos por segundo sino que es más conveniente la razón de esta desintonización a la frecuencia de resonancia—la “desintonización fraccional”. Se le llama δ , y está definida en función de ω ,

$$\delta = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$$
(7-9)

Algebra simple nos da:

$$1 + \delta = \frac{\omega}{\omega_0}$$
(7-10)

Por tanto

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = 1 + \delta - \frac{1}{1 + \delta} = \delta \frac{2 + \delta}{1 + \delta}$$
(7-11)

Cuando esto se introduce en la Ec. 7-8 el resultado es

$$Z = R_0 \left(\frac{R}{R_0} + jQ_0 \delta \frac{2 + \delta}{1 + \delta} \right)$$
(7-12)

Se habrá observado que hasta este punto no hay suposiciones limitadoras ni aproximaciones de ninguna clase. Esta expresión es tan general como la Ec. 7-1. Los símbolos pueden tabularse:

Z Impedancia en las terminales de un circuito serie en resonancia.

R, L, C Los tres parámetros del circuito.

R₀ Resistencia (efectiva) a la frecuencia de resonancia.

Q₀ Definida en la Ec. 7-7.

δ Definida en la Ec. 7-9.

ω Es $2\pi f$, donde f es la frecuencia.

ω₀ Es $2\pi f_0$, donde f_0 es la frecuencia de resonancia.

R, la resistencia para ω , puede ser o no la misma que R_0 , resistencia para ω_0 (en resonancia).

6. Aproximaciones

Dos posibilidades son de importancia práctica. Primero, la resistencia puede ser constante con respecto a la frecuencia, en cuyo caso $R = R_0$, y

$$Z = R \left(1 + jQ_0 \delta \frac{2 + \delta}{1 + \delta} \right) \text{ audiofrec}$$
(7-13)

Segundo, la resistencia efectiva puede ser proporcional a la frecuencia (a menudo aproximadamente efectivo para radiofrecuencia) en cuyo caso $R/R_0 = \omega/\omega_0 = 1 + \delta$ (de la Ec. 7-10) y por tanto

$$Z = R_0 \left((1 + \delta) + jQ_0 \delta \frac{2 + \delta}{1 + \delta} \right) \text{ radiofrec.}$$
(7-14)

Ninguna de estas suposiciones acerca de la resistencia es correcta para todas las frecuencias, pero la primera parece ser una buena aproximación para bajas audiofrecuencias, y la segunda para radiofrecuencias.

De hecho, a través del rango de frecuencia cercano a la resonancia Q, la desintonización fraccional δ es pequeña comparándola con 1, y tanto la Ec. 7-13 como la Ec. 7-14 se reducen aproximadamente a

$$Z = R_0(1 + j2Q_0\delta)$$
(7-15)

Nótese que la impedancia en resonancia ($\delta = 0$), tanto para la fórmula exacta como para la aproximada es R_0 .

Calculemos ahora Y de la expresión aproximada para Z y obtenemos

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{Y_0}{1 + j2Q_0\delta}$$
(7-16)

donde Y_0 es la admitancia en resonancia, reciproca de R_0 . En realidad la forma más útil es la razón:

$$\frac{Y}{Y_0} = \frac{1}{1 + j2Q_0\delta} \quad (7-17)$$

Aunque es una aproximación, es suficientemente satisfactoria para todos los propósitos ordinarios si Q_0 es 20 o mayor.*

La Fig. 7-4 muestra la admitancia de un circuito serie en resonancia como se calcula con la Ec. 7-16. La admitancia en resonancia, Y_0 , es una conductancia pura; es la reciproca de la resistencia del circuito R_0 . Para frecuencias arriba y abajo de la resonancia, la admitancia es menor. La agudeza de la cresta depende de la Q del circuito; un circuito de baja pérdida tiene una cresta alta (baja resistencia del circuito) y un circuito de alta pérdida tiene una cresta baja.

El ángulo de admitancia (ángulo entre corriente y voltaje, ángulo del factor de potencia) se incrementa desde cero en resonancia a cerca de 90° cuando se pierde la resonancia. Observándolo en sus terminales, el circuito serie parece tener baja resistencia a la frecuencia de resonancia, reactancia capacitativa alta para frecuencias más bajas y reactancia inductiva alta para frecuencias más altas.

Estas mismas curvas pueden interpretarse igualmente bien como representación de la corriente que fluye en un circuito serie en resonancia, cuando el voltaje aplicado se mantiene constante: la corriente es elevada en resonancia, la cantidad de corriente en resonancia depende de las pérdidas del circuito y la corriente disminuye más o menos abruptamente a frecuencias arriba y abajo de la resonancia.

7. Curva universal de resonancia

Puesto que la forma de la curva de resonancia es esencialmente la misma para todos los circuitos, siendo únicamente más alta o más baja, más ancha o más estrecha, para diferentes frecuencias de resonancia y cantidad en pérdida, parece que una sola curva podría usarse para representar la resonancia en todos los circuitos estipulando que las escalas sean escogidas apropiadamente. La Ec. 7-17 muestra cómo puede hacerse esto. Trazando $Q_0\delta$ como la variable a lo largo del eje horizontal y Y/Y_0 como la variable a lo largo del eje vertical se obtiene una sola curva para todos los circuitos serie en resonancia.

* Si $Q_0 = 20$, el error en Y difícilmente excede al 1% de Y_0 para cualquier δ , y es menor para δ pequeña. Si Q_0 es 10, el error es algo más del doble y δQ_0 deberá ser mayor que 1 para una exactitud de 1%.

El resultado se muestra en la Fig. 7-5, *curva universal de resonancia*. La curva llamada "Total" es Y/Y_0 de la Ec. 7-17. Tiene un valor máximo de 1 a la frecuencia de resonancia. La escala horizontal indica la frecuencia fuera de resonancia; es la desintonización fraccional δ por Q_0 . Este producto, δQ_0 , algunas veces llamado a , es la desintonización fraccional *relativa*.

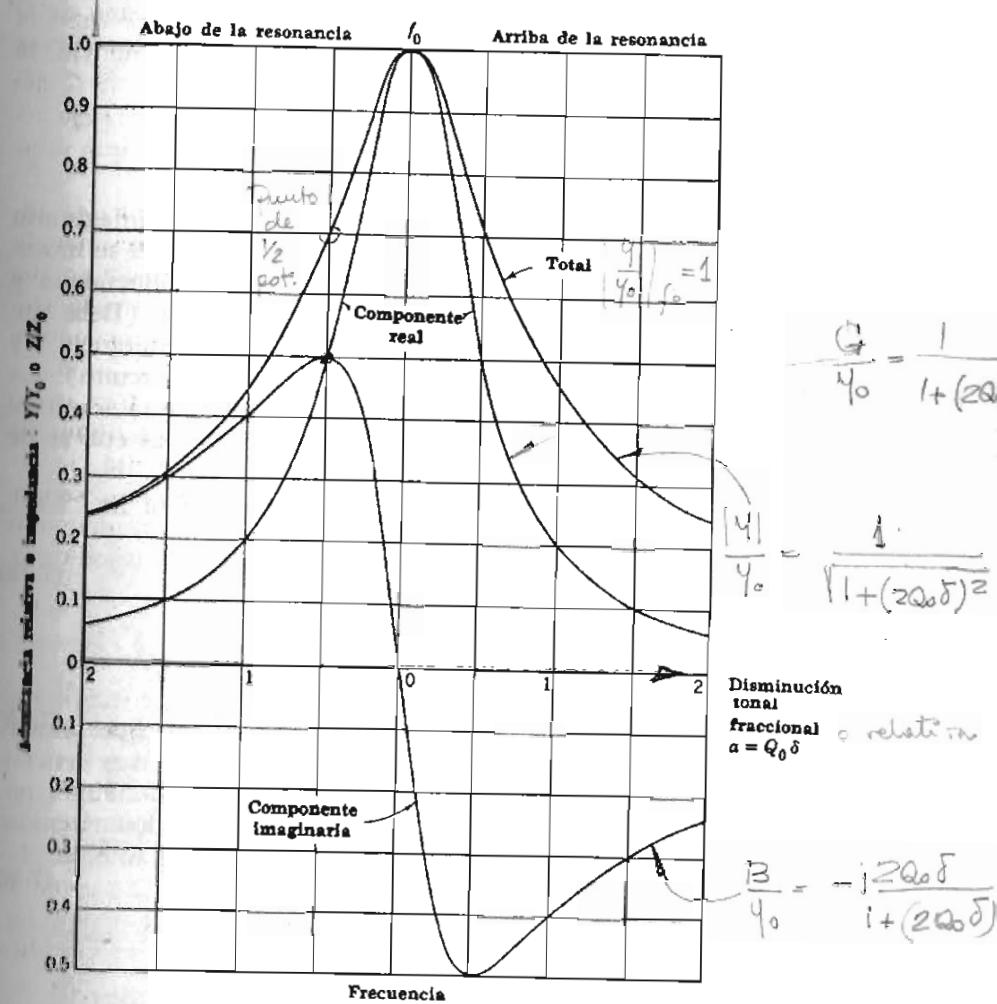


FIG. 7-5. Curva universal de resonancia

Nótese que la desintonación por una cierta fracción δ es más efectiva para destruir la resonancia, en un circuito de alta Q . Si la admitancia se hubiese trazado como una función de δ en lugar de $Q_0\delta$, tendríamos una familia de curvas en vez de una sola curva. Las curvas de resonancia para circuitos de alta Q serían estrechas y agudas (correspondientes a sintonización definida) y las curvas de resonancia para circuitos de baja Q serían anchas (correspondiendo a la poca selectividad de los circuitos de baja Q) la inclusión de Q en la escala horizontal es un recurso que hace que todas las curvas de esta familia coincidan.

8. Componentes de la admitancia

La Fig. 7-5 muestra las curvas, componentes real e imaginaria de la admitancia, así como la de valor total. En la Fig. 7-6 se muestran estas mismas curvas; están marcadas G y B , conductancia y susceptancia de entrada al circuito serie en resonancia. (Debe notarse de una vez que G y B son las componentes de la admitancia Y y no las recíprocas de la resistencia y reactancia del circuito). La Fig. 7-4 muestra las curvas de la magnitud y ángulo de la admitancia, y la Fig. 7-6 da la misma información mostrando las curvas de la admitancia y de sus componentes real e imaginaria.

Estas componentes se encuentran racionizando la Ec. 7-17:

$$\frac{Y}{Y_0} = \frac{1}{1 + j2Q_0\delta} = \frac{1 - j2Q_0\delta}{1 + (2Q_0\delta)^2} \quad (7-18)$$

La componente real es

$$\frac{G}{Y_0} = \frac{1}{1 + (2Q_0\delta)^2} \quad (7-19)$$

La componente imaginaria es

$$\frac{B}{Y_0} = \frac{-2Q_0\delta}{1 + (2Q_0\delta)^2} \quad (7-20)$$

La magnitud de la admitancia total es:

$$\frac{|Y|}{Y_0} = \frac{\sqrt{1 + (2Q_0\delta)^2}}{1 + (2Q_0\delta)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2Q_0\delta)^2}} \quad (7-21)$$

Es de estas ecuaciones de las que las curvas de la Fig. 7-6 se han calculado realmente. Lo mismo que la Ec. 7-17 de la que se han derivado, son aproximadas, pero el error es bastante pequeño con relación a Y_0 si Q es mayor que 20.

Estas ecuaciones y sus curvas tienen bastantes aspectos interesantes. Lejos de la resonancia, la admitancia y la susceptancia son prácticamente iguales en magnitud y la conductancia es muy pequeña.

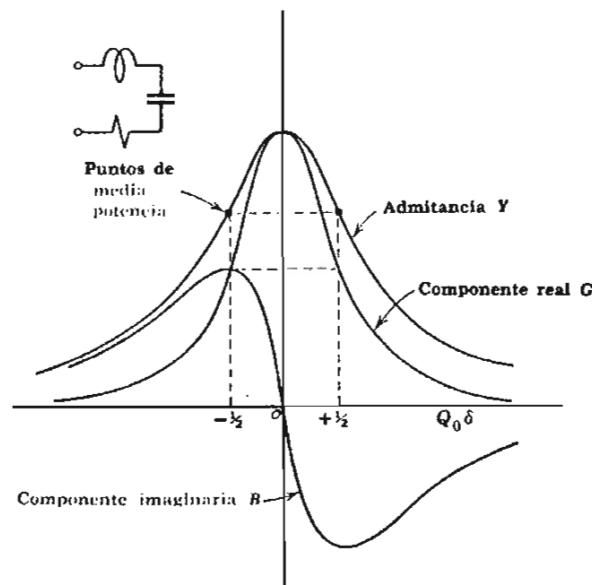


FIG. 7-6. G y B de entrada, componentes de la admitancia de entrada a un circuito serie en resonancia

En la resonancia, cuando la frecuencia se aproxima a la de resonancia, la conductancia se incrementa rápidamente y llega a ser igual a la susceptancia; la conductancia continúa incrementándose, por el contrario la susceptancia disminuye abruptamente, y en resonancia la susceptancia es cero y la admitancia es conductancia enteramente.

9. Puntos de media potencia

El punto en que las curvas de conductancia y susceptancia se cruzan es un punto de gran importancia. La comparación de las Ecs. 7-19 y 7-20 muestran que B y G son iguales numéricamente

cuando $Q_0\delta = \pm \frac{1}{2}$. Cuando $Q_0\delta = -\frac{1}{2}$, $G/Y_0 = \frac{1}{2}$ y $B/Y_0 = \frac{1}{2}$. Cuando $Q_0\delta = +\frac{1}{2}$, $G/Y_0 = +\frac{1}{2}$ y $B/Y_0 = -\frac{1}{2}$. Para ambos puntos la magnitud de Y/Y_0 es $\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.707$ (raíz cuadrada de la suma de los cuadrados). El ángulo de Y/Y_0 y por tanto de Y , es 45 grados.

En función de corriente, esto significa que cuando la desintonización desde la resonancia es tal que $Q_0\delta = \pm \frac{1}{2}$, la corriente es menor que la corriente en resonancia (asumiendo voltaje igual)

según el factor $\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.707$. Por esta razón, a los puntos correspondientes sobre la curva de resonancia se les llama a veces, con ligera inexactitud, puntos de 70%. En función de la potencia, estos puntos se llaman puntos de media potencia, con la idea de que la potencia es proporcional al cuadrado de la corriente y que por tanto, si el circuito resonante es desintonizado por esta cantidad, la potencia de salida útil del sistema será recortada a la mitad.* Los puntos de media potencia están indicados en la Fig. 7-6.

Los puntos de media potencia en cada lado de la curva de resonancia se alcanzan cuando la desintonización es tal que, $Q_0\delta = \frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$. La distancia horizontal entre los puntos de media potencia es $Q_0(\delta_1 - \delta_2) = 1$. Este rango de frecuencia, la distancia entre las dos rectas verticales discontinuas de la Fig. 7-6, es una medida de la anchura de la curva de resonancia. Algunas veces, se le ha llamado anchura de banda del circuito resonante, con la idea de que una

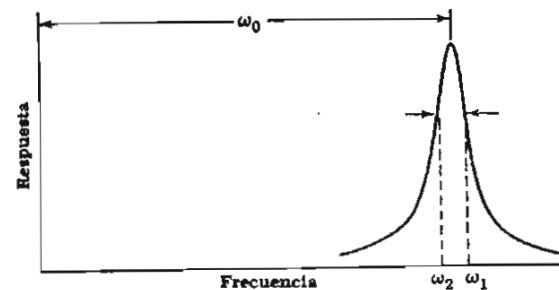


FIG. 7-7. Relación de la anchura de banda a la frecuencia de resonancia

señal a una frecuencia fuera de esta banda se transmite con menos de la mitad de la potencia de salida de una señal de fuerza similar a la frecuencia de resonancia. El uso de "anchura de banda" en conexión con esto, es sin embargo, algo indefinido y es más preciso

* Un punto de media potencia se refiere también a una frecuencia a la que su respuesta se disminuye en 3 decibeles; este es un equivalente casi exacto.

dicir específicamente "la banda de frecuencia entre los puntos de media potencia".

Para nuestra curva de resonancia, la banda de frecuencia entre los puntos de media potencia se ilustran en la Fig. 7-7. Los puntos de media potencia son ω_1 y ω_2 . La razón de $\omega_1 - \omega_2$ a ω_0 es $1/Q_0$. Esto muestra claramente la relación entre un alto valor de Q y una sintonización altamente selectiva. La ilustración corresponde a una Q de cerca de 15; para una sintonización más aguda y buena selectividad de frecuencia, es mejor una Q de 100. A la frecuencia ordinaria de radiodifusión de 1000 kc, la banda de frecuencia entre los puntos de media potencia es de 10 kc, si $Q = 100$. (Esto difícilmente sería adecuado para un amplificador de una sola etapa en un receptor de radio, pero un amplificador de etapas múltiples agudiza la selectividad).

10. Incremento del voltaje de resonancia

Se ha mencionado que el voltaje entre las terminales de los elementos individuales de un circuito altamente resonante puede ser varias veces mayor que el voltaje aplicado. Esto está ilustrado en la Fig. 7-3.

En resonancia la impedancia de entrada de un circuito resonante en serie es R , así si la corriente es I , el voltaje terminal es $V = RI$. Pero el voltaje entre las terminales de la inductancia sola es $j\omega L I$. En resonancia se convierte en $j\omega_0 L I$. Según la Ec. 7-7, $\omega_0 L = Q_0 R$, así que podemos escribir:

$$\text{Voltaje entre las terminales de la inductancia en resonancia} = j\omega_0 L I = jQ_0 R I = jQ_0 V \quad (7-22)$$

Esto significa que el voltaje en la inductancia será en resonancia Q veces mayor que el voltaje terminal aplicado; en ángulo, por supuesto, estará 90° adelantado.

El voltaje entre las terminales de la capacitancia será también varias veces el voltaje aplicado si la Q del circuito es alta. En resonancia el voltaje entre las terminales de la capacitancia será igual de opuesto al voltaje entre las terminales de la inductancia (ver Ec. 7-1), así

$$\text{Voltaje entre terminales de la capacitancia en resonancia} = -jQ_0 V \quad (7-23)$$

Físicamente, el voltaje del condensador estará siempre dado exactamente por la Ec. 7-23. La bobina de inductancia contendrá parte

Calidad } 20 nH
20 - 60 Reg.
60 - 90 Punto

o toda la resistencia del circuito así que no es físicamente posible medir el voltaje de la Ec. 7-22 sin incluir la componente resistiva del voltaje también. Con una Q alta la componente resistiva del voltaje será relativamente pequeña así la magnitud del voltaje en la bobina está prácticamente dada por la Ec. 7-22, pero el ángulo de fase será aproximadamente el ángulo cuya tangente es la Q de la bobina.

11. Q de una bobina

En conexión con esto se puede mencionar que aunque nuestra definición de Q es para un circuito, se acostumbra hablar también de la Q de una bobina, significando la razón de su reactancia a su resistencia para cualquier frecuencia que pueda ser especificada. Si esta bobina se conecta en serie con un condensador que no tenga pérdidas, la Q de la bobina para la frecuencia de resonancia será la Q del circuito. Puesto que de hecho una muy pequeña parte de las pérdidas de un circuito en resonancia existen en el condensador, la Q del circuito en resonancia será prácticamente la Q de la bobina, a menos que se añada resistencia adicional. Es también conveniente hablar de la Q de una bobina de radiofrecuencia en vez de hablar de su resistencia, porque la Q de una bobina de radiofrecuencia se acerca más a ser constante a lo largo del rango de frecuencias útiles de la bobina que la resistencia efectiva. (La constancia comparativa de Q se debe al efecto de capacitancia distribuida en la bobina, al efecto corona * en los alambres y a los fenómenos relacionados).

$$Q_L = \frac{X_L}{R_L}$$

12. Definición de Q

Hemos encontrado tres relaciones entre Q y otras cantidades: incremento del voltaje de resonancia, razón de la reactancia del circuito a la resistencia y selectividad de frecuencia. Cualquiera de estas relaciones pueden utilizarse actualmente como definición de Q deduciéndose la otra de aquella que fue aceptada como punto de partida. De hecho algunos autores prefieren una u otra de las anteriores. Nosotros definimos Q en la Ec. 7-7 como la razón de la reactancia a la resistencia pero vamos ahora a reconsiderar; esta definición tentativa fue seguramente la más conveniente en ese momento; pero quizás aparezca mejor para nosotros otra, ahora que ya sabemos más

* También llamado efecto piel (skin effect).

acerca de Q. Si podemos encontrar una definición que es más general, más fundamental o más simple y además es exactamente equivalente en su aplicación a los circuitos resonantes en serie, nosotros preferimos adoptarla permaneciendo nuestra presente definición como una deducción, un teorema, en lugar que quedar establecida como una definición.

Tenemos ahora cuatro relaciones que incluyen a Q y que son dignas de considerarse como definiciones. La cuarta está relacionada con la energía. Se demostrará que Q tal como la hemos definido es igual a la razón de la energía almacenada en un circuito resonante a la energía disipada por el circuito en cada ciclo de operación multiplicada por 2π .

Tenemos por tanto, cuatro relaciones que incluyen a Q. De la Ec. 7-7, la razón de la reactancia a la resistencia nos da:

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} \quad \text{p/ctos en S.} \quad (7-24)$$

De la Fig. 7-7, la razón del ancho de banda a la frecuencia de resonancia es:

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{\omega_1 - \omega_2} \quad \text{p/ctos en SyP.} \quad (7-25)$$

De la Ec. 7-22 o 7-23, el incremento del voltaje en resonancia nos da:

$$Q_0 = \left| \frac{V_L}{V} \right| = \left| \frac{V_C}{V} \right| \quad \text{p/ctos uso.} \quad (7-26)$$

De la discusión dada en la Sección 13:

$$Q_0 = \frac{\text{Energía almacenada}}{\text{Energía disipada por ciclo}} \cdot \frac{bueus.}{2\pi} \quad (7-27)$$

¿Cuál de ellas será la mejor para estipularla como nuestra definición?

La Ec. 7-26 es la más limitada; nosotros deseamos utilizar Q tanto con los circuitos resonantes en paralelo como con los circuitos resonantes en serie y esta definición en función del incremento de resonancia del voltaje no es aplicable aún a problemas muy relacionados. Podemos descartarla como una posible definición.

La Ec. 7-24 no es mucho mejor. También falla cuando la resonancia se considera en un circuito de tres ramas paralelas de L, C y

R. Aunque es extremadamente útil no podemos tomarla realmente como una definición. Esto deja las Ecs. 7-25 y 7-27. Ambas son buenas y ambas se aplican siempre que Q se utiliza. La que está basada en la selectividad de frecuencia es indicadora, porque está íntimamente relacionada a la aplicación práctica y a las mediciones físicas. ¿Para qué se usa Q? Primeramente para determinar la selectividad de frecuencia.*

¿Cómo se mide Q? Usualmente encontrando los puntos de media potencia. La Ec. 7-27 por otro lado, tiene la ventaja de definir Q en función de cantidades de energía por lo que no puede haber un concepto más simple o básico que éste. Este no sólo se aplica a cada uno de los sistemas en resonancia, actualmente en uso, incluyendo circuitos en serie y paralelo, circuitos acoplados, líneas de transmisión, cavidades electromagnéticas, tubos de órgano y péndulos de relojes sino que es inconcebible que falle su aplicación para cualquier sistema posible en el futuro de resonancia.

Tenemos entonces una selección de definiciones. Debería ser fácil decir que nosotros aceptamos unas de preferencia a las otras ¿pero por qué hacemos esto? Un autor siempre se siente obligado a hacer una elección entre varias posibles definiciones—quizás por buenas razones, posiblemente por conveniencia o quizás arbitrariamente. En este caso no se ve esa necesidad. Es más instructivo dar énfasis a que una definición por lo general no es única y que puede escogerse alguna otra en su lugar. La elección final entre las Ecs. 7-25 y 7-27 como definición de Q se le deja a usted.

13. Energía en un circuito resonante

La energía almacenada en un circuito resonante es constante, aunque la energía almacenada en el campo magnético de una bobina varía de cero a un máximo y regresa a cero cada medio ciclo y la energía en el campo eléctrico de un condensador varía de una manera similar. La energía total almacenada no cambia con el tiempo.

Esta relación de energía es quizás el concepto más fundamental relacionado con la resonancia. La frecuencia de resonancia es la frecuencia a la que la bobina suministra energía tan rápido como

* Por ejemplo Q se emplea para medir la selectividad de una línea de transmisión de longitud de un cuarto de onda, en circuito abierto o cortocircuitado y utilizada como circuito resonante de radiofrecuencia. Estas líneas son útiles en frecuencia de ondas decimétricas o centimétricas y Q puede tener un rango de 1 000 a 10 000. Ver *Electric Transmission Lines* del mismo autor (Referencia 5).

el condensador la requiere durante un cuarto de ciclo y absorbe energía justamente tan rápido como es descargada por el condensador durante el siguiente cuarto de ciclo. Así el circuito externo no necesita suministrar ninguna energía a la bobina o al condensador. Solamente es necesario que el circuito externo suministre las pérdidas que resultan de la presencia de la resistencia en el circuito resonante.

En función de potencia activa y reactiva, no se le pide al circuito externo que suministre ninguna potencia reactiva al circuito resonante. La potencia reactiva es la energía transferida hacia y desde la bobina al condensador dentro del circuito resonante. El circuito externo suministra únicamente potencia activa para reemplazar las pérdidas en la resistencia. Por tanto, el voltaje terminal y la corriente están en fase; su producto es un mínimo en resonancia. Su factor de potencia es unitario. La energía almacenada en un circuito resonante puede ser varias veces mayor que la energía suministrada por el circuito externo en cualquier ciclo aislado. (Como se ha demos-

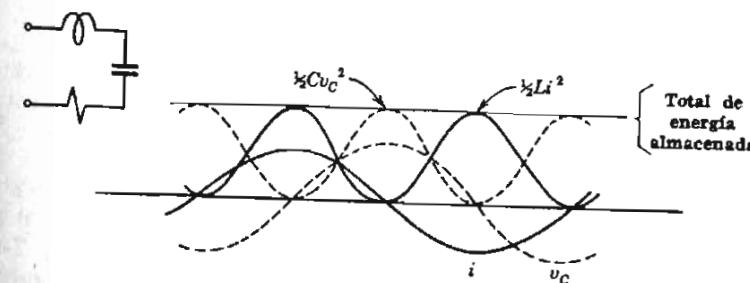


FIG. 7-8. Energía almacenada en un circuito resonante en serie

trado, la razón está relacionada por Q). Es sugestivo que en algunas aplicaciones de radio se le llame a un circuito resonante (circuito resonante en paralelo) como circuito tanque. Veamos cómo la energía trabaja ahora matemáticamente. La Fig. 7-8 muestra una onda senoidal de corriente en un circuito serie:

$$i = I_m \cos \omega t \quad (7-28)$$

La figura muestra también con una línea, interrumpida, el voltaje v_C entre las terminales de la capacitancia sola. De acuerdo con el trabajo del Cap. 2, Sec. 14, el voltaje en el condensador es *

* Si $v_C = (I_m/\omega C) \sin \omega t$, $C dv_C/dt = I_m \cos \omega t = i$ como ya se dio. Ver Ec. 2-30.

$$v_C = \frac{I_m}{\omega C} \sin \omega t \quad (7-29)$$

Puesto que la energía en el campo magnético en cada instante es $\frac{1}{2}Ll^2$, Energía en la inductancia $= \frac{1}{2}Ll^2 = \frac{1}{2}LI_m^2(\cos \omega t)^2 \quad (7-30)$

y la energía en el campo eléctrico es

$$\text{Energía en capacitancia} = \frac{1}{2}Cv_C^2 = \frac{1}{2}\frac{I_m^2}{\omega^2 C} (\sin \omega t)^2 \quad (7-31)$$

Sumando, la energía total almacenada en el circuito resonante en cada instante es

$$\text{Energía total} = \frac{1}{2}I_m^2 \left(L(\cos \omega t)^2 + \frac{1}{\omega^2 C} (\sin \omega t)^2 \right) \quad (7-32)$$

Puesto que nada se ha dicho acerca de la resonancia en esta ecuación, es por tanto cierta para cualquier circuito serie. Suponemos ahora que hay resonancia e introduzcamos de la Ec. 7-2, $\omega_0 L = 1/\omega_0^2 C$, o $L = 1/\omega_0^2 C$. Por tanto

$$\begin{aligned} \text{Energía total} &= \frac{1}{2}I_m^2 [L(\cos \omega_0 t)^2 + L(\sin \omega_0 t)^2] \\ &= \frac{1}{2}I_m^2 L = \frac{1}{2}\frac{I_m^2}{\omega_0^2 C} \end{aligned} \quad (7-33)$$

Puesto que las sumas de la función del coseno al cuadrado y la de la función de seno al cuadrado es siempre uno, energía total almacenada es una constante independiente del tiempo. Ver. Fig. 7-8.

En el instante de corriente máxima, la energía se almacena toda en la inductancia y en el instante de corriente cero la energía se almacena toda en la capacitancia, de modo que la energía total almacenada es igual a cualquiera de estos dos valores máximos individuales y además ambos son iguales entre sí. Las curvas de ambas energías almacenadas y de sus sumas se muestran en la Fig. 7-8.

Ahora, estamos preparados para demostrar que Q puede definirse en función de energía, como se estableció anteriormente. La energía almacenada es, según la Ec. 7-33, $\frac{1}{2}I_m^2 L$. La potencia promedio disipada en el circuito es $I^2 R$. Aquí, I es el valor rms de la corriente igual a $I_m/\sqrt{2}$ para cualquier onda senoidal. De donde la potencia disipada en el circuito puede escribirse como $(I_m/\sqrt{2})^2 R = \frac{1}{2}I_m^2 R$. Esta es la potencia promedio; la energía es la potencia promedio por el tiempo; si la frecuencia es f_0 , el tiempo de 1 ciclo es $1/f_0$; por tanto la energía disipada en el circuito durante el ciclo es $\frac{1}{2}I_m^2 R/f_0$.

Todavía padece.

Encontremos ahora la razón de la energía almacenada a la energía disipada por ciclo. Esto es

$$\frac{\text{Energía almacenada}}{\text{Energía disipada por ciclo}} = \frac{\frac{1}{2}I_m^2 L}{\frac{1}{2}I_m^2 R/f_0} = \frac{f_0 L}{R} \quad (7-34)$$

Multiplicando por 2π , esta relación se convierte en

$$\frac{2\pi f_0 L}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = Q_0. \quad (7-34a)$$

Pero esto es igual a Q_0 tal como se utilizó en la Ec. 7-7. Por lo tanto

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = 2\pi \frac{\text{Energía almacenada}}{\text{Energía disipada por ciclo}} \quad (7-35)$$

Esta es la demostración prometida de la Ec. 7-27. Nótese que Q puede expresarse si se prefiere como

$$Q_0 = \frac{\text{Energía almacenada}}{\text{Energía promedio disipada por radian de tiempo}}$$

donde el "radian de tiempo" es el tiempo requerido por la línea giratoria que representa a la corriente alterna en barrer un ángulo de 1 radián.

14. Resonancia en paralelo

El circuito resonante en paralelo de la Fig. 7-9 tiene una similitud sorprendente con el circuito en serie resonante que hemos discutido anteriormente, pero su conducta es completamente diferente. Tiene alta impedancia en resonancia mientras que el circuito serie, tiene alta admitancia. Los diagramas aparentan ser ingüales, pero las corrientes reemplazan al voltaje y los voltajes reemplazan a las corrientes. La curva de resonancia universal, es aplicable como antes pero representa impedancia de entrada, en lugar de admitancia de entrada, y las componentes real e imaginaria son R y X en lugar de G y B .

Todo lo anterior es evidencia de lo que se ha llamado *dualidad*. Cualquier manifestación que se haya hecho acerca de los circuitos en serie resonantes se aplican a su pareja, el circuito en paralelo

resonante, si en lo expuesto anteriormente reemplaza cada una de las palabras de la siguiente lista por la palabra equivalente:

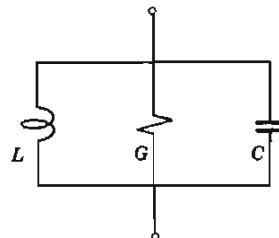


FIG. 7-9. Resonancia en paralelo

voltaje	corriente
impedancia	admitancia
resistencia	conductancia
reactancia	susceptancia
inductancia	capacitancia
serie	paralelo

Esto puede ser una especie de juego. Vamos a intentar jugarlo empezando con la primera página de este capítulo (Pág. 221). El encabezado de la sección se traslada de "resonancia en serie" a "resonancia en paralelo". Continuando con el primer párrafo traducimos (con las palabras equivalentes en itálicas):

"La expresión para la admitancia se escribe de la manera usual. Hay tres elementos en paralelo:

$$Y = G + j\omega C - j\frac{1}{\omega L} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \quad (7-37)$$

Los términos de susceptancia están entre paréntesis. La susceptancia capacitiva es positiva y la susceptancia inductiva es negativa. Es evidente que hay alguna frecuencia, algún valor de ω , a la que estas susceptancias individuales serán iguales y opuestas, tomando la susceptancia total del circuito igual a cero. Por definición, ésta es la frecuencia de resonancia".

[Las Ecs. 7-2, 3 y 4 no se alteran por cambiar L por C y C por L y las usamos sin cambiarlas para la resonancia en paralelo. Continuamos parafraseando la Sec. 2].

"Admitancia. En resonancia la admitancia total es G ; es un valor pequeño y una conductancia pura. Para una frecuencia mayor el término $j\omega C$ en la Ec. 7-37 va haciéndose más importante y la admitancia se incrementa rápidamente con la frecuencia. Como se muestra en la Fig. 7-10, la admitancia se incrementa casi en proporción al incremento de frecuencia arriba de la de resonancia (excepto para frecuencias muy cercanas a la de resonancia). La susceptancia total del circuito en esta gama de frecuencia más alta, es positiva, así tiene el carácter de una admitancia capacitiva y el voltaje atrasa a la corriente.

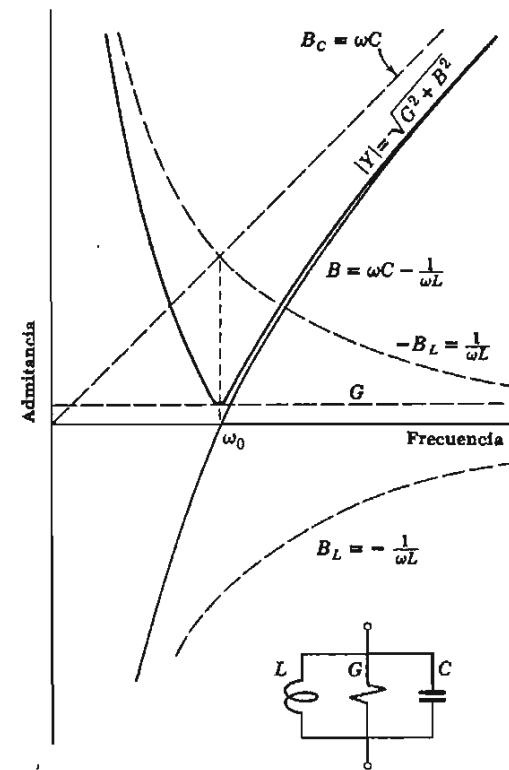


FIG. 7-10. Equivalente de la Fig. 7-2 para la resonancia en paralelo

"La Fig. 7-11 muestra un diagrama de transformadas de la corriente resultante de un voltaje dado en el circuito resonante en paralelo. La Fig. 7-11a se ha dibujado para una frecuencia ligera-

mente arriba de la resonancia. Las componentes de la corriente en los tres elementos del circuito, sumadas dan la corriente total de entrada I . La Fig. 7-11b muestra las corrientes en resonancia ...

"Es sorprendente encontrar algunas veces, que tanto la corriente en C de la Fig. 7-9 y la corriente en L pueden ser muchas veces mayores que la corriente total en las terminales". [Aquí interrumpimos la traducción por equivalencia, para decir que no puede haber peligro de voltaje excesivo debido a la resonancia en este circuito en paralelo, puesto que ningún elemento puede tener más del voltaje aplicado entre sus terminales. Continuamos traduciendo la Sec. 3]

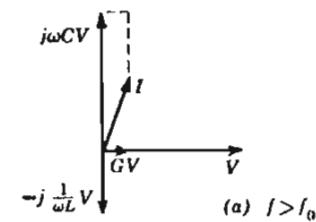


Fig. 7-11.

(a) $f > f_0$

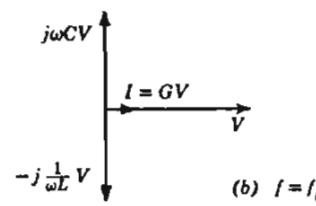


Fig. 7-11.

(b) $f = f_0$

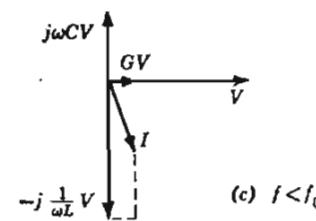


Fig. 7-11.

(c) $f < f_0$

FIG. 7-11. Diagrama de transformadas para la resonancia en paralelo equivalente a la Fig. 7-3

"Susceptancia. La Y de la Fig. 7-10 puede verse como una representación gráfica de la magnitud de la corriente I de la Fig. 7-11

como una función de la frecuencia porque en el diagrama de transformadas V se mantiene constante... Las curvas de susceptancia de un condensador (una línea recta) y susceptancia de un inductor (hipérbola rectangular) están dibujadas como funciones de la frecuencia; estas curvas se utilizarán una y otra vez conforme avancemos. Su suma es la susceptancia neta del circuito... esta curva también es una de gran y repetida importancia y deberá llegar a sernos muy familiar".

"Finalmente la curva de admitancia se obtiene como la suma vectorial de G y B . Esto es, $Y = \sqrt{G^2 + B^2}$. La curva de admitancia es una curva en forma de V ligeramente redondeada en el fondo para ser tangencial a la recta de G . Excepto para frecuencias muy cercanas a la resonancia Y es casi idéntica (en magnitud) a B ".

La exacta similitud de los dos circuitos puede encontrarse más adelante demostrando que las curvas de impedancia de los circuitos en paralelo resonantes, son idénticas a aquellas de admitancia en la Fig. 7-4 para los circuitos en serie resonante. Esto nos lleva a la curva universal de resonancia de la Fig. 7-5 que se aplica tanto a los circuitos en paralelo resonantes, como a los circuitos en serie resonante. La interpretación de los puntos de media potencia en la Fig. 7-6 es la misma, también cuando se hacen las concesiones apropiadas por la similitud.

Debe notarse que Q para los circuitos en paralelo resonantes, similar a la Ec. 7-7, es $Q_0 = \omega_0 C / G_0$ y considerando que $\omega_0 L = 1/\omega_0 C$ y $G_0 = 1/R_0$, escribimos para la resonancia en paralelo

$$Q_0 = \frac{\omega_0 C}{G_0} = \frac{R_0}{\omega_0 L} \quad (7-38)$$

Un alto valor de Q en este circuito paralelo, correspondiente a baja pérdida, depende de tener un alto valor de resistencia en paralelo, entre las terminales de la bobina y el condensador, mientras que la

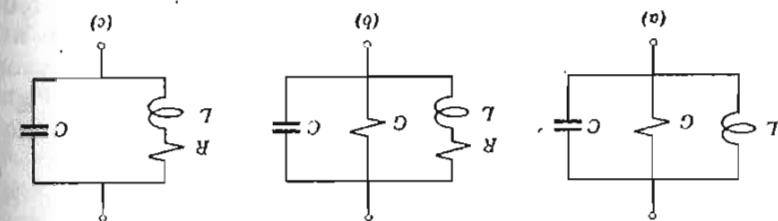


FIG. 7-12. Circuitos con resonancia en paralelo

Q alta en el circuito serie depende de tener una resistencia baja en el circuito.

Tal estudio aclara dudas, pero el circuito paralelo resonante de la Fig. 7-9 o Fig. 7-12a es de importancia práctica limitada. La rama del circuito que tiene inductancia tendrá también necesariamente resistencia, como en la Fig. 7-12b. La resistencia R en la rama inductiva puede algunas veces ser omitida, pero sólo si las pérdidas en la rama central conductiva G es mucho mayor que las pérdidas en la resistencia serie R .

Un ejemplo de un circuito para el cual la Fig. 7-12a es una buena aproximación, es un circuito sintonizado con baja pérdida en la bobina, pero con una gran carga puenteada con ella. Así L y C pueden representar el circuito tanque de poca pérdida de un amplificador y G la carga que recibe la salida del amplificador. La Q efectiva está determinada principalmente, por la carga, no por la resistencia de la bobina, y la Fig. 7-12a es una buena aproximación para tal circuito.

Frecuentemente, sin embargo, cuando se emplea la resonancia en paralelo, en la práctica es un circuito de dos ramas como el de la Fig. 7-12c.

15. Resonancia en paralelo en circuitos de dos ramas

La mayoría de los fenómenos de resonancia en el circuito de la Fig. 7-12c son similares a aquellos que ocurren en el circuito más ideal, pero menos práctico de la Fig. 7-12a. La curva de resonancia universal por ejemplo, se sigue aplicando, aunque con error ligeramente mayor de aproximación. De hecho, el lazo en el circuito de la Fig. 7-12c. es por sí mismo un circuito resonante en serie; y ha llegado a ser circuito en paralelo resonante, únicamente por cambio de sus terminales. Visto partiendo de sus nuevas terminales, el circuito en paralelo resonante de la Fig. 7-12c, tiene alta impedancia en resonancia. Esto es característico, por supuesto, de todos los circuitos con resonancia en paralelo. La impedancia cae rápidamente a frecuencias que difieren de la frecuencia de resonancia. Deseamos ahora demostrar que la curva de resonancia universal de la Fig. 7-5 es una buena aproximación de la impedancia de este circuito en paralelo resonante.

La impedancia de entrada del circuito paralelo de la Fig. 7-12c se encuentra con la regla para dos impedancias en paralelo cualesquiera que sean:

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$Z = \frac{(R + j\omega L) \left(-j \frac{1}{\omega C} \right)}{R + j\omega L - j \frac{1}{\omega C}} = \frac{\frac{L}{C} \left(1 + \frac{R}{j\omega L} \right)}{R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} \quad (7-39)$$

En un circuito de baja pérdida (un circuito con Q alta), cerca de la resonancia, R es mucho más pequeño que ωL y aproximadamente,

$$Z = \frac{L}{C} \frac{1}{R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} \quad (7-40)$$

Obviamente esta es la misma forma que la Ec. 7-5. Por tanto, Z para los circuitos en paralelo de la Fig. 7-12c varía con la frecuencia de la misma manera que lo hace Y en el circuito en serie resonante de la Fig. 7-1. La curva universal de resonancia dibujada para la admittance de resonancia serie, representa por tanto la impedancia de resonancia paralelo.

Vemos de la Ec. 7-40 que la impedancia de entrada al circuito paralelo en resonancia es

$$Z_0 = \frac{L}{R_0 C} \quad (7-41)$$

y puesto que en resonancia, $\omega_0 L = 1/\omega_0 C$, esto puede escribirse

$$Z_0 = \frac{L}{R_0 C} = \frac{\omega_0^2 L^2}{R_0} = \frac{1}{\omega_0^2 C^2 R_0} \quad (7-42)$$

Esta es la impedancia en el punto superior de la curva de resonancia.

Dos preguntas requieren consideración adicional, ambas tienen que ver con las escalas de la curva de resonancia. Primero, ¿deberíamos hacer concesiones para el factor L/C en la Ec. 7-40? Esto no aparece en la Ec. 7-5. La respuesta es que las curvas de resonancia universal están normalizadas; muestran no impedancia, sino la relación sin dimensión de la impedancia fuera de resonancia, a la impedancia en resonancia. El factor L/C desaparece en la relación.

Segundo, ¿qué es Q_0 para el circuito resonante de dos ramas? Nosotros propusimos el uso de la curva de resonancia universal para este circuito, encontrando justificación en la similitud de las Ecs. 7-40 y 7-5. Puesto que de la Ec. 7-5, Q se define por la Ec. 7-7 como

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R_0} \quad (7-43)$$

se sigue que la misma fórmula para Q se aplica en el circuito de dos ramas * de la Ec. 7-40. Esto es razonable; significa que ciertos elementos de R, L y C en serie, que tienen la misma Q, estén conectados como en la Fig. 7-1 o como en la Fig. 7-12c. Nótese que en cada circuito los tres elementos llevan prácticamente la misma corriente (en resonancia) y es de esperarse que la razón de las pérdidas a la energía almacenada debe ser la misma.

Sustituimos ahora Q_0 de la Ec. 7-43 en la 7-42 y encontramos las siguientes útiles expresiones, para la impedancia de entrada en resonancia:

$$Z_0 = (\omega_0 L) Q_0 = \frac{1}{\omega_0 C} Q_0 = [R_0 Q_0^2] \quad (7-44)$$

Esto significa que la impedancia de entrada en resonancia, que como se recordará es una resistencia pura, es igual a la reactancia de cualquiera de las ramas en paralelo multiplicada por Q_0 , o que es igual a la resistencia actual en el lazo del circuito resonante por Q_0^2 . Estos hechos son lo suficientemente importantes como para memorizarse. No debe olvidarse que como la mayoría de las ecuaciones que relacionan los circuitos de dos ramas en resonancia, están basadas en una aproximación y suponen una razonablemente alta Q de 10 a 20 o mejor.

16. Resistencia y reactancia de entrada

Sabemos de la Ec. 7-40 que la curva "total" en el diagrama de resonancia universal de la Fig. 7-5 representa la impedancia de nuestro circuito paralelo resonante de dos ramas. Se comprende que también son aplicables las curvas mostradas en la misma figura para las componentes de la impedancia. La "componente real" es la resistencia de entrada y la "componente imaginaria" es la reactancia de entrada. Estas curvas son gráficas de las ecuaciones

$$(1) \quad R_{in} = \frac{1}{1 + (2Q_0\delta)^2} \quad y \quad (2) \quad \frac{X_{in}}{Z_0} = \frac{-2Q_0\delta}{1 + (2Q_0\delta)^2} \quad (7-45)$$

* Es interesante comparar este valor para Q_0 con el obtenido para el circuito paralelo resonante de tres ramas de la Fig. 7-12a para el cual la Ec. 7-38 da

$$Q_0 = \frac{\omega_0 C}{G_0} = \frac{R_0}{\omega_0 L}$$

en (1) y (2) Q debe ser lo suficiente grande
Si no es así se utiliza (7-47)

$$\text{RESONANCIA EN SERIE } R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2 = \frac{\omega^2}{C} - j(\frac{\omega L}{C} - \frac{1}{\omega C^2}) - j\frac{R^2}{\omega C} \quad 249$$

(que pueden compararse con las Ecs. 7-19 y 7-20). De las Ecs. 7-45 se puede calcular convenientemente valores numéricos de resistencia y reactancia de entrada, para frecuencias cercanas a la resonancia, habiendo encontrado a Z_0 de la Ec. 7-42. La magnitud numérica de la impedancia puede calcularse de

$$|Z| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2Q_0\delta)^2}} \quad (7-46)$$

En estas tres ecuaciones, δ es (de la Ec. 7-9):

$$\delta = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$$

Estas tres ecuaciones son aproximaciones, pero el error es pequeño con relación a Z_0 si Q_0 es mayor que cerca de 20. Sin embargo, un error que es pequeño comparado con los valores verdaderos de R_{in} , X_{in} y $|Z|$ a menos que δ sea lo suficientemente pequeño para hacer $Q_0\delta$ menor que 1. Cuando δ es grande, estas ecuaciones darán la clase de error ilustrado por los siguientes valores numéricos. Con $Q = 20$ y $\delta = 0.4$, X_{in} se calcula de la Ec. 7-45 siendo cerca de 6% de Z_0 , mientras que el valor verdadero es de cerca del 7%. Esta cantidad de error puede o no ser importante dependiendo del uso que se vaya a hacer de estos resultados.

Los valores exactos pueden calcularse con la Ec. 7-39. Quizás es más conveniente el cálculo con la siguiente ecuación que está derivada de la Ec. 7-39 sin ninguna aproximación y es quizás tan precisa como la Ec. 7-39 misma:

$$\boxed{Z = \frac{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} R - j\omega_0 L \left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \left(1 - \frac{1}{Q'^2} \right) \right]}{\frac{1}{Q'^2} + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad (7-47)$$

donde $Q' = \omega_0 L / R$, siendo R la resistencia de la bobina a la frecuencia ω . Esta expresión es válida para cualquier Q' y δ (aunque es difícil de utilizar bastante cerca de la resonancia).

De esta ecuación se pueden derivar aproximaciones que son a la vez simples y exactas si Q' es grande (10 o más) y δ no es tan pequeña (haciendo $Q'\delta$ por lo menos 5 y preferiblemente igual a 10):

$$RL^{\omega^2} - j[\omega^2 L^2 - \frac{L^2 \omega_0^4}{\omega} + \frac{R^2 L \omega_0^2}{\omega}]$$

$$R^2 + L^2 (\omega - \frac{\omega_0}{\omega})^2$$

$$R_{in} = \frac{R}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2} ; X_{in} = \frac{\omega L}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (7-48)$$

Esto da las componentes resistiva y reactiva de la impedancia de entrada en el circuito paralelo resonante de la Fig. 7-12c suponiendo un valor de Q alto y una *frecuencia no muy cerca de la resonancia*, siendo L la inductancia y R la resistencia de la bobina a la frecuencia en consideración.

17. Resistencia en la rama capacitiva

La discusión precedente de resonancia en paralelo, en un circuito de dos ramas ha supuesto que todas las resistencias están en la rama que contiene la bobina de inductancia sin resistencia, prácticamente en la rama capacitiva, como en las Figs. 7-12c y 7-13a. Esto es siempre cierto en circuitos diseñados, para pérdidas mínimas, porque los buenos condensadores tienen muchas menos pérdidas que las buenas bobinas. En la realidad sin embargo, el análisis depende muy poco de esta suposición.

Si hay algo de la resistencia R en cada rama, como en la Fig. 7-13b, o aun si todo está en la rama capacitiva, como en la Fig. 7-13c, no hace ninguna diferencia en el uso de la curva universal de resonancia, o en cualquiera de nuestras fórmulas aproximadas. Todo esto requiere alta Q para ser válido y puesto que Q es alto, hace poca diferencia en qué forma esté la resistencia distribuida entre las ramas. (Las fórmulas exactas en el trabajo precedente podrían, por

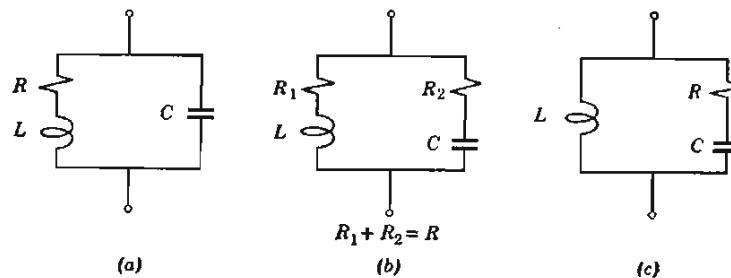


FIG. 7-13. R es la resistencia de la malla resonante

$$\frac{R\omega_0^2}{\omega^2} - j\omega^2 L \left(\frac{\omega}{\omega_0} + \frac{R^2}{L^2 \omega_0^2} \cdot \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

supuesto, fallar su exactitud, pero serían excelentes aproximaciones con una distribución diferente de R .

Es por tanto, suficiente decir que R en todas las fórmulas aproximadas, relacionadas con el circuito paralelo resonante de dos ramas, es la suma de la resistencia en las dos ramas, como en la Fig. 7-13b. En otras palabras, es la resistencia total en la malla serie resonante de este circuito.

18. Resonancia de una bobina

Una bobina diseñada para tener una inductancia, necesariamente tendrá alguna resistencia en el alambre con que está hecha y también tendrá capacitancia distribuida a lo largo del alambre entre una vuelta de alambre y otra.

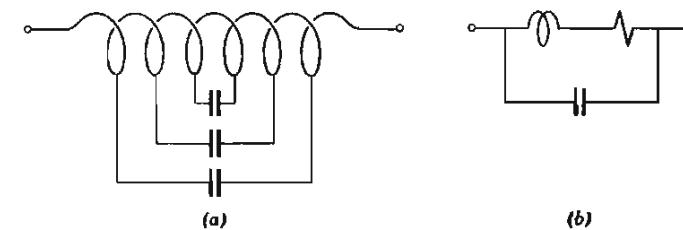


FIG. 7-14. Capacitancia distribuida de una bobina

Esta capacitancia distribuida o autocapacitancia no tiene importancia a baja frecuencia, pero conforme la frecuencia va aumentando, va siendo más y más significativa. El efecto se muestra diagramáticamente en la Fig. 7-14a. Con alguna frecuencia, la bobina por sí misma, sin ningún condensador conectado, tendrá resonancia entre su inductancia y su propia capacitancia distribuida. Esto es usual en el rango de radiofrecuencia, pero no necesario. La cantidad de capacitancia distribuida, depende de la construcción de la bobina; es mayor si la bobina se devana en capas, con vueltas de extremos opuestos del alambre y haciendo una sobre otra. Las bobinas de radiofrecuencia están ordinariamente diseñadas para reducir la capacitancia distribuida, con una secuencia especial de devanado, dejando espacio entre las capas o por alguna clase de devanado flojo, tal como el de bobina de "panal".

La Fig. 7-14 está simplificada. Existe capacitancia distribuida entre cada pulgada de alambre y cualquier otra pulgada, y entre

$$\frac{R\omega_0^2}{\omega^2} - j\omega L \left(\frac{\omega}{\omega_0} + \frac{1}{Q^2} \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

el alambre y tierra. La situación exacta es mucho más complicada como para ser manejada analíticamente. Sin embargo, se ha demostrado que es una buena aproximación, representar toda la capacitancia distribuida de la bobina por una autocapacitancia única hipotética, entre las terminales de la bobina como en la Fig. 7-14b. En otras palabras, se ha encontrado por experiencia, que la bobina sola actúa a una suficientemente alta frecuencia, prácticamente como un circuito paralelo resonante.

Nuestra discusión precedente del circuito paralelo resonante de dos ramas, puede aplicarse a la resonancia de la bobina sola con su autocapacitancia. A baja frecuencia actúa como una inductancia de un valor casi constante. Cuando la frecuencia aumenta, sin embargo, la inductancia aparente o equivalente, va haciéndose mayor, y la resistencia aparente se incrementa cada vez más rápido de acuerdo con las Ecs. 7-48.

En resonancia, la bobina aparece meramente como una alta resistencia. La curva de resonancia universal y las Ecs. 7.45 son aplicables para frecuencias cercanas a la resonancia, encontrándose Q_0 de la Ec. 7-43. Arriba de la frecuencia de resonancia la bobina aparece como una capacitancia en el circuito, no como una inductancia.

Prácticamente, por tanto, la bobina es útil como inductor, solamente a frecuencias abajo de la resonancia. Por tanto la Q aparente de la bobina, va siendo menor y conforme se aproxima a la autoresonancia. Esto es porque la resistencia equivalente se incrementa más rápidamente que la inductancia equivalente. También, las pérdidas se incrementan con la frecuencia, debidas al efecto de periferia en el alambre, * efecto de proximidad, incremento de pérdidas dielectrinas en el aislamiento de la bobina y corrientes parásitas en materiales conductores cercanos.

19. Sintonización

En algunas de las discusiones de este capítulo quizás se ha implicado que la resonancia se obtiene ajustando la frecuencia—que la frecuencia en otras palabras es la variable en las ecuaciones. Esto no es necesariamente cierto, porque bastante a menudo, la variable es la capacitancia cuando se ajusta un condensador para sintonizar un circuito para una frecuencia determinada. Es de esta manera, por ejemplo, que un receptor de radio se sintoniza para

* Ver Cap. 7 Referencia 5 para discusión del efecto periférico y efecto de proximidad.

seleccionar la señal deseada. La sintonización puede también obtenerse variando la inductancia, pero esto es usualmente menos posible.

Las ecuaciones de este capítulo son igualmente válidas para el caso en que se varíe la frecuencia o uno de los elementos del circuito. Demos especial atención a la importante Ec. (7-8) de la que la curva de resonancia se deriva:

$$Z = R_0 \left[\frac{R}{R_0} + jQ_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] \quad (7-49)$$

Si se varía la frecuencia, ω es la variable. Si la frecuencia se mantiene constante y C (o L) se cambia, ω_0 es la variable. R puede (o no) cambiar lentamente con la frecuencia aplicada; R_0 y Q_0 , pueden cambiar lentamente con la sintonización. Estas, sin embargo, son materia de detalle. En general, la impedancia Z se comporta de la misma manera, tanto si la variable es la frecuencia aplicada ω o la frecuencia de resonancia ω_0 . Puede pensarse en la curva de resonancia, como el resultado de variar la frecuencia o como el resultado de sintonizar el circuito.

20. Circuitos de baja Q

En los circuitos con baja Q, en la que la resistencia es una fracción apreciable, de la reactancia en resonancia, y las pérdidas son relativamente altas, el fenómeno de resonancia se presenta pero débilmente. Los picos de resonancia son menos altos y menos agudos. La selectividad de frecuencia está menos marcada.

En circuitos diseñados para ser selectivos, es obviamente deseable, una alta Q. Sin embargo, en algunos circuitos, la selectividad es desventajosa. Los amplificadores de banda ancha, por ejemplo, se diseñan apropiadamente con circuitos resonantes de baja Q.

Q está determinada por la frecuencia, el tamaño de la bobina y el material del núcleo. Para una frecuencia dada, y suponiendo una geometría de la bobina no cambiante, la Q de una bobina es proporcional al peso de cobre en el devanado y puede ser determinada pesándola. Esto es independiente del tamaño o longitud del alambre con el que la bobina se ha devanado.

En baja frecuencia, puesto que $Q = \omega L/R$, Q no puede ser alta. Es difícil para una bobina de núcleo de aire tener una Q mucho mayor de 10 para 60 ciclos por segundo. Para más altas audiofrecuencias, la Q es menor.

cuencias la Q de una bobina de núcleo de aire puede tener un valor de varios cientos.

Un núcleo de hierro, o mejor un núcleo de Permalloy incrementará grandemente el valor de Q. Sin embargo, la histéresis y las corrientes parásitas en el núcleo, evitan que este aumento sea tan grande como se hubiera deseado. También la acción magnética no lineal, de un núcleo de este tipo tiende a distorsionar los fenómenos de resonancia. El asunto del análisis no lineal es un estudio fascinante en el cual no entraremos por no tener tiempo. Respecto al uso práctico del acero laminado, y los núcleos de Permalloy, véase algún libro apropiado de las referencias (Manual de Terman, Referencia 3).

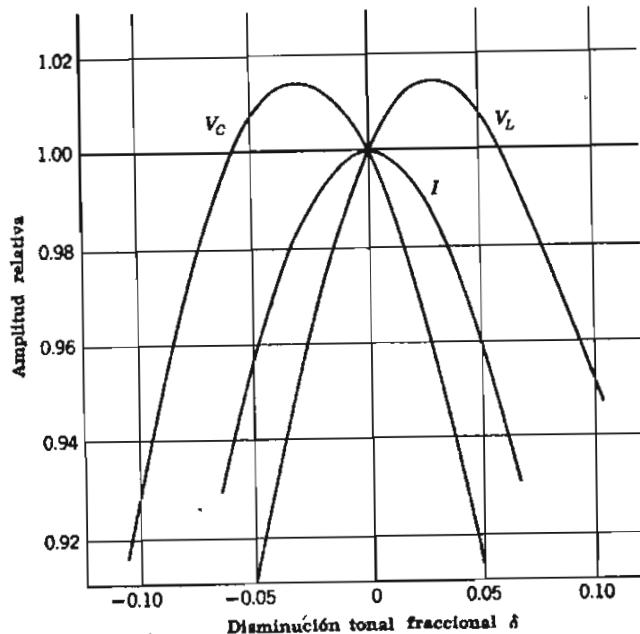


FIG. 7-15. Picos de resonancia de la corriente y voltaje; circuito serie resonante, $Q = 3$

Las ecuaciones básicas de este capítulo y las fórmulas "exactas" que se derivan de éstas, sin suposiciones o aproximaciones se aplican tanto a los circuitos de baja Q como a los de alta Q. Las ecuaciones aproximadas no se pueden aplicar. Sin embargo, cuando Q es baja, las ecuaciones exactas no son inconvenientes para el cálculo.

No se necesita decir mucho más, específicamente, acerca de los circuitos de baja Q. Para los cálculos úsense las ecuaciones "exactas" que se han dado. Para los conceptos úsense las ideas de resonancia que ya se han discutido, aunque embotadas y disminuidas por las pérdidas del circuito. Sin embargo, permanece un asunto que es mejor considerar en conexión con los circuitos de baja Q en vez de referencia con los circuitos más altamente resonantes. Esta es la cuestión de exactamente en qué constituye la resonancia.

Consideremos otra vez el circuito serie de resonancia; ver Fig. 7-15. Considérese que el voltaje alterno está aplicado a sus terminales, permaneciendo constante en amplitud, mientras la frecuencia varía. Trácese como en la Fig. 7-15, la corriente resultante I como una función de la frecuencia. Trácese también el voltaje entre las terminales de la inductancia y el voltaje, entre las terminales de la capacitancia.

El propósito es el de mostrar que el voltaje máximo del condensador, y el voltaje máximo del inductor, no ocurren a la misma frecuencia que la corriente máxima. Para exagerar este efecto en la Fig. 7-15, a Q_0 se le ha dado el muy bajo valor de 3. También, las escalas de la frecuencia y la respuesta se han expandido grandemente en la figura. (Nótese que el origen del diagrama, el punto de respuesta cero y frecuencia cero, caerían de 30 a 60 cm fuera del diagrama.

Es evidente por qué los tres picos no coinciden. Una curva es proporcional a la corriente I ; otra, la curva del voltaje entre las terminales de la inductancia es proporcional a ωI ; y la tercera, el voltaje entre las terminales de la capacitancia es proporcional a I/ω . Sin embargo, aun en este ejemplo extremo, la diferencia es tan ligera que no puede tener ninguna significancia práctica.

21. Definiciones de resonancia

Por otro lado, la significación teórica no se debe pasar por alto. ¿Qué es exactamente la frecuencia de resonancia? ¿Es la frecuencia de máxima corriente, que es también la frecuencia de admitancia máxima y de conductancia máxima de entrada? ¿O es la frecuencia del voltaje máximo en el condensador, que es la frecuencia de oscilación máxima de la carga eléctrica? ¿O es la frecuencia del voltaje máximo entre las terminales de la inductancia? ¿O entre las terminales de la bobina? ¿O es la frecuencia de ángulo cero entre

el voltaje terminal y la corriente, la frecuencia de factor de potencia unitario, de susceptancia de entrada igual a cero?

Se han definido oficialmente tres clases de frecuencias de resonancia (American Standards Association, Referencia 8). Una es la frecuencia de ángulo de fase cero. Otra es la frecuencia de oscilación máxima de carga eléctrica, de voltaje máximo en el condensador. La tercera, que no estamos preparados para discutir todavía, es la frecuencia de la oscilación natural de la corriente en el circuito. (Ver Cap. 16). Las tres tienen valores tan cercanos en un circuito de bastante alta Q que son indistinguibles. Sin embargo, la diferencia es algunas veces significativa.

Empezamos este capítulo suponiendo la resonancia a la frecuencia de ángulo cero, entre el voltaje y la corriente terminales, tomándola como la frecuencia de corriente máxima en la Fig. 7-15. Tomamos la misma definición, ángulo de fase cero, para el circuito paralelo resonante de tres ramas. Pero para el circuito resonante paralelo de dos ramas, el circuito usual de bobina y condensador, evadimos cuidadosamente la cuestión y nos referimos a condiciones aproximadas solamente. Podemos ahora, observar con un poco de más cuidado, este asunto, con ayuda de los diagramas de lugares geométricos.

22. El lugar geométrico de la corriente

La Fig. 7-16 muestra la corriente en la rama capacitiva ($j\omega CV$), la corriente en la rama inductiva [$V/(R + j\omega L)$], y la corriente total I . Se muestran tres valores de cada corriente 1, 2 y 3 correspondientes a frecuencias abajo de resonancia, frecuencia de resonancia y frecuencia arriba de la resonancia respectivamente. A frecuencia de resonancia la corriente total está en fase con el voltaje aplicado (así definimos la resonancia) y la corriente total es pequeña. Pero no es la mínima.

Consideremos ahora, cómo la corriente varía con la frecuencia. La corriente del condensador es proporcional a la frecuencia y su ángulo es de 90° . La corriente en la rama que contiene inductancia y resistencia es más o menos inversamente proporcional a la frecuencia, y su ángulo negativo es más o menos un poco menor que 90° . La corriente total, siendo la suma de éstas dos, está representada por un fasor cuyo extremo está sobre la línea gruesa. Esa línea es el *lugar geométrico* de I .

La I mínima ocurre cuando el lugar geométrico de I está lo más

cerca del origen. Esto no sucede a la frecuencia de resonancia, sino a una frecuencia ligeramente mayor, correspondiente a un ángulo positivo pequeño para I .

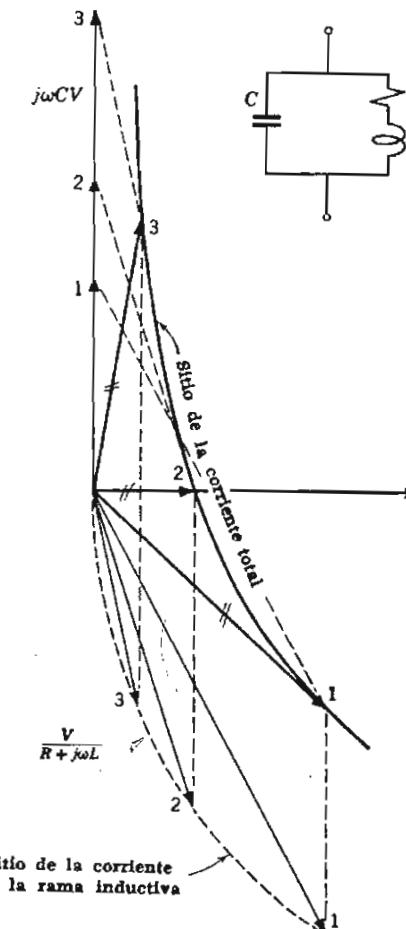


FIG. 7-16. Lugar geométrico de la corriente para un circuito resonante en paralelo

Este estudio de un circuito por medio de un lugar geométrico es quizás poco familiar.

El siguiente capítulo mostrará algunos de los usos del método

de lugares geométricos, y la elegante simplicidad que puede obtenerse en casos complicados.

23. Sumario

El capítulo comienza con el circuito serie resonante. Se obtiene la curva de resonancia universal. Se discuten los puntos de media potencia. Se presenta el factor Q y se consideran definiciones alternativas. Se investiga la energía resonante.

La resonancia en paralelo en un circuito de tres ramas, se considera como un estudio por similitud. El circuito de dos ramas recibe el énfasis debido, a su importancia práctica. Se menciona la autorresonancia de una bobina.

Se discutieron y estudiaron definiciones precisas de la resonancia, para el circuito de dos ramas por medio del diagrama del lugar geométrico.

PROBLEMAS

1. Un circuito serie, como el de la Fig. 7-1, contiene un condensador de 1 microfarad. Está en resonancia a 1 000 cps. Trazar las curvas como en la Fig. 7-2, siendo el valor de R (a) 75 ohms (b) 15 ohms. § 3

2. Trazar las curvas como en la Fig. 7-4 para la admitancia (magnitud y ángulo) del circuito descrito en el problema número 1. Trazarla para R igual a (a) 75 ohms, (b) 15 ohms, (c) cero. § 4

3. Encontrar Q_n para cada uno de los tres valores de R en el Prob. 2. § 5

4. En un circuito serie $L = 65$ microhenrys, $C = 1.56$ milimicrofarads ($1.56 \cdot 10^{-9}$ farad), $R = 5.10$ ohms. Calcular (a) frecuencia de resonancia (b) factor de calidad Q_n y (c) la impedancia del circuito a una frecuencia de 1% arriba de la de resonancia. § 6

5. En el circuito del Prob. 4 calcular (a) frecuencia y (b) impedancia siendo $Q_n\delta$ los valores $-1/2$, -1 , -2 . (c) ¿Cuál es el "ancho de banda" de este circuito? § 9

6. Si $Q_n\delta = 2$ en el circuito del Prob. 4, calcular la admittance y sus componentes real o imaginaria (a) sin introducir ninguna suposición y (b) utilizando las suposiciones que guían hacia las

curvas de resonancia universales. (c) ¿El error descubierto entonces, corresponde con la nota al pie de la página en la Sec. 6? § 9

7. (a) La curva de resonancia universal (Ec. 7-21) es simétrica con respecto a ω_n cuando se traza a una escala de frecuencia lineal. Pruebe esto. (b) La curva de resonancia exacta (derivada de la Ec. 7-8) es simétrica con respecto a ω_n cuando se ha trazado con una escala de frecuencia *logarítmica*. Pruebe también esto. § 8

8. Se requiere que un circuito serie de L , C y R entre en resonancia a 1 Mc/Sec. Su ancho de banda (entre los puntos de media potencia) es de 5 000 cps y su impedancia de entrada en resonancia es de 50 ohms. Encontrar L , C y R (a 1 Mc/sec) § 9

9. Se requiere que un circuito serie de L , C y R esté en resonancia a 1.5 Mc-sec. Su ancho de banda (entre los puntos de media potencia) es de 5 000 cps y C es de 10 microfarads. Encontrar L y R . § 9

10. Considérese el circuito serie resonante y los circuitos paralelos resonantes con tres y dos ramas (Figs. 7-1, 7-12a y 7-12c respectivamente). Si la resistencia en cada uno es R , cuál es la impedancia en resonancia de cada uno. § 15

11. El voltaje aplicado se mantiene constante en las terminales de un circuito resonante. Considérese (a) circuito serie resonante (b) el circuito paralelo de tres ramas y (c) el circuito paralelo de dos ramas (Figs. 7-1, 12a respectivamente). P_n es la potencia recibida por el circuito en resonancia; P_1 es la potencia recibida cuando se desintoniza para ser $Q_n\delta = 1/2$. Encontrar P_1/P_n para cada uno. § 15

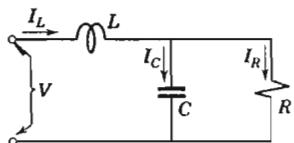
12. Un circuito serie RLC con $Q = 250$ está en resonancia a 1.50 Mc/sec. (a) Encontrar las frecuencias a las que las potencias promedio del circuito resonante es un décimo de la potencia en resonancia, permaneciendo el voltaje de entrada constante. § 16

13. Escribir el problema equivalente al Prob. 12 en circuito paralelo y resolver. § 16

14. Encontrar la Q del circuito de la Fig. 7-12b en función de los elementos del circuito. ¿Cómo está usted definiendo Q ? § 15

15. ¿Cuál es el circuito correspondiente en paralelo de la Fig. 7-12b? (Describir el circuito en palabras; cambiar a las palabras correspondientes; dibujar el circuito correspondiente). § 15

16. En el circuito mostrado, a 1 000 cps, $Z_L = j100$, $Z_C = -j100$, y $R = 200$ ohms. (a) Encontrar la admitancia de entrada a 1 000 cps y dibujar las transformadas de voltaje y corriente. (b) Encontrar la frecuencia de resonancia (cómo define usted la resonancia?) y la admitancia de entrada a la frecuencia de resonancia. § 21



17. ¿La curva de resonancia universal se aplica exactamente o aproximadamente, al circuito del Prob. 16? ¿Si es así, cómo debe definirse Q_0 ?

18. Obtener las Ecs. 7-47 y 48 de la Ec. 7-39. ¿A qué clase de circuitos se aplican?
§ 16

19. Indique cinco hechos importantes acerca de los puntos en las curvas de resonancia universal, en que la desintonización fraccional es $Q_0\delta = \pm \frac{1}{2}$. Explique cada una de sus afirmaciones con claridad.
§ 15



Métodos Gráficos

1. Tres tipos de diagramas

El familiar proverbio chino que valúa una gráfica sobre diez mil palabras, se aplica enfáticamente a la teoría de los circuitos. Las relaciones que existen entre las variables, se ven siempre más fácilmente en una curva o diagrama. Las curvas de resonancia del capítulo precedente, por ejemplo, dicen más en una hojeada que lo que podría aprenderse de sus descripciones en palabras, o matemáticamente, por un largo y paciente estudio.

Los ingenieros electricistas usan una gran variedad de cartas, curvas de lugares geométricos, diagramas de una clase u otra, y es ilustrativo encontrar que la mayoría de los diagramas relacionados con la teoría de los circuitos provienen de unos pocos tipos, pudiéndose aplicar además ciertos principios generales.

Se repetirá nuevamente que una red de dos terminales, está caracterizada por su impedancia como una función de la frecuencia. Una curva de impedancia como una función de la frecuencia sería, por tanto, extremadamente útil para describir la conducta de una red. Sin embargo, la impedancia es una cantidad compleja y una curva sobre una hoja de papel no describirá completamente la relación, impedancia-frecuencia.

Tanto la magnitud como el ángulo de la impedancia (o, alternativamente, tanto la componente real como la imaginaria de la impedancia) deberán mostrarse. Dos curvas pueden hacer esta función: con este propósito se han trazado en la Fig. 7-4 las curvas de

magnitud y ángulo, y las curvas de las componentes real e imaginaria de la impedancia se han trazado en la Fig. 7-6 y se muestran otra vez en la Fig. 8-1.

Teóricamente, la relación de la resistencia y la reactancia a la frecuencia podrían trazarse como una sola curva en el espacio tridimensional con ejes f , R y X pero esto sería incómodo. Sobre la superficie bidimensional de una hoja de papel, o sobre el pizarrón, debemos encontrar modos de presentar las dos variables a un tiempo. Así podemos pensar en la Fig. 8-1, como que muestra la relación entre la frecuencia y la impedancia, utilizando dos pares de ejes: un par es f y R el otro par es f y X .

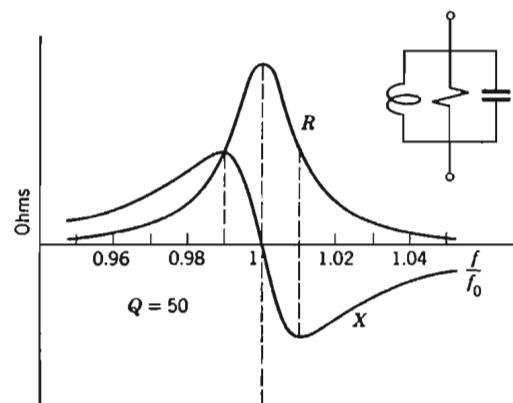


FIG. 8-1. Datos en los planos R - f y X - f

Una elección diferente de ejes se utiliza en la Fig. 8-2; aquí hemos escogido R y X como el par de ejes. Esto, deja a f fuera del diagrama. Así los valores numéricos de la frecuencia se escriben dentro del diagrama en ciertos puntos de la curva. Este expediente no es muy satisfactorio pero puede ser aceptable, y con él la Fig. 8-2 presenta la misma información que la Fig. 8-1. Las dos figuras dan énfasis a aspectos un poco diferentes de las relaciones tratadas pero realmente contienen los mismos datos.

Se dice que la Fig. 8-2, con escalas de R y X , está dibujada en el plano de impedancia compleja o por brevedad el plano Z , siendo R y X las componentes real e imaginaria de la impedancia. Cualquier punto en el plano representa una impedancia por sus proyecciones sobre los ejes.

Aún se utilizará otro tipo de diagrama para caracterizar un circuito en capítulos posteriores. Este es un diagrama de "polos" y "ceros" de la función impedancia y es otro modo de abordar el mismo problema. Tiene ciertas ventajas especiales. Los ejes en este trazado están los dos relacionados con la frecuencia y el plano se llama

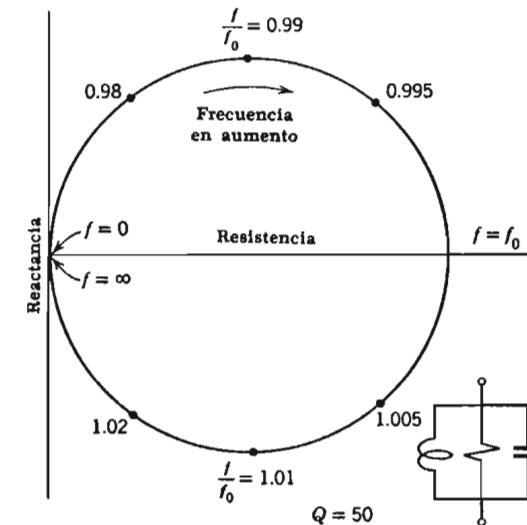


FIG. 8-2. Datos en el plano Z (frecuencia indicada)

usualmente, no muy apropiadamente, plano de frecuencia compleja. Esta forma de diagrama se desarrollará, naturalmente, de la discusión de la corriente transitoria en el Cap. 16.

2. Diagramas de lugares geométricos

La Fig. 8-2 se llama un diagrama de lugar geométrico. Cada punto de la curva representa la impedancia de entrada del circuito resonante en paralelo a una frecuencia particular. La curva completa representa todas las impedancias del circuito a través de toda la gama de frecuencia desde cero al infinito. Sucede que la impedancia de este circuito particular es cero tanto para la frecuencia cero, como para la frecuencia infinita; el lugar geométrico es por tanto una curva cerrada que comienza y termina en el origen. De hecho es un círculo. Sin embargo, antes de discutir este ejemplo más

a fondo, consideraremos primero algunos otros lugares geométricos más simples.

3. Lugar geométrico con un elemento variable de circuito

La Fig. 8-3a muestra la resistencia de la inductancia en serie. Tracemos la impedancia mientras la cantidad de inductancia se varía.

El voltaje y la corriente terminales están relacionadas por

$$V = (R_0 + j\omega L)I \quad (8-1)$$

La inductancia es variable, la resistencia es constante y la frecuencia se mantiene constante también. La Fig. 8-3b muestra los diagramas de los tres factores superpuestos; resultan tres diferentes voltajes terminales de los tres diferentes valores de inductancia

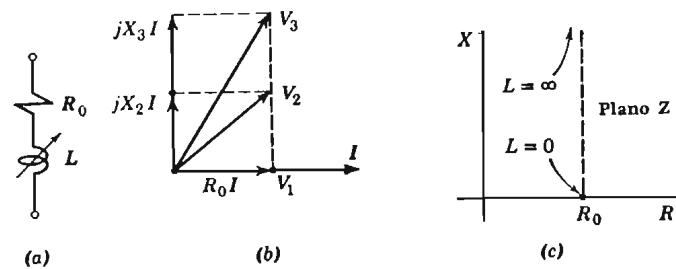


FIG. 8-3. Un circuito y el lugar geométrico de su impedancia

(uno de los cuales es cero), siendo la corriente constante para los tres. La línea gruesa pero no continua, es el lugar geométrico del voltaje cuando la inductancia varía.

Suponiendo que la corriente es de 1 amp., entonces, un lugar geométrico de voltaje es equivalente a un lugar geométrico de impedancia. La Fig. 8-3c muestra el lugar geométrico de impedancia para este circuito trazado en el *plano de la impedancia compleja*, con los ejes *R* y *X*. Nótese que cada punto en el plano *Z* representa un valor de impedancia de entrada, pero que únicamente los puntos sobre la línea gruesa no continúa representan valores de impedancia que *son posibles para el circuito dado*.

Para el mismo circuito podemos encontrar un lugar geométrico de admitancia. Puesto que $Y = 1/Z$ y puesto que sabemos que valores de *Z* son posibles para este circuito particular, podemos calcu-

lar los valores posibles de *Y* (o por lo menos algunos de ellos para indicar la forma de la curva) y entonces dibujar el lugar geométrico de la admitancia como una curva en el *plano Y*. Si hacemos esto, la curva de la Fig. 8-4b resultaría. Sin embargo, este es un cálculo más bien tedioso y el lugar geométrico de la admitancia puede construirse más fácilmente empezando de nuevo con un diagrama fasorial, como sigue.

En la Fig. 8-4a el voltaje es el factor de referencia. Sus componentes *IR* e *IX* se han dibujado para los tres diferentes valores de *L*. Cuando *L* es cero, *IR* = *V*. Para cada uno de los otros dos valores mostrados, se han sumado (vectorialmente) *IR* y *jIX* para totalizar *V*. La curva gruesa no continua en la parte inferior del diagrama es el lugar geométrico de la *IR*. Puesto que *R* es constante, este lugar

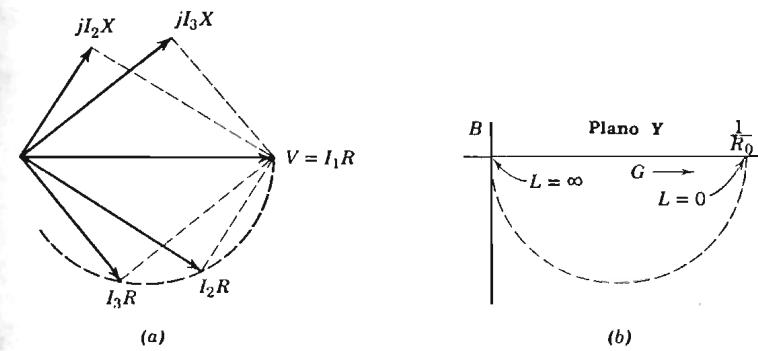


FIG. 8-4. La admitancia del lugar geométrico para el circuito de la Fig. 8-3

geométrico de *IR* es proporcional al lugar geométrico de *I*, y dicho lugar geométrico de *I*, suponiendo un voltaje aplicado unitario, es el lugar geométrico de la admitancia deseada. Por lo tanto, el lugar geométrico de la admitancia tiene la forma de esta línea gruesa no continua. Nótese que para cada valor de corriente, un fasor *IR* y una recta no continua igual a *jIX* forman un ángulo en la punta del fasor *IR*. Este ángulo es siempre de 90°. Estas dos rectas siempre terminan en los extremos del fasor *V*. Por lo tanto y según la geometría plana, la curva es un semicírculo.

Se ha visto, por tanto, que la forma de lugar geométrico de admitancia es circular, pero necesitamos un método más simple para encontrar su tamaño. Esto puede lograrse encontrando dos puntos sobre el semicírculo como sigue. Si la inductancia del circuito se incrementa sin límite, la corriente (y por tanto la admittan-

cia) se aproximan a cero; uno de los extremos del lugar geométrico semicircular es por lo tanto, el origen. Si por otro lado, la inductancia del circuito es cero, la impedancia será R_0 , y la admitancia es $Y = 1/Z = 1/R_0$. Este es el otro extremo del lugar geométrico; puesto que $1/R_0$ es real y es un punto sobre el eje G . Así llegamos a la conclusión de que el lugar geométrico de la admitancia (como en la Fig. 8-4b) es un semicírculo de diámetro $1/R_0$ con su centro en el punto $G = \frac{1}{2}R_0$, $B = 0$.

4. Puntos sobre el lugar geométrico de la admitancia

En la Fig. 8-3b el punto marcado V_1 muestra el voltaje aplicado, cuando ωL del circuito es cero, V_2 muestra el voltaje cuando $\omega L = R_0$, V_3 cuando $\omega L = 2R_0$, y así sucesivamente. En la Fig. 8-5a estos puntos específicos están marcados $\omega L/R_0 = 0, 1, 2$ y 3 .

Es claro que sería deseable marcar puntos similares específicos en el lugar geométrico de la admitancia de la Fig. 8-4b—puntos de L conocida o lo que es equivalente, puntos de $\omega L/R_0$ conocida. Para hacer esto, nótese que la recta radial indicada en la Fig. 8-5a forma un ángulo con el eje tal que

$$\tan \theta = \frac{\omega L}{R_0} \quad (8-2)$$

Ahora, cada punto sobre el lugar geométrico de la admitancia está relacionado con el punto correspondiente sobre el lugar geométrico de la impedancia por la relación $Y = 1/Z$. Por tanto, Y y Z son cantidades complejas con magnitudes recíprocas y ángulos opuestos.

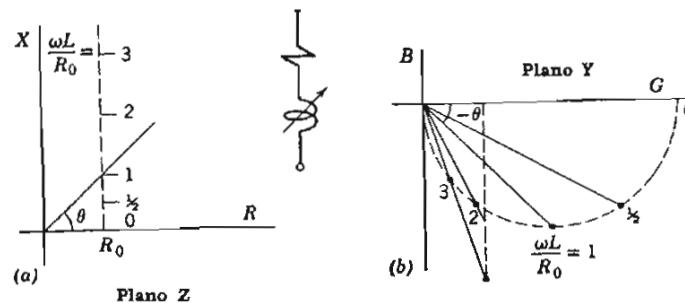


FIG. 8-5. Los lugares geométricos de las Figs. 8-3 y 8-4 con valores de la variable indicados

y si Z es una cantidad compleja con ángulo θ , como en la Fig. 8-5a, la Y correspondiente es una cantidad compleja con ángulo $-\theta$ como en la Fig. 8-5b.

Esto nos lleva a la construcción mostrada en la Fig. 8-5b: tratemos rectas desde el origen que formen varios ángulos $-\theta$ con el eje y sus puntos de intersección con el lugar geométrico son los puntos a los que $\omega L/R_0 = \tan \theta$. Dibujando rectas radiales a ángulos para los que las tangentes son $\frac{1}{2}, 1, 2, 3, \dots$, los puntos indicados en el diagrama se encuentran. (Un método conveniente es dibujar una recta vertical a 1 unidad del eje B y medir a lo largo de esa recta distancias hacia abajo del eje G de $\frac{1}{2}$ unidades, 1 unidad, 2 unidades, 3 unidades, Las rectas radiales se trazan entonces, a través de estos puntos medidos).

El semicírculo de la Fig. 8-5b representa todas las admitancias que son físicamente obtenibles variando la inductancia en el circuito de la Fig. 8-3a. Si pudiéramos tener un elemento con reactancia negativa, el lugar geométrico que es una línea recta en el plano Z podría extenderse hacia abajo y el lugar geométrico circular en el plano Y podría completarse en el cuadrante superior. Una inductancia negativa no es posible, pero sí una capacitancia variable, que tenga reactancia negativa, se substituye por la inductancia del circuito, las partes perdidas del lugar geométrico aparecerían. Esto se considerará nuevamente en la sección 10. Mientras tanto, consideremos algunas conclusiones generales.

5. Lugar geométrico circular general

Considérese la red de la Fig. 8-6; la admitancia de entrada es

$$Y = G_1 + j\omega C_1 + \frac{1}{R_0 + jX} \quad (8-3)$$

El lugar geométrico de Y cuando se varía X se muestra en la Fig. 8-6b. Está formado de tres partes: la admittance G_1 del elemento resistivo y la admittance $j\omega C_1$ del elemento capacitivo están sumadas y a su suma se le ha sumado la admittance de la tercera rama. Esta tercera rama contiene a R_0 y la variable X . Todas las admittancias posibles de esta tercera rama para diferentes valores de X caen, como vimos en la sección previa, en algún lugar de un círculo. El círculo indicado es por tanto, el lugar geométrico deseado. Si $X = \infty$, la admittance total es $G_1 + j\omega C_1$. El punto diametralmente opuesto

a este punto de $X = \infty$, es el punto para $X = 0$; en este punto, la admitancia de la tercera rama es $1/R_0$.

La ecuación para Y puede escribirse

$$Y = \frac{(G_1 R_0 + 1 + j\omega C_1 R_0) + j(G_1 + j\omega C_1)X}{R_0 + jX} \quad (8-4)$$

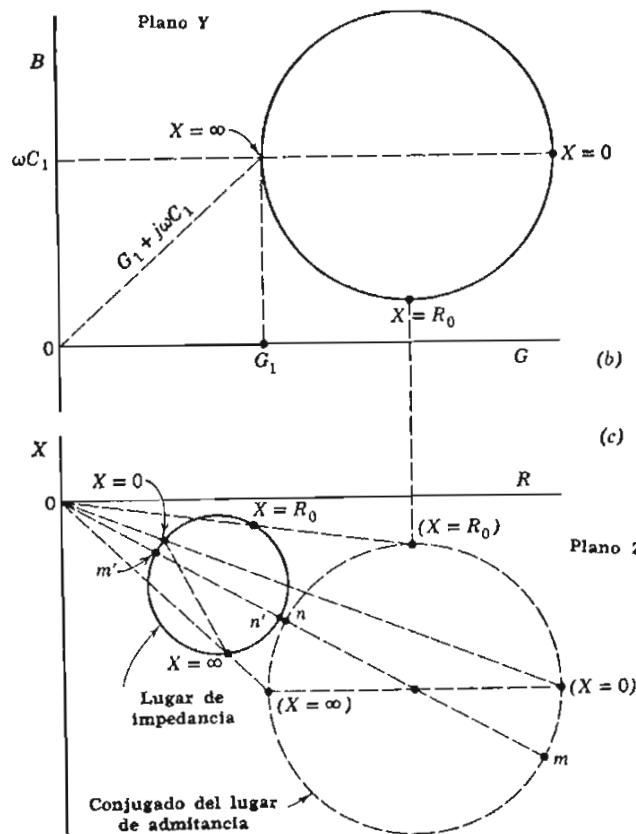
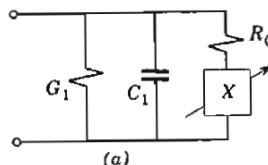


FIG. 8-6. Una red y su lugar geométrico

X es la variable en esta expresión, R_0 , G_1 , C_1 , y ω son las constantes. Esta ecuación es por tanto, un caso especial de la ecuación formal

$$Y = \frac{a + bX}{c + dX} \quad (8-5)$$

donde a , b , c y d pueden ser constantes complejas y X es una variable real.

Ahora, el círculo de la Fig. 8-6b es un círculo general. No está restringido en tamaño o localización. La Ec. 8-5 es la ecuación formal de un círculo general. Con una elección apropiada de constantes, la Ec. 8-5 puede describir cualquier círculo en el plano complejo o cualquier línea recta.*

6. Teorema referente a lugares geométricos recíprocos

Si el lugar geométrico de la impedancia es un círculo o una línea recta, el lugar geométrico de la admittance es también un círculo o una línea recta. (La línea recta se considera un círculo de radio infinito). Para probar este teorema, supóngase que el lugar geométrico de la admittance es circular y por tanto está descrito por una ecuación de la forma de la Ec. 8-5. La impedancia, siendo $Z = 1/Y$, es

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{c + dX}{a + bX} \quad (8-6)$$

Pero ésta, también es la ecuación de un círculo (o de una línea recta) porque tiene la misma forma matemática de la Ec. 8-5. Concluimos, por tanto, que si un lugar geométrico en el plano Y es cualquier círculo o línea recta, el lugar geométrico correspondiente en el plano Z es también un círculo o una línea recta,^t nuestro teorema queda probado.

* La geometría analítica del plano complejo, al contrario de la geometría analítica ordinaria, no es probablemente familiar. La Ec. 8-5 describe a una línea recta si $d=0$, horizontal si b/c es real, vertical si b/c es imaginaria, inclinada si b/c es compleja. Si $a=1$, $b=0$ y c es real, Y es un círculo que pasa a través del origen con centro en $1/2c$ si d es imaginaria, o una línea recta a lo largo del eje G si d es real. Si $a=c$, ambas reales, y $b=-d$, ambas imaginarias, Y es un círculo con centro en el origen Y de radio 1; si a y b están multiplicadas entonces por una constante real r , el radio sería r ; y así sucesivamente.

^t Esta $Z = 1/Y$, es un ejemplo de la transformación "preservación de círculo" en el plano complejo. Se sabe de la teoría de las funciones de variable compleja que la más general de las transformaciones preservadoras de círculo es

$$Z = \frac{AY + B}{CY + D} \quad (AD - BC \neq 0) \quad (8-7)$$

en la que Z y Y son variables complejas y A , B , C y D son constantes complejas. La reciproca es el caso especial para el que $A = D = 0$ y $B = C = 1$.

Importante

7. Encontrar el lugar geométrico reciproco

Encontremos ahora el lugar geométrico de la impedancia de la Fig. 8-6. Es teóricamente posible trazar el lugar geométrico de la impedancia partiendo de la reciproca de la Ec. 8-4, pero es amenazadoramente complicado. Utilicemos el hecho, recién probado, de que el lugar geométrico será un círculo. Cada punto sobre este lugar geométrico Z será el reciproco de cada punto correspondiente sobre el lugar geométrico Y que conocemos. Esto es, el radio vector de cada punto, sobre el lugar geométrico Z estará relacionado al radio vector del punto correspondiente sobre el lugar geométrico Y por lo siguiente: sus longitudes serán reciprocas y sus ángulos serán opuestos. (Así, si el lugar geométrico Y es un círculo en el primer cuadrante, como en la Fig. 8-6b, el lugar geométrico Z será un círculo en el cuarto cuadrante, como en la Fig. 8-6c). Pero no necesitamos calcular la posición de cada punto individual; solamente necesitamos encontrar algunos puntos para definir un círculo y entonces dibujarlo.

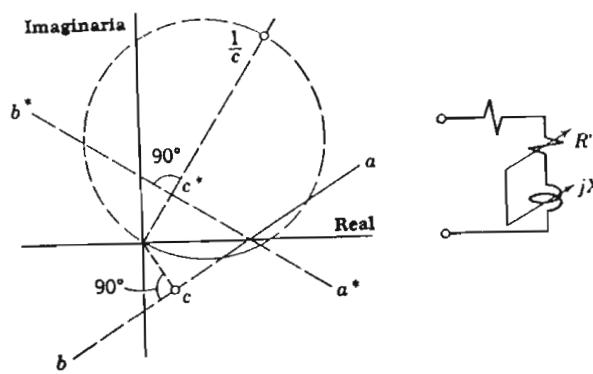


FIG. 8-7. Construcción para encontrar un círculo que es reciproco a una recta

Una construcción simple, parcialmente gráfica y parcialmente calculada, es como sigue. Dibujar en el plano Z (Fig. 8-6c) un círculo que es la imagen reflejada en un espejo del lugar geométrico de la admittance como si se hubiera reflejado en el eje de los reales (esto es, su conjugado) incluyendo cualquier punto en el lugar geométrico en el que haya interés especial. Dibujar una recta desde el origen O a través del centro de este círculo, intersectando al círculo

en m y n . Mídense a lo largo de esta recta una distancia Om' que es reciproca de Om y una distancia On' , reciproca de On . Dibujar un círculo que pase por m' y n' con un centro sobre la línea Om . Este es el lugar geométrico deseado de la impedancia. Los puntos para $X = \infty$, $X = 0$ y cualquier otro (un ejemplo en la figura es $X = R_n$) se encuentran cuando las rectas radiales apropiadas interceptan el lugar geométrico. (Nótese que los puntos para $X = \infty$ y $X = 0$ no son en general, diametralmente opuestos uno del otro sobre el lugar geométrico de la impedancia. Además los centros de los círculos no están a distancias reciprocas de O).

Esto nos da un método simple para encontrar el círculo que es reciproco a cualquier otro círculo. Una modificación lo adapta para encontrar el círculo que es reciproco a una línea recta. La Fig. 8-7 muestra un lugar geométrico de una línea recta $a-b$ (esto puede interpretarse como el lugar geométrico de Z cuando X' y R' se han incrementado proporcionalmente en el circuito mostrado). La recta a^*-b^* es su conjugada, su reflejo en el eje real. La reciproca de la recta $a-b$ (el lugar geométrico de la admittance para el circuito) es un círculo; su centro está sobre la recta que pasa por el origen y es normal a a^*-b^* , el círculo deberá pasar a través del origen y a través del punto $1/c$ como se muestra. Las razones de esta construcción se siguen del trabajo precedente sin necesidad de explicación.

Inversamente, la reciproca de un círculo que pasa a través del origen es una línea recta. La Fig. 8-7 muestra la construcción para usarse en este caso también.

La reciproca de un círculo con su centro en el origen es otro círculo con su centro en el origen.

8. Teorema referente a lugares geométricos circulares

Si solamente un elemento de una red es variable, el lugar geométrico de la impedancia de entrada de la red es un círculo o línea recta, y lo mismo es el lugar geométrico de la admittance de entrada. Considérese la resistencia y reactancia en serie en la Fig. 8-8. Supóngase que R' se mantiene constante y X' varía; el lugar geométrico de la impedancia es la recta vertical en la Fig. 8-8b. El lugar geométrico de la admittance, un círculo, se muestra en la Fig. 8-8c. Supóngase, por otro lado, que X' se mantiene constante y R' varía. El lugar geométrico de la impedancia es la recta horizontal y el de la admittance es el semicírculo. (Los lugares geométricos, cuando R' varía no se habían discutido previamente, pero no es difícil de

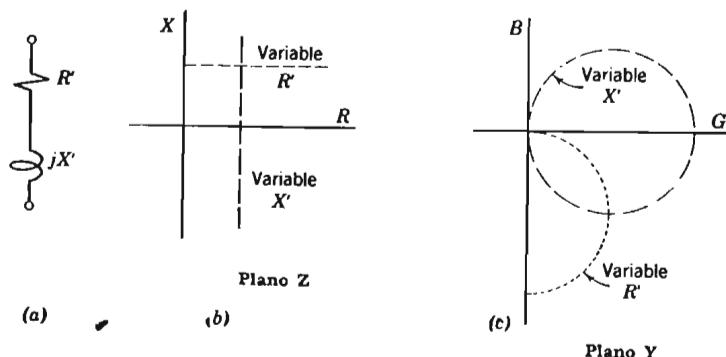


FIG. 8-8. Lugares geométricos de un circuito con R' y X' en serie, uno u otro variables

ver que deben ser como se muestran). Estos lugares geométricos satisfacen nuestro teorema. O son círculos o son líneas rectas.

Supóngase que se añade una impedancia constante Z_1 en serie con el circuito que ha estado siendo considerado, como en la Fig. 8-9a. Esto añade Z_1 a cada impedancia; el lugar geométrico de la impedancia se traslada a una distancia Z_1 , pero permanece siendo una línea recta. El lugar geométrico de la admitancia no se muestra, pero puesto que el lugar geométrico de la impedancia es una línea

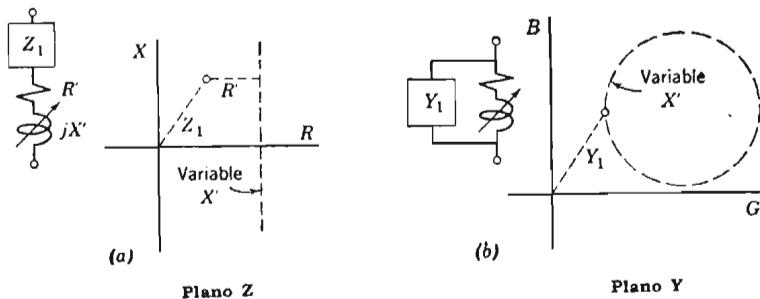


FIG. 8-9. (a) Lugar geométrico trasladado sumándole Z_1 . (b) Lugar geométrico trasladado sumándole Y_1

recta el lugar geométrico de la admitancia deberá (según el teorema previo) ser un círculo.

Supongamos que se añade una admittance constante Y_1 en paralelo con el circuito original, como en la Fig. 8-9b. Esta se suma a la admittance, y el lugar geométrico de la admittance se traslada a

la distancia Y_1 , pero permanece siendo un círculo. El lugar geométrico de la impedancia correspondiente debe ser también, por lo tanto, un círculo.

Estas adiciones, elemento por elemento, pueden continuar indefinidamente. Los elementos pueden añadirse en paralelo con el circuito de la Fig. 8-9a o en serie con el circuito de la Fig. 8-9b. La red puede alcanzar cualquier grado de complejidad, pero los lugares geométricos de la impedancia de entrada o de la admittance seguirán siendo círculos o líneas rectas.

Esto hace plausible al teorema, pero es una demostración únicamente para redes que puedan formarse empezando con el elemento variable y sumándole elementos fijos en paralelo o serie. La demostración general sería un poco difícil para entenderla ahora, pero será hecha fácilmente con los métodos del Cap. 10.*

9. Ejemplos

La literatura de ingeniería eléctrica está llena de "diagramas circulares", "cartas circulares", "curvas de lugares geométricos" y de artificios gráficos similares. Dos ejemplos comunes se darán a continuación.

Motor de Inducción. En los libros sobre maquinaria eléctrica se explica que un circuito equivalente aproximado de un motor de inducción es el mostrado en la Fig. 8-10a. La resistencia R' es una resistencia hipotética que representa la carga mecánica, y la potencia suministrada a R' es la potencia útil de salida del motor. R' varía, dependiendo de la cantidad de carga mecánica del motor; los otros parámetros son constantes. Suponiendo que el voltaje terminal de entrada es constante, encontrar la corriente de entrada cuando la carga varía.

Dibujemos el lugar geométrico de la admittance de entrada, que es proporcional a la corriente de entrada, puesto que se ha especificado que el voltaje es constante. Sabemos que será circular, porque solamente un elemento es variable.

Como un primer paso se dibuja el lugar geométrico de la impedancia en la rama que contiene a R' , en la Fig. 8-10b. Se marca el punto $r_i + jx_i$ y el lugar geométrico para cualquier R' es una

* Para una demostración general, escribanse las ecuaciones de nodo de una red general, con el nodo de referencia en un extremo del elemento variable. Resuélvase para la impedancia de entrada. Se ve fácilmente que la solución tiene la forma de la Ec. 8-5, ecuación de un círculo.

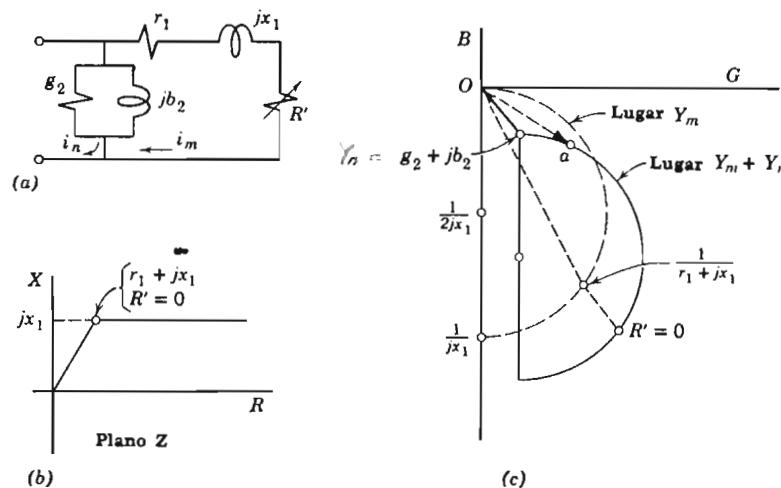


FIG. 8-10. Diagrama circular de un motor de inducción

línea recta que va hacia la derecha. El lugar geométrico de la admittance de esta rama, llamado Y_m , se encuentra a continuación en la Fig. 8-10c. La reciproca de la línea recta, lugar geométrico de la impedancia, es un círculo con centro en el eje B y que intersecta a este eje en el origen y en el punto $1/jx_1$.

La admitancia total es la suma del lugar geométrico de Y_m y la admitancia fija $Y_n = g_2 + jb_2$. Y_n está marcada en el plano de la admittance y el lugar geométrico de la admitancia total, es un semicírculo, o sea, el lugar geométrico Y_m trasladado a una distancia Y_n . Este es el "diagrama circular del motor de inducción" deseado.

La interpretación usual es la de considerar el voltaje aplicado como el fasor de referencia. La corriente de entrada "de la fase en consideración" será entonces proporcional a la admittance y podrá indicarse en el diagrama de admittance, por una recta que vaya del origen a cualquier punto del lugar geométrico semicircular. La recta Oa es un ejemplo de un fasor de corriente. La potencia de entrada es proporcional a la proyección del fasor de corriente sobre el fasor de voltaje, y por tanto a la componente horizontal de Oa . Un buen número de importantes características de operación del motor pueden verse en el diagrama de una hojaada; éstas se encuentran discutidas en cualquier buen libro de maquinaria.*

* Dos de los muchos libros, son el Robertson and Black (Referencia 13) y el McFarland (Referencia 14).

Una parte importante de este desarrollo se obtiene trazando los puntos conocidos, cuando pasan de un lugar geométrico al otro. Es evidente que los puntos de operación posibles en el plano Z , cuando R' varía de 0 a ∞ , se encuentran entre el punto $r_1 + jx_1$ y ∞ . Sobre el plano Z llega a 0 en el plano Y para el lugar geométrico de Y_m ; en esta última curva el punto límite está en $g_2 + jb_2$. Este punto corresponde a $R' = \infty$ y por tanto, a la situación sin carga en el motor de inducción.

El punto correspondiente a $R' = 0$ se encuentra dibujando en el plano Y una recta con ángulo opuesto al ángulo en el plano Z de la recta que va a $r_1 + jx_1$. Esta recta en el plano Y intersecta al lugar geométrico de Y_m en el punto marcado $1/(r_1 + jx_1)$. Este punto se traslada al punto en el lugar geométrico final, donde está marcado como $R' = 0$. Este punto corresponde a la operación del motor, con una carga tan grande que el motor permanece estacionario; se llama punto de *rotor bloqueado*. Todos los puntos de operación (de los cuales a es un ejemplo) se encuentran en el lugar geométrico entre el punto sin carga y el punto de rotor bloqueado.

Circuito Desfasador. Para mediciones electrónicas y para control de rejilla en tubos electrónicos, es a veces conveniente poder ajustar la fase de un voltaje. Existe un buen número de artificios que pueden cambiar la fase de un voltaje sin cambiar su magnitud; uno de los más simples se muestra en la Fig. 8-11. Consiste en dos resistencias iguales fijas, un condensador fijo y una resistencia variable. Se aplica un voltaje constante a las terminales de entrada y el voltaje de salida se obtiene en las terminales $b-d$. No se obtiene

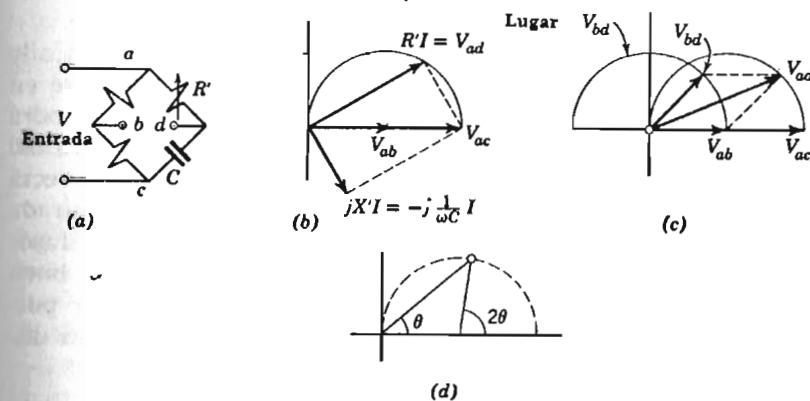


FIG. 8-11. Un desfasador simple

ninguna corriente apreciable en la salida, así que el cambiador de fase debe alimentar a una muy alta impedancia, tal como la impedancia de rejilla de un tubo.

Analicemos la operación. El diagrama fasorial en la Fig. 8-11b muestra (para un valor particular de la resistencia R') los voltajes $R'I$ y $jX'I$ que se suman para igualar el voltaje aplicado V . Es evidente, de nuestro trabajo previo, que el lugar geométrico de $R'I$ cuando R' se varía es el semicírculo mostrado. Este voltaje $R'I$ entre las terminales R' puede llamarse V_{ad} . Cuando $R' = 0$ (corto circuito), V_{ad} es cero. Cuando $R' = \infty$ (circuito abierto), V_{ad} es todo el voltaje aplicado (porque la corriente en la terminal d es despreciablemente pequeña y por tanto hay una caída de voltaje despreciable en la reactancia del condensador).

Como se muestra en el diagrama, el voltaje V_{ab} es la mitad del voltaje aplicado. El voltaje entre la terminal b a la terminal d es

$$V_{bd} = V_{ad} - V_{ab}$$

Solvado Este es el voltaje de entrada. Para cada posición de R' se encuentra V_{bd} sustrayendo V_{ab} del lugar geométrico V_{ad} . Esto nos da el lugar geométrico para V_{bd} tal como el mostrado en la Fig. 8-11c. El lugar geométrico V_{bd} es el lugar geométrico V_{ad} trasladado la distancia $-V_{ab}$. Este es, por tanto, un semicírculo con su centro en el origen. El fasor V_{bd} tiene una longitud constante para todas las posiciones de R' y cambia la fase a través de los 180° cuando R' se varía de 0 a ∞ . La relación entre el valor R' y el ángulo de fase de V_{bd} se puede obtener. El ángulo de V_{ad} es el ángulo cuya tangente es X'/R' ; el ángulo de V_{bd} es dos veces este valor. Ver Fig. 8-11d.

10. Trazado de una función

La Fig. 8-8b muestra como una línea recta vertical, el lugar geométrico de la impedancia de entrada de un circuito que contiene R y X en serie, cuando X se varía (permaneciendo R constante). Este lugar geométrico, esta recta vertical, se ha dibujado para un valor particular de R . Para otro valor de R habrá un lugar geométrico diferente de la impedancia de entrada; será otra línea recta vertical. La Fig. 8-12a muestra media docena de líneas rectas verticales correspondientes a media docena de valores diferentes de R . Estos están marcados como $R = 1$, $R = 2$ y así sucesivamente.

La Fig. 8-8b muestra también una recta horizontal; éste es el lugar geométrico de la impedancia de entrada cuando R se varía

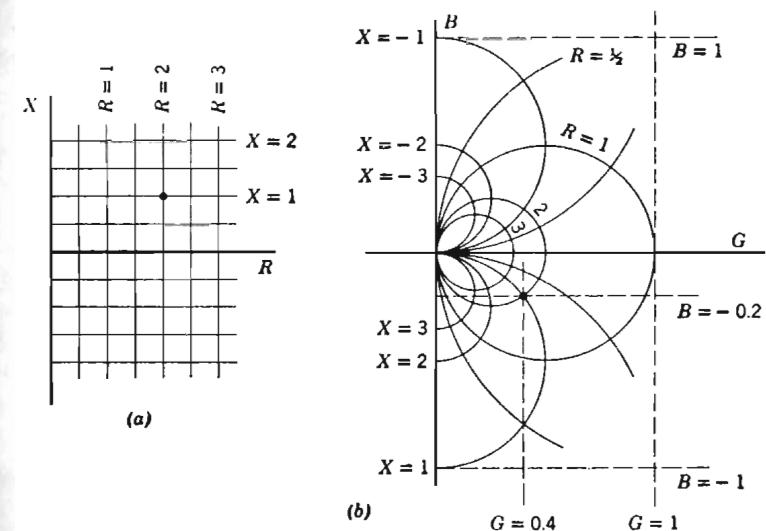


FIG. 8-12. (a) Representación de Z en el plano Z . (b) Representación de Z en el plano Y

(permaneciendo X constante). La Fig. 8-12a, muestra un número de líneas rectas horizontales, correspondientes cada una a cierto valor de X .

El punto en el cual los dos lugares geométricos se intersectan corresponde a un valor definido de impedancia de entrada. Por ejemplo, el lugar geométrico de $R = 2$ intersecta al lugar geométrico de $X = 1$ en el punto del plano complejo correspondiente a la impedancia $Z = 2 + j1$.

La Fig. 8-12b muestra los lugares geométricos correspondientes en el plano Y . Puesto que $Y = 1/Z$, cada punto en el plano Y es el recíproco del punto correspondiente en el plano Z . Los lugares geométricos en el plano Y son los recíprocos de los correspondientes lugares geométricos en el plano Z .

Cuando todos los recíprocos de todas las rectas verticales de la Fig. 8-12a se dibujan en el plano Y , resulta una familia de círculos. Cada círculo es el lugar geométrico de Y cuando X se varía, mientras R permanece fijo; todos los círculos tienen centros sobre el eje G , y todos pasan a través del origen, sus diámetros son inversamente proporcionales a sus valores respectivos de R .

Cuando las reciprocas de las rectas horizontales de la Fig. 8-12a se dibujan en la Fig. 8-12b, resulta otra familia de círculos. Estos

son los lugares geométricos de Y para X constante y R variable; todos tienen los centros sobre el eje B y todos pasan a través del origen.

Cada punto, en este diagrama en el plano Y representa con referencia a los ejes G y B , un valor de admitancia de entrada, al mismo tiempo, con referencia a las dos familias de círculos, cada punto representa un valor de impedancia de entrada. Por ejemplo, si se sabe que la impedancia de entrada de un circuito es $Z = 2 + j1$, así que $R = 2$ y $X = 1$, esta impedancia está representada por un punto en el diagrama que se encuentra en el círculo de $R = 2$, y también en el círculo de $X = 1$; el punto en cuestión deberá estar en el punto en que estos dos círculos se intersectan. Este punto de intersección, es un punto en el plano complejo con coordenadas 0.4 y -0.2 . G y B , componentes de la admitancia, será por lo tanto $G = 0.4$ y $B = -0.2$; por lo tanto $Y = 0.4 - j0.2$.

En términos matemáticos, la Fig. 8-12b es una representación de Z en el plano Y , estando relacionados Z y Y por

$$Z = \frac{1}{Y} \quad (8-8)$$

La Fig. 8-12a es una representación de Z en el plano Z , mostrando el cuadriculado más bien trivial, que siempre aparece cuando una variable se traza sobre su mismo plano. La Ec. 8-8 es la transformación que cambia el cuadriculado en el trazado de familias ortogonales de círculos.

11. Transformación

La transformación, como acabamos de ver, ofrece un medio matemático de trazar una función—un método más simple pero más abstracto que la anterior discusión de lugar geométrico, y que lleva hacia el mismo resultado.*

Tracemos Z en el plano Y , utilizando la transformación de la Ec. 8-8. El primer paso, es escribir ambas variables complejas en función de sus componentes:

$$R + jX = \frac{1}{G + jB} \quad (8-9)$$

* El estudiante puede preguntar, ¿por qué considerar un método más abstracto cuando el sistema del lugar geométrico puede hacer el mismo trabajo? Pero el instructor puede contraponer ¿por qué tratar con lugares geométricos cuando la teoría de la variable compleja nos da una transformación tan nítida?

El siguiente paso es racionalizar, obteniendo

$$R + jX = \frac{G - jB}{G^2 + B^2} \quad (8-10)$$

esto permite separar las componentes reales y las imaginarias separadamente en ecuaciones:

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} \quad (8-11)$$

$$X = \frac{-B}{G^2 + B^2} \quad (8-12)$$

Haciendo algunos cambios algebraicos obvios en la Ec. 8-11 y "completando el cuadrado" de una cuadrática en G arribamos a la ecuación familiar de un círculo:

$$G^2 - \frac{G}{R} + B^2 = 0 \quad (8-13)$$

$$G^2 - \frac{G}{R} + \frac{1}{4R^2} + B^2 = \frac{1}{4R^2} \quad (8-14)$$

$$\left(G - \frac{1}{2R}\right)^2 + B^2 = \left(\frac{1}{2R}\right)^2 \quad (8-15)$$

Para interpretar esta ecuación, recuérdese que G y B son los ejes del plano Y (y por tanto, corresponden a x y y en la geometría analítica familiar).* Si, por tanto, R es constante, la Ec. 8-15 es la ecuación de un círculo en el plano Y , un círculo con radio $\frac{1}{2R}$ y con su centro en el punto $G = \frac{1}{2R}$, $B = 0$.

Hagamos ahora $R = 1$ en la Ec. 8-15 y dibujemos el círculo correspondiente, marcado $R = 1$, en la Fig. 8-12b. Este círculo es el lugar geométrico de todos los valores posibles de Y cuando $R = 1$. Hagamos ahora $R = 2$ y dibujemos otro círculo y así sucesivamente, obteniendo una familia de círculos con centros en el eje G . Estos son todos los círculos de R constante.

Ahora, regresemos a la Ec. 8-12 con la que no hemos hecho hasta el momento nada. Puede, también, manipularse a modo de obtener la forma familiar de la ecuación de un círculo:

* En la notación usual de la geometría analítica, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ es un círculo en el plano $x-y$ con centro en $x = a$, $y = b$ y con radio r .

$$G^2 + B^2 + \frac{B}{X} = 0 \quad (8-16)$$

$$G^2 + \left(B + \frac{1}{2X}\right)^2 = \left(\frac{1}{2X}\right)^2 \quad (8-17)$$

Para cualquier valor constante de X , nos describe un círculo en el plano Y . Asignando varios valores a X obtenemos la familia de círculos de X constante en la Fig. 8-12b. El centro de cada círculo estará en el punto $(0, -\frac{1}{2}X)$ y el radio será $\frac{1}{2}X$.

Hemos obtenido así, una carta o diagrama del cual podemos leer la admitancia de entrada si conocemos la impedancia de entrada, o viceversa. Esto es valioso por sí mismo,* por supuesto, pero es más valioso como un ejemplo simple de trazado en el plano complejo. Una carta como ésta puede basarse en cualquier ecuación que relacione dos funciones; la Ec. 8-8 es una ecuación particularmente simple y ofrece una buena ilustración. Un gran número de tales cartas encontrarán uso práctico en el trabajo eléctrico. Una bien conocida, es la "carta de Smith" para el trabajo de líneas de transmisión basada en una transformación de la forma $Z = (1 + W)/(1 - W)$, siendo Z y W funciones complejas. (Ver, por ejemplo, la Referencia 5).

12. Frecuencia variable

Algunos de los ejemplos precedentes han asumido que la R o L de un circuito es variable. Las curvas de lugares geométricos que se usan más ampliamente son aquéllas para las que la frecuencia es la variable. Un ejemplo de esto se ha dado en el principio de este capítulo, para la impedancia de un circuito resonante paralelo y vamos ahora a regresar a este ejemplo particular entendiendo sus derivaciones con muy pocas explicaciones adicionales.

El lugar geométrico de la admittance, como en la Fig. 8-13, es una recta vertical que pasa por el punto G_0 . El lugar geométrico de la impedancia es un círculo que pasa por el origen y por $1/G_0$. La dirección del incremento de la frecuencia se muestra en ambos lugares geométricos. Puntos de frecuencia conocida, están localizados por los radio vectores en $\theta = \tan^{-1}(B/G_0)$.

* Esta misma carta puede utilizarse para relacionar dos funciones complejas cualesquiera que sean reciprocas, simplemente cambiando las letras en la carta. Es muy útil en ciertos problemas de aerodinámica y en otras ciencias, así como en la teoría de los circuitos eléctricos.

Es interesante notar, que el lugar geométrico de la admittance del circuito resonante paralelo, es exactamente el lugar geométrico de la impedancia en el circuito resonante serie, y viceversa. Por lo tanto, la Fig. 8-13 se aplica al circuito resonante serie, y viceversa si los planos Y y Z se intercambian. (Esta es otra evidencia de la dualidad).

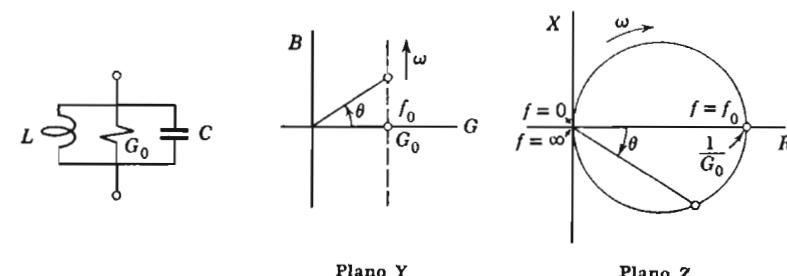


FIG. 8-13. Lugares geométricos del circuito resonante paralelo

Ciertas *reglas generales* se aplican a los lugares geométricos para los que la frecuencia es la variable.

1. Cuando el lugar geométrico, sea de la impedancia o de la admittance, es una curva cerrada, la dirección de incremento de la frecuencia es en el sentido de las manecillas del reloj. Cuando el lugar geométrico no es cerrado, la frecuencia se incrementa hacia arriba.

2. Los lugares geométricos empiezan y terminan ($f = 0$ y $f = \infty$) sea en el eje horizontal o en el infinito. En su principio o en su final, la curva del lugar geométrico es horizontal o vertical.

Está claro que los lugares geométricos de la Fig. 8-13 cumplen con esta regla.

13. Circuito resonante paralelo de dos ramas

Como otro ejemplo, considérese el circuito paralelo de dos ramas de la Fig. 8-14. Este circuito de dos ramas, se utiliza comúnmente en la práctica para dar las características de la resonancia en paralelo, y es por tanto importante demostrar que se comporta de la misma manera que un circuito ideal de tres ramas de la Fig. 8-13—por lo menos cerca de la frecuencia de resonancia.

Derivemos su lugar geométrico de admittance. El lugar geomé-

trico de la admitancia para la rama capacitiva sola es obvia: es una recta vertical a lo largo del eje *B*. Algunos puntos están marcados en la Fig. 8-14*b*, correspondiendo a la frecuencia $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ El lugar geométrico de la admitancia para la rama *R* y *L* es también familiar para nosotros: es el semicírculo mostrado como una línea no continua en la Fig. 8-14*b*, que pasa por el punto $1/R_0$ (frecuencia cero) y el origen (frecuencia infinita). Los puntos en el semicírculo correspondiente a $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$, también están marcados.

El lugar geométrico de la admitancia en las dos ramas en paralelo, es la suma. La suma se encuentra sumando una recta vertical igual a $j\omega C$ al punto del semicírculo que corresponde a ω_1 y así sucesivamente, en las otras frecuencias; el lugar geométrico com-

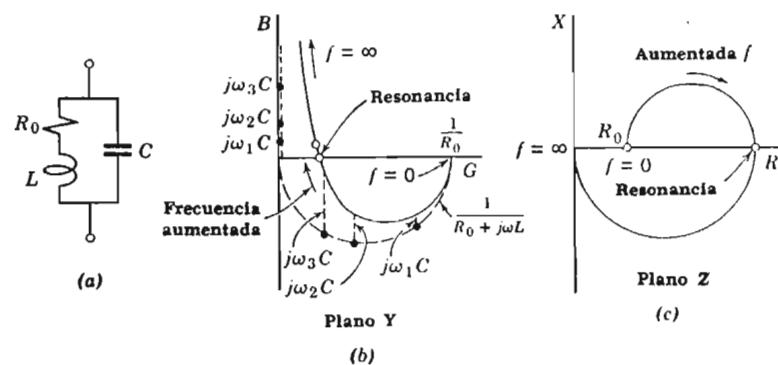


FIG. 8-14. Lugares geométricos del circuito mostrado

pleto se ha desplazado, por lo tanto, hacia arriba desde el semicírculo a una distancia vertical que se incrementa con la frecuencia.

Existen dos frecuencias a las que el lugar geométrico cruza los ejes; una es frecuencia cero y la otra la frecuencia de resonancia, definiendo la resonancia (como en el capítulo previo) como la frecuencia a la que la admitancia de entrada es puramente real. Esta no es la frecuencia a la que $\omega L = 1/\omega C$, ni es la frecuencia de la admitancia mínima; esto ocurre a unas frecuencias ligeramente más elevadas (ver Fig. 7-16). En el círculo de la Fig. 8-14*b* están marcados el punto más cercano del lugar geométrico al origen y el punto de admitancia mínima con círculo. Este es el punto en el que el radio vector es normal al lugar geométrico.

La Fig. 8-14*c* muestra la impedancia de entrada. El lugar geométrico de la admitancia en el plano *Y* se transforma al lugar

geométrico de la impedancia en el plano *Z* por la Ec. $Z = 1/Y$. En este caso, la transformación se hace punto por punto: $1/R_0$ se transforma a R_0 ; el infinito se transforma a cero; la recíproca de la conductancia en resonancia es la resistencia en resonancia; se transforman suficientes puntos para permitir dibujar en la curva del lugar geométrico de la impedancia. Nótese que el ángulo positivo máximo de *Z* es igual al ángulo negativo máximo de *Y*.

Es interesante considerar, cómo el lugar geométrico de la Fig. 8-14*b* cambia con un cambio en los parámetros del circuito. Supóngase que *L* y *C* permanecen constantes y que R_0 se disminuye. La conductancia en resonancia se hace menor en proporción (siendo igual a $R_0 C/L$ según la Ec. 7-41); al mismo tiempo, la conductancia a frecuencia cero se hace mayor en proporción inversa (porque es $1/R_0$). Así, la malla en el lugar geométrico se hace mayor cuando decrece R_0 . La parte del lugar geométrico cercana a la resonancia se hace más y más cercana a una recta vertical cuando R_0 se va haciendo menor (y por tanto, según *Q* del circuito va haciéndose mayor).

Este hecho, está relacionado con la observación en el capítulo precedente de que el circuito de la Fig. 8-14 actúa muy parecidamente al circuito de la Fig. 8-13 a frecuencias cercanas a la resonancia, suponiendo a *Q* alta. Si *Q* es alta, la parte de la curva de la Fig. 8-14*b* cercana a la resonancia, se aproxima a la recta de la Fig. 8-13*b*, y el lugar geométrico de la impedancia de la Fig. 8-14*c* se aproxima al círculo de la Fig. 8-13*c*. La Fig. 8-14 está dibujada para un circuito de extremadamente baja *Q*.

14. Frecuencia negativa

Los lugares geométricos de la Fig. 8-14 son más placenteramente simétricos si se dibujan tanto para frecuencias negativas como positivas. La Fig. 8-15 muestra el resultado. La parte de la curva producida por la frecuencia negativa, es el conjugado del lugar geométrico de la frecuencia positiva, así, la curva completa es simétrica abajo y arriba del eje horizontal.

En efecto, la parte de la función que corresponde a la ω negativa, no solamente contribuye a la belleza de la curva, sino que también completa la representación matemática de la función. La impedancia (o admitancia) es dependiente de la frecuencia y se expresa como una función de ω como la Ec. 7-1, por ejemplo, o en la Ec. 7-39 u 8-25. El lugar geométrico de la Fig. 8-15*b* es una repre-

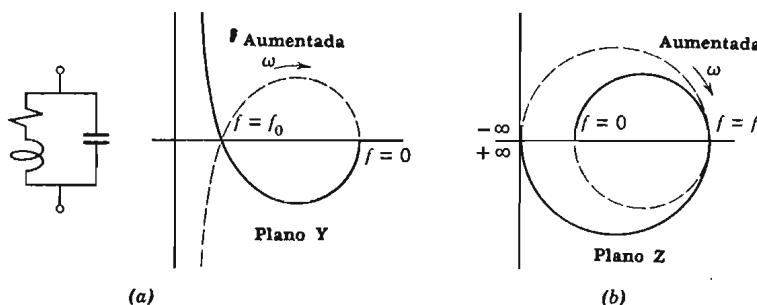


FIG. 8-15. Lugares geométricos, incluyendo la frecuencia negativa

sentación de la Ec. 7-39; ambas muestran la impedancia del circuito resonante de dos ramas. Los valores negativos de ω se utilizan en la Ec. 7-39 para obtener la parte no continua del lugar geométrico.

No hay nada matemáticamente inadmisible acerca de ω negativa. Un poco después (de los Caps. 16 al 18) trabajaremos con funciones de impedancia y admitancia, haciendo variar a ω a lo largo de valores positivos y negativos. En efecto, se permitirán valores complejos de ω . Esto queda fuera de nuestra discusión presente, pero será bueno reconocer desde ahora, que los valores negativos de ω no son un absurdo.*

15. Reactancia de circuitos de baja pérdida

Regresemos ahora a las curvas trazadas como funciones de la frecuencia. En la Fig. 8-1, la impedancia se mostró trazando sus dos componentes, resistencia y reactancia, como funciones de la

* Cuando una cantidad senoidal se expresa como

$$i = I_m \cos \omega t = I_m \operatorname{Re} \{e^{j\omega t}\} \quad (8-18)$$

es inmaterial cuando ω es positiva o negativa. Expresada como

$$i = \frac{1}{2} I_m (e^{+j\omega t} + e^{-j\omega t}) \quad (8-19)$$

la ecuación, representa lo mismo a una recta que gira positivamente como una recta que gira negativamente. En el primer exponente, $+\omega$ es la velocidad angular; en el segundo es $-\omega$. La impedancia aplicada a la primera componente es $Z(+\omega)$; la impedancia aplicada a la segunda componente es $Z(-\omega)$. Estas son conjugadas; esto es,

$$Z(-\omega) = Z^*(+\omega) \quad (8-20)$$

Es para evitar la necesidad de usar tales dos impedancias, por lo que las corrientes (y los voltajes) se han expresado en el Cap. 3 en la forma de la Ec. 8-18 en lugar de la Ec. 8-19.

frecuencia. Si un circuito es altamente reactivo, hecho de bobinas y condensadores con solamente un mínimo de pérdidas, la resistencia puede ser despreciable. Pérdidas igual a cero se asumen comúnmente cuando se diseñan circuitos filtro, por ejemplo, y para otras redes de alta Q. Si las pérdidas pueden despreciarse, y la resistencia se asume igual a cero, entonces la red está caracterizada únicamente por su curva de reactancia.

Estudiemos las curvas de reactancia y susceptancia para los circuitos de baja pérdida, comenzando con los ejemplos más simples posibles. La Fig. 8-16 muestra las curvas de reactancia y susceptancia para una rama que consiste de inductancia solamente y en otro par de curvas, reactancia y susceptancia para una rama de capacitancia solamente. Hay cuatro partes de la figura pero únicamente dos curvas diferentes—otra vez dualidad.

Nótese particularmente, que cada parte de cada curva tiene pendiente positiva, hacia arriba y hacia la derecha. Nótense también las formas de las curvas: dos son líneas rectas, y las otras dos son hipérbolas rectangulares.

Para los dos elementos reactivos en serie, como en la Fig. 8-17a, la reactancia total es la suma de las reactancias individuales. El punto en el que las dos suman cero es el de la frecuencia de reso-

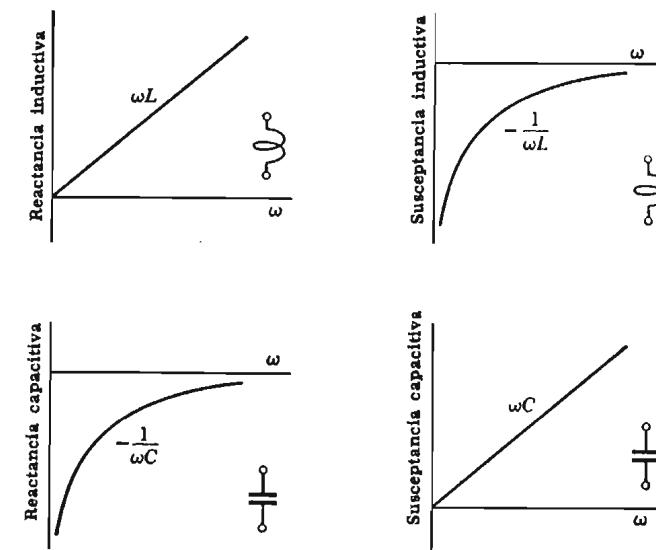


FIG. 8-16. Funciones elementales

nancia del circuito. La susceptancia de los dos elementos serie, Fig. 8-17b, es la recíproca negativa de la reactancia, $B = -1/X$. (Esto es verdad porque no hay resistencia). Donde $X = -\infty$, $B = 0$; donde $X = 0$, $B = \pm\infty$; donde X es finita pero negativa, B es finita y positiva.

El punto en el que una función, X o B , es igual a cero, se llama un cero de esa función y se marcará con un círculo como en la Fig. 8-17a. El punto en el que la función tiende a infinito se llama un polo, marcado como en la Fig. 8-17b, con una \times .

Otra vez es importante que estas funciones tengan en todos los pendientes positiva, hacia arriba y hacia la derecha; considerando de donde proceden, es obvio que debe ser así. Y es importante que cada curva tiene una forma particular. Las curvas de la Fig. 8-17 se han definido claramente como líneas rectas o hipérbolas, sin embargo, no existen nombres comunes para estas curvas. La escala de la curva puede cambiarse si L y C del circuito se cambian, pero su curva no se puede cambiar. Expresada matemáticamente,

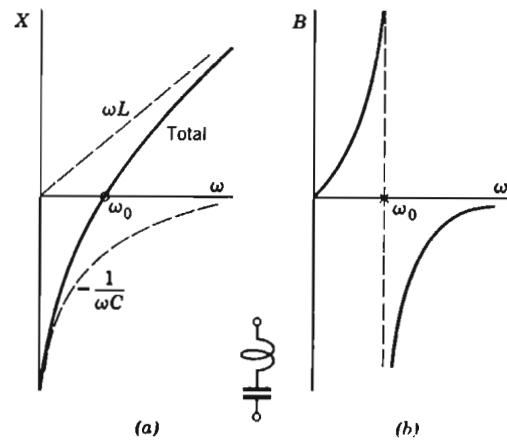


FIG. 8-17. Elementos en serie

sólo una curva como la de la Fig. 8-17a puede dibujarse a través del cero dado (y a través de cualquier otro punto dado). En la Fig. 8-17b, sólo una curva como esa, puede dibujarse por el polo dado (y a través de cualquier otro punto dado). El hecho importante es el de que las curvas están completamente definidas por los polos y ceros, estando dada la escala por cualquier otro punto.

Para dos elementos reactivos en paralelo, la Fig. 8-18 da las curvas de reactancia y susceptancia. Estas son las mismas que las dadas para los elementos reactivos en serie, excepto que la reactancia y la susceptancia se han intercambiado. Esto se podría haber esperado de la dualidad.

16. Combinaciones de reactancia y susceptancia

Tenemos ante nosotros los bloques de construcción, con los que se pueden construir curvas de reactancias para redes reactivas más complicadas. Por ejemplo, la Fig. 8-19a muestra un circuito utilizado en ciertos tipos de filtros de banda. Es necesario conocer la reactancia total entre terminales como una función de la frecuencia. La reactancia de los dos elementos en paralelo, que se ha dibujado en la Fig. 8-19b y marcado X_p (es la misma que la X en la Fig. 8-18), se suma a la reactancia de los dos elementos en serie, marcada X_s , en la Fig. 8-19b. La suma de X_p y X_s , la línea gruesa, es la reactancia total deseada. La reactancia total tiene dos ceros. Tiene un polo que corresponde a la frecuencia de resonancia de los elementos en paralelo. Tiene también un polo (reactancia infinita) a frecuencia cero, y otro polo a frecuencia infinita.

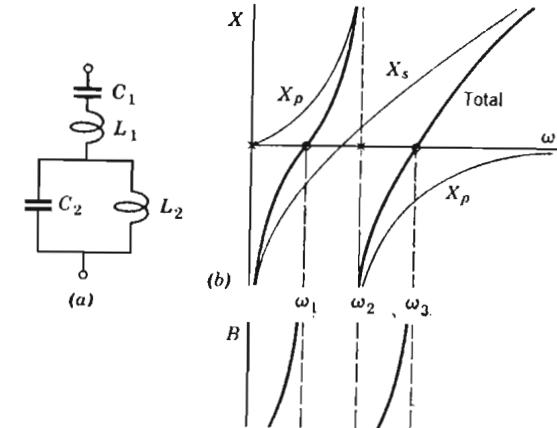


FIG. 8-18. Elementos en paralelo

La susceptancia de este circuito es la recíproca negativa de la reactancia. En la Fig. 8-19c, los polos están marcados para la susceptancia cuando la reactancia tiene ceros, y ceros correspondiendo

a los polos; la curva de susceptancia puede entonces adaptarse. La susceptancia tiene dos polos y un cero entre los ceros a $f = 0$ y $f = \infty$.

17. Reglas generales

La Fig. 8-20a muestra una curva que puede ser, tanto reactancia como susceptancia, para alguna red más complicada. Se ha dibujado aquí para mostrar la apariencia general de una función de reactancia o susceptancia, y para ilustrar con los otros diagramas más simples las siguientes declaraciones generales:

1. La pendiente de la curva es positiva en cualquier lado.
2. Los polos y los ceros se alternan a lo largo del eje.
3. Debe haber, ya sea un polo o cero en el origen, y un polo o cero en la frecuencia infinita.

Los polos o ceros en el origen o en el infinito se llaman *externos*; los otros, a lo largo del eje, se llaman *internos*. Obviamente, si to-

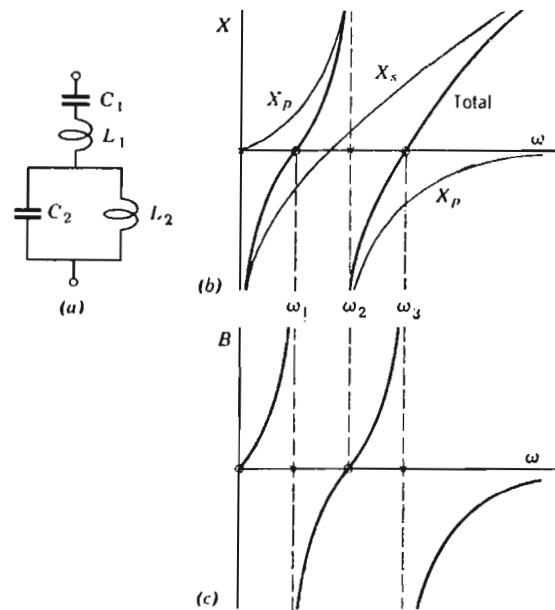


FIG. 8-19. Reactancia y susceptancia de un circuito filtro

dos los polos y ceros internos se especifican, la regla 2 nos dice si un polo o un cero se encuentran en el origen y en el infinito.

Físicamente, la reactancia tiene un cero en el origen, si existe un camino para la corriente a través de la red en cuestión, de terminal a terminal, que no vaya a través de un condensador (porque la reactancia de la inductancia es cero para frecuencia cero). Similarmente existe un cero para frecuencia infinita si hay un camino que no tenga inductancia. Estos hechos se ilustran en las Figs. de la 8-16 a la 8-19.

Finalmente, debe hacerse énfasis otra vez en la curva de reactancia (o susceptancia) tiene una forma característica, así como hay solamente una forma de círculo, o de línea recta. Solamente una línea recta puede trazarse por dos puntos, y solamente un círculo por tres puntos. Similarmente, solamente una curva de reactancia puede dibujarse por polos y ceros especificados. En la Fig. 8-19b, solamente una curva puede dibujarse que tenga reactancia infinita $f = 0$ y $f = \infty$ y en los polos internos mostrados, y que sea cero en los dos puntos cero especificados. De hecho solamente necesita especificar uno de los polos internos y los dos ceros (y la escala vertical).

Ninguna otra curva de reactancia puede dibujarse con los mismos polos y ceros (excepto una curva de la misma forma que difiera

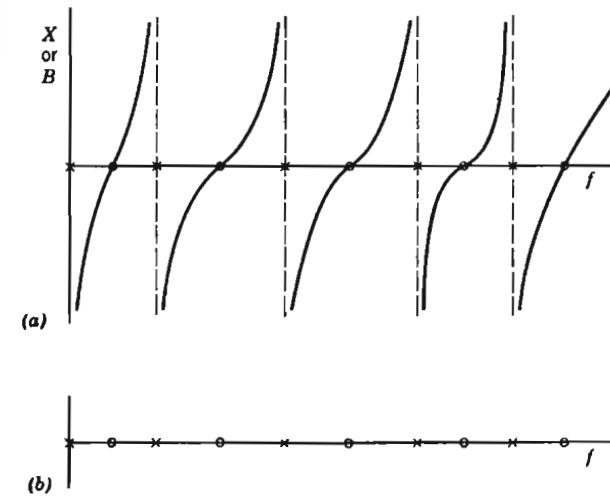


FIG. 8-20. Reactancia (o susceptancia) de una red. Toda la información está contenida en el trazado de polos y ceros

en escala vertical solamente). Esto se conoce como el *teorema de reactancia de Foster*.

Una ilustración de éste más que importante teorema se muestra en la Fig. 8.20. La curva de reactancia de una red reactiva algo complicada, se muestra en la Fig. 8-20a. La Fig. 8-20b muestra, para la misma red, únicamente los polos y ceros. Entonces, excepto por un factor de proporcionalidad, la Fig. 8-20b contiene justamente toda la información que se encuentra en la Fig. 8-20a. Con los polos y ceros dados, solamente hay una forma (excepto por la escala vertical) que la curva de reactancia podría dibujarse.

La misma declaración puede hacerse acerca de una curva de susceptancia.

En conexión con este importante teorema, echemos una mirada a las matemáticas. La impedancia del circuito de la Fig. 8-19a es

$$Z = j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) + \frac{j\omega L_2/j\omega C_2}{j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right)} \quad (8-21)$$

La manipulación algebraica nos da

$$Z = \frac{j\omega L_1 \left[\omega^4 - \frac{1}{L_1 L_2} \left(\frac{L_1 + L_2}{C_2} + \frac{L_2}{C_1} \right) \omega^2 + \frac{1}{C_1 C_2 L_1 L_2} \right]}{\omega^2 \left(\omega^2 - \frac{1}{L_2 C_2} \right)} \quad (8-22)$$

El numerador contiene una cuadrática en ω^2 ; ésta debe tener dos raíces que llamaremos ω_1^2 y ω_3^2 . En el denominador la cantidad dentro del paréntesis tiene una raíz simple que llamaremos ω_2^2 . Es obvio que

$$\omega_2^2 = \frac{1}{L_2 C_2} \quad (8-23)$$

Los valores para ω_1^2 y ω_3^2 podrían encontrarse en función de L's y C's pero esto no es necesario en este momento. En función de las raíces nosotros podemos escribir:

$$Z = j\omega L_1 \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_2^2)} \quad (8-24)$$

La Ec. 8-24 es una función de impedancia típica de una red puramente reactiva. En general, la impedancia de cualquier red puramente reactiva, puede escribirse en la forma:

$$Z = j\omega H \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2) \cdots}{(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_2^2) \cdots} \quad (8-25)$$

H es siempre una constante real; $\omega_1, \omega_3, \dots$, son las raíces del numerador y por tanto ceros de Z ; $\omega_0, \omega_2, \dots$, son las raíces del denominador y por tanto polos de Z . Si la impedancia tiene un cero en el origen, ω_0 es el polo de la frecuencia menor; si (como en la Ec. 8-24) hay un polo en el origen, $\omega_0 = 0$ y ω_1 es el cero interno de la frecuencia menor. Las redes más complicadas tienen más factores de la forma $(\omega^2 - \omega_n^2)$ sumados alternativamente al numerador y denominador.

Puesto que la impedancia de cualquier red reactiva, puede darse en la forma de la Ec. 8-25, se sigue que la impedancia está completamente definida cuando $\omega_1, \omega_3, \dots$, (los ceros) y $\omega_0, \omega_2, \omega_4, \dots$ (los polos) de la función se conocen, así como el valor de la constante H que nos da la escala, por lo que cuando son conocidos los anteriores toda la expresión completa para Z es conocida. Este es el argumento seguido en la demostración del teorema de Foster.*

Comparemos la Ec. 8-24 con la Fig. 8-19b. La ecuación dice, que hay dos ceros internos; esto coincide con la figura. Hay un polo interno; según la Ecs. 8-24 y 8-23, esto ocurre cuando $\omega = \pm 1/\sqrt{L_2 C_2}$, lo que coincide con la declaración hecha en la Sec. 14, de que los polos ocurren con la frecuencia de resonancia de los elementos en paralelo. (Las matemáticas continúan insistiéndonos, en ofrecer la elección entre frecuencias positivas y negativas).

El numerador de la Ec. 8-24 contiene ω a la quinta potencia, el denominador solamente contiene a ω a la cuarta potencia; por lo tanto, hay un polo a frecuencia infinita. Por otro lado, cuando ω se approxima a cero el numerador se approxima a un número constante de ω y el denominador a un número constante de ω^2 ; por tanto, existe también un polo en el origen.

18. Efecto de la resistencia

Las Fig. 8-16 a la 8-20 se han dibujado para circuitos reactivos reales, suponiendo una resistencia cero. Consideremos concisamente

* La discusión dada aquí indica, pero no completa la demostración. Para ver la prueba, ver a Guillemin (Referencia 15).

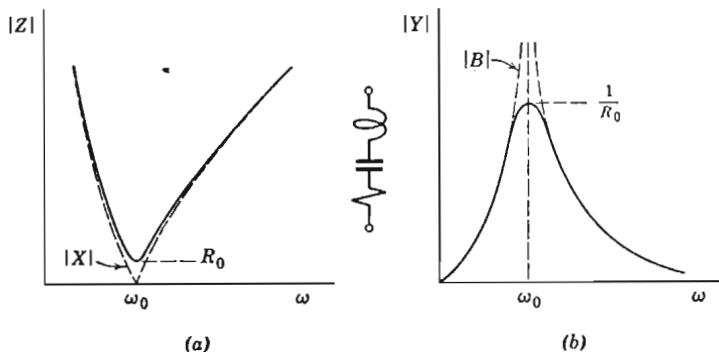


FIG. 8-21. Efecto de la resistencia en las curvas de respuesta

cómo la conducta de un circuito se afectará con la pequeña cantidad de resistencia, que de hecho debe estar presente.

Con la resistencia tomada en cuenta, la impedancia en lugar de reactancia; puede trazarse más provechosamente como una función de la frecuencia. Por simplicidad, tracemos la magnitud de la impedancia solamente, descuidando al presente el ángulo de impedancia. La Fig. 8-21a muestra una curva de esta clase para un circuito serie. La línea no continua es la *reactancia* del circuito y es la misma que la curva de reactancia total de la Fig. 8-17 excepto que se ha dibujado enteramente arriba del eje; esto es, se ha indicado la *magnitud absoluta de la reactancia* por una línea no continua, descuidando el signo algebraico.

La curva gruesa muestra la *magnitud de la impedancia*. La impedancia difiere de la reactancia debido a la pequeña resistencia presente. Donde la reactancia es grande, la diferencia es despreciable y la curva llena es indistinguible de la recta de la línea no continua. Pero cerca del eje, donde la reactancia es pequeña, el efecto de la resistencia es importante. Donde la curva de reactancia forma una V aguda en el eje, la curva de impedancia está redondeada, y su mínimo es igual a la resistencia del circuito. En otros puntos, la magnitud de la impedancia es $\sqrt{R^2 + X^2}$.

La *magnitud de la admitancia* se ha trazado similarmente en la Fig. 8-21b. La línea no continua es el valor absoluto de la *susceptancia* del circuito de baja pérdida y es por tanto la misma (excepto para el signo algebraico) que B en la Fig. 8-17. Cuando la resistencia se toma en cuenta, el valor absoluto de la admitancia es casi el mismo de la susceptancia de baja pérdida, excepto cerca de

la frecuencia de resonancia. A la frecuencia de resonancia, cuando la susceptancia de baja pérdida se va hacia el infinito, la admitancia sube hasta un máximo igual a $1/R_0$; este es un máximo finito, no un polo. En resumen, los extremos que resultan de la resonancia se redondean cuando la resistencia se toma en cuenta.

Las relaciones de ángulo de fase se modifican por la resistencia del circuito de una manera similar. El ángulo de fase de la impedancia (o de la admitancia) de un circuito realmente de baja pérdida, cambia abruptamente en 180° cuando la frecuencia se incrementa pasando por la resonancia; nosotros hemos expresado esto usualmente, diciendo que la impedancia (o admitancia) cambia el signo a la frecuencia de resonancia. Y el efecto de una pequeña cantidad de resistencia se toma en cuenta, el ángulo de fase cambia rápidamente, pero no descontinuamente, cuando la frecuencia se ajusta pasando por la frecuencia de resonancia. Justamente debajo de la de resonancia el ángulo de fase puede ser muy cercano a -90° , justamente arriba de la resonancia llegará a ser muy cerca de $+90^\circ$.

19. Sumario

La mayoría del capítulo se ha dedicado a dos métodos gráficos de impedancia representada o admitancia. Uno utiliza las componentes real e imaginaria de la impedancia (o admitancia) como ejes, y la frecuencia o uno de los elementos variables del circuito como parámetro. Este método es beneficioso tomándolo de la teoría de las funciones de una variable compleja.

Existe un gran número de aplicaciones útiles de este tipo de trazado de lugar geométrico y carta. Se dan unos pocos ejemplos. Un cercano aliado y tremadamente valioso uso del trazado de lugares geométricos, se hace en conexión con amplificadores, circuitos de retroalimentación y la teoría de los servomecanismos.

El segundo tipo de trazado se utiliza para representar la reactancia o susceptancia, de una red de baja pérdida como una función de la frecuencia. Esto es útil en el análisis y diseño de circuitos que se intenta que cubran ciertos propósitos específicos, tales como filtros o redes correctoras de varias clases.

La idea de que los polos y ceros de la impedancia son suficientes para caracterizar una red será importante posteriormente en el Cap. 16.

Sin embargo, primero debemos generalizar nuestra discusión de las redes. Ahora, somos capaces de analizar redes ordinarias en

operación de estado estacionario, pero nos buscamos dificultades cuando tratamos de decir "todas las redes hacen esto". ¿Cómo podemos hablar para todas las redes? ¿Cómo podemos hablar para todas las redes? Esto aparecerá en el siguiente capítulo.

PROBLEMAS

1. Un circuito consiste de R y L en serie. Dibujar el lugar geométrico de la impedancia del circuito en el plano complejo Z suponiendo que L varía mientras R permanece constante en 1 ohm. Repítase para $R = 2, 3, 4$ y 5 ohms. Entonces supóngase que R varía mientras L se mantiene constante en 1 ohm y también en 2, 3, 4 y 5 ohms sucesivamente. Sea cuidadoso para incluir solamente las partes posibles físicamente, de los lugares geométricos. §3

2. Repetir el Prob. 1, pero dibujando los lugares geométricos de la admitancia del circuito en el plano complejo Y . Inclúyanse solamente las partes posibles físicamente de los lugares geométricos. §3

3. En el diagrama del Prob. 1, trazar las líneas de $\omega L/R$, constante haciendo que esta razón tenga los valores $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, 3$. Mídanse con un transportador los ángulos θ para cada línea. §4

4. En el diagrama del Prob. 2, dibujar las líneas de $\omega L/R$ constante, utilizando los mismos valores que en el Prob. 3. Mídanse los ángulos $-\theta$; ¿Coinciden con los del Prob. 3? Comparándolos con los puntos de intersección de los círculos coinciden? §4

5. En la Fig. 8-6, $G_1 = 0.01$ mho, $C_1 = 2$ microfarads, $R_0 = 150$ ohms y la frecuencia es de 1000 cps. Trazar el lugar geométrico de la admitancia de entrada en el plano Y cuando X se varía. Márquense los seis puntos a los que $X = \pm \frac{1}{2}R_0, \pm R_0, \pm 2R_0$. §5

6. Utilizando la Ec. 8-5, trácese Y (en el plano complejo Y) para los valores reales de X . Trácense cuatro curvas, siendo las constantes:

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
Curva A	1	$3 + j2$	2	0
Curva B	$1 + j1$	$j2$	2	0
Curva C	$j1$	0	-4	$j1$
Curva D	4	$j6$	2	$-j3$

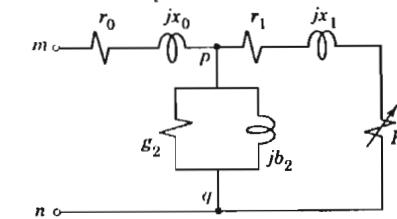
7. Habiendo dibujado el lugar geométrico de la admitancia en el Prob. 5, ahora trácese el lugar geométrico recíproco que será la im-

pedancia de entrada. Márquense los seis puntos a los que $X = \pm \frac{1}{2}R_0, \pm R_0, \pm 2R_0$. §7

8. Un circuito de dos ramas tiene $R_1 = 5$ ohms y $L_1 = 1$ milihenry en una rama, $R_2 = 5$ ohms y una reactancia variable X_2 en la otra rama. El lugar geométrico de la admitancia de entrada de las dos ramas en paralelo se trazará (en el plano Y) cuando X_2 varía de $-\infty$ a $+\infty$. La frecuencia es de 1000 cps. (a) ¿Cómo se sabe que el lugar geométrico es circular? (b) Encontrar el centro y el radio del círculo. (c) Bosquejar el lugar geométrico en el plano Y . (d) Indicar en el bosquejo el punto o puntos en el que la resonancia ocurre; si esto sucede, ¿cómo define usted la resonancia? §9

9. Repetir el Prob. 8 con $R_1 = 4$ ohms. Discutir la parte (d). §9

10. En el circuito cambiador de fase o desfasador de la Fig. 8-11 la resistencia variable debe tener en la práctica un valor máximo. Si R' no puede ser mayor de $10/\omega C$, ¿cuál es el rango de desfasamiento de este artificio? §9



Prob. 11

11. El diagrama muestra un circuito más equivalente a un motor de inducción que el de la Fig. 8-10a. Suponiendo que el lugar geométrico de la Fig. 8-10c da la admitancia a este circuito en los puntos $p-q$, mostrar la construcción gráfica para encontrar el lugar geométrico de la admitancia en las terminales $m-n$. ¿En qué características importantes diferiría este lugar geométrico final de el de la Fig. 8-10c? §9

12. Un circuito de dos ramas tiene en una rama L_1, R_1 y C_1 en serie, y en la otra rama C_2 sola. Díscútase la resonancia. Bosquéjese el lugar geométrico de la admitancia de las dos ramas en paralelo (lugar geométrico en el plano Y) cuando la frecuencia varía de 0 a ∞ . §13

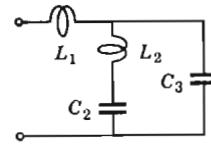
13. Bosquéjese el lugar geométrico de la impedancia para el Prob. 12. §13

14. ¿Se aplicarán las reglas generales de la Sec. 12 al lugar geométrico del Prob. 12?, ¿y al del Prob. 13? Discútase. §13

15. En el circuito de la Fig. 8-6a, hágase variar tanto a R_o como a X . Se desea una carta en la que la impedancia de entrada pueda leerse, siendo conocidas R_o y X . Comenzando con la Fig. 8-6c, indicar la apariencia de tal carta, con familias de círculos superimpuestas. §11

16. Si R_o en la Fig. 8-14 es suficientemente grande, el circuito de dos ramas no llegará a estar en resonancia para ninguna frecuencia. ¿Cuál es el valor crítico de R (en función de L y C) que evitará la resonancia? Bosquejar los lugares geométricos Y y Z suponiendo una R crítica. § 13

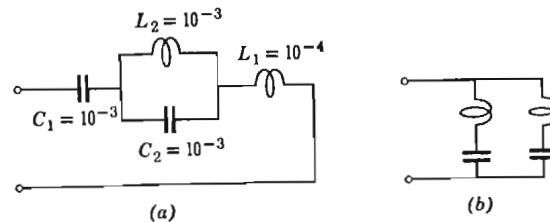
✓ 17. (a) Bosquejar la reactancia del circuito mostrado como una función de la frecuencia, mostrando los pasos gráficos con los cuales se obtiene. (b) Escribase una expresión para la impedancia y determine de ella el número de polos y ceros. ¿Coincide esto con (a)? §16



Prob. 17

18. Diséñese un circuito diferente que podría, si está proporcionado apropiadamente, tener los mismos polos y ceros de reactancia que el circuito del Prob. 17. §16

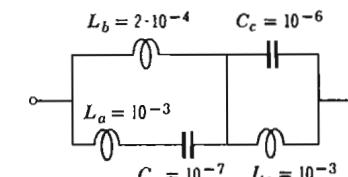
19. La parte a) del diagrama muestra un circuito con valores numéricos de L y C . Dibujar las curvas, con cuidado, en papel milimétrico. (b) Dibujar las curvas, con cuidado, en papel milimétrico.



Prob. 19

trico, obteniendo gráficamente la reactancia de entrada de este circuito. Si el circuito en b) estuviera apropiadamente proporcionado, ¿podría tener la misma reactancia que a) en toda la frecuencia? Explíquese. § 18

20. Escribir una expresión para la impedancia del circuito del Prob. 19 y póngase en la forma de la Ec. 8-25. Se darán los valores numéricos de ω para los polos y ceros. §18



Prob. 21

21. Para el circuito mostrado, bosquéjese una curva de reactancia de entrada como función de la frecuencia. La curva no necesita estar tratada con precisión pero deberá tener la forma general correcta. (a) ¿Cuántos polos internos hay? (b) ¿Cuántos ceros internos hay? (c) Calcular ω para los polos internos. (d) Discútase si existe otro modo más sencillo para calcular ω en los ceros internos. § 18

22. Una red consiste solamente de elementos reactivos puros. Su reactancia tiene un polo en $\omega = 100$ y un cero en $\omega = 150$. No tiene ningún otro polo o cero internos. (a) Bosquéjese la reactancia como una función de ω . (b) Diséñese un circuito que tenga esa reactancia; obténgase un diagrama del circuito e indíquense los valores de L y C . ¿Su diseño es el único posible? (c) Escriba la impedancia del circuito que se ha diseñado en la forma de la Ec. 8-25. § 18

9

Ecuaciones de Redes

1. Parte de una red

Una gran parte de los trabajos de ingeniería eléctrica en circuitos, puede manejarse con los métodos de los capítulos precedentes, y todos los ingenieros electricistas deben llegar a usar estos métodos con un alto grado de eficiencia. Pasemos ahora a un análisis más sistemático de las redes. Se desarrollarán métodos de solución más poderosos y más generales.

Primeramente algunas de las definiciones deben ser más precisas. Los *elementos* de una red son las resistencias, inductores, condensadores (elementos pasivos), y generadores de voltaje constante o de corriente constante (elementos activos). Un *nodo* es un punto de una red en el que dos o más elementos se unen; ver Fig. 9-1. Si tres o más elementos se conectan en un nodo, ese nodo se llama una *unión*. Una *rama* de una red se extiende de una unión a otra y puede consistir de un elemento o de varios elementos en serie. Por lo tanto, hay un nodo en cada extremo de todo elemento y una unión en cada extremo de toda rama. Una *espira* (o una *malla* o, si el término se usa cuidadosamente, un circuito) es una trayectoria cerrada única para la corriente.

Un elemento *lineal* es aquel que tiene resistencia constante, inductancia constante o capacitancia constante, sin importar la corriente o el voltaje. Una red lineal está compuesta por elementos lineales; la ecuación diferencial de una red de esta clase es una ecuación diferencial lineal.

Bilateral se refiere al acoplamiento entre circuitos, a elementos mutuos. Si la corriente en un circuito produce voltaje en otro, y si la misma corriente en el segundo circuito produciría el mismo voltaje en el primero, el acoplamiento es simétricamente bilateral. Los elementos eléctricos ordinarios, aun incluyendo transformadores,

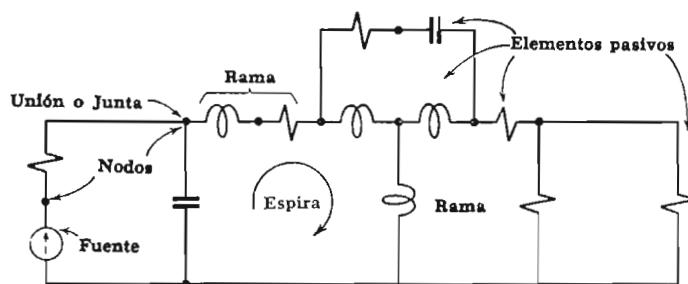


FIG. 9-1. Patres de una red

son simétricamente bilaterales. El acoplamiento también puede ser asimétricamente bilateral, como con un transistor, o en el caso extremo de un tubo al vacío ideal, *unilateral*.

Un elemento *pasivo* recibe potencia de la red. Un elemento *activo*, proporciona potencia a la red. La teoría de redes lineales concierne con *fuentes* que, o mantienen voltaje constante entre sus terminales sin importar la corriente o mantienen corriente constante sin importar el voltaje terminal.

2. Dirección de referencia

Con la corriente directa (como se discutió en la Sec. 1-1), una dirección de referencia distingue la corriente positiva de la negativa; con la corriente alterna, la dirección de referencia distingue entre los medios ciclos positivos y los negativos. Una dirección de referencia se indica, por tanto, en el diagrama del circuito (por medio de una flecha, por medio de la notación de doble subíndice o de cualquier otro modo) y los medios ciclos de corriente que fluye en la dirección de referencia se toman como medios ciclos positivos. Esto es necesario para obtener una relación clara y no ambigua entre la corriente física y la fórmula matemática que la describe.

Para ilustrar la relación física entre la polaridad y dirección, considérese una onda de voltaje alterno, representada en la pantalla

de un osciloscopio. Se muestran los medios ciclos positivos y los medios ciclos negativos. Pero, la imagen en la pantalla puede invertirse simplemente, invirtiendo la conexiones del circuito al osciloscopio. ¿Cuál es la conexión correcta? Esto puede contestarse únicamente en función de una dirección de referencia en el circuito.

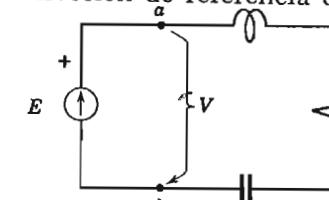


FIG. 9-2. Polaridad de referencia de una fuente

La polaridad de referencia de cada *fuente* debe darse también. Esto puede indicarse por una flecha en el círculo o rectángulo que se utiliza para representar la fuente en el diagrama del circuito, como en la Fig. 9-2. La flecha muestra la polaridad asumida de la conexión del generador. Muestra en qué forma la electricidad será empujada por la fuerza electromotriz de la fuente, durante los medios ciclos positivos. La fuerza electromotriz es la causa del voltaje terminal * y, en la Fig. 9-2 $V_{ab} = E$.

Potencia. Si la corriente fluye en la dirección de la fuerza electromotriz de un elemento (como en un generador), este elemento está *suministrando* potencia eléctrica *al* circuito. Si la corriente fluye contra la fuerza electromotriz (como en un motor), el elemento está *recibiendo* potencia *del* circuito. En un circuito de corriente alterna, si I y E de un elemento tiene la misma dirección de referencia y si el ángulo entre los fasores de I y E es menor de 90° , P procede *del* elemento. Estas reglas provienen de la relación general de que la energía eléctrica se consume cuando la corriente fluye de un punto de mayor potencial a un punto de menor potencia.

3. Ecuaciones de rama

Justamente tres ecuaciones forman las bases para todo lo que se va a hacer ahora. Una de ellas es la ley de Ohm, las otras son las dos leyes de Kirchhoff. Estas ecuaciones se aplicarán a las redes

* La fuerza electromotriz es una entidad física de naturaleza diferente al voltaje. El voltaje es la integral lineal del campo potencial escalar; la fuerza electromotriz es el resultado de la energía —química o magnética o luminosa o calorífica— siendo transformada a energía eléctrica. La fuerza electromotriz y el campo potencial escalar son discutidos en *Electric Waves* (Referencia 2). Caps. V y XI.

para obtener lo que se conoce como ecuaciones de rama, ecuaciones de espira y ecuaciones de nodos de las redes. Las ecuaciones de rama son las más fáciles de escribir pero las más difíciles de resolver.

Escribamos las ecuaciones de rama para la red de la Fig. 9-3. Esta red tiene seis ramas. Usemos la ley de Ohm seis veces:

$$\begin{aligned} V_{BC} &= Z_{BC}I_{BC} & V_{CD} &= Z_{CD}I_{CD} \\ V_{BD} &= Z_{BD}I_{BD} & V_{DA} &= Z_{DA}I_{DA} \\ V_{CA} &= Z_{CA}I_{CA} & V_{BA} &= Z_{BA}I_{BA} + E \end{aligned} \quad (9-1)$$

(Solamente se ha indicado una fuente en una de estas ramas, pero el método puede ser aplicado de la misma manera si hay fuentes en todas las ramas o en cualquiera de ellas). Supone que las fuerzas electromotrices de las fuentes y las impedancias de la rama se conocen, y que todas las corrientes y voltajes de rama se deben encontrar. Tenemos, por tanto, seis ecuaciones con doce incógnitas, siendo las incógnitas los voltajes y corrientes de cada rama. Claramente necesitaremos seis ecuaciones más.

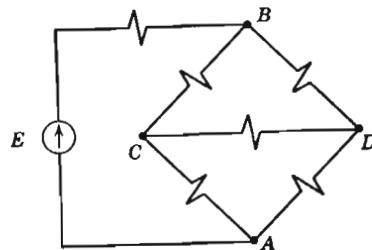


FIG. 9-3. Una red de seis ramas; un circuito de puente

Las seis ecuaciones necesarias se encuentran partiendo de las leyes de Kirchhoff. Estas pueden llamarse *ecuaciones de conexión*. La ley de corriente nos da tres ecuaciones, llamadas *ecuaciones de nodo* o *ecuaciones de unión*:

$$\begin{aligned} I_{BC} + I_{BD} + I_{BA} &= 0 \\ I_{CB} + I_{CD} + I_{CA} &= 0 \\ I_{AC} + I_{AD} + I_{AB} &= 0 \end{aligned} \quad (9-2)$$

La primera de estas ecuaciones dice que la suma de las corrientes que fluyen desde la unión B es cero y las otras dos, establecen lo mismo, con respecto a las uniones C y A respectivamente.

La ley de voltaje de Kirchhoff da tres ecuaciones más. Las su-

mas de los voltajes alrededor de la espira BCD debe ser cero. La suma de los voltajes alrededor de la espira CAD debe ser cero. La suma de los voltajes alrededor de la espira ABC debe ser cero. Esto es:

$$\begin{aligned} V_{BC} + V_{CD} + V_{DB} &= 0 \\ V_{CA} + V_{AD} + V_{DC} &= 0 \\ V_{AB} + V_{BC} + V_{CA} &= 0 \end{aligned} \quad (9-3)$$

Tenemos ahora doce ecuaciones. Reconociendo que $I_{BC} = I_{cB}$ y lo mismo para las otras corrientes y voltajes, continuamos teniendo doce incógnitas, porque las seis ecuaciones de conexión, 9-2 y 9-3, no han añadido ninguna incógnita nueva. Las doce ecuaciones pueden resolverse simultáneamente para las doce incógnitas. La solución actual no es ahora particularmente interesante y no se llevará a cabo, pero hay algunas observaciones generales muy importantes e interesantes de hacer.

Primero, siempre es posible escribir, tantas ecuaciones como incógnitas tenemos. Si el número de ramas es B el número de incógnitas es $2B$. Escribiendo la ley de Ohm para cada una de las ramas obtenemos B ecuaciones. Entonces, tenemos un número de uniones a las que se aplica la ley de corriente de Kirchhoff, y un número de espiras para las que se aplica la ley de voltaje de Kirchhoff, y el número de ecuaciones de uniones más el número de ecuaciones de espira siempre es igual a B . Tenemos por tanto, un total de $2B$ ecuaciones para resolver y encontrar $2B$ incógnitas.

Debemos notar, que el número de ecuaciones de unión independiente no es igual al número total de uniones. Por ejemplo, hay cuatro uniones en la Fig. 9-3, pero solamente tres ecuaciones pueden escribirse como en las Ecs. 9-2. Parecería posible escribir una cuarta ecuación de unión para la unión D, escribiendo $I_{BD} + I_{CD} + I_{AD} = 0$. Sin embargo, esta ecuación propuesta no contiene nueva información, porque podría haberse derivado de las otras tres ecuaciones. Resulta, solamente de sumar las tres Ecs. 9-2 y cancelar las cantidades iguales y opuestas. Por lo tanto, es una ecuación verdadera pero no es una ecuación independiente, y la solución de doce incógnitas requiere el uso de doce ecuaciones *independientes*.

En general, el número de ecuaciones de unión independientes es una menos que el número de uniones. La razón fundamental es la de que la corriente no puede escapar de una red; y que si fluye hacia afuera de una unión debe regresar a otra.

Una observación casi similar puede hacerse acerca de la independencia de las ecuaciones de espira. Las tres espiras para las que las Ecs. 9-3 se han escrito no son las únicas posibles. Están, por ejemplo, la espira ACBD. Sin embargo, ésta no nos dará otra ecuación *independiente* ni ninguna otra de las espiras posibles. Felizmente, el número total de ecuaciones de rama, más el número total de ecuaciones de conexión, siempre llega a ser justamente igual al número de incógnitas.

Si el número de ramas es B , el método de rama requiere la resolución simultánea de $2B$ ecuaciones. El método de rama siempre es posible si los otros métodos fallan. Usualmente, un poco de habilidad en escribir las ecuaciones salvará de una gran cantidad de trabajo pesado. Existen dos métodos de resolver problemas de redes que son más ingeniosos que los métodos de ramas. Estos son, el método de mallas y el método de nodos. Al método de rama se le ha llamado y no inapropiadamente el método de intensión simple.

4. Ecuaciones de malla

Lo ingenioso del método de malla se encuentra en la selección de las corrientes por determinarse. En lugar de encontrar tantas corrientes diferentes como ramas hay, se encuentran solamente tantas corrientes diferentes como lazos o mallas independientes existen.

Así, en la red de la Fig. 9-4 decimos que una corriente que hemos

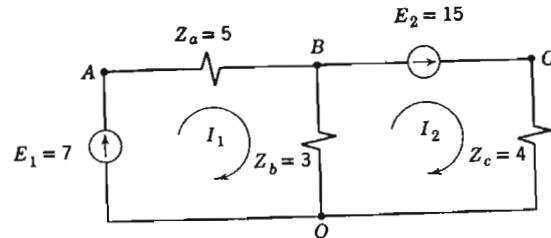


FIG. 9-4. Red de dos circuitos. Los valores numéricos están en volts y en ohms

llamado I_1 , fluye alrededor de la malla 1; ésta es la corriente en la fuente E_1 y en la impedancia Z_a . La dirección de referencia de I_1 se ha tomado a favor de las manecillas del reloj como ésta se muestra con la flecha en el interior de la malla; esto no es esencial pero la convención generalmente adoptada es la de tomar la dirección, como dirección de referencia para todas las mallas como en el sentido

de las manecillas del reloj. La corriente que llamaremos I_2 fluye alrededor de la malla 2, con la dirección de referencia también en favor de las manecillas del reloj. Esta es la corriente en la fuente E_2 y en la impedancia Z_c .

La corriente de malla I_1 fluye por Z_b y también lo hace la corriente de malla I_2 . La dirección de referencia de una es hacia abajo y de otra hacia arriba. La corriente total hacia abajo en Z_b es $I_1 - I_2$. Cuando se conocen I_1 e I_2 cualquier corriente de la red puede determinarse.

El primer paso es escribir las ecuaciones de la red en función de I_1 e I_2 . Utilizamos la ley de voltaje de Kirchhoff para escribir una ecuación que dice que la suma de todos los voltajes en la malla 1 es cero. Veamos cuidadosamente los voltajes de la malla 1.

Primero, supongamos que no hay corriente en la malla 2. Con un par de pinzas abrimos la segunda malla de modo que I_2 deba ser cero. Estando abierta la malla 2 podemos escribir para la malla 1:

$$Z_a I_1 + Z_b I_1 = E_1 \quad (9-4) \quad \text{o} \quad (Z_a + Z_b) I_1 = E_1 \quad (9-5)$$

E_1 es positivo porque tiene la misma dirección de referencia que I_1 .

Si ahora la malla 2 se cierra de modo que I_2 existe lo mismo que I_1 , ¿qué efecto producirá en la malla 1? I_2 puede afectar a la malla 1 produciendo un voltaje entre las terminales de la impedancia mutua Z_b . Cuando I_2 fluye por Z_b produce un voltaje entre las terminales de Z_b que aparece en la malla 1 (así como en la malla 2). Otro término de voltaje, $Z_b I_2$, por tanto, se incluirá entre los voltajes de la malla 1; la Ec. 9-5 deberá alterarse para incluir este término.

¿Cuál será el signo de este nuevo término? Puesto que la dirección de I_2 a través de la rama mutua es opuesta a la dirección de I_1 a través de la misma rama, el voltaje producido por ella será de signo opuesto y la ecuación de voltajes en la malla 1 será

$$(Z_a + Z_b) I_1 - Z_b I_2 = E_1 \quad (9-6)$$

Esta ecuación es válida cuando existe corriente en ambas mallas de la red. *

* Por otro lado, la Ec. 9-6 puede formarse escribiendo los voltajes entre las terminales de cada elemento de la malla como sigue:

$$Z_a I_1 + Z_b (I_1 - I_2) = E_1 \quad (9-7)$$

Aquí, el primer término es la impedancia por la corriente en Z_a y el segundo término es la impedancia por la corriente en Z_b . De aquí se obtiene, obviamente, la Ec. 9-6. Es un poco más fácil para el principiante escribir la Ec. 9-7 y entonces cambiarla a la 9-6, que escribir directamente la Ec. 9-6, pero se encontrará después de un poco de práctica que puede ahorrarse tiempo escribiendo la Ec. 9-6 de una vez.

Ahora se escribe una ecuación similar para la malla 2 de la red. Podemos hacer esto de la Fig. 9-4 sin ninguna explicación adicional:

$$(Z_b + Z_c)I_2 - Z_b I_1 = E_2 \quad (9-8)$$

El primer término es el voltaje en la malla 2 cuando la única corriente es I_2 ; el segundo término es el voltaje en la malla 2 causado por I_1 . E_2 como tiene la misma dirección de referencia que I_2 es positivo.

Las Ecs. 9-6 y 9-8 son un par de ecuaciones con solamente dos incógnitas, I_1 e I_2 :

$$\begin{aligned} (Z_a + Z_b)I_1 - Z_b I_2 &= E_1 \\ -Z_b I_1 + (Z_b + Z_c)I_2 &= E_2 \end{aligned} \quad (9-9)$$

Pueden resolverse simultáneamente. A modo de ilustración, demos valores numéricos a las fuerzas electromotrices de impedancia, y resolvamos para encontrar las corrientes como sigue.

5. Ejemplo

Sean las impedancias mostradas en la Fig. 9-4 resistencias puras con los valores mostrados en ohms. Las fuerzas electromotrices están en volts; pueden ser, tanto valores de corriente continua como voltajes alternos rms, porque la solución es la misma.

$$8I_1 - 3I_2 = 7 \quad (9-10)$$

$$-3I_1 + 7I_2 = 15 \quad (9-11)$$

Estas son ecuaciones lineales que pueden resolverse por cualquier medio conveniente. El método de determinantes es mucho más fácil y ordenado que ningún otro, por lo que se recomienda altamente. (Cualquiera que no esté enteramente familiarizado con la utilización de determinantes para resolver ecuaciones simultáneas, encontrará suficiente información para este uso particular en el apéndice 1). Procediendo:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 15 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{49 + 45}{56 - 9} = \frac{94}{47} = 2 \quad (9-12)$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ -3 & 15 \end{vmatrix}}{D} = \frac{120 + 21}{D} = \frac{141}{47} = 3 \quad (9-13)$$

(D , el denominador de I_2 , es el mismo que el del denominador I_1). Los resultados son las dos corrientes de malla en amperes.

Todas las cantidades desconocidas en la red se encuentran ahora fácilmente. La corriente en la rama central es $I_{B0} = I_1 - I_2 = -1$ ampere; el signo negativo indica que 1 ampere está fluyendo hacia arriba. Si el nodo de abajo (nodo 0) se toma como nodo de referencia, asumiéndose un potencial cero, entonces el potencial en el nodo B es de -3 volts, el potencial en el nodo A es $-3 + 5 \cdot 2 = 7$ volts, que es también la fuerza electromotriz de la fuente E_1 ; en el nodo C el potencial es $-3 + 15 = 12$ volts, que puede también encontrarse (a través de Z_c) como $4 \cdot 3 = 12$ volts. Nótese que el nodo más conveniente para especificar todos los voltajes de una red es dar los potenciales de los varios nodos, con referencia a alguno que se ha asumido arbitrariamente o de potencial cero.

6. Notación standard

Se ha acostumbrado y es muy útil, utilizar un sistema standard de símbolos para escribir las ecuaciones de malla. Este método se utilizó parcialmente en la sección previa, y las Ecs. 9-9 son ejemplos específicos de la forma general que sigue:

$$\begin{aligned} Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + Z_{13}I_3 + \cdots + Z_{1L}I_L &= E_1 \\ Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + Z_{23}I_3 + \cdots + Z_{2L}I_L &= E_2 \\ Z_{31}I_1 + Z_{32}I_2 + Z_{33}I_3 + \cdots + Z_{3L}I_L &= E_3 \\ \vdots & \\ Z_{L1}I_1 + Z_{L2}I_2 + Z_{L3}I_3 + \cdots + Z_{LL}I_L &= E_L \end{aligned} \quad (9-14)$$

Este es un conjunto de L ecuaciones lineales simultáneas, aplicadas a L mallas de una red; la red puede ser cualquier red y L puede ser cualquier número. Para escribir éstas ecuaciones se siguieron las siguientes convenciones:

Cada corriente de malla se ha numerado, como I_1 , I_2 y así sucesivamente.

E_1 es la fuerza electromotriz total * en la malla 1. Puede haber una sola fuente, como en la Fig. 9-4, o puede haber otras fuentes en la malla y entonces E_1 sería la suma algebraica. E_2 es la fuerza electromotriz total en la malla 2. Si hubiera una fuente en la rama mutua entonces se contaría tanto en E_1 como en E_2 .

La impedancia total en la malla 1 es Z_{11} . En la Ec. 9-6, aplicada a la Fig. 9-4, Z_{11} es $Z_a + Z_b$. Puede incluir muchos más elementos si la red fuese más complicada. Z_{11} se ha llamado *autoimpedancia de la malla 1*. Puede medirse por medio de un puente u otro instrumento de medición de impedancia, conectado en lugar de la fuente en la malla 1, y estando las otras mallas de la red abiertas durante la medición. Cada malla tiene su autoimpedancia: Z_{22} , Z_{33} y así sucesivamente.

Ciertas ramas son comunes a dos mallas. Así, Z_b en la Fig. 9-4 está tanto en la malla 1 como en la malla 2. En tales casos, en que la corriente en una malla produce voltaje, en otra malla se dice que hay *impedancia mutua*. La impedancia mutua es, por definición, la razón del voltaje en una malla a la corriente, en otra malla que lo produce. Esto es, si la corriente en la malla 2 es I_2 , y la impedancia mutua con la malla 1 es Z_{12} , entonces, el voltaje resultante en la malla 1 es $Z_{12}I_2$.

Por ejemplo, la Ec. 9-6 muestra que el voltaje producido en la malla 1 de la Fig. 9-4 por la corriente en la malla 2 es $-Z_bI_2$. Entonces, por nuestra definición, $Z_{12} = -Z_b = -3$. Esta magnitud es razonable, porque Z_b es común a las mallas 1 y 2, pero el signo negativo requiere una explicación amplia.

El signo negativo resulta del hecho de que en un elemento común, la dirección de referencia de I_2 está opuesta a la dirección de referencia de I_1 . Si I_1 positivo, produce un voltaje positivo, I_2

* En este Cap. y en el siguiente, la cantidad en el lado derecho de las Ecs. 9-14 se concibe más útilmente como fuerza electromotriz y será designada como E . En Caps. posteriores, sin embargo, será necesario dar una generalidad mayor a esta cantidad. Entonces escribirímos (como en las Ecs. 18-1) V_1 y así sucesivamente en lugar de E , y así sucesivamente, e interpretaremos V_1 como un voltaje que se introduce en la malla 1. Este voltaje puede resultar de una fuerza electromotriz, como en el presente Cap., pero en una interpretación más amplia puede ser un voltaje resultante de cualquier otra causa. Podemos concebir un par de terminales en la malla 1 (ver Fig. 10-1 por ejemplo) y por cualquier medio se mantiene un voltaje V_1 entre ellas. No es siempre necesario que este voltaje V_1 sea mantenido por un elemento activo (excepto que por supuesto deberá haber por lo menos una fuente en la red); V_1 podría ser el voltaje terminal de una fuente o podría ser el voltaje terminal de una resistencia conectada a par de terminales en la malla 1, estando la resistencia ajustada de modo que el voltaje entre las terminales es V_1 .

Todo lo que se puede decir del miembro de mano derecha de las Ecs. 9-14 con completa confianza, es que él representa voltaje o fuerza electromotriz en el circuito que no se han tomado en cuenta por los términos del lado de mano izquierda de la Ec.

positivo en el mismo elemento produce un voltaje negativo. Más comúnmente, en los cálculos de redes, las direcciones de referencia se asumen de modo que las impedancias mutuas tales como Z_{12} , Z_{23} , etc., etc., son cantidades negativas. Sin embargo, veremos también en los ejemplos de las siguientes páginas, en los que las impedancias mutuas son positivas

En la segunda del grupo de Ecs. 9-14, el primer término contiene a Z_{21} . Una comparación con la Ec. 9-8 muestra que, para la red de la Fig. 9-4, $Z_{21} = -Z_b$. Z_{21} es por lo tanto, igual a Z_{12} . Cuando dos mallas tienen resistencias o bobinas o condensadores en una rama común, la corriente en la malla 1 producirá el mismo voltaje en la malla 2 que el que una corriente igual en la malla 2 causaría en la malla 1. Por lo tanto, $Z_{21} = Z_{12}$, o en general

$$Z_{pq} = Z_{qp} \quad (9-15)$$

Esta relación sigue siendo verdadera, aunque menos evidente, si dos circuitos están acoplados por un campo magnético, como en un transformador; sin importar la relación de vueltas, la inductancia mutua L_{21} es igual a la inductancia mutua L_{12} (ver Sec. 5 del Cap. 1). Si el acoplamiento entre dos mallas es por medio de un campo eléctrico, a través de una capacitancia mutua, sin ninguna conexión conductiva, la Ec. 9-15 permanece válida. En efecto, solamente falla para elementos de circuito que no sean simétricos bilateralmente. Un tubo al vacío, por ejemplo, no es bilateral; si la malla 1 está entre rejillas y cátodo de un tubo y la malla 2 entre placa y cátodo, el tubo * puede considerarse como un elemento mutuo, pero Z_{12} no es igual a Z_{21} .

El orden de los subíndices colocados en Z tienen la siguiente significación (American Standards, Ref. 7). El primer subíndice, es el número de la ecuación en el arreglo de Ec. 9-14 y por tanto, coincide con el subíndice puesto a E en esta ecuación. El segundo subíndice, es el número del término en la ecuación y por tanto, coincide con el subíndice puesto a I en este término. Así $Z_{pq}I_q$ es un voltaje en el circuito p producido por una corriente en el circuito q .

* La solución de Ecs. de redes para una red que contiene un tubo al vacío, es a menudo posible sustituyendo por un circuito equivalente de elementos lineales y una fuente constante por el tubo al vacío, aunque la Ec. 9-15 no se puede utilizar y el acoplamiento es unilateral o bisimétrico, ver por ejemplo, LeCorbeiller, Ref. 16.

7. Ejemplo

La Fig. 9-5 muestra un circuito de un puente de resistencia de forma familiar. Está alimentado por una fuente de voltaje constante E .

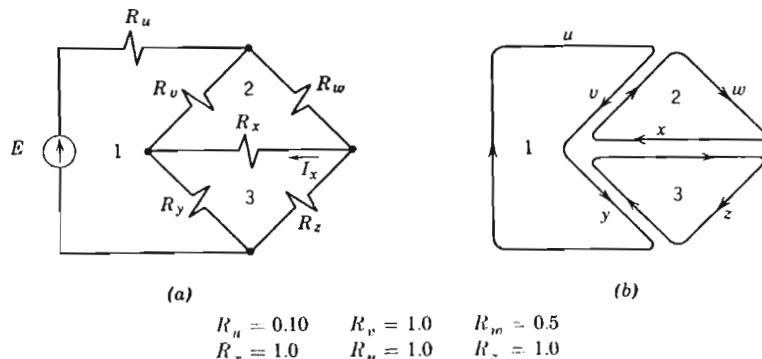


FIG. 9-5. Puente desbalanceado

tante E . R_r es la resistencia del galvanómetro o de otro instrumento utilizado para indicar el balance. El problema es encontrar la corriente del galvanómetro I_r a través de R_r , estando el puente desbalanceado. Las resistencias del puente están dadas con el diagrama.

Solución. Esta parece ser una red con tres mallas obvias como se indica en la Fig. 9-5b. Por supuesto, las mallas no deben seleccionarse en la forma obvia, pues puede haber ventajas en tomar otras mallas, pero empezaremos el trabajo con las tres mallas indicadas. Las tres ecuaciones de malla se escriben; vamos a escribirlas en la forma de las ecuaciones generales de malla 9-14.

$$\begin{aligned} (R_u + R_v + R_y)I_1 - R_v I_2 - R_y I_3 &= E \\ -R_v I_1 + (R_v + R_w + R_x)I_2 - R_x I_3 &= 0 \\ -R_y I_1 - R_x I_2 + (R_x + R_y + R_z)I_3 &= 0 \end{aligned} \quad (9-16)$$

El primer término es el voltaje de la malla 1 debido a I_1 , el segundo término es el voltaje en la malla 1 debido a I_2 , el tercer término es el voltaje en la malla 1 debido a I_3 ; todos juntos son iguales a E . Las otras ecuaciones son similares. Substituyamos ahora por valores numéricos:

La corriente a través de R_r es la diferencia de las dos corrientes de

$$\begin{aligned} 2.10I_1 - 1.00I_2 - 1.00I_3 &= E \\ -1.00I_1 + 2.50I_2 - 1.00I_3 &= 0 \\ -1.00I_1 - 1.00I_2 + 3.00I_3 &= 0 \end{aligned} \quad (9-17)$$

malla; si la dirección de referencia de I_x se toma de derecha a izquierda como en el diagrama, entonces

$$I_x = I_2 - I_3 \quad (9-18)$$

Las ecuaciones de malla deben resolverse para encontrar I_2 e I_3 . Esto se hace más fácilmente por determinantes:

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2.1 & E & -1.0 \\ -1.0 & 0 & -1.0 \\ -1.0 & 0 & 3.0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2.1 & -1.0 & -1.0 \\ -1.0 & 2.5 & -1.0 \\ -1.0 & -1.0 & 3.0 \end{vmatrix}} \quad (9-19)$$

Llamando al denominador y numerador de I_2 respectivamente D y N_2 ,

$$D = (2.1)(2.5)(3.0) - (1.0) - (1.0) - (2.1 + 2.5 + 3.0) \\ = 6.15 \quad (9-20)$$

$$N_2 = -E \begin{vmatrix} -1.0 & -1.0 \\ -1.0 & 3.0 \end{vmatrix} = 4.0E \quad (9-21)$$

Similarmente

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2.1 & -1.0 & E \\ -1.0 & 2.5 & 0 \\ -1.0 & -1.0 & 0 \end{vmatrix}}{D} = \frac{N_3}{D} \quad (9-22)$$

$$N_3 = E \begin{vmatrix} -1.0 & 2.5 \\ -1.0 & -1.0 \end{vmatrix} = 3.5E \quad (9-23)$$

$$I_x = I_2 - I_3 = \frac{N_2}{D} - \frac{N_3}{D} \\ = E \frac{4.0 - 3.5}{6.15} = \frac{E}{12.3} \quad (9-24)$$

Puesto que se ha dado que E es 10 volts, $I_x = 10/12.3 = 0.813$ amperes. Esta es la corriente que pasa por el galvanómetro en el circuito del puente.

Elección de Mallas. En la Fig. 9-5b se escogieron las mallas más obvias. Es enteramente posible que un poco de habilidad ahorre mucho trabajo engorroso. Es claramente más fácil si I_x estuviese como una sola corriente de malla solamente; esto es, si sólo una malla pasa a través de R_x . Así, necesitaríamos resolver únicamente para una corriente de malla en lugar de dos. Al mismo tiempo, es beneficioso para desarrollar los determinantes si E está únicamente en una malla. Seleccionamos, por lo tanto, las mallas * como en la Fig. 9-6

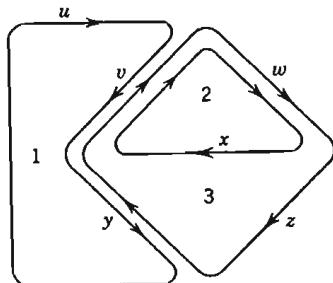


FIG. 9-6. Grupo diferente de mallas para la red de la Fig. 9-5

Las ecuaciones de malla ahora se escriben:

$$\begin{aligned} (R_u + R_v + R_y)I_1 - R_u I_2 - (R_v + R_y)I_3 &= E \\ -R_v I_1 + (R_v + R_w + R_x)I_2 + (R_v + R_w)I_3 &= 0 \\ -(R_v + R_y)I_1 + (R_v + R_w)I_2 + (R_v + R_w + R_y + R_z)I_3 &= 0 \end{aligned} \quad (9-25)$$

El principio es exactamente el mismo, por supuesto. Primero se escriben los voltajes en la malla 1 resultado de I_1 . A continuación escribimos los voltajes en la malla 1 debidos a I_2 : Esto es $-R_v I_2$ y el signo menos se utiliza porque la dirección de referencia de I_2 a través de R_v es opuesta a la dirección de referencia de I_1 a través de R_v . A continuación el voltaje en la malla 1 causado por I_3 se escribe y puesto que R_v y R_y están en las dos mallas 1 y 3, y las direcciones de referencia son opuestas, el término es $-(R_v + R_y)I_3$. La suma de estas caídas de voltaje se iguala a la fuerza electromotriz E .

No hay nada no usual en los dos primeros términos de la segunda ecuación. El tercer término es el voltaje en la malla 2 pro-

ducido por I_3 ; las mallas 2 y 3 tienen a R_v y R_w en común y en ambos elementos la dirección de referencia de I_3 es la misma que la de I_2 . Por lo tanto, I_3 producirá una caída de voltaje de la misma polaridad que lo hará I_2 y el signo de este término de resistencia mutua es consecuentemente el *mismo* (positivo) que el signo del término de autoresistencia.

La tercera ecuación no requiere explicación adicional. Las tres ecuaciones se resuelven para I_2 , preferiblemente usando los determinantes y el resultado será igual al obtenido para I_x en la primera parte de este ejemplo. El trabajo requerido por este método se habrá encontrado que es un poco menor que el necesario en el primer método.

Hemos hecho ahora dos diferentes selecciones de malla para una misma red, y muchas otras son posibles.*

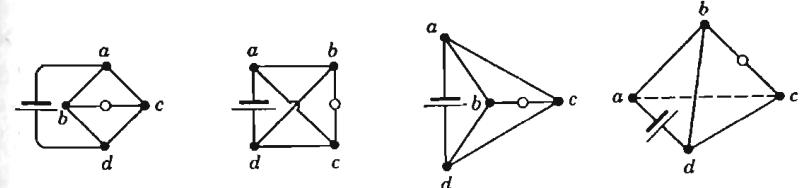


FIG. 9-7. Cuatro formas de dibujar la misma red de puente

8. Ecuaciones de nodo

Para escribir las ecuaciones de malla empezamos con el concepto de la corriente de malla. Esto hace innecesario dar atención a la ley de corriente de Kirchhoff, porque las corrientes de malla necesariamente suman cero en cada nodo y la ley de corriente de Kirchhoff se satisface automáticamente. ** El concepto de corriente

* La red de un puente (J. Clerk Maxwell, Ref. 17, Sec. 347) es la red de tres mallas de perfecta simetría. La Fig. 9-7 la muestra dibujada de la manera familiar, como una esfera, y en forma triangular para hacer énfasis en la simetría. Finalmente está indicada como una figura tridimensional, siendo cada rama una arista de un tetraedro regular, para demostrar que las ramas son geométricamente indistinguibles.

** Esto es, que si las corrientes de rama se encuentran por combinación de las corrientes de malla, entonces las corrientes de rama deben satisfacer la ley de Kirchhoff en cada nodo. Por ejemplo, si $I_a = I_1 - I_4$, etc., como en la Fig. 9-8a, entonces I_1 , I_2 , I_3 e I_4 pueden tener cualquier valor concebible y puesto que

$$(I_1 - I_4) + (I_4 - I_3) + (I_3 - I_2) + (I_2 - I_1) = 0$$

se sigue necesariamente que

$$I_a + I_b + I_c + I_d = 0$$

* Las limitaciones en la selección de malla se discutirán en la Sec. 13.

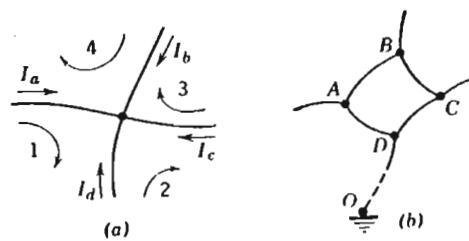


FIG. 9-8. Un nodo y una malla

de malla, por lo tanto, reduce el número de ecuaciones que deben resolverse simultáneamente de $2B$ ecuaciones en el método de rama a L , número de mallas independientes, que es usualmente una cuarta parte cuando mucho.

Pasemos ahora, al método de la ecuación de nodo. El concepto simplificador en este método es la idea de medir voltajes de todos los nodos de la red, a un nodo particular que se llama nodo de referencia (o según algunos, nodo dato). Esto hace innecesario darle ninguna atención a la ley de voltaje de Kirchhoff. Solamente es necesario satisfacer la ley de corriente de Kirchhoff en cada nodo, porque la ley de voltaje se satisface automáticamente.* Así el número de ecuaciones simultáneas se reduce a un número igual al de nodos independientes N , un número que es mucho menor que $2B$ y comparable a L .

Cuando el método de nodo o el de malla es más conveniente, depende de la red. Algunas redes tienen menos mallas que nodos, algunas menos nodos que mallas, y también otros factores afectan la relativa conveniencia como veremos posteriormente.

* Si los voltajes de rama se encuentran con diferencias entre nodo a dato en las terminales de la rama, las ecuaciones de rama no pueden dejar de satisfacer la ley de voltaje de Kirchhoff en cada malla cerrada. Por ejemplo, si $V_{AO} = V_{AO} - V_{BO}$, etc., como en la Fig. 9-8b, entonces V_{AO} , V_{BO} , V_{CO} y V_{DO} pueden tener cualquier valor concebible y por tanto

$$(V_{AO} - V_{BO}) + (V_{BO} - V_{CO}) + (V_{CO} - V_{DO}) + (V_{DO} - V_{AO}) = 0$$

donde sigue necesariamente que

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DA} = 0$$

Debe recalcarse que tanto las ecuaciones de malla como de nodo, pueden obtenerse de las ecuaciones de rama en el curso de su solución simultánea. Así, las ecuaciones de malla, o las ecuaciones de nodo, pueden ser vistas como correspondientes a un paso en la solución de las ecuaciones de rama, en la que alguna de las incógnitas se han eliminado. Puesto que es posible escribir las ecuaciones de nodo o de malla inicialmente. Una gran cantidad de manipulación algebraica se puede ahorrar de esta manera.

9. Soluciones por nodos

Un Nodo Independiente. La Fig. 9-9 muestra una red elemental con una fuente de corriente conocida y dos elementos de admisión.

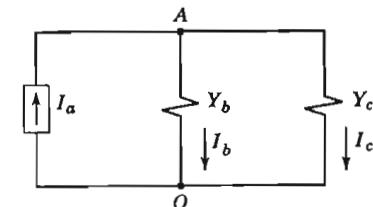


FIG. 9-9. Una red con un nodo independiente

tancia conocida. Hay dos nodos; uno marcado O es el nodo de referencia y el otro está marcado A . Escribamos una ecuación basada en la ley de Kirchhoff. La suma de las corrientes en el nodo A debe ser cero:

$$-I_a + I_b + I_c = 0 \quad \text{o} \quad I_b + I_c = I_a \quad (9-26)$$

I_a es la corriente que pasa por la fuente, y su valor numérico es conocido. I_b e I_c se calculan de las admitancias y el voltaje del nodo. Supóngase que el potencial en el nodo O es cero; si el potencial en el nodo A se le llama V_A , la Ec. 9-26 llegará a ser

$$Y_b V_A + Y_c V_A = I_a \quad (9-27)$$

Resolviendo para V_A , obtenemos

$$V_A = \frac{I_a}{Y_b + Y_c} \quad (9-28)$$

Dos Nodos Independientes. Esta solución de una red con solamente un nodo independiente es demasiado simple para ser interesante, pero muestra la forma a seguir para la solución de otros problemas. La Fig. 9-10 muestra una red con dos nodos independientes. Esto es, la red tiene tres nodos, uno de los cuales es el

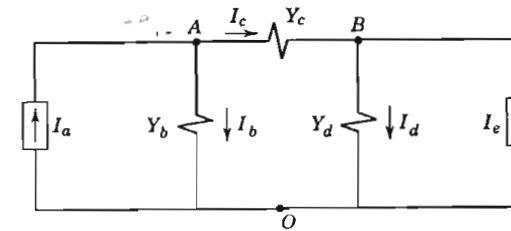


FIG. 9-10. Una red con dos nodos independientes

nodo de referencia O y los otros están marcados A y B. Utilicemos la ley de corriente de Kirchhoff para los nodos A y B, llamando a la corriente en las admitancias hacia *afuera* del nodo positivo, e igualando la suma de las corrientes en la admittance hacia afuera del nodo con la corriente en la fuente hacia el nodo:

$$\begin{array}{ll} \text{Corriente de} & \text{Corriente de} \\ \text{la admittance} & \text{la fuente} \\ I_b + I_c & = I_a \end{array} \quad (9-29)$$

$$I_d - I_c = -I_e \quad (9-30)$$

Estas se expanden en función de los potenciales de nodo utilizando $I_b = Y_b V_A$, $I_d = Y_d V_B$ e $I_c = (V_A - V_B) Y_c$

$$Y_b V_A + Y_c (V_A - V_B) = (Y_b + Y_c) V_A - Y_c V_B = I_a \quad (9-31)$$

$$Y_d V_B - Y_c (V_A - V_B) = (Y_c + Y_d) V_B - Y_c V_A = -I_e \quad (9-32)$$

Esta es la forma, lenta pero segura de escribir estas ecuaciones.

También existe otra forma rápida y fácil, análoga a la rápida que utilizamos para escribir las ecuaciones de malla. Primero, supóngase que el potencial es cero en cada nodo, excepto en el nodo A y escribanse las corrientes de admittance *hacia* el nodo A. (Esto puede visualizarse suponiendo que cada nodo excepto el nodo A se ha cortocircuitado al nodo O.) Escribimos

$$(Y_b + Y_c) V_A = I_a$$

De hecho, sin embargo, ésta no es la historia completa en el nodo A, porque existen potenciales reales en otros nodos que afectarán también. En el circuito de la Fig. 9-10, el efecto del potencial en el nodo B es la corriente adicional $-Y_c V_B$; ésta es la corriente *del* nodo A que resulta cuando existe un potencial V_B en el nodo B y un potencial cero en el nodo A y en todos los demás nodos. (Esto puede visualizarse suponiéndose que el corto circuito se ha eliminado en el nodo B, mientras que el nodo A, nodo O y todos los otros nodos se han cortocircuitado juntos.)

Ahora, simplemente sumamos la corriente hacia el nodo A cuando hay potenciales en el nodo A solo, la corriente hacia el nodo A debida al potencial en el nodo B solo y (en redes que tienen otros nodos) términos adicionales para las corrientes hacia el nodo A debidas a potenciales en el nodo C solo, nodo D solo, etc. Esto deberá igualar a la corriente de la fuente que va al nodo A. Pues-

to que la red simple de la Fig. 9-10 tiene solamente dos nodos independientes, escribimos

$$(Y_b + Y_c) V_A - Y_c V_B = I_a \quad (9-33)$$

Esta es la forma rápida de escribir la Ec. 9-31 en un solo paso.

Similarmente escribimos las corrientes *del* nodo B. Primero escribimos las corrientes debidas al potencial en el nodo B solo, que aparecen cuando existe potencial únicamente en el nodo B (siendo los potenciales de todos los otros nodos cero). A esto, añadimos la corriente que fluye *del* nodo B cuando existe un potencial solo en el nodo A, etc. La suma se iguala a la corriente de la fuente suministrada al nodo B. En nuestra red el resultado es

$$(Y_c + Y_d) V_B - Y_c V_A = -I_e \quad (9-34)$$

y esta es la Ec. 9-32.

10. Notación standard

Existe una forma standard para escribir las ecuaciones de nodo, similar a la forma standard para las ecuaciones de malla. Para una red de N nodos independientes,

$$\begin{aligned} Y_{AA} V_A + Y_{AB} V_B + Y_{AC} V_C + \cdots + Y_{AN} V_N &= I_A \\ Y_{BA} V_A + Y_{BB} V_B + Y_{BC} V_C + \cdots + Y_{BN} V_N &= I_B \\ Y_{CA} V_A + Y_{CB} V_B + Y_{CC} V_C + \cdots + Y_{CN} V_N &= I_C \\ \vdots & \\ Y_{NA} V_A + Y_{NB} V_B + Y_{NC} V_C + \cdots + Y_{NN} V_N &= I_N \end{aligned} \quad (9-35)$$

Cuando las Ecs. 9-33 y 9-34 se escriben con los términos en este orden tenemos

$$\begin{aligned} (Y_b + Y_c) V_A - Y_c V_B &= I_a \\ -Y_c V_A + (Y_c + Y_d) V_B &= -I_e \end{aligned} \quad (9-36)$$

Y_{AA} se llama la *autoadmitancia* en el nodo A y en nuestro ejemplo es igual a $(Y_b + Y_c)$. Nótese que Y_{AA} es la *suma de todas las admittencias unidas al nodo A*. Y_{BB} , Y_{CC} , ..., son las autoadmitancias en los otros nodos.

Y_{AB} es la *admitancia mutua* entre los nodos A y B. En nuestro ejemplo $Y_{AB} = -Y_c$. Y_{BA} también es igual a $-Y_c$. Las dos Y_{AB} e

Y_{AB} son la suma de todas las admitancias conectadas directamente entre los nodos A y B, pero escritas con un signo negativo.

I_A es la corriente de la fuente que fluye hacia el nodo A. En nuestro ejemplo es la corriente designada I_a en el diagrama. Similarmente I_B , la corriente de la fuente hacia el nodo B, es $-I_e$ en el ejemplo.

Se verá, que las ecuaciones 9-35 de nodos standard igualan las corrientes que fluyen en las admitancias desde el nodo con las corrientes de la fuente que fluyen hacia el nodo.

Puede ser útil, la noticia de que Y_{AA} podría medirse cortocircuitando el nodo O con todos los otros nodos excepto A, desconectando las fuentes de corriente, y conectando un instrumento de medición a los nodos A y O. Las otras autoadmitancias podrían medirse en los otros nodos. Y_{AA} tiene por supuesto, una componente real y una imaginaria:

$$Y_{AA} = G_{AA} + j(\omega C_{AA} - 1/\omega L_{AA}) \quad (9-37)$$

En las Ecs. 9-35 el primer subíndice colocado a Y muestra el nodo en el que la corriente está siendo considerada; el segundo subíndice denota el potencial de nodo que produce esa corriente. Así, $Y_{PQ}V_Q$ es una corriente en el nodo P que resulta de un potencial en el nodo Q. Para elementos bilaterales ordinarios $Y_{PQ} = Y_{QP}$. Esto es evidente cuando dos admitancias son físicamente del mismo elemento (como la Y_{AB} e Y_{BA} son la admitancia Y_c en la Fig. 9-10), y sigue siendo cierto cuando el acoplamiento entre los nodos, no es directamente conductivo, pero es a través de transformadores o bobinas acopladas. Esto no es cierto ordinariamente, cuando el acoplamiento es a través de tubos electrónicos.

Las generalidades de esta sección tendrán mayor significado cuando se apliquen a redes específicas. Veamos un ejemplo o dos.

11. Ejemplo

Tres Nodos Independientes. La red del puente desbalanceado provee un buen ejemplo numérico del método de nodos. La red es mostrada en la Fig. 9-11. Se ha hecho un cambio con respecto a la red similar que fue resuelta en la sección 7: la fuente de voltaje conocido ha sido quitada, y utilizando en su lugar una fuente equivalente de corriente constante, tal como se discutió en la Sec. 8 del Cap. 6. (Para ser equivalente, I de la Fig. 9-11 debe ser igual diez

veces a la E de la Fig. 9-5). Las conductancias de cada rama (recíprocas de las resistencias dadas previamente) están puestas en lista en la Fig 9-11. Las ecuaciones de nodo las escribiremos ahora.

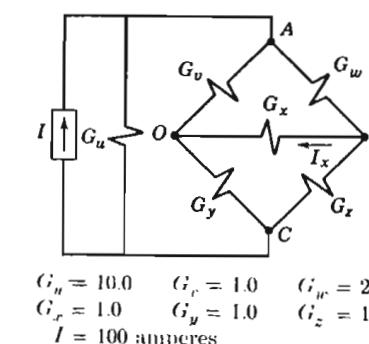


FIG. 9-11. Solución de la red del puente por el método de nodos

Uno de los nodos se selecciona como el nodo de referencia y se marca O. Puesto que el objeto de la solución es encontrar la corriente a través de G_r , será más conveniente seleccionar uno de los extremos o el otro de esta rama como el nodo O, porque así solamente será necesario encontrar otro voltaje de nodo. Los otros nodos se marcarán A, B y C.

Se ve que al nodo A están conectadas tres admitancias y una fuente de corriente. Las corrientes en las admitancias debidas al potencial en el nodo A solo, es $(G_u + G_v + G_w)V_A$, así éste es el primer término de las Ecs. 9-38. La corriente hacia el nodo A a través de G_w del nodo B, siendo el potencial en el nodo A cero, es G_wV_B ; la corriente que sale del nodo A se escribe en las Ecs. 9-38 como $-G_wV_B$. La corriente hacia el nodo A desde el nodo C, siendo el potencial en el nodo A cero, es G_wV_C y la corriente desde el nodo A es $-G_wV_C$. El total de estas corrientes hacia afuera del nodo A a través de las tres admitancias debe ser igual a la corriente I que entra al nodo A desde la fuente. Esto nos da la primera de las Ecs. 9-38.

La segunda ecuación se escribe para el nodo B. La tercera ecuación se escribe para el nodo C. Esto no requiere explicaciones adicionales, excepto quizás para hacer notar que la corriente de la fuente, que *procede* desde el nodo C, aparece en el lado derecho de la tercera ecuación con un signo negativo.

$$\begin{aligned} (G_u + G_v + G_w)V_A - G_wV_B - G_uV_C &= I \\ (G_w + G_x + G_z)V_B - G_wV_A - G_zV_C &= 0 \\ (G_u + G_y + G_z)V_C - G_zV_B - G_uV_A &= -I \end{aligned} \quad (9-38)$$

A continuación se introducen los valores numéricos en las ecuaciones, y al mismo tiempo los términos se arreglan en orden, para coincidir con la forma de las Ecs. 9-35:

$$\begin{aligned} 13V_A - 2V_B - 10V_C &= I \\ -2V_A + 4V_B - 1V_C &= 0 \\ -10V_A - 1V_B + 12V_C &= -I \end{aligned}$$

V_B puede calcularse como la razón de dos determinantes, N_B/D , donde

$$D = \begin{vmatrix} 13 & -2 & -10 \\ -2 & 4 & -1 \\ -10 & -1 & 12 \end{vmatrix} = 624 - 20 - 20 - (400 + 48 + 13) \\ = 123$$

y

$$N_B = \begin{vmatrix} 13 & I & -10 \\ -2 & 0 & -1 \\ -10 & -I & 12 \end{vmatrix} = 10I - 20I - (13I - 24I) = I$$

Por lo tanto

$$V_B = \frac{N_B}{D} = \frac{I}{123}$$

Finalmente

$$I_x = G_x V_B = 1 \cdot \frac{I}{123} = \frac{I}{123}$$

Puesto que I se dio como de 100 amperes $I_x = 100/123 = 0.813$ amperes y éste es el mismo resultado que obtuvimos por el método de malla en la Sec. 7.

12. Método de nodos con fuentes de voltaje conocido

Se verá que las ecuaciones de nodos trabajan felizmente con fuentes, en las que la corriente se conoce. Pero no están limitadas

a redes con fuentes de corriente únicamente. El método de nodos puede utilizarse para redes con fuentes de voltaje conocido, aunque usualmente al costo de echar a perder la simetría de las matemáticas.

La red de dos mallas de la Fig. 9-4 por ejemplo, puede resolverse por el método de nodos. Pasa a ser un problema con tres nodos independientes, pero uno del tipo fácil. Probemos con éste problema, redibujando la red como la Fig. 9-12.

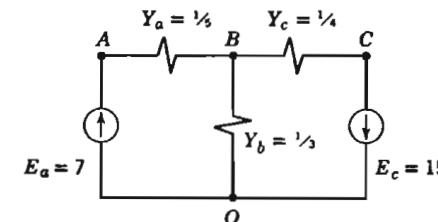


FIG. 9-12. Una red en la que se fuerzan dos voltajes de nodo

Cualquier nodo puede seleccionarse para referencia; escogemos el marcado O . La ecuación usual para las corrientes en el nodo B puede escribirse:

$$(Y_a + Y_b + Y_c)V_B - Y_aV_A - Y_cV_C = 0$$

Debido a que el voltaje en las fuentes es conocido, dos de los nodos tienen potenciales forzados

$$V_A = E_a = 7 \quad \text{y} \quad V_C = -E_c = -15$$

V_B es el único que permanece desconocido. Puede encontrarse usando valores numéricos como sigue:

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)V_B - \frac{1}{3}7 + \frac{1}{4}15 = 0 \\ V_B = -3$$

Lo notoriamente fácil de esta solución, resulta del hecho de que dos de los voltajes de nodos se especifican simplemente. Esto es debido, en parte a la forma en la que se dibujó el diagrama. No fue por accidente que la red fuese arreglada en la configuración particular mostrada, y unas pocas pruebas con otros arreglos, equivalen-

lentes eléctricamente, mostrarán el valor del cuidado en planear la forma antes de empezar la solución.*

De una manera similar, el método de mallas de resolverla, puede aplicarse a redes que contienen fuentes de corriente conocida, aunque los ejemplos ilustrativos de las soluciones por mallas de este capítulo, hayan sido con fuentes de voltaje únicamente. Cuando existe una fuente en la que la corriente se conoce, la corriente en la rama que contiene esta fuente, es forzada para tener este valor designado. En la red de la Fig. 9-10, por ejemplo, aunque existen tres mallas, las corrientes en dos de las mallas están forzadas, y solamente una queda para resolver. La solución de ecuaciones por malla es por lo tanto fácil.

13. Número de nodos y mallas

Algunas redes tienen más nodos que mallas, otras más mallas que nodos, y es por lo tanto ventajoso utilizar el método de solución que requiera el menor número de ecuaciones simultáneas. Para juzgar cuál es el mejor método, o inclusive para conocer cuántas ecuaciones son adecuadas para la resolución de un problema dado, es necesario tener ciertos medios de contar los nodos independientes y las mallas independientes.

En la determinación del número de nodos y mallas, un campo de las matemáticas llamado *topología* nos da información útil. Si tenemos

E = número de elementos

N = número de nodos independientes

L = número de mallas independientes

entonces en cualquier red con cualquier forma de conexión

$$N + L = E \quad (9-39)$$

N es igual al número de nodos *independientes*, y es uno menos que el número total de nodos; ** es igual al número de nodos *excluyendo el nodo de referencia*.

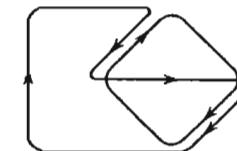
* Si la fuente E_c se hubiese dibujado entre los nodos B y C , y Y_c entre los nodos C y O la red sería típicamente la misma, pero las ecuaciones serían mucho menos nítidas. En este caso sería mejor escribir I_c para la corriente que pasa por E_c , utilizando I_c en las ecuaciones cuando fuera necesario y podrán escribirse las suficientes ecuaciones y resolverse para las incógnitas.

** Si existen S subredes, que influya cada una en la otra solamente por magnetismo mutuo o campos eléctricos (acoplamiento de transformador, por ejemplo) y no están conectadas conductivamente (por ejemplo, sin tierra común) la red no está "conectada com-

Cuando un diagrama de una red se ha dibujado, y los nodos marcados, es fácil contar los elementos para encontrar E y contar los nodos para encontrar N . El número de mallas independientes L puede entonces encontrarse por substracción utilizando la Ec. 9-39.

El número de mallas puede también encontrarse por el siguiente proceso. Imagínese que un elemento de la red se corta, como si se cortara con unas pinzas de corte. Esto abriría, al menos, una de las mallas posibles. Entonces, córtense otro elemento, abriendo otra malla. Continúe cortando elementos, hasta que no quede ninguna malla, pero no corte de manera de aislar ningún nodo de la red. Se habrán cortado suficientes elementos, cuando no es posible encontrar una trayectoria cerrada para la corriente en la red, pero todos los nodos permanecen acoplados conductivamente a cualquier otro nodo. El número de cortes es el número de mallas independientes L .

FIG. 9-13. Dos mallas de una red de tres mallas



Como un ejemplo, la red de la Fig. 9-12 tiene cinco elementos; $E = 5$. Tiene cuatro nodos, así $N = 3$. Consecuentemente $L = 5 - 3 = 2$. Para probar que hay realmente dos mallas, la red puede cortarse en Y_u y en Y_r ; o igualmente puede cortarse en Y_b y en E_r ; en cualquier lugar que se hagan los cortes, el número requerido de cortes para abrir todas las mallas es dos.

En la Fig. 9-11 la red tiene siete elementos. Hay tres nodos independientes. Por tanto, son $7 - 3 = 4$ mallas. Para comprobar esto, la red puede abrirse en G_u , G_r , G_w y G_t y entonces todas las corrientes se habrán paralizado sin aislar ningún nodo.

Puede parecer innecesario meterse en este enredo, para determinar el número de mallas independientes, pero a veces se necesita una guía definida para escribir las ecuaciones de malla. El uso de muchas ecuaciones de malla es únicamente una pérdida de tiempo, pero el uso de pocas ecuaciones de malla pueden llevar a una respuesta equivocada.*

pletamente" y el número de nodos independientes N es igual al número total de nodos menos S . (Debe haber un nodo de referencia en cada subred). La regla dada en el texto es el caso especial para la red completamente conectada con $S=1$.

* Por ejemplo, las dos mallas de la Fig. 9-13 para la red del puente, difícilmente luce menos probable que las tres mallas de la Fig. 9-7 y los estudiantes podrían razonablemente

14. Eliminación de nodos o mallas

En la solución práctica de problemas por el método de nodos, el potencial de ciertos nodos puede no ser interesante y por lo tanto no ser necesario su cálculo. Esto acortará la solución. Considerérese por ejemplo la red del puente de Maxwell mostrada en la Fig. 9-14.

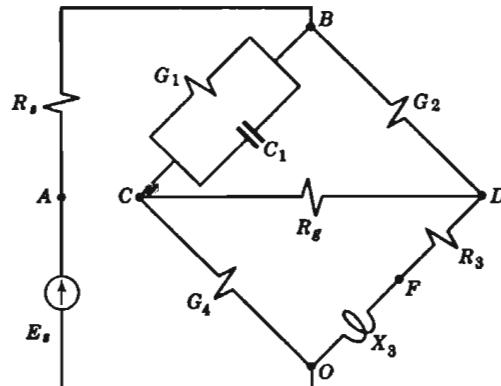


FIG. 9-14. Red del puente de Maxwell

En esta red hay nueve elementos. Existen seis nodos y por lo tanto cinco nodos independientes. El número de mallas independientes debe ser por supuesto $9 - 5 = 4$ e inclusive son evidentes las cuatro mallas.

Sin embargo, el nodo F probablemente no es necesario. De hecho, si R_3 y X_3 son la resistencia y reactancia de una bobina única, el nodo F no tiene existencia física. El nodo F puede eliminarse de la red sin pérdida de información. Para hacer esto, substitúyase entre los nodos D y O un par de elementos en paralelo (como en la Fig. 9-15) que son equivalentes a R_3 y X_3 en serie. Los valores equivalentes se encuentran utilizando las ecuaciones familiares (Ecs. 3-67 y 68):

$$G_3 = \frac{R_3}{R_3^2 + X_3^2} \quad \text{y} \quad B_3 = -\frac{X_3}{R_3^2 + X_3^2} \quad (9-40)$$

intentar resolver la red del puente con únicamente estas dos mallas. Se obtendría una respuesta, y no es obvio que esta respuesta obtenida sea errónea. Una respuesta correcta resulta, si cualquier tercer malla se considera junto con las dos mostradas en la Fig. 9-13.

Otra alternativa, posiblemente más fácil de cálculo es encontrar G_3 y B_3 de

$$G_3 + jB_3 = Y_3 = \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{R_3 + jX_3} \quad (9-41)$$

Cuando esto se hace así, como en la Fig. 9-15, se tiene un nodo menos pero una malla más. El método de nodos para resolver se hace, por tanto, más fácil, aunque la solución por malla se hacía más difícil con este cambio.

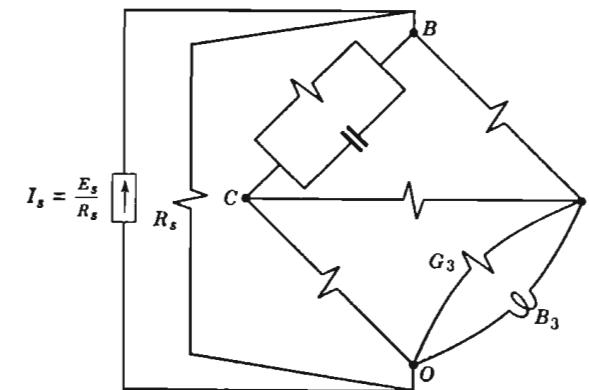


FIG. 9-15. Red equivalente al puente de Maxwell con dos nodos menos

El nodo A de la Fig. 9-14 también puede eliminarse. Como en la Ec. 6-26 una fuente de voltaje E_s en serie con la resistencia R_s , es equivalente a una fuente de corriente I_s en paralelo con la misma resistencia suponiendo que $I_s = E_s/R_s$. La sustitución de tal fuente de corriente por la fuente original de voltaje se indica en la Fig. 9-15. Probablemente no hay pérdida de información en eliminar el nodo A , porque presumiblemente E_s es la fuerza electromotriz y R_s es la resistencia interna de una batería o generador y el nodo A no tiene resistencia real. Sin embargo, aunque un nodo existe de hecho, podemos eliminarlo de las ecuaciones por estos métodos suponiendo que no sea una unión. Su voltaje puede encontrarse después, si se desea, de la impedancia conocida y la corriente.

Cualquier nodo que no sea una unión, puede por tanto, eliminarse hasta que el número de nodos independientes se reduzca al número de uniones independientes que en la Fig. 9-14 ó 9-15 es de tres. Unicamente tres ecuaciones de nodos simultáneas quedarán por resolver en lugar de cinco.

Si por otro lado, se van a usar ecuaciones de malla para la red de la Fig. 9-14, estos cambios no se harán. En su lugar, la malla consistente de G_1 y C_1 podrá, quizás, eliminarse. Podemos substituir un par equivalente de elementos en serie, reduciendo la red a tres mallas. La solución requerirá entonces únicamente tres ecuaciones simultáneas.

La resolución para tres corrientes de malla (habiéndose eliminado la malla consistente de G_1 y C_1) nos dará un valor para la corriente que pasa por la rama del puente entre B y C , pero no nos dirá cómo se divide la corriente entre G_1 y C_1 . Sin embargo, la división de la corriente, está en proporción a las admitancias (Ec. 5-15) y las corrientes individuales pueden calcularse fácilmente si se requiere.

15. Dualidad

Prosigamos con la dualidad que fue presentada en la Sec. 14 del Cap. 7. Ahora podemos decir que dos redes se llaman duales, si las ecuaciones de malla de una tienen la misma forma que las

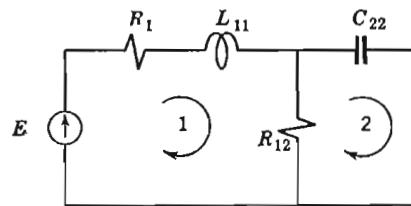


FIG. 9-16. Red de dos mallas

ecuaciones de nodo de la otra.* Entonces, las redes de las Figs. 9-4 y 9-10 son duales, porque las ecuaciones de malla de la primera Ec. 9-9, y las ecuaciones de nodo de la última, Ec. 9-36, son de la misma forma.

* Dos ecuaciones son "de la misma forma", si por medio de un mero cambio de símbolos, pueden hacerse idénticas. Así, para el matemático puro que no da significado físico a los símbolos, las Ecs. 9-42 y 9-43 son las mismas porque pueden hacerse idénticas escribiendo G por R , C por L , L por C , V por I e I por E . (Porque el que V , o una E o una I sea positiva o negativa, es por supuesto inmaterial para la forma de la ecuación).

Las redes de las Figs. 9-16 y 9-17 son también duales, como demostraremos. Las ecuaciones de malla para la primera se escriben de la manera usual:

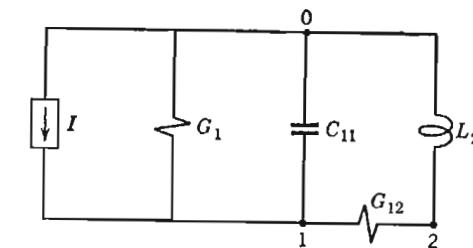


FIG. 9-17. Red de dos pares de nodos, dual de la Fig. 9-16

$$(R_1 + R_{12} + j\omega L_{11})I_1 - R_{12}I_2 = E \quad (9-42)$$

$$-R_{12}I_1 + \left(R_{12} - j\frac{1}{\omega C_{22}} \right) I_2 = 0$$

Por comparación, las ecuaciones de nodo de la Fig. 9-17 son:

$$(G_1 + G_{12} + j\omega C_{11})V_1 - G_{12}V_2 = I \quad (9-43)$$

$$-G_{12}V_1 + \left(G_{12} - j\frac{1}{\omega L_{22}} \right) V_2 = 0$$

La similitud de forma de las ecuaciones es evidente. En detalle, reconocemos una dualidad entre elementos. En la siguiente lista, los elementos de la misma línea son duales uno de otro:

resistencia
inductancia
voltaje

conductancia
capacitancia
corriente

Existe una regla para encontrar la dual de una red; se ilustra en la Fig. 9-18 y es como sigue: En el diagrama de la red, márquese un nodo para la red dual, dentro de cada malla de la red original y un nodo más (para hacer el nodo de referencia) fuera de todas las mallas de la red original. A través de cada elemento de la red original, dibújese una línea; cada una de estas líneas terminará en los nodos que se acaban de indicar justamente para la red dual. Cada una de estas líneas representa un elemento de red dual que es por sí mismo, dual del elemento original a través del cual fue

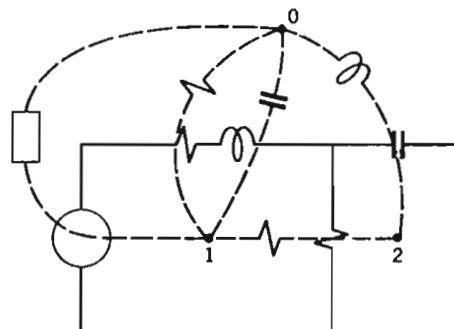


FIG. 9-18. Derivación de la Fig. 9-17 de la Fig. 9-16

dibujada la línea. Esto es, si la línea se dibuja a través de una capacitancia, el elemento de la red dual es una inductancia; si se dibuja a través de una fuente de voltaje constante será, una fuente de corriente constante; y así sucesivamente de acuerdo con la lista anterior.

La dualidad es una forma de analogía. Dos sistemas físicos de diferente naturaleza, como un circuito eléctrico y un péndulo, por ejemplo, se llaman análogos (pero no duales) si su acción está descrita por ecuaciones de la misma forma. Si dos sistemas físicos de la misma naturaleza, tales como dos redes eléctricas, tienen ecuaciones de la misma forma pero son físicamente diferentes (como las redes de la Fig. 9-16 y 9-17, por ejemplo) se llaman duales. Con redes eléctricas, la dualidad aparece entre las ecuaciones de malla de una, y las ecuaciones de nodo de la otra. Los sistemas mecánicos duales existen tanto como los sistemas eléctricos duales. (Para una discusión más amplia, ver el Gardner y Barnes, Ref. 18, o el Guillemin, Ref. 12).

16. Sumario

Este capítulo comienza con las ecuaciones de rama, pero la mayoría de él está dedicado a las ecuaciones de malla y nodo. Una de las partes más importantes del análisis de las redes, es la escritura hábil, tanto de las ecuaciones de malla como las de nodo. La formulación de estas ecuaciones, más que su solución, es el objeto de este capítulo. En el Cap. 10 consideraremos su solución.

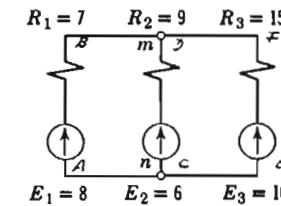
Estas ecuaciones de nodo y malla proveen un método práctico de resolver problemas específicos de circuitos. Pero ellas hacen

más; nos dan una libertad valiosa y magnífica de lo específico. Hasta ahora, estábamos limitados a determinar que una red particular se comportaba de una cierta manera, o a lo más, que todas las redes que habíamos tratado se comportaban de ese modo. De aquí en adelante, seremos capaces de encontrar reglas que se apliquen a todas las redes, tanto a las que nunca habíamos pensado como a las que tenemos. Porque si alguna regla puede deducirse de las ecuaciones de malla formales 9-14, o de las ecuaciones de nodo formales 9-35, y puesto que estos juegos de ecuaciones se aplican a todas las redes, la regla también se aplicará a todas las redes. Este será nuestro trabajo en el Cap. 11.

En conclusión, se ha llamado la atención al hecho de que casi todas las discusiones de este capítulo, se aplican generalmente, tanto a corriente alterna como a directa. Los elementos se han mostrado usualmente (excepto en los ejemplos numéricos) sin especificaciones de si son resistivos, inductivos o capacitivos. Los principios envueltos son los mismos en cualquier caso.

P R O B L E M A S

- ✓ 1. Encontrar la corriente en cada resistencia de la red mostrada. Utilícese el método de ramas; asegúrese de escribir tres ecuaciones de rama y tres ecuaciones de conexión. § 3



Prob. 1

2. Encontrar la corriente en cada resistencia de la red de la Fig. 9-4. Utilícese el método de rama; asegúrese de escribir tres ecuaciones de rama y tres ecuaciones de conexión. § 3

3. Repítase el problema 1, utilizando el método de malla. § 5

4. En el ejemplo de la Sec. 7, el puente se balancearía si R_x fuese 0.5 ohm. Para encontrar el efecto del balance, hágase $R_x = 0.5 + r$ y resuélvase para I_x en función de r . ¿La corriente del galvanómetro es proporcional al desbalance? § 7

5. Repítase el ejemplo de la Sec. 7, utilizando el método de

malla, pero seleccionando mallas diferentes de los utilizados en la Fig. 9-5 ó 6. § 7

6. Resuélvase para la corriente en cada rama de la Fig. 9-4, utilizando el método de malla, después hágase el siguiente cambio de la red: Z_b es ahora $j3$ ohms de reactancia en lugar de 3 ohms de resistencia. E_1 y E_2 están en fase una con otra. § 5

7. Escribanse las ecuaciones de malla para el circuito mostrado con el problema 21 del Cap. 8, estando el voltaje V_1 aplicado por una fuente conectada a las terminales. § 7

8. Resuélvanse las ecuaciones del problema número 7, para la corriente de entrada I , en función del voltaje V_1 , a la frecuencia $\omega = 10^5$. Encontrar la impedancia de entrada (V_1/I_1). § 7

9. Las ecuaciones de malla de una red son:

$$8I_1 - 5I_2 - I_3 = 110/0^\circ$$

$$-5I_1 + 12I_2 = 0$$

$$-I_1 + 7I_3 = 115/0^\circ$$

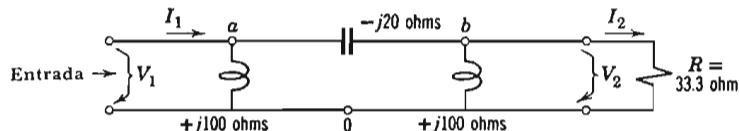
(a) Dibujar la red marcando cuidadosamente cada elemento. (b) Calcular la corriente en la fuente de 115 volts. § 7

10. Doce ecuaciones de rama se dan como las Ecs. 9-1, 2 y 3 de la red del puente de la Fig. 9-3. Las Ecs. 9-16 son las ecuaciones de malla para la misma red (con símbolos diferentes). Demostrar que la manipulación algebraica de las ecuaciones de rama nos llevará a las ecuaciones de malla (cambiando los símbolos a su debido tiempo). § 7

11. Escribir las ecuaciones de nodo para la red de la Fig. 9-10 con el nodo A (en lugar del nodo O) utilizándolo como nodo de referencia. § 9

12. Escribir las ecuaciones de nodo para la red mostrada. Resuélvanse las ecuaciones de nodo para V_1 en función de I_1 y calcúlese la impedancia de entrada. § 11

13. (a) Escribir las ecuaciones de malla para la red mostrada. Resuélvanse las ecuaciones de malla para I_1 en función de V_1 y



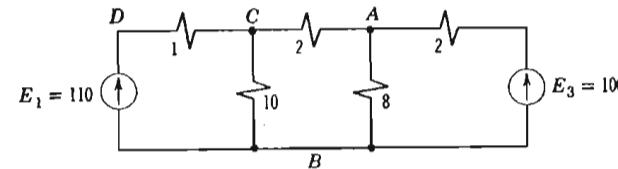
Probs. 12 y 13

calcúlese la impedancia de entrada. (b) Utilizando el método de escalera calcúlese la impedancia de entrada de la red. Dibujar un diagrama fasorial a escala aproximada mostrando V_1 , V_2 , V_{ab} ; I_1 , I_2 , I_{ab} , I_{ba} e I_{ao} . § 11

14. En la red de la Fig. 9-10, $Y_b = 6$, $Y_c = 3$ e $Y_d = 2$ mhos. $I_a = 36$ amperes e $I_r = 8$ amperes. Escribanse y resuélvanse las ecuaciones de nodo; encontrar V_{AB} . § 9

15. Escribir las ecuaciones de malla para la red de la Fig. 9-10 (en función de las corrientes de la fuente) utilizando los valores numéricos del problema 14 y resolviendo; encontrar V_{AB} . § 12

16. En el diagrama, las resistencias están marcadas en ohms, la fuerza electromotriz en volts. Encontrar la magnitud y dirección de voltaje entre las terminales de la resistencia de 8 ohms (a) escribiendo y resolviendo las ecuaciones de malla, y (b) cambiando las fuentes a fuentes de corriente y escribiendo y resolviendo las ecuaciones de nodo. ¿Qué es más fácil? § 12



Prob. 16

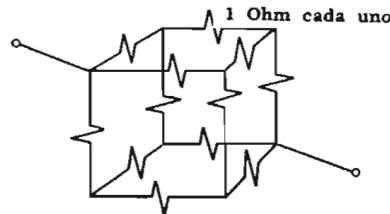
17. ¿Cuántos elementos, nodos independientes y mallas independientes hay en las Figs. 9-1, 9-14, 9-15, 10-4a, 10-3? Cuéntense las mallas cortando, y compruébense con la Ec. 9-39. § 13

18. El puente de Maxwell de la Fig. 9-14 se utiliza para medir R_3 y X_3 , resistencia y reactancia desconocidas de una bobina. Escribase (no resuelva) las ecuaciones de nodo para la red modificada mostrada en la Fig. 9-15. § 14

19. (a) Dibújese la dual de la red del puente de la Fig. 9-3. (b) Dibújese la dual de la red de la Fig. 9-10; entonces encuéntrese la dual de la dual. ¿Recobró Ud. la Fig. 9-10? (c) Dibújese la dual del puente de Maxwell, Fig. 9-14. ¿El resultado es un puente de Maxwell? § 15

20. Doce resistencias, de 1 ohm cada una, están arregladas a lo largo de las aristas de un cubo con las uniones en los vértices. ¿Qué resistencia se mediría entre las terminales de esquinas opuestas si-

métricamente del cubo? Use cualquier método o maña que se le ocurra a usted.



Prob. 20

Problemas adicionales. Utilice los métodos de malla o nodo para resolver los problemas 5-14, 5-15, 5-16, 5-17, 6-2, 6-3, 6-4, 6-5, 6-6, 6-11.

10

Solución de las Ecuaciones de Red

1. Solucion de ecuaciones de mallas

Cuando se utiliza el método de mallas existen L ecuaciones simultáneas de mallas, siendo L el número de mallas independientes. Están dadas por las Ecs. 9-14 y se repiten aquí:

$$\begin{aligned} Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + Z_{13}I_3 + \cdots + Z_{1L}I_L &= E_1 \\ Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + Z_{23}I_3 + \cdots + Z_{2L}I_L &= E_2 \\ Z_{31}I_1 + Z_{32}I_2 + Z_{33}I_3 + \cdots + Z_{3L}I_L &= E_3 \\ \vdots &\quad \vdots \\ Z_{L1}I_1 + Z_{L2}I_2 + Z_{L3}I_3 + \cdots + Z_{LL}I_L &= E_L \end{aligned} \quad (10-1)$$

Las Z y E mayúsculas se conocen, las corrientes deben encontrarse. Existen L corrientes desconocidas.

Utilizando la regla de Cramer (si no es familiar, ver Apéndice 1) cada corriente es la razón de los determinantes. I_1 , por ejemplo, es

$$I_1 = \frac{N_1}{D} \quad (10-2)$$

donde el denominador D es el determinante

$$D = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & \cdots & Z_{1L} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & \cdots & Z_{2L} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & \cdots & Z_{3L} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Z_{L1} & Z_{L2} & Z_{L3} & \cdots & Z_{LL} \end{vmatrix} \quad (10-3)$$

y el numerador N_1 es el determinante

$$N_1 = \begin{vmatrix} E_1 & Z_{12} & Z_{13} & \cdots & Z_{1L} \\ E_2 & Z_{22} & Z_{23} & \cdots & Z_{2L} \\ E_3 & Z_{32} & Z_{33} & \cdots & Z_{3L} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ E_L & Z_{L2} & Z_{L3} & \cdots & Z_{LL} \end{vmatrix} \quad (10-4)$$

N_1 puede desarrollarse parcialmente y la expresión para I_1 será

$$I_1 = \frac{N_1}{D} = \frac{E_1 \Delta_{11}}{D} + \frac{E_2 \Delta_{21}}{D} + \frac{E_3 \Delta_{31}}{D} + \cdots \quad (10-5)$$

Δ_{11} es el cofactor (el menor con signo apropiado) de E_1 en la Ec. 10-4, o de Z_{11} en la Ec. 10-3; Δ_{21} es el cofactor de E_2 , o de Z_{21} , y así sucesivamente. (Si esto no está claro, ver Apéndice 1). Así, por ejemplo,

$$\Delta_{21} = - \begin{vmatrix} Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} & \cdots & Z_{1L} \\ Z_{32} & Z_{33} & Z_{34} & \cdots & Z_{3L} \\ Z_{42} & Z_{43} & Z_{44} & \cdots & Z_{4L} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Z_{L2} & Z_{L3} & Z_{L4} & \cdots & Z_{LL} \end{vmatrix} \quad (10-6)$$

De una manera similar, la regla de Cramer nos da para I_2 :

$$I_2 = \frac{N_2}{D} = \frac{E_1 \Delta_{12}}{D} + \frac{E_2 \Delta_{22}}{D} + \frac{E_3 \Delta_{32}}{D} + \cdots \quad (10-7)$$

siendo Δ_{12} el cofactor de Z_{12} , y así sucesivamente. Δ_{12} , por ejemplo, es

$$\Delta_{12} = - \begin{vmatrix} Z_{21} & Z_{23} & Z_{24} & \cdots & Z_{2L} \\ Z_{31} & Z_{33} & Z_{34} & \cdots & Z_{3L} \\ Z_{41} & Z_{43} & Z_{44} & \cdots & Z_{4L} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Z_{L1} & Z_{L3} & Z_{L4} & \cdots & Z_{LL} \end{vmatrix} \quad (10-8)$$

I_3 y otras corrientes pueden expresarse en arreglos de forma similar. La solución para las corrientes de la red se completa ahora, de una manera formal. Tratemos de ver qué significa.

2. Admitancias impulsora y de transferencia

La apariencia de las Ecs. 10-5 y 10-7 puede simplificarse introduciendo nuevos símbolos. Introduzcamos las y que se definen para tener los siguientes significados:

$$y_{11} = \frac{\Delta_{11}}{D} \quad y_{12} = \frac{\Delta_{21}}{D} \quad y_{13} = \frac{\Delta_{31}}{D} \quad \dots$$

$$y_{21} = \frac{\Delta_{12}}{D} \quad y_{22} = \frac{\Delta_{22}}{D} \quad y_{23} = \frac{\Delta_{32}}{D} \quad \dots$$

Las ecuaciones para I_1 , I_2 y las otras corrientes quedan simplemente

$$I_1 = y_{11}E_1 + y_{12}E_2 + \cdots + y_{1L}E_L$$

$$I_2 = y_{21}E_1 + y_{22}E_2 + \cdots + y_{2L}E_L \quad (10-10)$$

Estas y son tan significativas que se les han dado nombres especiales. Si los dos subíndices son iguales como y_{11} y y_{22} , se llaman admitancias impulsoras. Si los subíndices son diferentes se llaman admitancias de transferencia. La razón para estos nombres se verá cuando consideremos los significados físicos de estas cantidades.

Para tener algo específico que considerar, nos referiremos a la red de dos mallas de la Fig. 10-1. En una red de dos mallas existen únicamente dos ecuaciones de malla y consecuentemente las soluciones para la corriente en las Ecs. 10-10 tienen solamente dos términos cada una:

$$I_1 = y_{11}E_1 + y_{12}E_2 \quad (10-11)$$

$$I_2 = y_{21}E_1 + y_{22}E_2 \quad (10-12)$$

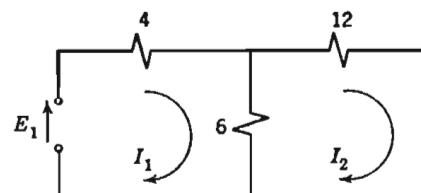


FIG. 10-1. Red de dos mallas, los valores de resistencia se muestran en ohms

Si como se indica en el diagrama, existe una fuerza electromotriz E_1 en la malla 1, pero no existe fuerza electromotriz en la malla 2 (haciendo $E_2 = 0$), las Ecs. 10-11 y 10-12 para la corriente son únicamente

$$I_1 = y_{11}E_1 \quad (10-13)$$

$$I_2 = y_{21}E_1 \quad (10-14)$$

Supongamos ahora, que la admitancia se mide en las terminales E_1 de la red: la admitancia de entrada que entra a la red sería I_1/E_1 . Pero la Ec. 10-13 nos dice que I_1/E_1 es igual a y_{11} . Esto es, y_{11} , la admitancia impulsora como se definió en las Ecs. 10-9, es la admitancia vista por una fuente de fuerza electromotriz, localizada en la malla en cuestión. Es la razón de la corriente en una malla dada, a la fuerza electromotriz en la misma malla, cuando no hay fuerzas electromotrices en ninguna otra malla de la red. Este es el significado físico de la *admitancia impulsora*.

La *admitancia de transferencia* es la razón de la corriente en alguna otra malla a la fuerza electromotriz impulsora. Así, en la Fig. 10-1 y la Ec. 10-14, y_{21} es la razón de la corriente I_2 producida en la malla 2 a la fuerza electromotriz E_1 que está en la malla 1. La admitancia y_{21} debería medirse en la red de la Fig. 10-1 midiendo I_2 y E_1 (con el ángulo de fase apropiado si la corriente es alterna) y dividiendo una entre otra.

Si la red tiene una tercera malla, podría también haber una admitancia de transferencia y_{31} ; ésta sería la razón de la corriente en la malla 3 producida por la fuerza electromotriz en la malla 1 a la fuerza electromotriz en la malla 1. También, podría haber una y_{32} .

Deben notarse particularmente que estas interpretaciones y_{11} y y_{21} , como admitancia impulsora y de transferencia tienen significado únicamente en redes con una sola fuerza electromotriz que está localizada en solamente una malla. Fue la eliminación de todas las fuentes menos E_1 lo que permitió que se escribieran las Ecs. 10-13

y 10-14. La fuerza electromotriz impulsora puede considerarse que existe en cualquier malla de la red, pero solamente debe existir en una sola malla, en el momento en que las mediciones anteriores de admitancia impulsora y de transferencia se hagan.* Por supuesto, y_{11} y y_{21} están definidas por las Ecs. 10-9 tanto si hay una, o muchas fuentes.

3. Ejemplo

Es enteramente posible utilizar los métodos de la sección anterior para resolver problemas numéricos, sin embargo, su gran valor está en el trabajo teórico. Tomemos la red de dos mallas mostrada en la Fig. 10-1 como un ejemplo, y calculemos las corrientes por medio de las admitancias impulsora y de transferencia.

Sean las tres impedancias de la red resistencias pures con los valores mostrados en la figura. El voltaje E_1 es 24 volts. †

La autoimpedancia de la malla 1 es la suma de las dos resistencias en la malla: $Z_{11} = 10$. La autoimpedancia de la malla 2 es 18. Las ecuaciones de malla son

$$\begin{aligned} 10I_1 - 6I_2 &= 24 \\ -6I_1 + 18I_2 &= 0 \end{aligned} \quad (10-15)$$

Las Ecs. 10-13 y 10-14 dan la solución para las corrientes. Para utilizar estas ecuaciones debemos encontrar y_{11} y y_{21} como están definidas en las Ecs. 10-9. Ambas admitancias, la impulsora y la de transferencia, tienen el siguiente determinante en sus denominadores:

$$D = \begin{vmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 18 \end{vmatrix} = 180 - 36 = 144 \quad (10-16)$$

* El objeto de este párrafo es limitar esta discusión a "redes de un par de terminales" que son redes pasivas con solamente un par de terminales a las que puede aplicarse la fuente. Posteriormente, nuestra discusión de "redes de dos pares de terminales", se usará una fraseología similar pero será necesario estipular condiciones para el par de terminales no impulsor, y necesitaremos entonces términos como "admitancia impulsora de corto circuito" o "admitancia de transferencia de corto circuito".

† Nótese que no tiene importancia qué clase de fuente de 24 volts pueda ser. Podría ser un generador de voltaje constante, que diera siempre 24 volts pueda ser. Podría ser un generador de voltaje constante que diera siempre 24 volts en sus terminales, pero no es necesario. Podría ser cualquier clase de generador, con o sin impedancia asociada; incluso podría ser un generador de corriente constante. Todo lo que sabemos y necesitamos saber es que bajo las condiciones de este problema se mantienen 24 volts en las terminales mostradas.

El cofactor Δ_{11} de este determinante (obtenido después de eliminar la primera fila y la primera columna) es 18. El cofactor Δ_{12} (obtenido al eliminar la primera fila y la segunda columna y cambiando de signo) es 6. Por lo tanto

$$\begin{aligned} y_{11} &= \frac{\Delta_{11}}{D} = \frac{18}{144} = \frac{1}{8} \\ y_{21} &= \frac{\Delta_{12}}{D} = \frac{6}{144} = \frac{1}{24} \end{aligned} \quad (10-17)$$

Entonces, las corrientes de malla según las Ecs. 10-13 y 10-14 son

$$\begin{aligned} I_1 &= y_{11}E = \frac{1}{8} \cdot 24 = 3 \text{ amperes} \\ I_2 &= y_{21}E = \frac{1}{24} \cdot 24 = 1 \text{ ampere} \end{aligned} \quad (10-18)$$

La corriente en la resistencia de 6 ohms es $I_1 - I_2 = 3 - 1 = 2$ amperes. Todas las corrientes se conocen ahora.

Se reconocerá que existen otros medios posiblemente más simples de encontrar la corriente en estas mallas. Esto no es importante; el hecho importante es, qué podemos ver aquí, exactamente, qué se quiere decir con la admitancia impulsora; $\frac{1}{6}$ mho en este ejemplo, la razón de I_1 a E_1 y con la admitancia de transferencia, aquí $\frac{1}{24}$ mho, la razón de I_2 a E_1 .

También, se encontrará posteriormente lo valioso que es este método general al adaptarse para el uso en computadoras electrónicas que resolverán problemas de redes extremadamente complicadas muy rápidamente. El corazón de este método de solución, es claramente el cálculo de una determinante y ciertos menores, y esto es un trabajo que puede hacerse automáticamente.

Hemos ahora visto, que las y de las Ecs. 10-10 tienen un significado físico simple. No es necesario pensar más en ellas como razones abstractas de determinantes, como lo hicimos cuando escribimos sus definiciones en las Ecs. 10-9. Esto es una ventaja práctica, así como una ayuda para su comprensión. Porque quiere decir que en un par de ecuaciones como 10-11 y 10-12, por ejemplo, los valores de las y pueden determinarse por medición; no es necesario medir las Z de las Ecs. 10-1 y obtener las y a lo largo de un cálculo muy largo, por medio de las Ecs. 10-5 y 10-7. Ahora nosotros podemos, si tenemos la red física enfrente, medir únicamente las y mismas.*

* Debe entenderse claramente que y_{11}, y_{21}, \dots (admitancias impulsora y de transferencia) no son la misma cosa que Y_{AA}, Y_{AB}, \dots (admitancias, autoadmitancia y admitancia mu-

4. Matrices

Cuando se aplican fuerzas electromotrices a las impedancias de una red, resultan corrientes. Las ecuaciones de malla, Ecs. 10-1, relacionan las fuerzas electromotrices, impedancias y corrientes. En el segundo miembro de las Ecs. 10-1 vemos las fuerzas electromotrices, que pueden separarse de las ecuaciones y colocarse para presentar una formación como ésta:

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ \vdots \\ E_L \end{bmatrix} \quad (10-19)$$

Se han colocado entre paréntesis cuadrados, únicamente para indicar que es una formación de fuerzas electromotrices, como si estuviesen en un escaparate.

Las impedancias son coeficientes de los términos del primer miembro de las Ecs. 10-1. Podemos tomarlos también y colocarlos en un escaparate:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & \cdots & Z_{1L} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & \cdots & Z_{2L} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & \cdots & Z_{3L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{L1} & Z_{L2} & Z_{L3} & \cdots & Z_{LL} \end{bmatrix} \quad (10-20)$$

Estas son las impedancias que nos dicen, cómo se comportará la red cuando se aplican fuerzas electromotrices a ella. Muestran una especie de heliográfica abstracta de la red. Este arreglo tiene la forma de las ecuaciones de malla. Los paréntesis cuadrados indican que las Z encerradas constituyen un grupo relacionado, arreglado de un modo sistemático.

tua) que se presentaron en la Ec. 9-35. Y_{AB} y las otras designadas por letras mayúsculas, son las admitancias de ciertos elementos individuales de una red; usted puede señalar a un condensador y decir, "la admitancia de este condensador, conectado a los nodos A y B es Y_{AB} ". Las y , sin embargo, tal como se presentaron en esta sección, se refieren a las admitancias en las terminales de la red. Si una red tiene un par de terminales en la que se hace una medición, podemos hablar de "la admitancia impulsora en este par de terminales". Para estar seguro, las y pueden calcularse partiendo de las Y , pero no existe una relación simple.

Aunque este arreglo luce un poco como un determinante (como la Ec. 10-3) *no* es un determinante. Es simplemente una formación de los coeficientes de los términos de las Ecs. 10-1 en un orden sistemático. No pueden desarrollarse o evaluarse como un determinante. Realmente, no hay *nada* que podamos hacer con él en este momento, excepto verlo. Es interesante porque tiene la forma de las Ecs. 10-1.

Una formación como la 10-19 o 10-20 se llama una matriz.* La primera se llama una matriz columna, la última una matriz cuadrada.

Se ha encontrado útil, el tener un método abreviado de escritura. Aunque es conveniente referirnos al arreglo de las impedancias en 10-20, podíamos tener que escribir todo él cada vez que deseamos mencionarlo. Por tanto, para evitar problemas escribimos un símbolo único [Z] para representar todo el arreglo o matriz. Cada vez que veamos este símbolo [Z] reconoceremos que él representa un arreglo tal como el de la Ec. 10-20. Podemos poner que el símbolo y el arreglo son iguales, aunque esta igualdad no significa nada más, que [Z] es una manera abreviada de indicar la matriz:

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1L} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{L1} & Z_{L2} & \cdots & Z_{LL} \end{bmatrix} \quad (10-21)$$

5. Caracterización de una red

Puesto que la matriz de impedancia contiene toda la información acerca de las propiedades de impedancia de una red, se dice que caracteriza a la red.

Escribamos la matriz para la red de dos mallas de la Fig. 10-1:

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \quad (10-22)$$

Esta matriz 2×2 ("dos por dos") tiene cuatro elementos; sin embargo, solamente tres de ellos son diferentes, porque (si se refiere a una red bilateral) $Z_{21} = Z_{12}$. Así, una red de dos mallas (si es bilateral) está caracterizada por tres coeficientes.

¿Ahora, de qué otro modo podemos caracterizar una red? Veamos las Ecs. 10-11 y 10-12. Los coeficientes de estas ecuaciones pueden colocarse en un arreglo similar o matriz:

* Matriz, plural matrices. Aquello que da forma... diccionario Webster.

$$[y] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \quad (10-23)$$

Esta matriz también caracteriza la red. Es una matriz 2×2 , con cuatro elementos. ¿Necesitamos cuatro *y* para caracterizar una red que puede caracterizarse por tres *Z*? Esto parece poco razonable y sugiere que investiguemos para ver si y_{12} puede ser igual a y_{21} .

6. Igualdad de admitancia de transferencia

Por definición, como se dio en las Ecs. 10-9, $y_{21} = \Delta_{12}/D$ y $y_{12} = -\Delta_{21}/D$. Claramente, y_{21} y y_{12} son iguales si Δ_{12} y Δ_{21} son iguales. Veamos si podemos demostrar que lo son.

Δ_{21} es un determinante, dado en la Ec. 10-6 como:

$$\Delta_{21} = - \begin{vmatrix} Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} & \cdots & Z_{1L} \\ Z_{22} & Z_{33} & Z_{34} & \cdots & Z_{3L} \\ Z_{42} & Z_{43} & Z_{44} & \cdots & Z_{4L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{L2} & Z_{L3} & Z_{L4} & \cdots & Z_{LL} \end{vmatrix} \quad (10-24)$$

Deseamos hacer éste como el determinante para Δ_{12} que está dado en la Ec. 10-8. El primer paso es tomar a Δ_{21} y cambiar Z_{12} por Z_{21} , Z_{13} por Z_{31} , y así sucesivamente; esto es permisible porque la discusión está limitada a una red de elementos bilaterales. El resultado es

$$\Delta_{21} = - \begin{vmatrix} Z_{21} & Z_{31} & Z_{41} & \cdots & Z_{L1} \\ Z_{23} & Z_{33} & Z_{43} & \cdots & Z_{L3} \\ Z_{24} & Z_{34} & Z_{44} & \cdots & Z_{L4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{2L} & Z_{3L} & Z_{4L} & \cdots & Z_{LL} \end{vmatrix} \quad (10-25)$$

A continuación, hagamos uso de un teorema de matemáticas puras, que dice que las filas y columnas de un determinante puede intercambiarse sin alterar el valor del determinante (ver "propiedades de los determinantes" en el Apéndice 1). Convirtiendo el determinante de la Ec. 10-25 filas \leftrightarrow columnas, y las columnas en filas, obtenemos

$$\begin{vmatrix} Z_{21} & Z_{23} & Z_{24} & \cdots & Z_{2L} \\ Z_{31} & Z_{33} & Z_{34} & \cdots & Z_{3L} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{21} = - \begin{vmatrix} Z_{41} & Z_{43} & Z_{44} & \cdots & Z_{4L} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ Z_{L1} & Z_{L3} & Z_{L4} & \cdots & Z_{LL} \end{vmatrix} \quad (10-26)$$

Que es idéntica al determinante para Δ_{12} según se vio en la Ec. 10-8, así, probamos que en una red de elementos bilaterales $\Delta_{12} = \Delta_{21}$ y por tanto $y_{21} = y_{12}$. Esto se aplica obviamente en general a las admittancias de transferencia entre dos mallas cualesquiera, y así puede escribirse

$$y_{pq} = y_{qp} \quad (10-27)$$

Puede parecer que es bastante trabajo, para una conclusión poco interesante. Sin embargo, esta conclusión se convertirá en una de gran importancia. Nos dice que tres valores de y (no cuatro) son suficientes para caracterizar la red de dos mallas. Esta es la base de el "teorema de reciprocidad" que se discutirá en el Cap. 11. El teorema de reciprocidad dice, que si usted intercambia una batería y un amperímetro en una red pasiva, no importa lo complicado, el amperímetro seguirá leyendo lo mismo que antes del cambio. Aún más, el mismo principio dice al ingeniero de radio que las características direccionales de una antena receptora son las mismas que las características direccionales de la misma antena cuando está siendo usada para transmitir, una relación altamente útil. (Ver por ejemplo, *Radio Engineering*, de Terman, Referencia 19).

7. Solución de las ecuaciones de nodo

Las últimas páginas estuvieron ocupadas con la solución de las ecuaciones de malla en su forma más general. A continuación, debemos considerar la solución de las ecuaciones generales de nodos, porque éstas son tan importantes y tan útiles como las ecuaciones de malla. Las ecuaciones generales de nodos se escribieron en el capítulo previo como las Ecs. 9-35 y son

$$\begin{aligned} Y_{AA}V_A + Y_{AB}V_B + Y_{AC}V_C + \cdots + Y_{AN}V_N &= I_A \\ Y_{BA}V_A + Y_{BB}V_B + Y_{BC}V_C + \cdots + Y_{BN}V_N &= I_B \\ Y_{CA}V_A + Y_{CB}V_B + Y_{CC}V_C + \cdots + Y_{CN}V_N &= I_C \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_{NA}V_A + Y_{NB}V_B + Y_{NC}V_C + \cdots + Y_{NN}V_N &= I_N \end{aligned} \quad (10-28)$$

Después de que acabamos de terminar la solución de las ecuaciones de malla en detalle, es aparente que la solución de las ecuaciones de nodo para los voltajes de nodo es

$$\begin{aligned} V_A &= z_{AA}I_A + z_{AB}I_B + \cdots + z_{AN}I_N \\ V_B &= z_{BA}I_A + z_{BB}I_B + \cdots + z_{BN}I_N \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{aligned} \quad (10-29)$$

donde

$$\begin{aligned} z_{AA} &= \frac{\Delta_{AA}}{\Delta} & z_{AB} &= \frac{\Delta_{BA}}{\Delta} & z_{AC} &= \frac{\Delta_{CA}}{\Delta} & \cdots \\ z_{BA} &= \frac{\Delta_{AB}}{\Delta} & z_{BB} &= \frac{\Delta_{BB}}{\Delta} & z_{BC} &= \frac{\Delta_{CB}}{\Delta} & \cdots \end{aligned} \quad (10-30)$$

En estas expresiones, el denominador es el determinante derivado de las Ecs. 10-28:

$$\Delta = \begin{vmatrix} Y_{AA} & Y_{AB} & \cdots & Y_{AN} \\ Y_{BA} & Y_{BB} & \cdots & Y_{BN} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_{NA} & Y_{NB} & \cdots & Y_{NN} \end{vmatrix} \quad (10-31)$$

y los numeradores son los cofactores apropiados de este determinante.

Las Ecs. 10-29 dan los potenciales V_A , V_B , etc., en los nodos de una red en función de la admittance de los elementos de la red y de las corrientes que se imprimen a esta red. La similaridad de esta solución con la solución para las corrientes de malla es una ilustración de la *dualidad*.

Tal como resolvimos para las corrientes de malla en la Sección 2 en función de las admittancias *impulsora* y de *transferencia*, aquí resolveremos para los voltajes de los nodos en función de las impedancias impulsoras y de transferencia. La impedancia impulsora son z_{AA} , z_{BB} y los otros coeficientes de las Ecs. 10-29 con subíndices similares; las impedancias de transferencia son z_{AB} , z_{CB} y otros coeficientes con subíndices diferentes.

Las impedancias impulsora y de transferencia están definidas por las Ecs. 10-30. Su *significado físico* puede deducirse de las Ecs. 10-29. Supóngase una red; la red de la Fig. 10-2 puede servir como un ejemplo simple. La corriente I_A está producida por una fuente entre los nodos A y el nodo de referencia de la red. No existen otras fuentes así I_B , I_C , etc., en las Ecs. 10-29 son todas cero. Por lo tanto, $V_A = z_{AA}I_A$, de donde $z_{AA} = V_A/I_A$. Esto significa que si una red pasi-

va tiene un par de terminales A y O , la razón del voltaje a la corriente en estas terminales es la impedancia impulsora z_{AA} ; ésta es la impedancia que sería medida por un puente u otro artificio de medición conectado a dichas terminales. Este es el significado de la impedancia impulsora.

La impedancia de transferencia entre B y A es similarmente la razón del voltaje en el nodo B a la corriente de la fuente en el nodo A , no existiendo otras fuentes en la red. Esto se obtiene de la segunda de las Ecs. 10-29 cuando I_B , I_C , etc., se hacen cero, porque entonces $V_B = z_{BA}I_A$. De aquí, $z_{BA} = V_B/I_A$.

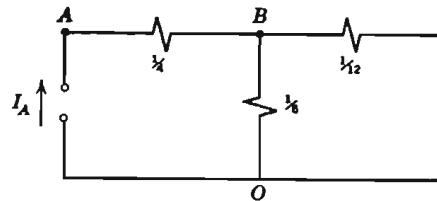


FIG. 10-2. Red con dos nodos independientes. Los valores de conductancias se muestran en mhos

Es evidente de esta interpretación física que la impedancia impulsora (tal como z_{AA}) en un par de terminales y la admitancia impulsora (tal como y_{11}) en el mismo par de terminales son cantidades recíprocas, porque una es la razón del voltaje a la corriente y la otra es la razón de la misma corriente al voltaje. (Esto supone que, como en la Fig. 10-2, las terminales están en los nodos A y O , y ambas están en la malla 1 solamente). Deberá notarse cuidadosamente, sin embargo, que no existe una relación simple entre las impedancias de transferencia y las admitancias de transferencia; estas *no* son recíprocas una de otra *

8. Ejemplo

Encontremos los voltajes de nodo en la red de la Fig. 10-3. Primero se escriben las tres ecuaciones de nodo. La forma general de las Ecs. 10-28, es

* Es sumamente necesario tener cuidado otra vez, en que z_{11} y las otras z son totalmente diferentes de Z_{11} y las otras Z utilizadas, por ejemplo, en las Ecs. 10-1 y más recientemente en la Ec. 10-26. La nota al pie de la página 338 hace énfasis en el mismo hecho para el uso indeterminado de y y Y .

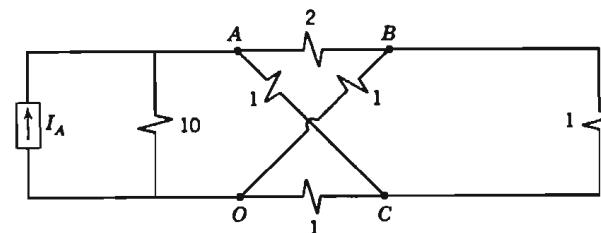


FIG. 10-3. Red de celosía. Las conductancias se muestran en mhos

$$\begin{aligned} Y_{AA}V_A + Y_{AB}V_B + Y_{AC}V_C &= I_A \\ Y_{BA}V_A + Y_{BB}V_B + Y_{BC}V_C &= I_B \\ Y_{CA}V_A + Y_{CB}V_B + Y_{CC}V_C &= I_C \end{aligned} \quad (10-32)$$

Sustituyendo los valores numéricos para esta red particular:

$$\begin{aligned} 13V_A - 2V_B - 1V_C &= I_A \\ -2V_A + 4V_B - 1V_C &= I_B \\ -1V_A - 1V_B + 3V_C &= I_C \end{aligned} \quad (10-33)$$

Refiriéndonos a la Ec. 10-31, el primer paso en la solución es escribir

$$\Delta = \begin{vmatrix} Y_{AA} & Y_{AB} & Y_{AC} \\ Y_{BA} & Y_{BB} & Y_{BC} \\ Y_{CA} & Y_{CB} & Y_{CC} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 123 \quad (10-34)$$

El cofactor de Y_{AA} es

$$\Delta_{AA} = \begin{vmatrix} Y_{BB} & Y_{BC} \\ Y_{CB} & Y_{CC} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 11 \quad (10-35)$$

Esos cofactores de Y_{AB} y Y_{AC} son, respectivamente,

$$\Delta_{AB} = - \begin{vmatrix} Y_{BA} & Y_{BC} \\ Y_{CA} & Y_{CC} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \quad (10-36)$$

$$\Delta_{AC} = \begin{vmatrix} Y_{BA} & Y_{BB} \\ Y_{CA} & Y_{CB} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 6 \quad (10-37)$$

Entonces, como en las Ecs. 10-30,

$$z_{AA} = \frac{\Delta_{AA}}{\Delta} = \frac{11}{123} \quad (10-38)$$

$$z_{BA} = \frac{\Delta_{AB}}{\Delta} = \frac{7}{123} \quad (10-39)$$

$$z_{CA} = \frac{\Delta_{AC}}{\Delta} = \frac{6}{123} \quad (10-40)$$

Las Ecs. 10-29 dan la solución formal para los voltajes. Se habrá visto que existen nueve coeficientes (las z minúsculas) en la solución general, pero nuestro presente problema está simplificado por el hecho de que I_B e I_C son cero; esto significa que seis de los coeficientes están multiplicados por cero y por lo tanto no necesitan calcularse. Utilizando las Ecs. 10-29:

$$\begin{aligned} V_A &= z_{AA}I_A + z_{AB}I_B + z_{AC}I_C = \frac{11}{123}I_A + 0 + 0 \\ V_B &= z_{BA}I_A + z_{BB}I_B + z_{BC}I_C = \frac{7}{123}I_A \\ V_C &= z_{CA}I_A + z_{CB}I_B + z_{CC}I_C = \frac{6}{123}I_A \end{aligned} \quad (10-41)$$

Estos son los voltajes de la red. Si se desean las corrientes, se encontrarán fácilmente de las diferencias de voltaje y las admitancias. Por ejemplo, la corriente que pasa por el elemento de un mho que representa la carga en la red de celosía es:

$$I_{BC} = (V_B - V_C)(1) = \frac{1}{123}I_A \quad (10-42)$$

Esta es la fracción de la corriente de entrada que alcanza la salida de la celosía.

Este ejemplo es el mismo, que el de la Sección 11, Cap. 9, aunque el diagrama se ha dibujado aquí como una celosía en lugar de como un puente. También, los nodos se han nombrado diferente para dar una elección más conveniente del nodo de referencia en el presente problema. La respuesta numérica, es, por lo tanto, la misma.

9. Matrices otra vez

Es para ahorrar trabajo de papel y lápiz, en problemas como el anterior para lo que se ha desarrollado el álgebra de las matrices. Veremos que en la notación abreviada de las matrices, las ecuaciones

de nodo, escritas completas, según las Ecs. 10-32, pueden abreviarse a

$$[Y][V] = [I] \quad (10-43)$$

y las ecuaciones de voltaje que constituyen la solución del problema, Ecs. 10-41, se convierten

$$[V] = [z][I] \quad (10-44)$$

Estas ecuaciones de matrices, por supuesto, no significan nada sin reglas apropiadas para su interpretación. Y si vamos a utilizar ecuaciones de matrices, tenemos que aprender ciertas reglas, y puesto que la notación de matrices se utiliza ahora comúnmente en publicaciones relacionadas con redes eléctricas, será valioso dedicar unas pocas páginas a algunos de los métodos básicos de matrices.*

¿Según qué reglas, la Ec. 10-43 puede interpretarse para que signifique lo mismo que la familia de Ecs. 10-32? Primero, la Ec. 10-43 se desarrolla escribiendo las matrices representadas por $[Y]$, $[V]$, e $[I]$. Siguiendo el patrón de las Ecs. 10-19 y 20 desarrollamos $[Y][V] = [I]$ a

$$\begin{bmatrix} Y_{AA} & Y_{AB} & Y_{AC} \\ Y_{BA} & Y_{BB} & Y_{BC} \\ Y_{CA} & Y_{CB} & Y_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} \quad (10-45)$$

Aquí se han escrito dos matrices, una matriz cuadrada y una matriz columna lado a lado. Se aplica la siguiente regla: cuando dos matrices tales se escriben lado a lado, se combinan en una sola matriz (en ese caso una matriz columna) por el siguiente proceso:

Multiplíquese el primer término de la primera fila de la matriz $[Y]$ por el primer término en la columna de la matriz $[V]$. Multiplíquese el segundo término de la primera fila de $[Y]$ por el segundo término en la columna de $[V]$. Multiplíquese el tercer término de la primera fila de $[Y]$ por el tercer término de la columna de $[V]$. La suma de los tres se escribe entonces como el primer término en la matriz columna:

$$[Y][V] = \begin{bmatrix} Y_{AA}V_A + Y_{AB}V_B + Y_{AC}V_C \\ Y_{BA}V_A + Y_{BB}V_B + Y_{BC}V_C \\ Y_{CA}V_A + Y_{CB}V_B + Y_{CC}V_C \end{bmatrix} \quad (10-46)$$

* El resto de este capítulo puede omitirse por aquéllos que prefieren no conocer las matrices.

De la misma manera, multiplíquese cada término de la segunda fila de $|Y|$ por el término correspondiente de la columna de $[V]$ y colóquese la suma como el segundo término de la matriz columna 10-46. Finalmente, multiplíquese cada término de la tercera fila $[Y]$ por el término correspondiente de $[V]$ y colóquese como el tercer término de 10-46.

Claramente, 10-46 es una matriz columna, porque cuando las multiplicaciones y sumas indicadas se han efectuado, permanecen tres números arreglados en una columna.

10. Multiplicación de matrices

Este proceso se llama multiplicación de matrices, pero no es una multiplicación en el sentido ordinario de la palabra. La multiplicación ordinaria es una cosa que se aplica a dos cantidades, no a dos arreglos de cantidades. Hubiera sido mejor probablemente, si la palabra "multiplicación" no se hubiese utilizado y cualquier otra palabra como "juxtaposición" se hubiera empleado en su lugar. Pero esto no se hizo; el proceso fue llamado multiplicación. Sin embargo, no debe sorprender que muchas de las reglas de la multiplicación ordinaria no se aplican a este proceso, por ejemplo, la regla para la multiplicación de matrices nos da 10-46 como el producto de las matrices $[Y][V]$. No deberíamos sorprendernos de que el producto de las matrices $[V][Y]$ dé un resultado algo diferente.

11. Igualdad de matrices

Puesto que el primer miembro de la Ec. 10-45 se interpreta como la matriz columna de la Ec. 10-46, podemos igualar 10-46 al segundo miembro de 10-45, obteniendo:

$$\begin{bmatrix} Y_{AA}V_A + Y_{AB}V_B + Y_{AC}V_C \\ Y_{BA}V_A + Y_{BB}V_B + Y_{BC}V_C \\ Y_{CA}V_A + Y_{CB}V_B + Y_{CC}V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} \quad (10-47)$$

¿Qué significado tiene la *igualdad de matrices*? Se necesita una definición de igualdad. Una matriz es un escaparate matemático; el arreglo en un escaparate es el mismo que en otro si cada artículo en uno es idéntico con cada artículo en el otro. Así, con las matrices: *una matriz es igual a otra si, y solamente si, cada elemento de una es igual al correspondiente elemento de la otra*.

Siendo esto cierto, la Ec. 10-47 dice que $Y_{AA}V_A + Y_{AB}V_B + Y_{AC}V_C$ debe ser igual a I_A que el segundo elemento de la matriz del primer miembro debe ser igual a I_B , y que el tercer elemento debe ser igual a I_C . Pero cuando estos tres juegan se igualan, el resultado es precisamente la familia de Ecs. 10-32.

Así es como la ecuación de matrices 10-45 se interpretará; es por esta interpretación que la Ec. 10-45 es equivalente a la familia de ecuaciones simultáneas 10-32.

12. Producto de matrices cuadradas

No hemos encontrado aún la necesidad, pero la encontraremos pronto, de generalizar la definición de multiplicación de matrices. Sabemos que una matriz cuadrada "multiplicada" por una matriz columna es igual a una matriz columna, como en la Ec. 10-45. ¿Cuál es el resultado cuando una matriz cuadrada se multiplica por otra matriz cuadrada?

La definición de "multiplicación" debe extenderse para cubrir una operación que incluya dos matrices cuadradas. La siguiente regla se ha adoptado. La matriz producto es una matriz cuadrada, y cada columna de la matriz producto se obtiene multiplicando la primera matriz por una columna de la segunda matriz. Las siguientes matrices puramente abstractas ilustrarán el proceso. Son matrices 2×2 , matrices cuadradas de segundo orden de la misma clase que las matrices de las Ecs. 10-22 y 10-23. Son suficientemente grandes para ilustrar el proceso de la multiplicación de matrices:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) & (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \end{bmatrix} \quad (10-48)$$

Con matrices mayores, el proceso se continúa. Para una definición precisa, la multiplicación de matrices puede resumirse en una fórmula: si $[a][b] = [c]$, entonces los elementos de $[c]$ son:

$$c_{pq} = \sum_{r=1}^n a_{pr}b_{rq} \quad (10-49)$$

y ésta es la ley y los profetas.

13. Ciertos teoremas de matrices

Unos pocos ejemplos ilustrarán algunos teoremas importantes. Primero multiplíquense dos matrices:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+3 & 4+0 \\ 4+1 & 2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad (10-50)$$

Pero si el orden de las mismas matrices se invierten:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+2 & 6+1 \\ 4+0 & 3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad (10-51)$$

Claramente estas dos matrices productos no son iguales. Esto prueba que *la ley conmutativa del álgebra no se aplica a la multiplicación de matrices*. * Esto es, $[a][b] \neq [b][a]$.

Otro teorema está ilustrado por las siguientes multiplicaciones de matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (10-52)$$

No importa qué valores de a, b, c y d podamos tener; el producto es el mismo que la matriz original. Esto puede generalizarse extendiendo la multiplicación a matrices cuadradas de orden n -ésimo, con la conclusión de que *una matriz premultiplicada o postmultiplicada por la matriz unitaria permanece invariable*. Las palabras de esta declaración requieren algunas definiciones:

1. La *matriz unitaria* es una matriz cuadrada en la que los elementos de la diagonal principal son todos 1 y todos los demás elementos son 0. El símbolo para la matriz unitaria es $[U]$ y $[A][U] = [U][A] = [A]$.

2. La *diagonal principal* es la línea de elementos que se extiende desde la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha de la matriz.

3. *Premultiplicación* y *Postmultiplicación* tienen los resultados ilustrados en las Ecs. 10-52; deben distinguirse porque la ley commu-

* Las leyes asociativas y distributivas de álgebra se aplican a la multiplicación de matrices. Esto es, $[A][B][C] = ([A][B])[C] = [A]([B][C])$; y $([A] + [B])[C] = [A][C] + [B][C]$, etc. Para suma de matrices ver Sección 18.

tativa no se aplica y los productos son, en general, diferentes. (Premultiplicación y postmultiplicación por la matriz *unitaria* dan el mismo producto; esta es una excepción a la ley general).

PRODUCTO DE UNA MATRIZ POR UN NÚMERO. Algunas veces, se indica la multiplicación de una matriz por un número. El número se escribe al lado de la matriz. Esto significa que cada elemento de la matriz está multiplicado por ese número. Un ejemplo se ve en la Ec. 10-60.

14. La matriz inversa

Dada una matriz $[Y]$, *definamos* otra matriz, que llamaremos inversa de $[Y]$ y la denotaremos por $[Y]^{-1}$. Por definición,

$$[Y]^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_{AA} & \Delta_{BA} & \Delta_{CA} \\ \Delta_{AB} & \Delta_{BB} & \Delta_{CB} \\ \Delta_{AC} & \Delta_{BC} & \Delta_{CC} \end{bmatrix} \quad (10-53)$$

donde Δ , un número, es el determinante de la matriz $[Y]$ y Δ_{AB} es el cofactor del término Y_{AB} en este determinante. (Esta definición es expresamente para matriz de tercer orden, pero su extensión a matrices de otros órdenes es evidente). Con $[Y]^{-1}$ definida de esta manera, se podrá demostrar (y ésta es la razón para llamarla *inversa*), que

$$[Y][Y]^{-1} = [U] \quad \text{y también} \quad [Y]^{-1}[Y] = [U] \quad (10-54)$$

Esto es, *el producto de una matriz por su inversa es la matriz unitaria*.

Las Ecs. 10-54 se demuestran fácilmente para una matriz 2×2 . Sea $[M]$ la matriz

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{AA} & M_{AB} \\ M_{BA} & M_{BB} \end{bmatrix} \quad (10-55)$$

Primero, se encuentra la inversa. Para calcular la inversa, el determinante Δ de la matriz $[M]$ se necesita:

$$\Delta = \begin{vmatrix} M_{AA} & M_{AB} \\ M_{BA} & M_{BB} \end{vmatrix} = M_{AA}M_{BB} - M_{AB}M_{BA} \quad (10-56)$$

Los cofactores de este determinante son simplemente

$$\Delta_{AA} = M_{BB} \quad \Delta_{AB} = -M_{BA} \quad \Delta_{BA} = -M_{AB} \quad \Delta_{BB} = M_{AA}$$
(10-57)

Entonces, según la Ec. 10-53, la inversa de $[M]$ es

$$[M]^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} M_{BB} & -M_{AB} \\ -M_{BA} & M_{AA} \end{bmatrix}$$
(10-58)

Segundo, demostraremos que las Ecs. 10-54 son ciertas para esta matriz multiplicando:

$$\begin{aligned} [M]^{-1}[M] &= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} M_{BB} & -M_{AB} \\ -M_{BA} & M_{AA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{AA} & M_{AB} \\ M_{BA} & M_{BB} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} M_{BB}M_{AA} - M_{AB}M_{BA} & M_{BB}M_{AB} - M_{AB}M_{BB} \\ -M_{BA}M_{AA} + M_{AA}M_{BA} & -M_{BA}M_{AB} + M_{AA}M_{BB} \end{bmatrix} \end{aligned}$$
(10-59)

Dos de los elementos de la matriz producto son cero, y cuando los otros dos elementos se dividen entre Δ , (como se dio en la Ec. 10-56) el resultado es simplemente 1. Por tanto

$$[M]^{-1}[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [U]$$
(10-59a)

Así, una matriz premultiplicada por su inversa da la matriz unitaria. La postmultiplicación por su inversa también da la unidad matriz, como podemos demostrar de la misma manera.

La prueba anterior se aplica a matrices cuadradas 2×2 . La misma verificación de las Ecs. 10-54 puede obtenerse para matrices de tercer orden o mayores por un estudio paciente.

Como un ejemplo numérico de la forma de encontrar una matriz inversa, supongamos que tenemos

$$[A] = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

y deseamos calcular su inversa. Primero, escríbese el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2$$

A continuación escribanse los cofactores:

$$\Delta_{AA} = 2 \quad \Delta_{AB} = -2 \quad \Delta_{BA} = -3 \quad \Delta_{BB} = 4$$

Entonces la matriz inversa es

$$[A]^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$
(10-60)

Ahora nosotros demostraremos que $[A][A]^{-1} = [U]$ multiplicando:

$$[A][A]^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 & -6+6 \\ 2-2 & -3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esto completa la ilustración numérica.*

15. Solución por matrices de las ecuaciones de nodos

Los teoremas de las últimas pocas páginas hacen posible resolver ecuaciones de matrices simples en dos o tres pasos fáciles —y un solo paso, inversión, que no es tan fácil. El proceso se ilustrará resolviendo las ecuaciones de nodo que fueron dadas en forma de matrices para la Ec. 10-43:

$$[Y][V] = [I]$$
(10-61)

Deseamos resolver para $[V]$. Si ésta fuese una ecuación algebraica que comprendiera números, cada lado podría dividirse por $[Y]$; sin embargo, puesto que $[Y]$ es una matriz y la división entre matrices no está reconocida, otro plan deberá seguirse: premultipliquemos cada lado por $[Y]^{-1}$. Esto da

$$[Y]^{-1}[Y][V] = [Y]^{-1}[I]$$
(10-62)

Puesto que $[Y]^{-1}[Y] = [U]$, y $[U][V] = [V]$ el primer miembro es únicamente $[V]$, y

$$[V] = [Y]^{-1}[I]$$
(10-63)

Esta es la solución requerida para la matriz de voltaje. Formalmente, la Ec. 10-63 es la solución de las ecuaciones de nodo representadas por 10-61.

* Algunas veces se pregunta: ¿Por qué la matriz inversa se define de la manera peculiar dada en la Ec. 10-53? De hecho, la inversa se define de esta manera para hacer que el producto de una matriz por su inversa sea igual a la matriz unitaria. Esto es, la Ec. 10-53 se diseña para hacer las Ecs. 10-54 válidas.

Ahora ¿cómo se hace esta solución útil? Se repetirá que el propósito de las ecuaciones de nodo es encontrar los voltajes de nodo desconocidos. Las corrientes de las fuentes suministradas a los nodos se conocen y todas las admitancias de la red también se conocen. En la Ec. 10-61 por lo tanto, $[I]$ es conocido (esto es un arreglo de las corrientes de la fuente), $[Y]$ reconocida también (es un arreglo de las admitancias mutuas y autoadmitancia) y $[V]$ debe encontrarse. Los voltajes de nodos deseados se encontrarán en la Ec. 10-63. El proceso es calcular la inversa de $[Y]$, y entonces multiplicar $[Y]^{-1}$ por $[I]$ para obtener $[V]$.

Nosotros hemos resuelto este mismo problema antes. En la Sección 8 escribimos las ecuaciones de nodo como las Ecs. 10-32 y su solución, los voltajes, como las Ecs. 10-41. En matrices abreviadas, las Ecs. 10-41 pueden condensarse a

$$[V] = [z][I] \quad (10-64)$$

donde $[z]$ significa

$$[z] = \begin{bmatrix} z_{AA} & z_{AB} & z_{AC} \\ z_{BA} & z_{BB} & z_{BC} \\ z_{CA} & z_{CB} & z_{CC} \end{bmatrix} \quad (10-65)$$

Pero las Ecs. 10-64 y 10-63 son ambas soluciones del mismo problema. Por tanto $[z]$ debe ser lo mismo que $[Y]^{-1}$. Esto es cierto y resulta, de hecho, de nuestras definiciones de z en las Ecs. 10-30, de donde éstas se sustituyen en la matriz $[z]$ de la Ec. 10-65 y resulta

$$[z] = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_{AA} & \Delta_{BA} & \Delta_{CA} \\ \Delta_{AB} & \Delta_{BB} & \Delta_{CB} \\ \Delta_{AC} & \Delta_{BC} & \Delta_{CC} \end{bmatrix} \quad (10-66)$$

y esto es precisamente lo mismo que para $[Y]^{-1}$ en la Ec. 10-53. Por tanto,

$$[z] = [Y]^{-1} \quad (10-67)$$

16. Solución por matrices de las ecuaciones de mallas

Veamos otro ejemplo de la solución de ecuaciones simultánea en forma de matrices. Podemos usar matrices para abreviar las ecuaciones de malla 10-1 a la forma breve

$$[Z][I] = [E] \quad (10-68)$$

Deseamos resolverla para las corrientes de malla. Premultiplicando cada miembro de esta ecuación por $[Z]^{-1}$ obtenemos

$$[I] = [Z]^{-1}[E] \quad (10-69)$$

Las Ecs. 10-10 también dan una solución formal de las ecuaciones de malla, una solución que puede escribirse en la notación de matrices como

$$[I] = [y][E] \quad (10-70)$$

Aquí vemos otra relación inversa:

$$[y] = [Z]^{-1} \quad (10-71)$$

Está claro que el cálculo de la matriz inversa es el corazón de la solución de una ecuación de matrices. Puesto que la inversión requiere evaluar un determinante y cofactores, el cálculo es un trabajo de rutina y tiende a ser aburrido. Sin embargo, ésto es lo que las computadoras electrónicas hacen superativamente bien, y si una computadora se puede obtener es posible resolver rápidamente las ecuaciones de redes muy complicadas. El ingeniero piensa el problema en forma de matriz, y la máquina hace la aritmética. Aun, si una máquina tal, no está a mano, el álgebra de las matrices sigue siendo una ventaja mientras se piensa el problema, aunque acorta poco, si acaso, la labor de cálculo.

17. Ejemplo

La solución por método de matrices de las ecuaciones de malla de una red se ilustrará ahora. El problema está simplificado por la suposición de elementos con resistencia únicamente; de todos modos es un problema de red típico.

El circuito se muestra en la Fig. 10-4a. Las ecuaciones de malla son

$$\begin{aligned} 10I_1 - 9I_2 &= 100 \\ -9I_1 + 20I_2 - 9I_3 &= 0 \\ -9I_2 + 15I_3 &= 0 \end{aligned}$$

Después de haber obtenido un poco de experiencia con esta clase de problemas será innecesario escribir estas ecuaciones; la solución del problema podrá empezarse escribiendo la matriz:

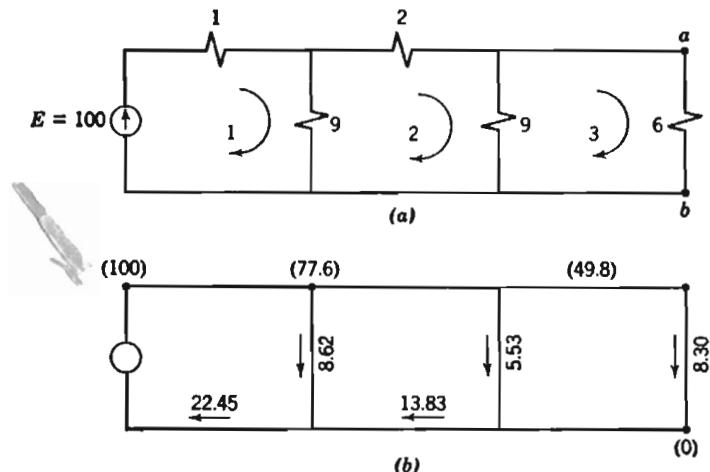


FIG. 10-4. La fuerza electromotriz y resistencia se muestran en (a); las corrientes y potenciales (entre paréntesis) se muestran en (b)

$$[Z] = \begin{bmatrix} 10 & -9 & 0 \\ -9 & 20 & -9 \\ 0 & -9 & 15 \end{bmatrix}$$

El determinante siendo de la misma forma que la matriz no necesita escribirse. Su valor es:

$$\Delta = 3000 - (810 + 1215) = 975$$

Cada cofactor es un determinante de segundo orden en este ejemplo. Por ejemplo (eliminando la tercera fila y la primera columna):

$$\Delta_{31} = \begin{vmatrix} -9 & 0 \\ 20 & -9 \end{vmatrix} = 81 - 0 = 81$$

Así, los nueve cofactores se calculan y colocan en la matriz inversa:

$$[Z]^{-1} = \frac{1}{975} \begin{bmatrix} 219 & 135 & 81 \\ 135 & 150 & 90 \\ 81 & 90 & 119 \end{bmatrix}$$

Para encontrar las corrientes, la impedancia inversa es postmultipli-
cada por la matriz de la fuerza electromotriz, obtenida de las ecua-
ciones de malla:

$$[I] = [Z]^{-1}[E] = \frac{1}{975} \begin{bmatrix} 219 & 135 & 81 \\ 135 & 150 & 90 \\ 81 & 90 & 119 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{100}{975} \begin{bmatrix} 219 \\ 135 \\ 81 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22.45 \\ 13.83 \\ 8.30 \end{bmatrix}$$

La matriz de corriente resultante, nos da las tres corrientes de malla. Estas están indicadas en la Fig. 10-4b, y se encuentran otras corrientes de rama como diferencias. Los voltajes de nodo se calculan como caída ZI en la rama. Esto suministra una comprobación de la corriente calculada, y las comprobaciones muestran aproximación satisfactoria para regla de cálculo.

Se verá que solamente tres de los cofactores se necesitan en la matriz inversa, porque existe la fuerza electromotriz en solamente una malla. Los otros cofactores no necesitan calcularse, pero aquí, en este ejemplo se hizo para hacerlo completo. Se hubiera necesitado si hubiera habido otras fuerzas electromotrices.

Nótese la simetría con respecto a las diagonales principales de las matrices, tanto para $[Z]$ como para $[Z]^{-1}$. Cualquier matriz cuadrada con esta clase de simetría (con $a_{pq} = a_{qp}$) se llama *simétrica*. * Las matrices $[Y]$ y $[Z]$ de redes de elementos bilaterales, son simétricas (si se forman de la manera usual) y si esta simetría no aparece en un problema ordinario de red, es una indicación de un error.

18. Otras operaciones con matrices

Muchas otras operaciones se pueden efectuar útilmente con matrices. La *suma* de matrices, por ejemplo, se define diciendo que si $[A] + [B] = [C]$, entonces

$$c_{pq} = a_{pq} + b_{pq} \quad (10-72)$$

Esto es, todos los elementos correspondientes de las matrices se suman.

Se obtiene de aquí, que si k matrices idénticas se suman, cada elemento en la matriz suma es k veces el elemento correspondiente en la matriz original. Así, la suma de k matrices iguales es equiva-

* Una matriz en la que $a_{pq} = -a_{qp}$ se llama anti-simétrica. Estas aparecen a problemas concernientes a maquinaria rotatoria, como en *Tensor Analysis de Kron*, Ref. 20.

lente a multiplicar una matriz por k de acuerdo con las reglas en la Sección 13.

La división de una matriz entre otra no está definida. En lugar de dividir, se multiplica por la matriz inversa, como en la Ec. 10-62. Si hubiera división, debería haber dos clases de división, una correspondiente a la premultiplicación por la inversa y la otra a la postmultiplicación por la inversa. Es más fácil, tomar la forma inversa y nunca hablar de división.

La transposición de una matriz significa el intercambio de filas y columnas. $[A]_t$ es la transpuesta de $[A]$, y si

$$[A] = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \text{ entonces } [A]_t = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} \quad (10-73)$$

La reciproca de una matriz es la transpuesta de la inversa de la matriz.

Hay mucho que podríamos decir acerca de las matrices no cuadradas o *rectangulares*. En este capítulo es suficiente decir que las reglas dadas arriba pueden aplicarse a las matrices no cuadradas añadiendo filas o columnas de ceros hasta que las matrices rectangulares se convierten en cuadradas. La suma de ceros no cambia una matriz.

No es la intención de este libro presentar el álgebra de las matrices. La mira, más bien, es dar unos pocos ejemplos simples de cómo los métodos de matrices se aplican a los problemas de redes. La literatura eléctrica corriente está llena de referencias de álgebra de las matrices, para las que un conocimiento elemental es suficiente. Aquellos que tengan necesidad, encontrarán este asunto tratado ampliamente en un buen número de libros de referencia. *

19. Redes equivalentes

Este capítulo concluirá, por lo tanto, con un ejemplo de aplicación de matrices a un problema previamente mencionado en el Cap. 6, Sección 11. ¿Cómo puede encontrarse que una red es equivalente a una red dada para *todas* las frecuencias? El problema general es difícil. La respuesta se dará aquí, sin una demostración general, si-

* Por ejemplo, *Circuit Theory* de Guillemin (Ref. 12) o mejor sus *Mathematics* (Ref. 21) o el fácil de leer pero especializado, *Matrix Analysis* de LeCorbeiller (Ref. 16).

guiendo a Guillemin, † con el propósito de ilustrar la manipulación de matrices y al mismo tiempo presentar material que es interesante y valioso en la práctica. La demostración se dará para una red de dos mallas únicamente.

Para transformar una red de dos terminales a otra con la misma impedancia de entrada, la matriz de impedancia $[Z]$ (como en la Ec. 10-20) es postmultiplicada por una matriz de *transformación* y premultiplicada por la transpuesta de la matriz de transformación. Llámemos a la matriz de transformación $[T]$. Entonces, la matriz de impedancia de la nueva red equivalente $[Z']$, es

$$[Z'] = [T]_t [Z] [T] \quad (10-74)$$

La matriz de transformación es de la forma

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (10-75)$$

Los elementos de $[T]$, las a , pueden ser cualquier número real. Matemáticamente, pueden escogerse bastante arbitrariamente; se puede colocar cualquier número que se desee. Físicamente, sin embargo, se debe tener cuidado para evitar resistencias, inductancias o capacidades negativas en la nueva red correspondiente a $[Z']$.

20. Ejemplo

Un ejemplo simple mostrará como trabaja la transformación. La Fig. 10-5a muestra una red para la que la matriz de impedancia es

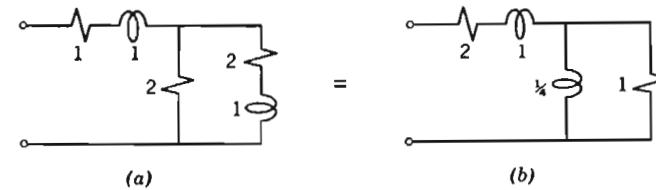


FIG. 10-5. Redes equivalentes; las resistencias se muestran en ohms, las inductancias en henrys

† Referencia 15, Vol. 2, Pág. 229 y siguientes.

$$[Z] = \begin{bmatrix} 3 + j\omega_1 & -2 \\ -2 & 4 + j\omega_1 \end{bmatrix} \quad (10-76)$$

Escríbamos una matriz de transformación $[T]$. La primera fila está especificada por la Ec. 10-75, pero la segunda puede ser cualquiera; escogemos para escribir

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (10-77)$$

y, cambiando filas y columnas:

$$[T]_t = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (10-78)$$

La multiplicación de matrices se hace como sigue:

$$\begin{aligned} [Z'] &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 + j\omega_1 & -2 \\ -2 & 4 + j\omega_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 + j\omega_1 & 1 \\ j\omega_1 \frac{1}{2} & -2 - j\omega_1 \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 + j\omega_1 \frac{5}{4} & -j\omega_1 \frac{1}{4} \\ -j\omega_1 \frac{1}{4} & 1 + j\omega_1 \frac{1}{4} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10-79)$$

Todo lo que queda por ver es cómo puede encontrarse una red que sea la realización física de esta matriz $[Z']$. Los términos superior derecho e inferior izquierdo de la matriz son las impedancias mutuas entre las mallas 1 y 2, y claramente esto requiere que el elemento mutuo sea una inductancia de $\frac{1}{4}$ henrys. Esto se muestra en la Fig. 10-5b. La autoimpedancia de la malla 1 consiste de una resistencia de 2 ohms y una inductancia de $\frac{5}{4}$ henrys, incluyendo el elemento mutuo de $\frac{1}{4}$ henrys; por lo tanto, la malla 1 se completa poniendo en el diagrama una resistencia de 2 ohms y una inductancia de 1 henry. Similarmente, la malla 2 requiere únicamente 1 ohm de resistencia en adición al elemento mutuo. Así, la red equivalente de la Fig. 10-5b está diseñada para adaptarse a la matriz $[Z']$.

Fuimos afortunados en nuestra elección de la matriz de transformación porque la $[Z']$ resultante, es posible físicamente para realizarse. No es fácil evitar el encontrar matrices $[Z']$ que requieran R , L o C negativas en las redes equivalentes. Esto es particularmente cierto si las tres clases de elementos están presentes en la red.

Las Figs. 6-12, 6-13 y 6-14 muestran otros ejemplos de redes equivalentes. En el Cap. 6 se presentaron como ejemplos interesantes sin derivarlos. Ahora hemos visto el proceso por el cual se obtuvieron, simbolizado en la Ec. 10-74, y ampliamente elaborado en las Ecs. 10-76 a la 10-79. Ahora estamos preparados para efectuar los cálculos a fin de obtener las redes equivalentes mostradas en el Cap. 6. Como esto no presenta nuevas ideas se dejará para los problemas.

21. Demostración NO.

La discusión concluirá con una demostración de que la Ec. 10-74 nos da una transformación que es válida para todas las redes de 2 mallas. La nueva red es equivalente a la red original y sus admittancias de entrada e impulsoras son las mismas. Esto es, equivalente sí

$$y_{11} = y_{11}' \quad (10-80)$$

donde (como en las Ecs. 10-9)

$$y_{11} = \frac{\Delta_{11}}{D} \quad y \quad y_{11}' = \frac{\Delta_{11}'}{D'} \quad (10-81)$$

Ahora, generalizando,

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \quad \text{so} \quad D = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix} = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} \quad (10-82)$$

y Δ_{11} , el cofactor de Z_{11} en D , es Z_{22} . Por lo tanto,

$$y_{11} = \frac{Z_{22}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} \quad (10-83)$$

Ahora debemos encontrar por comparación, y_{11}' . El primer paso es encontrar la $[Z']$ completamente general para una red de dos mallas. La matriz de transformación puede escribirse (de la Ec. 10-75):

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (10-84)$$

Transformando $[Z]$ de la Ec. 10-82,

$$[Z'] = [T]_d[Z][T] = \begin{bmatrix} 1 & a_{21} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (10-85)$$

y efectuando la multiplicación de matrices da

$$[Z'] = \begin{bmatrix} Z_{11} + a_{21}(Z_{12} + Z_{21}) + a_{21}^2 Z_{22} & a_{22}Z_{12} + a_{21}a_{22}Z_{22} \\ a_{22}Z_{21} + a_{21}a_{22}Z_{22} & a_{22}^2 Z_{22} \end{bmatrix} \quad (10-86)$$

Como en la Ec. 10-81, y_{11}' requiere a D' y Δ_{11}' . El determinante D' tiene la misma forma que $[Z']$ y no necesita escribirse nuevamente; Δ_{11}' es igual a $a_{22}^2 Z_{22}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y_{11}' &= \frac{a_{22}^2 Z_{22}}{\left\{ [Z_{11} + a_{21}(Z_{12} + Z_{21}) + a_{21}^2 Z_{22}]a_{22}^2 Z_{22} \right.} \\ &\quad \left. - (a_{22}Z_{12} + a_{21}a_{22}Z_{22})(a_{22}Z_{21} + a_{21}a_{22}Z_{22}) \right\} \\ &= \frac{Z_{22}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}} = y_{11} \quad \text{L.Q.D.D.} \quad (10-87) \end{aligned}$$

Así, una red para la que la matriz es $[Z']$ es equivalente a todas las frecuencias a una red para la que la matriz es $[Z]$, y los elementos de la matriz de transformación a_{21} y a_{22} pueden ser cualesquiera porque desaparecen en la expresión final para y_{11}' .

22. Sumario

Este capítulo da la solución formal para las ecuaciones de malla de una red (Ecs. 10-10) y para las ecuaciones de nodo de una red (Ecs. 10-29). Presenta las ideas de las admitancias impulsora y de transferencia en la solución de las ecuaciones de malla y las ideas de las impedancias impulsora y de transferencia en la solución de las ecuaciones de nodo.

Se presentan en la última parte del capítulo los elementos del álgebra de las matrices. La solución de ecuaciones de redes expresadas en notación de matrices se ilustra, y puesto que este proceso requiere la utilización de la multiplicación de matrices y la inversión, se definen y discuten estos procesos. Se mencionan también ciertas otras operaciones comunes de matrices y como un ejemplo de la

manipulación de éstas, el capítulo termina con una discusión de las redes que son absolutamente equivalentes.

PROBLEMAS

1. En la red de la Fig. 10-1 encontrar y_{11} y y_{21} sin utilizar las ecuaciones de malla (esto es, combinando las resistencias en paralelo y en serie, etc.). § 3
- ✓ 2. En la red de la Fig. 10-4, (a) ¿Cuál es la autoimpedancia de la malla 1? (b) Por medio de las ecuaciones de malla, calcular la admitancia impulsora de la malla 1 y (c) la admitancia de transferencia entre las mallas 1 y 3. § 3
3. En la red de la Fig. 10-4, calcular y_{11} , y_{13} y y_{31} por medio del método de "escalera" para resolución. § 6
4. Repetir la parte a del Prob. 20, Cap. 5, escribiendo las ecuaciones de malla y resolviendo para la admitancia impulsora. § 3
5. Repetir la parte a del Prob. 1, Cap. 6, escribiendo las ecuaciones de malla y resolviendo para la admitancia impulsora. § 3
- ✓ 6. Escribir las Ecs. 9-17 en forma de matrices. Conociendo que $E = 10$ volts, escribir la solución $[I]$ de esta ecuación de matrices como una matriz columna de tres corrientes (valores numéricos). § 4
7. Repetir el Prob. 7 del Cap. 6, escribiendo las ecuaciones de malla y resolviendo para la admitancia impulsora. § 3
8. Repetir el Prob. 8 del Cap. 6, escribiendo las ecuaciones de malla y resolviendo para la admitancia impulsora. § 3
- ✓ 9. En la red de acoplamiento R-C del Prob. 14, Cap. 5, encontrar (a una frecuencia de 1 000 cps) el voltaje entre las terminales de la resistencia de 200 000 ohms, utilizando las ecuaciones de nodo y la impedancia de transferencia. Encontrar también la impedancia impulsora de la red. § 8
- ✓ 10. En la red de la Fig. 10-2, calcular z_{AA} , z_{BB} , z_{AB} y z_{BA} . § 8
- ✓ 11. Examínese la red de la Fig. 10-3 para encontrar las terminales de la fuente. En estas terminales encontrar (a) la impedancia impulsora utilizando el método de nodo, (b) la admitancia impulsora utilizando el método de malla. (c) ¿Son estas cantidades reciprocas? § 8

12. Encontrar el producto de matrices:

§ 13

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

13. Intercalar las dos matrices en el Prob. 12 y encontrar el producto.

§ 13

14. Llamando a la siguiente matriz $[F]$:

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Encontrar $[F]^{-1}$. (b) Encontrar $[F][F]^{-1}$; desarrollese en detalle para demostrar que es igual a $[U]$.

§ 14

15. Repítase el Prob. 14 con cualquier otra matriz, inventada al azar.

§ 14

16. ¿Cuál es la matriz de transformación utilizada para cambiar la red de la Fig. 6-12a a la red equivalente a la Fig. 6-13? Demuéstrese que las redes de la Fig. 6-12b y c son casos especiales de la Fig. 6-13.

§ 20

17. ¿Cuál es la matriz de transformación utilizada para cambiar la red de la Fig. 6-14a a la de la Fig. 6-14b?

§ 20

18. En la Fig. 10-4, súmese a la red, en serie con la resistencia de 9 ohms que es común a las mallas 2 y 3, una fuente de 72 volts de fuerza electromotriz, dirigida hacia arriba. Utilizando cuando sean aplicables, las matrices de la Sección 17, resúlvase para tener todas las corrientes.

§ 17

III

Teoremas de Redes

1. Teoremas de redes

Ciertas relaciones generales se aplican a todas las redes. Debido a que pueden aplicarse en la solución de muy diferentes problemas, es preferible aprenderlas como generalizaciones y entonces estar preparados a utilizarlas para facilitar el trabajo. Algunos teoremas se han presentado en los capítulos previos. Las fórmulas para la equivalencia de redes Y y Δ , o estrella y malla, son teoremas de redes, pero es más conveniente agruparlas con otros métodos de sustitución en el Cap. 6 en vez de dejarlas para el presente capítulo. Algunos problemas se vieron en el Cap. 8, y mientras que algunos son teoremas matemáticos generales, hay otros, como el teorema de reactancia de Foster, que son realmente teoremas de redes.

Es difícil decir, cuales ideas deben dignificarse con el nombre de teoremas, pero hay media docena más o menos que no hemos mencionado y que en el uso común reciben este nombre. Estas se presentarán en el capítulo presente, y se dará al final del mismo un resumen de ellas.

2. Teorema de superposición

En términos generales el principio de superposición dice: si un sistema muestra efectos producidos por dos o más causas actuando juntas, es permisible, si el efecto producido en el sistema es directamente proporcional a la causa, considerar que cada causa actúe

independientemente y entonces superponer los efectos. El método más directo pero frecuentemente más complicado es considerar que las causas actúan juntas y determinar su efecto unido.

Aplicado a redes en las que existen dos o más fuerzas electromotrices, el principio de superposición dice que podemos encontrar las corrientes producidas por una fuerza electromotriz, después, las corrientes producidas por otra fuerza electromotriz, y entonces sumar las corrientes. Esto es permisible si cada elemento de la red es lineal; esto es, si todas las R , L y C son constantes. (Las bobinas con núcleo de hierro y los tubos al vacío son elementos típicos no constantes que pueden impedir la aplicación del teorema de superposición).

La demostración del teorema como se aplica a las redes, se encuentra en la solución de las ecuaciones de malla (Ecs. 10-10):

$$\begin{aligned} I_1 &= y_{11}E_1 + y_{12}E_2 + \dots + y_{1L}E_L \\ I_2 &= y_{21}E_1 + y_{22}E_2 + \dots + y_{2L}E_L \\ &\dots \end{aligned} \quad (11-1)$$

Al escribir las ecuaciones de malla (lo mismo sería cierto de las ecuaciones de nodo o rama) todas las fuerzas electromotrices impulsoras se escriben en las ecuaciones al principio y la solución simultánea toma a todas ellas en cuenta. Esta es la manera directa. Supóngase que se desea aplicar la superposición. Primero, podría asumirse que todas las E excepto E_1 son cero y la corriente debida a E_1 deberá encontrarse en cada parte de la red. Las corrientes así encontradas en la malla 1 serían $y_{11}E_1$, en la malla 2, $y_{21}E_1$, etc. A continuación se asumiría que todas las E excepto E_2 son cero y la corriente se encontraría en cada malla. La corriente encontrada en la malla 1 sería $y_{12}E_2$, etc. Aplicando el principio de superposición, estas corrientes individuales se sumarían para obtener la corriente total resultante de todas las fuerzas electromotrices que actúan juntas, así I_1 sería la suma de $y_{11}E_1$, $y_{12}E_2$, etc. Pero esto es idéntico a la respuesta obtenida de las ecuaciones simultáneas, como las Ecs. 11-1, y muestra que la aplicación del principio de superposición se justifica siempre que las Ecs. 11-1 se apliquen. Las Ecs. 11-1 están derivadas de una solución que es correcta para ecuaciones lineales con coeficientes constantes. El principio de superposición puede, por tanto, utilizarse para redes que lleven a ecuaciones lineales, los valores de R , L y C deberán ser constantes y las fuentes deberán ser ya sea de voltaje constante o de corriente constante. Es obvio y no deberá elaborarse que la superposición no es permisible si las ecuaciones no son lineales o si los elementos no son constantes.

3. Ejemplos

EJEMPLO 1. Este es un problema en el que la superposición se aplica correctamente. Una red de tres elementos resistivos tiene dos fuerzas electromotrices como se muestran en la Fig. 11-1a; los valores numéricos están dados en el diagrama.

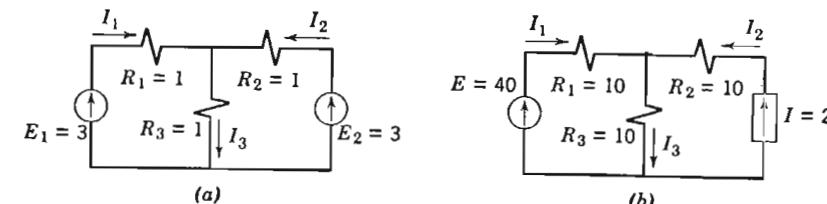


FIG. 11-1. Ejemplos de superposición

Aplicando la superposición, encontrar las corrientes debidas a E_1 sola. En esta parte de la solución E_2 se toma igual a cero. La resistencia de entrada para la fuente 1 (siendo E_2 cero) es

$$R_{1\text{ in}} = 1 + \frac{1 \cdot 1}{1 + 1} = \frac{3}{2}$$

Las tres corrientes de rama se encuentran (el subíndice indica que solamente la fuente 1 está operando):

$$I_{1(1)} = \frac{E_1}{R_{1\text{ in}}} = \frac{3}{\frac{3}{2}} = 2 \quad I_{2(1)} = -1 \quad I_{3(1)} = 1$$

A continuación, se encuentran las corrientes de rama debidas a E_2 sola:

$$I_{2(2)} = 2 \quad I_{1(2)} = -1 \quad I_{3(2)} = 1$$

Finalmente, se suman las corrientes individuales:

$$I_1 = I_{1(1)} + I_{1(2)} = 2 - 1 = 1$$

$$I_2 = I_{2(1)} + I_{2(2)} = -1 + 2 = 1$$

$$I_3 = I_{3(1)} + I_{3(2)} = 1 + 1 = 2$$

Así se completa la solución para las corrientes, y podemos estar seguros (habiendo probado la corrección del principio de superposición)

ción para este problema) que estas respuestas son las mismas que habíamos obtenido por el método de malla o el método de nodos de solución. Para este problema el método de superposición es probablemente el más fácil.

EJEMPLO 2. Este es un problema en el que la superposición *no* se aplica correctamente. El problema es encontrar la potencia consumida por las tres ramas de la red de la Fig. 11-1a. La superposición no es permisible porque la relación entre voltaje o corriente y la potencia no es lineal, sino cuadrática.

Apliquemos el método de superposición, aunque sabemos que está equivocado. Las corrientes en las ramas debidas a E_1 sola, se encuentran como en el Ej. 1. La potencia en cada rama debida a E_1 sola, se encuentra ahora:

$$P_{1(1)} = I_{1(1)}^2 R_1 = 4$$

$$P_{2(1)} = I_{2(1)}^2 R_2 = 1$$

$$P_{3(1)} = I_{3(1)}^2 R_3 = 1$$

La potencia total de salida de la fuente 1 es igual a 6 (watts).

Similarmente, la potencia en cada rama debida a E_2 se encuentra:

$$P_{1(2)} = I_{1(2)}^2 R_1 = 1$$

$$P_{2(2)} = I_{2(2)}^2 R_2 = 4$$

$$P_{3(2)} = I_{3(2)}^2 R_3 = 1$$

La corriente total de salida de la fuente 2 es igual a 6 (watts). Hasta aquí, todo está bien. Lo que no podemos hacer es sumar estos valores, porque la suma nos daría para la potencia total:

$$P_1 = 4 + 1 = 5$$

$$P_2 = 1 + 4 = 5 \text{ (respuestas equivocadas)}$$

$$P_3 = 1 + 1 = 2$$

mientras que los valores correctos (encontrados sustituyendo la corriente total en la Fórmula $P = I^2 R$ y por tanto absteniéndonos del uso de la superposición) son

$$P_1 = (2 - 1)^2 1 = 1$$

$$P_2 = (2 - 1)^2 1 = 1 \text{ (respuestas correctas)}$$

$$P_3 = (1 + 1)^2 1 = 4$$

Aún más, los valores correctos de la potencia de salida para cada batería individual son: de la fuente 1, $E_1 I_1 = 3 \cdot 1 = 3$ y de la fuente 2, $E_2 I_2 = 3 \cdot 1 = 3$, que suman correctamente para igualar el total de 6 watts consumidos en las resistencias.

4. Fuentes inoperativas

La demostración de la superposición se basa en las Ecs. 11-1. Mientras se encuentran las corrientes debidas a E_1 , todas las otras E de fuentes de voltaje constante se reducen a cero.

Cuando existen fuentes de corriente constante en la red, la demostración requiere que las I de las fuentes de corrientes constantes inoperativas se reduzca a cero. Esto es evidente de las ecuaciones de nodo y su solución, como la Ec. 10-29.

Estos métodos se recordarán fácilmente. Cuando, durante el proceso de superposición, las fuentes son consideradas una a la vez, todas las otras fuentes se reducen a cero: las fuentes de voltaje constante se reducen a voltaje cero (corto circuito), y las fuentes de corriente constante se reducen a corriente cero (circuito abierto).

EJEMPLO 1. Este ejemplo ilustrará el método. Fig. 11-1b muestra una red con una fuente de corriente constante y una fuente de voltaje constante. Utilizando la superposición, primero haremos la corriente en la fuente de corriente constante igual a cero. Esto requiere que $I_2 = 0$. Entonces, con esta rama que requiere no llevar corriente,

$$I_{1(1)} = 2 \quad I_{2(1)} = 0 \quad I_{3(1)} = 2$$

Ahora, restauraremos la fuente de corriente constante y requeriremos que la fuente de voltaje constante sea cero. El generador de voltaje constante se reduce a un corto circuito. Entonces, debido a la fuente de corriente constante sola:

$$I_{2(2)} = 2 \quad I_{1(2)} = -1 \quad I_{3(2)} = 1$$

La suma nos da las corrientes totales de rama:

$$I_1 = 2 - 1 = 1 \quad I_2 = 0 + 2 = 2 \quad I_3 = 2 + 1 = 3$$

Que estas corrientes son correctas puede demostrarse comprobando con las leyes de Kirchhoff en los nodos y a lo largo de las mallas.

EJEMPLO 2. El teorema de superposición puede ser útil en la demostración de otros teoremas. Por ejemplo, como se mostró en el Cap. 6, Sec. 8, que una fuente de corriente constante con una impedancia en paralelo y una fuente de voltaje constante con una impedancia en serie son intercambiables, pero la prueba asumía que la red exterior (reducible a Z_L de la Fig. 6-9) es pasiva. Ahora, sin embargo, con la superposición a nuestras órdenes, esta limitación es fácilmente sobrepasada.

Con la red exterior activa, la Fig. 6-9 se reemplaza por la Fig. 11-2. En esta figura, deseamos probar que (a) y (b) son equivalentes, y por equivalentes entendemos que todas las corrientes y voltajes de la red externa son las mismas en los dos casos. La demostración se efectúa en tres pasos.

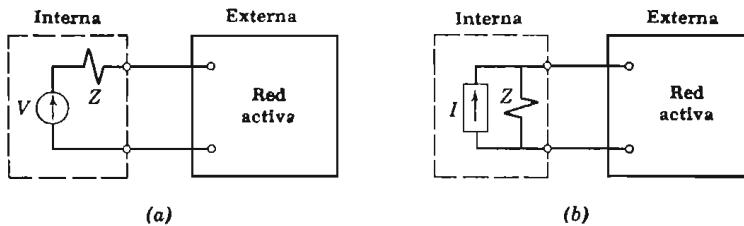


FIG. 11-2. Fuentes equivalentes conectadas a una red activa

Primero, todas las fuentes de la red externa se reducen a cero. Con esta condición la red *interna* es activa, la red *externa* es pasiva, y nosotros ya sabemos que con una red externa pasiva (a) y (b) son equivalentes.

Segundo, la fuente interna se reduce a cero mientras que la fuente *externa* (o fuentes) son activas. Con V reducida a cero en la Fig. 11-2a, todo lo que resta de la red interna es la impedancia Z . Con I reducida a cero en la Fig. 11-2b, todo lo que resta de la red interna es una impedancia igual Z . Por tanto, cuando las fuentes en la red interna se reducen a cero, (a) y (b) son equivalentes.

Tercero, por superposición, puesto que (a) y (b) son equivalentes con sólo la red interna activa, y puesto que son equivalentes con sólo la red externa activa, serán equivalentes con *ambas*, la red interna y la externa activas.

5. Teorema de reciprocidad

El teorema de superposición es aceptable para la mayoría de la gente como prácticamente obvio. En efecto, los problemas principa-

les comienzan cuando se aplica el método cuando no debería utilizarse, como por ejemplo, en bobinas con núcleos magnéticamente saturados.

El teorema de reciprocidad, por otro lado, no es aparentemente inductivo. Parece ser obviamente incorrecto hasta que unos pocos ejemplos prueban que es siempre correcto. Este teorema puede definirse como sigue:

“Si un voltaje aplicado en una rama de una red lineal bilateral y pasiva produce una cierta corriente en cualquier otra rama de la red, el mismo voltaje aplicado a la segunda rama producirá la misma corriente en la primera rama.”

La dualidad es también cierta. Si la corriente aplicada a un nodo produce un cierto voltaje en otro, la misma corriente en el segundo nodo producirá el mismo voltaje en el primero.

Este teorema se define a menudo en la forma siguiente, que es fácil de visualizar pero que pierde un poco de generalidad. Supóngase que una red está alimentada por una sola fuente de voltaje constante, y la corriente se lee en algún lado de la red por medio de un amperímetro ideal, (sin resistencia). Si el generador y el amperímetro se intercambian, y el generador permanece generando el mismo voltaje, el amperímetro en su nueva posición seguirá leyendo la misma corriente. Lo dual de esto, intercambiando fuente de corriente constante y un voltímetro ideal (de resistencia infinita) sin que cambie la lectura del voltímetro, también es cierto.

Con las bases matemáticas que acabamos de adquirir, la demostración es fácil. Nombremos las mallas de una red de modo que la única fuente sea un voltaje impulsor E_1 en la malla 1 y la corriente en la que estamos interesados es la corriente de malla I_2 . Esta puede ser, por supuesto, cualquier corriente, porque cualquier malla puede nombrarse 2. De la segunda de las ecuaciones 11-1 la corriente es $I_2 = y_{21}E_1$.

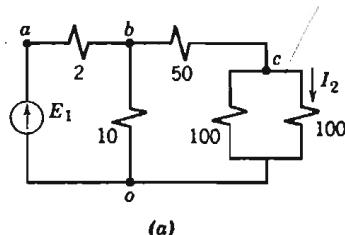
Ahora reducimos E_1 a cero e introducimos a E_2 en la malla 2. Calculemos la corriente en la malla 1. Será de la primera de las ecuaciones 11-1, $I_1 = y_{12}E_2$. Está justificado que E_2 es ahora igual a la E_1 previa, así I_1 será igual a la I_2 previa, puesto que $y_{12} = y_{21}$.

La Sec. 6 del Cap. 10 fue dedicada a probar que $y_{12} = y_{21}$ en toda la red bilateral y lineal. Por lo tanto, en toda red en la que existe solamente una fuente de corriente constante, el teorema de reciprocidad está probado.

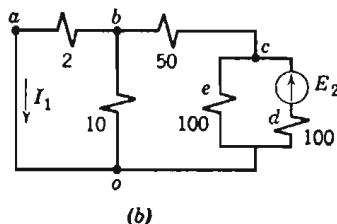
Las ecuaciones de nodo, utilizadas de la misma manera, muestran el teorema dual.

6. Ejemplo

La Fig. 11-3a muestra una red con E_1 aplicada a la izquierda e I_2 se lee en la derecha. Utilizando los valores numéricos de resistencia



(a)



(b)

FIG. 11-3. Ilustración del teorema de reciprocidad

dados (cualquier elemento de impedancia, real o complejo, puede utilizarse si se prefiere) I_2 puede calcularse por el método de escalera de la Sec. 5-10. Empezando con I_2 ,

$$V_{co} = 100I_2$$

$$I_{bc} = 2I_2$$

$$V_{bo} = 100I_2 + (2I_2)50 = 200I_2 \quad I_{bo} = \frac{200I_2}{10} = 20I_2$$

$$I_{ab} = 2I_2 + 20I_2 = 22I_2$$

$$V_{ao} = 200I_2 + (22I_2)2 = 244I_2 \quad I_2 = \frac{V_{ao}}{244} = \frac{E_1}{244} \quad (11-2)$$

Para demostrar el teorema de reciprocidad, la fuente de voltaje constante y el punto de medición de la corriente se intercambian como se muestra en la Fig. 11-3b. El resto de la red permanece sin cambiarse. Se calculan otra vez las corrientes y voltajes por el método de escalera, esta vez empezando con I_1 en el lado izquierdo:

$$V_{bo} = 2I_1$$

$$I_{bo} = \frac{2I_1}{10} = 0.2I_1$$

$$I_{cb} = I_1 + 0.2I_1 = 1.2I_1$$

$$V_{co} = 2I_1 + (1.2I_1)50 = 62I_1$$

$$I_{ceo} = \frac{62I_1}{100} = 0.62I_1$$

$$I_{dc} = 1.2I_1 + 0.62I_1 = 1.82I_1$$

$$V_{cd} = 62I_1 + (1.82I_1)100 = 244I_1 \quad I_1 = \frac{V_{cd}}{244} = \frac{E_2}{244} \quad (11-2a)$$

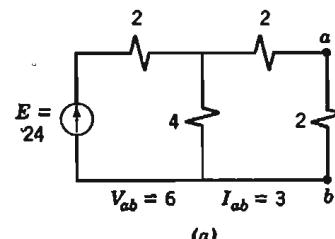
Ahora comparemos la Ecs. 11-2 y 11-2a; con la misma fuerza electromotriz en los dos casos la corriente en ambos casos es también igual.

Esto no indica que cualquier otro voltaje o corriente en la red sean lo mismo después de haberse hecho el intercambio. En el primer caso, por ejemplo, la corriente del generador es 22 veces la corriente medida, mientras que en el segundo caso, la corriente del generador es solamente 1.82 veces la corriente medida. En un caso, V_{bo} es 200 veces la corriente y en otro caso es 2 veces la corriente.

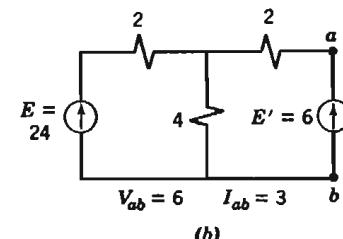
La reciprocidad se aplica, como se vio, entre un voltaje y una corriente, siendo uno la excitación y el otro la respuesta. No se aplica, sin embargo, entre dos voltajes en partes diferentes de una red, o entre dos corrientes.

7. Teorema de sustitución

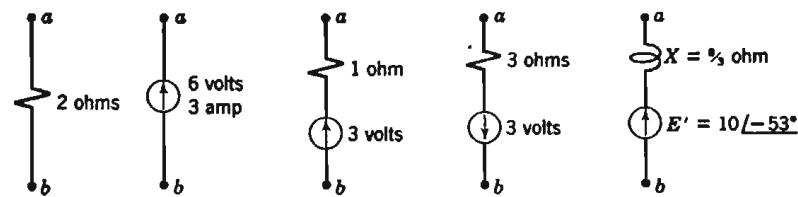
Si por una rama de una red circula la corriente I_{ab} , y el voltaje entre las terminales de la rama es V_{ab} , el teorema de sustitución dice



(a)



(b)



Cualquiera de estas ramas opera con $V_{ab} = 6$, $I_{ab} = 3$

(c)

FIG. 11-4. Ilustración del teorema de sustitución

que una rama diferente puede sustituirse en su lugar en la red siempre que la rama sustituta tenga también el voltaje V_{ab} cuando circula la corriente I_{ab} .

El uso más común de este teorema es para reemplazar un elemento de impedancia por una fuente, o viceversa. Así, en la Fig. 11-4a, el voltaje V_{ab} entre las terminales de la resistencia de 2 ohms es 6 volts. De acuerdo con el teorema de sustitución, esta resistencia puede reemplazarse por una fuente con un voltaje entre terminales de 6 volts y el resto de la red permanecerá sin afectar. Esta fuente equivalente de 6 volts se muestra en la Fig. 11-4b. La corriente en la rama será de 3 amperes, como antes.

Si se prefiere, son posibles otras sustituciones. Por ejemplo, la rama sustituta puede tener 1 ohm de resistencia y una fuente de 3 volts (ver Fig. 11-4c) o puede tener una resistencia de 3 ohms y una fuente que produzca 3 volts en la dirección opuesta (también mostrado en la Fig. 11-4c).

En los ejemplos anteriores, la corriente podría ser tanto directa como alterna. Consideremos un ejemplo en que es necesariamente corriente alterna. Esta vez, la rama sustituta tiene reactancia en serie con una fuente E' (Fig. 11-4c). Para esta rama.

$$V_{ab} = jX I_{ab} + E'$$

Supóngase que el valor de X se sabe que es igual a $\frac{8}{3}$ ohm y la fuerza electromotriz E' necesaria para satisfacer el teorema de sustitución debe encontrarse. Las condiciones para la sustitución son que $V_{ab} = 6$ e $I_{ab} = 3$; resolviendo para E' :

$$6 = j\frac{8}{3}3 + E' \quad \text{donde} \quad E' = 6 - j8 = 10 / -53.1^\circ$$

como se muestra en el diagrama.

La demostración del teorema de sustitución está basado en las ecuaciones de rama de la red. La operación de la red entera de B ramas está definida por $2B$ ecuaciones simultáneas, como se consideró en la Sec. 9-3. (Ver. Ecs. 9-1 2 y 3, por ejemplo). Para ser bastante general, supongamos que la rama para la que la sustitución se hace contiene una impedancia y una fuente. La ecuación para esta rama es

$$V_{ab} = Z_{ab} I_{ab} + E \quad (11-3)$$

El voltaje entre las terminales de esta rama es V_{ab} y la corriente

es I_{ab} . Los otros voltajes de rama en la red son V_{bc} , V_{cd}, \dots , y las corrientes son I_{bc} , I_{cd}, \dots , y todos esos voltajes y corrientes simultáneamente satisfacen las $2B$ ecuaciones de la red, incluyendo la Ec. 11-3.

Asumamos ahora, una rama sustituta que tenga un valor algo diferente de impedancia Z_{ab}' , y una fuerza electromotriz algo diferente E' , pero con Z_{ab}' y E' relacionadas en tal forma que los mismos valores de V_{ab} e I_{ab} que satisfacen la Ec. 11-3 satisfarán también la nueva ecuación de rama:

$$V_{ab} = Z_{ab}' I_{ab} + E' \quad (11-3a)$$

Cuando esta sustitución se ha hecho, la operación de la red alterada estará definida por $2B$ ecuaciones como antes; $(2B - 1)$ de las ecuaciones permanecerán las mismas, pero la Ec. 11-3a habrá reemplazado a la 11-3. Sin embargo, puesto que la Ec. 11-3a se satisface con los mismos valores de voltaje y corriente que satisfacen a la Ec. 11-3, se sigue que todo el grupo de ecuaciones simultáneas estarán satisfechas por los mismos voltajes y corrientes que antes. Los voltajes y corrientes de todas las ramas de la red serán por lo tanto, los mismos que antes de la sustitución, que es lo que debíamos probar. Es conveniente hacer notar que la fuente indicada en la Fig. 11-4b puede ser un generador conectado en el circuito y entonces ajustado hasta que su voltaje terminal sea de 6 volts; la corriente a través del generador tendrá que ser entonces de 3 amperes. Por otro lado, el generador podría conectarse en el circuito y entonces ajustarse hasta que su corriente fuese de 3 amperes, su voltaje terminal tendría que ser entonces de 6 volts. No existe una diferencia física entre un "generador de voltaje" y un "generador de corriente" excepto en el sistema de control.

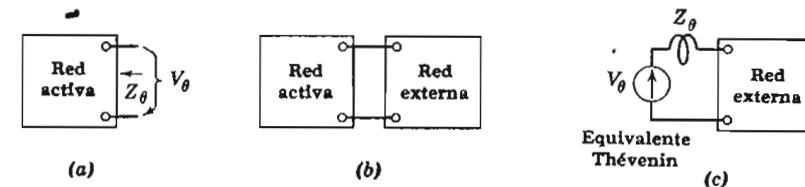


FIG. 11-5. Red activa; conectada a una red externa; su equivalente Thévenin

8. Teorema de Thévenin

La caja de la Fig. 11-5a contiene una red de impedancias y fuentes. La configuración de la red puede ser cualesquiera. Las fuentes pueden ser, ya sean de corriente constante o de voltaje constante. Las impedancias son lineales. El acceso a la red de la caja se obtiene por un par de terminales.

Cuando todas las fuentes que están dentro de la caja operan normalmente, un voltaje que podemos llamar V_θ aparece entre sus terminales. Este puede medirse con un voltímetro.

Cuando todas las fuentes, dentro de la caja se reducen a cero [las fuentes de voltaje constante a voltaje cero (corto circuito) y las fuentes de corriente constante a corriente cero (circuito abierto)] no aparecerá voltaje entre las terminales de la caja. La impedancia podrá, entonces, medirse colocando un puente de impedancia o cualquier otro instrumento de medición en sus terminales. Las impedancias así medidas se llaman Z_θ .

"El teorema de Thévenin dice que si usted conecta cualquier red lineal a las terminales de la caja, como en la Fig. 11-5b, la red activa dentro de la caja se comportará como si fuese solamente una fuente de voltaje constante igual a V_θ en serie con una única impedancia Z_θ como se muestra en la Fig. 11-5c."

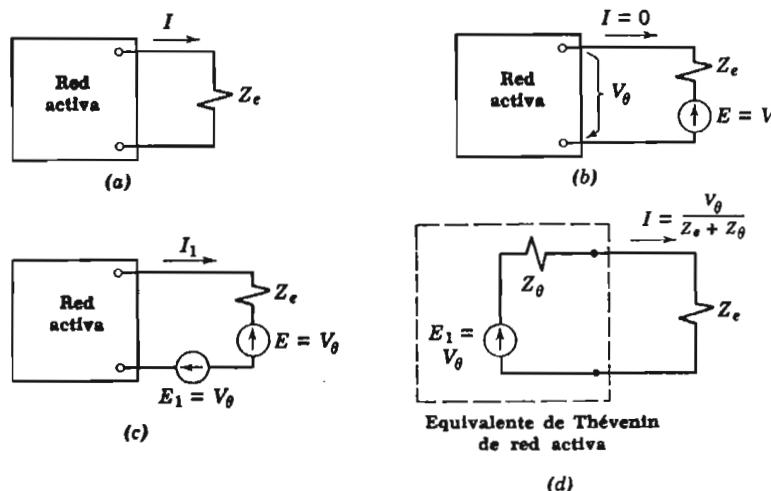


FIG. 11-6. Pasos de la demostración del teorema Thévenin

La *demonstración* del teorema de Thévenin hace uso de los teoremas de superposición y sustitución. Comienza con la red activa de la Fig. 11-5a con un voltaje terminal de V_θ . Se conecta una impedancia Z_e entre las terminales de esta red activa como en la Fig. 11-6a, y se encuentra la corriente I que circula por Z_e .

Una solución directa es difícil porque el voltaje terminal no seguirá siendo V_θ después de que Z_e se conecta, así es que se utilizará un expediente indirecto. Conectamos a las terminales de la red activa una impedancia Z_e y también, en la serie, una fuente con fuerza electromotriz E igual a V_θ pero directamente opuesta a V_θ , como en la Fig. 11-6b. En esta rama externa no fluirá corriente porque E balancea a V_θ .

A continuación insertemos en la rama otra fuente de fuerza electromotriz E_1 , que es igual a E pero en dirección opuesta. Ver Fig. 11-6c. Después de introducir esta nueva E_1 existe una corriente I_1 en la rama. La cantidad de corriente I_1 se determina con la ayuda del teorema de superposición: es la corriente que resultaría de E_1 actuando sola, habiendo sido reducidas a cero todas las fuentes dentro de la red activa y la otra fuente externa E . Es por lo tanto

$$I_1 = \frac{E_1}{Z_e + Z_\theta} = \frac{V_\theta}{Z_e + Z_\theta} \quad (11-4)$$

por lo cual Z_e es la impedancia externa a la caja y Z_θ es la impedancia que se observa dentro de la caja cuando sus fuentes son cero.

Ahora E y E_1 en la Fig. 11-6c cancelan una a la otra. El voltaje a través de ambas es cero. Por lo tanto, las dos pueden quitarse sin cambiar la corriente o cualquier otra cosa en la red y cuando se quita resulta la Fig. 11-6a. Por lo tanto I_1 es la corriente I que estábamos buscando; la corriente en la Fig. 11-6a, e I se calcula fácilmente de la Ec. 11-4:

$$I = \frac{V_\theta}{Z_e + Z_\theta} \quad (11-4a)$$

El circuito equivalente de la Fig. 11-6d ayuda para la visualización.

Z_e puede ser un elemento de impedancia único, o puede ser la impedancia de entrada de una red pasiva de cualquier grado de complicación. Si la red externa es activa, se sigue utilizando el teorema de Thévenin: la demostración es la misma excepto que E en la Fig. 11-6b debe ser entonces, lo suficientemente grande para ba-

lancear tanto a V_o como al voltaje terminal de la red externa para mantener la corriente en cero. E_i es por tanto la suma (o diferencia si están opuestos) de los voltajes terminales desconectados de las dos redes de la Fig. 11-5b. V_o y Z_o del equivalente de Thévenin de una red activa dada, son los mismos tanto si la red externa conectada es activa como pasiva.

Está claro que el equivalente de Thévenin es equivalente en las terminales y en el circuito externo, pero de ningún modo dentro de la red original. Por ejemplo, la potencia producida y la potencia disipada dentro de la red actual puede ser completamente diferente de la red producida y disipada en el equivalente de Thévenin. Pero la potencia transmitida al circuito externo es idéntica en la red actual y en el equivalente.

9. Teorema de Norton

Una variación del teorema de Thévenin, algunas veces llamado teorema de Norton, reduce la red activa de la Fig. 11-5 a una fuente de corriente constante I_o en paralelo con Z_o en lugar de una fuente de voltaje constante V_o en serie con Z_o . La relación es $I_o = V_o/Z_o$. Ver Fig. 11-7.

El teorema de Norton puede probarse independientemente, pero es más fácil suponer que una red activa cualesquiera se reduce primero por el teorema de Thévenin y entonces una fuente de corriente constante reemplaza a la fuente de voltaje constante de acuerdo con los principios de la Sec. 8 del Cap. 6 (Ecs. 6-26).

Una definición sencilla del teorema de Thévenin tanto como del de Norton es como sigue: *El voltaje de circuito abierto V_o y la corriente de cortocircuito I_o se miden (o se calculan) en un par de terminales de una red activa. La red activa es equivalente en estas terminales tanto a una fuente de voltaje constante V_o en serie con una impedancia Z_o como alternativamente a una fuente de corriente constante I_o en paralelo con la misma Z_o .*

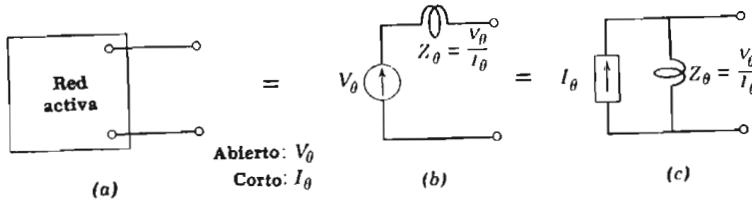


FIG. 11-7. Teoremas de Thévenin y Norton

te de cortocircuito I_o se miden (o se calculan) en un par de terminales de una red activa. La red activa es equivalente en estas terminales tanto a una fuente de voltaje constante V_o en serie con una impedancia Z_o como alternativamente a una fuente de corriente constante I_o en paralelo con la misma Z_o .

minales, tanto a una fuente de voltaje constante V_o en serie con una impedancia $Z_o = V_o/I_o$, como alternativamente a una fuente de corriente constante I_o en paralelo con la misma Z_o . Ver Fig. 11-7.

10. Ejemplos

Los teoremas de Thévenin y Norton son a menudo más útiles cuando una serie de cálculos incluye el cambio de una parte de una red mientras que otra parte permanece constante. La parte constante puede reducirse a su equivalente de Thévenin de una vez y entonces el cálculo total puede reducirse grandemente.

EJEMPLO 1. Considérese el puente de Wheatstone desbalanceado de la Fig. 11-8a. El elemento marcado R_g es la resistencia de un galvanómetro para balancear el puente. La sensibilidad del puente depende de la deflexión de este galvanómetro, y por tanto, de la corriente que pasa por él. Si se desea encontrar la corriente cuando R_g tiene los valores de 0, 1, 10 y 100 ohms.

Primero, encontrar el equivalente de Thévenin de la red omitiendo a R_g . Para encontrar Z_o redúzcase E a cero, haciendo un corto circuito de c a o y combinando las cuatro resistencias constantes en paralelo y en serie como se indica en la Fig. 11-8b:

$$Z_o = \frac{100}{2} + \frac{90 \cdot 110}{90 + 110} = 50 + 49.5 = 99.5$$

V_o se encuentra calculando el voltaje entre a y b sin R_g :

$$V_o = V_{ao} - V_{bo} = \frac{100}{200} 10.0 - \frac{90}{200} 10.0 = 0.50$$

Por tanto, el circuito equivalente es el de la Fig. 11-8c.

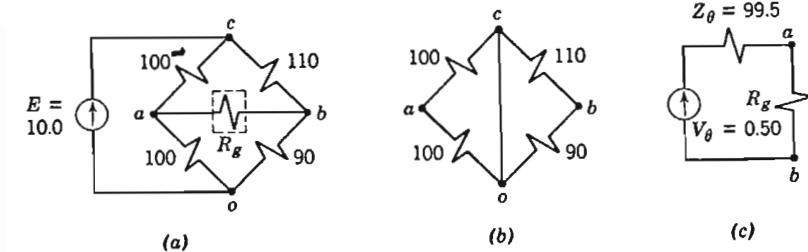


FIG. 11-8. Ejemplo del teorema de Thévenin

La corriente que pasa por el galvanómetro se encuentra ahora sustituyendo los diferentes valores de R_g en

	$I_g = \frac{V_\theta}{R_g + Z_\theta} = \frac{0.50}{R_g + 99.5}$
$R_g = 0$	1
$R_g + 99.5 = 99.5$	100.5
$I_g \cdot 10^3 = 5.02$	4.97
	10
	100
$R_g + 99.5 = 109.5$	199.5
	4.56
	2.50

La tercera fila da la corriente en el galvanómetro en miliamperes.

Puesto que la sensibilidad del galvanómetro en divisiones de la escala por miliampere está relacionada con el número de vueltas en la bobina móvil, estará también relacionada a la resistencia del galvanómetro. Se notará que existen mejores valores de R_g . Claramente un galvanómetro de resistencia infinita no tendría uso porque no dejaría pasar corriente; un galvanómetro de resistencia cero, también sería igualmente inútil porque no tendría sensibilidad. La elección de un instrumento puede hacerse cuando la resistencia, sensibilidad, y precio de los galvanómetros disponibles se conoce.

Es digno de notarse que la solución de este problema sin el teorema de Thévenin hubiera sido mucho menos fácil.

EJEMPLO 2. R_e es una resistencia hipotética para representar las pérdidas por corrientes de Eddy en el acoplamiento por transformador de un amplificador para el que el circuito equivalente se

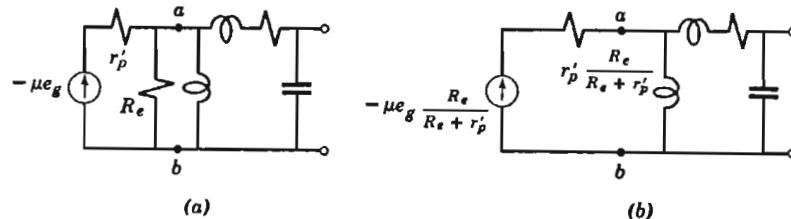


FIG. 11-9. Aplicación del teorema de Thévenin a un circuito equivalente de un amplificador acoplado por transformador

muestra en la Fig. 11-9a. Esta resistencia puede tomarse más convenientemente en cuenta modificando el factor de amplificación y resistencia de placa por el teorema de Thévenin como sigue.*

El circuito equivalente se corta en las terminales $a-b$ y la parte

* Radio Engineering de Terman, Referencia 19, Pág. 242.

de la izquierda se reduce a una sola fuente y una resistencia. El voltaje equivalente de Thévenin, voltaje entre a y b cuando se desconecta, es

$$V_\theta = \frac{R_e}{R_e + r_p'} (-\mu e_g)$$

La impedancia de Thévenin, mirando hacia la izquierda de las terminales $a-b$ con la fuente reducida a cero es,

$$Z_\theta = \frac{R_e r_p'}{R_e + r_p'} = r_p' \frac{R_e}{R_e + r_p'}$$

La Fig. 11-9b, que tiene una fuente de fuerza electromotriz modificada y una resistencia de placa modificada, es por tanto equivalente a la Fig. 11-9a.

EJEMPLO 3. La Fig. 11-10a muestra un circuito equivalente simplificado que representa un triodo amplificador de potencia en su rango de baja frecuencia.* Para estudiar el efecto de los cambios de resistencia de carga R_L , es útil reducir el resto del circuito a su equivalente de Thévenin.

Z_θ mirando hacia la izquierda de $a-b$ es

$$Z_\theta = R_2 + \frac{(R_1 + r_p)j\omega L_p}{R_1 + r_p + j\omega L_p} = R_2 + \frac{jX r_p'}{r_p' + jX} \quad (11-5)$$

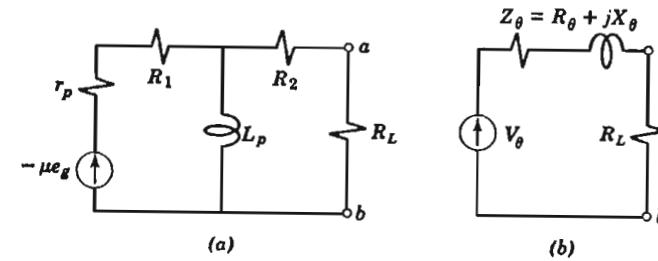


FIG. 11-10. Aplicación del teorema de Thévenin a un amplificador de potencia y el voltaje de circuito abierto entre a y b es

$$V_\theta = \frac{j\omega L_p}{r_p + R_1 + j\omega L_p} (-\mu e_g) = \frac{jX}{r_p' + jX} (-\mu e_g) \quad (11-6)$$

* Terman, Referencia 19, Pág. 291.

donde se usaron las siguientes abreviaturas:

$$X = \omega L_p \quad y \quad r_p' = r_p + R_1$$

Estos valores de Z_o y V_o son para utilizarse en la Fig. 11-10b.

En el uso de este circuito equivalente, puede o puede no ser necesario conocer las componentes real e imaginaria de Z_o . Para la mayoría de los propósitos es mejor encontrar las componentes de la Ec. 11-5, ya que

$$R_\theta = R_2 + r_p' \frac{X^2}{r_p'^2 + X^2} \quad X_\theta = X \frac{r_p'^2}{r_p'^2 + X^2} \quad (11-7)$$

11. Teorema de compensación

Es algunas veces necesario saber, cuando se hace un cambio en una rama de una red, qué efecto tendrá este cambio en las varias corrientes y voltajes del resto de la red. Por ejemplo, ¿Cuál es el efecto de colocar un amperímetro en una red, siendo la resistencia del amperímetro pequeña pero posiblemente no despreciable? O suponiendo que un condensador del tamaño exacto requerido para una red no se puede obtener, ¿qué diferencia producirá si se utiliza un condensador mayor o menor?

"Si la corriente en una rama de una red es I y la impedancia de esta rama se incrementa una cantidad δZ , el incremento de corriente y voltaje en cada rama de la red es la corriente o voltaje que sería producida por una fuerza electromotriz opuesta igual a $I(\delta Z)$ colocada en la rama modificada después de la modificación."

Esto se llama el teorema de compensación (o teorema de alteración o teorema de sustitución; la literatura no es siempre consistente al nombrar los teoremas). Sigue la demostración.

La Fig. 11-11a muestra una red lineal representada por una caja pero con una rama de la red lineal sobresaliendo de ella; esta es la rama que se modificará. La corriente en esta rama es I . En la Fig. 11-11b se han añadido una impedancia incremental δZ y una fuente de fuerza electromotriz δE a esta rama externa. δE se ajusta de tal manera que la corriente en la rama sigue siendo I ; esto requiere que $\delta E = I(\delta Z)$, para que la fuerza electromotriz sea compensada exactamente para la caída de voltaje en la impedancia incremental, haciendo el voltaje total entre las terminales de los dos elementos añadidos igual a cero.

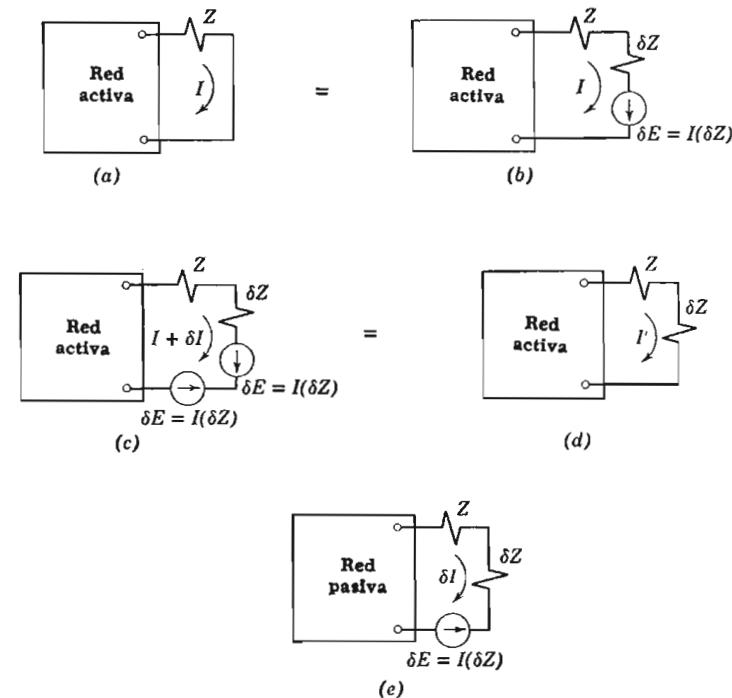
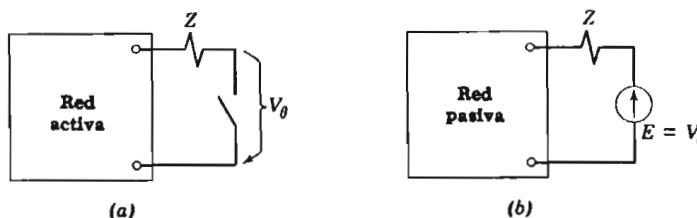


FIG. 11-11. Teorema de compensación

En la Fig. 11-11c se añade otra fuente, con la misma magnitud de fuerza electromotriz pero dirigida opuestamente. Después de que se ha añadido esta segunda fuente, la corriente tiene un nuevo valor I' , que difiere de la corriente original en el incremento δI puesto que $I' = I + \delta I$. Según el teorema de superposición, δI es la corriente que se produciría en la rama modificada debido a esta nueva fuente actuando sola; ver Fig. 11-11e. Si Z' se utiliza para significar la suma de δZ más Z más la impedancia terminal de la red pasiva, entonces $\delta I = -\delta E/Z'$. (Nótese que si δZ es positiva, δI es negativa). Existen también incrementos correspondientes de corriente en cada rama de la red igual a las corrientes producidas en cada rama por la nueva fuente sola.

Pero las dos fuentes pueden quitarse de la red de la Fig. 11-11c sin afectar la red, porque son iguales y opuestas, cuando se hace esto, como en la Fig. 11-11d, permanece la red original modificada por la suma de δZ .

FIG. 11-12. Un caso especial: $\delta Z = \infty$

Puesto que todas las corrientes de red en la Fig. 11-11c difieren de las corrientes originales por un incremento igual a la corriente que habría producido una fuente con una fuerza electromotriz $\delta E = I(\delta Z)$, se sigue que todas las corrientes de red en la Fig. 11-11d difieren de las corrientes originales por la misma cantidad. Todos los *incrementos* de corriente y por tanto de voltaje que resultan a través de la red por la adición de δZ pueden entonces encontrarse resolviendo para las corrientes y voltajes en la red pasiva de la Fig. 11-11e. Este es el teorema de compensación.

Un caso especial requiere principal atención. Si la rama externa de la Fig. 11-11a se abriera, ya sea cortando el alambre o abriendo un interruptor (ver Fig. 11-12a), esto correspondería a insertar una impedancia incremental infinita y el teorema de compensación seguiría siendo aplicable. Debe utilizarse un método diferente de aproximación. Para tener el mismo efecto que al abrir la rama, se inserta una fuente con fuerza electromotriz igual a V_0 , el voltaje terminal de la caja con la rama abierta. Las corrientes y voltajes incrementales a través de la red, se encuentran entonces de la Fig. 11-12b, con una fuerza electromotriz igual a V_0 insertada en la rama con su impedancia *sin modificar*, y toda la fuente dentro de la red reducidas a cero. V_0 , es por supuesto, el voltaje equivalente de Thévenin para la red dentro de la caja, compárense las Figs. 11-6b y 11-12b.

12. Ejemplos

Un problema extremadamente simple mostrará cómo se aplica el teorema de compensación.

EJEMPLO 1. La Fig. 11-13a muestra un generador alimentando dos cargas de 4 ohms a través de líneas con resistencia de 1 ohm cada una. Primero deseamos resolver para I_{ab} . Utilicemos el método de escalera. $V_{cd} = 5I_{ab}$.

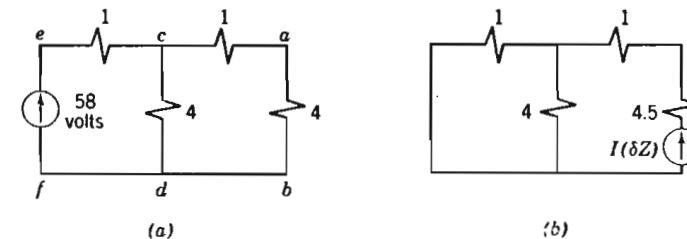


FIG. 11-13. Inserción de un amperímetro

$$I_{cd} = 5I_{ab}/4 = 1.25I_{ab}, I_{ee} = 2.25I_{ab}, V_{ef} = 5I_{ab} + 2.25I_{ab} = 7.25I_{ab} = 58 \text{ volts (dato). Por lo tanto } I_{ab} = 58/7.25 = 8.0 \text{ amperes.}$$

¿Qué sucederá con I_{ab} si un amperímetro con resistencia de 0.5 ohms se inserta en la rama $a-b$? El teorema de compensación nos dice que la corriente incremental puede calcularse de la Fig. 11-13b. $\delta E = I(\delta Z) = 8.0(0.5) = 4.0$. La impedancia sobre la que δE está trabajando es

$$Z' = 4.5 + 1.0 + \frac{(4)(1)}{4 + 1} = 6.3$$

El incremento de corriente debido a la inserción del amperímetro es por lo tanto

$$\delta I = -\frac{\delta E}{Z'} = -\frac{4.0}{6.3} = -0.635$$

El incremento negativo significa, por supuesto, una disminución y la corriente que pasa por la rama después de la inserción del amperímetro es

$$I' = 8.0 - 0.635 = 7.365$$

Existe un *corolario* útil en el teorema de compensación que obliga a trabajar este problema hacia atrás. Si el amperímetro lee I' , ¿cuál es la lectura correcta?, ¿cuál era la corriente antes de que el amperímetro se insertara? La corriente correcta era I , la resistencia del amperímetro es δZ , y la impedancia vista en la red incluyendo la resistencia del amperímetro es Z' . De acuerdo con el teorema de

compensación, el incremento de corriente por la inserción del amperímetro es

$$\delta I = -\frac{I(\delta Z)}{Z'} \quad (11-8)$$

Por lo tanto, la lectura del amperímetro es

$$I' = I + \delta I = I \left(1 - \frac{\delta Z}{Z'}\right) \quad (11-9)$$

Resolviendo para la corriente correcta en función de la lectura del amperímetro:

$$I = I' \frac{Z'}{Z' - \delta Z} \quad (11-10)$$

donde Z' es "la impedancia vista por el amperímetro" incluyendo la resistencia del amperímetro δZ . Esta es quizás la forma más valiosa del teorema de compensación.

EJEMPLO 2. Utilicemos, como un ejemplo numérico, los datos del ejemplo 1. El amperímetro lee 7.365 amperes. Su resistencia es de 0.5 ohms (este valor, excesivamente alto se utiliza para hacer mayor el efecto de la inserción del amperímetro). Z' se encontró igual a 6.3 ohms. ¿Cuál es la lectura correcta del amperímetro—la lectura de un amperímetro ideal sin resistencia?

Utilizando la Ec. 11-8

$$I = 7.365 \frac{6.3}{6.3 - 0.5} = 8.0 \text{ amperes}$$

Que ésta es la respuesta correcta puede verse echando otra ojeada al primer párrafo del ejemplo 1.

EJEMPLO 3. Si es adecuada una respuesta aproximada podemos despreciar los pequeños efectos, como en el siguiente problema de puente.

La Fig. 11-14a muestra el mismo circuito de puente que fue utilizado en la Fig. 11-8, excepto que ahora está sólo ligeramente desbalanceado. El problema es encontrar cuánta corriente pasará por el galvanómetro (el elemento central de 10 ohms) para 1 ohm de desbalance en uno de los brazos. Sólo es necesario conocer la corriente aproximada para determinar si un galvanómetro dará

la sensibilidad adecuada un error de 25% no tiene realmente importancia.

Una solución fácil comienza con el teorema de compensación. Si el puente estuviese balanceado, con 100 ohms en cada rama, no existiría corriente en el galvanómetro. El efecto de 1 ohm adicional en la rama *b-o* es el de producir la misma corriente que resultaría de una fuerza electromotriz opuesta de magnitud $I(\delta Z)$. Puesto que I_{bo} es $10/200 = 0.05$ amperes y δZ es 1 ohm, colocaremos una fuerza electromotriz de 0.05 volts en la rama *b-o* de la Fig. 11-14b.

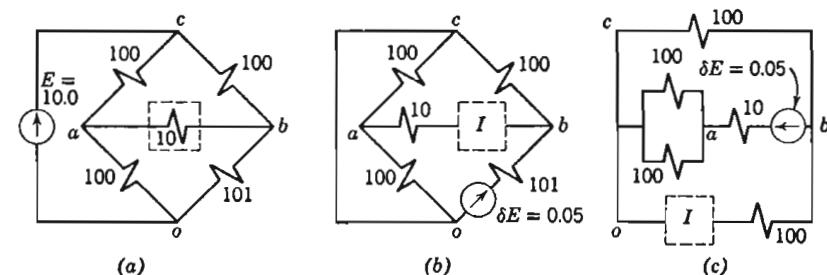


FIG. 11-14. Puente desbalanceado

No existe en la Fig. 11-14b una forma fácil obvia de encontrar la corriente en el amperímetro I producida por la fuente δE . En la consideración de cómo evitar trabajar más de lo necesario, pensamos en el teorema de reciprocidad que nos permitiría intercambiar el amperímetro I y la fuente δE . Hagámoslo en esta forma. Cuando se intercambia, y el diagrama se arregla para simplificarlo en la Fig. 11-14c, no es difícil de ver que la corriente producida en I por δE estará muy cercana a

$$\delta I = \frac{1.05}{2110} = 0.00023 \text{ ampere o } 0.23 \text{ miliampere}$$

Esta es, por lo tanto, la corriente que debe esperarse en el galvanómetro del puente cuando existe un desbalance de 1 ohm en uno de los brazos con más o menos desbalance, la corriente en el galvanómetro será aproximadamente proporcional al desbalance.

(En el ejemplo 1 de la Sec. 10 se asumió que éste puente estaba desbalanceado 10 ohms en una rama y 10 ohms más en la otra. Si la presente estimación es digna de confianza la corriente resultante de este desbalance total de 20 ohms en el ejemplo pre-

vio sería del orden de 20 veces 0.23 miliampères o 4.6 miliampères. El cálculo exacto en el ejemplo previo da 4.56 miliampères para el resultado correspondiente, que concuerda más de lo que teníamos derecho de esperar).

13. Teorema de Millman

El inconveniente de utilizar la superposición, que esencialmente requiere que un problema se trabaje completamente para cada fuente presente, puede algunas veces evitarse por el teorema de Millman. Si existen algunas fuentes en una red, pueden combinarse en una sola fuente.

La Fig. 11-15 muestra cómo puede hacerse esto cuando tres

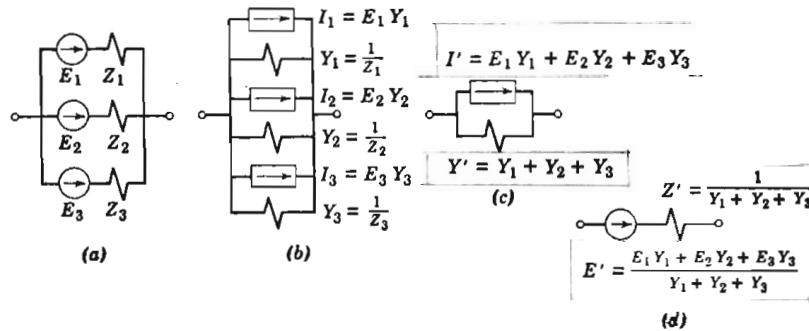


FIG. 11-15. Desarrollo del teorema de Millman

fuentes de voltaje constante y sus tres impedancias en serie asociadas constituyen parte o toda una red. El mismo método se aplica si existen más o menos de tres fuentes.

La Fig. 11-15a muestra tres fuentes de voltaje constante; en (b) éstas se han cambiado a las fuentes de corriente constante equivalentes. Las tres fuentes de corriente constante equivalentes se suman para dar una sola fuente de corriente constante equivalente con una sola admittance en paralelo en (c) y (d) muestra la fuente de voltaje constante única equivalente. La fuente equivalente única y la impedancia, E' y Z' , tienen los valores derivados en la figura.

EJEMPLO. La Fig. 11-16 muestra una red de simple resistencia con dos fuentes de voltaje constante. Los ohms y volts están dados en el diagrama. El problema es el encontrar I en la rama de mano derecha.

Las ramas que contienen E_1 y E_2 se combinarán por el teorema de Millman y las ramas a la derecha de E_2 se combinarán en una sola impedancia Z'' . Para encontrar Z'' :

$$Z'' = 2 + \frac{(11)(9)}{11 + 9} = 2 + 4.95 = 6.95$$

Para utilizar el teorema de Millman nosotros podemos calcular $Y_1 = 1/Z_1 = \frac{1}{2}$ y $Y_2 = 1/Z_2 = \frac{1}{2}$ también. La fuente de voltaje constante única equivalente se encontrará entonces de la Fig. 11-15d:

$$E' = \frac{\frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}E_2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{12 + 10}{1} = 22$$

La impedancia asociada en serie, de la misma figura es

$$Z' = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

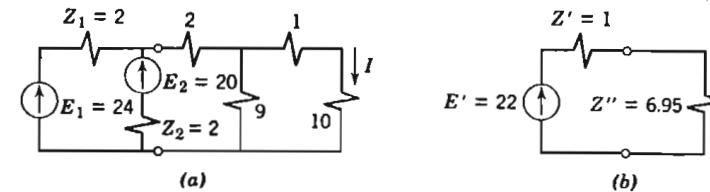


FIG. 11-16. Ejemplo del teorema de Millman

Así, la Fig. 11-16b es equivalente a la Fig. 11-16a en la corriente total, pero deseamos encontrar solamente la corriente en la rama de 10 ohms; ésta será 9/20 del total, así

$$I = \frac{9}{20} \frac{22}{7.95} = 1.246$$

Esta es la respuesta deseada. Como una comprobación y para comparación de dificultad de solución, resolvamos el mismo problema por otros métodos. Existen dos modos obvios: la superposición y la solución simultánea de las ecuaciones de malla. Utilicemos el último, usando el método de la Sec. 1 del Cap. 10.

Las matrices $[Z]$ y $[E]$ de la red de tres mallas pueden escribirse por inspección:

$$[Z] = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 13 & -9 \\ 0 & -9 & 20 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 4 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El determinante de $[Z]$ se calcula que es

$$D = 1040 - (80 + 324) = 636$$

I_3 , la corriente en la tercera malla, es la corriente deseada y (según la Ec. 10-2):

$$I_3 = \frac{N_3}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 13 & 20 \\ 0 & -9 & 0 \end{vmatrix}}{636} = \frac{72 + 720}{636} = 1.246$$

Esta respuesta coincide con la obtenida por el teorema de Millman. La cantidad de trabajo requerido aparece como algo mayor en la segunda solución. Además, las ocasiones de error aritmético son probablemente algo menores cuando se utiliza el teorema de Millman, porque cada paso puede comprobarse para ver que está dentro de razón.

El dual del teorema de Millman comienza con algunas fuentes de corriente constante con sus admitancias asociadas en paralelo, conectadas en serie una a otra. El desarrollo las convierte a fuentes de voltaje constante equivalentes con impedancias asociadas en serie, las combina, y finalmente convierte la combinación en una fuente de corriente constante única con una admittance en paralelo única. Los detalles pueden obtenerse fácilmente si este teorema poco común se llegara a necesitar.

14. Teorema de máxima transferencia de potencia

Demostrac
pag 152

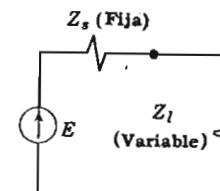
Cuando una fuente con fuerza electromotriz constante E (Fig. 11-17) alimenta una carga de impedancia Z_l a través de un valor fijo de impedancia serie Z_s (que puede incluir la impedancia interna de la fuente), la carga estará recibiendo la potencia máxima si su impedancia es la conjugada de Z_s .

Si Z_s fuese una resistencia pura, Z_l tendría que ser una resistencia igual para recibir la potencia máxima. Si Z_s fuese algo inductiva, Z_l necesitaría ser algo capacitiva, siendo sus reactancias respectivamente iguales y opuestas. Esto es, para la transferencia de potencia máxima

$$Z_l = Z_s^* \quad R_l = R_s \quad X_l = -X_s \quad (11-11)$$

$$Z_s = R_s + j X_s$$

$$Z_l = R_l + j X_l$$



$$P_l = I^2 R_l = \left(\frac{E}{Z_s + Z_l} \right)^2 R_l =$$

FIG. 11-17. Transferencia máxima de potencia

$$\frac{E^2 R_l}{[(R_s + R_l) + j(X_s + X_l)]/T^2}$$

La demostración de este teorema no necesita darse aquí, porque fue efectuada como ejemplo 4 de la Sec. 4-16 (ver Pág. 151). La demostración completa se encontrará ahí.

Según el teorema de Thévenin, la fuente E y la impedancia de la fuente Z_s pueden ser los equivalentes de una red activa más complicada. Por lo tanto, el teorema de Thévenin da al teorema de transferencia de potencia máxima una aplicación extremadamente general.

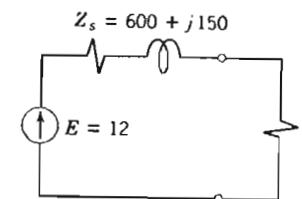


FIG. 11-18. Se requiere la potencia máxima para Z

Está claro que una carga puede ajustarse para recibir la potencia máxima solamente si su resistencia y reactancia pueden ambas variarse independientemente. Si la magnitud de Z_l pudiera cambiarse pero la razón de X_l a R_l fuese necesariamente constante (ángulo de fase constante, factor de potencia constante, en la carga) sería en general imposible obtener una transferencia de potencia tan grande como la que se podría si se ajustara separadamente. La transferencia de potencia máxima, bajo la condición limitadora de que el ángulo de fase es constante, se obtiene cuando la magnitud de

la impedancia de la carga es igual a la magnitud de Z_t :

$$|Z_t| = |Z_s| \quad (11-12)$$

La demostración de la Ec. 11-12 se obtiene más fácilmente diferenciando la fórmula para la potencia de la Ec. 4-39 con respecto a $|Z_t|$. Antes de diferenciar, V_t e I se expresan en función de E , $|Z_s|$, $|Z_t|$ y los ángulos de Z_s y Z_t . La única variable es $|Z_t|$, y después de una larga pero no difícil manipulación de álgebra, llega a ser igual a $|Z_s|$ como en la Ec. 11-12.

La Ec. 11-12 encuentra frecuente uso práctico en emparejar una carga para recibir tanta potencia como sea posible de una fuente si los ángulos de fase de las impedancias se pasan por alto. Si los ángulos de Z_t y Z_s son pequeños, probablemente no vale la pena añadir reactancia a la carga con el propósito de hacer las impedancias conjugadas. Como ilustra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO. La Fig. 11-18 muestra una fuente de 12 volts alimentando una carga de impedancia Z a través de $600 + j150$ ohms. Encontrar la impedancia de la carga para obtener la potencia máxima, y la potencia recibida. Encontrar también, la resistencia óptima si la carga debe ser no reactiva, y encontrar la potencia recibida.

Para la transferencia de potencia máxima según la Ec. 11-11:

$$Z_s = 600 + j150$$

$$Z = 600 - j150$$

$$I = \frac{12}{600 + j150 + 600 - j150} = \frac{12}{1200}$$

$$= 0.01 \text{ ampere or } 10 \text{ miliampères}$$

$$P = |I|^2 R = (0.01)^2 600 = 0.06 \text{ watt or } 60 \text{ miliwatts}$$

Para la máxima potencia a una carga puramente resistiva, utilizando la Ec. 11-12:

$$Z_s = 600 + j150 = 618 / -14.03^\circ$$

$$Z = R = 618$$

$$|I| = \frac{12}{600 + j150 + 618} = \frac{12}{1225}$$

$$= 9.80 \cdot 10^{-3} \text{ ampere or } 9.80 \text{ miliampères}$$

$$P = |I|^2 R = (9.80)^2 (618) 10^{-6} = 59.3 \cdot 10^{-3} \text{ watt or } 59.3 \text{ miliwatts}$$

Es difícil de imaginar una situación en la que la ganancia de una fracción adicional de un miliwatt que es posible teóricamente, justificará el gasto de añadir un condensador a la carga.

La igualación de impedancia, principalmente con el propósito de obtener la máxima potencia a la carga, es importante en prácticamente toda la ingeniería de comunicaciones. Se verá que la igualación en conjugados es ideal, pero en la práctica, tanto la impedancia de la fuente, como la impedancia de la carga son principalmente resistivas y a menudo es suficiente hacer sus impedancias iguales de magnitud. Aunque una igualación exacta no es necesaria actualmente, el principio general de igualar impedancias no debe olvidarse.

Por otro lado, en la ingeniería de transmisión de potencia, la condición de transferencia máxima de potencia no se desea. Está claro de la condición para transferencia de potencia máxima, y está ilustrado por el ejemplo, que cuando la carga está recibiendo la máxima potencia posible de una fuente dada, se pierde una cantidad igual de potencia en Z_s . Esto significa que la eficiencia de la transmisión de potencia es sólo de 50%. También significa que el voltaje terminal cae a la mitad cuando se aplica la máxima carga. Nada de esto es tolerable en un sistema de potencia.

En ingeniería de comunicación, el objetivo es recibir una señal útil de un transmisor dado; no existe diferencia en cuanta de la potencia se pierde si la señal recibida es buena. En ingeniería de transmisión de potencia, el objetivo es llevar una gran proporción de la potencia generada al consumidor y proveerlo con un voltaje terminal razonablemente constante.

15. Sumario

Los teoremas de las siguientes listas son todos bastante generales en su aplicación. Se aplican igualmente a las grandes corrientes de los sistemas de potencia y a las pequeñas corrientes de los circuitos de comunicación, a bajas frecuencias y a altas, a redes simples y a aquéllas que son más complicadas. Quizás el mejor método para utilizar estos teoremas es tenerlos en la mente y revisarlos mentalmente cuando se empiece un problema de redes de cualquier magnitud para ver que no se omitan los atajos fáciles.

El teorema de superposición (o principio), Sec. 11-2, es para utilizarse cuando existen algunas fuentes; permite considerar las fuentes separadamente. También, si una fuente (u otro elemento) no se comporta de una manera simple como función de tiempo, su comportamiento puede analizarse por partes que se considerarán separadamente y los resultados se sobreponen (análisis armónico, Cap. 14; también respuesta transitoria para variar la fuerza electromotriz).

Teorema de reciprocidad (Sec. 11-5), intercambio de una fuente y un punto de medición, puede colocar la fuente en un lugar más conveniente para el análisis.

Teorema de sustitución (Sec. 11-7) permite sustituir una fuente por un elemento de impedancia o viceversa. Es más útil el trabajo teórico que en obtener soluciones numéricas, porque usualmente una sustitución numérica no puede hacerse hasta que la solución se conoce.

Permutación de fuentes (Sec. 6-8) permite la sustitución de una fuente de corriente constante por una fuente de voltaje constante y viceversa. La primera es la más conveniente para escribir las ecuaciones de nodo, la segunda para las ecuaciones de malla. Puede ser posible después de hacer esta sustitución en una red, sumar elementos de admitancia en paralelo o sumar elementos de impedancia en serie.

Teorema de Thévenin y teorema de Norton (Secs. 11-8 y 9) son útiles especialmente en dos clases de problemas: (1) para sustituir un circuito simple en vez de una parte de una red que permanece constante mientras otra parte de la misma toma varios valores y (2) para analizar una red que puede dividirse en dos partes, cada una de las cuales es fácil de analizar mientras que la red total es más difícil.

Teorema de compensación (Sec. 11-11), relacionado muy de cerca con el teorema de Thévenin, da el efecto en todas las partes de una red producida por un cambio de impedancia en una rama de la red. Un corolario (Sec. 11-12) da la lectura correcta de un amperímetro cuando la corriente en una rama se ha cambiado por la inserción de la resistencia del amperímetro.

Teorema de Millman (Sec. 11-13) permite combinar algunas fuentes en una sola fuente equivalente. Para las redes en que es aplicable es un método más fácil que el de superposición.

Sustitución Y-Δ y estrella-malla (Secs. 6-3 y 4) permite la

simplificación de redes por la combinación de elementos de impedancia en serie o paralelo después de la sustitución.

Otros teoremas se han discutido pero no pertenecen a esta lista de teoremas que asisten en el análisis de redes. El teorema de transferencia de máxima potencia (Sec. 11-14) es uno de ellos, el teorema de reactancia de Foster (Sec. 8-17) es otro, y hay algunos otros en la Sec. 8-17 relacionados con la curva de reactancia y en las Secs. 8-6, 8 y 12 relacionados con la curva de lugares geométricos. Algunos teoremas referentes a resonancia están incluidos en el Cap. 7. La referencia con lo que algunas veces se llama teorema de enlaces de flujo constantes se encuentra en la Sec. 1-4 y Sec. 17-13 (Ej. 3).

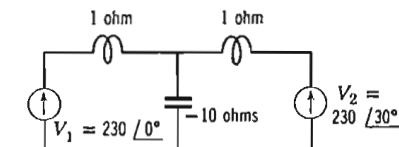
PROBLEMAS

1. En el Ej. 1, Sec. 3, se encontraron las corrientes por los métodos de superposición para la red de la Fig. 11-1. Calcular las mismas tres corrientes por la solución de las ecuaciones de malla para verificar el resultado. § 3

✓ 2. Encontrar las corrientes en las ramas de la Fig. 9-4 por superposición. § 3

3. Repita el Prob. 14 del Cap. 9 por superposición. § 4

4. El diagrama muestra una red (como se encuentran en transmisión de potencia) con dos generadores. Encontrar la potencia P que está



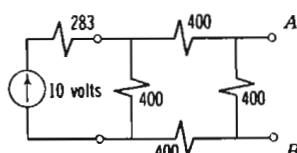
Prob. 4

mandando uno al otro, y decir cuál está produciendo y cuál absorbiendo potencia eléctrica. Dibujar los diagramas fasoriales para su propia guía. Resuélvase por dos métodos: (a) superposición, y (b) cambio de fuentes o sustitución Δ-Y. § 3

5. Demuestre que si una fuente de corriente constante única en una red y voltímetro ideal (teniendo resistencia infinita) se intercambian, la lectura del voltímetro permanecerá como antes. § 5

6. En la Fig. 11-8a, hágase R_y igual a 10 ohms. Por cualquier método, encontrar todas las corrientes de rama. Entonces, muévase la fuente E para estar en serie con R_y , y nuevamente encuéntrense todas las corrientes de rama. ¿Ilustra esto el teorema de reciprocidad? § 6

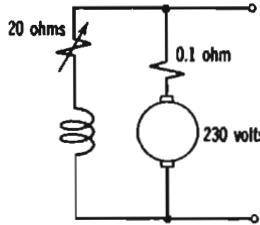
7. En la Fig. 10-3, Sec. 10-8, encontrar V_{BC} . A continuación muévase la fuente de corriente de su posición indicada a una posición entre los nodos B y C, y encuéntrese V_{AC} . § 6



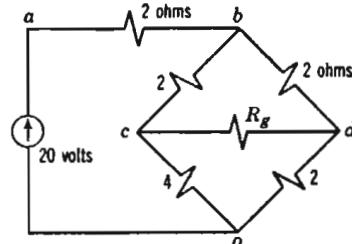
Prob. 8

9. La fuente 1 en el circuito del Prob. 8, es un generador sin impedancia interna. Se desea sustituirlo por un generador con 1 ohm de reactancia inductiva interna. Supóngase que la corriente en la fuente 1 es de $10 + j0$ amperes, ¿cuál debe ser la fuerza electromotriz en el nuevo generador si las corrientes y voltajes a través de todo el resto del sistema deben permanecer como antes? § 7

10. El diagrama muestra un generador con excitación en paralelo. Encontrar (a) el equivalente Thévenin y (b) el equivalente Norton de este circuito. Para la operación de corriente continua considérese solamente resistencia. § 9



Prob. 10

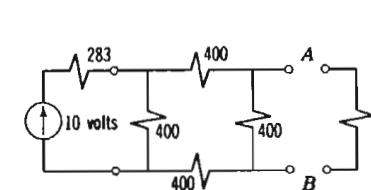


Prob. 11

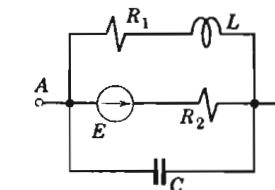
11. El diagrama muestra un circuito de fuente desbalanceado. Encontrar la corriente del galvanómetro I_{cd} si la resistencia del galvanómetro R_g tiene los siguientes valores: (a) 0.1, (b) 0.5, (c) 1.0, (d) 2.0 ohms. Utilícese el teorema de Thévenin. § 8

12. Resuélvase el Prob. 16 del Cap. 9 por medio de (a) teorema de superposición y (b) teorema de Thévenin. (En la última considérese cuidadosamente cuál es el mejor lugar para cortar la red). § 8

13. El diagrama muestra un "atenuador" como los usados en los sistemas telefónicos para reducir voltaje y corriente. Las resistencias están dadas en ohms. Una carga R para ser conectada entre las terminales A y B. Encontrar la potencia a la carga si R iguala (a) 200 ohms, (b) 283 ohms, (c) 350 ohms. § 8



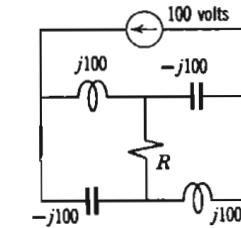
Prob. 13



Prob. 14

14. Se desea sustituir por el circuito mostrado su equivalente Thévenin entre las terminales A y B. $R_1 = R_2 = 5$ ohms, $L = 25$ milihenrys y $C = 0.25$ microfarads. $E = 50$ milivoltos; la frecuencia es de 5 kc/seg. § 10

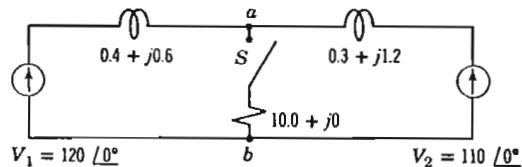
15. El diagrama muestra un tipo de circuito que es útil con el propósito que su resolución se haga evidente. Encontrar la corriente que pasa por la resistencia si R es (a) 10 ohms, (b) 20 ohms, (c) 30 ohms. Utilícese el teorema de Norton y también verifíquese el resultado por cualquier otro medio diferente de solución. § 10



Prob. 15

16. Una línea de transmisión, dos generadores y una carga intermedia están representados por el diagrama. (a) encontrar V_{ab} cuando el interruptor S está abierto. (b) Utilizando el teorema de Thévenin encontrar V_{ab} cuando el interruptor está cerrado. § 10

17. A la red de filtro mostrada en el Prob. 12 del Cap. 9 se le alimenta por sus terminales de entrada con una fuente que tiene 10 volts de fuerza electromotriz y 33.3 ohms de resistencia interna, (en serie con la fuerza electromotriz). Encontrar el equivalente Thévenin del filtro y la fuente; la resistencia de la carga R es la "impedancia externa". § 10



Prob. 16

18. El último párrafo de la Sec. 9 da una definición de los teoremas de Thévenin y Norton. Demuéstrese que es equivalente a las primeras definiciones de estos dos teoremas.

19. En la red del Prob. 16, Cap. 9, un amperímetro se conecta en serie con la resistencia de 8 ohms. La resistencia del amperímetro es de 0.10 ohms. Encontrar la corriente a través del amperímetro.

§ 12

20. Una fuente de 50 volts con una resistencia de 5 ohms en serie y una fuente de 30 volts con una resistencia de 3 ohms se conectan en paralelo para alimentar un reactor inductivo de 4 ohms. Las fuerzas electromotrices están en fase una con otra. Encontrar la corriente en el reactor por medio de (a) teorema de Millman, (b) teorema de Thévenin, (c) teorema de superposición, (d) sustitución Y-Δ, (e) ecuaciones de malla y (f) ecuaciones de nodo.

§ 13

21. En la Fig. 11-4a, un amperímetro con resistencias de 0.10 ohms se inserta en la rama *a-b*. E ya no valdrá 24 volts sino que es desconocido. El amperímetro lee 3.89 amperes. ¿Cuál era la corriente en la rama *a-b* antes de que el amperímetro se insertara?

§ 12

22. ¿Qué resistencia de carga *R*, conectada en las terminales *A-B* del Prob. 13, recibirá la potencia máxima?

§ 14

23. ¿Qué resistencia de carga *R*, conectada en las terminales mostradas en el diagrama para el Prob. 10, recibirá la potencia máxima del generador de corriente continua?

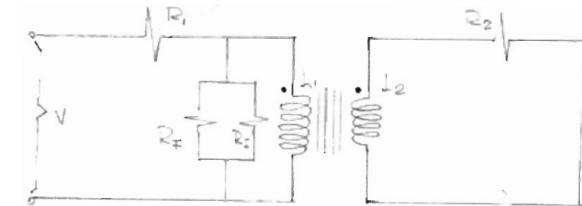
§ 14

24. Demuestre la Ec. 11-12.

§ 14

25. Si la red mostrada con el Prob. 1 del Cap. 9 es parte de un sistema más extenso, encontrar el equivalente Millman de estas tres fuentes en paralelo.

§ 13



12

Circuitos Acoplados y Transformadores

1. Acoplamiento magnético

Si los circuitos se afectan uno a otro debido a un campo magnético mutuo, algunos hechos deberán considerarse que no se originarían de otro modo. Primero, la polaridad del efecto magnético de cada circuito en el otro debe ponerse en claro. Segundo, la cantidad de acción mutua debe justificarse, incluyendo la solidez del acoplamiento de los circuitos. Tercero, el campo magnético común puede inducir voltajes desiguales en circuitos acoplados debido al número desigual de vueltas de alambre en las bobinas acopladas. Cuarto, a menudo ayuda a visualizar el sustituir por el circuito acoplado inductivamente una red "equivalente" de circuitos conectados conductivamente que no tienen inductancia mutua.

La inductancia mutua se definió en el primer capítulo (Sección 1-4) como la razón del voltaje inducido en un circuito a la rapidez de cambio de la corriente en otro circuito. Dos mallas de una red tienen obviamente inductancia mutua si existe una bobina inductiva en una rama común, como en la Fig. 12-1a, pero también puede haber inductancia mutua como resultado de que el campo magnético de un circuito enlace a otro, como en la Fig. 12-1b, aunque entre ellos no exista conexión conductiva. Un transformador es un ejemplo de circuitos acoplados magnéticamente; es más bien un ejemplo ex-

tremo, los transformadores están diseñados usualmente para dar el acoplamiento más cerrado posible devanando las bobinas del transformador muy juntas y sobre el mismo núcleo de hierro.

Cuando existe un acoplamiento magnético entre dos (o más) bobinas, el voltaje entre las terminales de la bobina 1 resulta parte de la razón de cambio de la corriente en la bobina 1 misma y parte de la razón de cambio de la corriente en la bobina 2 (y en otras bobinas si existen también acoplamiento con otras). Esto es,

$$v_1 = \left(L_{11} \frac{di_1}{dt} \pm L_{12} \frac{di_2}{dt} \pm \dots \right) \quad (12-1)$$

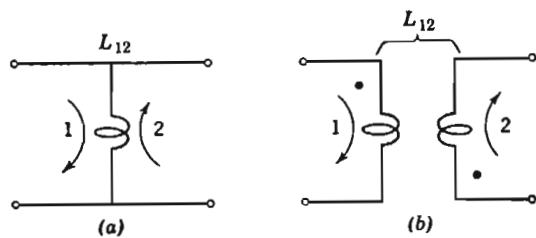


FIG. 12-1. Ejemplos de inductancia mutua

Correspondientemente, el voltaje entre las terminales de la bobina 2 es,

$$v_2 = \left(\pm L_{21} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt} \pm \dots \right) \quad (12-2)$$

L_{11} y L_{22} son las autoinductancias de la bobina; L_{12} y L_{21} son las inductancias mutuas. Se recordará que $L_{21} = L_{12}$ en todos los casos.

Las Ecs. 12-1 y 12-2 son válidas para corrientes que varían de cualquier manera. Si las corrientes son senoidales estas ecuaciones serán *

$$V_1 = j\omega(L_{11}I_1 \pm L_{12}I_2 \pm \dots) \quad (12-3)$$

$$V_2 = j\omega(\pm L_{21}I_1 + L_{22}I_2 \pm \dots) \quad (12-4)$$

* Las Ecs. 12-3 y 4 pueden derivarse sustituyendo en las Ecs. 12-1 y 2 las expresiones exponenciales para voltaje y corriente alterna como en la Sección 3-13, o más fácilmente por la transformación indicada en la Sección 3-17.

2. Polaridad de las bobinas

La Fig. 12-2a muestra dos bobinas en un núcleo común; las bobinas están devanadas de la misma manera alrededor del núcleo. En la Fig. 12-2b el sentido del devanado interior ha sido invertido y claramente ese cambio invierte el efecto de cada bobina sobre la otra. Para analizar un circuito que tiene inductancia mutua, necesitamos saber de qué manera, de hecho, se han devanado las bobinas. ¿Cómo se conoce esto en un diagrama de alambrado?

Una posible forma de indicar la polaridad sería la de incluir un dibujo de las bobinas, como en la Fig. 12-2, en el diagrama de alambrado. Esto sería adecuado, pero altamente inconveniente. La misma información se consigue mucho más fácilmente por la convención de poner puntos en los extremos correspondientes de las bobinas acopladas. * El procedimiento es como sigue.

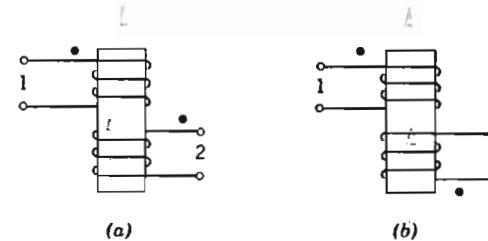


FIG. 12-2. Polaridad de las bobinas

En el diagrama de circuito o en el circuito mismo colóquese un punto en un extremo de la bobina 1, como en la Fig. 12-2a. El punto es simplemente para identificar un extremo de la bobina y puede colocarse arbitrariamente. En la Fig. 12-2a, escogemos el punto en el extremo superior. Nótese que la corriente que entrara por este extremo con punto, produciría un flujo magnético en el núcleo en la dirección hacia arriba. A continuación colóquese otro punto en el extremo de la bobina 2 en el que la corriente entraría para producir flujo en la misma dirección del núcleo; en la Fig. 12-2a, encontramos que el extremo superior de la bobina 2 llena este requisito y por lo tanto, marcamos este extremo de la bobina 2 con un punto. En la Fig. 12-2b, por otro lado, la corriente que entra por el extremo inferior de la bobina 2 produciría flujo hacia arriba, así que este extremo es el que marcamos con un punto. En ambos diagramas, los

* Algunos autores prefieren otras marcas, utilizando signos + o flechas, pero el punto es el más común y parece ser el más difícil de no entenderse.

extremos marcados con punto de acuerdo con este sistema se llaman extremos *correspondientes*.

Este ejemplo es bastante especial, porque esas bobinas tienen un núcleo común. En general, las bobinas pueden ser de tamaño y forma diferentes y pueden tener cualquier orientación en el espacio. Los extremos correspondientes podrán entonces marcarse como sigue: Sea que la corriente entre por el extremo de punto de la bobina 1 produciendo enlaces de flujo magnético con la bobina 1. Entonces, se hace entrar una pequeña corriente por un extremo de la bobina 2 también. Esta corriente en la bobina 2, cambia los enlaces de flujo totales con la bobina 1; si incrementa los enlaces de flujo con la bobina 1, se coloca un punto en el extremo con la que dicha corriente entra en la bobina 2; si disminuye los enlaces de flujo con la bobina 1, se coloca un punto en el otro extremo de la bobina 2.

La ventaja de estos extremos correspondientes en punto de bobinas acopladas, es la de que la inductancia mutua es entonces un número positivo. La *autoinductancia*, por supuesto, es siempre positiva; L_{11} nunca puede ser un número negativo, así como una resistencia R nunca puede ser un número negativo. Pero algunos autores permiten a la inductancia *mutua* ser negativa. Aquí, estamos desarrollando una convención bajo la cual la inductancia mutua es un número *positivo* estipulando que los extremos *correspondientes* de las bobinas acopladas están marcadas con puntos.

El sistema de marcar con puntos los extremos correspondientes puede fracasar, sin embargo, si tres o más bobinas están todas acopladas mutuamente con un campo magnético. Haciendo marcado con puntos dos o más bobinas, puede ser imposible marcar la tercera de acuerdo con la regla para los extremos correspondientes, porque el extremo de la bobina 3 que corresponda al extremo marcado con puntos de la bobina 1 puede no corresponder con el extremo marcado con punto de la bobina 2. ¿Qué se hace entonces?

La respuesta es ésta: Primero, colóquense los puntos arbitrariamente, según se pueda. Segundo, determine los extremos correspondientes de pares de bobinas, considerando 2 bobinas por vez. Tercero, para inductancia mutua entre un par de bobinas con extremos correspondientes marcados con punto, utilice un número positivo (tal como $L_{12} = 5$ henrys) y para inductancia mutua entre un par de bobinas con extremos no correspondientes marcados con punto, utilice un número negativo (tal como $L_{12} = -5$ henrys).

3. Signo del voltaje inducido

Completamente distinto de cuando L_{12} es un número positivo o negativo, es la cuestión del signo por utilizar antes del término que contiene a L_{12} en las Ecs. 12-1 o 12-3. En estas ecuaciones, se indica una elección de signo precediendo cada término de inductancia mutua. ¿Deberá utilizarse el signo + o el signo - en la ecuación para un circuito particular?

Cada término de esta ecuación es un voltaje, un voltaje resultante de autoinductancia o inductancia mutua. Haciendo el signo que precede a los términos de autoinductancia siempre positivo, el signo que precede a cada término de inductancia mutua se encuentra por la siguiente regla:

Habiendo colocado los puntos en cada extremo de cada bobina, se dibujarán flechas de referencia para mostrar la dirección positiva de la corriente en cada circuito. Si, como en la Fig. 12-1b, las flechas entran por extremos marcados por puntos de ambas bobinas 1 y 2, entonces, en la Ec. 12-1 (o 12-3) el signo enfrente del término de voltaje conteniendo a L_{12} es +. Similarmente, si las flechas se hubiesen dibujado de modo que ambas entraran por extremos sin marcar con punto de las dos bobinas, el signo antes del término de voltaje inducido sería +. Pero si una de las flechas entra por el extremo marcado con punto de una bobina y la otra por un extremo de bobina no marcado con punto, entonces el signo que preceda al término de voltaje inducido sería -.

La misma regla se aplica al término de voltaje en la Ec. 12-2 (o 12-4) que contiene a L_{21} . Si existen otros circuitos acoplados magnéticamente en la red, una extensión obvia de la regla se aplicará a ellos también.

Una pequeña consideración mostrará la validez de esta regla. Supóngase que los extremos correspondientes de las bobinas han sido marcadas con puntos. Entonces, cada inductancia es un número positivo. Supóngase que las flechas de referencia entran por los extremos *marcados* con puntos de ambas bobinas. Entonces, si cada circuito lleva corriente positiva, cada corriente *fortalecerá* el campo magnético de la otra. En cada bobina el voltaje inducido por el flujo total será la *suma* aritmética de los voltajes autoinducidos y del voltaje por inductancia mutua, y un signo + se utilizará en la ecuación.

Pero supóngase que una flecha entra por el extremo no marcado con punto de una bobina. Entonces, si cada circuito lleva corriente positiva, los campos magnéticos se sustraerán y el voltaje inducido

será la diferencia aritmética de los términos auto y mutuo. En este caso, se utilizará un signo -.

Esta regla permanece siendo correcta a pesar de varias permutaciones de puntos y flechas y direcciones de corrientes. Deberá hacerse énfasis en una conclusión: aun si los puntos se colocan en los extremos no correspondientes de bobina, la regla para los signos en la ecuación permanece sin alterarse. Supóngase que el punto en el circuito 2 de la Fig. 12-1b se mueve al extremo superior, así que los puntos estarán en extremos no correspondientes de las bobinas, pero nada más cambia. La regla, entonces dice, que el signo enfrente de un término de voltaje inducido debe ser - porque una flecha entra por un extremo sin marca con punto: el término debe escribirse $-L_{12}I_2$. Pero ahora, que los extremos no correspondientes están marcados con punto, el símbolo L_{12} representará un número negativo, y $-L_{12}$ es lo mismo que $+L_{12}$ fue antes. La regla que dice qué signos deben usarse en la ecuación, depende únicamente de las posiciones relativas de puntos y flechas de referencia, y permanece válida aun si los puntos y flechas se colocan en forma totalmente arbitraria.

Es conveniente, sin embargo, dibujar las flechas de referencia en diagramas de redes, de tal modo que entren por los extremos marcados con puntos de todas las bobinas, como en la Fig. 12-1b, porque entonces todos los términos de voltaje inducido de las Ecs. 12-1 y 2 o 12-3 y 4 tendrán signos +. Esta es una buena práctica, pero no siempre puede hacerse en reglas complicadas. Si una rama contiene dos bobinas, ambas acopladas a una tercera bobina de otro circuito, una flecha que entre en el extremo marcado con punto de una puede necesariamente entrar por el extremo no marcado con punto de la otra. En este caso, uno de los términos de voltaje inducido tendrá un signo -.

En resumen, el procedimiento más conveniente es como sigue:

- Coloque puntos en el diagrama de la red en los extremos *correspondientes* de las bobinas acopladas. Cada inductancia mutua será entonces una cantidad positiva.

- Dibuje flechas en el diagrama de la red para mostrar la dirección de referencia de las corrientes; dibuje todas las flechas de forma que *entren en los extremos marcados con puntos* de las bobinas. Los signos algebraicos en las Ecs. 12-1, 2, 3 y 4 serán entonces, todos +. Estas reglas no siempre pueden seguirse. Si no se puede, la discusión anterior nos dirá que hacer.

4. Inductancia mutua en las ecuaciones de malla

Un ejemplo específico mostrará como se escriben las ecuaciones de malla cuando existe inductancia mutua en una red. La Fig. 12-3 muestra una red de dos mallas que tiene inductancia mutua y también resistencia mutua. Escribamos las ecuaciones de malla.

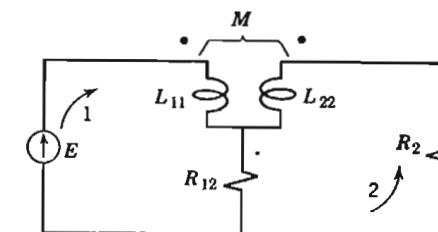


FIG. 12-3. Circuitos acoplados

L_{11} es la autoinductancia de la malla 1; es la inductancia que se mediría en la malla 1 si se abriese la malla 2. L_{22} es la autoinductancia de la malla 2. La inductancia mutua se llama M en lugar de L_{12} o L_{21} ; esto es permisible si solamente hay dos bobinas.

Un punto se coloca en uno de los extremos de cada bobina de la Fig. 12-3. Las flechas de referencia para la corriente se dibujan, cada una de ellas entrando por el extremo marcado por un punto de su bobina. Las ecuaciones de malla se escribirán entonces.

En la primera ecuación, la caída de voltaje en la malla 1 está igualada a E . Cuando existe una inductancia mutua es más fácil escribir el voltaje entre las terminales de cada elemento del circuito sucesivamente, aunque después requiera un arreglo posterior. Así el voltaje entre las terminales de la resistencia es $R_{12}(I_1 + I_2)$, y el voltaje entre las terminales de la bobina estará dado por la Ec. 12-3, y la suma es

$$R_{12}(I_1 + I_2) + j\omega(L_{11}I_1 + MI_2) = E \quad (12-5)$$

El signo que precede a M es + porque ambas flechas de referencia entran por los extremos marcados por puntos de las bobinas.

Para la malla 2, los voltajes entre las terminales de R_2 , entre las terminales de R_{12} y entre las terminales de la bobina suman:

$$R_2I_2 + R_{12}(I_2 + I_1) + j\omega(L_{22}I_2 + MI_1) = 0 \quad (12-6)$$

Los términos que contienen a I_1 y aquéllos que contienen a I_2 se agrupan y las ecuaciones toman la forma familiar. Escribiendo las ecuaciones por conveniencia en notación de matrices:

$$\begin{bmatrix} R_{12} + j\omega L_{11} & R_{12} + j\omega M \\ R_{12} + j\omega M & R_2 + R_{12} + j\omega L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12-7)$$

Desde este punto la solución es familiar.

Nótese que si la flecha en la malla 2 se hubiese dibujado en el sentido de las manecillas del reloj, todos los signos de los términos de impedancia mutua se hubieran invertido de + a -. En el resultado físico final, sin embargo, no hubiera habido cambio.

Se puede señalar que en un buen número de redes prácticas que incluyen circuitos acoplados magnéticamente la polaridad de los devanados realmente no hace diferencia. La polaridad de un acoplamiento inductivo entre los circuitos 1 y 2 no es de interés práctico al menos que los circuitos 1 y 2 estén también acoplados en alguna otra forma (como por R_{12} en la Fig. 12-3). Es verdad que las corrientes y voltajes del circuito 2 son indefinidos en signo con referencia a las corrientes y voltajes en el circuito 1, a menos que se conozca la polaridad, ¿pero qué diferencia hay? Todas las corrientes y voltajes en el circuito 2 son consistentes una con otra, y esto puede ser suficiente (y a menudo lo es). Hay algunas veces, sin embargo, en que la polaridad relativa entre los circuitos 1 y 2 debe conocerse, y es en estas veces cuando los métodos anteriores son útiles.

5. Inductancia mutua en las ecuaciones de rama

Las Ecs. 12-1 y 2 o 12-3 y 4 son esencialmente ecuaciones de rama. Usualmente se requiere algún reacomodo de los términos para utilizarlas tanto para ecuaciones de malla como de nodo. Un ejemplo mostrará como ellas nos dan convenientemente los voltajes de rama.

Calcularemos la inductancia total de un circuito que contiene dos bobinas, conectadas en serie que tienen inductancia mutua. La Fig. 12-4a muestra un circuito que contiene una bobina con autoinductancia L_{11} y otra bobina con autoinductancia L_{22} , las dos bobinas están acopladas por la inductancia mutua M . Los extremos de las bobinas están marcados con punto (es conveniente suponer que éstos son los extremos correspondientes y que M es por lo tanto un número positivo, aunque esta suposición no es necesaria para el álgebra. La dirección de referencia para la corriente entra en ambas bobinas en los extremos marcados con punto).

La corriente en el circuito es I . El voltaje entre las terminales de la primera bobina, utilizando la Ec. 12-3, es $j\omega(L_{11}I + MI)$. El vol-

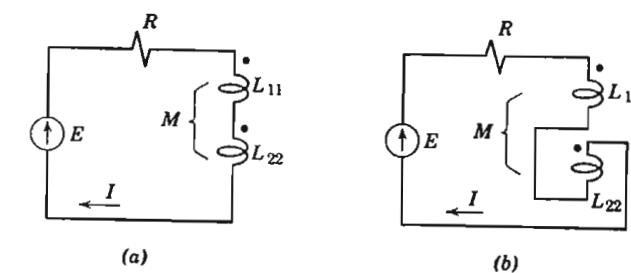


FIG. 12-4. Bobinas con inductancia mutua

taje entre las terminales de la segunda bobina es $j\omega(L_{22}I + MI)$. El voltaje total entre las terminales de las dos bobinas, es por lo tanto,

$$j\omega(L_{11}I + MI) + j\omega(L_{22}I + MI) = j\omega(L_{11} + L_{22} + 2M)I \quad (12-8)$$

La Ec. 12-8 puede interpretarse que significa que cuando dos bobinas en el mismo circuito están acopladas magnéticamente, la inductancia total de ambas unidas es la suma de las autoinductancias más dos veces la inductancia mutua.

Supóngase que las conexiones se cambian ahora, como en la Fig. 12-4b, invirtiendo la corriente que entra a una de las bobinas acopladas. La corriente que fluye en la dirección de la flecha de referencia ahora entra en una bobina por el extremo marcado con punto y en la otra bobina por el extremo no marcado. Los puntos, que muestran la polaridad con que las bobinas estarán devanadas, por supuesto permanece como antes. El signo del término de voltaje de la inductancia mutua es ahora negativo, así que el voltaje entre las terminales de la bobina 1 es $j\omega(L_{11}I - MI)$. Similarmenete el voltaje entre las terminales de las bobinas 2 es $j\omega(L_{22}I - MI)$. Con esta conexión, la inductancia total de las dos bobinas actuando juntas es $L_{11} + L_{22} - 2M$.

Estas fórmulas sugieren un método de medir la inductancia mutua. Mídase la inductancia mutua de las dos bobinas en serie, a continuación invírtanse las conexiones de una de las dos bobinas y mídase otra vez. Sustrágase la medición de inductancia menor de la mayor y divídase entre cuatro:

$$\frac{(L_{11} + L_{22} + 2M) - (L_{11} + L_{22} - 2M)}{4} = M \quad (12-9)$$

Cuando las bobinas están conectadas de forma que den la inductancia equivalente total menor, los dos extremos de bobina que están

conectados directamente juntos son los extremos correspondientes; ambos pueden estar marcados con puntos, o (como en la Fig. 12-4b) ambos pueden ser los extremos no marcados.

6. Inductancia mutua en las ecuaciones de nodo

Es incómodo algunas veces manejar acoplamientos inductivos en las ecuaciones de nodo, no porque sea más difícil inherentemente sino únicamente porque no existe un sistema nítido de símbolos y terminología inventado con este fin o por lo menos que sea ahora de uso común.* Un ejemplo que mostrará la naturaleza del problema, y que al mismo tiempo tiene el importante propósito de mostrar cómo las ecuaciones de rama, que fueron desaprobadas en un capítulo anterior, pueden sin embargo, servir como una guía en una situación que es totalmente no familiar.

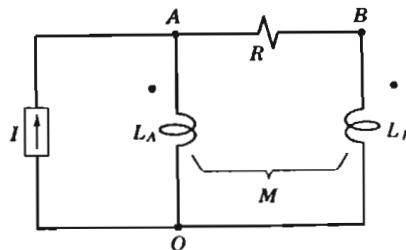


FIG. 12-5. Ramas con inductancia mutua

La Fig. 12-5 muestra una red con dos nodos independientes, A y B, que puede manejarse de la manera familiar vista en el Cap. 9 si no hubiera un acoplamiento magnético entre las bobinas. Si no hubiera *acoplamiento magnético*, las ecuaciones de nodo se escribirían por inspección:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L_A} \right) V_A - \frac{1}{R} V_B &= I \\ (M = 0) \quad (12-10) \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{R} V_A + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L_B} \right) V_B = 0$$

Si existe un acoplamiento magnético, sin embargo, no sabemos qué hacer. Regresemos por tanto, a las ecuaciones de rama.

* Gardner y Barnes (Referencia 18) han tomado el toro por los cuernos.

Existen tres elementos de impedancia en la red y por lo tanto seis incógnitas: tres corrientes y tres voltajes. Podemos escribir seis ecuaciones; tres son las ecuaciones de rama y tres son las ecuaciones de conexión de las leyes de Kirchhoff

$$V_{AO} = j\omega(L_A I_{AO} + M I_{BO}) \quad (12-11a)$$

$$V_{BO} = j\omega(L_B I_{BO} + M I_{AO}) \quad (12-11b)$$

$$V_{AB} = RI_{AB} \quad (12-11c)$$

$$I_{AO} + I_{AB} = I \quad (12-12a)$$

$$I_{BO} - I_{AB} = 0 \quad (12-12b)$$

$$V_{AB} + V_{BO} = V_{AO} \quad (12-12c)$$

En las Ecs. 12-11a y 12-11b los términos de inductancia mutua se escriben con signos positivos por la siguiente razón: la dirección de referencia de una corriente es de A a O, y la otra de B a O. Las direcciones de referencia están mostradas por los subíndices. Puesto que ambas direcciones de referencia entran a las bobinas por los extremos marcados con punto, cada término de voltaje por inductancia mutua tiene signo positivo.

Se requiere ahora, la solución simultánea de estas seis ecuaciones. Resolvamos las Ecs. 12-11a y 12-11b para I_{AO} e I_{BO} explícitamente, obteniendo

$$I_{AO} = V_{AO} \frac{L_B}{j\omega(L_A L_B - M^2)} - V_{BO} \frac{M}{j\omega(L_A L_B - M^2)} \quad (12-13)$$

$$I_{BO} = V_{BO} \frac{L_A}{j\omega(L_A L_B - M^2)} - V_{AO} \frac{M}{j\omega(L_A L_B - M^2)} \quad (12-14)$$

Abreviamos estas ecuaciones escribiendo letras únicas para las fracciones obteniendo

$$I_{AO} = \frac{1}{j\omega L_A'} V_{AO} - \frac{1}{j\omega M'} V_{BO} \quad (12-15)$$

$$I_{BO} = \frac{1}{j\omega L_B'} V_{BO} - \frac{1}{j\omega M'} V_{AO} \quad (12-16)$$

De las Ecs. 12-11c y 12-12c:

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{R} = \frac{V_{AO} - V_{BO}}{R} \quad (12-17)$$

Sustituyendo las Ecs. 12-15 y 12-17 en 12-12a (y eliminando el subíndice O innecesario para los voltajes) da

$$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L_A'} \right) V_A - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega M'} \right) V_B = I \quad (12-18)$$

Similarmente, poniendo las Ecs. 12-16 y 12-17 en la 12-12b,

$$-\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega M'} \right) V_A + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L_B'} \right) V_B = 0 \quad (12-19)$$

Y obtenemos un par de ecuaciones que son reconocibles como ecuaciones de nodo. La comparación de las Ecs. 12-18 y 12-19 con la 12-10 sugiere la siguiente interpretación. Cuando existe un acoplamiento inductivo entre las ramas A y B, la autoinductancia de la rama A se reemplaza en la ecuación de nodo por un valor modificado L_A' tal que

$$L_A' = \frac{L_A L_B - M^2}{L_B} = L_A - \frac{M^2}{L_B} \quad (12-20)$$

También, se añade un término de corriente en el nodo A para tomar en cuenta el efecto de la mutua inductancia, siendo su coeficiente *

$$M' = \frac{L_A L_B - M^2}{M} \quad (12-21)$$

Un cambio similar se hace para la ecuación en el nodo B. (Esto permite una comprobación parcial del álgebra notándose que si $M = 0$, las Ecs. 12-18 y 12-19 se reducen a las Ecs. 12-10).

Esto es suficiente para las ecuaciones de nodo. En la práctica, parece ser menos confuso utilizar las ecuaciones de malla si existe una inductancia mutua entre los elementos.

7. Coeficiente de acoplamiento

El coeficiente de acoplamiento k entre dos circuitos es, por definición,

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_{11} L_{22}}} \quad (12-22)$$

Si los circuitos están apartados o, debido a la orientación, tienen muy poco flujo magnético mutuo, se dice que tienen "acoplamiento débil" y k es un número pequeño. Los valores de k para los circuitos con acoplamiento débil pueden ser del rango entre 0.01 y 0.10. Para circuitos con "acoplamiento estrecho" sin núcleos ferromagnéticos (con bobinas con "núcleo de aire"), k puede ser alrededor de 0.5. Un transformador de potencia con núcleo de acero tiene una k que está muy cerca de 1.00. Unicamente cuando dos devanados están unidos en una sola bobina, como se indica en la Fig. 12-6a, k es exactamente igual a 1

Con k menor que 1 en la Ec. 12-22, será siempre cierto que

$$L_{11} L_{22} > M^2 \quad (12-23)$$

No debe concluirse que L_{11} y L_{22} deben ser ambas mayores que M . Es positivamente cierto que todo flujo producido por la corriente en la bobina 1 enlaza a la bobina 1 (por lo menos parcialmente), mientras que solamente una parte de este flujo enlaza a la bobina 2, pero la bobina 2 puede tener más vueltas que la bobina 1 (como en la Fig. 12-6c). Si es así, puede haber más enlaces de flujo con la bobi-

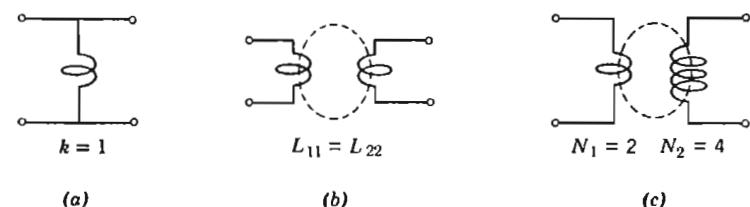


FIG. 12-6. Acoplamiento inductivo

na 2 que con la bobina 1 por ampere de corriente en la bobina 1, y por tanto, M puede ser mayor que L_{11} . En este caso M , es por supuesto menor que L_{22} para satisfacer la Ec. 12-23.

Por otro lado, si la bobina 1 y la bobina 2 tienen el mismo número de vueltas (como en la Fig. 12-6b), tanto L_{11} y L_{22} deberán ser mayores que M . También es cierto que si las bobinas están acopladas débilmente, tanto L_{11} como L_{22} deberán ser ciertamente mayores que M . Este hecho es importante en conexión con los circuitos equivalentes.

* Las reciprocas de L_A' y M' para Gardner y Barnes son "autoinductancia inversa" e "inductancia mutua inversa" respectivamente (Referencia 18, Pág. 42).

8. Circuito equivalente

Es a menudo útil en el análisis, y aún más en visualizar el problema, reemplazar los circuitos acoplados inductivamente por una red en la que los elementos están todos conectados conductivamente entre ellos. Por ejemplo, los circuitos acoplados de la Fig. 12-7a y la red de la Fig. 12-7b son equivalentes en el sentido de que están representados por las mismas ecuaciones de malla. Escribiendo las ecuaciones de malla para cada una de estas redes obtenemos

$$(R_1 + j\omega L_{11})I_1 - j\omega M I_2 = V_1 \quad (12-24)$$

$$(R_2 + j\omega L_{22})I_2 - j\omega M I_1 = -V_2 \quad (12-25)$$

En la red equivalente, $L_1 = L_{11} - M$ y $L_2 = L_{22} - M$. Si M es mayor que una de las autoinductancias, L_1 o L_2 tendrá que ser negativa; la red equivalente no será entonces físicamente realizable, pero el análisis matemático de la red puede ser llevado perfectamente.

El primer pensamiento sugiere que la red de la Fig. 12-7b, no puede representar un transformador, porque un transformador puede, debido a su relación de vueltas, producir un aumento de voltaje del primario al secundario. Sin embargo, este pensamiento está equivocado. La red equivalente *puede* incluir el efecto de la relación de vuelta de un transformador por el expediente de tener un aumento de voltaje reactivo en L_1 , siendo L_1 *negativa* si se va a representar un transformador de elevación.

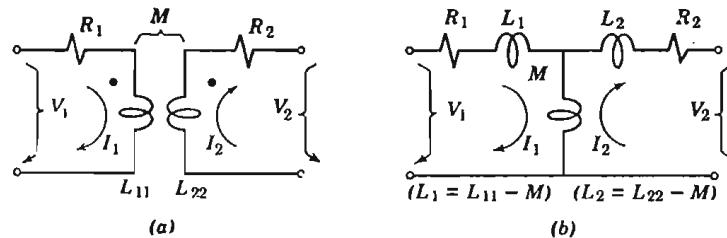


FIG. 12-7. Circuito equivalente para bobinas acopladas

Para circuitos acoplados débilmente, la red de la Fig. 12-7b es completamente satisfactoria. Con acoplamiento débil M es por lo tanto menor, que L_{11} y que L_{22} ; L_1 y L_2 son ambas positivas y el problema de su realización física no se presenta. Este es el equivalente que se usa comúnmente para circuitos acoplados débilmente.

Para circuitos acoplados estrechamente, sin embargo, y para transformadores en particular, no es enteramente factible y se utiliza una red equivalente diferente.

9. Otros circuitos equivalentes

La Fig. 12-8 muestra un circuito que incluye una constante a que puede tener cualquier valor. La Fig. 12-7b es el caso especial para el que $a = 1$.

No es evidente inmediatamente que la red de la Fig. 12-8 nos lleva a las mismas ecuaciones de malla como lo hace el par de circuitos acoplados en la Fig. 12-7a, así que las ecuaciones para la red de la Fig. 12-8 se escribirán ahora. En el circuito 1:

$$[R_1 + j\omega(L_1 + aM)]I_1 - j\omega aM \frac{I_2}{a} = V_1 \quad (12-26)$$

Puesto que por definición $L_1 = L_{11} - aM$, esto puede escribirse

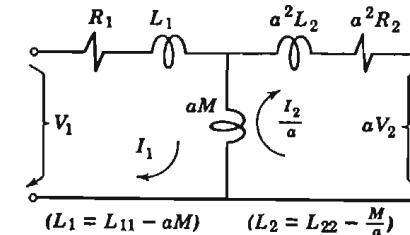


FIG. 12-8. Red equivalente a los circuitos acoplados de la Fig. 12-7a

$$(R_1 + j\omega L_{11})I_1 - j\omega M I_2 = V_1 \quad (12-27)$$

y esta es idéntica a la Ec. 12-24 para los circuitos acoplados. En el circuito 2:

$$[a^2 R_2 + j\omega(a^2 L_2 + aM)] \frac{I_2}{a} - j\omega a M I_1 = -a V_2 \quad (12-28)$$

Por definición, $L_2 = L_{22} - M/a$. Simplificando, y dividiendo entre a ,

$$(R_2 + j\omega L_{22})I_2 - j\omega M I_1 = -V_2 \quad , \quad (12-29)$$

y ésta es la Ec. 12-25. Así se ha demostrado que las ecuaciones de malla son idénticas para los circuitos acoplados de la Fig. 12-7a y los circuitos equivalentes de la Fig. 12-8. Sin embargo, la equivalencia

es más bien diferente de cualquiera que hayamos tenido antes, porque la corriente y el voltaje en la malla 2 no son los mismos en el circuito equivalente que los que teníamos en el circuito original. Aquí V_2 se ha reemplazado por aV_2 e I_2 se ha reemplazado por I_2/a .

Existen dos formas provechosas de utilizar la red de la Fig. 12-8. Una es hacer la red completamente equivalente a los circuitos acoplados añadiendo un transformador ideal que tiene relación de vueltas pero nada más; el transformador ideal tiene la propiedad de transformar voltaje y corriente por el factor a , pero no tiene pérdidas, no tiene reactancia en serie ni susceptancia en paralelo. Así, la red de la Fig. 12-9b tiene la misma V_2 e I_2 en el par de terminales 2 que las de la red acoplada de la Fig. 12-9a, así como también está representada por las mismas ecuaciones de malla. Además, todas las corrientes terminales, voltaje y relaciones de impedancia son idénticas para las dos redes, y son enteramente equivalentes.

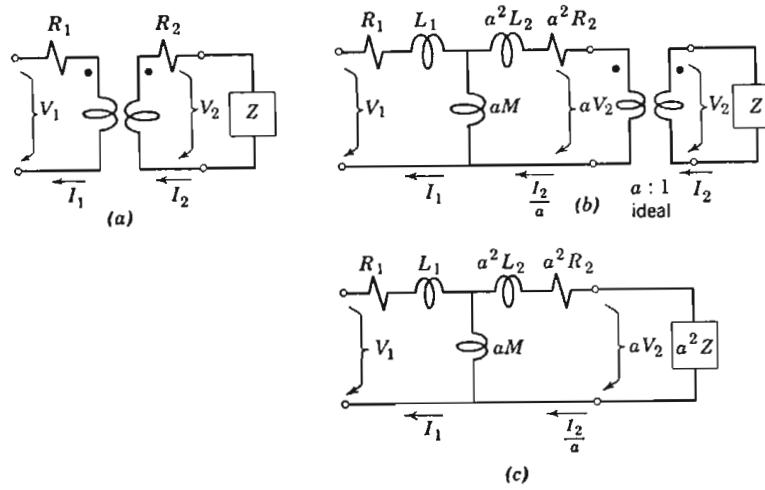


FIG. 12-9. Redes equivalentes a circuitos acoplados. $L_1 = L_{11} - aM$ y $L_2 = L_{22} - M/a$

El otro punto de vista se muestra en la Fig. 12-9c. Aquí, en lugar de transformar el voltaje de entrada y la corriente a sus valores originales insertando un transformador ideal, se dejan factores multiplicativos de a y $1/a$ y la carga Z que está conectada al par de terminales 2 de la red se cambia por un factor de a^2 para hacerlos correspondientes. Claramente, si el voltaje V_2 produce la corriente I_2 en la impedancia de carga Z (el caso actual) el voltaje aV_2

producirá la corriente I_2/a en la impedancia de carga a^2Z (el caso equivalente de la Fig. 12-9c). La potencia es la misma en las redes equivalentes y actual, para $V_2 I_2 = (aV_2)(I_2/a)$, suponiendo que a es un número real. La red de la Fig. 12-9c es equivalente a la 12-9a en las terminales de entrada, pero la equivalencia en cualquier lugar es condicional e incluye el factor a .

Esto nos lleva a la cuestión de que limitaciones, si hay algunas, existen en a . Matemáticamente no hay ninguna. Las Ecs. 12-26 y 28 se reducen a las Ecs. 12-27 y 29 para cualquier a . Prácticamente, sin embargo, existen dos valores excepcionalmente útiles que pueden asignarse a a . Para circuitos que están bastante débilmente acoplados es más conveniente hacer

$$a = 1 \quad (12-30)$$

como en la Fig. 12-7b. Por otro lado, para un transformador, que tiene dos bobinas acopladas muy estrechamente devanadas en el mismo núcleo de hierro, es preferible hacer

$$a = \frac{N_1}{N_2} \quad (12-31)$$

donde N_1 es el número de vueltas en el devanado primario y N_2 el número en el secundario. Puesto que la mayoría del flujo magnético que enlaza una bobina del transformador, enlaza también la otra, los voltajes primario y secundario están aproximadamente en la relación N_1/N_2 y (cuando está cargado) las corrientes tienen aproximadamente la relación N_2/N_1 .

10. Circuito equivalente de un transformador

Cuando a recibe el valor N_1/N_2 los varios elementos del circuito equivalente de la Fig. 12-9, toman un significado físico. En el lenguaje del transformador:

R_1 es la resistencia primaria

$a^2 R_2$ es la resistencia secundaria referida a la primaria

L_1 es la inductancia de dispersión primaria

$a^2 L_2$ es la inductancia de dispersión secundaria referida a la primaria

aM es la inductancia exitadora primaria

$a^2 Z$ es la impedancia de carga referida a la primaria

La Fig. 12-10 auxilia en la representación de las inductancias del transformador. Esta figura es una representación altamente diagramática de un transformador. (De hecho, las bobinas están casi siempre devanadas muy juntas y sobre la misma pierna de un transformador, y no en piernas separadas como se dibuja, de modo que la reactancia de dispersión se mantenga dentro de un mínimo). Unas pocas líneas de flujo magnético se muestran como líneas no continuas en el diagrama para propósitos ilustrativos. Las líneas de flujo que enlazan ambos devanados son mutuas, Φ_{21} o Φ_{12} ; aquéllas que enlazan al devanado 1 pero no al devanado 2 son el flujo de disper-

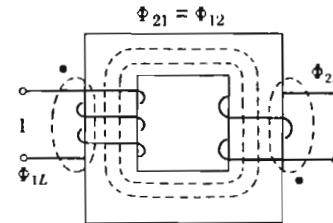


FIG. 12-10. Diagrama de un transformador

sión del devanado 1, Φ_{1L} ; y aquéllas que enlazan al devanado 2 pero no al devanado 1 son el flujo de dispersión del devanado 2, Φ_{2L} .

Al escribir las ecuaciones de malla para el circuito equivalente de la Fig. 12-8 presentamos la notación

$$L_1 = L_{11} - aM \quad \text{y} \quad L_2 = L_{22} - M/a \quad (12-32)$$

donde L_{11} es la autoinductancia del devanado 1 y M es la inductancia mutua. L_1 , la diferencia entre L_{11} y aM , no ha recibido ninguna interpretación física, pero ahora vamos a demostrar que es la inductancia de dispersión del devanado 1 suponiendo que $a = N_1/N_2$.

En primer lugar, la *autoinductancia* del devanado 1 es el resultado de todo el flujo que enlaza al devanado 1 (ver Fig. 12-10). Esta es la razón de los enlaces de flujo a la corriente, como en la Ec. 1-14c, y

$$L_{11} = \frac{N_1(\Phi_{1L} + \Phi_{21})}{I_1} \quad (12-33)$$

De una manera similar, la *inductancia mutua* es la razón de los

enlaces de flujo a la corriente; es la razón de los enlaces de las N_2 vueltas del devanado 2 con el flujo mutuo Φ_{21} que está producido por la corriente I_1 en el devanado 1:

$$M = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} \quad (12-34)$$

Considerando que a es la relación de vueltas, aM es

$$aM = \frac{N_1}{N_2} \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} = \frac{N_1 \Phi_{21}}{I_1} \quad (12-35)$$

Cuando esta ecuación se resta a la Ec. 12-33, resulta:

$$L_{11} - aM = \frac{N_1 \Phi_{1L}}{I_1} \quad (12-36)$$

y esta, según la primera de las Ecs. 12-32, es igual a L_1 . Por lo tanto L_1 es la razón de los enlaces de las vueltas del devanado 1 con su flujo de dispersión a la corriente en el devanado 1 que produce el flujo. En otras palabras es la *inductancia de dispersión* del devanado 1:

$$L_1 = \frac{N_1 \Phi_{1L}}{I_1} \quad (12-37)$$

Similarmente, por supuesto, L_2 es la inductancia de dispersión del devanado 2. Estos son términos comunes en la teoría de los transformadores.

11. Igualdad de inductancias mutuas

La inductancia mutua dada en la Ec. 12-34 es la razón de los enlaces de flujo con el devanado 2 a la corriente en el devanado 1 que la causa. Puede distinguirse como la inductancia mutua L_{21} :

$$L_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} \quad (12-38)$$

Viendo desde el otro extremo del transformador, aparecerá otra inductancia mutua. Esta es la razón de los enlaces de flujo con el devanado 1 a la corriente en el devanado 2:

$$L_{12} = \frac{N_1 \Phi_{12}}{I_2} \quad (12-39)$$

En general, hemos aceptado que $L_{12} = L_{21}$. Esto fue dado en el Cap. 1 como un hecho experimental. Ahora, sin embargo, para este caso en particular simple de un transformador con núcleo de hierro, es fácil demostrar que L_{12} debe ser igual a L_{21} .

Supóngase que N_1 es mayor que N_2 como se muestra en la Fig. 12-10. Para producir una cantidad dada de flujo mutuo en el transformador se necesita una cierta corriente I_1 en la bobina 1. Alternativamente, la misma cantidad de flujo mutuo podría producirse por una corriente en la bobina 2 pero se necesitaría una corriente mayor I_2 debido al pequeño número de vueltas. Así en la Ec. 12-39, N_1 e I_1 son ambas grandes y en la Ec. 12-38 N_2 e I_2 son ambas proporcionalmente menores, haciendo L_{21} y L_{12} iguales.*

12. Pérdidas en el hierro

La Fig. 12-11 muestra el circuito equivalente usual para un transformador. Difiere del de la Fig. 12-8 o 12-9 en que tiene una conductancia marcada G_o ; por otro lado, los elementos son exactamente los mismos. El propósito de esta conductancia es consumir la pequeña cantidad de potencia que aproximadamente se pierde en el hierro de un transformador real. En este capítulo, no se ha dicho nada de la posibilidad de corrientes circulatorias, "corrientes de eddy", en el hierro del núcleo de un transformador, o de las pérdidas de histéresis.

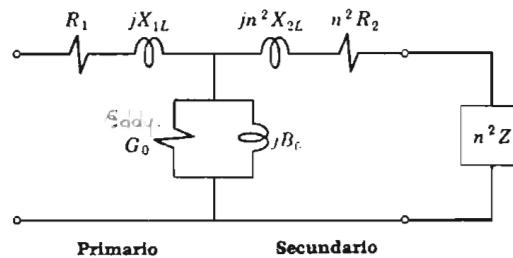


FIG. 12-11. Circuito equivalente de un transformador, relación de vueltas n a 1

* Esta fácil demostración de que $L_{21} = L_{12}$ está limitada a un transformador casi idealizado. Más generalmente los siguientes argumentos demuestran que $L_{21} = L_{12}$ en cualquier circuito acoplado inductivamente si se especifica que las inductancias se comportan de

sis en el hierro, en el transformador real, sin embargo, existen estas pérdidas. En un buen transformador son pequeñas, pero pueden no ser despreciables, y el circuito equivalente se acercará más al duplicar el comportamiento de un transformador real si se incluye una conductancia G_o de un tamaño apropiado.

En el mejor de los casos, G_o es una aproximación. Puede ajustarse a representar las pérdidas en el hierro exactamente a una frecuencia y un voltaje. Sin embargo, las pérdidas en el hierro y particularmente la histéresis, no varían de una manera simple con el voltaje y la frecuencia, así la representación no es precisa para cualquier rango ancho de condiciones de operación. Para los transformadores de potencia, la aproximación es bastante satisfactoria, porque ni la frecuencia ni el voltaje (o más correctamente, la saturación magnética del hierro) cambia mucho en operación normal..

13. Impedancia de transformación

El circuito equivalente de transformador de la Fig. 12-9c o 12-11 es especialmente útil para mostrar la "impedancia de transformación" propiedad de un transformador.

En los circuitos de audiofrecuencia se utilizan a menudo transformadores con el propósito de igualación de impedancia. Supóngase un tubo al vacío con una resistencia de placa de 10 000 ohms que suministra potencia a un altavoz con 100 ohms de resistencia. Un transformador con una relación de vueltas de 10 a 1 se utilizaría entre el tubo y el altavoz. En este ejemplo $a = 10$, y si las resistencias

acuerdo con las definiciones usuales (Secciones 1-4 y 5) y que la inductancia mutua es un elemento pasivo (no una fuente de energía eléctrica).

Considerando dos circuitos con autoinductancia e inductancia mutua. Las corrientes del circuito i_1 e i_2 son ambas inicialmente cero. Las corrientes se cambian ahora en cuatro pasos.

- Paso 1: increméntese i_1 de 0 a I_1 , manteniendo $i_2 = 0$.
- Paso 2: increméntese i_2 de 0 a I_2 , manteniendo $i_1 = I_1$.
- Paso 3: disminúyase i_1 de I_1 a 0, manteniendo a $i_2 = I_2$.
- Paso 4: disminúyase i_2 de I_2 a 0, manteniendo a $i_1 = 0$.

Al final, igual que al principio, ambas corrientes son cero. La energía introducida a las inductancias acopladas del circuito 1 es $\int L_{12} i_1 i_2 + \int L_{21} i_2 i_1$ y la energía introducida

en el por el circuito 2 es $\int L_{21} i_1 i_2 + \int L_{12} i_2 i_1$. Estas integrales se evalúan para cada paso, utilizando límites apropiados. Para el final del cuarto paso, la energía introducida por el circuito 1 es $L_{12} I_1 I_2$ y la energía introducida del circuito 2 es $-L_{21} I_1 I_2$. Si L_{12} fuese mayor que L_{21} la energía total de entrada sería negativa, significando que la energía habría sido desarrollada por las inductancias, lo que es contrario a las especificaciones. Por lo tanto $L_{12} > L_{21}$. Invirtiendo el procedimiento, $L_{12} > L_{21}$. Por lo tanto $L_{12} = L_{21}$.

y reactancias de dispersión y capacitancias del transformador se desprecian el tubo alimenta a una impedancia (en las terminales de entrada de la Fig. 12-11- de aproximadamente $n^2 Z = (10)^2 \cdot 100 = 10000$ ohms. Por lo tanto, el tubo, con ayuda del transformador alimenta a una impedancia igual a la impedancia interna del tubo y esto da la condición de transferencia de potencia máxima (Sec. 11-14) mientras que sin el transformador, el tubo alimentaría solamente a 100 ohms y el altavoz recibiría únicamente una fracción de esa potencia.

14. Sumario

Al principio del capítulo se mencionan convenciones para distinguir la polaridad de los devanados de circuitos acoplados magnéticamente. Con este fin se adoptan los puntos y se dan dos reglas y su uso.

Se escribieron ecuaciones de malla tomando en cuenta la inductancia mutua. Un ejemplo muestra cómo las ecuaciones de rama influyen a las inductancias mutuas. Las inductancias mutuas en las ecuaciones de nodo se discuten solamente para mostrar los principios que incluyen.

Se presenta el coeficiente de acoplamiento.

Se desarrollan los circuitos equivalentes. Se muestra que un circuito equivalente general se reduce a dos formas particularmente útiles, una que es la más conveniente para circuitos acoplados débilmente y la otra para transformadores. Los elementos en el último circuito se identifican con las reactancias de dispersión de un transformador. Se mencionan las pérdidas en el hierro.

PROBLEMAS

1. En la Fig. 12-7, $V_1 = 100/0^\circ$ y $V_2 = 1000/0^\circ$ volts; $L_{11} = 0.30$,

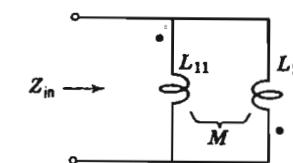
$L_{22} = 30.0$ y $M = 3.00$ henrys; $R_1 = 0.5$ y $R_2 = 50$ ohms; la frecuencia es de 60 cps. Escriba las ecuaciones de malla y resuévalas para I_1 . § 4

2. Proyectar un circuito equivalente para los circuitos acoplados del Prob. 1, utilizando $a = 1$. Repítase, utilizando $a = 10$. § 9

3. En cada uno de los circuitos equivalentes del Prob. 2, si las terminales marcadas V_2 permaneciesen en circuito abierto, ¿cuál sería la impedancia de entrada en las terminales marcadas V_1 ? § 9

4. Encontrar una expresión para la impedancia del circuito mostrado. Se sugiere el método de mallas. § 4

5. En el Prob. 4, sea $L_{11} = 100$ milihenrys, $L_{22} = 100$ milihenrys y $M = 90$ milihenrys. Encontrar el coeficiente de acoplamiento k . Encontrar la inductancia de entrada equivalente del circuito. § 7



Prob. 4

6. Refiriéndonos al Prob. 5, sea $L_{11} = 100$ milihenrys, $L_{22} = 100$ milihenrys y $M = -90$ milihenrys. ¿Qué es diferente, físicamente de entre este circuito y el descrito en el Prob. 5? Encontrar la inductancia de entrada equivalente de este circuito. § 7

7. (a) Cada una de las bobinas del Prob. 5 tiene 10.0 ohms de resistencia así como la inductancia indicada. La frecuencia es de 100 cps. Encontrar la impedancia de entrada. (b) Repetir, siendo $M = -90$ milihenrys. Discútase la diferencia en la resistencia y la reactancia de entrada. § 7

8. Un transformador (como en la Fig. 12-7a) puede estar representado por un circuito equivalente (como en la Fig. 12-7b). En los circuitos reales, $R_1 = 100$ ohms, $L_{22} = 1.00$ henrys y la resistencia total del circuito secundario (carga más R_2) es 10 000 ohms. Las bobinas están devanadas en el mismo núcleo de hierro; la bobina secundaria tiene diez veces el número de vueltas del primario. El coeficiente de acoplamiento es $k = \frac{1}{2}$. Encontrar los valores de los elementos en el circuito equivalente. § 9

9. Repita el Prob. 8 con el coeficiente de acoplamiento $k = 0.8$. § 9

10. Encontrar la inductancia mutua entre dos bobinas idénticas. Las mediciones con puente dan 137 milihenrys para las dos bobinas en serie. Después de invertir las conexiones de una de las bobinas la medición es de 43 milihenrys. Encontrar (a) la inductancia mutua, (b) la autoinductancia de cada bobina, y (c) el coeficiente de acoplamiento. § 10

11. Un transformador tiene $L_{11} = 5.00$, $L_{22} = 21.0$, $M = 9.80$ henrys; $R_1 = 1.5$, $R_2 = 5.1$ ohms. Cuando se aplica a sus terminales primarias 100 volts, 60 cps, encontrar (a) la corriente primaria y el

voltaje secundario, estando el circuito secundario abierto; y (b) la corriente primaria y la corriente secundaria, estando las terminales de secundaria corto circuitados. Utilice el circuito equivalente de la Fig. 12-7b.

§ 10

12. Repita el Prob. 11, pero utilice el circuito equivalente de la Fig. 12-9b.

§ 10

13. Repita la parte (b) del Prob. 11, utilizando las ecuaciones de malla (sin referencia a ningún circuito equivalente).

§ 10

14. Una prueba en el devanado de bajo voltaje de un transformador de potencia de 230 a 2 300 volts (60 cps, 20 kv) nos da 2.0 amperes, 0 watts, a 230 volts, con el devanado de alto voltaje en *circuito abierto*. Una prueba en el mismo devanado, con el devanado de alto voltaje en *cortocircuito* nos da 100 amperes, 0 watts, a 5.3 volts. Encontrar, con una aproximación razonable, la inductancia mutua M . ¿Qué puede usted decir acerca de las inductancias de dispersión? Discuta las aproximaciones incluidas en su método.

§ 10

13

Elementos no Lineales

1. Elementos no lineales

De hecho, por supuesto, una gran cantidad de los elementos en circuitos eléctricos prácticos no son lineales. Esto es, el voltaje instantáneo no es proporcional a la corriente, o a su integral o derivada. Expresado de otra manera, la resistencia o la inductancia, o la capacitancia de un elemento, no es constante pero es una función de la corriente en el mismo.

Existen tres clases importantes de elementos no lineales. Son (1) tubos electrónicos, (2) semiconductores y (3) bobinas con núcleos de hierro o con núcleos de aleaciones ferromagnéticas. Muy frecuentemente la no linealidad del elemento es deseable y se incluye en el diseño del circuito por alguna buena razón. Así, los tubos al vacío operan como detectores o demoduladores en virtud de su no linealidad; los transistores y rectificadores de óxido de cobre son necesariamente no lineales; los amplificadores magnéticos dependen de la saturación del núcleo de hierro.

2. Resistencia no lineal

Está claro, que si una onda senoidal de voltaje se aplica a una resistencia no lineal, la corriente, no siendo proporcional al voltaje no será senoidal. La Fig. 13-1 muestra una curva característica para una resistencia no lineal; corresponde a un elemento de apartarrayo, de material semiconductor cristalino, que conduce poca corriente a

voltaje bajo o moderado, pero una gran cantidad de corriente para alto voltaje (eliminando de este modo la carga eléctrica de un rayo, de una línea de potencia o teléfono). La curva característica que relaciona v a i no es una línea recta como lo es para un elemento de resistencia constante, sino una curva.

La construcción utilizada en la Fig. 13-1 es conveniente para el análisis gráfico. La curva característica que relaciona la corriente y el voltaje se muestra. Debajo de ella y utilizando la misma escala de voltaje, está una curva de voltaje como una función de tiempo; la escala de tiempo se lee hacia abajo. A la derecha de la curva característica y utilizando la misma escala de corriente, está la corriente como una función del tiempo; la escala de tiempo que se lee de izquierda a derecha, es la misma que la escala de tiempo de la onda de voltaje.

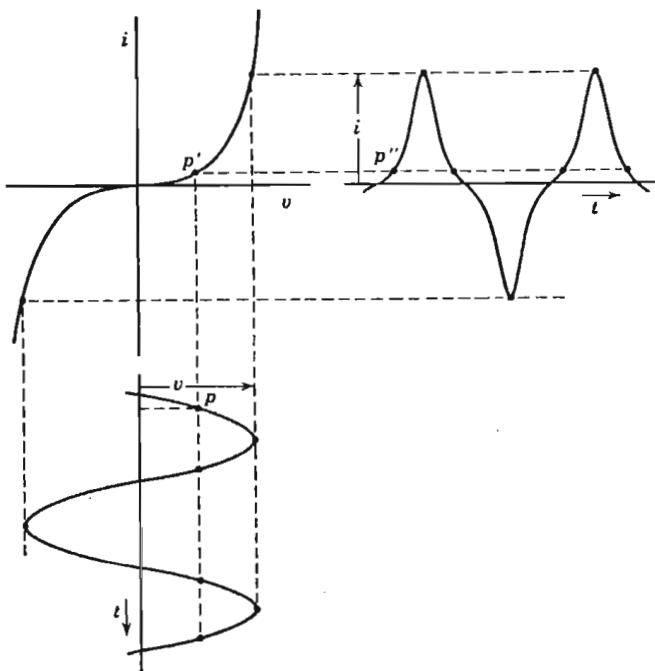


FIG. 13-1. Voltaje y corriente en una resistencia no lineal

Asumamos un voltaje senoidal y dibujémoslo debajo de la curva característica. Encontremos la onda de corriente. Cada punto de la onda de voltaje se traslada hacia arriba hasta la curva de caracterís-

tica para encontrar el valor correspondiente de corriente, que se transporta hacia la derecha y se utiliza para determinar un punto en la onda de corriente en el valor apropiado de tiempo. Así, los puntos p , p' y p'' se refieren todos al mismo instante de tiempo.

Se encontrará entonces que la onda de corriente es una onda con picos muy agudos. El análisis gráfico muestra su forma pero no nos da una ecuación para ella.

Para encontrar una expresión analítica para la corriente, es necesario tener la curva característica descrita matemáticamente. Digamos, como una aproximación, que

$$i = kv^3 \quad (13-1)$$

siendo k una constante determinada experimentalmente. El voltaje, siendo senoidal, puede escribirse.

$$v = V_m \cos \omega t \quad (13-2)$$

La corriente, entonces, utilizando la Ec. 13-1, y usando una identidad trigonométrica * para el cubo del coseno, es

$$i = k(V_m \cos \omega t)^3 = kV_m^3(\frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t) \quad (13-3)$$

Así vemos que la corriente es una onda con un valor máximo de

$$I_m = kV_m^3 \quad (13-4)$$

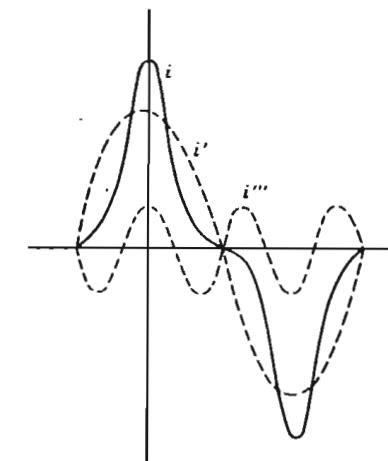


FIG. 13-2. Componentes de la corriente

* Ver nota al pie de la Pág. de la Sec. 4 Pág. 430.

y una forma que es la suma de una onda senoidal de la misma frecuencia que el voltaje aplicado (dado por ω) más una onda senoidal de tres veces esta frecuencia (dado por 3ω).

La Fig. 13-2 muestra una suma gráfica de las dos componentes de la onda de corriente, teniendo i' lo que llamaremos frecuencia fundamental e i'' , lo que llamaremos la tercera armónica, teniendo tres veces la frecuencia fundamental. La componente fundamental tiene, en este caso, tres veces la amplitud de la componente de frecuencia triple, de acuerdo con la Ec. 13-3 y ambas componentes tienen su valor máximo en el mismo instante. Esta solución analítica da la misma onda que la que obtuvimos gráficamente en la Fig. 13-1.

3. Inductor no lineal

Si una bobina tiene un núcleo de hierro o de una aleación de hierro u otra aleación ferromagnética, el flujo magnético en el nú-

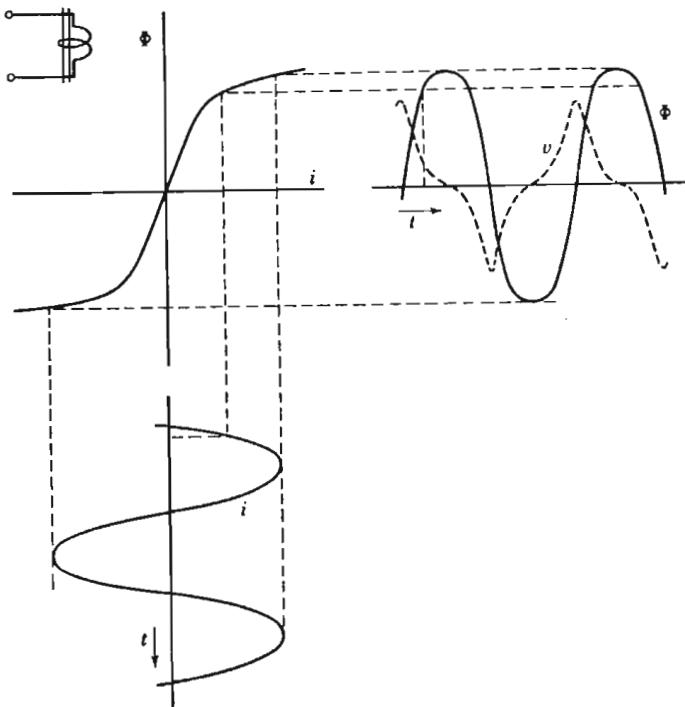


FIG. 13-3. Inductancia no lineal; corriente senoidal

clo no es proporcional a la corriente de la bobina. Ocurre la saturación magnética; la curva característica no es una línea recta, sino es una curva de la forma general mostrada en la Fig. 13-3. Ignoremos la histéresis, asumiendo que (quizá porque existe un considerable entrehierro en la estructura del núcleo) la histéresis es despreciable.

Si la corriente es pequeña, el flujo es casi proporcional a la corriente, pero para corrientes grandes, el incremento correspondiente en el flujo es menor que proporcional. El resultado de pasar una onda senoidal de corriente a través de la bobina es por tanto, no una onda senoidal de flujo sino como se muestra en la figura, una onda algo aplastada. Si no hubiera saturación en la Fig. 13-3, la onda de flujo podría llegar a una cresta cercana a dos veces la que se muestra actualmente, como puede estimarse considerando el flujo que aparecería si la parte recta de la curva característica se extendiera.

El voltaje terminal del elemento inductivo es proporcional a la rapidez de cambio de flujo (ley de Faraday, Ec. 1-14d):

$$v = N \frac{d\Phi}{dt} \quad (13-5)$$

La rapidez de cambio de flujo es la pendiente de la curva de Φ en la Fig. 13-3. Si esta curva de Φ fuese senoidal, la curva de voltaje sería también senoidal. Pero no lo es. La curva Φ está aplastada en la parte superior, dando una pendiente pequeña anormal en cada lado de la cresta. Esto significa que el voltaje es bajo en cada lado de su cero. A continuación en la parte de la onda de flujo que corresponde a la parte no saturada de la curva característica de magnetización, la curva de Φ es muy pendiente y el voltaje crece a un pico relativamente alto. El resultado es, que una onda de flujo aplastada en la parte superior produce una onda de voltaje que tiene picos muy agudos.

El efecto inverso se obtiene si el voltaje aplicado a las terminales del elemento inductivo se requiere que sea senoidal para el circuito externo. Entonces, la corriente no puede ser senoidal. Investiguemos la forma que la onda de corriente debe tener si el voltaje aplicado es una verdadera onda senoidal.

La Fig. 13-4 muestra la misma curva característica, pero esta vez asumimos voltaje senoidal. El flujo se encuentra del voltaje; puesto que el voltaje es proporcional a la rapidez de cambio de flujo, una

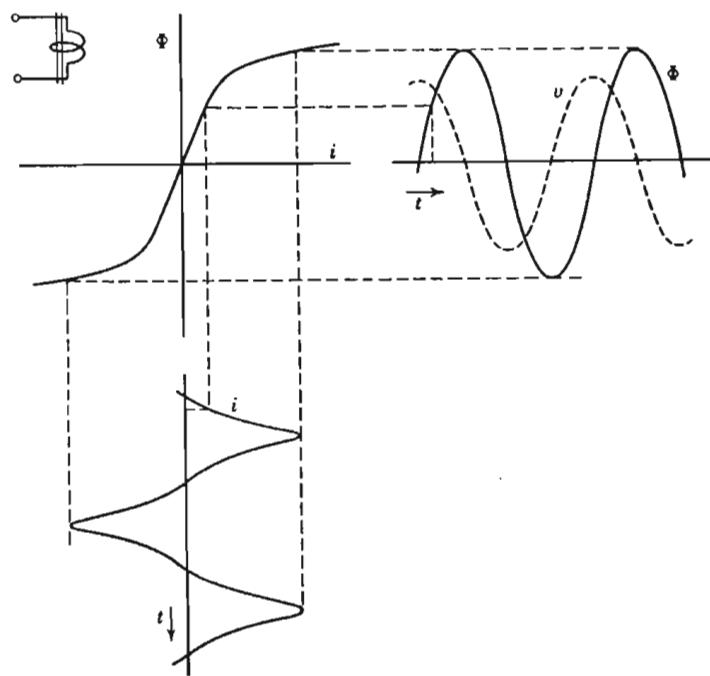


FIG. 13-4. Inductancia no lineal; voltaje senoidal

onda cosenoidal de voltaje requiere una onda cosenoidal de flujo. Esto, por supuesto, es bastante independiente de la curva de saturación, de acuerdo con la Ec. 13-5. Un número de valores de flujo son llevados ahora, desde la onda de flujo a la curva característica, y los valores de corriente correspondientes, se llevarán hacia abajo hasta la onda de corriente. Cuando el flujo es pequeño, la corriente es pequeña, pero cuando la onda de flujo se aproxima a su pico, se alcanza la rodilla de la curva de saturación y la corriente alcanza (hacia la derecha o izquierda en el diagrama) una cresta de alto valor. El resultado neto, es que un voltaje senoidal aplicado a las terminales de un inductor saturable produce una onda de corriente con picos muy agudos.

4. Detector

Un circuito que es capaz de detectar o de modular las señales de radio se muestra en la Fig. 13-5a; para hacer su análisis fácil, se ha

simplificado grandemente. Se muestra un tubo al vacío, un diodo. El voltaje aplicado a él es la suma del voltaje de la batería E_b y la señal de voltaje aplicada $V_m \cos \omega t$. Al principio no le llega ninguna señal y el voltaje total es E_b ; en este momento la corriente es i_0 . El propósito del siguiente análisis es mostrar que cuando una señal pura de voltaje alterno se aplica al circuito, el promedio de la corriente (componente de corriente continua) en el circuito se incrementa. La aplicación práctica, es la de que en un instrumento como un receptor de teléfono o un altavoz, un amperímetro de lectura promedio, o un receptor telegráfico, todos los cuales son demasiado lentos para moverse a la velocidad de la corriente a radiofrecuencia, puede sin embargo, hacer que respondan a una señal recibida de radio-frecuencia colocando un elemento no lineal (el tubo al vacío) en el circuito.

La curva característica del circuito que contiene el tubo al vacío y la fuente E_b se muestra en la Fig. 13-5b. Cuando el voltaje externo aplicado es cero, siendo E_b el único voltaje aplicado al tubo, la co-

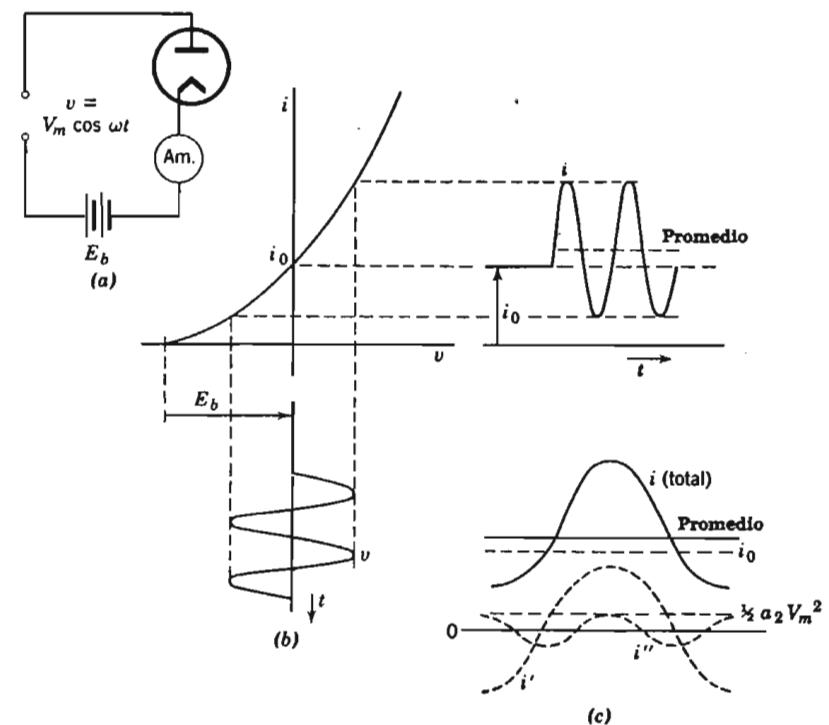


FIG. 13-5. Circuito de un diodo detector, análisis gráfico y resultado del análisis por series de la Ec. 13-8

riente es i_0 . Cuando el voltaje externo aplicado es $v = V_m \cos \omega t$, la corriente varía de la manera mostrada.

La curva característica está dada muy aproximadamente por la fórmula

$$i = i_0 + a_1 v + a_2 v^2 \quad (13-6)$$

La expresión para el voltaje

$$v = V_m \cos \omega t \quad (13-7)$$

puede sustituirse en la Ec. 13-6 para dar

$$\begin{aligned} i &= i_0 + a_1 V_m \cos \omega t + a_2 V_m^2 \cos^2 \omega t \\ &= i_0 + a_1 V_m \cos \omega t + a_2 V_m^2 \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} \\ &= (i_0 + \frac{1}{2} a_2 V_m^2) + a_1 V_m \cos \omega t + \frac{1}{2} a_2 V_m^2 \cos 2\omega t \end{aligned} \quad (13-8)$$

La segunda forma de esta ecuación se obtiene utilizando una identidad trigonométrica * para el \cos^2 de ωt , y la tercera forma reagrupando términos.

Encontramos que la corriente tiene una componente constante, un término de frecuencia fundamental y un término de segunda armónica. Estos están trazados en la Fig. 13-5c. Los dos últimos términos de la ecuación, variando senoidalmente, no suman nada a la corriente *promedio*. La corriente promedio está dada por los términos en el paréntesis. Se verá que la corriente promedio ha sido incrementada por la cantidad $\frac{1}{2} a_2 V_m^2$ con el arriba de la señal de voltaje.

Prácticamente, para el uso en radiotelefonía, la señal de llegada de radio frecuencia es variable en amplitud, de acuerdo con la modulación impuesta a la corriente portadora en el transmisor. En el circuito que estamos analizando, la corriente $\frac{1}{2} a_2 V_m^2$ es grande y pequeña según V_m de la portadora se modula. La variación de corriente promedio opera un instrumento telefónico u otro aparato receptor. Debido a que la variación de la corriente promedio en el circuito es

* Las siguientes identidades son útiles:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\cos^3 x = \frac{3}{8} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x$$

$$\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$$

$$\cos^5 x = \frac{5}{16} \cos x + \frac{5}{16} \cos 3x + \frac{1}{16} \cos 5x$$

proporcional al cuadrado de la amplitud de la señal de entrada, al aparato se le llama detector a cuadrados.

De hecho, un triodo probablemente podría usarse en lugar de un diodo; la señal de entrada podría aplicarse a la rejilla y la respuesta amplificada a la ley de cuadrado aparecería en el circuito de placa. La eficiencia de un detector a cuadrados es baja, pero tiene ciertos usos especiales; uno de ellos es como voltímetro de tubo al vacío (ver Sec. 22, Cap. 4).

5. Transistor

La curva característica de un diodo semiconductor o transistor se muestra en la Fig. 13-6. Si el voltaje aplicado es pequeño, la corriente es aproximadamente

$$i = a(e^{kv} - 1) \quad (13-9)$$

Asumimos un voltaje senoidal aplicado

$$v = V_m \cos \omega t \quad (13-10)$$

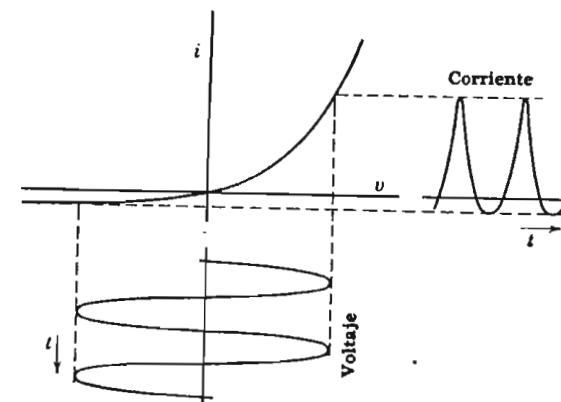


FIG. 13-6. Curva característica de un transistor

Para encontrar las componentes fundamental y armónica de la corriente, la función exponencial se desarrolla en la familiar serie de potencias:

$$i = a \left(1 + kv + \frac{(kv)^2}{2!} + \frac{(kv)^3}{3!} + \dots - 1 \right) \quad (13-11)$$

Sustituyendo la Ec. 13-10 para el voltaje da

$$i = a \left(kV_m \cos \omega t + \frac{k^2 V_m^2 \cos^2 \omega t}{2!} + \frac{k^3 V_m^3 \cos^3 \omega t}{3!} + \dots \right) \quad (13-12)$$

Cuando las identidades * sustituyen a las potencias del coseno esta expresión llega a ser ligeramente complicada, pero es evidente que contendrá términos de frecuencia fundamental (términos que contienen a ω), de segunda armónica con frecuencia 2ω , de tercera armónica, etc., sin más límite que el número de términos de la serie que se incluyan. Así, obtenemos un resultado o podríamos obtener un resultado si fuésemos cuidadosos con la trigonometría, expresado como una serie infinita de la forma

$$i = A_0 + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + A_3 \cos 3\omega t + \dots \quad (13-13)$$

Estamos interesados en la forma de esta expresión para la corriente, pero no particularmente en los valores de los coeficientes. En forma, la serie consiste de un término constante, un término de frecuencia fundamental y términos de todas las frecuencias armónicas.

6. Análisis por series

El tratamiento gráfico muestra simple y claramente los efectos de los elementos no lineales y para la comprensión cualitativa es muy satisfactorio. El método gráfico sin embargo, no es un medio conveniente de obtener resultados cuantitativos.

Se mostrarán algunos ejemplos de tratamiento analítico. En general, el método analítico comienza por expresar la corriente como una función del voltaje (como en las Ecs. 13-1, 6 y 9), o el flujo como una función de las corrientes o en general una variable como función de otra. Esta expresión es más conveniente en la forma de una serie de potencias, que puede ser una serie infinita como en la Ec. 13-11, o un polinomio como en la Ec. 13-6, o únicamente un término solo como en la Ec. 13-1.

La variable independiente (tomemos el voltaje como un ejemplo) escrita en forma senoidal como en la Ec. 13-2, 7 o 10, se introduce a la serie de potencias. Se obtiene entonces, una expresión para la corriente con una manipulación trigonométrica que nos da un término constante más términos senoidales de frecuencias fun-

damental y armónica. Se vieron ejemplos en las Ecs. 13-13, 8 y 3. Estas series trigonométricas se llaman *series de Fourier*.

Una razón para la conveniencia de la expresión de series de potencia de la relación característica entre la corriente y el voltaje es la que nos lleva simplemente a una serie de Fourier para la corriente. La serie de Fourier es una forma más provechosa que nos da una componente constante, (o de corriente continua) una componente fundamental, y varias componentes armónicas.

Otra razón para la conveniencia de las series de potencia es la de que los datos experimentales se describen fácilmente por una serie de potencias. La curva característica se obtiene usualmente por experimentación, y puede y debe obtenerse alguna expresión analítica de los datos experimentales. La serie de potencias, es una forma conveniente para utilizarse.

7. Series de Taylor

Consideremos la representación de una curva por una serie de potencias. Una curva i se muestra en la Fig. 13-7; puesto que es una función de v la marcamos en notación funcional, $i(v)$. Podemos saber o no, la ecuación para esta $i(v)$, pero de algún modo conocemos el valor de $i(v)$ y los de todas sus derivadas en el punto P en el que $v = v_0$. Esto es, en notación funcional, conocemos $i(v_0)$, $i'(v_0)$, $i''(v_0)$, etc.

Se va a encontrar una serie de potencias para aproximar esta función cerca del punto P . La serie sería igual a la función en el punto P y sería una buena aproximación para cierta distancia en ambos lados de este punto.

La diferencia entre el voltaje v_0 en el punto P y el voltaje v en algún otro punto a lo largo de la curva es $v - v_0$. Escribiremos una serie de potencias en función de esta diferencia:

$$a_0 + a_1(v - v_0) + a_2(v - v_0)^2 + a_3(v - v_0)^3 + \dots \quad (13-14)$$

Deseamos esta serie igual a $i(v)$ en el punto P , donde $v = v_0$, y que sea una buena aproximación de $i(v)$ para valores de v cerca de v_0 . Esto es, cuando una curva se traza para la serie, como en la Fig. 13-7, deseamos que la curva de la serie coincida con la curva para $i(v)$ en el punto P y que sea lo más cercana posible a la curva a lo largo de cierta distancia en cada lado de P .

Primero, para hacer la serie igual a $i(v)$ en P , donde $v = v_0$, e

* Ver Nota de pie en la Pág. (387).

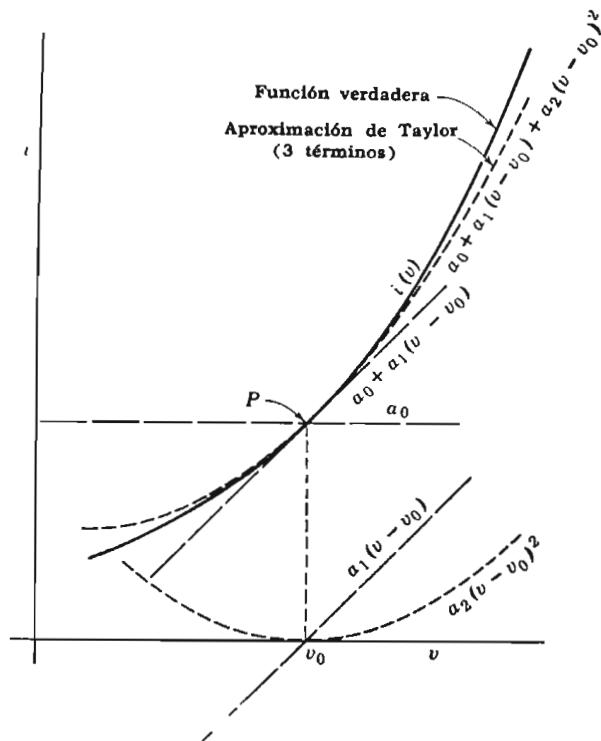


FIG. 13-7. Aproximación de una función por la serie de Taylor

$i(v) = i(v_0)$ sustituimos v_0 por v en la serie, y hacemos la serie igual a $i(v_0)$, obteniendo

$$i(v_0) = a_0 + 0 + 0 + 0 + \dots \quad (13-15)$$

Así, encontramos que a_0 deberá ser igual a $i(v_0)$, y esto es suficiente para hacer $i(v)$ igual a a_0 en el punto P . Pero a_0 no es una aproximación de $i(v)$ en otros puntos. Gráficamente, la línea horizontal a_0 intersecta la curva para $i(v)$ en el punto (v_0, i_0) como se muestra en la Fig. 13-7, pero en otra parte no está ni siquiera cercana a la curva.

Por lo tanto, consideremos a continuación, el segundo término de la serie. Escribimos, como una segunda aproximación de $i(v)$ los dos términos $a_0 + a_1(v - v_0)$. Gráficamente, como en la Fig. 13-7, estos dos términos dan una recta inclinada. Esta recta inclinada ciertamente pasará a través del punto P (a_0 dado por la Ec.

13-15), y se aproximará mejor a la curva en cada lado de P si la pendiente de la recta es igual a la pendiente de la función $i(v)$ en el punto P . La pendiente de la línea recta $a_0 + a_1(v - v_0)$ es a_1 . La pendiente de $i(v)$ en el punto P es el valor conocido de la derivada $i'(v_0)$. Hagamos, entonces, esta igualdad para obtener el mejor valor para a_1 ; encontramos que

$$a_1 = i'(v_0) \quad (13-16)$$

Pero, como podemos ver en la Fig. 13-7, la aproximación sigue no siendo muy buena. Nosotros no podemos representar una curva por una línea recta, aunque la pendiente sea correcta, muy satisfactoriamente. Por lo tanto, sumamos un tercer término a la serie, un término cuadrático, y sumamos una parábola a la línea recta inclinada, para hacer una aproximación mejor. Nuestra tercera aproximación para i es

$$a_0 + a_1(v - v_0) + a_2(v - v_0)^2 \quad (13-17)$$

Esta parábola abrazará la curva más cercanamente en cada lado del punto en cuestión, si tiene la misma curvatura que la función dada. Hemos estipulado hasta ahora, que nuestra aproximación pasará por el punto correcto (por la elección de a_0), y que tendrá la pendiente correcta (por la elección de a_1); ahora procuraremos que tenga la curvatura correcta (por la elección de a_2). Esto se logra haciendo la segunda derivada de la parábola igual a la segunda derivada de la función. La segunda derivada de la parábola, encontrada diferenciando la expresión 13-17 es $2a_2$. Esto se iguala a $i''(v_0)$, segunda derivada conocida de la función en v_0 :

$$2a_2 = i''(v_0) \quad (13-18)$$

Por tanto $a_2 = \frac{1}{2}i''(v_0)$

De esta manera, todos los coeficientes de la serie pueden evaluarse, término por término, sumando una curva cúbica para hacer que la tercera derivada concuerde, posteriormente un término a la cuarta potencia, etc. La serie de potencias así obtenida, serie de Taylor,* se escribe formalmente

$$i(v) = i(v_0) + i'(v_0)(v - v_0) + \frac{i''(v_0)}{2!}(v - v_0)^2 + \dots \quad (13-19)$$

* Matemáticamente, por supuesto, la serie es mejor que una aproximación. Dentro de restricciones bastante amplias, la serie de Taylor converge hacia la función.

8. Ejemplo

La serie de Taylor puede utilizarse para describir cualquier función si se conoce una expresión analítica para dicha función. Por ejemplo, existen razones teóricas para creer que la característica de volts-amperes de un diodo termiónico (Fig. 13-5b) es una función con potencia de tres medios:

$$i = K \left(1 + \frac{v}{E_b} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (13-20)$$

Puesto que deseamos desarrollar esta función en una serie que se utilizará para calcular i cuando v es un pequeño voltaje alterno, variándolos desde $v = 0$, es razonable desarrollar la función partiendo del punto $v = 0$; esto es, en la Fig. 13-7, $v_0 = 0$, lo que la hace similar a la Fig. 13-5b y la Ec. 13-19 será

$$i(v) = i(0) + i'(0)v + \frac{i''(0)}{2!} v^2 + \dots \quad (13-21)$$

(Este caso especial de la serie de Taylor se llama serie de Maclaurin). Ahora se encuentra $i(0)$ escribiendo $v = 0$ en la Ec. 13-20, obteniendo

$$i(0) = K \quad (13-22)$$

La primera y segunda derivadas de la corriente son

$$i'(v) = \frac{di}{dv} = \frac{3K}{2E_b} \left(1 + \frac{v}{E_b} \right)^{\frac{1}{2}} \quad i'(0) = \frac{3}{2} \frac{K}{E_b} \quad (13-23)$$

$$i''(v) = \frac{d^2i}{dv^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \frac{K}{E_b^2} \left(1 + \frac{v}{E_b} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad i''(0) = \frac{3}{4} \frac{K}{E_b^2} \quad (13-24)$$

Estos son los coeficientes que se usarán en la Ec. 13-21:

$$\begin{aligned} i(v) &= K + \frac{3}{2} \frac{K}{E_b} v + \frac{3}{8} \frac{K}{E_b^2} v^2 + \dots \\ &= K \left(1 + \frac{3}{2} \frac{v}{E_b} + \frac{3}{8} \frac{v^2}{E_b^2} + \dots \right) \end{aligned} \quad (13-25)$$

Así, una expresión de la característica de un diodo se obtiene como una serie de potencias. La conveniencia de esta forma para calcular la corriente acaba de demostrarse, porque esta fue la ecuación que tomamos como punto de partida en la discusión del diodo en la Sec. 3. Asumimos que la Ec. 13-6, es formalmente la misma que los tres primeros términos de la serie de la Ec. 13-25.

¿Es permisible utilizar solamente tres términos de la serie de potencias y despreciar todos los otros términos de mayor grado? Consideremos el tamaño de los términos descartados. Si v/E_b es tan pequeña como $\frac{1}{4}$, el mayor de los términos descartados sería únicamente $-(\frac{3}{4})^3 (\frac{1}{4})^3 = -\frac{1}{1024}$ que es seguramente despreciable comparado con los primeros términos de la serie. Por lo tanto, llegamos a la conclusión de que tres términos de la Ec. 13-6 describen la característica del diodo en el punto $v = 0$ estipulando que v es pequeña comparada con E_b . De hecho, v puede ser igual a $\frac{1}{2}E_b$ y el error en utilizar solamente tres términos no sería excesivo para muchos propósitos.

9. Determinación gráfica de los coeficientes

El cálculo de los coeficientes de la serie de potencias depende de tener una expresión analítica para i , tal como en la Ec. 13-20. Usualmente, sin embargo, los datos son numéricos o gráficos. El mismo método de determinar la serie se sigue aplicando en principio, pero las derivadas tienen que aproximarse por diferencias finitas.

Un ejemplo mostrará el método. Los datos para la curva característica de un tubo al vacío se muestran en las primeras dos líneas de la Tabla 13-1. Estos son preferiblemente, no datos como los medidos con un voltímetro y amperímetro, sino valores tomados de una curva corregida o aliada (Fig. 13-8) que se dibuja para fijar los datos también como pueda hacerlo una curva aliada. Los valores tabulados de corriente, se toman entonces de la curva; éstos son valores "aliados" de i .

La tercera línea de la tabla es una aproximación de la derivada de la función. Se encuentra dividiendo la diferencia entre valores sucesivos de la corriente entre la diferencia de valores de voltaje (Δv es en cada caso 0.1). Por ejemplo, $(2.42 - 2.22)/0.1 = 2.0$. Estos valores aproximados para la primera derivada se alisan * en

* Ver *Applied Electronics* de Gray (Referencia 22) para una discusión más completa de este método y para la justificación del alisamiento de las derivadas.

TABLA 13-1

$v = -0.3$	-0.2	-0.1	0.0	0.1	0.2	0.3	Volts
Alisada $i =$	2.22	2.42	2.62	2.83	3.04	3.26	3.49 Miliampères
$\Delta i/\Delta v =$	2.0	2.0	2.1	2.1	2.2	2.3	
Alisada $\Delta i/\Delta v =$		2.00	2.04	2.09	2.16	2.25	
$\Delta^2 i/\Delta v^2 =$		0.4	0.5	0.7	0.9		
Alisada $\Delta^2 i/\Delta v^2 =$		0.46	0.60	0.78			

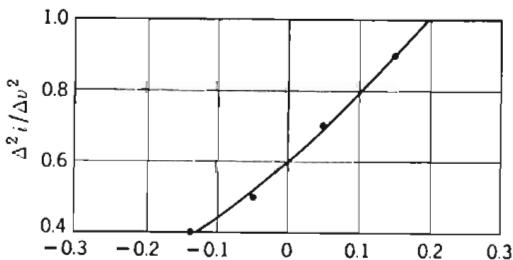
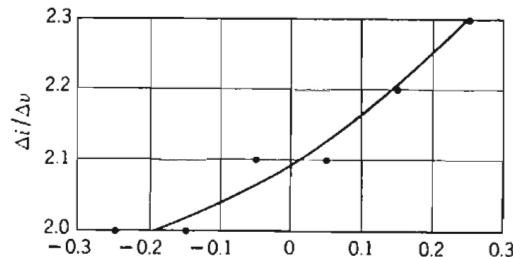
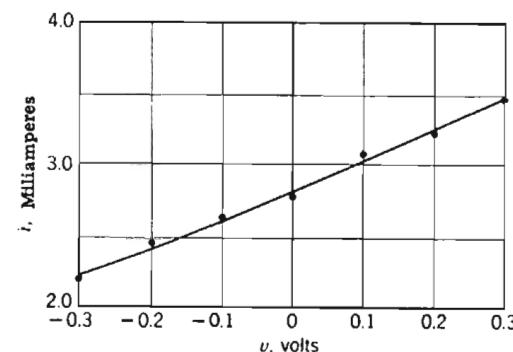


FIG. 13-8. Corrección o alisado de los datos para corriente, y de los valores calculados para aproximar la primera y segunda derivada

la Fig. 13-8b, y los valores corregidos se colocan en la línea 4 de la tabla.

Se toman nuevamente las diferencias y la segunda derivada se approxima en la quinta línea de la tabla. Los valores de la segunda derivada se alisan gráficamente. Los valores de la corriente, de la primera derivada, y de la segunda derivada, todos para $v = 0$, se leen entonces de la tabla y se intercalan en la fórmula, Ec. 13-21, dando:

$$i = 2.83 + 2.09v + 0.30v^2 \quad (13-26)$$

Más términos de la serie pueden obtenerse de la misma manera si se desea y si la exactitud de los datos experimentales lo permite —lo cual probablemente no. El final de utilidad de este método se alcanza cuando los puntos trazados partiendo de las diferencias finitas son cero o están tan dispersos que no determinan una curva. La exactitud total de la serie obtenida (como en la Ec. 13-26) se comprueba calculando i de la serie y comparándolo con el dato original.

10. Aplicación práctica

En la práctica, un elemento no lineal está usualmente en serie con otra impedancia, y particularmente con una impedancia de carga. La corriente y el voltaje aplicado están relacionados entonces, por una curva característica que incluye el comportamiento de la carga así como el del elemento no lineal.

El análisis en importantes casos prácticos llega a ser más bien complicado y estaría fuera de lugar en este libro. La discusión del análisis por serie de potencias (serie de Taylor) de la modulación y demodulación o detección y de la intermodulación de amplificación, se encontrará en libros de electrónica (por ejemplo, Terman, Referencia 19; Gray, Referencia 22).

El objeto de la discusión en este libro es mostrar cómo una curva característica puede representarse por una serie de potencias, y cómo las series de potencias para las curvas características nos llevan a las series de Fourier para una variable dependiente.

11. Características con un cambio abrupto

La serie de potencias representa bien funciones que se curvan poco a poco y no bruscamente. Muchos circuitos prácticos, sin embargo, cambian abruptamente de conducción cuando el voltaje aplicado es de la otra polaridad. La Fig. 13-9a muestra la curva característica de un rectificador de ese tipo. El dispositivo real puede ser un tubo al vacío o un rectificador de óxido de cobre, selenio u otro semiconductor. Cuando se idealiza con el propósito de análisis, su comportamiento puede representarse a menudo por una línea que no muestre corriente para cualquier cantidad de voltaje negativo y una corriente muy grande para un pequeño voltaje positivo.

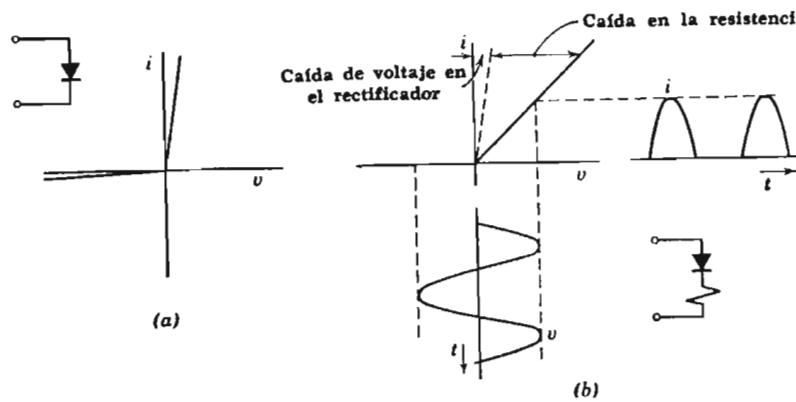


FIG. 13-9. Rectificador idealizado

El diagrama del circuito en la esquina superior de la Fig. 13-9a muestra el símbolo convencional para un elemento rectificador. En la Fig. 13-9b se muestra una resistencia en serie con el rectificador. Esto es necesario usualmente para cualquier aplicación práctica. Un voltaje senoidal está aplicado a este circuito. La corriente resultante se muestra en la Fig. 13-9b; el dispositivo se dice que opera un *rectificador de media onda*.

Las Figs. 13-6 y 13-9 muestran las curvas características para el mismo tipo de dispositivo. Ambos son rectificadores. Pero la característica experimental real está idealizada de manera diferente. En el primer ejemplo la característica está aproximada por la curva alisada de una función exponencial; en el segundo por dos líneas

rectas que se encuentran en el origen. ¿Cuál representación es mejor? depende del problema por resolverse.

Desde el punto de vista del análisis las dos situaciones son bastante diferentes. Una curva alisada, está representada muy bien por una serie de potencias. La característica consistente de dos elementos rectos, sin embargo, no puede representarse por una serie de potencias si la interrupción ocurre en la región de operación, lo que por supuesto debe suceder si el dispositivo va a ser útil. La razón matemática es que esta interrupción en la curva representa una discontinuidad en las derivadas, un cambio abrupto en la pendiente. Una serie de potencias no representa una función que es discontinua, o que tiene una derivada discontinua. Aun si es la segunda derivada la que es discontinua y no la función misma o la primera derivada, (un ejemplo es un tubo al vacío operado en corte, con voltaje positivo produciendo corriente proporcional al voltaje elevado a la potencia de tres medios y voltaje negativo sin producir corriente) la representación por series de potencia no es buena.

12. Circuitos rectificadores

La clase de análisis sugerido en la sección precedente puede aplicarse a un número de circuitos prácticos importantes. La Fig. 13-9 muestra la salida de un rectificador de media onda con resistencia de carga y está repetida en la Fig. 13-10a. El rectificador de media onda es el más simple y barato de los circuitos rectificadores; el elemento rectificador puede ser un tubo electrónico o un diodo semiconductor tal como, por ejemplo, un rectificador de óxido de cobre.

La Fig. 13-10b muestra un circuito con dos elementos rectificadores conectados a un transformador con secundario con derivación central. Este dispositivo es, obviamente, más de dos veces más caro, pero suministra una salida que es dos veces mayor en promedio (corriente continua) del valor de corriente y, lo que es más importante generalmente, con un flujo más estable de corriente. La Fig. 13-10c muestra un arreglo para cuatro rectificadores que darán la misma rectificación "de onda completa" sin un transformador. Si se requiere un transformador, de todos modos, para cambiar voltaje, la ventaja económica está en el primer circuito; si la necesidad de un transformador puede ser enteramente descartada, sin embargo, el circuito de puente es el más barato para una salida requerida.

La salida de un rectificador, se analiza comúnmente en el promedio, o componente constante o de corriente continua; una com-

ponente de frecuencia fundamental; y varias armónicas. Cómo se puede hacer esto, se verá en el siguiente capítulo. Está claro, sin embargo, que el promedio, la componente constante o de corriente continua, es la salida útil y deseable del rectificador, y las componentes de corriente alterna de la onda de salida son en general sin utilidad y algunas veces realmente dañinas. En el suministro de potencia para un receptor de radio, por ejemplo, causan "zumbidos". Y es evidente intuitivamente aun sin análisis, que el rectificador de onda completa suministra más de la componente de corriente continua deseada y menos de las componentes no deseadas de corriente alterna, que el rectificador de media onda. Por tanto, los rectificadores de onda completa, aunque más caros, se utilizan más a menudo.

La forma de la onda de corriente de salida depende, naturalmente, de la naturaleza de la carga. Si la carga es pura resistencia, como en la Fig. 13-11a, el voltaje y la corriente de salida del rec-

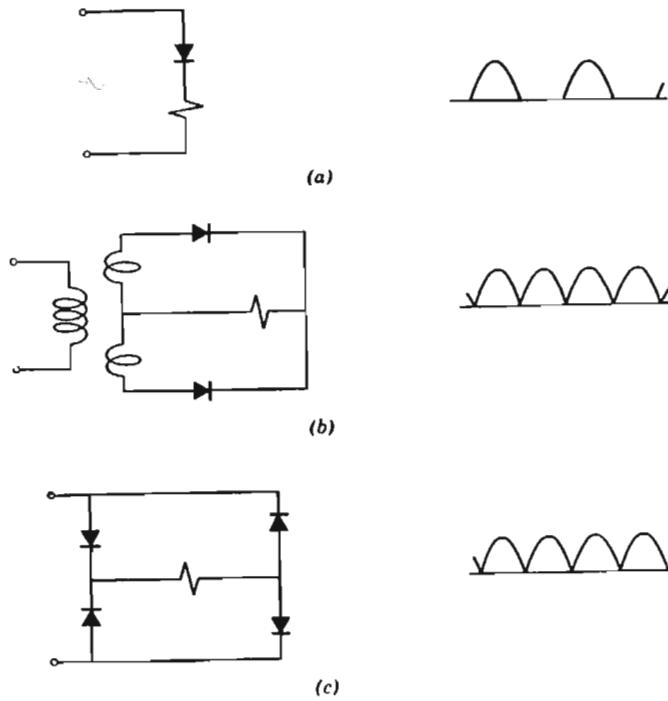


FIG. 13-10. Circuitos rectificadores prácticos. (a) Rectificador de media onda. (b) Transformador con derivación central, onda completa. (c) Circuito de puente, onda completa

tificador tiene la misma forma proporcional en cada instante. La forma de onda mostrada en la figura se obtiene considerando que los elementos rectificadores no dejan pasar corriente en lo absoluto cuando el voltaje aplicado a ellos está en la dirección errónea o "inversa", mientras que se supone que pasan corriente en su dirección conductora sin caída de voltaje en el rectificador. Así, el voltaje de salida es igual al voltaje de entrada del rectificador excepto porque se han invertido los medios-ciclos alternados. Puede, sin embargo, incluirse en el circuito una resistencia para representar el hecho de que existe realmente una caída de voltaje en el rectificador cuando es conductor, a ésta se le llama la resistencia equivalente o resistencia interna del rectificador. Que sea o no suficientemente grande para tener significación depende de la naturaleza del rectificador y de la resistencia de la carga.

Los rectificadores se utilizan comúnmente para cargar baterías. Como se muestra en la Fig. 13-11b, la corriente puede fluir únicamente cuando el voltaje de salida del rectificador es mayor que el voltaje de la batería. Esto significa que la corriente puede fluir para cargar la batería solamente por una fracción de cada medio ciclo, cerca de la cresta de voltaje, aunque se utilice un rectificador de onda completa. Durante el breve tiempo que fluye, la corriente puede ser muy grande; ésta es impulsada por la diferencia entre el voltaje de salida del rectificador y el voltaje de la batería y está limitada solamente por la resistencia interna del rectificador y la batería. Algunas veces, se coloca una resistencia "de compensación" adicional en el circuito para evitar que los pulsos de corriente sean excesivamente grandes y posiblemente pongan en peligro al rectificador.

Si se requiere un suministro de corriente continua bastante constante de un rectificador, y es objetable una variación superimpuesta de las frecuencias fundamentales y armónicas, se utiliza entonces un circuito filtro. La Fig. 13-11c muestra un circuito filtro para fluctuaciones.

Este es un filtro extremadamente simple, utilizado únicamente para discriminar entre las componentes de corriente continua y corriente alterna en el circuito. La inductancia y capacitancia puede considerarse que están en serie como un divisor de voltaje. Para la corriente directa, la inductancia no tiene impedancia, y la capacitancia tiene impedancia infinita, así que toda la componente de voltaje de corriente continua en la salida del rectificador aparece entre las terminales de la capacitancia y por lo tanto entre las terminales de la carga. Para la corriente alterna, la impedancia de

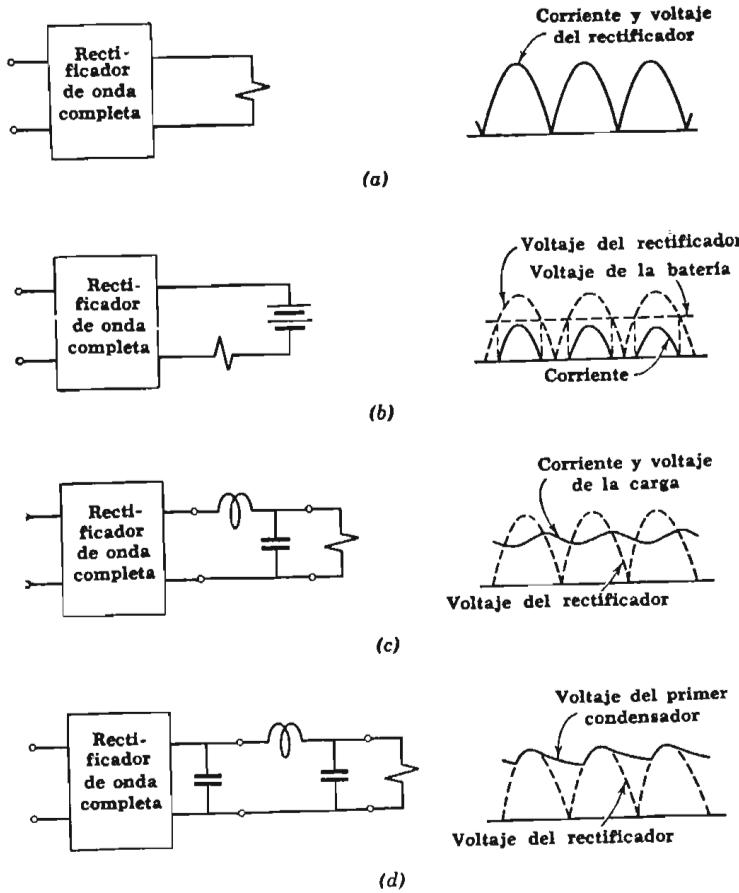


FIG. 13-11. Voltaje y corriente de salida de rectificadores de onda completa hacia varias cargas. (a) Carga de resistencia. (b) Carga de batería. (c) Filtro para fluctuaciones con entrada de inductancia

la inductancia es alta, y la de la capacitancia es baja, por tanto, poco de la variación de voltaje aparece entre las terminales de la capacitancia o de la carga. El efecto de filtrado se trazará cuantitativamente en el siguiente capítulo en la Sec. 14.

Se suministra un refinamiento en el circuito de la Fig. 13-11d conectando un condensador adicional en las terminales de salida del rectificador. Este condensador se cargará cuando el voltaje de salida del rectificador esté en su pico o cerca de él y durante el resto del medio ciclo el condensador suministrará su carga eléctrica a la carga sin mucha fluctuación de voltaje suponiendo que el condensador es grande y la carga ligera. Así en la Fig. 13-11d el voltaje aplicado en las terminales de entrada de la sección de filtro está alisado por la presencia del condensador en las terminales del rectificador; debido al condensador de entrada, la línea llena marcada "voltaje del primer condensador" es el voltaje de entrada a la sección de filtro en lugar de la línea no continua marcada "voltaje del rectificador". La sección de filtro tiene por lo tanto, un voltaje de entrada más continuo cuando trabaja si se utiliza un condensador de entrada.

trica a la carga sin mucha fluctuación de voltaje suponiendo que el condensador es grande y la carga ligera. Así en la Fig. 13-11d el voltaje aplicado en las terminales de entrada de la sección de filtro está alisado por la presencia del condensador en las terminales del rectificador; debido al condensador de entrada, la línea llena marcada "voltaje del primer condensador" es el voltaje de entrada a la sección de filtro en lugar de la línea no continua marcada "voltaje del rectificador". La sección de filtro tiene por lo tanto, un voltaje de entrada más continuo cuando trabaja si se utiliza un condensador de entrada.

Sin embargo, aunque el condensador de entrada suministra un mejor filtrado, es a expensas de una regulación pobre de voltaje. Además, el condensador de entrada recibe carga del rectificador en pulsos cortos de alta corriente y esto complica el diseño del rectificador. En la práctica los pequeños rectificadores se construyen comúnmente con filtros de capacitancia de entrada (Fig. 13-11d) y los mayores con filtros de inductancia de entrada (Fig. 13-11c).

13. Sumario

Aunque la mayor parte de este libro concierne con elementos de circuitos lineales, existe cierta clase de elementos que son comúnmente no lineales. Esto se ha mencionado a principio de capítulo y se dieron ejemplos.

Si se conoce una curva que relaciona corriente y voltaje (o cualesquiera otras dos variables), un método gráfico muestra la corriente resultante de un voltaje senoidal (o viceversa).

Si las variables están relacionadas por una función analítica, el desarrollo de la función por la serie de Taylor nos lleva a la expresión de la variable dependiente como una serie de Fourier. Si los datos son numéricos o gráficos, este desarrollo en serie de potencias puede aproximarse.

Los rectificadores, representativos de los elementos no lineales que no pueden manejarse por medio de las series de Taylor debido a una interrupción abrupta en la curva característica, se han tratado por la idealización de las características en dos segmentos de línea recta. Se mencionaron algunas aplicaciones prácticas.

PROBLEMAS

1. La corriente a través de la resistencia no lineal de la Fig. 13-1 es senoidal. Bosquéjese un diagrama similar al de la Fig. 13-1 para encontrar la forma de voltaje entre las terminales de la resistencia. § 2

2. (a) Un voltaje alterno aplicado a un reactor saturable es de aproximadamente la mitad de amplitud mostrada en la Fig. 13-4, y la operación está aproximadamente en la parte recta de la curva característica cercana al origen. Bosquéjese la corriente alterna resultante. (b) Ahora se hace pasar suficiente corriente continua por la bobina para producir saturación, y al mismo tiempo se aplica un voltaje alterno a la bobina; la operación está ahora, en la parte aplastada de la curva característica más allá de la rodilla. Asumiendo el mismo voltaje alterno, bosquéjese la corriente y compárese con la parte (a). (Este es el principio de un tipo de circuito de control). § 3

3. Podría el elemento semiconductor de la Fig. 13-6 utilizarse para un demodulador como lo es el diodo en la Fig. 13-5? Muestre gráficamente cómo trabajaría. § 5

4. Evalúese A_o en la Ec. 13-13; A_o se expresará como una serie de potencias, y los términos hasta $(kV_m)^4$ se deberán incluir. ¿Sería este semiconductor un detector de "ley de cuadrado"? § 5

5. En la Fig. 13-7, estímese el siguiente término (cúbico) de la serie y bosquéjese su curva en el diagrama. § 7

6. Encontrar la serie de Maclaurin para la característica del transistor para la Ec. 13-9 (serie de Taylor alrededor del punto $v = 0$). § 8

7. Si $i = e^{(v-v_0)}$, expresa i como una serie de potencias, desarrollese partiendo del punto V_0 . Encontrar los términos hasta el cúbico. Compárese con la Fig. 13-7. § 8

8. Desarróllese $i(v) = v^3$ alrededor del punto $v = 1$, utilizando el método de Taylor. Encontrar todos los términos. § 8

9. Si en la Ec. 13-25, $v/E_b = \frac{1}{4}$, calcular los términos de tercera, cuarta y quinta potencia de v/E_b . § 8

10. Si, en la Ec. 13-25, $v/E_b = \frac{1}{2}$, ¿qué tan grande es el término cúbico comparado con la suma de los términos precedentes de la

serie? ¿Puede despreciarse con seguridad? ¿Qué sucede con la suma de todos los términos después del cúbico? § 8

11. Compruébese la exactitud de la Ec. 13-26 calculando i y comparando con el dato original. § 9

12. La Ec. 13-26 da los coeficientes numéricos, la Ec. 13-25 la forma típica, de la característica de un diodo. ¿Qué valores numéricos de K y E_b en la Ec. 13-26 da la Ec. 13-25? § 9

13. La experimentación determina los siguientes datos para la curva característica de una resistencia no lineal. Expresar $i(v)$ como una serie de potencias (serie de Maclaurin, o serie de Taylor alrededor de $v = 0$), dando tres términos. ¿Se aproxima esta serie a cualquier función reconocible? § 9

$v = -0.3$	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.3
$i = 0.74$	0.82	0.91	1.01	1.10	1.20	1.38

14. Escribábase una serie de potencias para representar los siguientes datos numéricos. Utilícese una serie de Taylor, desarrollando alrededor del punto $t = 1.57$; esto es, dar $v(t - 1.57)$. Déñense los términos hasta el cúbico si los datos justifican. ¿Se aproxima esta serie a cualquier función reconocible? § 9

$t = 0.6$	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4
$v = 0.56$	0.72	0.84	0.93	0.99	1.00	0.97	0.91	0.81	0.67

14

Series de Fourier

1. Ondas no senoidales

En los primeros capítulos estudiamos solamente ondas senoidales de corriente alterna. Existían bastantes razones para esto. Es un hecho que la mayoría de las ondas de voltaje y corriente son aproximadamente senoidales. Esta es una forma conveniente de voltaje para entregarse de un generador de potencia eléctrica, y si el voltaje es senoidal (y los elementos del circuito son lineales) la corriente también será senoidal. Esta es la forma natural de obtenerse de un oscilador electrónico en el que las ondas están formadas por resonancia. Aún más, todos los tipos de sensibilidad de frecuencia, como la selectividad de los circuitos sintonizados o de los circuitos filtros, depende de que las ondas sean senoidales. Finalmente, el análisis se desarrolla mejor y es mucho más fácil para ondas senoidales, y podemos sospechar que un ingeniero podría por esta razón preferir una onda senoidal.

Ahora, sin embargo, aparece una razón verdaderamente decisiva para desarrollar el análisis de circuitos en función de ondas no senoidales: cualquier onda—una onda de cualquier forma—puede analizarse como la suma de ondas senoidales de diferente frecuencia. Cada una de las componentes senoidales se tratará entonces, con los métodos que nos son familiares. Finalmente, las componentes se recombinan en una onda no senoidal obteniéndose la respuesta para el problema. El campo de aplicación del análisis no está, por lo tanto, restringido a la discusión de ondas senoidales. Tenemos más

bien un medio de atacar los problemas que incluyen cualquier forma de onda por medio del análisis de Fourier.

2. Adición de componentes

Es evidente que la suma de dos o más ondas senoidales de frecuencias diferentes darán una onda total que no es senoidal. En la Fig. 14-1a una onda de frecuencia fundamental y una onda de segunda armónica se suman y el total se muestra como una línea llena. En la Fig. 14-1b se suman una fundamental y una tercera armónica.

Aunque ninguna de estas ondas totales es senoidal, existe una diferencia significativa entre ellas. En la onda que contiene una tercera armónica los medios ciclos, positivo y negativo, son similares; ambos tienen pico. En la onda que contiene una segunda armónica, el medio ciclo positivo tiene pico y el medio ciclo negativo está aplastado. Encontraremos que algo de esta suerte es siempre cierto. Cuando hay solamente armónicas pares (tercera, quinta, etc.), los medios ciclos positivo y negativo son similares, mientras que si están presentes armónicas pares (segundo, cuarto, etc.) no lo son.

La suma de una tercera armónica no necesariamente resulta en agudizar la onda. La Fig. 14-1c muestra una onda que está aplastada por la suma de una tercera armónica. La diferencia está en la relación de fase entre la armónica fundamental y la tercera. En la Fig. 14-1b sus crestas son ambas positivas o ambas negativas al mismo tiempo, y por lo tanto se suman; en la Fig. 14-1c sus crestas son de polaridad opuesta y se restan. Con armónicas pares como en la Fig. 14-1a, si un par de crestas se suma, el siguiente se resta y ésta es la razón para la diferencia que existe entre la forma de las medias ondas positiva y negativa. Así, sumando componentes armónicas de muchas frecuencias, con varias amplitudes y relaciones de fase, la onda total puede tener una variedad tremenda de formas.

3. Análisis de ondas

Más aún, una suma tal de componentes fundamental y armónica puede dar una onda total de *cualquier* forma. Este hecho se expresa usualmente de otra manera diciendo que cualquier onda puede ana-

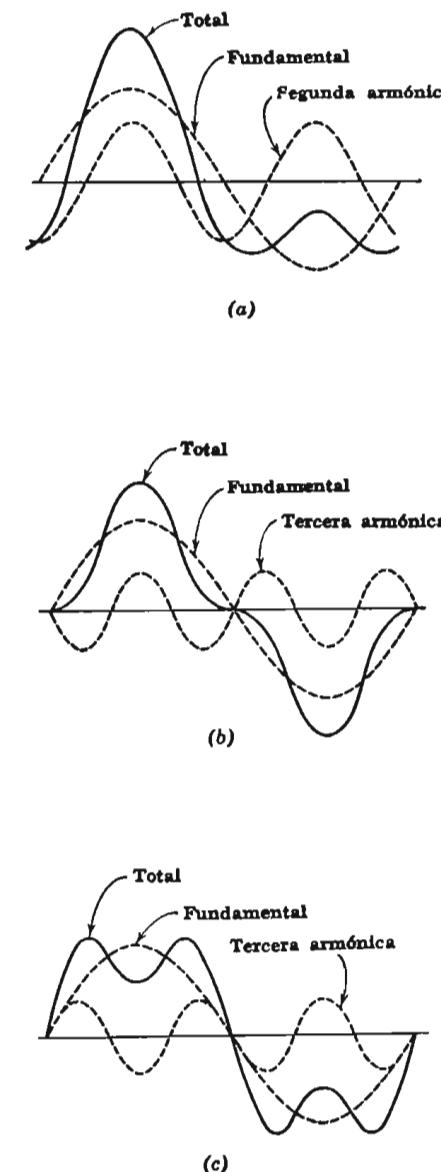


FIG. 14.1. Componentes de ondas complejas

lizarse por una serie de Fourier.* Veamos cómo se hace este análisis obviamente valioso.

Cuando la anterior declaración se expresa en símbolos es

$$\begin{aligned} f(t) = & \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + \dots \\ & + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \dots \end{aligned} \quad (14-1)$$

La variable independiente se escribe aquí t ; cualquier letra podría utilizarse, pero en la mayoría de nuestro trabajo, la variable independiente es el *tiempo*, así que t es un símbolo conveniente. La función se llamó $f(t)$. Esta es bastante general y puede representar corriente o voltaje o cualquier otra cantidad física. El primer término de la serie es una constante $\frac{1}{2}a_0$. Si estamos hablando de corriente, ésta es la "componente de corriente continua" de la onda. Los términos con coeficiente a_1 y b_1 constituyen juntos la componente fundamental. Los términos con coeficientes a_2 y b_2 dan la componente de segunda armónica, y así sucesivamente.

Esta serie de Fourier, para ser útil debe converger. Esto es, la suma de la serie, cuantas más y más de las altas armónicas se suman, más se aproximará al límite. Cuando hacemos $f(t)$ igual a la serie en la Ec. 14-1 el significado de la igualdad es el de que el límite al que se aproxima la serie es $f(t)$.†

Para encontrar la serie que representa cualquier $f(t)$, necesitamos evaluar los coeficientes a_0 , a_1 , b_1 , a_2 , b_2 etc. Veremos ahora cómo se hace. El método está basado en el hecho de que las funciones seno y coseno constituyen un sistema *ortogonal*; esto es, el promedio de sus productos en cruz es cero como se especifica en las siguientes integrales. (Estas integrales definidas, que son fácilmente verificables por integración, se utilizarán en los siguientes párrafos). Si m y n son cualesquiera números enteros,

$$\int_0^{2\pi} \sin mx dx = 0 \quad \int_0^{2\pi} \cos mx dx = 0 \quad \int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx = 0 \quad (14-2)$$

Si m y n son enteros diferentes

* Los matemáticos reconocen ciertas limitaciones en las funciones que pueden representarse por una serie de Fourier, pero ninguna onda físicamente posible queda fuera de esta representación. Por ejemplo, la función debe tener un solo valor y puede tener solamente un número finito de descontinuidades finitas en un intervalo finito.

† Una excepción de esto, que no nos concierne ahora por el momento, es en un punto de discontinuidad; cuando la función es continua la serie converge hacia $f(t)$ y cuando la función es discontinua la serie converge hacia el punto medio de la discontinuidad.

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = 0 \quad \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = 0 \quad (14-3)$$

pero si m y n son enteros iguales las Ecs. 14-3 llegan a ser

$$\int_0^{2\pi} (\sin mx)^2 dx = \pi \quad \int_0^{2\pi} (\cos mx)^2 dx = \pi \quad (14-4)$$

Como modo de explicación, estudiemos las curvas de la Fig. 14-2. En (a) las curvas del $\sin x$ y $\cos x$ se muestran, y el producto de estos dos que es $\sin x \cos x$. El área sombreada es la integral de $\sin x \cos x$ y contando el área debajo del eje como negativo está claro que la integral en un ciclo completo es cero. Esto coincide con las Ecs. 14-2.

En (b) están las curvas para $\sin x$ y $(\sin x)^2$. El área bajo $(\sin x)^2$ está toda arriba del eje, así que la integral no es cero, y aunque no es obvio de la figura es bastante razonable suponer que el promedio de la función $(\sin x)^2$ es $\frac{1}{2}$, haciendo la integral a lo largo de un ciclo igual a π , como en las Ecs. 14-4. La integral de $(\cos x)^2$ es por supuesto la misma.

La parte (c) muestra dos ondas seno de frecuencia diferente y la onda que es su producto. El área bajo la curva producto es cero. Esto, aunque es un simple ejemplo, ilustra las Ecs. 14-3. Otras ilustraciones pueden inventarse hasta que el lector esté satisfecho de que las Ecs. 14-2 a 14-4 son siempre correctas.

Veamos ahora cómo estos hechos de *ortogonalidad* pueden utilizarse para determinar los coeficientes de la serie en la Ec. 14-1. Pongamos atención en uno de los coeficientes; escojamos de manera casual el coeficiente a_3 . Para encontrar a_3 , primero multipliquemos toda la Ec. 14-1 por $\cos 3\omega t$. Por conveniencia, escribamos x en vez de ωt de aquí en adelante. A continuación multipliquemos ambos miembros de la ecuación por dx e integremos:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} f(x) \cos 3x dx \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}a_0 \cos 3x dx + \int_0^{2\pi} a_1 \cos x \cos 3x dx \\ &+ \int_0^{2\pi} a_2 \cos 2x \cos 3x dx + \int_0^{2\pi} a_3 (\cos 3x)^2 dx + \dots \end{aligned}$$

$$+ \int_0^{2\pi} b_1 \sin x \cos 3x dx + \int_0^{2\pi} b_2 \sin 2x \cos 3x dx + \dots \quad (14-5)$$

Esto se ve mal pero realmente no lo es, para el primer término del segundo miembro, siendo la integral de $\cos 3x$ a través de 1 ciclo, cero; el segundo y tercer término son cero según las Ecs. 14-3; el cuarto término, según las Ecs. 14-4, es igual a $a_3\pi$; y los dos últimos términos según las Ecs. 14-2 son cero. También, todos los otros términos de la serie que no se han escrito explícitamente en la ecuación son cero. Por lo tanto, el resultado final es

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos 3x dx = a_3\pi \quad (14-6)$$

$$a_3 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos 3x dx \quad (14-7)$$

Tenemos ahora, una expresión para a_3 en función de una integral. Si la función $f(t)$ es conocida, la integral puede evaluarse y por lo tanto puede encontrarse el coeficiente a_3 . Por supuesto, puede no ser fácil integrar, pero es teóricamente posible.

Por tanto, hemos conseguido encontrar el valor de uno de los coeficientes de la serie de Fourier, y puesto que este coeficiente particular no es diferente de los otros, el mismo método puede utilizarse para todos los demás. Si generalizamos de a_3 a a_n , podemos escribir

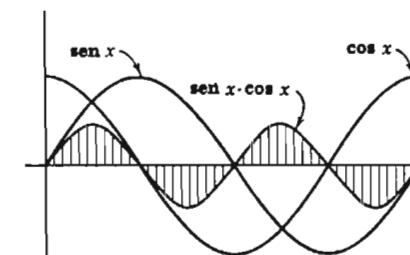
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \quad (14-8)$$

Un desarrollo similar después de multiplicar por una función seno nos da

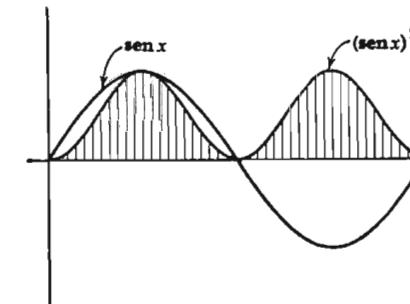
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \quad (14-9)$$

En estas dos ecuaciones, tenemos entonces los medios de calcular todos los coeficientes de la serie, repitiendo aquí con x en vez de ωt :

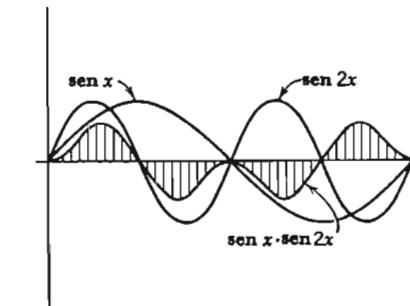
$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots \\ + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots \quad (14-10)$$



(a)



(b)



(c)

FIG. 14-2. Producto de ondas senoidales

El coeficiente a_0 se encuentra de la ecuación 14-8 con $n = 0$, nótese que $\cos 0 = 1$; esto se escribe a veces como una forma separada (Ec. 14-28) pero aquí no es necesario hacerlo.

Tenemos aquí la forma usual de la serie de Fourier. Por brevedad puede utilizarse el símbolo formal para suma; la serie se escribirá entonces

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \quad (14-10a)$$

Esto significa exactamente lo mismo que la Ec. 14-10; es más fácil de escribir y probará, con práctica, ser más fácil para leer también.*

4. Onda cuadrada

Veamos a continuación cómo trabajan estas fórmulas para el análisis de cualquier función en sus componentes de Fourier. Analicemos algunas funciones simples. Deberá hacerse notar que las siguientes funciones no son solamente ilustraciones del método, sino que también son bastante importantes por sí mismas, tanto por razones prácticas como matemáticas, por lo que el resultado de su análisis deberá ser completamente familiar.

La onda cuadrada de la Fig. 14-3 puede expresarse matemáticamente como sigue (escribiendo x en vez de ωt):

$$\begin{aligned} f(t) &= +1 \quad \text{cuando } 0 < x < \pi \\ f(t) &= -1 \quad \text{cuando } \pi < x < 2\pi \end{aligned} \quad (14-11)$$

Se requieren dos ecuaciones para describir la onda en el intervalo de 0 a 2π ; $f(t) = 1$ cuando x está entre 0 y π , y $f(t) = -1$ cuando x está entre π y 2π . Habrán, consecuentemente, dos integrales necesariamente para encontrar cada a o b ; debemos integrar primero de 0 a π y a continuación de π a 2π . Encontremos, por ejemplo, b_3 . Según la Ec. 14-9.

$$b_3 = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} (+1) \sin 3x \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-1) \sin 3x \, dx \right) \quad (14-12)$$

En este ejemplo simple, la integración es fácil; integramos a continuación, sustituimos los límites, y simplificamos la expresión:

* La letra m se utiliza en la Ec. 14-10a para significar cualquier entero; esta ecuación puede sustituirse en las Ecs. 14-8 y 14-9 para probar su validez sin confusión entre m y n , cuando m y n son diferentes enteros.

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin 3x \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin 3x \, dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left[-\frac{1}{3} \cos 3x \right]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{3} \cos 3x \right]_{\pi}^{2\pi} \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1+1}{3} + \frac{1+1}{3} \right) = \frac{4}{3\pi} \end{aligned} \quad (14-13)$$

Así se calculó b_3 . Todos los otros coeficientes podrían calcularse de la misma manera uno a uno. Esto es un proceso tedioso sin embargo, y una gran cantidad de tiempo de trabajo puede ahorrarse generalizando. Por ejemplo, es posible demostrar que todos los coeficientes

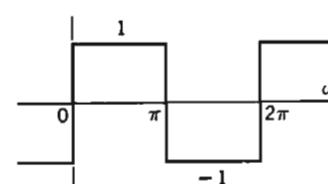


FIG. 14-3. Onda cuadrada



FIG. 14-4. Espectro de la onda cuadrada (Ec. 14-17)

a son cero para esta onda cuadrada. Aplicando la Ec. 14-8 para la onda cuadrada escribimos para a_n , donde n puede tener los valores 0, 1, 2, 3, ...,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} (+1) \cos nx \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-1) \cos nx \, dx \right) \\ &= \frac{1}{n\pi} \left\{ \left[\sin nx \right]_0^{\pi} - \left[\sin nx \right]_{\pi}^{2\pi} \right\} \\ &= \frac{1}{n\pi} (2 \sin n\pi - \sin n \cdot 2\pi) \end{aligned} \quad (14-14)$$

Puesto que $\sin n\pi$ y $\sin n \cdot 2\pi$ son ambos cero para cualquier valor entero de n , a_n es cero para todas las n . Solamente hay una excepción posible: si $n = 0$, la Ec. 14-14 tiene la forma indeterminada 0/0. Para encontrar a_0 , regresamos a la expresión para a_n antes de la integración, y haciendo $n = 0$, escribimos

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} dx - \int_{\pi}^{2\pi} dx \right) = \frac{1}{\pi} (\pi - 0 - 2\pi + \pi) = 0 \quad (14-14a)$$

Los coeficientes b no son todos cero. Utilizando la Ec. 14-9

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} (+1) \sin nx dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-1) \sin nx dx \right) \\ &= \frac{1}{n\pi} \left\{ - \left[\cos nx \right]_0^{\pi} + \left[\cos nx \right]_{\pi}^{2\pi} \right\} \\ &= \frac{1}{n\pi} (1 - 2 \cos n\pi + \cos n \cdot 2\pi) \end{aligned} \quad (14-15)$$

Aquí n puede ser cualquier entero, pero el resultado depende de si n es par o impar, para todos los valores *pares* de n , la Ec. 14-15 se reduce a

$$b_n = \frac{1}{n\pi} (1 - 2 + 1) = 0 \text{ para } n \text{ par} \quad (14-16a)$$

mientras que para los valores *impares* de n

$$b_n = \frac{1}{n\pi} (1 + 2 + 1) = \frac{4}{n\pi} \text{ para } n \text{ non} \quad (14-16b)$$

Específicamente, $b_1 = 4/\pi$, $b_3 = 4/3\pi$, $b_5 = 4/5\pi$ y así sucesivamente.

La solución para una serie que represente la onda cuadrada de la Fig. 14-3 es ahora completa. Esto es

Onda cuadrada (Fig. 14-3)

$$= \frac{4}{\pi} (\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots) \quad (14-17)$$

Se verá que la componente de tercera armónica de una onda cuadrada es un tercio de la fundamental, la quinta armónica es un quinto, etc., etc. No hay armónicas pares, lo que es consistente con

el hecho de que las medias ondas negativas son similares a las medias ondas positivas. No existe componente constante.

Es interesante trazar un "espectro" de la onda cuadrada. En la Fig. 14-4 se muestran las amplitudes de las armónicas. Las únicas frecuencias existentes en el espectro son aquellas que corresponden a armónicas enteras no nulas. Esto es "una línea de espectro".

5. Onda diente de sierra

La Fig. 14-5 muestra otra simple, aunque interesante onda. Haciendo $x = \omega t$, puede expresarse convenientemente de $-\pi$ a $+\pi$ como:

$$f(t) = \frac{x}{\pi} \text{ cuando } -\pi < x < +\pi \quad (14-18)$$

No es conveniente, por otro lado, expresar esta onda de 0 a 2π ; esto requeriría dos ecuaciones y la segunda no sería enteramente simple. Esto aporta un punto importante del análisis de Fourier. Habíamos especificado que la integración para determinar coeficientes, como en las Ecs. 14-8 y 14-9, debía ser a través de un ciclo completo de la frecuencia fundamental. Al escribir las ecuaciones habíamos tomado como límites de integración 0 y 2π . Estos no son, por ningún motivo, los únicos límites posibles. Una mirada a la derivación, mostrará que los límites pueden ser cualesquiera valores de x que estén apartados 1 ciclo.*

Por tanto, los límites podrían ser perfectamente $-\pi$ y $+\pi$, o podrían ser $-2/\pi$ y 0, o podrían ser $-\pi/2$ y $3\pi/2$, etc., etc.,

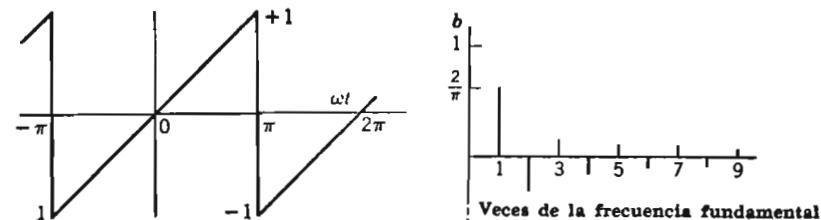


FIG. 14-5. Onda diente de sierra FIG. 14-6. Espectro de la onda diente de sierra (Ec. 14-22)

* Las Ecs. 14-2, 3 y 4 son válidas con límites 0 y 2π como se escribieron, o en general con límites C y $C + 2\pi$. Se reconocerá que la serie de Fourier converge hacia la función $f(t)$ a través del intervalo entre los límites de integración. Fuera de estos límites

Ahorramos trabajo claramente, si tomamos como límites de integración en el análisis de la onda diente de sierra de la Fig. 14-5, los valores $-\pi$ y $+\pi$. Así, se necesitará solamente una integral, quedando la integración incluida dentro del alcance de la Ec. 14-18. Según las Ecs. 14-8 y 14-18,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{\pi} \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx = \frac{1}{\pi^2} \left[\frac{1}{n^2} \cos nx + \frac{x}{n} \sin nx \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{n^2} (\cos n\pi - \cos n(-\pi)) + \frac{1}{n} (\pi \sin n\pi - (-\pi) \sin n(-\pi)) \right) = 0 \quad (14-19) \end{aligned}$$

Esta expresión es 0 para cualquier valor de n excepto posiblemente $n = 0$. Si $n = 0$,

$$a_0 = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{2\pi^2} (\pi^2 - (-\pi)^2) = 0 \quad (14-19a)$$

Por lo tanto, todas las a son cero. La serie no contiene término coseno ni término constante.

A continuación encontramos b_n para la onda diente de sierra:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{\pi} \sin nx dx = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left[\frac{1}{n^2} \sin nx - \frac{x}{n} \cos nx \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{n^2 \pi^2} (\sin n\pi - n\pi \cos n\pi) \quad (14-20) \end{aligned}$$

Si n es cualquier entero par, $\sin n\pi = 0$ y $\cos n\pi = 1$, y $b_n = -2/n\pi$. Si n es un entero impar, $\sin n\pi = 0$, pero $\cos n\pi = -1$, haciendo $b_n = +2/n\pi$. Por lo tanto

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \quad b_2 = -\frac{2}{2\pi} \quad b_3 = \frac{2}{3\pi} \quad b_4 = -\frac{2}{4\pi} \quad \dots \quad (14-21)$$

y el resultado final, el desarrollo de la onda diente de sierra en una serie de Fourier, es

la serie puede o no converger hacia $f(t)$. La serie siendo cíclica, se repetirá periódicamente más allá de los límites de integración; la función $f(t)$ sería igual a la serie fuera de los límites de integración solamente si $f(t)$ es también repetitiva, pero no es un requisito que $f(t)$ sea una función repetitiva.

Onda diente de sierra (Fig. 14-5)

$$= \frac{2}{\pi} \left(\sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t - \frac{1}{4} \sin 4\omega t + \dots \right) \quad (14-22)$$

En esta onda no hay término coseno ni término constante. Todos los términos senos están presentes, tanto para armónicas pares como impares, siendo la amplitud inversamente proporcional al orden de la armónica pero con signo invertido en términos alternos. Estos hechos se muestran gráficamente en el espectro de la Fig. 14-6.

6. Síntesis de ondas

Está muy bien decir, que la serie de la Ec. 14-17 representa una onda cuadrada y que la de la Ec. 14-22 una onda diente de sierra, y más aún, las matemáticas que nos llevan a estas series están perfectamente, pero difícilmente se puede esperar estar satisfechos hasta que uno ha probado unos pocos ejemplos para ver cómo trabajan. Probemos a sintetizar una onda partiendo de sus componentes de Fourier, sumando las juntas para ver si realmente nos regresan a la onda con la cual empezamos.

La Ec. 14-17 nos dice que los términos

$$\frac{4}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right)$$

deberán sumarse para dar una onda cuadrada de altura unitaria. Esto puede intentarse. En la Fig. 14-7a dibujamos una onda seno y una onda de tercera armónica de un tercio de la amplitud y la sumamos. El resultado es la línea gruesa mostrada.

Esta línea se ha redibujado como una línea no continua en (b) y también se ha dibujado una onda de quinta armónica de amplitud de un quinto y se ha sumado a ella. El resultado, mostrado como una línea llena está empezando a verse, afortunadamente, como una onda cuadrada.

Se transfiere a (c) y se suma una séptima armónica. La aproximación a una onda cuadrada empieza a ser mejor.

Cuando se suman armónicas más altas, siempre decreciendo en tamaño, la aproximación continúa haciéndose mejor. Siempre permanece una variación en la parte superior aplastada, una variación con las frecuencias de la armónica mayor utilizada en sintetizar la onda cuadrada. Añadiendo otra armónica se reduce la variación

y se aumenta su frecuencia. La forma general se va haciendo cada vez más cercana a la onda cuadrada.*

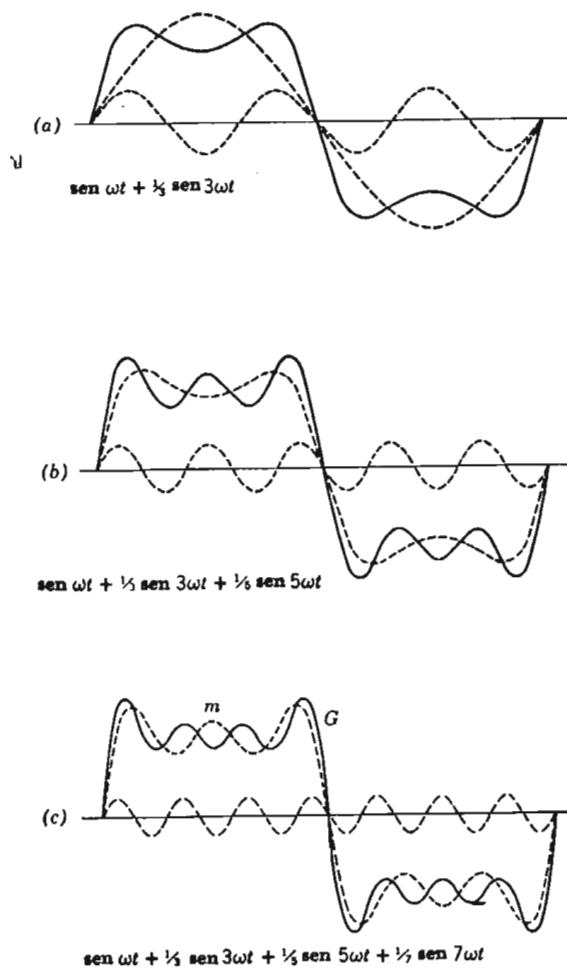


FIG. 14-7. Síntesis de una onda cuadrada

* Nótese sin embargo, la tendencia de la onda a que le crezcan "orejas" como en G. Esto se conoce como el fenómeno de Gibbs. En ambos lados de una discontinuidad de la función original, la suma parcial de una serie de Fourier (encontrada utilizando un número finito de términos) tiende a sobrepasarse. Conforme se utilizan más términos, las "orejas" se van haciendo más estrechas pero no más cortas, quedando como de un nueve por ciento de la discontinuidad. La serie infinita, sin embargo, converge exactamente a la función excepto en el punto de discontinuidad donde converge con el punto medio de la interrupción.

Es un poco difícil sumar componentes gráficamente más allá de las primeras pocas armónicas, como se muestra en la figura, pero podemos investigar numéricamente el límite al que se aproxima la serie en cualquier punto particular. Por ejemplo, evaluemos un número de términos de la serie en el punto medio de la parte superior aplastada de la onda, en el punto marcado m en la Fig. 14-7c, donde ωt es $\pi/2$. La sustitución en la serie da

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{2} + \dots \right) \\ = \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots \right) \end{aligned}$$

Si nuestros análisis y síntesis son correctos, el resultado de este cálculo será 1, porque esta es la altura de la parte superior aplastada de la onda cuadrada y el punto m está a la mitad de ella. Encontramos que $4/\pi$ veces la serie se aproxima a 1, pero infortunadamente muy despacio. La suma de términos hasta la 11a. armónica es 0.95. Sumando la 13a. armónica tenemos 1.05. Continuando hasta la 35a. armónica tenemos 0.98, y cuando se incluye la armónica 37a. obtenemos 1.02. Hasta que la 999a. armónica se incluye no podemos esperar exactitud mejor que la de la regla de cálculo. Afortunadamente, sin embargo, la serie está alternada en el signo y la aproximación se mejora grandemente promediando dos sumas parciales consecutivas. Una evaluación numérica similar puede llevarse para cualquier otro valor de ωt y en cualquier caso, el resultado de la evaluación se aproximará a 1 conforme el número de términos se hace mayor (excepto si $\omega t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$, para los que el resultado es cero). Se escogió el valor de $\omega t = \pi/2$ para el cálculo ilustrativo porque es el más fácil de calcular.

La onda diente de sierra puede sintetizarse de la misma manera partiendo de la serie de la Ec. 14-22. Desafortunadamente converge aún más despacio que la onda cuadrada. Sin embargo, la onda diente de sierra puede verse tomando forma cuando los términos hasta la cuarta armónica son incluidos en la suma parcial. Ver Fig. 14-8.

Es instructivo ver en esta síntesis de la onda diente de sierra el efecto de las armónicas pares. Ellas hacen más empinado el borde del lado derecho del medio ciclo positivo y el borde del lado izquierdo del ciclo negativo. Así el tipo de simetría llamado simetría de media onda se destruye debido a las armónicas pares.

7. Tres clases de simetrías

Hemos visto, evaluando los coeficientes, que algunas ondas no tienen armónicas pares. Algunas ondas no tienen términos coseno, otras no tienen términos seno, y otras no tienen término constante. Si pudiéramos predecir, sin cálculo, que ciertas ondas no tendrían con seguridad términos en una u otra de estas categorías, se ahorraría bastante trabajo. De hecho esto puede hacerse. Demostraría

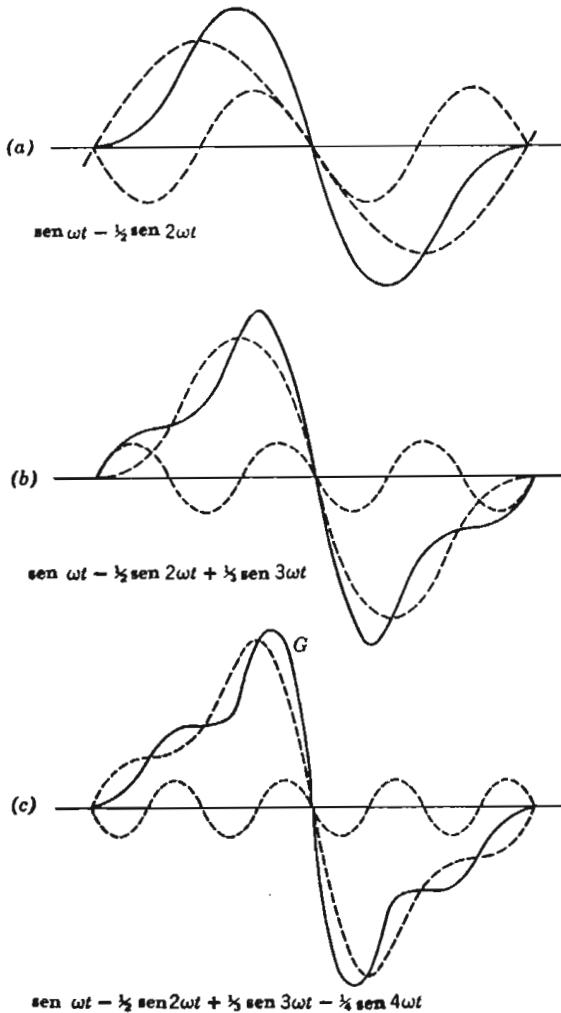


FIG. 14-8. Síntesis de una onda diente de sierra

mos que las ondas de ciertos tipos de simetría carecen de ciertas armónicas:

1. Las funciones impares tienen solamente términos seno.
2. Las funciones pares no tienen término seno.
3. Si hay simetría de media onda, sólo estarán presentes armónicas impares.

Primero debemos definir, y aprender a reconocer de una ojeada, estas tres clases de simetrías. Otros tipos de simetría pueden definirse y estudiarse, pero los anteriores son los de mayor importancia en el trabajo de circuitos.

8. Funciones impares y pares

Cuando los matemáticos hablan de una función impar, ellos quieren decir una como x , x^3 , x^5 , etc., para la que

$$f(x) = -f(-x) \quad \text{impar.} \quad (14-23)$$

Por ejemplo, considérese la función x^3 . Nótese que si $x = 2$, $x^3 = 8$, y si $x = -2$, $x^3 = -8$. La Ec. 14-23, se satisface y por lo tanto x^3 es una función impar. El nombre "de función impar" viene del número en el exponente. Ver Fig. 14-9.

Por otro lado, una función par es una como x^2 , x^4 , x^6 , etc., (con exponentes pares) para la que

$$f(x) = f(-x) \quad \text{par.} \quad (14-24)$$

Por ejemplo, si $x = 2$, $x^2 = 4$ y si $x = -2$, $x^2 = 4$ también. Este es un ejemplo de una función par que satisface la Ec. 14-24. Ver Fig. 14-10

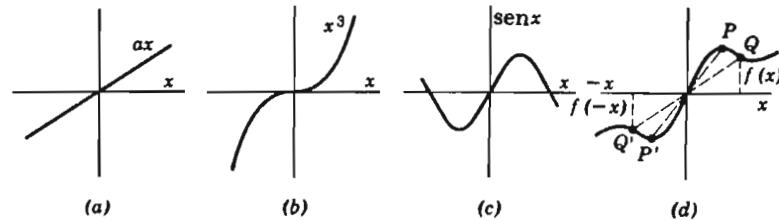


FIG. 14-9. Ejemplos de funciones de impares (componentes seno)

Podemos generalizar. La suma de funciones impares es siempre impar. Así, si $f(x) = x + x^3$, sabemos que $f(x)$ es una función impar.

pares

La suma de las funciones impares es siempre par. Así si $f(x) = K + x^2 + x^4$, sabemos que $f(x)$ es una función par. Nótese que la constante K está clasificada con las funciones pares, porque tiene el mismo valor si x es positiva o negativa.

De aquí se ve, que cualquier función que pueda describirse por una serie de potencias con solamente términos de potencias impares, tales como

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad (14-25)$$

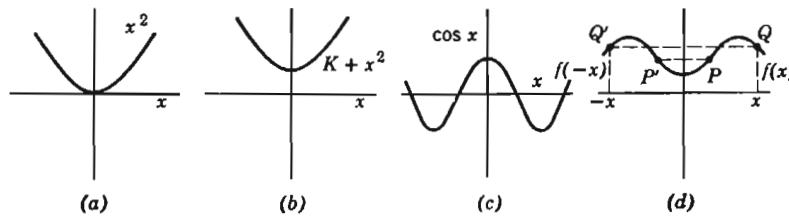


FIG. 14-10. Ejemplos de funciones pares (componentes coseno)

es una función impar. Por lo tanto, la función seno es una función impar, por que la Ec. 14-25 es el desarrollo de la función seno (ver también Ec. 3-15).

Igualmente la función coseno es una función par, porque su desarrollo en una serie de potencias (Ec. 3-14) contiene solamente términos con exponentes pares:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad (14-26)$$

Debe notarse particularmente y hacerse énfasis en que las *funciones pares no tienen nada que ver con las armónicas pares*, ni las funciones impares con las armónicas impares, a pesar del uso confuso de las mismas palabras. Una *función par* tiene potencias pares de x ; una *armónica par* tiene un múltiplo par de la frecuencia fundamental; y no existe relación entre ellas.

Gráficamente, es fácil reconocer una función par. En la Fig. 14-10d se ilustra la prueba: la mitad negativa de una función par es la imagen como en un espejo de la mitad positiva. Para cada punto, tal como P o Q existe un punto correspondiente P' o Q' a una distancia igual desde el eje. Así la Ec. 14-24 se satisface.

La prueba para una función impar se muestra en la Fig. 14-9d.

Para cada punto tal como P o Q existe un punto correspondiente P' o Q' a una distancia igual más allá del *origen*. Así se satisface la Ec. 14-23.

Estas demostraciones gráficas muestran que la función seno es impar y la función coseno es par (Fig. 14-9c y 14-10c).

Puesto que la onda seno es impar y la onda coseno es par, y ya que las dos ondas tienen realmente la misma forma, vemos que

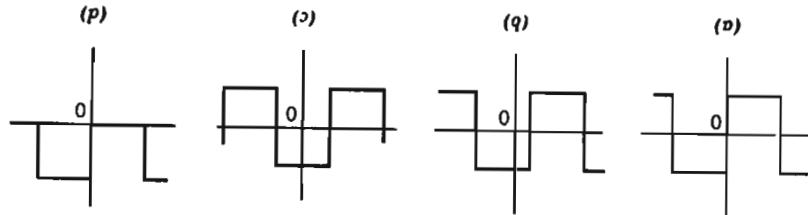


FIG. 14-11. Demostración del efecto de la elección de ejes. (a) Función impar; componentes seno, Ec. 14-28a. (b) Ni par, ni impar; seno y coseno. (c) Función par; componentes coseno, Ec. 14-28c. (d) Se convierte en impar cuando se sustraen la constante

el ser par o impar puede depender de la posición del eje vertical. La Fig. 14-11 muestra otro ejemplo de una onda cuadrada; moviendo únicamente el eje vertical, la misma onda cuadrada puede ser par, impar o ninguna de las dos.

¿Cómo pueden estas ideas de funciones par e impar ayudarnos? Nos suministran dos de las pruebas enlistadas en la sección precedente.

Primero, todas las ondas seno son impares. Por lo tanto, la suma de ondas ~~no~~ será impar, y una serie de Fourier que contiene solamente componentes seno representa una función impar.

Segundo, todas las funciones coseno son pares y una serie de términos coseno debe representar una función par.

Tercero, si una función par y una función impar se suman, la suma no será ni par ni impar. Por lo tanto, una serie que contiene tanto componentes seno como coseno representa una función que no es par ni impar.

De aquí deducimos que: (1) Las series que representan *funciones impares tienen únicamente términos seno* y (2) las series que representan *funciones pares tienen términos coseno* y posiblemente un término constante, pero no contienen ningún término seno.

Aplicando estas ideas a ejemplos específicos, podemos estar seguros de que la onda cuadrada de la Fig. 14-11a, siendo impar,

tiene únicamente componentes seno. Esto se verifica según la Ec. 14-17 para esta onda.

La onda cuadrada de la Fig. 14-11c, siendo par, tiene únicamente componentes coseno. Esto se puede probar por integración para determinar los coeficientes de la serie, si se cree que es necesaria una confirmación.

Con la onda cuadrada colocada como en la Fig. 14-11b, tanto los términos seno como los coseno aparecen en su serie Fourier, por lo que no es ni par ni impar.

La onda dientes de sierra de la Fig. 14-5 es impar. Como deberíamos haber esperado, por lo tanto, su serie de Fourier (Ec. 14-22) tiene únicamente términos seno.

La posibilidad de un término constante requiere una palabra de discusión. Si el promedio de la función bajo consideración es cero, el término constante es cero. Esto se sigue de la Ec. 14-8 para $n = 0$,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \quad (14-27)$$

El término constante, $\frac{1}{2}a_0$, es por lo tanto:

$$\text{Término constante} = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \quad (14-28)$$

y este es el promedio de la función a lo largo de un ciclo. Si la onda es una onda de corriente, este promedio es la componente de "corriente continua".

9. Elección de ejes

Puesto que la cantidad de trabajo que debe hacerse en el análisis es menor si la función es par o impar, es conveniente notar que alguna función que no sea par ni impar puede lograrse que lo sea por un cambio de ejes. Como un ejemplo, la onda cuadrada de la Fig. 14-11b puede hacerse tanto par como impar, por una elección afortunada del tiempo al que se le llama arbitrariamente cero. Estamos generalmente libres para colocar el eje vertical donde lo deseamos y la elección debe hacerse con discreción.

Algunas veces, el análisis de una onda en sus componentes de Fourier se lleva con referencia a un eje vertical y después se encuentra que se deseaba un eje vertical diferente. Se puede hacer

una traslación en la serie sustituyendo una nueva variable de tiempo t' . Un ejemplo demostrará este método.

La onda cuadrada de la Fig. 14-11a

$$= \frac{4}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right) \quad (14-28a)$$

(según la Ec. 14-17). Partiendo de aquí, la onda cuadrada de la Fig. 14-11c se obtiene trasladando el eje a la cantidad $\pi/2$. Como se muestra en la Fig. 14-12, la traslación de ejes se obtiene haciendo $\omega t = \omega t' + \pi/2$. Sustituyendo esto en la expresión para la onda cuadrada, obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\pi} \left[\sin \left(\omega t' + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{3} \sin 3 \left(\omega t' + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{5} \sin 5 \left(\omega t' + \frac{\pi}{2} \right) + \dots \right] \\ &= \frac{4}{\pi} \left[\cos \left(\omega t' + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{3} \cos 3 \left(\omega t' + \frac{3\pi}{2} \right) + \frac{1}{5} \cos 5 \left(\omega t' + \frac{5\pi}{2} \right) + \dots \right] \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\cos \omega t' - \frac{1}{3} \cos 3\omega t' + \frac{1}{5} \cos 5\omega t' - \dots \right) \end{aligned} \quad (14-28b)$$

Esta última forma se obtiene utilizando las relaciones trigonométricas $\sin(x + \pi/2) = \cos x$; $\sin(x + 3\pi/2) = -\cos x$, etc. Podemos escribir ahora:

Onda cuadrada de la Fig. 14-11c

$$= \frac{4}{\pi} \left(\cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t - \dots \right) \quad (14-28c)$$

en la nueva escala de tiempo. Siendo una función par en la nueva escala de tiempo, contiene únicamente términos coseno. La función y dos de sus componentes se muestran en la Fig. 14-12, y es fácil

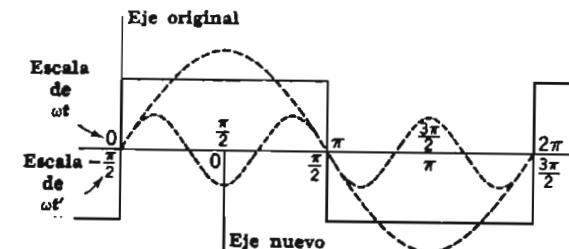


FIG. 14-12. Traslación de ejes

ver que las componentes son ondas seno con respecto al eje original y ondas coseno con referencia al eje trasladado.

También puede ser a veces, ventajosa, la traslación del eje horizontal, por ejemplo, la onda de la Fig. 14-11d se convierte en una función impar si la componente constante se le resta, después de esto luce como la onda de (a). Como un procedimiento práctico, si una onda puede hacerse función impar elevándola o bajándola, reconoceremos que tiene una componente constante que puede sustituirse, dejando únicamente los términos seno.

10. Simetría de media onda

Para cualquier función periódica con un periodo T ,

$$f(t) = f(t + T) \quad (14-29)$$

Esto nos dice, simbólicamente, que una función con el valor $f(t)$ en cualquier tiempo t tendrá el mismo valor otra vez en el tiempo posterior $t + T$. Esto es obviamente cierto, en una onda senoidal siendo T el tiempo de 1 ciclo. El valor de una onda en cualquier instante, se repetirá 1 ciclo después, y otra vez otro ciclo después, etc., etc.

La prueba suministrada por la Ec. 14-29 también está satisfecha por la onda cuadrada de la Fig. 14-11, o la onda diente de sierra de la Fig. 14-5, o por cualquiera de las ondas de la Fig. 14-1, siendo T en cada caso el tiempo de 1 ciclo completo.

En conexión con la Fig. 14-1 hablamos de simetría de media onda, indicando que la forma del medio ciclo negativo de la onda es la misma que la del medio ciclo positivo, aunque invertida. Para ser más precisos, una onda con simetría de media onda satisface la ecuación

$$f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right) \quad (14-30)$$

Veamos qué ondas de la Fig. 14-13 tienen simetría de media onda. La onda senoidal de la Fig. 14-13a, teniendo frecuencia fundamental claramente tiene simetría de media onda. Se muestran dos ordenadas en la figura separadas por el tiempo $T/2$ y que son iguales y opuestas. Cualesquier dos ordenadas de esta onda separadas $T/2$ serán iguales y opuestas. Por lo tanto se satisface la Ec. 14-30.

La onda cuadrada de la Fig. 14-13b también tiene simetría de media onda.

La Fig. 14-13c muestra una onda de segunda armónica. La onda,

aunque senoidal, tiene frecuencia doble, y recorre un ciclo completo en el tiempo $T/2$ donde T es el tiempo de un ciclo de la frecuencia fundamental. Las ordenadas separadas por el tiempo $T/2$ no son opuestas, son iguales. La onda de tercera armónica de la Fig. 14-13d, por otro lado, tiene ordenadas opuestas separadas por $T/2$ como se muestra. De aquí deducimos que una onda que es la suma de una

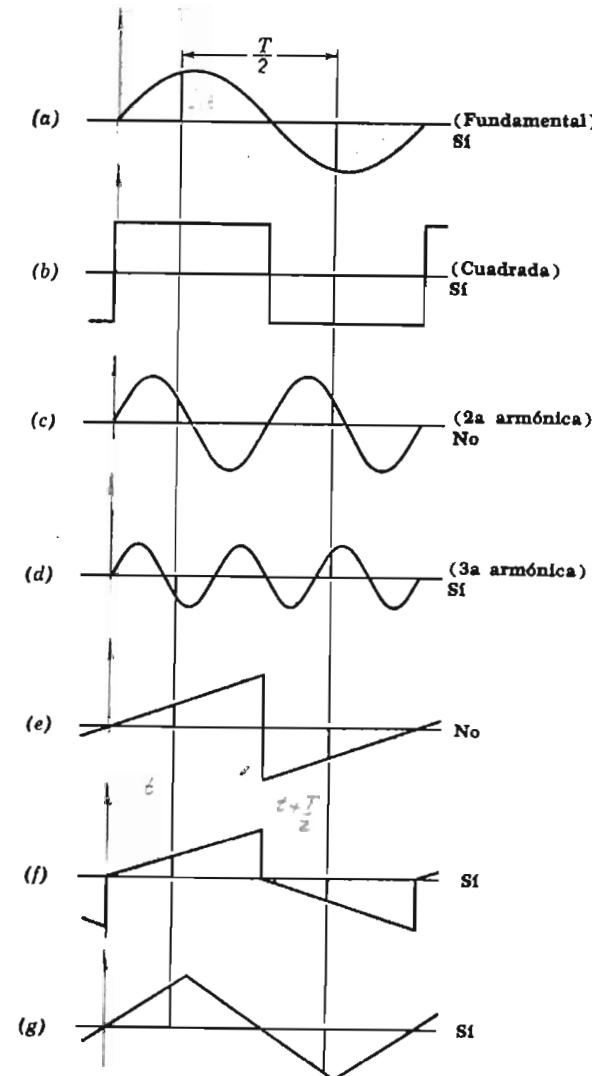


FIG. 14-13. Prueba para simetría de media onda

componente fundamental y una segunda armónica, no tendrá simetría de media onda. Una onda compuesta de una fundamental y una tercera armónica tendrá simetría de media onda.

Generalizando cualquier onda descrita por una serie de Fourier con solamente armónica fundamental, tercera, quinta y cualquier otra armónica impar, tendrá simetría de media onda. Una onda que contiene ya sea segunda armónica, cuarta, o cualquier otra armónica par, no tendrá simetría de media onda. Inversamente, una onda, no importa lo compleja que sea, que tiene simetría de media onda, no contendrá armónicas pares. Este es el tercer punto en la lista de la Sec. 7. Un ejemplo se vio en el desarrollo de la onda cuadrada, Ec. 14-28a o c, en que las ecuaciones contienen únicamente armónicas impares. A la primera ojeada podría parecer que la onda de diente de sierra de la Fig. 14-5 o 14-13e tiene simetría de media onda, pero una consideración más cuidadosa muestra que no la tiene. Esto se ve en la figura; dos ordenadas espaciadas $T/2$ no son iguales y opuestas. No deberíamos sorprendernos, por lo tanto, encontrar que el desarrollo de Fourier de la onda diente de sierra, Ec. 14-22, contiene tanto armónicas pares como impares.

Una onda más o menos semejante que tiene simetría de media onda se muestra en la Fig. 14-13f. Otra con simetría de media onda es (g). Puede predecirse confiadamente que las series de Fourier para estas ondas contendrán únicamente armónicas impares.

11. Límites de integración

Si una onda tiene simetría, podemos algunas veces ahorrar trabajo integrando únicamente a través de una parte de un ciclo. En las Ecs. 14-8 y 9 los límites de integración son 0 y 2π . Alternativamente, podrían ser $-\pi$ y $+\pi$; sabemos que la integración para un ciclo completo es correcta para el análisis de cualquier función.

Pero si la función, por analizarse es una función par, o una función impar o tiene simetría de media onda, ciertos coeficientes son cero. Es por lo tanto correcto, y a menudo más fácil, calcular los coeficientes que no son cero por integración de las Ecs. 14-8 y 9 de 0 a π únicamente, y multiplicando el resultado por 2. Más aún, si la función tiene simetría de media onda, y además es, ya sea función par o función impar, es suficiente integrar de 0 a $\pi/2$ y después multiplicar por 4.

Estos límites más cercanos son posibles debido a la repetición de la función por integrarse. El producto dentro del signo de integración

repite, en el primer caso dos veces en un ciclo, y en el segundo caso cuatro veces en un ciclo. La demostración de este hecho es posible fácilmente, * pero un ejemplo que muestre cómo trabaja se da quizás mejor que una demostración formal.

EJEMPLO. Analicemos la onda de la Fig. 14-13g, utilizando las simplificaciones suministradas por la simetría. Primero, esta onda tiene simetría de media onda; por lo tanto, no tiene armónicas pares. Segundo, si tomamos el origen en el punto 0 como se muestra en la Fig. 14-14, la onda es una función impar, sin términos coseno ni término constante. De esta inspección preliminar sabemos que la onda triangular puede expresarse únicamente por términos seno de armónica impar. Utilizando x para ωt :

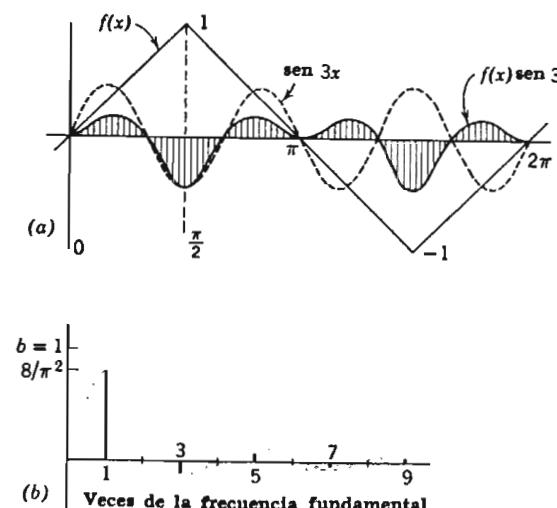


FIG. 14-14. Onda triangular y su espectro (Ec. 14-35)

$$f(x) = b_1 \sin x + b_3 \sin 3x + b_5 \sin 5x + \dots \quad (14-31)$$

Para evaluar los coeficientes es necesario expresar analíticamente la función mostrada en la Fig. 14-14a. Entre $x = 0$ y $x = \pi/2$ la onda está descrita por

$$f(t) = \frac{2x}{\pi} \quad (14-32)$$

Entre $\pi/2$ y $3\pi/2$ se podría aplicar una ecuación diferente, y entre $3\pi/2$ y 2π seguiría otra. Sin embargo, de acuerdo con la regla ante-

* La demostración toma en cuenta que el producto de dos funciones pares es una función par y el producto de dos funciones impares es una función par.

rior necesitamos integrar solamente de 0 a $\pi/2$. Vamos a investigar esta posibilidad.

Según la Ec. 14-9:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x) \sin nx dx \quad (14-33)$$

La Fig. 14-14a muestra esta integral. Se muestra la $f(x)$ triangular y se ilustra el $\sin nx$ * para el caso particular de $n = 3$; cualquier otro valor entero impar de n podría igualmente haberse utilizado para ilustración. La curva producto $f(x) \sin 3x$ está dibujada, y la integral es el área sombreada bajo la curva. Ahora, el punto esencial es este: el valor obtenido por integración (el área sombreada bajo la curva) entre 0 y $\pi/2$ es el mismo que el correspondiente entre $\pi/2$ y π e igual entre π y $3\pi/2$ y entre $3\pi/2$ y 2π . Esto es, la integral total (el área total) es cuatro veces la integral de 0 a $\pi/2$ y escribimos

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x) \sin nx dx \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{2x}{\pi} \sin nx dx = \frac{8}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} x \sin nx dx \\ &= \frac{8}{\pi^2} \left[\frac{1}{n^2} \sin nx - \frac{x}{n} \cos nx \right]_0^{\pi/2} = \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{1}{n^2} \sin n \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n} \cos n \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (14-34)$$

Estamos interesados únicamente en los valores enteros impares de n , para todos los cuales $\cos(n\pi/2) = 0$. El valor de $\sin(n\pi/2)$ es 1 si $n = 1, 5, 9, \dots$, y así para estos valores de n , $b_n = 8/\pi^2 n^2$. Si $n = 3, 7, 11, \dots$, $\sin(n\pi/2) = -1$, y $b_n = -8/\pi^2 n^2$.

Esto completa el análisis, y la sustitución de estos valores por los coeficientes de la Ec. 14-31 da:

Onda triangular Fig. 14-14

$$= \frac{8}{\pi^2} \left(\sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t - \frac{1}{49} \sin 7\omega t + \dots \right) \quad (14-35)$$

El espectro de esta onda se muestra en la Fig. 14-14b. Es interesante notar que esta serie converge mucho más rápidamente que aquella considerada previamente.

* La curva para $\sin 3x$ está dibujada a una escala reducida para evitar confusiones en el diagrama.

12. Ondas rectificadas

Tanto la onda cuadrada como la onda diente de sierra que fueron descritas en este capítulo encuentran importante uso práctico. La onda cuadrada se utiliza para probar, y una razón de su utilidad es el hecho de que tiene, como ya hemos visto, un gran contenido de armónicas. Conectar un generador de onda cuadrada a un circuito equivale a aplicar voltajes de muy diferentes frecuencias, y la respuesta del circuito a una ancha gama de frecuencia puede encontrarse en una sola prueba. La forma diente de sierra se utiliza en televisión y en circuitos oscilantes de barrido del radar. La Fig. 14-8 muestra que los circuitos que llevan esta onda deben transmitir frecuencias muchas veces la frecuencia fundamental, si la forma diente de sierra debe llevarse sin distorsión seria.

Otras ondas no senoidales de gran importancia práctica se encuentran en la salida de los rectificadores. Aquí, por supuesto, la componente constante o de corriente continua es la componente deseable y todas las armónicas son indeseables.

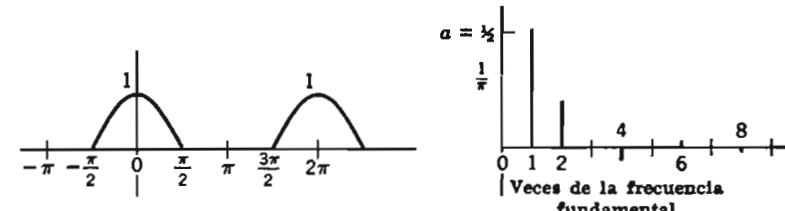


FIG. 14-15. Onda de salida de un rectificador de media onda

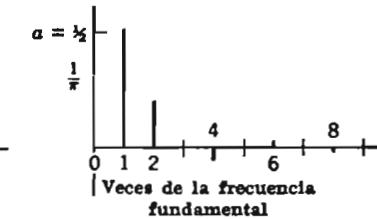


FIG. 14-16. Espectro de la onda de rectificador de media onda la Fig. 14-15 ($\times 4$ en escala vertical) (Ec. 14-38)

La Fig. 14-15 muestra la corriente de salida de un *rectificador de media onda* alimentando a una carga de resistencia. (Ver Fig. 13-10a). Esta onda, como cualquier otra, puede sujetarse al análisis de Fourier. El primer paso es localizar el eje vertical. Existen varias posibilidades, pero la mostrada en la figura parece ser la más feliz porque hace de la onda una función par. Por tanto, no tendrá término seno. Existe obviamente un término constante porque el promedio no es cero y no hay simetría de media onda. Debemos esperar una serie por lo tanto, de la forma

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots \quad (14-36)$$

Los límites más fáciles de integración serán $-\pi$ y $+\pi$. Puesto

que la función es cero de $-\pi$ a $-\pi/2$ y de $+\pi/2$ a $+\pi$, la integral dentro de estos rangos es cero, y los coeficientes de la serie se encuentran (utilizando la Ec. 14-8) por integración entre los límites $-\pi/2$ y $+\pi/2$. Entre estos límites la función es $f(x) = \cos x$, por lo tanto:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \cos nx dx$$

Si $n \neq 1$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(n-1)x}{2(n-1)} + \frac{\sin(n+1)x}{2(n+1)} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{2}}{n-1} + \frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{2}}{n+1} \right) \end{aligned}$$

Si $n = 1$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \quad (14-37)$$

Los coeficientes a_n se evaluaron uno a uno sustituyendo los valores apropiados de n . Los resultados son

$$n = 0, a_0 = \frac{2}{\pi}$$

$$n = 1, a_1 = \frac{1}{2} \quad n = 3, a_3 = 0 \quad n = 5, a_5 = 0$$

$$n = 2, a_2 = \frac{2}{3\pi} \quad n = 4, a_4 = -\frac{2}{15\pi} \quad n = 6, a_6 = \frac{2}{35\pi}$$

Sustituyéndolos en la serie da:

Onda del rectificador de media onda (Fig. 14-15)

$$= \frac{1}{\pi} \left(1 + \frac{\pi}{2} \cos \omega t + \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t + \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots \right) \quad (14-38)$$

Es interesante, que la única armónica impar presente es la primera, la fundamental. Todas las armónicas pares están presentes, pero las de orden alto son bastante pequeñas. Ver. Fig. 14-16.

El análisis de la onda de salida de un *rectificador de onda completa* se muestra en la Fig. 14-17 (ver también Fig. 13-10) y es bastante semejante al ejemplo de media onda que acabamos de dar. Los coeficientes se encuentran fácilmente, un poquito de meditación para la elección de los límites de integración estará bien recompensada. El resultado es

Onda de rectificador de onda completa (Fig. 14-17)

$$= \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t + \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots \right) \quad (14-39)$$

Se verá que el término constante, la salida útil de corriente continua del rectificador, es dos veces mayor en un rectificador de onda completa que en uno de media onda, siendo las crestas de las dos ondas de salida iguales. Esto sería de esperarse puesto que cada término de corriente continua es el *promedio* de la función de salida.

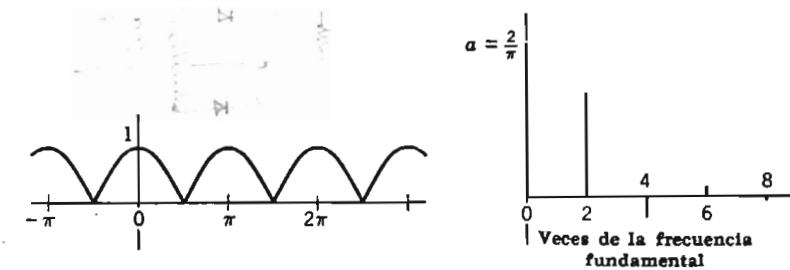
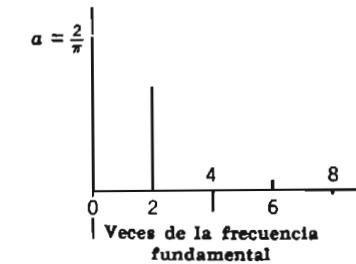


FIG. 14-17. Onda de salida de un rectificador de onda completa (Fig. 14-18 (× 4 en escala vertical) (Ec. 14-39))

Se verá también, de la ecuación, o del espectro de la Fig. 14-18, que esta serie contiene únicamente armónicas pares. Aparece por tanto, que podíamos haber escogido una frecuencia doble de la frecuencia fundamental de la función. En la Fig. 14-17, la curva se ve que se repite no una sino dos veces cada ciclo. Ordinariamente, el periodo más corto de repetición es llamado un ciclo pero en este caso preferimos utilizar la frecuencia de la onda de corriente alterna de entrada como frecuencia fundamental de la onda de salida rectificada, aunque no existe componente de esta frecuencia en la salida. Ordinariamente una serie de Fourier no consistirá de términos de armónicas pares solamente.



13. Otra forma trigonométrica de serie

Si se desea, la Ec. 14-10 se puede convertir en otras formas de serie de Fourier en las que solamente hay términos coseno, o solamente términos seno, en lugar de tanto término seno como coseno. Refiriéndonos a la Ec. 14-10, los dos términos de frecuencia fundamental, una función coseno y el otro función seno, pueden sumarse utilizando la siguiente relación trigonométrica:

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \left(x - \tan^{-1} \frac{b}{a} \right) \quad (14-40)$$

Aplicando esta relación a la armónica fundamental y también a cada una de las siguientes, la serie se convertirá en

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}a_0 + c_1 \cos(\omega_1 t - \theta_1) + c_2 \cos(\omega_2 t - \theta_2) \\ &\quad + c_3 \cos(\omega_3 t - \theta_3) + \dots + c_n \cos(\omega_n t - \theta_n) + \dots \end{aligned} \quad (14-41)$$

donde

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n \left(\omega_1 t - \frac{\theta_n}{n} \right) \quad (14-45)$$

En estas fórmulas, n es el orden de la armónica, un entero positivo en cada término trigonométrico, y ω_1 es la frecuencia fundamental.*

Por conveniencia simplemente, es más rápido y fácil escribir la Ec. 14-41 utilizando el símbolo matemático para una suma:

* La serie puede igualmente escribirse como sigue, dividiendo ambos términos en cada paréntesis por n :

$$\omega_n = n\omega_1 \quad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \theta_n = \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n} \quad (14-42)$$

o, utilizando el signo de suma,

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + c_1 \cos(\omega_1 t - \theta_1) + c_2 \cos 2 \left(\omega_1 t - \frac{\theta_2}{2} \right) + c_3 \cos 3 \left(\omega_1 t - \frac{\theta_3}{3} \right) + \dots \quad (14-44)$$

La diferencia entre las dos formas está en la expresión del ángulo de fase. El ángulo de fase θ_n representa un desplazamiento lateral de la onda coseno —diferente, en general para cada armónica. En la Ec. 14-43, θ_n es un ángulo de fase en el sentido ordinario de la palabra. Si la onda armónica n ésima se desplaza lateralmente un cuarto de su ciclo por ejemplo, θ_n es $\pi/2$ (o, si se mide en grados, es 90 grados). Se dice comúnmente que por ejemplo, θ_n se mide en grados de la n ésima, significando que θ_n se mide en la misma escala de ángulo que lo es $\omega_1 t$ del que se sustrae.

Por otro lado θ_n/n en la Ec. 14-45 es un ángulo de fase medio (para todas las armónicas) en grados fundamentales. Se mide en la misma escala en que lo es $\omega_1 t$ del que es sustraído. Si la onda de tercera armónica está desplazada 90 grados de tercera armónica,

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\omega_n t - \theta_n) \quad (14-43)$$

La Ec. 14-43 (o 14-45) da una forma de serie de Fourier conteniendo únicamente términos coseno. Una forma semejante conteniendo únicamente términos seno es posible:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\omega_n t + \phi_n) \quad (14-46)$$

donde ω_n y c_n son como antes y

$$\phi_n = \tan^{-1} \frac{a_n}{b_n} \quad (14-47)$$

Los coeficientes c_n se calculan generalmente encontrando a_n y b_n y combinándolos de acuerdo con las Ecs. 14-42.

14. Uso en el análisis de circuitos

La idea básica de analizar cualquier onda en sus componentes senoidales es de una importancia tremenda. Es una parte esencial del pensamiento eléctrico. Las ondas se describen como teniendo ciertas armónicas, ciertas componentes de corriente continua. Una onda modulada se dice que tiene una "frecuencia portadora" y ciertas "bandas laterales". La distorsión de una onda se analiza en función de las armónicas introducidas por una pieza defectuosa del aparato. El concepto de Fourier es una herramienta de uso diario para el ingeniero electricista.

El análisis detallado por métodos de serie se requiere menos a menudo que su concepto básico, pero tiene uso frecuente. Uno o dos ejemplos mostrarán cómo puede procederse con este análisis.

EJEMPLO 1. FILTRO PARA RECTIFICADOR. El circuito de la Fig. 14-19 se utiliza para eliminar fluctuaciones de corriente alterna de la salida de un rectificador de onda completa. El rectificador suministra el siguiente voltaje v_r en sus terminales:

ESTÁNDAR DE CORRIENTE ALTERNA

estará desplazada solamente 30 grados fundamentales; si la onda de quinta armónica está desplazada 90 grados de quinta armónica, estará desplazada solamente 18 grados fundamentales; y así sucesivamente.

La primera forma es usualmente más conveniente para propósitos de análisis, la última para trazar curvas.

$$v_r = \frac{2}{\pi} V_m \left(1 + \frac{2}{3} \cos 2\omega_1 t - \frac{2}{15} \cos 4\omega_1 t + \dots \right) \quad (14-48)$$

en la que $\omega_1 = 377$. Encontrar el voltaje de las terminales de una carga de 2 000 ohms.

Cada elemento de la carga y del filtro es lineal; por lo tanto se aplica el principio de superposición y los métodos de análisis de Fourier pueden justificarse. Trabajemos con la componente de corriente continua y las dos componentes armónicas mostradas en la Ec. 14-48.

Para cada componente el circuito consistente de filtro y carga constituye un divisor de voltaje. Si la impedancia entre las termina-

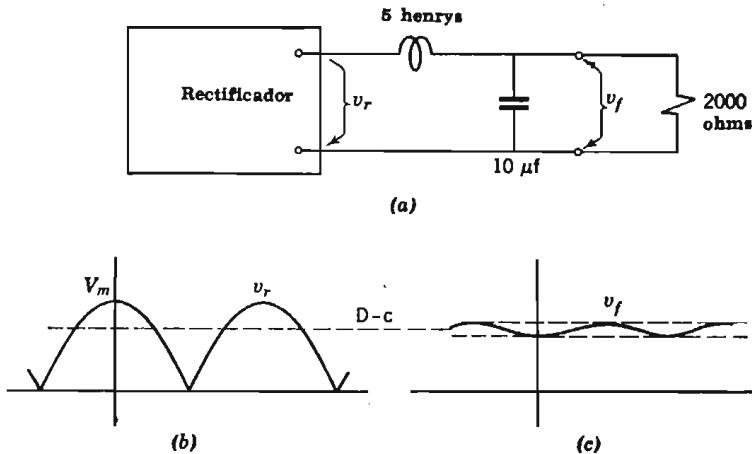


FIG. 14-19. Circuito filtro para la salida de un rectificador de onda completa; también voltaje de salida del rectificador y voltaje filtrado

les del rectificador (en las que aparece v_r) se llama Z_r , y la impedancia entre las terminales del filtro (en las que v_f aparece) se llama Z_f . Sabemos que los voltajes están relacionados por la razón de sus impedancias. Utilizando la notación transformada e impedancias complejas,

$$\frac{V_f}{V_r} = \frac{Z_f}{Z_r} \quad (14-49)$$

Estas impedancias, por supuesto, tienen valores diferentes para cada frecuencia armónica.

Z_f es la impedancia de la carga y del condensador en paralelo. Z_r es igual a Z_f más la impedancia de la bobina del reactor. Por lo tanto

$$Z_f = \frac{(2000)(-j/\omega_n \cdot 10^{-5})}{2000 - j/\omega_n \cdot 10^{-5}} \quad Z_r = Z_f + j\omega_n L \quad (14-50)$$

Calculando los valores numéricos para las componentes de corriente continua, de segunda armónica y de cuarta armónica:

$n =$	0	2	4
$Z_f = 2000/0^\circ$	<u>132.4/-86.2°</u>	<u>66.3/-88.1°</u>	
$Z_r = 2000/0^\circ$	<u>3638/89.9°</u>	<u>7474/90.0°</u>	

Nótese que las amplitudes relativas de las componentes de v_r en la Ec. 14-48 son, respectivamente, 1, $\frac{2}{3}$ y $-\frac{2}{15}$, introduciendo las impedancias anteriores en la Ec. 14-49 encontramos las componentes relativas de v_f como sigue. Para $n = 0$ (corriente directa):

$$\frac{Z_f}{Z_r} = \frac{2000/0^\circ}{2000/0^\circ} = 1.00/0^\circ$$

Para la componente de segunda armónica:

$$\frac{2 Z_f}{3 Z_r} = \frac{2 132.4/-86.2^\circ}{3 3638/89.9^\circ} = \frac{2}{3} 0.0364/-176.1^\circ = 0.0242/-176.1^\circ$$

Para la componente de cuarta armónica:

$$-\frac{2 Z_f}{15 Z_r} = -\frac{2 66.3/-88.1^\circ}{15 7474/90.0^\circ} = -0.0012/-178.1^\circ$$

A continuación los coeficientes y los ángulos de desfasamiento se incluyen en la expresión de serie de Fourier para el voltaje en las terminales de salida del filtro:

$$v_f = \frac{2}{\pi} V_m [1 + 0.0242 \cos(2\omega_1 t - 176.1^\circ) - 0.0012 \cos(4\omega_1 t - 178.1^\circ) + \dots]$$

y esta es la respuesta del problema. Podría ponerse en cualquier otra forma más elegante, pero ésta sirve.

La conclusión principal se ilustra en la Fig. 14-19b y c. Mientras que la salida del rectificador es una serie de medias ondas senoidales, la salida del filtro es muy cercana a la corriente directa pura, tanto que las fluctuaciones pueden verse difícilmente en el diagrama. Tiene, de acuerdo con nuestros resultados, una fluctuación de segunda armónica que es 2.4% de la componente de corriente continua, y un término de cuarta armónica mucho más pequeño tanto que es despreciable.

Los filtros de fluctuaciones de este tipo son utilizados comúnmente en la práctica en los circuitos de salida de los rectificadores de suministro de potencia. El análisis anterior nos ha dado suficientes conocimientos internos de la operación de un filtro tal como para permitir llegar a las siguientes conclusiones en cuanto a *principios de diseño*:

1. La reactancia del condensador (a la frecuencia de la armónica más baja por eliminarse) debería ser *sustancialmente menor* que la resistencia de carga.

2. La reactancia del inductor (a la más baja frecuencia armónica) debería ser *varias veces mayor* que la reactancia del condensador.

3. La amplitud de una armónica de voltaje se reducirá, de la sección de entrada del filtro a la sección de salida del mismo, aproximadamente en la razón de la reactancia del condensador a la reactancia del inductor. *

El filtro de este ejemplo es suficientemente bueno para muchos propósitos. Sin embargo, para usos en que haya una muy alta sensibilidad a las fluctuaciones de voltaje, no deberá utilizarse. Cuando se necesita un mejor filtrado, se utilizará otro paso de filtrado. Es más eficiente utilizar inductancias y capacitancias adicionales en otra sección de filtro en cascada, que incrementar el tamaño de los elementos en un filtro de una sección. Ver también Sec. 13-12 con referencia a filtros para fluctuaciones de rectificador.

EJEMPLO 2. Una onda cuadrada de voltaje de amplitud V_m como

* Esta razón también puede escribirse $1/\omega^2 LC$. Una aproximación ligeramente mejor es $1/(\omega^2 LC - 1)$; ver *Radio Engineering* de Terman, Sección 11-8 (Referencia 19). Como una comprobación numérica de estas aproximaciones, nótese que en el ejemplo precedente las reactancias de segunda armónica son $X_C = -132.6$, $X_L = 3770$. La razón (sin importar el signo) nos da una aproximación de la reducción de fluctuación de segunda armónica por el filtro de 0.0352. Una mejor aproximación, utilizando la fórmula de Terman, es 0.0365. La razón exacta, calculada arriba, es 0.0364.

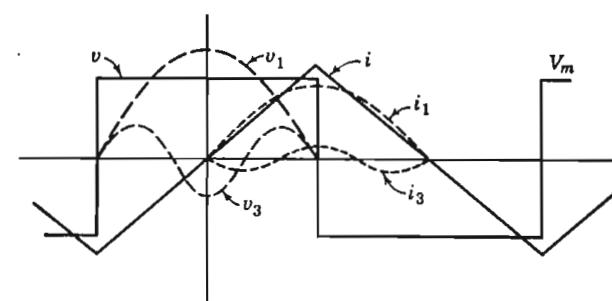


FIG. 14-20. Corriente resultante de la aplicación de una onda cuadrada de voltaje a una inductancia. Cada componente armónica de la corriente atrasa a su correspondiente componente de voltaje en $1/4$ ciclo de esa armónica (por 90 grados armónicos)

se indica en la Fig. 14-20 se aplica a las terminales de una inductancia pura. Encontrar la corriente resultante.

Para resolver este problema, analizaremos la onda cuadrada de voltaje en sus componentes de Fourier y se encontrará la corriente debida a cada componente de voltaje separadamente y entonces se sumará para obtener la corriente total.

Las componentes de la onda cuadrada de voltaje se encuentran multiplicando la onda cuadrada unitaria de la Ec. 14-28c por V_m .

$$v = \text{Onda cuadrada} = V_m \frac{4}{\pi} \left(\cos \omega_1 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_1 t - \dots \right) \quad (14-51)$$

Si la componente fundamental del voltaje se le llama v_1 , la componente de tercera armónica v_3 y así sucesivamente, las correspondientes componentes de la corriente se encuentran como sigue:

$$v_1 = V_m \frac{4}{\pi} \cos \omega_1 t \quad Z_1 = \omega_1 L / 90^\circ$$

$$i_1 = \frac{V_m}{\omega_1 L} \frac{4}{\pi} \cos (\omega_1 t - 90^\circ) = \frac{V_m}{\omega_1 L} \frac{4}{\pi} \sin \omega_1 t$$

$$v_3 = -V_m \frac{4}{\pi} \frac{1}{3} \cos 3\omega_1 t \quad Z_3 = \omega_3 L = 3\omega_1 L / 90^\circ$$

$$i_3 = -\frac{V_m}{3\omega_1 L} \frac{4}{\pi} \frac{1}{3} \cos (3\omega_1 t - 90^\circ) = -\frac{V_m}{\omega_1 L} \frac{4}{\pi} \frac{1}{9} \sin 3\omega_1 t \text{ etc.} \quad (14-52)$$

Así las componentes de corriente se obtienen, dividiendo cada voltaje por la reactancia apropiada (diferente para cada frecuencia) e introduciendo el cambio apropiado de fase (un cuarto de ciclo de frecuencia armónica para cada uno de estos términos, siendo la impedancia puramente reactiva). Finalmente, las componentes de corriente se suman para obtener la corriente total:

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_3 + i_5 + \dots \\ &= \frac{V_m}{\omega_1 L} \frac{4}{\pi} \left(\sin \omega_1 t - \frac{1}{9} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{25} \sin 5\omega_1 t - \dots \right) \quad (14-53) \end{aligned}$$

Esta es una respuesta, pero por supuesto, sería más conveniente y bastante más comprensible si se conociera hacia qué clase de función converge la serie.* La serie podría estudiarse por síntesis gráfica, añadiendo los suficientes términos para encontrar la forma general. Pero afortunadamente no requerimos este sistema que es muy tedioso para procesar este ejemplo, echando una ojeada sobre las series que hemos obtenido hasta ahora (ver sumario Pág. 493) encontramos una marcada similaridad entre la onda de corriente de la Ec. 14-53 y la onda triangular unitaria de la Ec. 14-35. Más aún, la única diferencia está en el coeficiente por el que la serie entera está multiplicada, así podemos escribir

$$\begin{aligned} i &= \frac{V_m}{\omega_1 L} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{8}{\pi^2} \left(\sin \omega_1 t - \frac{1}{9} \sin 3\omega_1 t + \dots \right) \quad (14-54) \\ &= \frac{V_m}{\omega_1 L} \frac{\pi}{2} \quad (\text{onda triangular unitaria de la Fig. 14-14}) \end{aligned}$$

Esto es, la corriente es una onda triangular, como se muestra en la Fig. 14-20, con un valor de cresta de $V_m(\pi/2\omega_1 L)$.

Que la corriente sea una onda triangular no debería ser inesperado, porque en este circuito inductivo la rapidez de cambio de corriente debe ser igual al voltaje. Por tanto, la onda de la Ec. 14-54 puede obtenerse escribiendo

$$i = \frac{1}{L} \int_0^t v dt \quad (14-55)$$

* No es seguro que la serie convergirá. Considérese, por ejemplo, el resultado de aplicar la misma onda cuadrada de voltaje a una capacitancia pura en lugar de a una inductancia pura, y resúlvase para la corriente.

donde v es la onda cuadrada, e integrando. Así el mismo problema queda resuelto por un método independiente.*

15. Valor RMS y potencia

Cuando una corriente de forma no senoidal, como la onda de salida de un rectificador de la Fig. 14-15 o 14-17, pasa por una resistencia, la pérdida de potencia y el calentamiento consecuente de la resistencia se determina por el valor rms de la onda. ¿Cómo puede encontrarse el valor rms de ondas de forma no regular?

El valor rms de cualquier onda se encuentra fácilmente por su serie de Fourier como sigue: El valor rms de la onda total es la raíz cuadrada de las sumas de los cuadrados de los valores rms de sus componentes. Esto es, si la corriente está expresada (en la forma de la Ec. 14-41) como

$$i = I_0 + I_{1m} \cos(\omega_1 t - \theta_1) + I_{2m} \cos(\omega_2 t - \theta_2) + \dots \quad (14-56)$$

el valor rms de la corriente es

$$I_{rms} = \sqrt{I_0^2 + I_{1m}^2 + I_{2m}^2 + \dots} \quad (14-57)$$

donde I_0 es la componente constante o de corrientes continua de la corriente, I_1, I_2, \dots , son los valores rms de las diferentes armónicas.

Puesto que los valores rms de estas componentes senoidales están relacionadas a sus respectivos valores máximos por $\sqrt{2}$, así que para cada armónica

$$I_1 = \frac{I_{1m}}{\sqrt{2}} \quad \text{o} \quad I_{1m}^2 = \frac{I_1^2}{2} \quad (14-58)$$

es igualmente posible escribir la Ec. 14-57 como

$$I_{rms} = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2} I_{1m}^2 + \frac{1}{2} I_{2m}^2 + \dots} \quad (14-59)$$

Esta es a veces la forma más útil.

Esta fórmula puede ilustrarse calculando el valor rms de salida

* Estos dos métodos son de interés básico, porque el método de la serie de Fourier es un ejemplo muy simple del concepto general que cae dentro del análisis de circuitos por transformadas de Laplace, mientras que la integración de la Ec. 14-55 es igualmente un prototípico simple del método clásico de análisis de circuitos por solución de ecuaciones integrodiferenciales.

del rectificador de onda completa. Utilizando en la Ec. 14-59 los cuatro primeros componentes de la Ec. 14-39

$$I_{\text{rms}} = \frac{2}{\pi} \sqrt{1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{15}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{35}\right)^2} = 0.707 \quad (14-60)$$

De hecho, conocemos el valor rms verdadero de esta onda rectificada de cresta unitaria: es el mismo que el valor rms de la onda no rectificada de cresta unitaria y por lo tanto $\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.707$. La exactitud numérica de la Ec. 14-60 se observará que es bastante buena aun habiendo despreciado las armónicas séptimas y de grado mayor.

La *demostración* de la Ec. 14-59 (que se conoce a veces como teorema de Parseval) es de concepto simple. Puesto que el álgebra tiende a progresar en vez de abatirse será mejor dar únicamente un lineamiento de la demostración y cualquiera que lo deseé puede encontrarlo en detalle.

Según la Ec. 4-17, el valor rms de cualquier onda se define como

$$I_{\text{rms}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt \quad (14-61)$$

Siendo T el tiempo de 1 ciclo de la onda. Así, cualquier onda puede expresarse en la forma de serie de Fourier de la Ec. 14-56 y la serie de Fourier podrá entonces sustituirse por i en la integral anterior. Esto requiere elevar al cuadrado la serie y multiplicando la Ec. 14-56 por sí misma, término a término. El resultado contendrá I_0^2 , $I_{1m}^2 \cos^2(\omega_1 t - \theta_1)$ y otros términos similares al cuadrático; y también otros términos de producto cruzado en los que las funciones coseno están multiplicadas ya sea por una constante o por otras funciones coseno de frecuencia diferente. Cuando la integración de la Ec. 14-61 se lleva a cabo la integral de todos los términos cruzados es cero. La integral de cada término cuadrático de coseno es $I_m^2(T/2)$; dividiendo entre T nos da $1/2I_m^2$ para cada armónica como en la Ec. 14-59.

Un teorema íntimamente relacionado con el teorema de Parseval puede establecerse como sigue: La potencia promedio total es la suma de las potencias de la componente de corriente continua, la frecuencia fundamental y las varias armónicas tomadas separadamente. Esto es,

$$\begin{aligned} P &= P_0 + P_1 + P_2 + \dots \\ &= V_0 I_0 + |V_1| |I_1| \cos \phi_1 + |V_2| |I_2| \cos \phi_2 + \dots \end{aligned} \quad (14-61a)$$

La demostración aparece cuando los desarrollos de Fourier para el voltaje y la corriente en la forma de la Ec. 14-41 se sustituyen en la expresión para la potencia promedio:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T vi dt \quad (14-61b)$$

Esta ecuación es análoga, y puede aun considerarse como una generalización de la Ec. 14-61. La integral definida es cero para los productos de componentes de v e i que tengan frecuencias diferentes. Unicamente los productos de términos con frecuencia igual permanecen y el resultado (utilizando valores rms) es la Ec. 14-61a.

La conclusión importante es que las componentes armónicas diferentes no contribuyen para producir potencia. En particular, si el voltaje aplicado a un circuito es puramente senoidal, la potencia del circuito se encuentra con este voltaje y la componente fundamental de corriente únicamente; las componentes armónicas de la corriente no necesitan considerarse, en el cálculo de potencia si no existen componentes armónicas de voltaje.

16. Análisis por integración numérica

En toda la discusión precedente del análisis de Fourier se ha estado asumiendo que las variables por analizarse, usualmente llamadas $f(t)$, podrían expresarse como una función analítica. Algunas veces, hemos tenido que usar funciones diferentes para rangos diferentes de la variable, pero no hemos tenido que intentar manejar ondas de voltaje o corriente para las que no se conoce función analítica.

Supóngase sin embargo, que una onda se ha determinado gráficamente, como de un oscilograma o que su valor numérico es conocido para un número de puntos a lo largo de la onda, pero que no podemos escribir ninguna ecuación para describirla. Supóngase, por ejemplo, que tenemos la onda de forma rara de la Fig. 14-21a para analizar por sus componentes de Fourier. Sin una ecuación la integración formal queda claramente fuera de cuestión. Para obtener los coeficientes de la serie de Fourier toma su lugar alguna clase de integración gráfica o numérica.

Para encontrar b_1 , por ejemplo, el coeficiente de la componente de frecuencia fundamental de seno, el método formal es el de evaluar

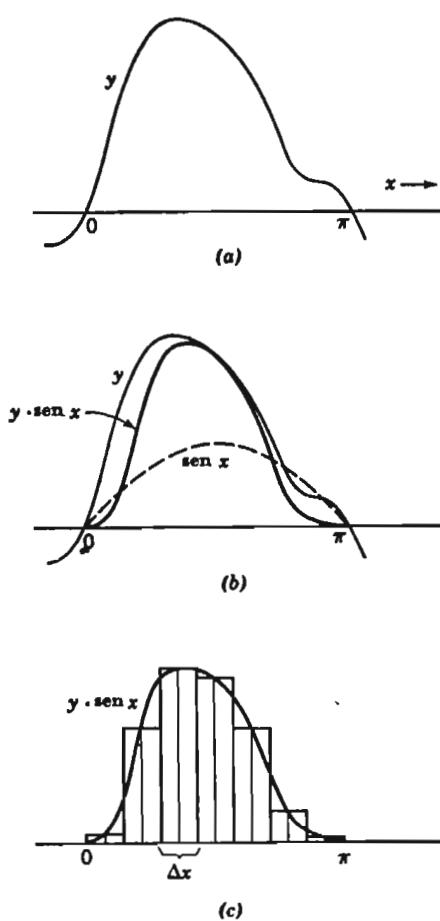


FIG. 14-21. Ilustración de integración gráfica

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cdot \text{sen } x \, dx \quad (14-62)$$

Esta viene de la Ec. 14-8, escribiendo y por $f(t)$ y x por ω_t , como hemos hecho anteriormente por brevedad. Una solución aproximada, se mostrará utilizando la integración numérica.

Empecemos con la curva de la Fig. 14-21a, asumiendo por simplicidad que hay simetría de media onda. Los coeficientes pueden encontrarse entonces integrando únicamente para medio ciclo. Multiplicando el resultado por dos, y la Ec. 14-62 llega a ser

Aquí y está multiplicada por $\text{sen } x$. En la Fig. 14-21b, se muestra y , $\text{sen } x$ y el producto $y \cdot \text{sen } x$. La integral deseada es el área bajo esta curva $y \cdot \text{sen } x$.

Una aproximación del área bajo la curva es el área de los rectángulos en la Fig. 14-21c. La línea base del medio ciclo se divide en k partes iguales, siendo la longitud de cada parte $\Delta x = \pi/k$. Se levanta un rectángulo en cada parte, siendo la altura del rectángulo igual al valor de $y \cdot \text{sen } x$ en el punto medio de la base del rectángulo. El área de cada rectángulo es $y \cdot \text{sen } x) \Delta x$. Puesto que la integral, el área total bajo la curva es aproximadamente igual a la suma de las áreas de los rectángulos, * una aproximación para la Ec. 14-63 es la suma

$$b_1 \approx \frac{2}{\pi} \sum (y \cdot \text{sen } x) \Delta x \quad (14-64)$$

Tenemos aquí una suma de cantidades todas multiplicadas por Δx , y puesto que Δx es la misma para cada rectángulo, la suma puede escribirse

$$b_1 \approx \frac{2}{\pi} \Delta x \sum y \cdot \text{sen } x \quad (14-65)$$

Finalmente, puesto que $\Delta x = \pi/k$, escribimos

$$b_1 \approx \frac{2}{k} \sum y \cdot \text{sen } x \quad (14-66)$$

Ahora, si los valores numéricos de $y \cdot \text{sen } x$ son conocidos en los puntos k especificados a lo largo de la línea base de la onda, podemos encontrar b_1 sumándolos únicamente y multiplicando por $2/k$. Esto, en una palabra, es el método numérico.

La extensión del método para encontrar los otros coeficientes es obvia. Para encontrar b_3 , los valores numéricos $y \cdot \text{sen } 3x$ en los puntos k especificados se suman y multiplican por $2/k$. Para encontrar a_1 , los valores numéricos de $y \cdot \cos x$ en los puntos k especificados se suman y se multiplican por $2/k$, y así sucesivamente.

Para hacerlo aritméticamente fácil, se ha preparado la Tabla 14-1. Para analizar una onda con ayuda de esta tabla, divídase la

* Una suma y una integración son, por supuesto, operaciones similares, siendo la integral el límite al que se aproxima la suma cuando a Δx se le permite ir haciéndose pequeño, aproximándose a cero.

línea base de un medio ciclo de la onda en 36 partes iguales (esto es suficiente para dar una exactitud razonablemente buena aun para armónicas bastante altas) y mídase y en la mitad de cada una de estas 36 secciones. Si la distancia a lo largo de la línea base se expresa en grados, el valor de y se determinará a 2.5° , a 7.5° , y así sucesivamente, a intervalos de 5° . No es necesario, aunque a menudo es conveniente, comenzar en el punto cero de la onda. Colóquense los valores de y en la primera columna vacía de la tabla. Multiplíquese cada uno por el valor del seno x dado, por $\cos x$, por $\sin 3x$, por $\cos 3x$, y así sucesivamente. Súmense las columnas de la tabla que se añadieron y divídase la suma entre 18 (que es $k/2$) para encontrar los coeficientes de Fourier.

Esto es todo. Este es un procedimiento simple, que requiere poca inteligencia pero una extraordinaria paciencia.

17. Métodos numéricos especiales

Tan pronto como se prueba el método se verá que existen ciertos patrones de repetición en el trabajo. Ciertos números se repiten en cada columna sugiriendo que la cantidad de trabajo puede reducirse haciendo una planeación más cuidadosa. Esto es cierto.

Una gran cantidad de inventiva ha sido empleada en encontrar métodos más rápidos de análisis numéricos. Estos se conocen como *métodos de lista* debido al procedimiento que se sigue al aplicarlos. Para un ingeniero que intenta trabajar por meses o semanas o quizás aun días en análisis numéricos de Fourier, sería bastante bueno investigar estos métodos altamente organizados, que ahorrarán su tiempo. Pero para el ingeniero que va a hacer únicamente unos cuantos análisis numéricos de Fourier en su vida, el método simple, pero lento de integración numérica, es lo suficientemente bueno. El tiempo ahorrado en un análisis por métodos más poderosos no sería probablemente suficiente para justificar la inversión inicial de tiempo en aprender los detalles del método. No hay ideas nuevas importantes incluidas en estos métodos de lista; si se necesitan, podrán encontrarse en manuales o libros apropiados de referencia.

Otro medio de análisis altamente ingenioso por muestreo de la onda en puntos específicos, el método de Fischer-Hinnen, es especialmente ventajoso si no existen término constante y armónicas pares, y si pueden despreciarse las armónicas novena o más altas. En

TABLA 14-1

x	y	$\sin x$	$y \cdot \sin x$	$\cos x$	$y \cdot \cos x$	$\sin 3x$	$y \cdot \sin 3x$	$\cos 3x$	$y \cdot \cos 3x$	$\sin 5x$	$y \cdot \sin 5x$	$\cos 5x$	$y \cdot \cos 5x$	$\sin 7x$	$y \cdot \sin 7x$	$\cos 7x$	$y \cdot \cos 7x$
2.5	-0.436	.9900	.9900	.9900	.9900	.9914	.9914	.9914	.9914	.9914	.9914	.9914	.9914	.9914	.9914	.9914	.9914
7.5	-1.305	.9114	.9114	.9114	.9114	.8927	.8927	.8927	.8927	.8927	.8927	.8927	.8927	.8927	.8927	.8927	.8927
12.5	-2.164	.9763	.9763	.9763	.9763	.9537	.9537	.9537	.9537	.9537	.9537	.9537	.9537	.9537	.9537	.9537	.9537
17.5	-3.007	.9239	.9239	.9239	.9239	.9239	.9239	.9239	.9239	.9239	.9239	.9239	.9239	.9239	.9239	.9239	.9239
22.5	-3.827	.8870	.8870	.8870	.8870	.8870	.8870	.8870	.8870	.8870	.8870	.8870	.8870	.8870	.8870	.8870	.8870
27.5	-4.618	.8370	.8370	.8370	.8370	.8370	.8370	.8370	.8370	.8370	.8370	.8370	.8370	.8370	.8370	.8370	.8370
32.5	-5.373	.7844	.7844	.7844	.7844	.7844	.7844	.7844	.7844	.7844	.7844	.7844	.7844	.7844	.7844	.7844	.7844
37.5	-6.088	.7373	.7373	.7373	.7373	.7373	.7373	.7373	.7373	.7373	.7373	.7373	.7373	.7373	.7373	.7373	.7373
42.5	-6.756	.6873	.6873	.6873	.6873	.6873	.6873	.6873	.6873	.6873	.6873	.6873	.6873	.6873	.6873	.6873	.6873
47.5	-7.373	.6368	.6368	.6368	.6368	.6368	.6368	.6368	.6368	.6368	.6368	.6368	.6368	.6368	.6368	.6368	.6368
52.5	-7.934	.5854	.5854	.5854	.5854	.5854	.5854	.5854	.5854	.5854	.5854	.5854	.5854	.5854	.5854	.5854	.5854
57.5	-8.434	.5373	.5373	.5373	.5373	.5373	.5373	.5373	.5373	.5373	.5373	.5373	.5373	.5373	.5373	.5373	.5373
62.5	-8.870	.4818	.4818	.4818	.4818	.4818	.4818	.4818	.4818	.4818	.4818	.4818	.4818	.4818	.4818	.4818	.4818
67.5	-9.229	.4267	.4267	.4267	.4267	.4267	.4267	.4267	.4267	.4267	.4267	.4267	.4267	.4267	.4267	.4267	.4267
72.5	-9.537	.3707	.3707	.3707	.3707	.3707	.3707	.3707	.3707	.3707	.3707	.3707	.3707	.3707	.3707	.3707	.3707
77.5	-9.763	.3164	.3164	.3164	.3164	.3164	.3164	.3164	.3164	.3164	.3164	.3164	.3164	.3164	.3164	.3164	.3164
82.5	-9.914	.2635	.2635	.2635	.2635	.2635	.2635	.2635	.2635	.2635	.2635	.2635	.2635	.2635	.2635	.2635	.2635
87.5	-9.990	.2136	.2136	.2136	.2136	.2136	.2136	.2136	.2136	.2136	.2136	.2136	.2136	.2136	.2136	.2136	.2136
92.5	-9.990	.1636	.1636	.1636	.1636	.1636	.1636	.1636	.1636	.1636	.1636	.1636	.1636	.1636	.1636	.1636	.1636
97.5	-9.914	.1186	.1186	.1186	.1186	.1186	.1186	.1186	.1186	.1186	.1186	.1186	.1186	.1186	.1186	.1186	.1186
102.5	-9.763	.6763	.6763	.6763	.6763	.6763	.6763	.6763	.6763	.6763	.6763	.6763	.6763	.6763	.6763	.6763	.6763
107.5	-9.537	.3007	.3007	.3007	.3007	.3007	.3007	.3007	.3007	.3007	.3007	.3007	.3007	.3007	.3007	.3007	.3007
112.5	-9.239	.3327	.3327	.3327	.3327	.3327	.3327	.3327	.3327	.3327	.3327	.3327	.3327	.3327	.3327	.3327	.3327
117.5	-8.870	.4618	.4618	.4618	.4618	.4618	.4618	.4618	.4618	.4618	.4618	.4618	.4618	.4618	.4618	.4618	.4618
122.5	-8.434	.5373	.5373	.5373	.5373	.5373	.5373	.5373	.5373	.5373	.5373	.5373	.5373	.5373	.5373	.5373	.5373
127.5	-7.934	.6088	.6088	.6088	.6088	.6088	.6088	.6088	.6088	.6088	.6088	.6088	.6088	.6088	.6088	.6088	.6088
132.5	-7.373	.6576	.6576	.6576	.6576	.6576	.6576	.6576	.6576	.6576	.6576	.6576	.6576	.6576	.6576	.6576	.6576
137.5	-6.736	.7173	.7173	.7173	.7173	.7173	.7173	.7173	.7173	.7173	.7173	.7173	.7173	.7173	.7173	.7173	.7173
142.5	-6.088	.7934	.7934	.7934	.7934	.7934	.7934	.7934	.7934	.7934	.7934	.7934	.7934	.7934	.7934	.7934	.7934
147.5	-5.373	.8434	.8434	.8434	.8434	.8434	.8434	.8434	.8434	.8434	.8434	.8434	.8434	.8434	.8434	.8434	.8434
152.5	-4.618	.8870	.8870	.8870	.8870	.8870	.8870	.8870	.8870	.8870	.8870	.8870	.8870	.8870	.8870	.8870	.8870
157.5	-3.827	.9239	.9239	.9239	.9239	.9239	.9239	.9239	.9239	.9239	.9239	.9239	.9239	.9239	.9239	.9239	.9239
162.5	-3.007	.9676	.9676	.9676	.9676	.9676	.9676	.9676	.9676	.9676	.9676	.9676	.9676	.9676	.9676	.9676	.9676
167.5	-2.104	.1045	.1045	.1045	.1045	.1045	.1045	.1045	.1045	.1045	.1045	.1045	.1045	.1045	.1045	.1045	.1045
172.5	-1.305	.9690	.9690	.9690	.9690	.9690	.9690	.9690	.9690	.9690	.9690	.9690	.9690	.9690	.9690	.9690	.9690
177.5	0.436	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Se supone $b_1 = 18$ $a_1 = 18$ $b_3 = 18$ $a_3 = 18$ $b_5 = 18$ $a_5 = 18$ $b_7 = 18$ $a_7 = 18$ $b_9 = 18$ $a_9 = 18$ $b_{11} = 18$ $a_{11} = 18$ $b_{13} = 18$ $a_{13} = 18$ $b_{15} = 18$ $a_{15} = 18$ $b_{17} = 18$ $a_{17} = 18$

este caso es el método más rápido y fácil. Si se deben incluir otras armónicas pierde parte de su ventaja, pero sigue siendo un fuerte competidor, (ver por ejemplo a Frazier, Referencia 11).

18. Contenido armónico de las ondas

En conclusión puede recalcarse que las curvas de formas lisas contienen poco de las componentes de las armónicas elevadas. Las curvas con discontinuidades, tales como la onda cuadrada o la de diente de sierra, tienen un gran contenido de armónicas y su serie converge lentamente. Las curvas con cambios abruptos de pendiente pero sin discontinuidades, como la onda triangular, son de contenido armónico intermedio.

19. Sumario

Cualquier onda práctica puede analizarse en una serie de Fourier; la forma general de la serie se da en la Ec. 14-10. Los coeficientes de la serie para representar cualquier función pueden encontrarse de las Ecs. 14-8 y 9. Por tanto, las Ecs. 14-8 y 9 por un lado y la Ec. 14-10 por el otro constituyen un par de operaciones. Las Ecs. 14-8 y 9 analizan una función en sus componentes y la Ec. 14-10 sintetiza las componentes en la función.

El trabajo de cálculo se redujo notándose ciertas clases de simetría:

1. Las funciones impares tienen únicamente términos seno.
2. Las funciones pares no tienen términos seno.
3. Si hay simetría de media onda, únicamente estarán presentes armónicas pares.

Si existe simetría, el rango de integración para calcular los coeficientes puede reducirse.

El análisis de Fourier se aplica a los problemas de circuitos analizando la variable independiente (voltaje o corriente) en componentes armónicas, utilizándolas individualmente para encontrar las componentes de la variable de la pendiente (corriente o voltaje), y combinando estas componentes para obtener la onda resultante total. Este método puede aplicarse únicamente a elementos *lineales* del circuito.

La integración numérica (o suma) puede utilizarse para determinar las componentes de Fourier de una onda que está descrita por datos numéricos o gráficos en lugar de una función analítica del tiempo.

El valor rms de una onda no senoidal es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los valores rms de las componentes.

Ejemplos de análisis son:

$$\text{Onda cuadrada (Fig. 14-3, Ec. 14-17)} = \frac{4}{\pi} \sum \frac{1}{n} \sin n\omega t \text{ para } n \text{ impar}$$

Onda cuadrada (Fig. 14-11c, Ec. 14-28c)

$$= \frac{4}{\pi} \sum (-1)^{(n-1)/2} \frac{1}{n} \cos n\omega t \quad \text{para } n \text{ impar}$$

Onda diente de sierra (Fig. 14-5, Ec. 14-22)

$$= \frac{2}{\pi} \sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \sin n\omega t \quad \text{para } n \text{ entero}$$

Onda triangular (Fig. 14-14, Ec. 14-35)

$$= \frac{8}{\pi^2} \sum (-1)^{(n-1)/2} \frac{1}{n^2} \sin n\omega t \quad \text{para } n \text{ impar}$$

Rectificación de media onda (Fig. 14-15, Ec. 14-38)

$$= \frac{1}{\pi} \left(1 + \frac{\pi}{2} \cos \omega t + \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t + \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots \right)$$

Rectificación de onda completa (Fig. 14-17, Ec. 14-39)

$$= \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t + \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots \right)$$

PROBLEMAS

1. Sustituya $f(t)$ de la Ec. 14-10 o 14-10a en la Ec. 10-8 para demostrar que de esta manera se reduce a una identidad. § 3

2. Los primeros cinco términos de la salida de un rectificador de media onda (Fig. 14-15) están dados en la Ec. 14-38. Dibuje estas cinco componentes y súmelas. ¿Parece que esta serie infinita converge hacia la media onda rectificada? § 6

3. En la Ec. 14-35 se da un análisis de la onda triangular de la Fig. 14-14. Trazar las cuatro componentes dadas en esta ecuación y

súmense. ¿Parece que la serie infinita converge a la onda triangular? § 6

4. Se desea una serie de Fourier para la onda triangular de la Fig. 14-14 con el ápice positivo de la onda en $t = 0$. Encontrar la serie deseada (a) por desplazamiento del eje con una fórmula determinada antes, y (b) por análisis de la onda triangular en su nueva posición. § 11

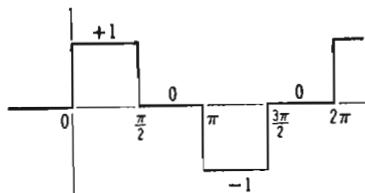
5. Decir cuándo las 8 ondas mostradas en las Figs. 14-14, 15, 17 y 15-1, 3, 4, 5a, 6 tienen (a) componente de corriente continua, (b) armónicas pares, (c) componentes seno, (d) componentes cosecantes. § 10

6. La corriente es de 1 ampere para 1 milisegundo, de $t = -0.5$ a $+0.5$ ms. La corriente es entonces cero para 3 milisegundos, de $t = 0.5$ a 3.5 ms. El curso de corriente se repite, y continúa repitiéndose con un periodo de 4 milisegundos. (a) Bosquéjese la onda de corriente y (b) encuéntrese su análisis en la forma de la Ec. 14-1. Dar los términos hasta la quinta armónica. § 12

7. El voltaje es de 10 volts para 3 milisegundos y entonces es de cero para 1 milisegundo, repitiéndose periódicamente. Bosquéjese la onda y analícese en la forma de la Ec. 14-1, seleccionando el tiempo cero para un punto tal que la serie no contenga término seno. Dar los coeficientes de todos los términos hasta la quinta armónica. La serie puede obtenerse por cualquier medio, pero el método deberá demostrarse. § 12

8. Considerando simetría, ¿qué términos no aparecerán en la serie de Fourier (forma de la Ec. 14-1) para la función mostrada? Determinar (por cualquier medio) los términos remanentes y dar la serie hasta la tercera armónica. § 12

9. Deducir la Ec. 14-39 para la onda rectificada completa. § 12



Prob. 8

10. Dado $f(t) = (\omega t/\pi)^2$. Encontrar la serie de Fourier que converge a esta $f(t)$ entre $\omega t = -\pi$ y $\omega t = +\pi$, y que repite con un periodo de 2π . Encontrar $a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$. Bosquéjense las ondas de las componentes para mostrar que la serie puede esperarse razonablemente que se aproxime a $f(t)$. § 12

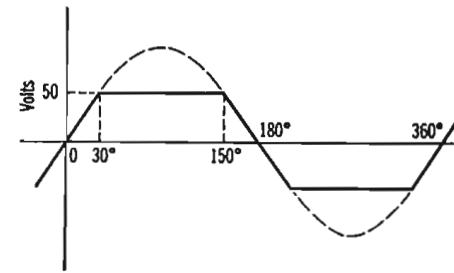
11. Dado $f(t) = e^{t/\pi}$, encontrar la serie de Fourier que converge hacia $f(t)$ entre $t = -\pi$ y $+\pi$. Encontrar los coeficientes hasta la tercera armónica, bosquejar las ondas componentes, y ver si se aproximan a $f(t)$. § 12

12. La mitad de un ciclo de una onda, de $x = 0$ a $x = \pi$, está descrita por la siguiente ecuación:

$$y = 100 \left(\frac{4x}{\pi} - \frac{4x^2}{\pi^2} \right)$$

La onda tiene simetría de media onda. La apariencia de esta onda es casi senoidal, pero no es precisamente. Escribir una serie de Fourier para la onda, dando todos los términos hasta la séptima armónica. § 12

13. Encontrar la serie de Fourier (hasta la quinta armónica) para la onda senoidal recortada que se muestra. § 12



Prob. 13

14. Encontrar la serie de Fourier (hasta la quinta armónica) para una onda similar a la mostrada en el Prob. 13, pero con solamente las crestas positivas recortadas, permaneciendo senoidales los medios ciclos negativos. § 12

15. En el circuito de la Fig. 14-19 el condensador se ha cambiado de $10 \mu F$ a $1 \mu F$. ¿Qué porcentaje de la componente de salida de corriente continua es la amplitud de la mayor componente de fluc-

tuación después de este cambio? Bosquéjese la suma de las componentes de corriente continua y de fluctuación. Ilustra este resultado los principios dados de diseño?

§ 14

16. El filtro de fluctuación de la Fig. 14-19 se utiliza en la salida de un rectificador de media onda de 60 cps (Fig. 14-15). ¿Cuáles son las frecuencias de las dos mayores componentes de fluctuación en la salida del filtro? ¿Qué porcentaje de la componente de corriente continua es la amplitud de cada una de éstas? Bosquéjese la suma de las componentes de corriente continua y de la mayor fluctuación.

§ 14

17. El filtro del Prob. 16 se considera insatisfactorio para el uso con un rectificador de media onda. Compárese la mejor resultante con los siguientes dos cambios: (a) dupliquese tanto L como C en el filtro actual, o (b) colóquese otra sección de filtro idéntica en tandem* entre el filtro actual y la carga.

§ 14

18. Una onda cuadrada de voltaje se aplica a las terminales de una capacitancia pura. Utilizando el método del Ej. 2, Sec. 14, encontrar una serie para la corriente. Discutir el resultado.

§ 14

19. Una onda de voltaje triangular (Fig. 14-14) se aplica a las terminales de una inductancia pura. Utilizando el método del Ej. 2, Sec. 14, encontrar una serie para la corriente. Bosquejar la onda resultante.

§ 14

20. Una onda cuadrada de un volt (Fig. 14-3) de 100 cps de frecuencia se aplica a un circuito con R y C en serie. $R = 16 \cdot 10^3$ ohms. $C = 10^{-7}$ farads. Expresar el voltaje entre las terminales de la resistencia como una serie de Fourier (hasta la séptima armónica).

§ 14

21. Bosquéjese la suma de las componentes calculadas para el Prob. 20. ¿Cuál piensa usted que sería la verdadera forma de esta onda, incluyendo todas las armónicas?

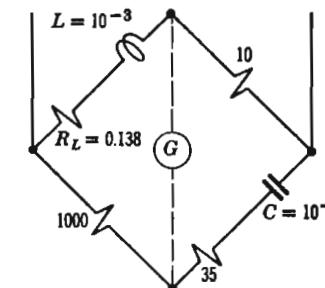
§ 14

22. Se muestra un puente de impedancias; su propósito es el de medir L y R_L . Con los valores mostrados (ohms, farads, henrys) el puente se balancea para la frecuencia fundamental con 1 000 cps. Desafortunadamente la onda de voltaje aplicada es prácticamente triangular (Fig. 14-14). Asumiendo una impedancia infinita del galvanómetro, encontrar el valor rms de la tercera armónica del voltaje entre las terminales del galvanómetro G .

§ 14

23. De la serie, encontrar los valores rms de las ondas de las Figs. 14-3 (cuadrada), 5, (diente de sierra), 14 (triangular), 15 (rectificación de media onda), y 17 (rectificación de onda completa).

§ 15



Prob. 22

24. El voltaje $v = 30(\cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3 \omega t)$ con $\omega = 377$ se aplica a $R = 1.0$ ohms y $L = 2.65$ milihenrys en serie. (a) Calcular la corriente de estado estacionario. (b) Bosquejar la onda de voltaje y sus componentes; también la onda de corriente y sus componentes, dando atención particular a las relaciones de fase. (c) Calcular la potencia del circuito.

§ 15

25. Los siguientes datos experimentales son para la columna encabezada y en la Tabla 14-1; los datos se deberán colocar en orden desde la parte superior de la columna (en $x = 2.5$) hasta la mitad de la columna (en $x = 87.5$): 0.034, 0.103, 0.171, 0.240, 0.308, 0.377, 0.446, 0.514, 0.583, 0.651, 0.720, 0.788, 0.857, 0.925, 0.994, 1.062, 1.131, 1.199. Continuando hacia abajo de la columna, los mismos datos se repiten en orden inverso; partiendo de $x = 92.5$ serán 1.199, 1.131, 1.062, y así sucesivamente hasta 0.034 para $x = 177.5$. Encontrar los coeficientes de Fourier hasta la séptima armónica. (Una gran cantidad de trabajo de cálculo puede ahorrarse notando la simetría y patrón de repetición de la columna de números). Trácese la función y sus componentes calculadas.

§ 16

26. Repítase el Prob. 25 con los siguientes datos, para ser colocados en lista desde la parte superior de la columna y : 5.48, 15.9, 25.9, 35.1, 43.8, 51.8, 59.2, 66.0, 72.1, 77.7, 82.6, 87.0, 90.7, 93.7, 96.2, 98.1, 99.3, 99.9. Esta es la mitad de la columna; continúese hacia abajo, repitiendo los datos en orden inverso: 99.9, 99.3, 98.1, etc., etc., hasta 5.48.

§ 16

* Tándem (en fila — uno después de otro).

15

Series Exponenciales y la Integral de Fourier

1. Formas exponenciales de serie

Hasta aquí hemos analizado ondas en serie de Fourier trigonométricas, y por tanto, hemos tratado con componentes seno y coseno, tomando en cuenta sus magnitudes y ángulos de fase. Esto es, que hemos continuado utilizando los métodos relativamente burdos de análisis que aplicamos a las ondas senoidales en el Cap. 2, métodos que fueron reemplazados en el Cap. 3 por los más fáciles del álgebra compleja. Podemos ahora, efectuar una mejoría similar en las series de Fourier, utilizando exponenciales en lugar de términos trigonométricos.

En lugar de la forma

$$\begin{aligned}f(t) = & \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos 2\omega_1 t + a_3 \cos 3\omega_1 t + \dots \\& + b_1 \sin \omega_1 t + b_2 \sin 2\omega_1 t + b_3 \sin 3\omega_1 t + \dots\end{aligned}\quad (15-1)$$

de la Ec. 14-1, podemos escribir la forma exponencial de serie:

$$f(t) = \dots + A_{-2}e^{-j2\omega_1 t} + A_{-1}e^{-j\omega_1 t} + A_0 + A_1e^{j\omega_1 t} + A_2e^{j2\omega_1 t} + \dots\quad (15-2)$$

Estas dos formas de la serie de Fourier lucen bastante diferentes, * pero de hecho no lo son. Es más, la forma exponencial puede deducir-

* Los subíndices negativos pueden sorprender a la primera vista, pero no significan ni más ni menos que los otros subíndices; únicamente identifican los términos de la serie, contando en cada sentido partiendo de la componente de corriente continua que es A_0 .

cirse de la forma trigonométrica utilizando las identidades $\cos x = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx})$ y $\sin x = \frac{j}{2}(e^{jx} - e^{-jx})$; cuando estas se sustituyen en la Ec. 15-1 y los términos se reacomodan, resulta la Ec. 15-2. Los coeficientes se encuentran que están relacionados como sigue:

$$A_0 = \frac{1}{2}a_0 \quad A_1 = \frac{1}{2}(a_1 - jb_1) \quad A_{-1} = \frac{1}{2}(a_1 + jb_1) \dots \quad (15-3)$$

o en general

$$A_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \quad y \quad A_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) \quad (15-4)$$

Como estas ecuaciones muestran, las A son en general complejas, y aparecen en pares conjugados: $A_{-n} = A_n$. *

Los coeficientes A en la serie exponencial se encuentran más convenientemente de la integral

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-jn\omega_1 t} d(\omega_1 t) \quad (15-5)$$

donde n es cualquier entero positivo, negativo o cero y $f(t)$ es la función por expresarse como una serie de Fourier en la forma de la Ec. 15-2. Esta última ecuación puede escribirse más compactamente como

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m e^{jm\omega_1 t} \quad (15-6)$$

donde m es cualquier entero.

La Ec. 15-5 es análoga a las Ecs. 14-8 y 14-9 para encontrar los coeficientes de la serie trigonométrica. Se utiliza de la misma manera, pero con menos trabajo, porque solamente hay una integración por hacer en lugar de dos, y también porque siempre es una integración más fácil de hacer.

La Ec. 15-5 puede derivarse de las Ecs. 14-8 y 14-9 por medio del teorema de Euler, y se obtiene fácilmente su verificación demostrando que cuando la Ec. 15-6 se sustituye en la Ec. 15-5, resulta una identidad.

2. Simetría en series exponenciales

Las tres clases de simetría discutidas en conexión con las series trigonométricas son también útiles con las series exponenciales. De

* Estas identidades, si no son ya familiares, pueden derivarse de la ecuación de Euler o de la serie de la Sección 3-5).

las Ecs. 15-4 se ve que si solamente hay términos seno (de modo que todos los coeficientes a_n son cero), A_n es imaginaria pura para todos los valores de n . Si por otro lado, no hay términos seno (todos los términos b_n igual a cero), A_n es real pura para todas las n . Finalmente, si no existen armónicas pares en la forma trigonométrica, A_n es cero para los valores pares de n . Por tanto, con la ayuda de la Sec. 14-7, podemos decir * de las series exponenciales:

1. Para las funciones impares, todas las A son imaginarias puras.
2. Para las funciones pares, todas las A son reales puras.
3. Si existe simetría de media onda, $A_n = 0$ para n par.
4. Adicionalmente, es siempre cierto que $A_{-n} = A_n$. *

3. Ejemplos de series exponenciales

EJEMPLO 1. La Fig. 15-1 muestra una onda cuadrada que está descrita dentro de la gama de 0 a π por $f(t) = 2$, y dentro de la gama de π a 2π por $f(t) = 0$. Encontremos sus componentes de Fourier en una serie exponencial.

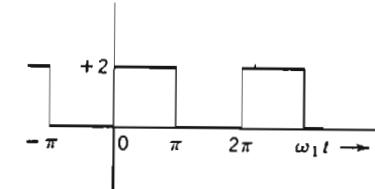


FIG. 15-1. Onda cuadrada con su componente de corriente continua (Ej. 1, Ec. 15-12)

Cuando esta expresión para $f(t)$ se introduce en la Ec. 15-5 nos da una integral que necesita evaluarse únicamente entre los límites 0 y π , puesto que la función es cero de π a 2π , la integración dentro de esta gama no contribuye a la integral. Por tanto, encontramos los coeficientes de la serie por integración:

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 2e^{-jn\omega_1 t} d(\omega_1 t) \quad (15-7)$$

La integración debe hacerse separadamente para $n = 0$ y $n \neq 0$, pero ambas son fáciles. Escribiendo x por $\omega_1 t$: si $n = 0$,

* Nótese sin embargo, que la gama de integración en la Ec. 15-5 debe seguir siendo un ciclo completo (como de 0 a 2π , o de $-\pi$ a π) para e^{-jxt} que no es ni una función par ni una función impar.

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi 2dx = \frac{1}{2\pi} (2\pi - 0) = 1 \quad (15-8)$$

Si $n \neq 0$,

$$A_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi e^{-jnx} dx = \frac{1}{-jn\pi} \left[e^{-jnx} \right]_0^\pi = \frac{1}{-jn\pi} (e^{-jn\pi} - 1) \quad (15-9)$$

Puesto que $e^{-jn\pi}$ es 1 para cualquier valor entero par de n ,

$$A_n = \frac{1}{-jn\pi} (1 - 1) = 0 \quad \text{para } n \text{ par} \quad (15-10)$$

Puesto que $e^{-jn\pi}$ es -1 para cualquier valor entero de n ,

$$A_n = \frac{1}{-jn\pi} (-1 - 1) = \frac{2}{jn\pi} \quad \text{para } n \text{ impar} \quad (15-11)$$

Esto completa el análisis, porque ahora conocemos A_n para todos los enteros: cero (Ec. 15-8), pares (Ec. 15-10), e impares (Ec. 15-11). Es digno de notarse que la integración es mucho más fácil que con las funciones trigonométricas.

La síntesis de la función de tiempo de la Fig. 15-1 se obtiene sustituyendo estos valores en la serie (Ecs. 15-2 o 15-6) para la onda cuadrada de la Fig. 15-1:

$$f(t) = 1 + \frac{2}{j\pi} \left(\dots - \frac{1}{3} e^{-j3\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t} + e^{j\omega_1 t} + \frac{1}{3} e^{j3\omega_1 t} + \dots \right) \quad (15-12)$$

EJEMPLO 2. En el ejemplo precedente, la onda cuadrada tiene un valor, ya sea de 2 o 0. Su promedio no es cero, y se convierte, como esperaríamos, para que $A_0 = 1$. La Fig. 15-2 muestra una onda cuadrada que es similar pero desplazada hacia abajo una unidad. Varía de $+1$ a -1 . Es, por supuesto, la misma función de tiempo menos 1. Su desarrollo se encuentra más fácilmente sustrayendo la Ec. 15-12, dando

Onda cuadrada de la Fig. 15-2

$$= \frac{2}{j\pi} \left(\dots - \frac{1}{3} e^{-j3\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t} + e^{j\omega_1 t} + \frac{1}{3} e^{j3\omega_1 t} + \dots \right) \quad (15-13)$$

La forma exponencial de la serie se relaciona con la forma trigonométrica de la misma, notándose que las Ecs. 15-13 y 14-17 describen la misma onda cuadrada. Combinando los dos términos en la Ec. 15-13 para la que $n = 1$ en una función seno de frecuencia fundamental y los dos términos para los que $n = 3$ en una función seno de tercera armónica y así sucesivamente, es fácil cambiar la Ec. 15-13 en la Ec. 14-17.

Los coeficientes de la Ec. 15-13 están dados por (Ec. 15-11):

$$A_n = \frac{2}{jn\pi} \quad \text{para } n \text{ impar} \quad (15-14)$$

Esta función está trazada en la Fig. 15-2b, análoga al espectro de la onda cuadrada. La figura muestra la función continua de n como una línea discontinua, pero estamos tratando de hecho con la función discontinua que tiene un valor diferente a cero únicamente para valores *enteros impares* de n como se indica por las líneas verticales.

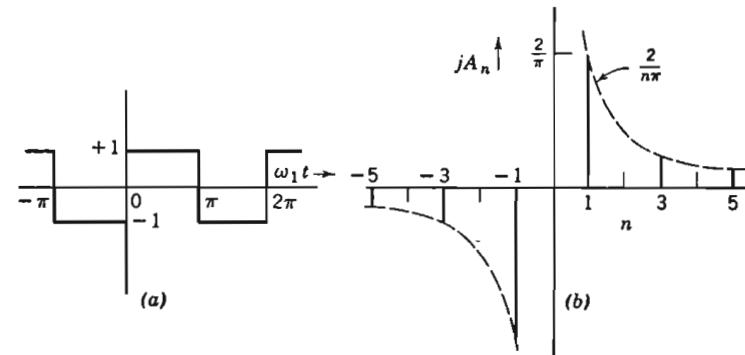


FIG. 15-2. Onda cuadrada sin componente de corriente continua, y su espectro (Ej. 2, Ec. 15-13)

Nótese que la Fig. 15-2 muestra una función *impar*, y que en su desarrollo como en la Ec. 15-13, todos los términos tienen coeficientes *imaginarios*.

Utilizando la forma de la Ec. 15-6 podemos escribir muy compactamente:

Onda cuadrada de la Fig. 15-2

$$= \frac{2}{j\pi} \sum \frac{1}{n} e^{jn\omega_1 t} \quad \text{para } n \text{ entera e impar} \quad (15-15)$$

el análisis de Fourier de la onda nos da la Ec. 15-14; la síntesis de Fourier está expresada por la Ec. 15-15.

EJEMPLO 3. La onda cuadrada de la Fig. 15-1 se muestra otra vez en la Fig. 15-3 pero con un tiempo de referencia diferente. En esta figura el eje vertical está colocado para hacer a la onda cuadrada una función *par* y debido a esto su análisis puede esperarse que solamente contenga componentes exponenciales *reales*. Esta onda difiere de la primera también, en que solamente tiene una unidad de alto. Se analiza fácilmente por la Ec. 15-5; en la gama entre $-\pi$ y $+\pi$ la función tiene un valor diferente a cero únicamente entre $-\pi/2$ y $+\pi/2$, así que los últimos se utilizan como límites de integración:

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1)e^{-jn\omega_1 t} d(\omega_1 t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-jnx} dx \quad (15-16)$$

Si $n = 0$,

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \quad (15-17)$$

Si $n \neq 0$,

$$A_n = \frac{1}{-jn2\pi} \left[e^{-jnx} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{n\pi} \frac{e^{jn\pi/2} - e^{-jn\pi/2}}{2j} = \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi} \quad (15-18)$$

Si n es par, $A_n = 0$. Si n es impar existen dos posibilidades:

$$A_n = \frac{1}{n\pi} \quad \text{si } n = 1, 5, 9, \dots \quad (15-19)$$

$$A_n = -\frac{1}{n\pi} \quad \text{si } n = 3, 7, 11, \dots \quad (15-20)$$

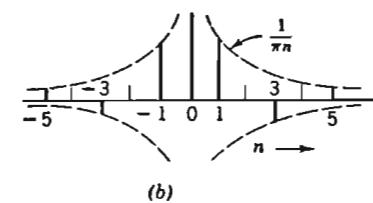
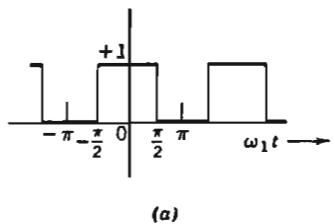


FIG. 15-3. Onda cuadrada dibujada como función par, y su espectro (Ec. 15-21)

El espectro se muestra en la Fig. 15-3b. La síntesis da:

$$\text{Onda cuadrada de la Fig. 15-3} = \frac{1}{2} + \sum \left(\pm \frac{1}{n\pi} e^{jn\omega_1 t} \right) \quad (15-21)$$

utilizando el signo + para $n = 1, 5, 9, \dots$, y - para $n = 3, 7, 11, \dots$ *

EJEMPLO 4. La onda triangular de la Fig. 15-4 será otro ejemplo. Esta puede describirse analíticamente escribiendo las ecuaciones para las líneas rectas que la forman. Por tanto, entre $x = 0$ y $x = \pi$ (utilizando $\omega_1 t = x$ para simplicidad) la onda está descrita por

$$f(t) = \frac{2x}{\pi} - 1 \quad 0 < x < \pi \quad (15-22)$$

mientras que entre $-\pi$ y 0 la función es

$$f(t) = -\frac{2x}{\pi} - 1 \quad -\pi < x < 0 \quad (15-23)$$

Esas se sustituyen en la Ec. 15-5 para determinar los coeficientes de la serie de Fourier, integrando primero de $-\pi$ a 0 y después de 0 a π . La solución es la siguiente:

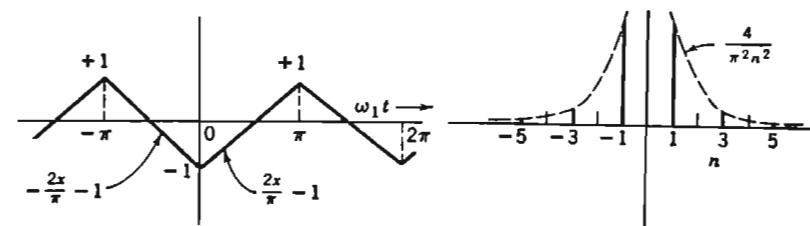


FIG. 15-4. Onda triangular y su espectro (Ej. 4, Ec. 15-29)

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \left(-\frac{2x}{\pi} - 1 \right) e^{-jnx} dx + \int_0^\pi \left(\frac{2x}{\pi} - 1 \right) e^{-jnx} dx \right] \quad (15-24)$$

Sabemos que $A_0 = 0$ porque la onda tiene un valor promedio cero. Si $n \neq 0$ integramos y obtenemos

* Esta alteración de signo puede lograrse como en la Sección 14-19, escribiendo $(-1)^{(n-1)/2}$ en lugar de \pm y especificando "para n non".

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{4}{\pi n^2} + \frac{4}{\pi n^2} \left(\pi n \frac{e^{jn\pi} - e^{-jn\pi}}{2j} + \frac{e^{jn\pi} + e^{-jn\pi}}{2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2e^{jn\pi} - e^{-jn\pi}}{n^2} \right] \\
 &= \frac{4}{2\pi^2 n^2} \left(-1 + n\pi \sin n\pi + \cos n\pi - \frac{n\pi}{2} \sin n\pi \right) \quad (15-25)
 \end{aligned}$$

Para todos los valores enteros de n , $\sin n\pi = 0$, por lo que

$$A_n = \frac{2}{\pi^2 n^2} (\cos n\pi - 1) \quad \text{para } n \text{ entero} \quad (15-26)$$

Puesto que $\cos n\pi = +1$ para n par, y $\cos n\pi = -1$ para n impar, nos da

$$A_n = -\frac{4}{\pi^2 n^2} \quad \text{para } n \text{ impar} \quad (15-27)$$

$$A_n = 0 \quad \text{para } n \text{ par} \quad (15-28)$$

Esto completa el análisis de la onda triangular; todos los coeficientes de la onda son ahora conocidos. El espectro se muestra en la Fig. 15-4 (el signo negativo aplicado a todos los términos se omite en este diagrama).

La síntesis, para obtener la onda triangular original nos da:

$$f(t) = -\frac{4}{\pi^2} \left(\dots + \frac{1}{9} e^{-j3\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t} + e^{j\omega_1 t} + \frac{1}{9} e^{j3\omega_1 t} + \dots \right) \quad (15-29)$$

Nótese que la función es par, tiene simetría de media onda, y su promedio es cero; por tanto la serie tiene coeficientes reales, únicamente n impar, y $A_0 = 0$. Más compactamente,

$$f(t) = -\frac{4}{\pi^2} \sum \frac{1}{n^2} e^{jn\omega_1 t} \quad \text{para } n \text{ impar} \quad (15-30)$$

4. Uso en el análisis de circuitos

Quizás el aspecto más interesante de las series exponenciales es como un pasadizo hacia la transformación de Laplace. El siguiente

ejemplo de serie utilizado para resolver un problema de circuitos no deberá verse tanto como un medio en sí mismo, sino como una introducción a un concepto poderoso.

Sea una onda cuadrada de voltaje que está aplicada a las terminales de una inductancia pura, como se indica en la Fig. 15-5. La onda cuadrada es una función de tiempo, $v(t)$. La transformada de la onda cuadrada es, según la Ec. 15-14

$$V_n = \frac{2V_{\max}}{jn\pi} \quad \text{para } n \text{ impar} \quad (15-31)$$

Se escribe V para indicar que está relacionada con el voltaje. Es una omisión de n y es en general compleja. V_n para cada valor de n es el coeficiente de un término exponencial en la serie. V_n es una transformada en el mismo sentido que las transformadas que se han visto fueron utilizadas para el voltaje y la corriente en los capítulos precedentes.*

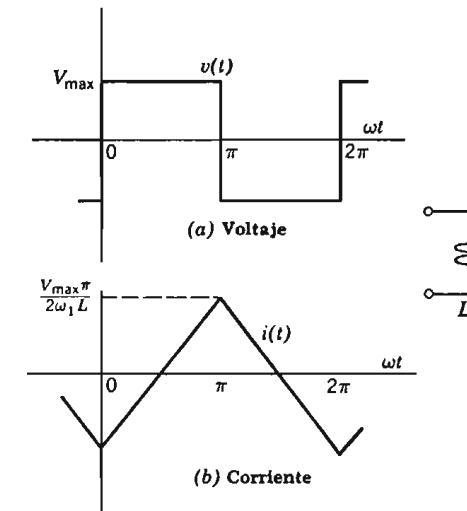


FIG. 15-5. Corriente resultante de la aplicación de una onda cuadrada de voltaje a una inductancia pura

Podemos por tanto, como para las otras transformadas, dividir V_n por la impedancia del circuito para encontrar la corriente. La im-

* Excepto que $\sqrt{2}$, utilizada para convertir de valor máximo a valor efectivo en el Cap. 3 no se emplea aquí ni en las expresiones de voltaje ni en las de corriente.

pedancia del circuito tiene que ser diferente para cada valor de n , por supuesto, siendo diferente para cada frecuencia. La impedancia de esta inductancia simple es $Z(\omega) = j\omega L$, y puede escribirse para la armónica enésima como

$$Z_n = jn\omega_1 L \quad (15-32)$$

puesto que $\omega = n\omega_1$. La transformada del voltaje de cada armónica se divide ahora entre la impedancia correspondiente a la armónica particular, para encontrar la corriente de dicha armónica. La corriente puede escribirse en general para la enésima armónica:

$$I_n = \frac{V_n}{Z_n} = \frac{2V_{\max}/jn\pi}{jn\omega_1 L} = -\frac{2V_{\max}}{\omega_1 L \pi n^2} \text{ para } n \text{ impar} \quad (15-33)$$

Esta es la *transformada* de la armónica enésima de la onda resultante de corriente. Nos da los coeficientes de la serie de Fourier que describen la corriente. Podría encontrarse la corriente escribiendo la serie y si es necesario sumando paso a paso. Afortunadamente, podemos soslayar este tedio cambiando la forma de la Ec. 15-33 a

$$I_n = -\frac{V_{\max}\pi}{2\omega_1 L} \frac{4}{\pi^2 n^2} \text{ para } n \text{ impar} \quad (15-34)$$

somos capaces de reconocer por comparación con la Ec. 15-27 que la función de tiempo de la corriente debe ser una onda triangular. $V_{\max}\pi/2\omega_1 L$ una constante, es el valor de la cresta de la onda triangular de corriente como se muestra en la Fig. 15-5.

Nótese que la solución consiste de tres pasos:

1. De la función tiempo de voltaje $v(t)$ encontrar la transformada del voltaje V_n .
2. Dividir la transformada de voltaje V_n entre la impedancia Z_n para encontrar la transformada de corriente I_n .
3. Para la transformada de corriente I_n encontrar la onda de corriente como una función de tiempo, $i(t)$.

Que la onda triangular es además la corriente correcta en este circuito puramente inductivo, puede verse partiendo de los principios elementales; el voltaje es proporcional a la rapidez de cambio de la corriente.

Deberá hacerse énfasis en que el uso del complejo familiar de *impedancia* de la Ec. 15-32 hace fácil el encontrar la transformada de corriente partiendo de la transformada de voltaje. Cuando la se-

rie de Fourier se utiliza con términos trigonométricos (en lugar de exponenciales), no es posible hacer esta fácil manipulación. Esta es la gran ventaja de la forma exponencial. Permite escribir ecuaciones que incluyen a V_n , I_n y Z_n como en la Ec. 15-33. Compárese con la resolución relativamente embarazosa del mismo problema en el capítulo previo, y particularmente con las Ecs. 14-52.

5. Pulso recurrente

El pulso rectangular de la Fig. 15-6 se utiliza en circuitos para televisión, radar, calculadoras, y muchos sistemas de comunicación codificada. Para determinar qué tan fielmente se transmitirán estos pulsos, es necesario conocer sus componentes de Fourier de frecuencia. El siguiente análisis de una serie de pulsos recurrentes es por tanto de excepcional importancia.

Asumimos, como en el diagrama, que el intervalo de recurrencia es k veces la duración del pulso. El análisis es por tanto bastante similar a los ejemplos previos:

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/k}^{\pi/k} e^{-jnx} dx \quad (15-35)$$

Si $n = 0$,

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{k} + \frac{\pi}{k} \right) = \frac{1}{k} \quad (15-36)$$

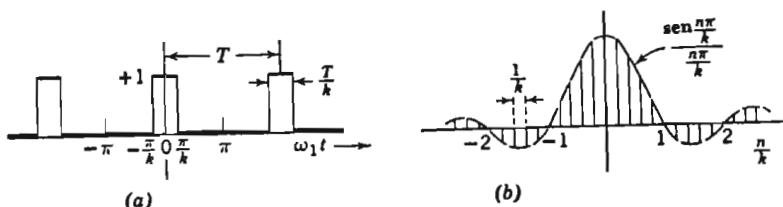
Si $n \neq 0$,

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{-jn2\pi} \left[e^{-jnx} \right]_{-\pi/k}^{\pi/k} = \frac{1}{n\pi} \frac{e^{jn\pi/k} - e^{-jn\pi/k}}{2j} \\ &= \frac{1}{k} \frac{\sin(n\pi/k)}{n\pi/k} \end{aligned} \quad (15-37)$$

Esto da el análisis del pulso rectangular. La síntesis formal para obtener el pulso rectangular que puede ser llamado $f(t)$, se obtiene como de costumbre por la Ec. 15-6. El pulso rectangular es la suma de las componentes

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{\sin(n\pi/k)}{n\pi/k} e^{jn\omega_1 t} \quad (15-38)$$

La Ec. 15-37 da una expresión para los coeficientes de la serie de Fourier de un pulso en función de k . Para encontrar los valores numéricos para los coeficientes A_n es necesario conocer k . Físicamente,

FIG. 15-6. Pulso rectangular y su espectro (dibujado para $k = 5$) (Ec. 15-37)

k es la razón del tiempo de repetición a la duración de cada pulso. Como un ejemplo, el espectro de la Fig. 15-6 se ha dibujado para $k = 5$. Sin embargo, si k fuera diferente, la apariencia general del diagrama del espectro no cambiaría mucho. La línea discontinua envolvente dentro de la cual las líneas del espectro están contenidas retendría la forma general de la función $(\sin x)/x$ para cualquier ancho de pulso o razón de recurrencia. Cuando el espectro se ha dibujado como en la Fig. 15-6, con la razón n/k trazada a lo largo del eje horizontal, la envolvente permanece igual indiferente de k pero las líneas en el espectro estarán más juntas o más separadas dependiendo de si k es grande o pequeño. En cada caso, por supuesto, cada línea representa una armónica. Se notará que cuando $k = 5$, como en la figura, la quinta armónica y los múltiplos de la quinta se desvanecen completamente. La Fig. 15-3 es un ejemplo especial de esta forma general para la que $k = 2$.

Nótese que si k fuese grande, como lo sería para pulsos de corta duración o menor frecuencia de recurrencia, las líneas en el espectro estarían mucho más cercanas. Al mismo tiempo, debido al factor $1/k$ en la Ec. 15-37, se irían haciendo más cortas en la misma proporción.

Es interesante considerar el límite de esta condición. Si los pulsos se van haciendo menos y menos frecuentes, el tiempo entre los pulsos se incrementa sin límites. La situación se va haciendo más y más cercana a la de un pulso único no recurrente. Cuando los pulsos se van haciendo menos frecuentes, la frecuencia fundamental y por tanto la diferencia de frecuencia entre las armónicas sucesivas se va haciendo menor; las líneas en el espectro se van haciendo cada vez más cercanas, y se aproxima un espectro continuo en lugar de un espectro de líneas. Al mismo tiempo las amplitudes de las componentes se van haciendo todas menores, aproximándose a cero en el límite. Se podría conjutar que en el límite toda la utilidad

del concepto se habría perdido. Por el contrario, el límite nos lleva a la valiosa integral de Fourier.

6. Integral de Fourier

En los ejemplos precedentes, incluyendo el pulso rectangular corto, el análisis y la síntesis ha sido lograda utilizando las Ecs. 15-5 y 15-6. Estas se han repetido a continuación con los siguientes cambios menores: la constante ω_1 se ha sacado de la diferencial y escrito enfrente de la integral; ω se ha escrito en lugar de $n\omega_1$; y los límites se han expresado en forma diferente. T es el tiempo de un ciclo fundamental, por lo que $T = 2\pi/\omega_1$ y la integración a lo largo del ciclo se ha logrado tomando como límites $-1/2T$ y $+1/2T$.

$$A_n = \frac{\omega_1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_n t} dt \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{j\omega_n t} \quad (15-39)$$

donde

$$\omega_n = n\omega_1 \quad T = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad (15-40)$$

Si este par de ecuaciones se aplica a una secuencia de pulsos repetidos, T es el tiempo de un pulso al siguiente. T puede ser tan grande como se desee.

Consideremos otra vez, como en la sección precedente, la posibilidad de encontrar una serie que represente a un pulso único. Haciendo el tiempo entre los pulsos grandes, permitiendo que T se vaya haciendo grande sin límite, podemos retener un pulso y mover los pulsos anterior y posterior infinitamente lejos. Sin embargo, esto no es hacer una cosa útil en la Ec. 15-39, porque cuando T se va haciendo grande, ω_1 se aproxima a cero y todos los valores de A_n se van haciendo tan pequeños que se van desvaneciendo. Simplemente perdemos nuestra función A_n .

Pero una función que no se perdería cuando T se incrementa sin límite es A_n/ω_1 . Cuando A_n se va haciendo pequeña, lo mismo hace ω_1 , y la razón no se aproxima a cero. Para tener alguna forma de llamarlo, designemos esta razón por el símbolo g_n ; por definición

$$g_n = \frac{A_n}{\omega_1} \quad (15-41)$$

Escribiendo nuevamente el par de Ecs. 15-39 en función de g_n :

$$g_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_n t} dt \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{j\omega_n t} \omega_1 \quad (15-42)$$

Con toda esta preparación, estamos listos para hacer que el tiempo entre los pulsos se incremente sin límite. Solamente quedará un pulso único, como en la Fig. 15-7.

De acuerdo con esto, hagamos que T se aproxime al infinito. Esto hace ω_1 pequeño, aproximándose a cero, y lo llamaremos d_ω . Cuando ω_1 . Se va haciendo pequeño, cada frecuencia armónica se va haciendo indistinguible de la siguiente (las líneas de la Fig. 15-6b se van acercando tanto una a otra hasta que no hay espacio entre ellas), y en lugar de considerar una sucesión de frecuencias armónicas discretas designadas por ω_n , consideraremos *todas* las frecuencias; en lugar de ω_n usaremos simplemente por lo tanto la variable continua ω que puede tener cualquier valor.

En lugar de tener una sucesión de valores discretos de g_n , uno para cada armónica, tendremos en el límite un valor de g para *todas* las frecuencias, y por tanto, usamos el símbolo para una función continua $g(\omega)$. Finalmente, en el límite la *suma* para encontrar $f(t)$ se convierte en una *integración*.*

Con estos cambios el par de ecuaciones anterior para la serie de Fourier se convierte en el par para la integral de Fourier:

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (15-43)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (15-44)$$

La integral de Fourier hace para un pulso único lo que la serie de Fourier hace para una repetición cíclica de pulsos. Encuentra las componentes de frecuencia del pulso, dibujando un espectro, permite una gráfica de $g(\omega)$, que sirve para el mismo propósito que la

* Es por supuesto familiar que una integración es en esencia una suma. Esto está implicado por la s larga utilizada como signo de integral. $\int_a^b y$ significa: dividir x entre a y b en una gran cantidad de pequeñas partes, cada una teniendo una longitud dx ; multiplicando cada pequeña parte (cada dx) por el valor de y para este valor particular de x , y sumando los productos. La suma de muchos productos pequeños es la integral (o al menos, la integral es límite de la suma cuando el número de pequeñas partes se incrementa sin límite). Ver Ref. 23 que no es de ninguna manera tan simple como parece.

gráfica de A_n para la onda cíclica. Un ejemplo simple demostrará la similitud.

7. Pulso rectangular

La Fig. 15-7a muestra un pulso rectangular de duración 2τ . Encontrar su "espectro", $g(\omega)$, por medio de la integral de Fourier.

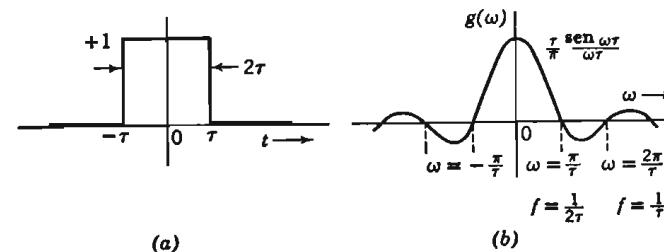


FIG. 15-7. Pulso rectangular único y su espectro

Utilizamos la Ec. 15-43 (llamada algunas veces el prisma de transformación porque ella da el espectro) y calculamos:

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau}^{\tau} (1) e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{2\pi j\omega} \left[e^{-j\omega t} \right]_{-\tau}^{\tau} \\ &= \frac{1}{\pi\omega} \frac{e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau}}{2j} = \frac{1}{\pi\omega} \operatorname{sen} \omega\tau = \frac{\tau \operatorname{sen} \omega\tau}{\pi \omega \tau} \end{aligned} \quad (15-45)$$

Aunque esta integración es fundamentalmente entre los límites $-\infty$ y $+\infty$ es solamente necesaria en este ejemplo de integrar de $-\tau$ a $+\tau$, porque en cualquier otro lado la función por integrarse es cero. El resultado, $g(\omega)$, nos da g como una función de la frecuencia, ω en esta expresión es por supuesto, la variable, y τ siendo una constante, la mitad de la longitud del pulso analizado.

La similitud de esta $g(\omega)$ a la A_n para una serie de pulso, (Ec. 15-37) es aparente. La similitud es aún más obvia en las Figs. 15-7 y 15-6. La diferencia es igualmente importante: el pulso rectangular único contiene *todas* las frecuencias de cero a infinito (excepto aquellas que son múltiplos enteros de $1/2\tau$) en

las proporciones mostradas en la Fig. 15-7b.* Así la Fig. 15-7 muestra un espectro *continuo*, y la Fig. 15-6 un espectro *lineal*.

Es interesante sustituir valores numéricos en este resultado general. Supóngase $\tau = 10^{-6}$ segundos, la mitad de la longitud de un pulso que produciría una raya de luz de longitud moderada en una pantalla de televisión (un poco menos de una pulgada en una pantalla grande). Para este valor de τ , el punto $f = 1/\tau$ en el eje horizontal de la Fig. 15-7b, corresponde a una frecuencia de 1 megaciclo.

8. Efecto de anchura de banda limitada

La inspección de la Fig. 15-7b sugiere que la mayoría de la información contenida en el espectro de un pulso rectangular se encuentra entre la frecuencia cero y la frecuencia de 1 megaciclo, y por tanto, un canal de televisión que transmite frecuencias de video hasta 1 megaciclo transmitirá este pulso bastante bien. Una conclusión como ésta, es imprudente, sin embargo, a menos que esté apoyada por un razonamiento firme.

La prueba obvia de esta conclusión es sintetizar un pulso de componentes de frecuencias de cero a 1 megaciclo en las proporciones apropiadas para un pulso rectangular, pero sin ninguna frecuencia más alta, y comparar la forma de este pulso sintético con el pulso rectangular original. Esto se hace sustituyendo nuestra $g(\omega)$ en la integral de sintetización de la Ec. 15-44 e integrando entre los límites de $-\omega_0$ y ω_0 que son numéricamente $-2\pi \cdot 10^6$ y $+2\pi \cdot 10^6$. Las frecuencias más altas que 10^6 cps estarán eliminadas de la integral:

$$f(t) = \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \frac{\tau \operatorname{sen} \omega t}{\omega \tau} e^{j\omega t} d\omega \quad (15-46)$$

* Es fácil creer que la Fig. 15-7b implica la existencia de frecuencias *negativas*. Esto no es realmente cierto. La integral de Fourier produce una función $g(\omega)$ que tiene valores matemáticos tanto para valores positivos como negativos de ω . Las matemáticas dicen que si usted calcula $g(\omega)$ a cierta frecuencia (a la que llamamos ω_1) y a continuación calculamos $g(\omega)$ para $-\omega_1$, y después sumamos los dos valores de g , usted aprenderá de este modo algo acerca del contenido de esta frecuencia particular en el pulso que se analiza. Esto resulta del hecho de que una exponencial con exponente positivo y una exponencial con exponente negativo sumados dan una función seno o coseno. (La integral de la Ec. 15-44, tomada de $-\infty$ a $+\infty$, suma estos términos conjugados automáticamente). En el análisis final, las componentes de cualquier pulso puede mostrarse que son términos senoidales con amplitudes *reales* y frecuencias *positivas* reales.

Esta integral no es fácil de efectuar, pero cuando se resuelve (como con Guillemin, por ejemplo, en sus *Mathematics*, Ref. 21, Cap. VII, Art. 19) se encuentra que el resultado es un pulso similar al pulso rectangular original pero con esquinas redondeadas, lados inclinados, y secciones a nivel ondulado. La Fig. 15-8 sugiere el resultado

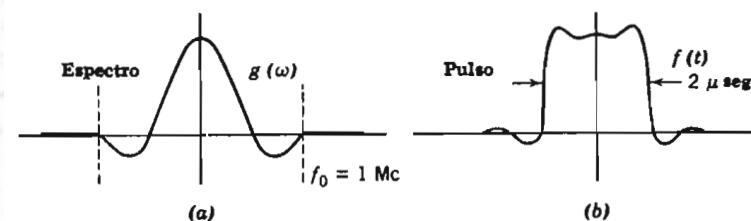


FIG. 15-8. La limitación de ancho de banda para el espectro afecta la forma del pulso resultante

Consideremos a continuación un pulso mucho más corto, únicamente $1/20$ del anterior, para el que $\tau = 1/2 \cdot 10^{-7}$. Este es un "elemento de imagen" en la pantalla de televisión, siendo el elemento de imagen el más fino detalle que el sistema se supone que reproduce. Si $\tau = 1/2 \cdot 10^{-7}$, la frecuencia correspondiente a $1/\tau$ es 20 megaciclos.

Si el sistema de transmisiones de televisión fuese capaz de transmitir sin distorsión frecuencias de cero a 20 megaciclos, de modo que la frecuencia de corte fuese de 20 megaciclos, podríamos esperar que un pulso rectangular de esta corta duración fuese reproducido en la pantalla como un punto de luz bastante bien definido como el mostrado por la línea discontinua en la Fig. 15-9b. Realmente, sin embargo, un canal de televisión standard trasmite únicamente en una anchura de banda de cerca de 4 megaciclos. La Fig. 15-9a muestra la parte del espectro de un pulso rectangular que se encuentra dentro de este estrecho ancho de banda, entre frecuencia cero y $f_0 = 4 \cdot 10^6$.

Nuestro problema entonces es el siguiente. Asumiendo que todas las frecuencias necesarias para hacer un pulso rectangular estrecho se originaron en la cámara de televisión, pero que las frecuencias más altas de f_0 no se transmiten, así que únicamente las frecuencias entre 0 y f_0 , como se indica por la línea llena en la Fig. 15-9a,

llegan al receptor, ¿qué forma de pulso aparecerá en la pantalla? La respuesta a este problema se encuentra por síntesis de frecuencia de 0 a f_0 en un pulso (utilizando la transformación inversa de

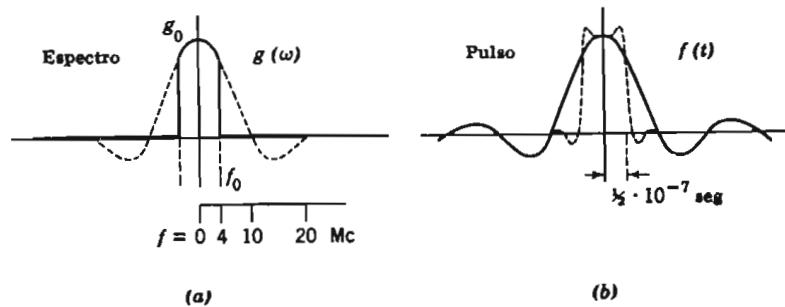


FIG. 15-9. Cuando la anchura de banda se disminuye originalmente el pulso se parece menos al pulso rectangular original

Fourier de la Ec. 15-44); la función de tiempo resultante será el pulso recibido

Como observamos en el ejemplo anterior, esta síntesis incluye una integración bastante difícil. Con la muy estrecha anchura de banda de la Fig. 15-9, sin embargo, puede utilizarse una aproximación que elimina la mayoría de la dificultad. Exácticamente hablando, la frecuencia de 0 a f_0 en la Fig. 15-9a no tienen todas la misma amplitud; esto es, $g(\omega)$ no es una constante a lo largo de esta gama. Sin embargo, asumimos que $g(\omega)$ es constante con un valor g_0 a lo largo de esta gama, que cae abruptamente a cero para frecuencia de corte, y que es cero para todas las frecuencias s de f_0 a ∞ . Suponiendo esto, la síntesis (Ec. 15-44) del pulso recibido es una integral que puede evaluarse sin problemas:

$$f(t) = \int_{-\omega_0}^{\omega_0} g_0 e^{j\omega t} d\omega \quad (15-47)$$

Entonces el pulso recibido es:

$$f(t) = g_0 \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{j\omega t} d\omega = \frac{g_0}{jt} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) = 2g_0 \omega_0 \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t} \quad (15-47a)$$

Entonces encontramos, sorprendentemente, que el pulso rectangular ha degenerado como resultado de la anchura de banda limitada de transmisión una señal de la forma mostrada por la línea llena de la Fig. 15-9b que es analíticamente de la Ec. 15-47a, de la forma (\sin

$x)/x$). Esta es la clase de punto que aparecerá en la pantalla de televisión —o que aparecería si nuestras suposiciones fuesen justificadas.*

9. Par de transformación de Fourier

El hecho de que una función de tiempo de parte superior aplastada insertada en la Ec. 15-43 como $f(t)$ produzca una función de frecuencia $g(\omega)$ de la forma $(\sin x)/x$, mostrada en la Fig. 15-7, mientras que una función de frecuencia de parte superior aplastada insertada en la Ec. 15-44 como $g(\omega)$ produzca una función de tiempo $f(t)$ de la forma $(\sin x)/x$ mostrada en la Fig. 15-9, hace énfasis en la simetría matemática de las dos ecuaciones integrales de Fourier (15-43 y 15-44). Estas han sido llamadas por los matemáticos el par de transformación de Fourier.

Existen límites definidos para la aplicación teórica de las integrales de Fourier al análisis de las funciones del tiempo, pero por lo que concierne a voltajes o corrientes físicamente posibles, la única limitación importante es la de que el pulso por analizarse no debe continuar para siempre. Esto es, un pulso de cualquier longitud puede analizarse pero no podemos manejar la función de escalón que resulta cuando una batería se conecta a un circuito y permanece conectada de ahí en adelante. En este caso, la integral de Fourier, no teniendo un valor finito, es inútil.

Podemos muy bien preguntar la necesidad de utilizar la integral de Fourier en lugar de la serie de Fourier. Existen tres ventajas: (1) la integral hace lo que la serie no puede hacer; (2) la integral es algunas veces más fácil de usar que la serie; y (3) la integral de Fourier es un escalón hacia otros métodos de análisis por integral.

1. La integral permitirá el análisis y síntesis de un pulso único no repetido, lo que la serie no logra.

2. El análisis integral es a menudo más fácil de aplicar. De este modo, escribiendo de una señal de televisión recurrente que estaría apropiadamente descrita por una serie de Fourier, Zworykin y Morton dicen (Ref. 24, Pág. 192), "Para determinar la anchura de canal necesaria para llenar este requerimiento, es necesario hacer uso de una integral de Fourier. (Nota: Se requiere realmente una serie de Fourier si el punto es estacionario debido a la periodicidad de la señal, pero es más incómodo de aplicar y no agrega nada a la

* De hecho, este resultado es razonablemente correcto. Un análisis detallado está dado por Zworykin y Morton en *Televisión* (comenzando en la Sección 5-5, Referencia 24).

exactitud del cálculo presente". También la síntesis integral es a veces conveniente cuando la síntesis de una serie por suma no lo es, debido a la facilidad de las tablas de integrales y de pares de transformadas (como hace énfasis Guillemin, Refs. 15 y 21).

3. El método de transformada de Laplace para el análisis de circuitos está estrechamente relacionado con la integral de Fourier mientras que la transformación de Fourier está limitada a pulsos de cierta longitud finita, la transformada de Laplace puede utilizarse con voltajes y corrientes que permanecen efectivos por tiempo ilimitado. Volveremos nuestra atención a la aplicación de la transformación de Laplace al análisis de circuitos en el Cap. 17.

10. Sumario

Una serie de Fourier puede escribirse con términos exponenciales en lugar de términos trigonométricos. Estos términos exponenciales complejos son más difíciles de visualizar que los trigonométricos, pero más fáciles de manejar matemáticamente.

La ventaja sobresaliente es que la impedancia compleja puede utilizarse para relacionar las ondas de voltaje y corriente si éstas están expresadas como serie exponencial, pero no de otra manera.

La serie exponencial se extendió fácilmente para presentar la integral de Fourier. El par de transformación de integral de Fourier es útil en sí mismo, y además nos guía hacia el concepto de transformada de Laplace.

PROBLEMAS

1. Deducir la Ec. 15-2 y las relaciones de las Ecs. 15-3 y 4, de la Ec. 15-1, utilizando el teorema de Euler. § 1

2. Sustituir la Ec. 15-6 en la Ec. 15-5 para probar que el desarrollo de exponenciales es correcto. § 1

3. Deducir la ecuación exponencial 15-29 de la ecuación trigonométrica 14-35. Se necesita un desplazamiento de eje. § 3

4. Se desea escribir una serie de Fourier, en la forma exponencial, para $y = e^{-x}$ de $x = 0$ a $x = 2\pi$. Calcular A_{-1} , A_0 y A_1 para el desarrollo de esta función. Bosquejar la función. § 4

5. ¿Qué puede predecirse de las consideraciones de simetría acerca de los coeficientes (los A) de una serie exponencial para (a) la onda diente de sierra de la Fig. 14-5? (b) Para la onda triangular de la Fig. 14-14? § 2

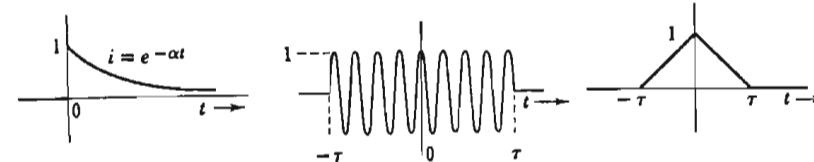
6. Dibujar un pulso rectangular (como en la Fig. 15-6a) para la que $k = 10$ y (como en b) dibujar su espectro. § 5

7. Repetir el Prob. 6 para $k = 3$; también para $k = 30$. § 5

8. Una onda cuadrada de voltaje (como en la Ec. 15-31) se aplica a una bobina que tiene resistencia R e inductancia L . $R = 1 \text{ ohms}$; $\omega L = 1 \text{ ohm}$. Encontrar (a) la impedancia (escribiéndola para la armónica enésima) y (b) la transformada de la corriente. (c) Expresar la corriente como una serie exponencial, dando los términos de A_{-1} a A_4 . ¿Reconoce usted la serie como la que describe a cualquier onda conocida? ¿De otra información, cuál forma de la onda de corriente esperaría usted? § 4

9. Una función g_n está definida en la Ec. 15-41. ¿Qué es g_n para la onda de la Fig. 15-2? ¿Para la Fig. 15-4? ¿Para la Fig. 15-6? Si g_n se trazara en lugar de A_n , ¿qué diferencia habría en las figuras? § 6

10. Un pulso de corriente, como se muestra en el diagrama, es $i = e^{-\alpha t}$ para todo el tiempo positivo y cero para todo el tiempo negativo. Por medio de la integral de Fourier demostrar que su espectro es $1/2\pi(\alpha + j\omega)$. § 7



Prob. 10

Prob. 11

Prob. 12

11. En la Fig. $f(t) = \cos \omega_0 t$ para $-\tau < t < +\tau$. Esta es la corriente de radio-frecuencia durante un punto del código telegráfico, o un punto de televisión de brillantez uniforme. (a) demostrar que el espectro de la integral de Fourier de esta señal es

$$g(\omega) = \frac{\tau}{2\pi} \left[\frac{\sin(\omega - \omega_0)\tau}{(\omega - \omega_0)\tau} + \frac{\sin(\omega + \omega_0)\tau}{(\omega + \omega_0)\tau} \right]$$

Sugestión: Hágase $\cos \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$ antes de integrar (b). Haciendo $\omega_0\tau = 8\pi$, bosquejar $g(\omega)$ y comparar con la Fig. 15-7b. § 7

12. Un pulso triangular único se muestra en la figura. Utilizar la integral de Fourier para encontrar su espectro. Bosquejar $g(\omega)$, el espectro. § 7

13. Por medio de la integral de Fourier, encontrar $g(\omega)$ para un pulso que tiene un valor de -1 del tiempo $-\tau$ a 0 y un valor de $+1$ del tiempo 0 a $+\tau$ y es cero en todos los demás tiempos. Dibujar diagramas para mostrar el pulso dado, que es $f(t)$ y su espectro $g(\omega)$.

§ 7

14 Por medio de la integral de Fourier, encontrar $g(\omega)$ para un pulso que tiene un valor de $+1$ del tiempo 0 a $+2\tau$ y es cero para todos los otros tiempos. Demostrar que $[g(\omega)]$ es igual a $g(\omega)$ de la Ec. 15-45.

§ 7

func impar. (hay términos) $\Rightarrow A_n$ son ondas pares
 " par (n = n cos) $\Rightarrow A_n$ son ondas pares
 Si hay sumt de $\frac{1}{2} N$ $\Rightarrow A_n = 0 + j u_{bar}$
 Siempre $A_{-n} = A_n^*$

16

Respuesta Transitoria y el Plano de Frecuencia Compleja

1. Componentes forzada y natural

En el Cap. 2 las ecuaciones diferenciales de circuitos simples se escribieron y resolvieron. Se vio que cada solución consiste de una componente forzada o de estado estable y una componente natural o transitoria. (Es posible que cualquiera de las componentes sea cero en casos especiales, pero en general deben esperarse ambas). A lo largo de los capítulos intermedios se le ha dado atención exclusivamente al estado estable. Es tiempo ahora, de regresar otra vez a una breve consideración de la resolución completa. Esto no será de ninguna manera un estudio cuidadoso o completo del fenómeno transitorio * pero existen dos interrelaciones profundamente significativas entre los comportamientos natural y forzado de los circuitos, que compensa el estudio lanzando nueva luz sobre los problemas de circuitos.

Una de éstas, la transformación de Laplace, da un medio de encontrar la corriente transitoria considerándola como un fenómeno en estado estable. La otra, tratando con los polos y ceros de

* Todo estudiante deseará sin duda, proseguir este asunto mucho más completamente de lo que se ha dado en este capítulo. Para esto se sugiere un libro como *Transient Electric Currents* (Referencia 6).

impedancia en el plano de frecuencia compleja, permite el estudio de la respuesta de estado estable del circuito en función de las características transitorias del circuito.

2. Solución clásica de las ecuaciones del circuito

La llamada solución clásica, procede de acuerdo con cuatro reglas que se indicarán primero y discutirán después:

1. Encontrar la forma de la componente *natural* o *transitoria* de la corriente. Para hacer esto, escriba la ecuación diferencial del circuito con cero sustituido por la fuerza electromotriz; la solución de la ecuación homogénea resultante es la componente natural de la corriente, la corriente que puede existir sin fuerza electromotriz impulsora.

2. Encontrar la corriente *forzada* o de estado estable en el circuito. Aunque la fuerza electromotriz puede ser cualquier función de tiempo, es generalmente constante o senoidal, y los métodos de los capítulos precedentes se aplican para encontrar la corriente.

3. Sumar a la componente forzada de la corriente un término de la forma de la componente natural pero de magnitud desconocida.

4. Ajustar la magnitud de una componente natural para acomodarla a las condiciones iniciales dadas. La componente natural sirve entonces para cubrir el hueco entre la condición inicial y la corriente de estado estable.

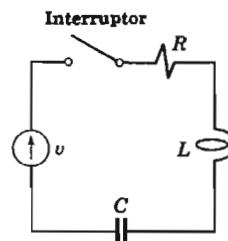


FIG. 16-1. Circuito RLC

Los circuitos considerados en el Cap. 2 fueron tratados por métodos esencialmente clásicos. Fueron extraordinariamente simples, sin embargo, porque todos fueron circuitos con una "sola energía"; esto es, cada uno de ellos contenía solamente un elemento capaz de almacenar energía: ya fuera inductancia o capacitancia pero

no ambas. Ilustremos ahora el método con referencia al circuito de "doble energía" de la Fig. 16-1, que tiene tanto inductancia como capacitancia—así como una resistencia a la que, por supuesto, consume pero no almacena energía eléctrica.

3. La ecuación diferencial

La fuerza electromotriz v se aplica repentinamente al circuito cerrando el interruptor. La corriente i se debe encontrar. La solución clásica del problema es como sigue:

Primero, se escribe la ecuación de malla del circuito. El voltaje entre las terminales de la resistencia es Ri . El voltaje entre las terminales de la inductancia es $L di/dt$. El voltaje entre las terminales de la capacitancia es $1/C$ veces la integral de la corriente, y si el condensador está sin carga en el instante de cerrar el interruptor,

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = v \quad (16-1)$$

El interruptor se cierra en $t = 0$, y esta ecuación se aplica de ahí en adelante.

Para obtener una ecuación diferencial de esta ecuación integro-diferencial, se diferencia cada término, dando

$$R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{C} = \frac{dv}{dt} \quad (16-2)$$

REGLA 1. De acuerdo con la regla 1, la componente natural de corriente se encuentra haciendo el voltaje igual a cero:

$$R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{C} = 0 \quad (16-3)$$

Basados en la experiencia previa, se supone que puede encontrarse una solución de la Ec. 16-3 de la forma Ke^{st} . Por lo tanto, se sustituye Ke^{st} en vez de i en la Ec. 16-3 y, después de diferenciar, el resultado es,

$$sRK e^{st} + s^2 L K e^{st} + \frac{K}{C} e^{st} = 0 \quad (16-4)$$

Dividiendo ahora entre Ke^{st} , queda la ecuación *característica*:

$$sR + s^2 L + \frac{1}{C} = 0 \quad \text{o} \quad s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \quad (16-5)$$

Si a las raíces de esta ecuación se les llaman s_1 y s_2 ,

$$s_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \quad \text{y} \quad s_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \quad (16-6)$$

o alternativamente

$$s_1 = -\frac{R}{2L} + j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad \text{y} \quad s_2 = -\frac{R}{2L} - j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (16-7)$$

La Ec. 16-5 puede escribirse en función de estas raíces en forma factorizada,

$$(s - s_1)(s - s_2) = 0 \quad (16-8)$$

El primer miembro de esta ecuación es obviamente cero si $s = s_1$, o $s = s_2$. Estos dos valores, s_1 y s_2 , son los valores que debe tener s para hacer a Ke^{st} una solución de la Ec. 16-3.

Estos dos valores encontrados para s indican que tanto $Ke^{s_1 t}$ o $Ke^{s_2 t}$ satisfarán la Ec. 16-3, y esto puede verificarse por sustitución. Es más, la suma de las dos es la solución más general:

$$i = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \quad (16-9)$$

REGLAS 2 Y 3. La Ec. 16-9 es la componente natural o transitoria de la corriente solamente. A ésta debe sumarse la corriente de estado estable. Decidamos ahora, que la fuente de fuerza electromotriz en el circuito de la Fig. 16-1, tiene voltaje constante V , como tendría una batería, por ejemplo, o un generador de corriente continua. Debido a la capacitancia en el circuito, un voltaje estable tal no producirá corriente estable. Por tanto, aplicando la regla 2, la corriente de estado estable es cero, y la corriente natural de la Ec. 16-6 es la corriente total.

16.2

4. Condiciones iniciales

REGLA 4. La magnitud de esta corriente queda por encontrarse. Por lo que se refiere al circuito mismo, K_1 y K_2 pueden tener cualquier valor, porque la Ec. 16-9 satisfará la ecuación diferencial 16-3 con cualesquiera valores de K . Físicamente, las K deben escogerse de modo que la i satisfaga las condiciones iniciales. En nuestro problema las condiciones iniciales son:

1. La corriente inicial es cero.

2. La razón de cambio inicial de la corriente es V/L . La primera de estas condiciones está dada. La segunda resulta de la primera, y del hecho adicional de que la carga inicial en el condensador es cero: inmediatamente después de cerrar el interruptor no hay carga en el condensador y por tanto no hay voltaje en el mismo; no hay corriente y por tanto no hay voltaje entre las terminales de la resistencia; todo el voltaje aplicado en el primer instante deberá estar consecuentemente entre las terminales de la inductancia. El voltaje es V , la inductancia es L , y puesto que $V = L di/dt$ se sigue que en el instante inicial $di/dt = V/L$.

Ahora la Ec. 16-9 nos dice que la corriente en cualquier instante es

$$i = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

y, por diferenciación, encontramos la razón de cambio de la corriente en cualquier instante como

$$\frac{di}{dt} = s_1 K_1 e^{s_1 t} + s_2 K_2 e^{s_2 t} \quad (16-10)$$

Sustituimos en estas dos ecuaciones $t = 0$, $i = 0$, y $di/dt = V/L$, para obtener:

$$0 = K_1 + K_2 \quad (16-11)$$

$$\frac{V}{L} = s_1 K_1 + s_2 K_2 \quad (16-12)$$

Las Ecs. 16-11 y 12 se resuelven ahora simultáneamente para las K dando:

$$K_1 = \frac{V}{L} \frac{1}{s_1 - s_2} \quad \text{y} \quad K_2 = -K_1 \quad (16-13)$$

Finalmente, entonces, de la ecuación 16-9

$$i = \frac{V}{L} \frac{1}{s_1 - s_2} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) \quad (16-14)$$

5. Soluciones sobreamortiguada y oscilatoria

Las ecuaciones 16-6 y 7 muestran que los dos valores posibles para s pueden ser, tanto reales como complejos. Serán reales si $R^2/4L^2$ es mayor que $1/LC$; si es menor, serán un par complejo conjugado.

Si los valores de s son reales, la corriente en el circuito tendrá la forma general mostrada en la Fig. 16-2a. Como se describe en la Ec. 16-14, la corriente crecerá hasta un máximo y de ahí se irá extinguriendo gradualmente; es una ondulación unidireccional única. Esto se conoce como el caso *sobrearmortiguado*.

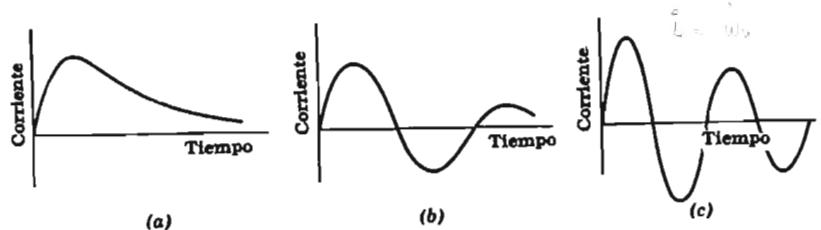


FIG. 16-2. Corrientes amortiguadas y oscilatorias en el circuito RLC

Físicamente, la respuesta sobreamortiguada se obtiene cuando la resistencia del circuito es grande. La condición de que $R^2/4L^2 > 1/LC$ puede expresarse diciendo que R^2 debe ser mayor que $4L/C$. Si L y C son conocidas, se encuentra fácilmente el valor crítico de R .

Si por otro lado, $1/LC$ es mayor que $R^2/4L^2$, la forma de la corriente se muestra en la Fig. 16-2b o c. La corriente se eleva a un máximo como en el caso de sobreamortiguamiento, pero se eleva más alto, y entonces cae mucho más rápidamente, alcanza y cruza el eje, invirtiendo su dirección de flujo, y después de un tiempo invierte su dirección de flujo otra vez, continuando su oscilación periódicamente hasta que ha llegado a ser tan pequeña que no puede detectarse. Esto se conoce como el *caso oscilatorio*.*

6. Parámetros

El álgebra de la solución oscilatoria es más simple si los siguientes tres grupos de constantes de circuito reciben símbolos especiales: sea

* Entre la condición oscilatoria de baja resistencia y la condición de sobreamortiguamiento de alta resistencia existe un caso especial de amortiguamiento crítico para el que $R^2/4L^2 = 1/LC$; por tanto, la crítica $R = 2\sqrt{L/C}$. Con amortiguamiento crítico $s_1 = s_2 = -R/2L$, y la expresión para la corriente en la Ec. 16-14 se hace indeterminada, de la forma 0/0. La forma matemática apropiada para usar para la corriente natural en el circuito amortiguado críticamente es en general $i = Kte^{st} + K'e^{st}$, donde $s = -R/2L$ un número real, y K y K' son constantes dependientes del voltaje aplicado y las condiciones iniciales. Si (como en la Ec. 16-14) no existe corriente inicial, $K' = 0$; si no hay también carga inicial en el condensador, la corriente amortiguada críticamente es $i = -(V/L)te^{st}$. La forma de esta ondulación de corriente se muestra en la Fig. 17-7a,

$$\frac{R}{2L} = \alpha \quad \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \omega_n \quad \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \quad (16-15)$$

w_n puede expresarse en función de las otras dos como

$$\omega_n = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad (16-16)$$

Usando estos parámetros en las Ecs. 16-7,

$$s_1 = -\alpha + j\omega_n \quad s_2 = -\alpha - j\omega_n \quad (16-17)$$

Entonces

$$\frac{1}{s_1 - s_2} = \frac{1}{(-\alpha + j\omega_n) - (-\alpha - j\omega_n)} = \frac{1}{2j\omega_n} \quad (16-18)$$

Ahora es conveniente escribir la Ec. 16-14 para la corriente como

$$i = \frac{V}{2j\omega_n L} (e^{(-\alpha+j\omega_n)t} - e^{(-\alpha-j\omega_n)t})$$

$$= \frac{V}{\omega_n L} e^{-\alpha t} \frac{e^{j\omega_n t} - e^{-j\omega_n t}}{2j} = \frac{V}{\omega_n L} e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \omega_n t \quad (16-19)$$

De este modo la corriente se ve que es una onda senoidal amortiguada oscilando como se muestra en la Fig. 16-2b o c con una frecuencia en radianes ω_n y disminuyendo paulatinamente a una razón determinada por el factor de amortiguamiento e^{-at} .

7. Frecuencia natural y factor de amortiguamiento

La apariencia de una onda de corriente fuertemente amortiguada se muestra en la Fig. 16-2b. La Fig. 16-2c muestra una onda con frecuencia alta y poco amortiguamiento. Si no hubiera nada de amortiguamiento la corriente sería una onda senoidal simple, continuando indefinidamente con la misma amplitud; esto es un ideal que no puede ser nunca alcanzado porque corresponde a resistencia cero.

La frecuencia de la onda de corriente está determinada por ω_n . En efecto, la frecuencia en radianes (radianes por segundo) es igual a ω_n , y la frecuencia en ciclos (ciclos por segundo) es $\omega_n/2\pi$. Puesto

Pág. 569. El amortiguamiento crítico es meramente un caso matemático especial, no distinguiéndose físicamente, cuando la oscilatoria se confunde imperceptiblemente con la condición de sobreamortiguamiento.

que ω_n es la frecuencia de la componente natural de la corriente en el circuito, se llama la frecuencia *natural* del circuito.

Las Ecs. 16-15 muestran que ω_n depende de las tres constantes del circuito, L , C y R . Si R es despreciablemente pequeño, sin embargo, ω_n se aproxima a $1/\sqrt{LC}$. Esta cantidad es lo suficientemente importante para dársele un símbolo especial ω_0 (Ecs. 16-15) y un nombre especial; se le llama la frecuencia natural *sin amortiguamiento*. Para cualquier circuito con pequeño amortiguamiento, ω_n no es grandemente diferente a ω_0 . La relación está dada por la Ec. 16-16 que puede también escribirse

$$\omega_0^2 = \omega_n^2 + \alpha^2 \quad (16-20)$$

Se notará que en la operación de estado estable, la frecuencia resonante del circuito *con* resistencia es ω_0 (Ecs. 7-3), no ω_n . Las relaciones entre estas varias cantidades se irán aclarando en los siguientes párrafos conforme investiguemos este asunto en función de la localización de los puntos s_1 y s_2 en el plano complejo s .

8. Plano de frecuencia compleja

Cuando la corriente natural es oscilatoria, s_1 y s_2 son cantidades complejas conjugadas. Algunos resultados interesantes y valiosos se

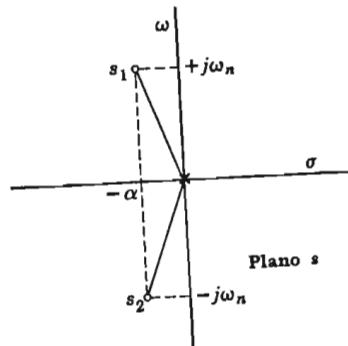


FIG. 16-3. Ceros en el plano s

obtienen trazando estos valores, s_1 y s_2 como puntos en el plano complejo s .

La Fig. 16-3 muestra a s_1 y s_2 para un circuito en el que el amortiguamiento es más bien pequeño (α es un número más pequeño que ω_0). La componente real de cada s es $-\alpha$; la componente ima-

ginaria de s_1 es $+j\omega_n$ y de s_2 es $-j\omega_n$. (Es notación standard escribir $s = \sigma + j\omega$; entonces s_1 y s_2 son valores particulares de s , ω_n es un valor particular de la variable ω , y $-\alpha$ es un valor particular de la variable σ).

Acabamos de ver que la forma de la onda de corriente está grandemente influenciada por la cantidad de resistencia en el circuito. Si el circuito fuese idealizado sin resistencia, la corriente sería una onda senoidal sin amortiguamiento. Con una pequeña cantidad de resistencia, resulta un amortiguamiento moderado; más resistencia hace que la corriente sea un punto unidireccional único, y aún más resistencia produce un pulso de menor amplitud y relativamente larga duración. Estos cambios de forma pueden estar bien reflejados en la localización de s_1 y s_2 en el plano complejo s . Vamos a investigar. (El resultado será sumarizado en la Fig. 16-5).

Si el circuito es *ideal* y la resistencia es cero, s_1 y s_2 son puramente imaginarios (Ecs. 16-7). Entonces $\alpha = 0$ y $\pm j\omega_n = \pm j\omega_0$. Estos puntos, $s = \pm j\omega_0$, están indicados en el eje vertical de la Fig. 16-4a.

Si existe alguna pequeña resistencia en el circuito pero la corriente es sin embargo, *oscillatoria*, las raíces s_1 y s_2 están, como en la Fig. 16-3, en algún lugar en la mitad izquierda del plano. Si esto fuese todo lo que conocemos no sería especialmente útil, pero al presente podemos ser mucho más precisos. Cualquiera que sea la cantidad de resistencia, $s_1 = -\alpha + j\omega_n$. En la Fig. 16-3, α y ω_n son las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo; la geometría plana da el cuadrado de la hipotenusa como $\omega_n^2 + \alpha^2$. Pero la Ec. 16-20 dice que $\omega_n^2 + \alpha^2 = \omega_0^2$. Por lo tanto, la hipotenusa del triángulo, la recta radial desde el origen del plano s al punto s_1 (o similarmente, a s_2) tiene una longitud igual a ω_0 . Por lo tanto, todos los puntos posibles para s_1 y s_2 están a una distancia ω_0 del origen.* Pero ω_0 es constante mientras R varía (si L y C del circuito se mantienen sin cambiar), así todos los puntos para s_1 y s_2 (conforme R varía) caen en el semicírculo de radio ω_0 mostrado en la Fig. 16-4a.

Este semicírculo es por tanto, el lugar geométrico de las raíces de nuestra ecuación característica 16-5. La Fig. 16-4 se ha llamado un *diagrama del lugar geométrico de las raíces*.

A continuación, ¿qué acerca del caso *críticamente amortiguado*? El valor crítico es la cantidad de resistencia que separa la gama

* Deberá hacerse énfasis aquí, y siempre, que la misma escala debe utilizarse a lo largo de los ejes real e imaginario en el plano complejo. Esto es claramente necesario para que tanto ángulos como distancias en el plano complejo tengan significado.

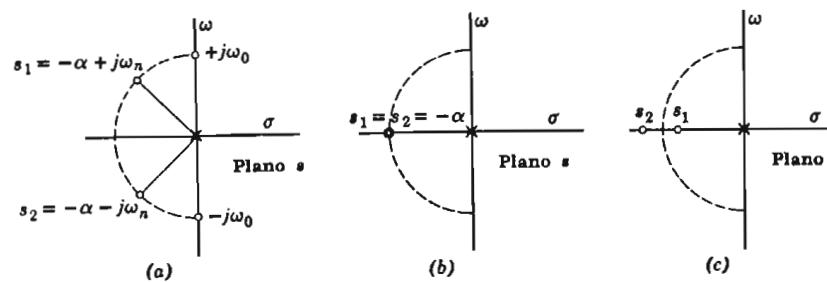


FIG. 16-4. Diagrama del lugar geométrico de las raíces para el circuito de la Fig. 16-1 cuando la resistencia varía. (a) Oscilatorio. $i = Ae^{-\alpha t} \sin \omega_n t$. (b) Crítico. $i = K_1 e^{s_1 t} + K_2 t e^{s_1 t}$. (c) Sobreamortiguado $i = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$

oscilatoria de la gama sobreamortiguada. En las Ecs. 16-6 es el valor que hace el radical ni real ni imaginario, sino cero. Con amortiguamiento crítico, entonces, $\omega_n = 0$ (Ec. 16-15), y según las Ecs. 16-17, $s_1 = s_2 = -\alpha$.

Con amortiguamiento crítico las dos raíces de nuestra ecuación característica son iguales y ambas reales. Los puntos para s_1 y s_2 coinciden, como en la Fig. 16-4b. Las dos raíces se confunden en un solo punto sobre el eje horizontal.

Un incremento adicional de resistencia hace a la corriente *sobreamortiguada*. En esta gama, las raíces están más fácilmente dadas por las Ecs. 16-6. Estas raíces son ambas reales y sus puntos están sobre el eje como en la Fig. 16-4c. Uno está fuera y el otro dentro del semicírculo. De hecho, ocupan posiciones recíprocas; eso se demuestra fácilmente multiplicando las Ecs. 16-17 entre sí, dando para cualquier cantidad de resistencia

$$s_1 s_2 = \omega_0^2 \quad (16-21)$$

Es interesante pasar revista a las posiciones de las raíces en el plano s conforme la resistencia del circuito se incrementa gradualmente. Con resistencia cero, las raíces están sobre los puntos de intersección del semicírculo de la Fig. 16-4 con el eje vertical. Conforme R se va haciendo mayor, las raíces se mueven una hacia otra a lo largo del semicírculo. Se confunden sobre el eje con el valor crítico *

* El circuito amortiguado críticamente tiene un factor de calidad de $Q = \frac{1}{2}$. Para demostrar esto, nótense que para el caso de amortiguamiento crítico $\alpha = \omega_0$ (el radio del semicírculo) y aplíquense las Ecs. 16-31. Los sistemas vibratorios (timbres por ejemplo) tienen una Q mayor que $\frac{1}{2}$. Los sistemas con una Q más baja no responden con una nota musical, sino con un sonido sordo.

de R , y después se separan a lo largo del eje horizontal, una moviéndose hacia el origen y la otra hacia afuera, hacia el infinito.

9. Diagrama compuesto

Es instructivo indicar en un diagrama compuesto las formas de ondas que resultan de raíces en diferentes partes del plano s . La Fig. 16-5 muestra formas de e^{st} correspondientes a los valores de s sugeridos por la posición en el plano. De este modo, sobre el eje vertical, donde s es puramente imaginario, la forma correspondiente es una onda senoidal sin amortiguamiento (se volverá a decir que la onda senoidal es la suma de dos exponenciales de la forma e^{st} , porque en la teoría de los circuitos los valores imaginarios de s siempre vienen en pares). La frecuencia de la onda senoidal es proporcional a la distancia sobre el origen; *la frecuencia se mide a lo largo del eje vertical*.

En la mitad izquierda del plano, donde los valores de s son complejos conjugados con σ negativa, la onda es una senoide amortiguada. La razón de amortiguación está determinada por la distancia hacia la izquierda y la frecuencia de oscilación por la distancia hacia arriba.

Sobre el eje de las reales, la suma de una e^{st} única se muestra. Cuanto más a la izquierda del origen más rápidamente disminuye la función. Se dice que tiene una *constante de tiempo* pequeña.*

El diagrama incluye curvas para e^{st} con s en la mitad derecha del plano s . Estas muestran, no corrientes que van disminuyendo sino corrientes que van incrementándose. Estas corrientes pueden aparecer en circuitos activos, pero no pueden existir en circuitos pasivos.

Analíticamente, resultaría si hubiese resistencia negativa en un circuito. En general, estamos interesados en conocer acerca de éstas, pero no podemos utilizarlas en nuestro presente estudio.

10. Raíces de la función de impedancia

Ha habido tantas sugerencias repetidas en el trabajo anterior que una conexión entre la corriente natural y la impedancia de

* La constante de tiempo es una medida de la duración de un término de la fórmula $e^{-t/T}$. La corriente natural está compuesta de estos términos, cada uno de los cuales se llama un *modo normal*. Por definición, T es la constante de tiempo. De este modo, la constante de tiempo del circuito inductivo, Fig. 16-6, es L/R ; la constante de tiempo del circuito capacitivo, Fig. 16-7, es RC .

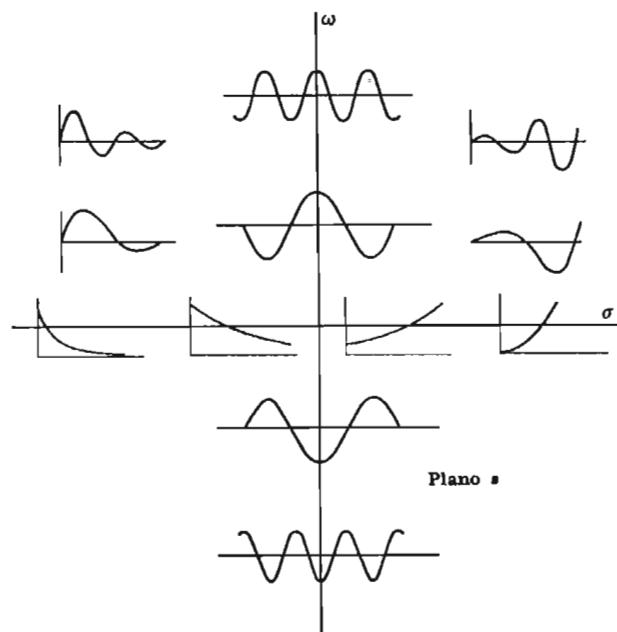


FIG. 16-5. Formas de onda correspondientes a varios valores de s (Según W. W. Harman, Referencia 25)

estado estable puede esperarse. Esta idea ha sido sugerida por afirmaciones que:

1. La corriente natural es la forma de corriente que puede fluir sin voltaje impulsor.
2. La corriente natural es la forma de corriente a la que el circuito ofrece impedancia cero.
3. La corriente natural se encuentra sustituyendo cero por la fuerza electromotriz en la ecuación diferencial del circuito.

La relación matemática es como sigue. La ecuación característica es una función de s ; para el circuito RLC puede escribirse (de la Ec. 16-5) como

$$R + sL + \frac{1}{sC} = 0$$

La impedancia de estado estable es la misma función de $j\omega$; para el circuito serie RLC es (de la Ec. 3-46)

$$Z(j\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

Estas dos funciones serán siempre de la misma forma, porque una se encuentra sustituyendo e^{st} por i en la ecuación diferencial del circuito y la otra sustituyendo $e^{j\omega t}$ por i en la *misma ecuación*. Por lo tanto se sigue que la ecuación característica puede obtenerse escribiendo s en lugar de $j\omega$ en la impedancia de estado estable, por lo tanto, haciendo $Z(s)$ en lugar de $Z(j\omega)$, y haciendo también $Z(s) = 0$.

Esto es, los valores de s para la corriente natural en cualquier circuito se encuentran resolviendo para las raíces de $Z(s) = 0$. Unos pocos ejemplos serán mejores que cualquier explicación adicional.

11. Ejemplos

EJEMPLO 1. La Fig. 16-6 muestra un circuito de R y L solamente. Su impedancia de estado estable es $Z(j\omega) = R + j\omega L$. De aquí escribiremos $Z(s)$ que se igualará entonces a cero y se resolverá para sus raíces (o, en este caso, para su raíz).

$$Z(s) = R + sL = L \left(s + \frac{R}{L} \right) \quad (16-22)$$

De donde

$$s_1 = -\frac{R}{L} \quad \text{y} \quad i = K e^{-(R/L)t} \quad (16-23)$$

La raíz s_1 es el valor de s que hace $Z(s) = 0$. La exponencial para i es la corriente natural solamente; si existe cualquier corriente de estado estable es para ser sumada.

En este ejemplo, hemos encontrado la corriente natural (o transitoria) en un circuito partiendo de la impedancia de estado estable, y sin escribir para nada la ecuación diferencial del circuito. El resultado es familiar del Cap. 2, Sec. 5, y no necesita explicación.

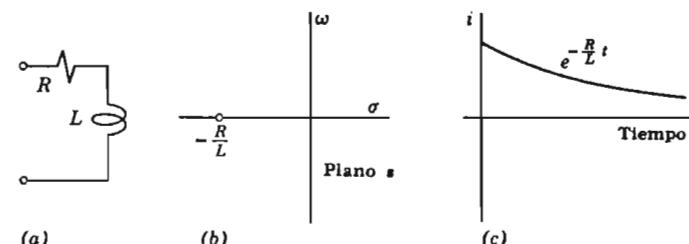


FIG. 16-6. Cero del circuito RL

ción adicional. La localización de una raíz en el plano s se muestra en la Fig. 16-6b, y la forma de la respuesta natural en la Fig. 16-6c. (Compárese también con la Fig. 16-5).

EJEMPLO 2. La Fig. 16-7 muestra un circuito de R y C . La impedancia de estado estable es $R + 1/j\omega C$. Siguiendo el mismo procedimiento

$$Z(s) = R + \frac{1}{sC} = R \left(\frac{s + \frac{1}{RC}}{s} \right) \quad (16-24)$$

La raíz de $Z(s)$ es

$$s_1 = -\frac{1}{RC} \quad (16-25)$$

de la que

$$i = Ke^{-(1/RC)t} \quad (16-26)$$

Aquí, otra vez, la corriente natural se encuentra partiendo de la impedancia de estado estable sin escribir la ecuación diferencial.

La localización de la raíz en el plano s se muestra en la Fig. 16-7b. (Como se indicó en la Fig. 16-5, donde está solamente una raíz que es necesariamente real y negativa, y se encuentra en la mitad del lado izquierdo del eje horizontal en el plano s).

EJEMPLO 3. La impedancia de estado estable $Z(j\omega)$ para el circuito RLC de la Fig. 16-1 es $R + j\omega L + 1/j\omega C$ (Ec. 3-46) por lo que

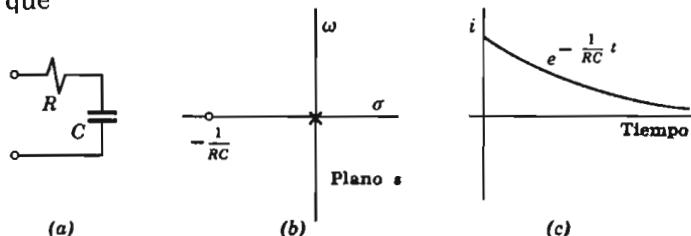


FIG. 16-7. Cero del circuito RC

$$\begin{aligned} Z(s) &= R + sL + \frac{1}{sC} \\ &= L \frac{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}{s} = L \frac{(s - s_1)(s - s_2)}{s} \end{aligned} \quad (16-27)$$

Las raíces de $Z(s)$, s_1 y s_2 , son las mismas que en las Ecs. 16-6 y 16-7, estas raíces están trazadas en las Figs. 16-3 y 16-4 y las formas de onda correspondientes se muestran en la Fig. 16-2. Una vez más la corriente natural ha sido encontrada partiendo de la función de impedancia.

12. Función de impedancia

Las Ecs. 16-22, 16-24 y 16-27 sugieren expresar la impedancia como una función de s . ¿Pero qué clase de cantidad es s ? Se ha utilizado para reemplazar $j\omega$ en $Z(j\omega)$, dando $Z(s)$; ¿es por tanto una clase de frecuencia imaginaria, una frecuencia multiplicada por j ?

Si s está representada por un punto sobre el eje vertical del plano s , es exactamente ~~que~~ es $j\omega$ con ω teniendo su significado usual de frecuencia en radianes. Por otro lado, si s está representada por un punto sobre el eje horizontal del plano s (ver Fig. 16-5), s no es una frecuencia sino una rapidez de decaimiento.

¿Qué es entonces s si no está en ninguno de los ejes, sino localizada en algún punto fortuito en la mitad izquierda del plano s ? s es tanto una frecuencia como una rapidez de decaimiento, s es por tanto un número complejo, y su parte imaginaria es frecuencia mientras que su parte real es rapidez de decaimiento o de amortiguamiento (ver otra vez la Fig. 16-5). Lo que este párrafo dice en palabras está mucho más compactamente expresado por las Ecs. 16-17,

$$s = -\alpha \pm j\omega_n \quad (16-28)$$

junto con la Ec. 16-19 (que relaciona las componentes de s con la corriente),

$$i = A e^{-\alpha t} \sin \omega_n t \quad (16-29)$$

Se recordará que en el trabajo de circuitos no aparece una s compleja única o imaginaria; los valores complejos de s siempre vienen en pares conjugados, y cualquier voltaje o corriente oscilatoria, natural o forzada, está representada por dos puntos en el plano s que son las imágenes de espejo uno de otro como si se reflejaran en el eje horizontal.

La función $Z(s)$ contiene una gran porción de información. Ella caracteriza completamente la red a la que se le aplica; nos dice todo acerca de cómo la red operará en estado estable con un voltaje

de cualquier frecuencia aplicado, y nos dice cuál será la respuesta transitoria o natural para cualquier clase de disturbio.

Considerando el significado de $Z(s)$, y su derivación de $Z(j\omega)$, no deberíamos sorprendernos de que contenga información completa acerca del comportamiento de estado estable. La interpretación gráfica de la función $Z(s)$ en el plano s da algunos resultados extraordinariamente útiles bastante fácilmente y recompensarán un breve estudio.

13. Estudio gráfico de $Z(s)$

La Ec. 16-27 es un ejemplo de una función de impedancia. Se refiere al circuito serie RLC de la Fig. 16-8 y se repite aquí:

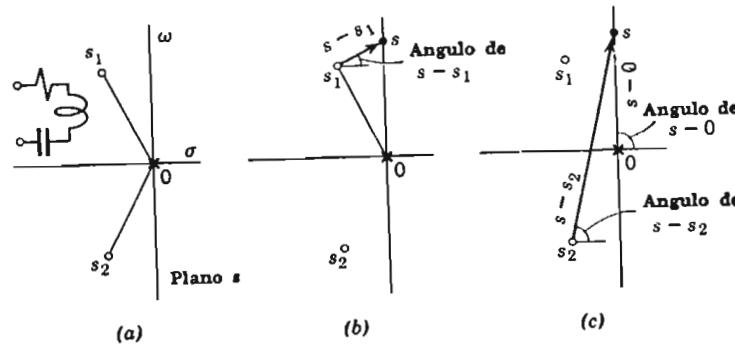


FIG. 16-8. Determinación gráfica de $Z(s)$

$$Z(s) = L \frac{(s - s_1)(s - s_2)}{s} \quad (16-30)$$

Utilizando la terminología de un capítulo previo, $Z(s)$ tiene dos ceros, s_1 y s_2 y tiene un polo en el origen: si s es igual ya sea a s_1 o s_2 , la función $Z(s) = 0$, y si $s = 0$, $Z(s) = \infty$. Estos ceros y este polo se indican en la Fig. 16-8a por los círculos usuales pequeños y una cruz.

Ahora el corazón del método gráfico es que: si s y s_1 son puntos en el plano complejo: $s - s_1$ es la distancia del punto s_1 al punto s . Es más que esto: $s - s_1$ es una cantidad compleja porque tiene magnitud y ángulo en el plano complejo; su magnitud es la longitud de la línea recta de s_1 en el plano complejo y su ángulo es el ángulo de esta línea. La Fig. 16-8b muestra un punto s_1 y otro punto s ; el punto s

se ha escogido sobre el eje vertical por razones que aparecerán posteriormente pero que no afectan la presente discusión. Se ha dibujado una recta de s_1 a s , y por los medios familiares de sumar o sustraer vectores esta recta es $s - s_1$. Su ángulo así como su longitud se muestra en el diagrama.

Por tanto, cada uno de los factores en el numerador de $Z(s)$ tiene una interpretación gráfica. El primero, $(s - s_1)$, está representado por la recta de s_1 a s en la Fig. 16-8b; similarmente $(s - s_2)$ está representado por una recta de s_2 a s en la Fig. 16-8c. El denominador s (o si se prefiere, $s - 0$) está representado por la recta del origen hasta s en la Fig. 16-8c.

Para hacer uso práctico de esta idea, encontremos la impedancia del circuito para un voltaje aplicado de estado estable de frecuencia ω . La impedancia deseada es $Z(j\omega)$. Encontramos $Z(j\omega)$ encontrando $Z(s)$ con s limitada a valores puramente imaginarios. La s imaginaria está representada en el plano complejo por punto sobre el eje vertical, como el punto s en la Fig. 16-8b; de este modo, las frecuencias aplicadas, frecuencias de voltajes o corrientes del estado estable, estarán siempre representadas por puntos sobre el eje vertical del plano s .

La impedancia se encuentra a la frecuencia ω . El punto $s = j\omega$ está marcado sobre el eje vertical del plano s . Refiriéndonos ahora a la Ec. 16-30, $Z(s)$ para el circuito en cuestión es igual a L multiplicada por la recta de s_1 a s , multiplicada por la recta de s_2 a s , y dividida * por la recta de 0 a s . La longitud se puede medir con una escala, el ángulo con un transportador y Z se puede calcular fácilmente; los únicos datos necesarios son los puntos s_1 y s_2 (y el valor de L).

Quizás no es un descubrimiento muy valioso, porque el cálculo de Z para una frecuencia dada se hace más fácilmente por otros medios. Pero si el resultado deseado no es únicamente la impedancia para una cierta frecuencia sino una curva que muestre la manera en la que la impedancia varía con la frecuencia, entonces este método gráfico tiene una simplicidad deliciosa. Consideremos un ejemplo.

14. Impedancia cerca de resonancia

La Fig. 16-9a muestra un circuito serie para el que $Q = 5$. La posición de s_1 en el plano s se muestra; la escala se ha ampliado

* La crudeza de esta explicación puede excusarse por su simplicidad.

tanto que s_2 no aparece pero debe entenderse que está localizada en una posición conjugada. Existe una relación simple entre Q del circuito y la posición de los ceros en el plano s , que puede obtenerse:

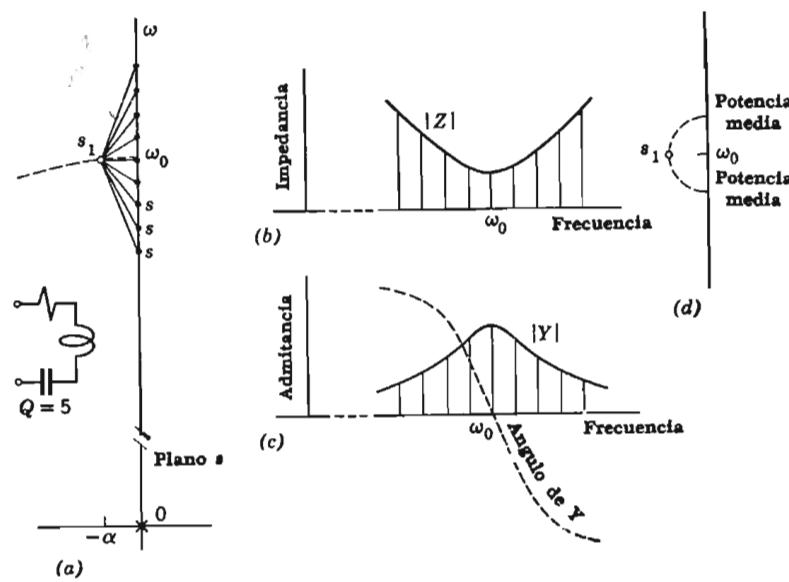


FIG. 16-9. Derivación gráfica de la curva de resonancia. ($Q = 5$)

nerse como sigue. La distancia de s_1 desde el origen es ω_0 (se volverá a repetir que s_1 se encuentra sobre el semicírculo de este radio, como en la Fig. 16-4). La distancia de éste s , desde el eje vertical es α . Pero $\alpha = R/2L$ (Ec. 16-15). La Q de cualquier circuito serie (según Ec. 7-7) es $\omega_0 L/R$. Combinando éstas

$$\frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{1}{2Q} \quad 0 \quad Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} \quad (16-31)$$

Por tanto, si $Q = 5$, como se dio arriba, ω_0 es diez veces α y así se trazó en la Fig. 16-9a.

Un número de puntos sobre el eje ω indica el número de frecuencias para las que la impedancia del circuito deberá determinarse. Cada uno de estos puntos es un valor de s en la Ec. 16-30. Cada una de las rectas mostradas convergiendo en s_1 es un valor de $(s - s_1)$ para utilizar en esa ecuación.

Ahora (ésta es la fuente de la simplicidad del método gráfico) asumimos que el punto de s_2 está suficientemente lejos de s que

$(s - s_2)$ es sustancialmente constante para todos los valores indicados en los puntos y que la distancia del origen es también tan grande que el denominador s es sustancialmente constante.

Dentro de una gama restringida, con s bastante cercano a s_1 , la variación de $Z(s)$ en la Ec. 16-30 es casi por completo debida a la variación del factor $(s - s_1)$. Esta suposición es razonablemente correcta para el circuito dado con una Q de 5, y es aún más exacta para un circuito de Q mayor.

Con esta suposición, la magnitud de la impedancia del circuito es proporcional a la longitud de la recta que conecta al punto s_1 (representando la frecuencia natural del circuito) al punto s (representando la frecuencia aplicada). La Fig. 16-9b muestra estas longitudes trazadas contra las frecuencias correspondientes.

La Fig. 16-9c representa la recíproca de la magnitud de la impedancia, ésta, la magnitud de la admitancia como una función de la frecuencia, es la curva de respuesta familiar de un circuito resonante. Compárese, por ejemplo, con la Fig. 7-4.

Un subproducto útil de este diagrama se muestra en la Fig. 16-9d que es meramente una porción de la Fig. 16-9a con las rectas radiantes omitidas y con un semicírculo añadido. Este pequeño semicírculo corta el eje en los puntos de media potencia, cuyo significado e importancia fueron discutidos en la Sec. 7-9. Para ver que esto es cierto, nótese que la distancia de s_1 a cualquiera de estos puntos es $\sqrt{2}$ veces la distancia de este s_1 al punto sobre el eje en ω_0 ; esto indica que la impedancia a estas frecuencias es mayor que la impedancia en resonancia por $\sqrt{2}$, que es la distinción característica de los puntos de media potencia. Esta es, entonces, la gama de frecuencia entre las extremidades de este semicírculo que algunas veces se llama anchura de banda del circuito resonante.

15. Ángulo de impedancia

Se indicó que tanto el ángulo como la magnitud de la impedancia podrían obtenerse gráficamente. Cuando se encuentra el ángulo de Z de la Fig. 16-9a empezamos con el hecho de que el ángulo de una recta desde cero a cualquier s sobre el eje vertical es 90° , y con la suposición de que el ángulo de una recta desde s_2 a cualquier s está tan cercano a 90° , que la diferencia es insignificante. Esto hace el ángulo de Z igual al ángulo de la recta de s_1 a s . Estos ángulos son evidentes en la Fig. 16-9a; comenzando con un gran valor nega-

tivo (cerca de -70° en la figura) a la frecuencia más baja considerada, el ángulo llega a cero, y entonces llega a valores positivos igualmente grandes (cerca de $+70^\circ$) para la frecuencia más alta indicada.

El ángulo de admitancia es la negativa del ángulo de impedancia y por tanto varía cerca de $+70^\circ$ (a baja frecuencia) hasta -70° (a alta frecuencia). Una curva del ángulo de admitancia está incluido en la Fig. 16-9c, y eso también puede compararse con la Fig. 7-4.

16. Caracterización por polos y ceros

La curva de impedancia de la Fig. 16-9, aunque limitada a una gama estrecha de frecuencias cercanas a la resonancia, es esencialmente la misma que la curva de impedancia de la Fig. 8-21a. Ha sido obtenida un poco diferente y cada punto de vista es valioso; aquí en el presente capítulo se da una visualización fácil del comportamiento cercano a la resonancia mientras que en el capítulo anterior se proveyó un servicio más general.

La Fig. 8-21 fue obtenida modificando ligeramente la curva de reactancia y susceptancia de un circuito de baja pérdida; el efecto de resistencia fue redondear las esquinas sin reducir los polos a máximo finito. La Fig. 16-9 suministra un estudio cuidadoso exactamente de estas regiones redondeadas. Puesto que, para propósitos prácticos, el comportamiento del circuito en resonancia y cerca de ella es de importancia singular, la consideración de polos y ceros en el plano s es una herramienta de ingeniería altamente útil.

Se habrá reconocido que α , la abscisa del punto s , en el plano s , es una medida de la cantidad de redondeamiento de las esquinas y de aproximación de los valores en la Fig. 8-21. Es interesante considerar que α sería cero si el circuito no tuviese resistencia; el punto s_1 caería entonces directamente sobre el eje vertical de la Fig. 16-9a y las curvas de impedancia y admitancia de las Figs. 16-9b y c tendrían las formas ideales mostradas en las Figs. 8-21a y b por curvas de puntos.

Para el caso ideal de circuitos de baja pérdida o puramente reactivos, el trazado de un polo y un cero en el plano s (como en las Figs. 16-8 o 16-9a) reduce el trazado de polos y ceros a lo largo de una línea como en la Fig. 8-20. Los puntos críticos en la Fig. 16-8 o 16-9a se mueven (cuando la pérdida es cero) hasta que están sobre el eje y no hay nada de interés en el resto del plano. El hecho de que el

eje ω se haya dibujado verticalmente en las Figs. 16-8 y 16-9a y horizontalmente en las Figs. 8-16 hasta la 8-21, no tiene por supuesto importancia; todas esas figuras del Cap. 8 pueden considerarse casos especiales del problema general de representar $|Z|$ e $|Y|$ como funciones de s ; casos especiales en los que, debido a $R = 0$, todos los polos y ceros de $Z(s)$ e $Y(s)$ deben caer precisamente sobre el eje imaginario del plano s .

Más aún, una generalización extremadamente importante puede ahora llevarse a cabo a partir del Cap. 8 y aplicarse a la teoría de los circuitos más general que es la materia de este capítulo. En el capítulo anterior, se hizo énfasis de que una red estaba completamente caracterizada (excepto por un factor de escala) por la localización de los polos y ceros en la escala de frecuencia. Esto es, cuando los polos y ceros eran conocidos la función entera de reactancia (o susceptancia) como una función de la frecuencia, podría fácilmente calcularse (excepto por un factor constante de multiplicación). De aquí, todo acerca del comportamiento de los circuitos de baja pérdida bajo consideración podría deducirse. También, desde el punto de vista de diseño los circuitos o redes podrían sintetizarse suministrando polos y ceros en puntos especificados.

En el capítulo presente, aunque los circuitos bajo consideración no son sin pérdida, la misma idea general puede aplicarse en principio. Excepto por un factor de escala, la red está completamente caracterizada por la localización de los polos y ceros en el plano s . Esto es, cuando los polos y ceros son conocidos, puede deducirse todo acerca del comportamiento de la red. Y otra vez, desde el punto de vista del diseño, los circuitos y redes pueden sintetizarse para suministrar polos y ceros en los puntos deseados.

Esta generalización parece plausible. La impedancia de un circuito serie RLC se ha escrito (Ecs. 16-27 y 16-30) como

$$Z(s) = L \frac{(s - s_1)(s - s_2)}{s} \quad (16-32)$$

Hemos usado esta ecuación para cálculo de Z en todas las frecuencias, necesitando no más datos que s_1 y s_2 , la localización de dos ceros en el plano complejo (y el valor de L para dar la escala). También, la manera normal de comportamiento transitorio está determinada de s_1 y s_2 (y un factor de escala) como en la Ec. 16-14. Por lo tanto, s_1 y s_2 dicen esencialmente la historia completa de la respuesta del circuito tanto bajo condiciones estables como transitorias.

Esto es un ejemplo, pero podemos ir más adelante. La función de impedancia de *cualquier* red compuesta de elementos compuestos se encuentra sumando, sustrayendo, multiplicando y dividiendo las impedancias de los elementos individuales y estas operaciones pueden únicamente llevar a una *función racional*. Una función racional es la razón de dos polinomios y (por la teoría fundamental del álgebra) puede siempre expresarse como

$$Z(s) = H \frac{(s - s_1)(s - s_2) \dots}{(s - s_a)(s - s_b) \dots} \quad (16-33)$$

Esta función es conocida completamente (excepto por la constante H) tan pronto como todos los ceros (s_1, s_2, \dots) y todos los polos (s_a, s_b, \dots) se han especificado. Más aún, el cálculo de Z para cualquier frecuencia sería directo y no realmente fácil. La Ec. 16-32 es un ejemplo, una función simple con dos ceros y con un polo en el origen.

Por lo tanto, del conocimiento de que $Z(s)$ debe ser una función racional, se deduce que la respuesta de una red está caracterizada por los polos y ceros en el plano s (y H).

17. La impedancia como una función de s compleja

En la Fig. 16-9a el valor de $Z(s)$ se ha determinado para un número de diferentes valores de s . Los valores resultantes de $|Z|$ se han trazado en la Fig. 16-9b, y sus recíprocas, los valores de $|Y|$ se han trazado en la Fig. 16-9c. Los valores de s para los que se ha hecho esto en la Fig. 16-9 son todos puramente imaginarios, representados por puntos en el eje vertical del plano s , puntos que corresponden a frecuencias de estado estable.

No existe razón matemática para encontrar $Z(s)$ o $Y(s)$ para únicamente s imaginaria. Es perfectamente razonable tomar s en cualquier punto en el plano s , dándonos cualquier valor complejo. Por supuesto, $|Z|$ o $|Y|$ no podrán entonces trazarse como una línea curva arriba del eje de frecuencias. (Fig. 16-9b o c); sería necesario trazar $|Z|$ o $|Y|$ en un espacio tridimensional, como una superficie curvada por encima del plano s .

Vamos a tratar de visualizar esta superficie. Trabajemos con $Y(s)$, en lugar de $Z(s)$, simplemente porque $Y(s)$ genera una superficie que es más fácil de dibujar. Para el circuito de la Fig. 16-9 el circuito serie RLC, $Y(s)$ es

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{L} \frac{s}{(s - s_1)(s - s_2)} \quad (16-34)$$

$Y(s)$ tiene los polos donde $Z(s)$ tiene los ceros y viceversa. La Fig. 16-10a muestra los polos de $Y(s)$ en el plano s . En la Fig. 16-10b el plano s se encuentra por debajo y una superficie curva se ha dibujado por encima de él con una altura de la superficie arriba del plano siempre igual a $|Y|$. No se ha mostrado toda la superficie; parte de ella se ha quitado para evitar que oscurezca las características que deseamos ver.

Las características prominentes, por supuesto, son los dos polos y el cero. Cuando se aproxima a los polos, $|Y|$ crece hacia arriba hasta el infinito. En cualquier lugar la superficie está inclinada, excepto justamente en el origen donde está localizado el cero. Aquí, la superficie tiene una depresión cónica. Una pelota de golf rodaría hasta él y de ahí ya no podría rodar. El drenaje sería pobre porque este es el punto más bajo en el paisaje; aún las llanuras en la distancia, aunque se aproximan a cero nunca lo alcanzan.

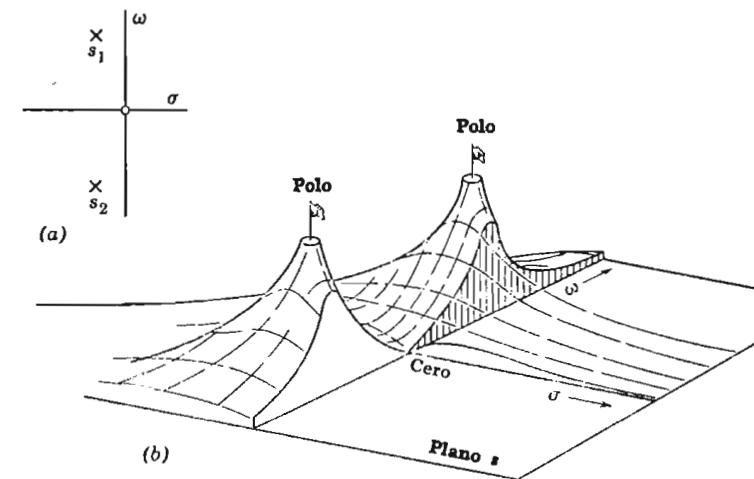


FIG. 16-10. Superficie de $|Y|$, circuito oscilatorio

Un plano vertical que contenga al eje ω corta la superficie en una curva que es la curva $|Y|$ de la Fig. 16-9c. Esta es también la familiar curva de respuesta de un circuito resonante. La curva está duplicada para los tipos gemelos de la Fig. 16-10, pero únicamente la sección del lado derecho es útil, correspondiente a las frecuencias positivas.

La superficie muestra la magnitud de la admitancia para todos los valores complejos de s . La sección transversal al lado del eje ω

muestra la respuesta del circuito para un voltaje aplicado constante en el estado estable. Las posiciones de los polos muestran las posiciones de s para la corriente natural (para los que la admitancia es infinita) especificando a la vez una frecuencia y una razón de declinación. El cero muestra una frecuencia (corriente directa, frecuencia cero, en este circuito) a la que no fluirá ninguna corriente. Es fácil de ver que si los polos se mueven acercándose al eje ω , la resonancia será más aguda; la curva de sección transversal será más alta y pendiente.

Si el circuito serie bajo consideración tuviera resistencias cero, los polos de $Y(s)$ se moverían perpendicularmente hasta el eje ω . La sección transversal o curva de perfil crecería teóricamente hasta el infinito en los polos. Los cambios menores que resultarían a lo largo del resto de la curva se visualizan fácilmente.

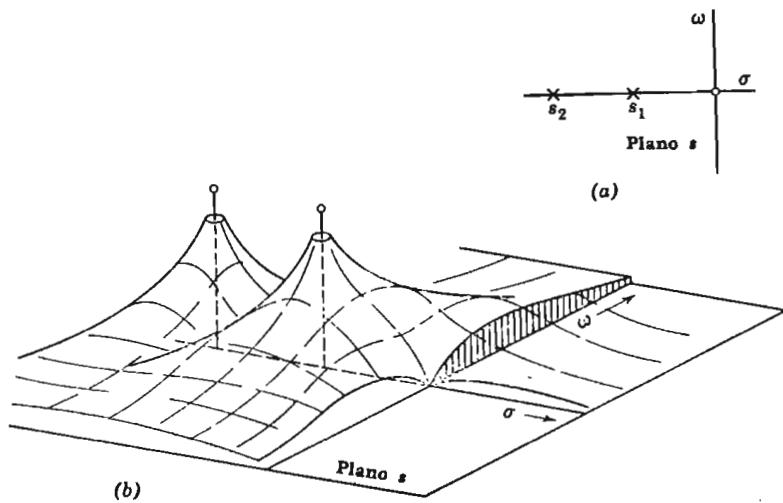


FIG. 16-11. Superficie de $|Y|$, circuito sobreamortiguado

Si, por el otro lado, la resistencia en el circuito se fuese incrementando ~~de modo que~~ los polos se moverían hacia el eje real, mientras que el cero permanecería en el origen. La curva de respuesta de estado estable se haría cada vez más aplastada hasta que la agudeza de la resonancia casi desaparecería. La Fig. 16-11a muestra las posiciones de polos y cero de $Y(s)$ para este circuito sobreamortiguado, y b muestra la geografía de la superficie de $|Y|$. La respuesta de estado estable, como se muestra por el perfil al lado

del eje ω , es cero para frecuencia cero, cero para frecuencia infinita, y más bien poco interesante en cualquier lado.

18. Una analogía

Se puede obtener una idea general de la forma de la superficie $Y(s)$ imaginando una hoja delgada de hule colocada y estirada sobre una gran mesa. Esta superficie de la mesa es el plano s y unas rectas con gis que se cruzan a la mitad de la mesa marcan los ejes real e imaginario. A la hoja de hule se le da ahora la forma de (aproximadamente) la superficie $|Y|$ levantándola en donde hay polos y manteniéndola abajo donde hay ceros. Una tachuela sobre la mesa producirá un cero; un lápiz mantenido derecho entre la mesa y la hoja de hule producirá un polo.

Esta analogía no es exacta. Es cualitativa, no cuantitativa. Indicará dónde la superficie se levanta y dónde se depresiona, pero no indicará exactamente cuánto. Tiene, sin embargo, una gran virtud. La forma de la superficie de hule entera estará completamente determinada por las posiciones de las tachuelas y lápices, y reforzará el concepto de que la función $Y(s)$ completa está enteramente definida por sus polos y ceros. El factor de escala se ha determinado arbitrariamente; es la longitud de los lápices.

Analogías exactas a las hojas de hule o mejor a campos electrostáticos, o a flujo de corriente en tanques electrolíticos, se han inventado con gran ingenio y provecho. La analogía cuando es exacta, no es a la función $Y(s)$ sino a su logaritmo. El estudio de esta materia fascinante se deja para tratados más avanzados. *

19. Ángulo de $Y(s)$

La superficie de las Figs. 16-10 y 16-11, y la hoja de hule análoga muestra la magnitud de Y (o de Z , como puede ser el caso) pero Y (o Z) es una cantidad compleja, y tiene ángulo así como magnitud. Se ha utilizado una superficie arriba del plano s para mostrar la magnitud de la función; otra superficie puede utilizarse para mostrar el ángulo. La curva del ángulo de la Fig. 16-9c puede pensarse que es la sección transversal de dicha superficie. La única afirmación general que necesita hacerse acerca de tal superficie de ángulo, es de que está relacionada a la pendiente transversal de la superficie

* Tuttle, Referencia 26; Pettit, Referencia 27; y otros más.

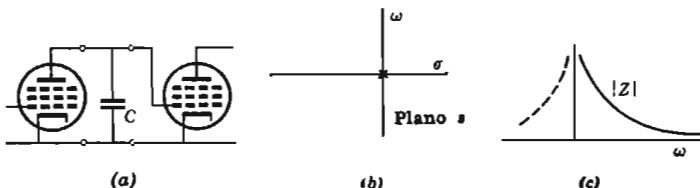


FIG. 16-12. Primer paso en el problema de la red entre etapas

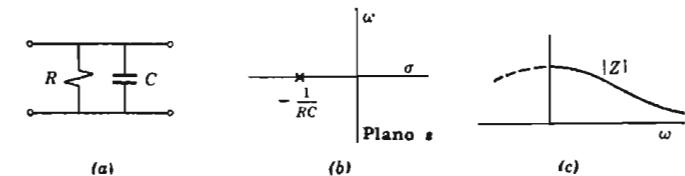


FIG. 16-13. Segundo paso: polo desplazado desde el origen

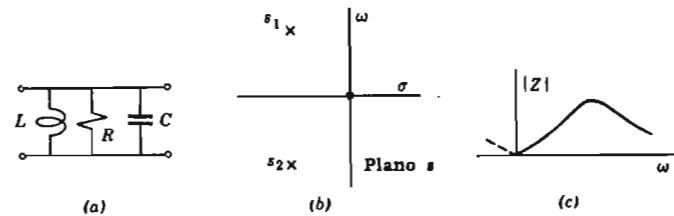


FIG. 16-14. Tercer paso: se forman polos conjugados

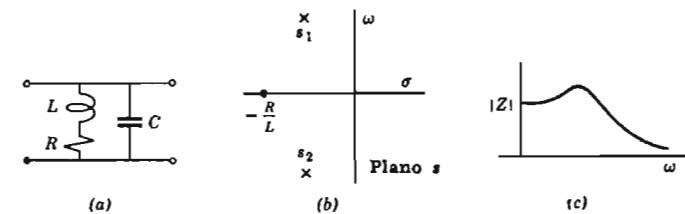


FIG. 16-15. Cuarto paso: cero desplazado desde el origen

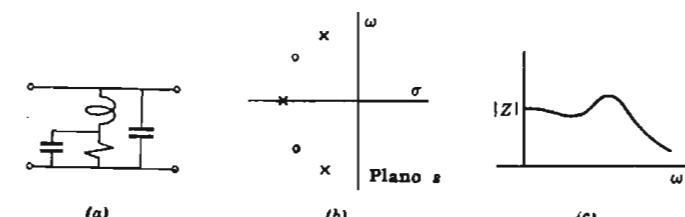


FIG. 16-16. Quinto paso: ceros conjugados y otro polo se ha agregado

|Y|. Se comportará peculiarmente en polos y ceros, pero de una manera muy regular en cualquier lado.

20. Una amplificación: una red entre etapas

Que estos polos y ceros en el plano s tienen un valor práctico real puede demostrarseⁱⁿ un ejemplo. Consideremos la red entre etapas que se utiliza entre dos bulbos de un amplificador. La corriente de placa del primer tubo fluye a través de esta red y el voltaje producido entre las terminales de esta red se aplica a la rejilla de un segundo bulbo. El amplificador particular que vamos a considerar se requiere que dé una amplificación igual aproximadamente para todas las frecuencias de cero hasta un límite superior especificado. La condición necesaria para suministrar amplificación igual es que la *impedancia* entre etapas sea la misma para todas las frecuencias. Nuestro problema, por lo tanto, es diseñar una red para la que Z es razonablemente constante dentro de la banda de frecuencia de cero hasta un límite superior especificado. Más allá de esta frecuencia límite, no importa qué suceda; la impedancia puede variar como guste.

La Fig. 16-12a muestra dos bulbos amplificadores. Una cierta cantidad de capacitancia está asociada inevitablemente con estos bulbos, y esta capacitancia entre electrodos está indicada como C en el diagrama. Esta C se ha dibujado como si fuese parte de una red entre etapas, y además esta es la única forma razonable de ataque del problema. En la Fig. 16-12b no se ha mostrado ningún otro elemento de impedancia entre etapas. Como no existe trayectoria para la componente de corriente continua de corriente de placa, el circuito no puede utilizarse realmente; sin embargo consideremos las propiedades que el circuito tendría si solamente hubiera de considerar una componente de corriente alterna.

CAPACITANCIA ÚNICAMENTE. La impedancia de esta red entre etapas embrionarias es únicamente

$$Z(s) = \frac{1}{sC} \quad (16-35)$$

una función que tiene un polo en el origen, y no tiene ceros. La Fig. 16-12c muestra el polo en el plano s .

Considérese ahora, que una hoja delgada de hule se ha estirado sobre el plano s y levantado por el polo en el origen. Un perfil de la hoja de hule a lo largo del eje ω es una curva que crece hacia el in-

finito en el origen y que tiene una pendiente hasta cero para una frecuencia infinita como se muestra en la Fig. 16-12c. (Una línea no continua en la figura muestra parte de la curva para frecuencias negativas, pero la porción útil va desde la mitad positiva del eje ω).

Es evidente que esta curva de $|Z|$ es altamente indeseable. Nuestro requerimiento único es una impedancia constante y la impedancia suministrada por este elemento capacitivo difícilmente podría ser peor; la dificultad básica es el polo sobre el eje ω del plano s . Claramente un polo sobre el eje ω y una impedancia que es razonablemente constante son incompatibles.

¿Qué podemos hacer para desplazar este polo? Sabemos que un polo en el origen significa impedancia infinita para frecuencia cero. Un condensador tiene impedancia infinita para frecuencia cero, pero una resistencia no la tiene. Pongamos por tanto, una resistencia en paralelo con C en la red entre etapas como en la Fig. 16-13a. Tres comentarios se sugieren por esta adición:

1. Esto moverá ciertamente el polo fuera del eje ω .
2. Puesto que deseamos una impedancia constante para todas las frecuencias, la resistencia es el elemento obvio para utilizar. (Más aún, podríamos obtener nuestro ideal de impedancia constante utilizando una resistencia sola como red de entre etapas, si no fuese por que la C de la capacitancia entre electrodos es imposible de desear).
3. Esta resistencia, suministrando una trayectoria para la componente de corriente continua de la corriente de placa, hacen al circuito amplificador realmente trabajable.

CAPACITANCIA Y RESISTENCIA. Con la adición de la resistencia, la función de la impedancia de la red de entre etapas se convierte en

$$Z(s) = \frac{1}{\frac{1}{R} + sC} = \frac{1}{C} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \quad (16-36)$$

Esta función no tiene cero, y tiene un polo en $s_1 = -1/RC$. Este polo se muestra en la Fig. 16-13b; estando en un punto que es real y negativo, estará sobre la mitad del lado izquierdo del eje σ , el eje de los reales.

Otra vez puede visualizarse una hoja delgada de hule, levantada del plano s por un polo en este punto. Esta vez un plano contenido al eje ω no cortará por el centro a nuestra montaña de hoja de hule

(como en la Fig. 16-12) si no que pasa por un lado y la curva de perfil a lo largo del eje ω es como se muestra en la Fig. 16-13c.

Esto es mejor. El polo de $Z(s)$ estando fuera del eje, produce ahora, únicamente una impedancia finita a frecuencia cero, y para frecuencias más altas la impedancia disminuye, bastante lento. durante un tiempo Sin embargo, la impedancia se va uniendo con el aumento de la frecuencia, y nosotros no deseamos esto. Quizá podría soportarse poniendo un polo debajo de la hoja de hule en cualquier lugar del cuadrante superior del lado izquierdo del plano s (y, por supuesto, su conjugado en el cuadrante inferior del lado izquierdo). Estos polos sugieren circuitos resonantes. La resonancia en nuestra red de entre etapas puede obviamente obtenerse colocando inductancia en el paralelo con los elementos C y R , como en la Fig. 16-14a.

ADICIÓN DE INDUCTANCIA EN PARALELO. La función de impedancia se modifica ahora para incluir esta inductancia en paralelo:

$$Z(s) = \frac{1}{\frac{1}{sL} + \frac{1}{R} + sC} = \frac{1}{C} \frac{s}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \quad (16-37)$$

Esto se puede poner en forma factorizada:

$$Z(s) = \frac{1}{C} \frac{s}{(s - s_1)(s - s_2)} \quad (16-38)$$

con

$$s_1, s_2 = -\frac{1}{2RC} \pm j \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}} \quad (16-39)$$

Hemos producido polos, como se deseaba, en los cuadrantes superior e inferior del lado izquierdo. Estos polos pueden moverse acercándolos al eje vertical, o alejándolos, ajustando la resistencia, y pueden moverse hacia arriba o hacia abajo (con respecto al límite superior prescrito de amplificación uniforme) ajustando la frecuencia de resonancia.

Pero este cambio de circuito ha producido también un cero en el origen. Así la hoja de hule que más o menos representa en forma burda a $Z(s)$ está soportada adecuadamente con polos en lugares apropiados, pero está sujetada con una tachuela a la mesa en el origen. Una sección transversal de la superficie $Z(s)$ a lo largo del eje ω es por tanto, como se muestra en la Fig. 16-14c. Debido al cero en el

origen, parece que esta impedancia característica es peor que la que teníamos previamente en la Fig. 16-13.

Necesitamos quitar ese cero del origen. Ese cero resulta del hecho que la rama inductiva tiene impedancia cero para corriente directa (frecuencia cero). Se encuentra un remedio colocando resistencia en serie en esta inductancia para que la impedancia a frecuencia cero sea entonces igual a la resistencia. Una solución simple es la de colocar la R total de la red de entre etapas, en serie con la inductancia, como en la Fig. 16-15a.

INDUCTANCIA Y RESISTENCIA COLOCADAS EN SERIE. Ahora, la función de impedancia es

$$Z(s) = \frac{1}{\frac{1}{R+sL} + sC} = \frac{1}{C(s-s_1)(s-s_2)} \quad (16-40)$$

$$s_1, s_2 = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (16-41)$$

La observación más importante es que el cero de esta función no está en el origen sino en el punto $-R/L$. Las posiciones del cero y los polos en el plano s pueden ajustarse, pero no independientemente; el arreglo mostrado en la Fig. 16-15b es el más ventajoso. Aquí el cero está a la izquierda de los polos, y consecuentemente cuando una sección de $Z(s)$ se toma a lo largo del eje ω se encuentra que el efecto depresionante del cero sobre la $|Z|$ característica es bastante ligero. La impedancia crece un poco cuando la frecuencia se incrementa desde el cero, pero este aumento no es grande si se logra una impedancia relativamente constante a lo largo de una banda de frecuencia satisfactoriamente ancha. Existe por supuesto, un límite superior para esta banda de impedancia relativamente constante; el límite superior es a una frecuencia un poco más alta que la frecuencia de resonancia de la red de entre etapas. Más allá de esta frecuencia las impedancias caen rápidamente, pero esto no nos incumbe.

Los valores numéricos utilizados para trazar las Figs. 16-15b y c son $L = 2$, $C = 2$, $R = 1$. Con estos valores el cero está en el punto $-\frac{1}{2}$ y los polos están en los puntos $\frac{1}{4}(-1 \pm j\sqrt{3})$. Estos valores numéricos se han escogido obviamente para facilitar el cálculo más que por su posibilidad práctica en henrys, farads, y ohms.

PUENTE CAPACITATIVO. Se añadió una resistencia y a continuación inductancia a la capacitancia original de esta red de entre etapas. Y se requiere una mejoría adicional, la característica de impedancia puede aplanarse aún más añadiendo otro elemento capacitativo. Otro condensador no deberá ser meramente una adición al tamaño de la C presente; porque esto movería los polos existentes pero no introduciría ninguno nuevo. Vamos ahora, a conectarlo a las terminales de la R presente, como en la Fig. 16-16a.

El análisis de la red resultante es sencillo $Z(s)$ se encuentra que es una función racional con un numerador cuadrático y un denominador cúbico. Los ceros de la función se encuentran fácilmente utilizando la fórmula familiar para factorizar el numerador cuadrático. Los polos se determinan factorizando el denominador cúbico y esto requiere encontrar las raíces de la ecuación cúbica. La mejor forma de ataque, si es posible, es la de introducir valores numéricos por las constantes del circuito y a continuación encontrar una raíz real (por lo menos una debe ser real) por tanteo. Cuando se ha encontrado esta s_1 el factor $(s - s_1)$ puede sacarse como factor del denominador cúbico, dejando una cuadrática que puede factorizarse por fórmula. Cuando se encuentran los polos y ceros como en la Fig. 16-16b, no es difícil visualizar la superficie $|Z|$ y reconocer que la característica de impedancia tendrá la forma de la Fig. 16-16c. Los ajustes finales de los valores numéricos para obtener un aplanamiento óptimo, sin embargo, pueden dar bastante trabajo hasta que puedan utilizarse métodos más poderosos de aproximación para la síntesis de redes.

21. Cambio de escala

Estos ejemplos numéricos de diseño de redes hacen énfasis en el valor de esa técnica que es más a menudo requerida en síntesis que en análisis. Esta es la técnica de escala que permite diseñar un sistema con las características correctas pero de un tamaño erróneo y a continuación cambiar todas las dimensiones para adquirir el tamaño apropiado sin perder las características deseadas. Este método es más bien análogo a experimentar con una presa modelo y entonces, después de que el modelo de laboratorio se ha encontrado que tiene un comportamiento correcto, se incrementan las dimensiones en la proporción adecuada para suministrar el diseño de una estructura de tamaño completo.

Así, la red de la Fig. 16-15 tiene una forma satisfactoria de característica de impedancia con los valores de elementos de $L = 2$, $C = 2$, $R = 1$, pero cambiaría por completo si la magnitud de la impedancia o del límite superior de frecuencia útil se cambiara para adaptarse. Más aún, las constantes del circuito y particularmente la capacitancia de 2 farads son imprácticas. Sin embargo, una vez que se ha encontrado una forma aceptable de impedancia característica, todas estas cosas pueden ajustarse cambiando la escala.

Es deseable cambiar, tanto la escala de impedancia como la escala de frecuencia. Consideremos primero un *cambio de la escala de impedancia*.

Las tres clases de elementos del circuito tienen impedancias R , sL , y $1/sC$ y todas las impedancias de la red son combinaciones lineales de estas tres. Por tanto, si cada R , cada L y cada $(1/C)$ se multiplican por una misma constante, el efecto será el de multiplicar la función de impedancia total $Z(s)$ por ésta constante. Especifiquemos entonces, que cada R y L de una red se multiplicará por m y cada C se dividirá entre m ; esto multiplicará la impedancia de la red para cada frecuencia por m , y la impedancia se cambiará de $Z(s)$ a $mZ(s)$.

Como un ejemplo, si cada R cada L y cada $1/C$ en las Ecs. 16-40 y 41 se multiplica por 2, la $Z(s)$ resultante, será dos veces mayor que la actual, pero la función permanecerá sin cambiar.

Los polos y ceros no cambiarán. Nada se ha cambiado excepto que la escala vertical de la Fig. 16-15c se ha multiplicado por 2.

Si por otro lado, se desea *cambiar la escala de frecuencia* por un factor n , el razonamiento es como sigue. Las impedancias de los elementos son R , $j\omega L$ y $1/j\omega C$. Multipliquemos la frecuencia por n mientras que todos los valores de L y C se dividen entre n y los valores de R permanecen sin cambiar; las impedancias de todos los elementos son entonces las mismas que antes. Después del cambio, cada elemento tiene la misma impedancia a la frecuencia $n\omega$ que la que tenía previamente para la frecuencia ω .

Puesto que ω es una componente de s , multiplicando s por n resulta lo mismo que si se multiplicara la frecuencia por n . Especifiquemos entonces, que s se multiplica por n (este es el cambio deseado de escala de frecuencia); la impedancia de cualquier circuito permanecerá sin cambiar si cada L y C se divide entre n mientras que la frecuencia se multiplica por n .

Como un ejemplo, si cada L y cada C en la Ec. 16-41 se divide entre 2, tanto las componentes real como imaginaria de s_1 y s_2 se

harán el doble de grandes y esto corresponde a duplicar la escala del plano s . En la Ec. 16-40, si s se duplica, y s_1 y s_2 se duplican y L y C se dividen entre 2, la impedancia calculada no cambia. Los mismos valores de impedancia aparecen, pero al doble de la frecuencia.

Estos cambios de escala pueden sumarizarse en notación funcional como sigue. La impedancia es una función (como en la Ec. 16-40) de R , L , C y s . En el cambio de escala de impedancia,

$$Z\left(mR, mL, \frac{C}{m}, s\right) = mZ(R, L, C, s) \quad (16-42)$$

En el cambio de escala de frecuencia,

$$Z\left(R, \frac{L}{n}, \frac{C}{n}, ns\right) = Z(R, L, C, s) \quad (16-43)$$

Combinada en una sola relación:

$$Z\left(mR, \frac{m}{n}L, \frac{C}{mn}, ns\right) = mZ(R, L, C, s) \quad (16-44)$$

22. Ejemplo

Utilizemos estos métodos para cambiar la escala de la red de la Fig. 16-15. Como se muestra, el límite superior de impedancia constante no está mucho más allá de ω_0 y con los valores numéricos dados para los elementos $\omega_0 = 0.5$ radianes por segundo. El nivel de impedancia a lo largo de la banda de transmisión libre se aproxima al valor de corriente continua de $Z(0) = 1.0$ ohms.

Para hacer esta red útil, los elementos se cambiarán para hacer $\omega_0 = 50\,000$ radianes por segundo (cerca de 8 000 ciclos por segundo) y el nivel de impedancia se elevará para ser $Z(0) = 100$ ohms.

La escala de frecuencia se cambiará por tanto, por un factor $n = 10^5$ y la impedancia por $m = 10^2$.

Esto puede hacerse en dos pasos, o puede hacerse todo en uno sólo. Efectuemos el último método que es más simple. Utilizando la Ec. 16-43, cambiamos R a mR , L a $(m/n)L$ y C a C/mn . Los valores alterados, indicados por prima son

$$R' = mR = 100R = 100 \text{ ohms}$$

$$L' = \frac{m}{n} L = 10^{-3} L = 2 \cdot 10^{-3} \text{ henrys o } 2 \text{ milihenrys}$$

$$C' = \frac{C}{mn} = 10^{-7} C = 0.2 \cdot 10^{-6} \text{ farads o } 0.2 \text{ microfarads}$$

Con estos valores para los elementos (que, a propósito, tienen tamaño práctico y pueden compararse o hacerse) la red de entre etapas tendrá una impedancia que está razonablemente cerca de 100 ohms a lo largo de la banda de frecuencia de cero hasta cerca de 8 000 ciclos.

23. Sumario

Este capítulo puede parecer que está divagando lejos de su principio con el asunto de componentes forzada y natural de corriente hasta su conclusión con un problema de diseño de redes. Sin embargo, existe un método en él; la idea común es la *función de impedancia*.

Las primeras páginas del capítulo cubren la *solución clásica* de la ecuación diferencial de un circuito, cuya base se encuentra en el Cap. 2. La cantidad algebraica s aparece en la solución clásica. La consideración de las dos formas de respuesta, oscilatoria y amortiguada nos llevan a la discusión de las *raíces de la función de impedancia* como puntos en el plano complejo s .

A continuación aparece que la información acerca de la impedancia de estado estacionario se presenta de una manera gráfica particular con un *trazo de los polos y ceros* de $Z(s)$ en el plano s . Se obtiene un nuevo aspecto del fenómeno de resonancia.

Se muestra que la función de impedancia $Z(s)$ puede encontrarse si sólo se conocen sus polos y ceros (y un factor de escala).

$|Z|$ se traza como una superficie tridimensional arriba del plano s y se ayuda a su visualización sugiriendo una analogía con una hoja de hule.

La ayuda para análisis o síntesis que resulta de la visualización de Z como una superficie por encima del plano s se explora por una serie de ejemplos. Los polos y ceros se suman, mueven o eliminan. En una sección final (casi un apéndice) se presenta la técnica del cambio de escala.

Quizá la mayor contribución de este capítulo es demostrar la función de impedancia como un concepto unificante que caracteriza,

tanto las respuestas natural como de estado estable. Las componentes naturales y de estado estable son ambas soluciones de la misma ecuación integrodiferencial, y la función de impedancia es una transformación de esta ecuación integrodiferencial.

El asunto de *transformación* se continuará en el siguiente capítulo. El presente capítulo comenzó con un estudio del fenómeno transitorio que ha fortalecido notoriamente nuestra comprensión del estado estable. En el siguiente capítulo, las técnicas de estado estable nos darán un medio poderoso de resolver los problemas transitorios.

PROBLEMAS

1. Mostrar por sustitución que i de la Ec. 16-9 es una solución de la ecuación diferencial 16-3. § 3

2. Encontrar por sustitución si la i de la Ec. 16-9 es o no una solución de la ecuación de circuito 16-1. Explicar por qué es o no lo es. § 3

✓ 3. En el circuito de la Fig. 16-1, $L = 10$ milihenrys, $C = 3.5$ microfarads, y $R = 75$ ohms. Hasta qué $t = 0$ el interruptor está abierto y el condensador descargado. Después que $t = 0$ el interruptor está cerrado y la fuente tiene un voltaje constante de 5.0 volts (corriente continua). Utilizando las cuatro reglas de la Sec. 16-2, encontrar la corriente del circuito como una función de tiempo, y trazarla. § 6

✓ 4. En el circuito de la Fig. 16-1, $L = 0.30$ milihenrys, $C = 0.0012$ microfarads, y $R = 75$ ohms. El interruptor está cerrado en $t = 0$. No existe carga inicial en el condensador. El voltaje de la fuente es constante en 1.0 volt (corriente continua). Encontrar la corriente en el circuito como una función de tiempo y trazarla para mostrar tres o cuatro ciclos. § 6

✓ 5. Para el circuito del Prob. 3, trazar s_1 y s_2 como puntos en el plano complejo s . Trazar también los valores de s_1 y s_2 si la resistencia del circuito se cambia a (a) 100 ohms, (b) 150 ohms, (c) 25 ohms. § 8

6. Para el circuito del Prob. 4, trazar s_1 y s_2 como puntos en el plano complejo s . Trazar también valores de s_1 y s_2 si la resistencia

del circuito se incrementa hasta (a) 500 ohms, (b) 1 000 ohms, (c) 2 000 ohms.

§ 8

7. Para el circuito serie RLC, demostrar que $s_1 s_2 = \omega_0^2$, como se estableció en la Ec. 16-21.

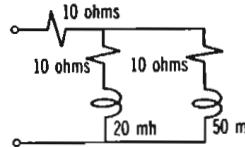
§ 8

8. Se estableció en la Sec. 11 que cuando la función de impedancia tiene solamente una raíz "es necesariamente real y negativa". Explicar por qué es necesariamente real.

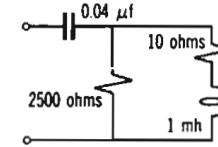
§ 11

9. Escribir $Z(s)$ para la red mostrada. (a) Encontrar las raíces de $Z(s)$ y trazarlas en el plano s . (b) Escribir una expresión para la corriente *natural* en esta red, dejando los coeficientes K sin determinar. (c) ¿Qué datos necesitaría para determinar los coeficientes?

§ 11



Prob. 9



Prob. 10

10. Escribir $Z(s)$ para la red mostrada. (a) Encontrar las raíces de $Z(s)$ y trazarlas en el plano s . (b) Escribir una expresión para la corriente *natural* en esta red, dejando los coeficientes sin determinar. ¿Qué datos se requerirían para determinar los coeficientes? § 11

11. Trazar una curva para la admittance de entrada como una función de la frecuencia (cercana a la resonancia) para el circuito del Prob. 10; ésta se parecerá a la Fig. 16-9c. Trazar, tanto la magnitud como el ángulo de Y . Suponer, como en la Sec. 16-14, que solamente un factor lineal, $s - s_1$ varía apreciablemente cuando la frecuencia varía cerca de la resonancia.

§ 15

12. Definiendo Q en funciones de desintonización hasta los puntos de media potencia, como en el Cap. 7. ¿Cuál es la Q del circuito del Prob. 10 como se observaría en las terminales de entrada? Dibujar en el plano s , el semicírculo que localiza las frecuencias de media potencia.

§ 15

13. Un circuito con una función de impedancia de la forma

$$Z(s) = H \frac{(s - s_1)(s - s_2)}{(s - s_a)}$$

se va a diseñar. (a) Indicar el polo y ceros en el plano s . (b) Proyectar un circuito que tenga tal polo y ceros. (c) Escribir la función de impedancia para el circuito y resolver para s_1 , s_2 y s_a en términos de los R , L y C que haya usted decidido usar.

Nota: Como la mayoría de los problemas de diseño, éste tiene más de una respuesta posible.

§ 16

14. Repetir el Prob. 13, partes (a) y (b) para encontrar un circuito con una función de impedancia de la forma

$$Z(s) = H \frac{(s - s_1)}{(s - s_a)}$$

en la parte (c), resolver para s_1 y s_a .

§ 16

15. Bosqueje una superficie como en las Figs. 16-10 y 11, para mostrar $|Y(s)|$ para el circuito de la Ec. 16-22. Indicar la parte de este dibujo que muestra $|Y(j\omega)|$.

§ 18

16. Bosquejar una superficie para mostrar $|Y(s)|$ para el circuito de la Ec. 16-24. Indicar la curva en este dibujo que muestra $|Y(j\omega)|$.

§ 18

17. La Fig. 16-15c muestra la impedancia de una red de entre etapas. Del diagrama del circuito y los valores numéricos de los elementos dados en la Sec. 16-20, calcular y trazar esta curva de impedancia.

§ 20

✓ 18. En la Fig. 16-16a, $R = 1$, $L = 2$, cada $C = 2$. Calcular y trazar los ceros y polos de $Z(s)$.

§ 20

✓ 19. (a) En el circuito del Prob. 18, se desea tener una impedancia dos veces mayor para cada frecuencia. ¿Qué valores de los elementos del circuito darán ese resultado. (b) Se desea entonces, tener un circuito con estos nuevos rangos de impedancia, pero con cada valor de impedancia ocurriendo para cinco veces la frecuencia. ¿Qué valores de elementos de circuito darán éste resultado?

§ 22

20. En el circuito del Prob. 10, se desea retener la misma forma de la función de impedancia, pero tener la mitad de impedancia para tres veces la frecuencia. ¿Qué valores de elementos del circuito dan este resultado? ¿Tendrá la nueva red la misma Q ? Explique.

§ 22

17

La Transformación de Laplace

1. Componentes de Fourier y Laplace

El método de transformación de Laplace convierte los problemas transitorios en problemas de estado. Analiza el voltaje en sus componentes de estado, divide por la impedancia para encontrar las componentes de corriente, y a continuación suma las componentes de corriente para obtener la corriente total. La semejanza con el método de la integral de Fourier es evidente.

Un disturbio transitorio resulta cuando el voltaje es aplicado bruscamente a un circuito. La Fig. 17-1a muestra un circuito simple contenido en un interruptor. El interruptor se opera para introducir el voltaje impulsor V en el circuito por 1 segundo. El pulso resultante de voltaje se muestra en la Fig. 17-1b.

Este pulso de voltaje de 1 segundo puede analizarse en componentes que conocemos. Este pulso único es un tipo al cual fue aplicada la transformación por integral de Fourier. Más aún, la Ec. 15-45 es el análisis de un pulso tal como éste (aunque con un tiempo de referencia diferente; ver Prob. 14 del Cap. 15).

La transformación por integral de Fourier analiza el pulso de la Fig. 17-1b en las componentes de todas las diferentes frecuencias (con un espectro similar al de la Fig. 15-7b). Durante el intervalo de $t = 0$ a $t = 1$, las componentes Fourier se suman para dar V . Durante todo el tiempo antes de $t = 0$ y durante todo el tiempo después de $t = 1$, estas componentes suman cero.

Esto es extraño quizás, pero es familiar. La integral de Fourier es

meramente el caso límite de la serie de Fourier. Una vez que se reconoció que el pulso puede analizarse en componentes de muchas frecuencias y que estas componentes existen todo el tiempo, sumando cero cuando el voltaje es cero y sumando V cuando el voltaje es V, hemos superado la mayor dificultad en el concepto tanto de la transformación de Fourier como la de Laplace.

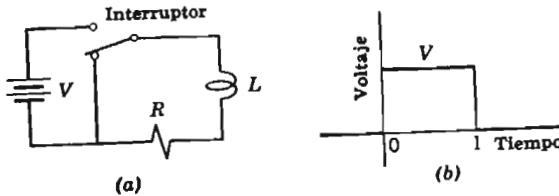


FIG. 17-1. Un pulso que puede analizarse por la integral de Fourier

Sin duda, esto es difícil de visualizar. Sin embargo, es únicamente un paso más difícil que la visualización de una serie de Fourier; la dificultad adicional resulta del hecho de que las componentes dadas por la integral de Fourier tienen *todas* las frecuencias y cada componente individual es de tamaño infinitesimal. Por tanto, un voltaje o corriente finito resulta de tomar una infinidad de componentes infinitesimales. Esta idea, sin embargo, es suficientemente familiar; es el concepto usual de la integral definida.

2. La transformación de Laplace

Ha llegado el momento de hablar más precisamente de la diferencia entre la transformación de Fourier y la transformación de Laplace. La diferencia es simplemente ésta: debido a un hábil truco Laplace. La diferencia es simplemente ésta: debido a un hábil truco Laplace. La transformación de Laplace puede utilizarse para matemáticamente analizar funciones de tiempo (como la función de escalón de la Fig. 17-2) que continúan indefinidamente y esto no lo puede hacer el análisis por integral de Fourier. El truco requiere el uso de la variable de frecuencia compleja de s (de la que empezamos a tener conocimiento en el Cap. 16) en lugar de $j\omega$.

El análisis por integral de Fourier se escribió en función de $j\omega$ (Ec. 15-43) como

$$g(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (17-1)$$

Se recordará que $g(j\omega)$ es el “espectro”, el análisis de la función de tiempo $f(t)$. Para obtener el análisis de Laplace hacemos dos cambios, uno esencial y otro incidental. El esencial es el de escribir s

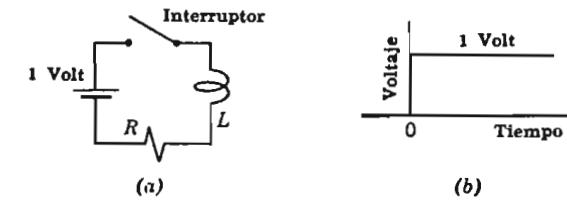


FIG. 17-2. Función de escalón que puede analizarse por la integral de Laplace pero no por la integral de Fourier

en lugar de $j\omega$. Esto da $g(s)$ en vez de $g(j\omega)$ como el espectro. El cambio incidental es el de multiplicar cada miembro de la ecuación por 2π y haciendo $2\pi g(s) = F(s)$. Con estos cambios, *

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (17-2)$$

La Ec. 17-2 es casi la transformación de Laplace, pero si conocemos que la función de tiempo especificada $f(t)$ será siempre cero mientras $t = 0$, ahorraremos un poco de trabajo. Si $f(t) = 0$ durante todo el tiempo negativo, la integral es la misma tanto si el límite inferior es $-\infty$ o 0; la integración $-\infty$ a 0 no contribuye en nada para el integrando porque es cero. Así, la forma usual de la transformación de Laplace se escribe

$$\boxed{F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt} \quad (17-3)$$

con la condición adicional de que $f(t) = 0$ mientras $t = 0$. Físicamente eso significa que $t = 0$ es el tiempo de referencia en el que el interruptor se cierra, se aplica un voltaje o cualquier otra perturbación para el sistema que tiene lugar.

* La diferencia esencial entre el análisis de Fourier (Ec. 17-1) y el análisis de Laplace (Ec. 17-3) es el uso de $s = \sigma + j\omega$ en la última en lugar de $j\omega$ en la primera. Si σ es cero, $s = j\omega$, y son iguales. ¿Qué es, entonces, σ ? Todo lo que necesitamos decir al momento es que σ es una constante que usualmente es tan pequeña como se deseé. Puede aproximarse a cero y algunas veces es igual a cero. Puesto que estamos comenzando a conocer el análisis de Laplace, por lo tanto, pensemos en s como que significa prácticamente lo mismo que $j\omega$; el refinamiento de este concepto podemos dejarlo para que nos moleste posteriormente.

3. Un ejemplo

Sea una batería de voltaje constante de 1 volt aplicada a L y R en serie, como en la Fig. 17-2, cerrando un interruptor en $t = 0$. Encontrar la corriente.

Primero analizamos el voltaje aplicado en sus componentes estables. La Ec. 17-3 se utiliza con el voltaje (como en la Fig. 17-3a), descrito por $f(t) = 1$. El resultado es

$$\text{Por 1. } F(s) = \int_0^\infty (1)e^{-st} dt = -\frac{1}{s}(0 - 1) = \frac{1}{s} \quad (17-4)$$

Por tanto $1/s$ es la transformada de la función de escalón del voltaje; el espectro se trazó en la Fig. 17-3c. La función de escalón tiene

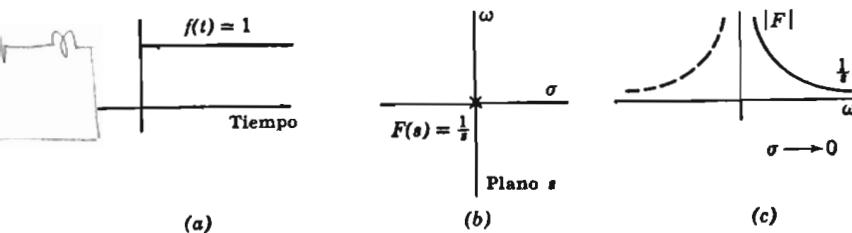


FIG. 17-3. Función de escalón y su transformada; (b) muestra el polo de la transformada y (c) su perfil a lo largo del eje ω . Par 1

componentes de todas las frecuencias, con las frecuencias bajas relativamente grandes y las altas frecuencias pequeñas, siendo la amplitud inversamente proporcional a la frecuencia.*

La función de impedancia del circuito se debe escribir a continuación:

$$Z(j\omega) = R + j\omega L \quad \text{or} \quad Z(s) = R + Ls \quad (17-5)$$

El tercer paso en la solución es el de dividir la transformada de voltaje entre la función de impedancia para obtener la transformada de corriente. Para evitar confusión, de aquí en adelante utilizaremos el símbolo $V(s)$ para la transformada del voltaje [en lugar de $F(s)$], e $I(s)$ para la transformada de corriente. Por tanto

* Esta interpretación resulta de hacer s en la Ec. 17-4 igual a $\sigma + j\omega$, y haciendo después que σ se aproxime a cero. El polo en el origen previene de hacer $s = j\omega$, porque sería incómodo tratar con una componente infinita a la frecuencia cero. La transformación de Laplace evita el polo (lo que no hace la transformación de Fourier) dándole a σ algún valor positivo, pequeño sin embargo.

$$\begin{aligned} V(s) &= \frac{1}{s} \\ I(s) &= \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{\frac{1}{s}}{R + Ls} = \frac{1}{Ls(s + R/L)} \end{aligned} \quad (17-6)$$

Entonces hemos encontrado el espectro de la corriente, la transformada de la función tiempo de la corriente. Como en los problemas de circuitos trabajados por medio de la serie de Fourier (y aún en los problemas de circuitos utilizando números complejos para representar una frecuencia única de estado estable), el paso final de la solución es obtener la función tiempo real de la corriente. Conocemos el espectro de la corriente; ¿cómo podemos encontrar la corriente total real misma? Consideremos cómo se hizo esto antes.

En la Sec. 15-4 una serie de Fourier fue aplicada a un problema de circuito. La solución fue estrictamente análoga al ejemplo presente de análisis de Laplace y nos llevó a un espectro para la corriente en la Ec. 15-34. Para encontrar la función tiempo representada por el espectro de la Ec. 15-34, revisamos trabajos previos y felizmente encontramos un análisis de una función tiempo (triangular, como sucedió) que dio exactamente el espectro de la Ec. 15-34. Fuimos por tanto, capaces de decir que la función tiempo triangular era la solución que andábamos buscando.

Este ejemplo suministra la mejor sugerición,* para tratar con la Ec. 17-6. Guiados por este ejemplo, tratemos de encontrar alguna función tiempo que pueda introducirse como $f(t)$ en la Ec. 17-3, la transformación de Laplace para producir como $F(s)$ el miembro final de la Ec. 17-6. ¿Qué función de tiempo tiene como su transformada de Laplace una función de s de la forma $1/s(s + \alpha)$?

Esta es la pregunta correcta por hacerse, pero a ésta no tenemos al presente respuesta. No hemos tenido experiencia con la transfor-

* En la Sección 15-8 fue aplicado el método de la integral de Fourier. Fue utilizada la integral sintetizante de la Ec. 15-44 (como en la Ec. 15-46) para encontrar una función partiendo de su espectro. ¿Hay una integral sintetizante semejante para el método de Laplace?

Si hay. Se ha llamado la transformación inversa de Laplace y puede escribirse

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

Puesto que la evaluación de esta integral, se logra más fácilmente por métodos que incluyen integración de contorno en el plano complejo, que puede no ser familiar, el uso de la transformación inversa de Laplace no se intentará aquí. Una simple discusión ha sido dada por el autor en la Referencia 6, Sección 20, Cap. 10.

mación de Laplace que pudiera suministrarnos resultados en qué basarnos. Esta falla sin embargo, puede remediararse. Transformemos un número de funciones tiempo que parecen útiles por medio de la Ec. 17-3, tabulando los resultados como los obtengamos, con lo que tendremos un conjunto de funciones de s que pueden servirnos como soluciones para los problemas de circuitos.

4. Transformación de funciones

PAR 2. Los ejemplos de los Caps. 2 y 16 sugieren que la función exponencial tiempo es probable que aparezca en las soluciones de ecuaciones de circuitos. Apliquemos la transformación de Laplace para analizar $e^{-\alpha t}$. Esta función tiempo exponencial se sustituye por $f(t)$ en la Ec. 17-3 dando

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s+\alpha)t} dt = \frac{1}{s+\alpha} \quad (17-7)$$

La Fig. 17-4a muestra la función exponencial de tiempo. El espectro mostrado en la Fig. 17-4c se ha obtenido de la transformada $1/(s + \alpha)$ haciendo $s = j\omega$. La Fig. 17-4b es un diagrama de polos

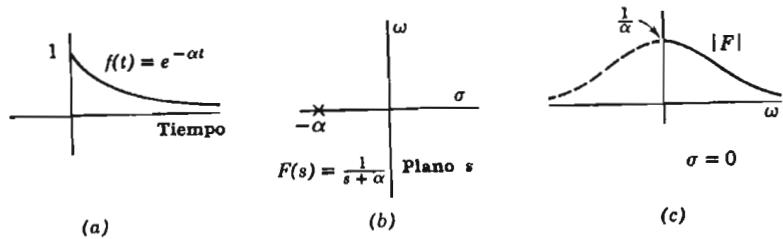


FIG. 17-4. Función exponencial y su transformada. Par 2

y ceros de $F(s)$ en el plano s ; la Fig. 17-4c es un diagrama de $|F|$ como una función de ω . La última, se ha visualizado como un contorno a lo largo del eje ω de la superficie sobre el plano s , una superficie que representa la magnitud de $F(s)$ para todos los valores complejos de s . La similitud a los diagramas en el Cap. 16 es obvia.

Como en el capítulo previo, podemos visualizar una superficie sobre el plano s (una hoja de hule, si el hacerla tangible excusa lo burdo) levantándose hacia el infinito en un polo. Esto es fácil de imaginar en la Fig. 17-4b y sugiere la forma de la curva de contorno

de la Fig. 17-4c. Cuantitativamente, la curva puede encontrarse por el método gráfico del capítulo previo; puesto que la magnitud de F es igual a la magnitud de $1/(s + \alpha)$, es inversamente proporcional a la distancia en el plano s desde el polo en $-\alpha$ hasta cualquier punto $s = j\omega$ sobre el eje vertical. (Se aplica la discusión de la Fig. 16-8).

En la Ec. 17-7 se ha encontrado la transformada de e^{-at} . Esta no es la solución del problema de la Sec. 3; no se iguala a la transformada de corriente de la Ec. 17-6. Puede, sin embargo, ser útil en algún problema posterior, y no deberá olvidarse. Más aún, no es muy pronto para empezar a colecciónar pares de transformadas (como se les llama) en una tabla. Aunque tenemos únicamente 2 pares, iniciemos la Tabla 17-1 que se irá extendiendo conforme se encuentren más pares, y entonces podrá servirnos del mismo modo que una tabla de integrales; cuando tenemos una función tiempo y deseamos su espectro, o cuando tenemos un espectro y deseamos su función tiempo, miramos en la tabla para tratar de encontrar una forma similar.

PAR 3. Hasta aquí hemos pretendido que no conocemos la respuesta al problema de la Sec. 3. De hecho, sabemos desde el Cap. 2 que la respuesta es una corriente de la forma general $(1 - e^{-pt})$. Guiados por nuestro conocimiento, introduzcamos esta función tiempo como $f(t)$ en la transformación de Laplace Ec. 17-3:

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty (1 - e^{-pt}) e^{-st} dt = \int_0^\infty [e^{-st} - e^{-(s+p)t}] dt \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+p} = \frac{p}{s(s+p)} \end{aligned} \quad (17-8)$$

El resultado se incluye como par 3 en la Tabla 17-1, con p transpuesta por conveniencia.

Ahora el par 3 es de exactamente la forma de la transformada de corriente en la Ec. 17-6, siempre que $p = R/L$. Por tanto, llegamos finalmente a una solución del problema de la Sec. 3. La Ec. 17-6 da el espectro o transformada de una corriente desconocida como

$$I(s) = \frac{1}{L} \frac{1}{s + R/L} \quad (17-9)$$

y encontramos el par 3, que la función tiempo de la corriente correspondiente a este espectro es

$$i(t) = \frac{1}{L} \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) = \frac{1}{R} (1 - e^{-(R/L)t}) \quad (17-10)$$

TABLA 17-1
PARES DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Par No.	$\sigma(t)$, función de tiempo para $t > 0$ (el voltaje o corriente)	$F(s)$, la transformada de Laplace (el espectro)	Ver Ec.	Ver Fig.
1	t	$\frac{1}{s}$	17-4	17-3
2	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$	17-7	17-4
3	$\frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{s(s + \alpha)}$	17-8	17-5
4	$\frac{1}{s_1 - s_2} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t})$	$\frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)}$	17-11	17-6
5	$t e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s + \alpha)^2}$	17-13	17-7

6	$\frac{1}{\omega_1} (e^{-\alpha t} \sin \omega_1 t)$	$\frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)}$ $s_1, s_2 = -\alpha \pm j\omega_1$	17-16	17-8
7	$\frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 t$	$\frac{1}{(s - i\omega_1)(s + i\omega_1)} = \frac{1}{s^2 + \omega_1^2}$	17-19	17-9
8	$\cos \omega_1 t$	$\frac{j}{(s - i\omega_1)(s + i\omega_1)} = \frac{s}{s^2 + \omega_1^2}$	17-58	
9	$\frac{\sin (\omega_1 t - \theta)}{\omega_1 \sqrt{\alpha^2 + \omega_1^2}}$ donde, $\theta = \tan^{-1} \frac{\omega_1}{\alpha}$	$\frac{1}{(s + \alpha)(s^2 + \omega_1^2)}$		
10	$\frac{1}{s_1 - s_2} (s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t})$	$\frac{s}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)}$	17-57	
11	$e^{s_1 t}$ $+ \frac{e^{s_2 t}}{(s_2 - s_1)(s_1 - s_3)}$ $+ \frac{e^{s_3 t}}{(s_3 - s_1)(s_1 - s_2)}$	$\frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)}$		

$$\mathcal{E}_{z=\alpha t} = -\infty \int_{-\infty}^{\infty} u_j dz$$

$$\frac{s + \alpha}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

La Fig. 17-5 muestra la función tiempo. Su transformada tiene dos polos en el plano s , uno en el origen y otro en $-\alpha$. El espectro se parece al de la función de escalón (Fig. 17-3); son indistinguibles en el extremo de baja frecuencia, pero el contenido en alta frecuencia de la Fig. 17-5 es un poco menor.

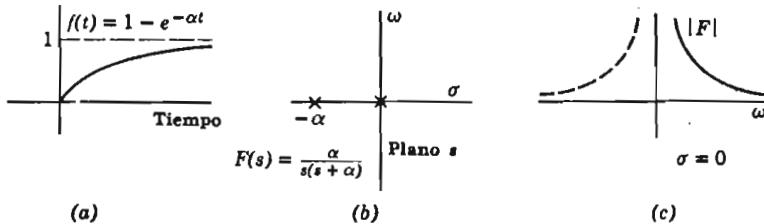


FIG. 17-5. Una función tiempo y su transformada. Par 3

PAR 4. Continuaremos derivando pares de transformadas. Se encontró en el Cap. 16 que la corriente natural en un circuito de R , L y C en serie puede describirse por tres funciones tiempo diferentes. Para el caso de sobreamortiguamiento (R grande), la corriente es de la forma

$$f(t) = e^{s_1 t} - e^{s_2 t}$$

Para analizar ésta con la transformación de Laplace, Ec. 17-3:

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) e^{-st} dt \\ &= \frac{s_1 - s_2}{(s - s_1)(s - s_2)} \end{aligned} \quad (17-11)$$

Si s_1 y s_2 son cantidades reales negativas, como lo son para el circuito en cuestión, la integración no tiene problema si añadimos este análisis a nuestra tabla como par 4.

La Fig. 17-6 muestra la función tiempo, los dos polos en el plano complejo y el espectro.

PAR 5. Una función tiempo que puede proceder del mismo circuito es

$$f(t) = te^{-\alpha t} \quad (17-12)$$

Analizándola con la Ec. 17-3,

$$F(s) = \int_0^\infty (te^{-\alpha t}) e^{-st} dt = \frac{1}{(s + \alpha)^2} \quad (17-13)$$

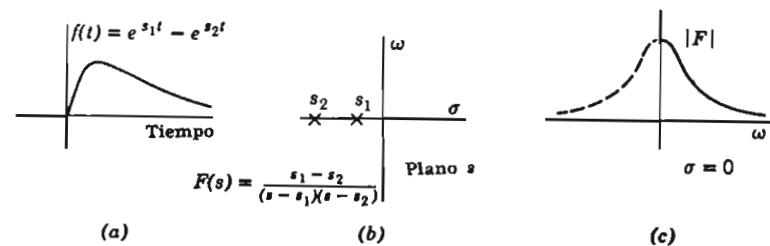


FIG. 17-6. Ondas sobreamortiguadas. Par 4

Esa función tiempo se muestra en la Fig. 17-7a, pero cuando intentamos trazar los polos y ceros de $F(s)$, como en la Fig. 17-7b, nos encontramos con algo nuevo. El denominador de $F(s)$ es $(s + \alpha)^2$. Hay seguramente un polo en $s = -\alpha$, pero es diferente del de la Fig. 17-4 que también tiene un polo en $s = -\alpha$. Debido a que el denominador de la Ec. 17-13 es un cuadrado, decimos del polo que es un polo de segundo orden. Esto realmente significa que estamos tratando con un caso especial de la Fig. 17-6, un caso en el que los dos polos s_1 y s_2 se han juntado y están ahora superpuestos en el mismo punto $-\alpha$. La similitud a la Fig. 16-4b es obvia.

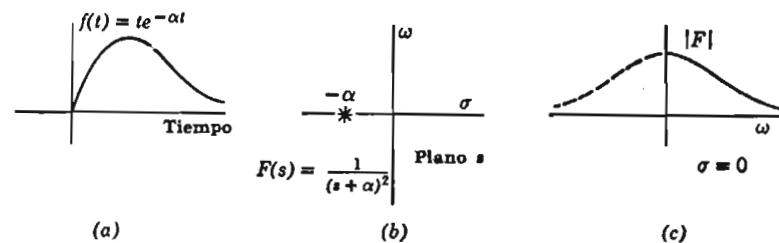


FIG. 17-7. Onda amortiguada críticamente. Par 5

PAR 6. La onda senoidal amortiguada (Fig. 17-8a) que describe la corriente oscilatoria en el circuito RLC es

$$f(t) = e^{-\alpha t} \sin \omega_1 t \quad (17-14)$$

Es interesante, aunque difícilmente inesperado, encontrar que esta función bastante diferente en apariencia de las dos precedentes, se

analiza sin embargo en una transformada íntimamente relacionada:

$$F(s) = \int_0^\infty (e^{-\alpha t} \sin \omega_1 t) e^{-st} dt = \frac{\omega_1}{(s + \alpha)^2 + \omega_1^2} \quad (17-15)$$

Esta es la forma que resulta directamente de la integración, pero los polos de $F(s)$ no aparecen fácilmente en la Ec. 17-15. Desarrollamos por tanto, el término cuadrático y factorizamos el resultado para obtener

$$F(s) = \frac{\omega_1}{(s - s_1)(s - s_2)} \quad (17-16)$$

donde s_1 y s_2 representan

$$s_1 = -\alpha + j\omega_1 \quad s_2 = -\alpha - j\omega_1 \quad (17-17)$$

Esto muestra claramente los polos de $F(s)$. Son un par complejo conjugado, como en la Fig. 17-8b.

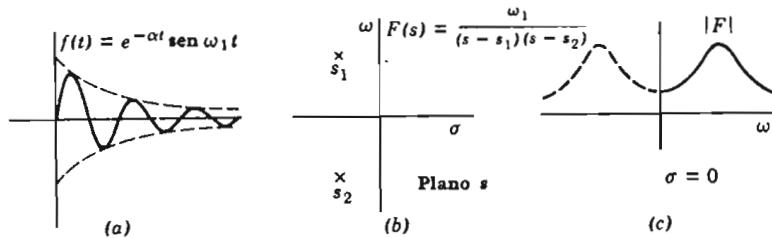


FIG. 17-8. Onda senoidal amortiguada. Par 6

El espectro, Fig. 17-8c, puede visualizarse partiendo de las posiciones de los polos (posiblemente pensando en función de una hoja de hule por encima del plano s). Tendrá claramente un par de jorobas simétricas en los rangos de frecuencia positiva y negativa, donde el eje ω se acerca a los polos; descenderá, pero no hasta cero, en el origen.

PAR 7. El caso límite, la onda senoidal no amortiguada, es

$$f(t) = \sin \omega_1 t \quad (17-18)$$

Como se mostró en la Fig. 17-9a, esta es una onda senoidal *discontinua*, cero hasta $t = 0$ e igual a $\sin \omega_1 t$ de ahí en adelante.*

* Por supuesto, las funciones del tiempo a las que ha sido aplicada la transformación de Laplace (como en la Tabla 17-1) son todas cero hasta $t = 0$, pero es tal vez necesario dar énfasis especial a este hecho cuando se discute una función que se piensa normalmente que es continua.

La transformada puede encontrarse por integración:

$$F(s) = \int_0^\infty (\sin \omega_1 t) e^{-st} dt = \frac{\omega_1}{s^2 + \omega_1^2} = \frac{\omega_1}{(s - j\omega_1)(s + j\omega_1)} \quad (17-19)$$

(No es, de hecho, necesario integrar, porque este resultado se obtiene más fácilmente de la Ec. 17-15 haciendo $\alpha = 0$).

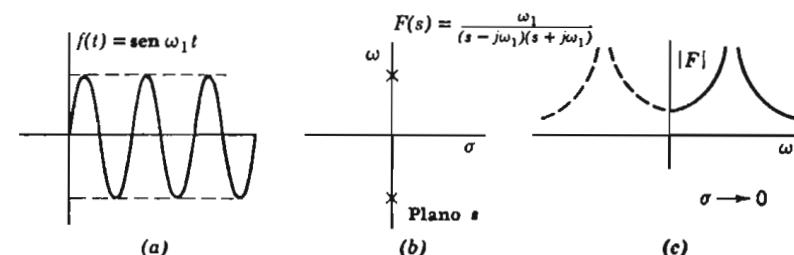


FIG. 17-9. Onda senoidal no amortiguada. Par 7

Los polos de $F(s)$ son esta vez un par imaginario. El espectro por tanto, es como se muestra en la Fig. 17-9c, porque el eje ω del plano s pasa directamente a través de los polos.

5. Tablas de pares de transformadas

Siete pares de transformadas de Laplace simples y útiles se han derivado hasta ahora y relacionado en la Tabla 17-1. Esto da siete funciones del tiempo y sus espectros de frecuencia.

Tal tabla puede continuarse. Más pares pueden calcularse y tabularse casi sin límite. Unos pocos pares adicionales se han añadido a nuestra Tabla 17-1 sin derivación. Existen tablas que enlistan, página tras página de pares de transformadas, tantas como tablas de integrales se han publicado para fácil referencia. *

6. Ejemplo de circuito

Encontremos la corriente resultante de una aplicación repentina del voltaje de una batería a un circuito de R y C en serie como en la

* Ver, por ejemplo, Gardner y Barnes, Referencia 18. La referencia clásica para las tablas es Campbell y Foster, Referencia 28.

Fig. 17-10. La solución se intentará utilizando los pares de transformadas de Laplace de la Tabla 17-1.

Se recordará que la solución se efectúa en tres pasos. (1) Encontrar la transformada (el espectro) del voltaje aplicado. (2) Dividir la transformada de voltaje entre la impedancia para obtener la transformada de corriente (o espectro). (3) De la transformada de corriente, encontrar la corriente.

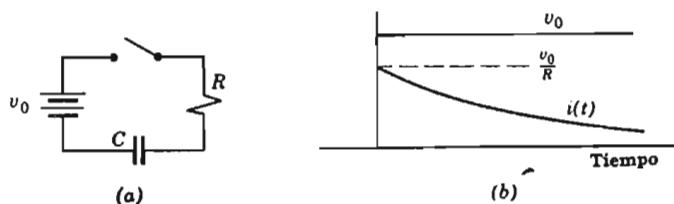


FIG. 17-10. Corriente en un circuito capacitivo

En este ejemplo, el voltaje aplicado es cero hasta $t = 0$, y es v_0 (una constante) de ahí en adelante, como en la Fig. 17-10b. Utilizamos el par 1 de la tabla y escribimos la transformada de voltaje:

$$V(s) = \frac{v_0}{s} \quad (17-20)$$

Como paso 2, la impedancia del circuito se escribe:

$$Z(s) = R + \frac{1}{sC} \quad (17-21)$$

La transformada de voltaje se divide entre la función impedancia para dar la transformada de corriente:

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{v_0}{s\left(R + \frac{1}{sC}\right)} = \frac{v_0}{R} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \quad (17-22)$$

El paso 3 requiere encontrar la función tiempo de la corriente en la que esté el espectro. El par 2 de la tabla parece idóneo. Si $\alpha = 1/RC$, entonces la Ec. 17-22, es

$$I(s) = \frac{v_0}{R} \frac{1}{s + \alpha} \quad (17-23)$$

y por comparación con el par 2:

$$i(t) = \frac{v_0}{R} e^{-\alpha t} \quad (17-24)$$

Esta es la respuesta. (Puede compararse con la Ec. 2-17 que da la solución de un problema íntimamente relacionado, obtenido por medios clásicos). Aunque muy elemental un ejemplo muestra algo de la bella simplicidad del método de Laplace.

7. Ejemplo de una red

Encontremos la corriente que entra en la red de la Fig. 17-11a cuando se cierra el interruptor. Se muestran los valores numéricos de los elementos del circuito.

Paso primero: puesto que

$$v(t) = 12 \quad (17-25)$$

Par 1 da el espectro de voltaje como

$$V(s) = \frac{12}{s} \quad (17-26)$$

Segundo paso: la impedancia es:

$$Z(s) = 2 + \frac{2(\frac{1}{2}s + 2)}{2 + \frac{1}{2}s + 2} = \frac{4s + 24}{s + 8} \quad (17-27)$$

Dividiendo la transformada de voltaje entre la impedancia para obtener la transformada de corriente:

$$I_1(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{\frac{12}{s}}{\frac{4s + 24}{s + 8}} = 3 \frac{s + 8}{s(s + 6)} \quad (17-28)$$

Tercer paso: la transformada de corriente es la suma de dos partes reconocibles:

$$I_1(s) = 3 \frac{1}{s + 6} + 24 \frac{1}{s(s + 6)} \quad (17-29)$$

El primer término es igual al par 2, y el segundo es el par 3, dando

$$i_1(t) = 3e^{-6t} + \frac{2}{6}(1 - e^{-6t}) = 4 - e^{-6t} \quad (17-30)$$

Esta es la corriente deseada; se ha trazado en la Fig. 17-11b.

8. Funciones de transferencia

En los ejemplos precedentes, ha sido obtenida la corriente de entrada de voltaje aplicado por el método de transformación de Laplace. En la práctica, alguna otra corriente puede ser el objeto de nuestra resolución en lugar de la corriente de entrada, o quizás el voltaje entre las terminales de algún elemento o rama puede desearse. Esencialmente se usa el mismo método. El voltaje deseado o corriente se relaciona al voltaje o corriente dada por alguna combinación de impedancias o admitancias (conocida como *función de transferencia*) y ésta se aplica como si el problema fuese uno de onda senoidal de estado estable —lo que, aún más, por virtud del análisis de Laplace, es.

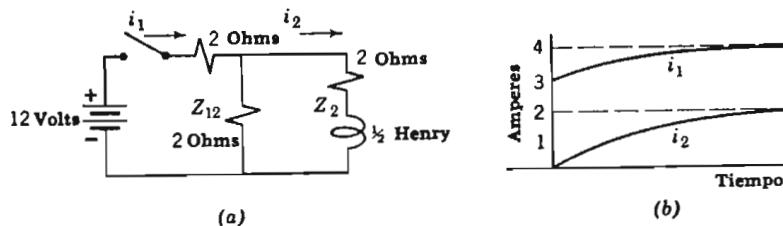


FIG. 17-11. Una red y sus dos corrientes de malla

EJEMPLO 1. Encontremos la corriente a través de la rama inductiva de la red de la Fig. 17-11. En términos de estado estable, I_2 es una fracción de I_1 , porque I_1 se divide entre las dos ramas de la red en proporción inversa a sus impedancias. La relación puede escribirse para una frecuencia o para el espectro entero de frecuencias, como

$$I_2 = I_1 \frac{Z_{12}}{Z_{12} + Z_2} \quad \text{o} \quad I_2(s) = I_1(s) \frac{Z_{12}(s)}{Z_{12}(s) + Z_2(s)} \quad (17-31)$$

$I_1(s)$ se conoce de la Ec. 17-28, y las impedancias Z_{12} y Z_2 se toman del diagrama para dar

$$I_2(s) = 3 \frac{s + 8}{s(s + 6)} \frac{2}{\frac{1}{2}s + 4} = \frac{12}{s(s + 6)} \quad (17-32)$$

Así se encuentra la transformada $I_2(s)$, e $i_2(t)$ se determina aplicando el par 3 en la tabla. Puesto que $I_2(s)$ es como se dio en la Ec. 17-32,

$$i_2(t) = \frac{1}{6}^2(1 - e^{-6t}) = 2(1 - e^{-6t}) \quad (17-33)$$

Esta es la corriente deseada en la rama inductiva de la red, y se ha trazado como una función de tiempo en la Fig. 17-11b.

La función de transferencia que relaciona I_2 con V en este ejemplo es, por supuesto, la admitancia de transferencia del Cap. 10. No se necesita sin embargo, identificarla formalmente como tal; es a menudo más fácil, como en este caso, encontrar una corriente a partir de otra, o un voltaje de otro, por los métodos más simples de estado estable.

EJEMPLO 2. Encontremos el voltaje entre las terminales de la inductancia de la Fig. 17-11. Esto podría hacerse aplicando una función de transferencia apropiada a la transformada de voltaje aplicado $V(s)$, pero como ya hemos encontrado $I_2(s)$ es más fácil empezar aquí. El voltaje entre las terminales de la inductancia es $V_L = j\omega L I_2$. En la notación de este capítulo,

$$V_L(s) = sLI_2(s)$$

Introduciendo $I_2(s)$ de la Ec. 17-32, y notando que $L = \frac{1}{2}$

$$V_L(s) = \frac{s}{2} \frac{12}{s(s + 6)} = \frac{6}{s + 6} \quad (17-34)$$

Aplicando el par 2 de la tabla, el voltaje entre las terminales de inductancia es

$$v_L(t) = 6e^{-6t} \quad (17-35)$$

Esto, si se traza como una función de tiempo, mostraría que el voltaje entre las terminales de la inductancia sube repentinamente hasta 6 volts en el instante en que el interruptor se cierra, y después decrece gradualmente hacia cero conforme la corriente a través de la rama inductiva se asienta hasta un valor estable que no cambia.

9. Voltaje alterno aplicado

Todos estos ejemplos han asumido que el voltaje impulsor permanece constante después de crecer repentinamente desde cero en $t = 0$. La transformada o espectro del voltaje de función de escalón de valor estable v_0 es (según el par 1) v_0/S .

Encontremos a continuación, la corriente que resulta cuando el voltaje impulsor es un voltaje alterno aplicado repentinamente. Este voltaje se va a aplicar al circuito de la Fig. 17-12, conteniendo R y L en serie, para el que $Z(s) = Ls + R$.

El primer paso es encontrar la transformada de voltaje. El voltaje como una función de tiempo es

$$v(t) = V_m \operatorname{sen} \omega_1 t \quad (17-36)$$

Puesto que el interruptor en el circuito se va a cerrar en $t = 0$, esta expresión para el voltaje implica que el interruptor se cierra justamente cuando el voltaje del generador va pasando por cero; ver Fig. 17-12b.

Se encuentra ahora la transformada de voltaje. Revisando la Tabla 17-1 se ve que el par 7 es aplicable y

$$V(s) = V_m \frac{\omega_1}{s^2 + \omega_1^2} \quad (17-37)$$

El segundo paso es dividir esta transformada de voltaje entre la función de impedancia:

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{V_m \omega_1}{(s^2 + \omega_1^2)(Ls + R)} = \frac{V_m}{L} \frac{\omega_1}{(s^2 + \omega_1^2)(s + \alpha)} \quad (17-38)$$

donde $\alpha = R/L$.

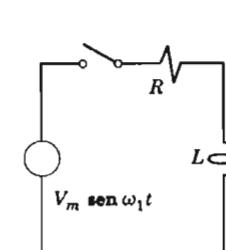
El tercer paso es identificar la transformada de corriente. Ninguno de los pares encontrados en este capítulo es utilizable. Unos pocos pares adicionales obtenidos de otras fuentes * han sido añadidos al final de la tabla, sin embargo, y el par 9 es directamente aplicable, dando

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{V_m}{L} \frac{\operatorname{sen}(\omega_1 t - \theta) + e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_1^2}} \\ &= \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (\omega_1 L)^2}} [\operatorname{sen}(\omega_1 t - \theta) + e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \theta] \quad (17-39) \end{aligned}$$

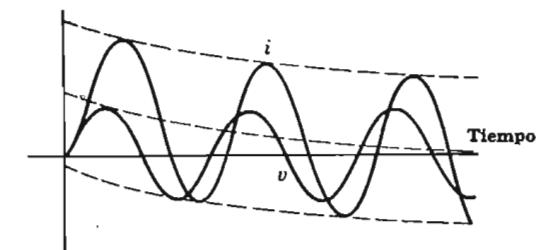
* Estos se obtuvieron, por ejemplo, en el Cap. 10 de la Referencia 6.

en la que

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\omega_1}{\alpha} = \tan^{-1} \frac{\omega_1 L}{R} \quad (17-40)$$



(a)



(b)

FIG. 17-12. Corriente resultante de un voltaje alterno aplicado

La corriente, mostrada en la Fig. 17-12b, es la suma de una componente senoidal y una componente exponencial. Estas se reconocerán como las componentes forzada y natural respectivamente, siendo la primera la corriente senoidal de estado estable resultante de la aplicación de un voltaje senoidal y la segunda teniendo la forma exponencial que es característica de este círculo. La suma de las dos es cero en $t = 0$; la corriente total se inicia como una onda senoidal asimétrica, y va haciéndose simétrica conforme la componente exponencial transitoria de la corriente va desapareciendo. El ángulo de fase del circuito es θ . (Comparar con la Sec. 2-7).

Vemos que el método de solución es esencialmente el mismo para voltaje senoidal o para voltaje constante aplicado. El mismo método general es bueno para cualquier forma de voltaje. La transformada de voltaje aplicado puede encontrarse en una tabla o, si no existe un par transformado previamente calculado de la función en cuestión, utilizando la Ec. 17-3. La transformada de corriente se calcula, dividiendo la transformada de voltaje entre la impedancia. Finalmente la transformada de corriente debe convertirse a corriente como una función de tiempo. Esta es siempre la parte difícil del problema. Si se puede encontrar un par transformado adaptable en una tabla todo está bien. Si las tablas al alcance no contienen el par necesario, puede utilizarse algún método indirecto. Uno de estos, el método de las fracciones parciales, se mostrará en la Sec. 11.

10. Sumas y productos de transformadas

Si una transformada de corriente $I(s)$ o más generalmente cualquier función de s denotada por $F(s)$, es la suma de otras dos funciones, llamadas $F_1(s)$ y $F_2(s)$, y las funciones de tiempo correspondientes a estas son $f_1(t)$ y $f_2(t)$, entonces la función de tiempo correspondiente a $F(s)$ es la suma $f_1(t) + f_2(t)$. Esto es, si

$f_1(t)$ se transforma en $F_1(s)$ y

$f_2(t)$ se transforma en $F_2(s)$, entonces

$$f_1(t) + f_2(t) \text{ se transforma en } F_1(s) + F_2(s) \quad (17-41)$$

Esto se ve que es cierto por inspección de transformación de la Ec. 17-3, porque si $f(t)$ es la suma de dos partes, la transformación puede escribirse como la suma de dos integrales, cada una de las cuales puede evaluarse separadamente. La integral de la suma de varios términos es igual a la suma de las integrales de los términos.

Como una ilustración, encontraremos la función de tiempo correspondiente a

$$\frac{1}{s+\alpha} + \frac{1}{s+\beta} \quad (17-42)$$

Aplicando el par 2 a cada parte separadamente, la función correspondiente de tiempo es

$$f(t) = e^{-\alpha t} + e^{-\beta t} \quad (17-43)$$

como puede probarse por sustitución en la Ec. 17-3.

No puede hacerse una declaración similar acerca del producto de dos funciones. Puesto que,

$$\frac{1}{s+\alpha} \cdot \frac{1}{s+\beta} \quad (17-44)$$

no se transforma en

$$e^{-\alpha t} \cdot e^{-\beta t} \quad (17-45)$$

La razón básica es que la integral del producto de dos términos (en la Ec. 17-3) no es igual al producto de las integrales de los términos tomadas separadamente.

Muy a menudo, sin embargo, se necesita encontrar la función de tiempo correspondiente a algún producto similar de términos al

de 17-44. Esto debe esperarse, ya que se recordará que la impedancia de una red es una función racional, el numerador y el denominador de la cual pueden expresarse como el producto de términos lineales de la forma $(s - s_1)$. ¿Qué podemos hacer entonces?

11. Fracciones parciales

Existen varias formas posibles de ataque, pero la única que será mencionada aquí es el método de las fracciones parciales. Una expresión tal como la de la 17-44 puede escribirse como una suma, tal como sigue.

EJEMPLO 1. Sea *

$$F(s) = \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{A}{s - s_1} + \frac{B}{s - s_2} \quad (17-46)$$

A y B son desconocidas, pero puede encontrarse notando que

$$\frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{A(s - s_2) + B(s - s_1)}{(s - s_1)(s - s_2)} \quad (17-47)$$

Puesto que

$$A(s - s_2) + B(s - s_1) = 1 \quad (17-48)$$

Esto debe ser cierto para todos los valores de s , incluyendo $s = s_1$, por lo que

$$A(s_1 - s_2) + 0 = 1 \quad \text{or} \quad A = \frac{1}{s_1 - s_2} \quad (17-49)$$

y también para $s = s_2$, por lo que

$$0 + B(s_2 - s_1) = 1 \quad \text{or} \quad B = -\frac{1}{s_1 - s_2} \quad (17-50)$$

Estos valores de A y B se sustituyen en la Ec. 17-46, dando $F(s)$ como la suma de dos términos para cada uno de los cuales el par de la tabla puede aplicarse. Primero

$$F(s) = \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{1}{s - s_1} - \frac{1}{s - s_2} \right) \quad (17-51)$$

* En general, una fracción propia se desarrolla en la forma

$$\frac{a_1 + a_2 s + \dots}{(s - s_1)(s - s_2) \dots} = \frac{A}{s - s_1} + \frac{B}{s - s_2} + \dots$$

Sin embargo, si $s_1 = s_2$, la forma es $(a_1 + a_2 s)/(s - s_1)^2 = A/(s - s_1) + B/(s - s_1)^2$.

Entonces, según el par 2,

$$f(t) = \frac{1}{s_1 - s_2} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) \quad (17-52)$$

Así se ha obtenido una solución por el método de fracciones parciales. Esta solución particular se había obtenido previamente por integración directa, y se encuentra incluida como el par 4 de nuestra tabla.

El desarrollo en fracciones parciales está trazado más ampliamente en cualquier libro de álgebra. El método es extremadamente útil porque las impedancias, admitancias y funciones de transferencia de redes ordinarias son siempre funciones racionales. El método puede ser laborioso si se aplica a redes complicadas, sin embargo, y la peor parte es la de la necesidad de encontrar las raíces (s_1 , s_2 , etc.) de un polinomio si este polinomio es de alto grado.

Las raíces de una cuadrática se encuentran fácilmente. Las raíces de una expresión de tercer grado son más difíciles, pero posibles, y si los coeficientes son numéricos puede encontrarse siempre una raíz real por tanteo. Las ecuaciones de cuarto grado y de grado más elevado son seriamente difíciles, particularmente si todas las raíces son complejas. Existen métodos, sin embargo, para el uso con coeficientes numéricos y las computadoras digitales electrónicas de alta velocidad pueden aplicarse a tales soluciones.

EJEMPLO 2. Como otro ejemplo del método de fracciones parciales, supongamos que un problema de redes requiere la transformación de la siguiente $F(s)$ a una función del tiempo:

$$F(s) = \frac{s}{(s - s_1)(s - s_2)} \quad (17-53)$$

Utilizando fracciones parciales, tenemos

$$F(s) = \frac{s}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{A}{s - s_1} + \frac{B}{s - s_2} \quad (17-54)$$

Entonces

$$A(s - s_2) + B(s - s_1) = s \quad (17-55)$$

Haciendo s igual primero a s_1 y después a s_2 encontramos A y B , obteniendo

$$F(s) = \frac{s_1}{s_1 - s_2} \cdot \frac{1}{s - s_1} + \frac{s_2}{s_2 - s_1} \cdot \frac{1}{s - s_2} \quad (17-56)$$

Aplicando el par 2:

$$f(t) = \frac{s_1}{s_1 - s_2} e^{s_1 t} + \frac{s_2}{s_2 - s_1} e^{s_2 t} \quad (17-57)$$

Este se ha enlistado como el par 10. Otro par interesante se obtiene haciendo $s_1 = j\omega_1$ y $s_2 = -j\omega_1$; sustituyendo éstos en las Ecs. 17-53 y 17-57 da:

$$F(s) = \frac{s}{(s - j\omega_1)(s + j\omega_1)} = \frac{s}{s^2 + \omega_1^2} \quad (17-58)$$

$$f(t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}) = \cos \omega_1 t \quad (17-59)$$

Estas dos últimas ecuaciones dan el par 8.

En los pares 8 y 10, $F(s)$ tiene s en el numerador, dando un cero en el origen. Sin embargo, el grado de s en el numerador es *siempre* menor que el grado s en el denominador; esto es, $F(s)$ siempre una fracción propia. Si $F(s)$ no fuera una fracción propia, la correspondiente $f(t)$ tendría una discontinuidad infinita. Con tales funciones no trataremos aquí.

12. Energía almacenada inicial

Todos los ejemplos de este capítulo han asumido que el circuito estaba en reposo hasta $t = 0$, el tiempo de aplicación de la fuerza electromotriz. Esto no es siempre cierto. Puede haber habido cierta actividad previa a $t = 0$.

La actividad previa puede afectar lo que suceda después si, en $t = 0$, existe alguna corriente remanente en una inductancia o alguna carga en una capacitancia.

Si en $t = 0$ existe corriente en cualquier inductancia o carga en una capacitancia, el circuito no está en reposo; tiene energía almacenada; electromagnética en un caso, electroestática en el otro. Tal energía almacenada inicial puede no ser despreciable. Su efecto se encuentra rigurosamente introduciendo la corriente inicial o la carga inicial en las ecuaciones diferenciales basadas en las leyes de Kirchoff. Cuando se hace esto, la siguiente regla resulta, y puesto que estas reglas son intuitivamente plausibles la regla no se dará.

CARGA INICIAL. Si existe un condensador cargado en serie con un voltaje aplicado el voltaje inicial del condensador se suma o se sustrae al voltaje aplicado. Esto se hace más fácilmente sumando

a la transformada del voltaje un término $\pm v(0)/s$, con $v(0)$ representando el voltaje del condensador que resulta de su carga inicial. Si el voltaje del condensador inicial está en una dirección que añade voltaje aplicado positivo, se usa el signo +; si se opone, el signo -. (Si existe un condensador cargado inicialmente en el circuito pero no voltaje aplicado, el término $v(0)/s$ se utiliza en lugar de la transformada de voltaje).

CORRIENTE INICIAL. Si existe corriente inicial en una inductancia en serie con el voltaje aplicado, se suma a la transformada de voltaje un término $\pm Li(0)$, en la que $i(0)$ es la corriente inicial. Si la corriente inicial está en la dirección en la que el voltaje aplicado positivo tiende a producir corriente, se utiliza el signo +; si es opuesta, el signo -. La suma se llama la función de excitación:

$$\text{Función de excitación} = V(s) \pm \frac{v(0)}{s} \pm Li(0) \quad (17-60)$$

Es una observación interesante que el tercer término de la función de excitación es un impulso electrocinético.

13. Ejemplos

EJEMPLO 1. La Fig. 17-13 muestra un circuito con una batería de 10 volts, una resistencia, y un condensador que está cargado inicialmente con 10 volts en oposición a la batería. El interruptor se cierra en $t = 0$. Encontrar la corriente.

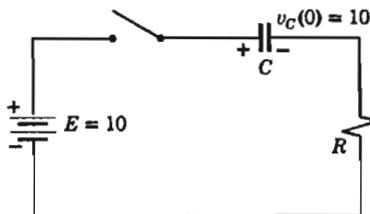


FIG. 17-13. Circuito con carga inicial

La función de impedancia en $Z(s) = R + 1/sC$. La función de excitación contiene la transformada de voltaje $V(s)$ y también el término $v_c(0)/s$:

$$\text{Función de excitación} = V(s) - \frac{v_c(0)}{s} = \frac{10}{s} - \frac{10}{s} = 0$$

La transformada de corriente se encuentra dividiendo:

$$I(s) = \frac{\text{Función de excitación}}{Z(s)} = \frac{0}{R + 1/sC} = 0 \quad (17-61)$$

Por tanto, no existe corriente, un resultado que era obvio desde el principio.

EJEMPLO 2. La Fig. 17-14 muestra un circuito conteniendo una bobina y una resistencia. Inicialmente el interruptor entre ellas está cerrado; se abre en $t = 0$. Encontrar la corriente después.

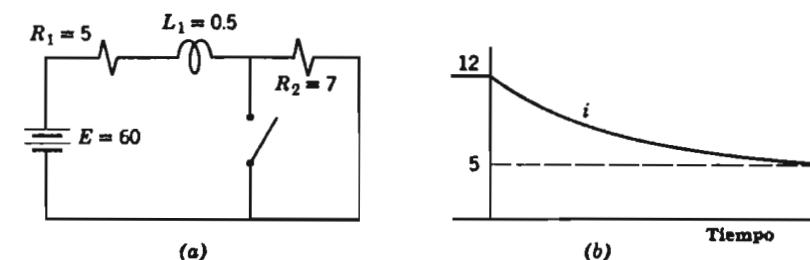


FIG. 17-14. Un circuito con corriente inicial

Asumiendo que una corriente estable estaba circulando antes de $t = 0$, la corriente inicial es $i(0) = 12$. La transformada de voltaje es $60/s$. La función de excitación es por lo tanto,

$$\text{Función de excitación} = \frac{60}{s} + (0.5)(12) = \frac{60}{s} + 6 \quad (17-62)$$

La impedancia de circuito después de abrir el interruptor es $Z(s) = 12 + 0.5s$. La transformada de corriente se obtiene por división:

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{60/s + 6}{12 + 0.5s} = \frac{60}{s(12 + 0.5s)} + \frac{6}{12 + 0.5s} \\ &= \frac{120}{s(s + 24)} + \frac{12}{s + 24} \end{aligned} \quad (17-63)$$

La corriente se encuentra ahora utilizando los pares 2 y 3 de la tabla:

$$i(t) = \frac{120}{24} (1 - e^{-24t}) + 12e^{-24t} = 5 + 7e^{-24t} \quad (17-64)$$

Esta corriente empieza en 12 cuando $t = 0$ y decrece exponencialmente a 5; la Fig. 17-14b muestra la corriente. Se verá que tanto

la condición inicial como la de estado estable se satisfacen automáticamente por el proceso de transformada de Laplace.

Esta solución precedente pudo verse antes como una aplicación de superposición. El primer término de la función de excitación da el resultado de aplicar el voltaje de la batería al circuito después de $t = 0$; el segundo término da el resultado del impulso debido a la energía inicial en la bobina.

EJEMPLO 3. Se añadió una inductancia a R_2 del circuito anterior. La Fig. 17-15 muestra el nuevo circuito. El problema no cambia en lo demás. Encontrar la corriente.

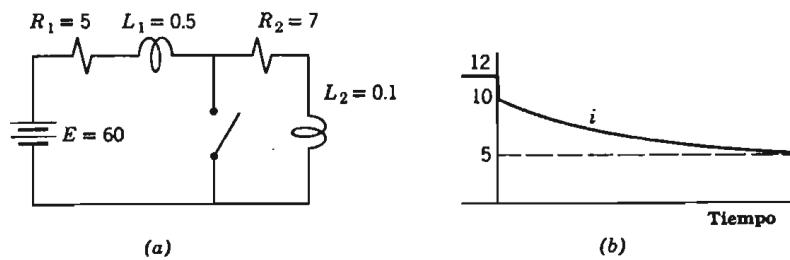


FIG. 17-15. Circuito de la Fig. 17-14 con una inductancia añadida

La función de excitación es la misma que en la Ec. 17-62. La función de impedancia, sin embargo, será $Z(s) = 12 + 0.6s$. Dividiendo para obtener la transformada de corriente:

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{60/s + 6}{12 + 0.6s} = \frac{60}{s(12 + 0.6s)} + \frac{6}{12 + 0.6s} \\ &= \frac{100}{s(s + 20)} + \frac{10}{s + 20} \end{aligned}$$

Utilizando los pares 2 y 3, se encuentra que la corriente es

$$i(t) = \frac{100}{20}(1 - e^{-20t}) + 10e^{-20t} = 5 + 5e^{-20t}$$

Esta se ha trazado en la Fig. 17-15b.

El aspecto interesante de este problema es el de que antes de abrir el interruptor existe una corriente en L_1 y no existe corriente en L_2 , mientras que después de abrir el interruptor las corrientes en L_1 y L_2 deben ser la misma. Sin embargo, se ha establecido comúnmente que la corriente en un circuito inductivo no puede cambiar

instantáneamente (el principio de eslabonamiento de flujo constante, o conservación del impulso electrocinético se ha aplicado) porque una rapidez de cambio infinita de corriente requeriría un voltaje terminal infinito entre las terminales de la inductancia. ¿Cómo pueden entonces las corrientes instantáneamente hacerse iguales cuando el interruptor se abre?

Esta paradoja puede resolverse en cualquiera de dos formas. Matemáticamente el problema se resuelve aplicando el principio de eslabonamiento de flujo constante a ambas bobinas a la vez, en vez de a cada una individualmente: el número de eslabonamientos de flujo con *ambas* bobinas justamente antes de abrir el interruptor debe ser el mismo que el número de eslabonamientos de flujo con *ambas* bobinas justamente después de abrir el interruptor. El problema análogo en mecánica es una bala disparada contra un saco de arena. El impulso total de la bala y el saco de arena después del impacto debe ser el mismo que el impulso total antes. El saco de arena y la bala deben tener la misma velocidad después del impacto, aunque tenían velocidades diferentes antes. Los detalles de la transferencia del impulso se ignoran simplemente.

Igual con el sistema eléctrico. El impulso electrocinético antes de abrir el interruptor es $L_1 i_0 = (0.5)(12) = 6$. Después de que el interruptor se ha abierto ($L_1 + L_2$) i debe seguir siendo 6, y puesto que $L_1 + L_2 = 0.6$ se llega a que la corriente en el circuito después de que el interruptor se ha abierto debe ser $i = 10$. Esto se muestra en la Fig. 17-15b. Es más bien impresionante que la solución por transformación de Laplace tome estas consideraciones automáticamente en cuenta; son inherentes en el método.

Viendo los detalles para observar cómo trabaja la paradoja desde el punto de vista físico, debemos reconocer ciertas limitaciones en la operación de un interruptor. Supóngase que el interruptor se abrió bastante rápidamente; sin embargo, la corriente a través de éste no puede estar en el tiempo cero porque esto produciría voltaje infinito entre las terminales de L_2 y por lo tanto en el interruptor. El resultado práctico es que el voltaje aunque no es infinito, crece suficientemente rápido para producir un arco eléctrico a través del aire entre los puntos del interruptor cuando se separan. Este arco puede permanecer un tiempo muy corto, pero permanece un intervalo finito en el que una corriente puede incrementarse y la otra decrecer sin violación de las leyes de la electricidad. La situación puede aliviarse adicionalmente por la capacitancia distribuida en las bobinas y circuitos.

Este ejemplo ha ilustrado la ley de la conservación del impulso electrocinético, o *ley de los eslabonamientos de flujo constante*, que puede definirse como sigue: el producto Li de un sistema electromagnético no puede cambiar excepto que el sistema se opere por un voltaje externo, en cuyo caso el cambio de Li es igual al producto vt del tiempo y el voltaje.* Sin embargo, el voltaje resultante de una resistencia debe considerarse como un voltaje externo, y la resistencia inevitable en la bobina inductiva considerada hace difícil aplicar la ley excepto en un instante, con un lapso de tiempo despreciable.

14. El fasor como una transformada

En el Cap. 3 (siguiendo a las Ecs. 3-36 y 37) se prometió que se daría una justificación más adelante para referirnos a la cantidad compleja

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} V_m e^{j\phi} \quad (17-65)$$

como la transformada de la función de tiempo

$$v = V_m \cos(\omega_1 t + \phi) \quad (17-66)$$

Ahora calculamos realmente la transformada de Fourier (o espectro) de esta función de tiempo, lo que hacemos introduciendo la v de la Ec. 17-66 como la función de tiempo en el análisis de Fourier Ec. 15-5; encontramos que la transformada de v tiene

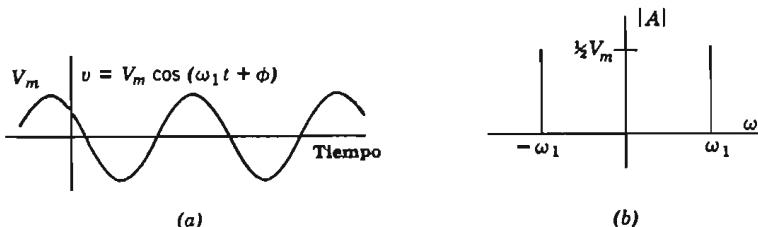


FIG. 17-16. Una función de tiempo senoidal y su espectro como una serie exponencial

el valor $\frac{1}{2}V_m e^{j\phi}$ para las frecuencias $\pm\omega_1$ y valor de cero en todas las otras frecuencias. Ver Fig. 17-16. Puesto que esta transformada

* Esta ley, $vt = Li$, análoga a la ley de la mecánica que hace $Ft = Mv$, es realmente una repetición en términos un poco menos precisos de la Ec. 1-14d.

calculada es la misma que la cantidad V (excepto por un factor de $\sqrt{2}$, que está relacionado con la magnitud rms), hemos obtenido por último la justificación prometida para llamar a V la *transformada del voltaje*.

Como vía de explicación, puede hacerse notar que cualquier transformada de Fourier es esencialmente el espectro de la onda que representa, y puesto que una onda puramente senoidal, tal como la de la Ec. 17-66 es "monocromática" tiene solamente una frecuencia en su espectro.

A menudo se ha dicho, cuando se trabaja con las transformadas de Fourier o Laplace, que el problema se saca del dominio del tiempo para introducirlo en el dominio de la frecuencia. Esto significa que una onda, en lugar de ser descrita como una función de tiempo se describe (por su espectro) en función de componente de frecuencia. Se ha dicho también, que el problema se transforma del dominio real al dominio complejo, refiriéndonos al hecho de que el tiempo es siempre una variable real mientras que las relaciones de fase en el espectro están descritas por funciones complejas. La razón para la transformación, es que las matemáticas son mucho más fáciles en el dominio de la frecuencia. En particular, tratamos con ecuaciones algebraicas en lugar de ecuaciones diferenciales, y el concepto de impedancia compleja es aplicable.

En todo esto, la representación de una onda senoidal estable por un fasor toma su lugar con otras transformadas de Fourier y Laplace.

15. Sumario

El propósito de este capítulo es presentar el principio general de los métodos de transformación de análisis, y dar al estudiante suficiente facilidad en el uso de la transformación de Laplace para permitirle resolver problemas ordinarios. Unicamente se presentaron los métodos más simples,* pero afortunadamente son adecuados para la solución de una gran cantidad de problemas. Los problemas se pueden trazar con los campos de transitorios eléctricos, o el com-

* Es obvio que este capítulo no intenta dar las bases matemáticas del análisis por transformación; para esto ver la Referencia 18, 29-33, o cualquiera de un gran número de libros de matemáticas aplicadas (como Guillemin, Referencia 21) en el que este asunto se ha tratado más o menos ampliamente. Para técnicas más avanzadas de aplicación del método a problemas de circuitos ver Gardner y Barnes, Referencia 18, Jaeger, Referencia 34, u otros. *Transients*, del autor, Referencia 6, trata este asunto desde el mismo punto de vista que este libro pero más ampliamente. En 1929 Bush, en Referencia 33, dio una presentación remarcablemente lúcida del método de integral de Fourier, indicando sencillamente el desarrollo al que ya ha llegado, el método de transformada de Laplace. Campbell y Foster, Referencia 28, ofrecen extensas tablas.

portamiento transitorio de dispositivos mecánicos o sistemas electromecánicos, tales como servomecanismos o sistemas acústicos incluyendo micrófonos, o en general con cualquier sistema lineal.

El capítulo comienza presentando la transformación de Laplace por medio de la integral de Fourier, haciendo énfasis en que el resultado de la transformación es un *espectro* de la función de tiempo. Un ejemplo muestra la aplicación a un problema de circuitos pero la solución no pudo completarse hasta que se obtuvo una tabla de pares de transformadas.

Por lo tanto se calculó un número de *pares de transformadas* y se recopiló una breve tabla. Se dieron entonces otros ejemplos.

El método se extendió para mostrar el uso de las *funciones de transferencia* así como las funciones de entrada.

Los *voltajes alternos* y funciones impulsoras de otras formas se mencionaron y se dio un ejemplo.

El método de *fracciones parciales* para la transformación inversa de funciones racionales se presentó.

La función de excitación para utilizarse cuando existe *energía inicial* en un circuito se desarrolló, y se dieron ejemplos ilustrativos.

Un ejemplo ilustra la ley de conservación del impulso electrocinético, o eslabonamientos de flujo constante.

Finalmente, se mostró que una cantidad compleja utilizada para representar un voltaje senoidal o corriente es esencialmente una transformada de Fourier del voltaje o la corriente.

PROBLEMAS

1. Demostrar que la transformada de Laplace de la función de tiempo $i(t) = t$ es $F(s) = 1/s^2$. Añadir a la Tabla 17-1. § 3

2. Se sugiere que la Ec. 17-6 puede escribirse

$$I(s) = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + R/L} \right)$$

(a) Determinar si esto es correcto. (b) Encontrar la correspondiente función de tiempo $i(t)$ utilizando los pares 1 y 2 de la Tabla 17-1. (Esto ilustra el "método de fracciones parciales"). § 3

3. Verificar las integraciones indicadas en las Ecs. 17-8, 11, 13, 15 y 19, confirmando de este modo los pares 3, 4, 5, 6 y 7. § 4

4. Encontrar la transformada de Laplace $F(s)$ de la función de tiempo $f(t) = e^{-at} \cos \omega t$. Sumar el resultado a la Tabla 17-1. § 4

5. Un circuito tiene un condensador de 0.01 microfarads, una resistencia de 25 ohms, una batería de 7.5 volts y un interruptor en serie. El interruptor está abierto inicialmente y el condensador está descargado; en $t = 0$ se cierra el interruptor. Encontrar la corriente en el circuito posteriormente, utilizando el método de transformada de Laplace.

6. Una batería de 25 volts se aplica bruscamente a un circuito que contiene 500 milihenrys de inductancia, una capacitancia de 0.40 microfarads y 100 ohms de resistencia de serie. Encontrar por medio de la transformación de Laplace, la corriente que resulta. Encontrar Q del circuito de α y ω . § 6

7. Un circuito consiste de una resistencia de 250 ohms, un condensador de 0.10 microfarads y una bobina que tiene 200 milihenrys de inductancia y una resistencia despreciable, conectadas en serie con una batería de 10 volts y un interruptor. El interruptor se cerró en $t = 0$; encontrar la corriente por la transformación de Laplace. § 6

8. Refiriéndonos al ejemplo de la Sec. 17-7 y a la Fig. 17-11, encontrar la transformada de la corriente en el elemento Z_{12} y de esta transformada encontrar la corriente que pasa por Z_{12} después de que el interruptor se cerró. Dibujar nuevamente la Fig. 17-11b, sumando esta corriente. § 8

9. Un voltaje alterno $v = 12 \cos 377t$ se aplicó bruscamente en el circuito $t = 0$ a una bobina con 600 milihenrys de inductancia y una resistencia despreciable. Por los métodos de transformada de Laplace, encontrar la corriente resultante. Bosquejar $v(t)$ e $i(t)$. § 9

10. Una transformada es $F(s) = 1/s(s - s_1)(s - s_2)$; encontrar la $f(t)$ correspondiente por cualquier método válido que parezca el más simple, haciendo uso de cualquier información obtenible en este capítulo. § 5

11. El voltaje de una batería de 10 volts se aplica bruscamente a las terminales del circuito mostrado en el Prob. 16-9. No existe corriente inicial del circuito. Utilizando el método de transformada de Laplace encontrar la corriente que entra en las terminales después de que se aplicó el voltaje. (La respuesta al Prob. 17-10 puede ser útil). § 7

12. Un voltaje se está incrementando continuamente, de modo que $v = 8000t$ principiando en el tiempo $t = 0$. Este voltaje se aplicó a un condensador con una capacitancia de 1.25 microfarads. Encontrar (a) la transformada de Laplace del voltaje de la batería (el Prob. 1 puede ser útil), (b) la impedancia del condensador. (c) la transformada de la corriente resultante, y (d) la corriente. § 9

13. El voltaje $v = 15e^{-100t}$ se aplicó repentinamente, cerrando un interruptor en el tiempo $t = 0$, a un circuito consistente de $R = 3.0$ ohms y $L = 0.03$ henrys en serie. (a) Utilice los métodos de transformada de Laplace para encontrar la corriente. (b) Bosqueje el voltaje y la corriente como funciones del tiempo. Encontrar la corriente máxima y el tiempo en el que ocurre ésta. § 9

14. Encuentre la función tiempo del par 11 de la transformada $1/(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)$ por el método de fracciones parciales. § 11

15. Un condensador de 40 milimicrofarads ($40 \cdot 10^{-9}$ farads) está cargado inicialmente a 25 volts. Se le permite que descargue a través de un circuito con 10 milihenrys de inductancia y 250 ohms de resistencia. Encontrar la corriente resultante. Encontrar la Q del circuito de α y ω . § 13

16. Encontrar la función tiempo correspondiente a la transformada

Mostrar los polos y ceros de $F(s)$ en el plano s , y bosquejar $f(t)$ como una función de tiempo. Sume éste para la Tabla 17-1. § 11

17. Refiriéndose al Ej. 3 de la Sec. 17-13 y la Fig. 17-15, cambie L_2 a 0.7 henrys. Encontrar la corriente, por el método de Laplace, después de que se abrió el interruptor. § 13

18. El interruptor en el circuito de la Fig. 17-14a ha estado abierto por un largo tiempo. Se cerró repentinamente. Encontrar la corriente a través de R_1 después, utilizando los métodos de transformada de Laplace. § 13

19. El interruptor de la Fig. 17-11 ha estado cerrado por un largo tiempo. Se abre bruscamente. Encontrar la corriente a través de la rama inductiva Z_2 después, utilizando los métodos de transformada de Laplace. § 13

20. Un circuito consiste de $L = 0.5$ henrys, $C = 10^{-6}$ farads y $R = 1414$ ohms en serie. No existe ninguna fuente en el circuito

y no existe ninguna pérdida inicial en el condensador. La corriente inicial en la inductancia es de 3.0 amperes. Encontrar la corriente final. Bosqueje la corriente. (El par de transformadas del Prob. 16 puede ser útil). § 13

21. Una batería de 10 volts se conectó al circuito del Prob. 16-9. Después de que se alcanzó la estabilidad se quita la batería bruscamente otra vez, dejando las terminales en circuito abierto. Encontrar la corriente en el circuito después de que la batería se ha quitado. § 13

18

Redes con dos Pares de Terminales

1. Redes con dos pares de terminales

En los Caps. 9 y 10 las redes fueron tratadas con bastante generalidad. Se escribieron ecuaciones de malla y ecuaciones de nodos para redes que contenían L mallas o N nodos. La única restricción fue que los elementos de las redes deberían ser lineales, y para la mayor parte del trabajo bilaterales. No se requirió que las redes fueran pasivas; más aún, podría incluirse cualquier número de fuentes en la red, conviniendo en que fuesen fuentes de voltaje constante o fuentes de corriente constante, o al menos podían representarse como tales.

Dos tipos especiales de redes, sin embargo, son de tan excepcional importancia que merecen y reciben atención individual. Las redes trifásicas se utilizan casi sin excepción para transmisión y distribución de potencia eléctrica, y ciertos problemas trifásicos se discutirán en los Caps. 20 y 21. Los sistemas de comunicación, por otro lado, consisten casi principalmente de redes de dos pares de terminales.

El rectángulo en la Fig. 18-1 indica una red de dos pares de terminales. En uso tiene un circuito de entrada que lleva al par de terminales de un extremo y un circuito de salida que va desde el par en el otro extremo. El rectángulo en el diagrama puede contener un filtro eléctrico o una red igualadora, un transformador o un am-

plificador; en un sistema de control puede ser un elemento de servomecanismo. Existen innumerables posibilidades.

Este rectángulo con el nombre de red descriptivo pero incómodo de dos pares de terminales,* o su más fácil abreviación de *red de dos puertos*, no es una red general de cuatro terminales. Está restringida por el requerimiento de que la corriente en una terminal de un par debe ser en cada instante igual y opuesta a la corriente en la otra terminal en ese par, como en la Fig. 18-1. La distinción

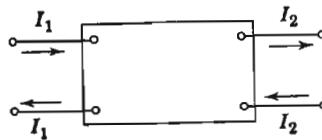


FIG. 18-1. Red de dos pares de terminales o de dos puertos

se encuentra en el circuito externo: una red de dos puertos no tiene conexión entre el circuito externo del lado derecho y el circuito externo del lado izquierdo excepto a través de la red de dos puertos. Siendo esto cierto, las corrientes en los pares de terminales *deben* ser iguales y opuestas.

Un ejemplo obvio de una red de cuatro terminales que no es una red de dos pares de terminales, es una carga trifásica con su conexión neutra manifestada como una cuarta terminal. Por otro lado, un transformador monofásico de potencia en uso ordinario es una red de dos puertos.

En sistemas telefónicos, un circuito transcontinental puede consistir de literalmente cientos de redes de dos puertos en cascada. Muchos de éstos son amplificadores. El diseño moderno de amplificadores se emplea en los mismos conceptos que el diseño de redes pasivas; y las ideas de este capítulo pueden encontrarse aplicables para redes de amplificación que incluyen bulbos electrónicos y transistores tanto como elementos bilaterales pasivos.

2. Formas útiles

¿Qué hay dentro del rectángulo de una red de dos puertos? Excepto que los elementos deben ser lineales para los métodos ordinarios de análisis que aplicamos, y que deben escogerse adicionalmente para limitar la discusión a elementos que son pasivos y bilaterales, no existe restricción. Cualquier cantidad de complicación es permisible. Sin embargo, existen unos pocos arreglos de elementos que son comúnmente los más útiles y será provechoso presentarlos para su inspección en la Fig. 18-2.

Una red de dos pares de terminales está hecha en general de algunas redes de un par de terminales. Cada una de ellas, representada por un pequeño rectángulo en la Fig. 18-2, puede ser una resistencia única o impedancia, pero en general cada una será (una red de un par de terminales) de cualquier grado de complejidad.

Se observará que la red *H* es esencialmente una *T balanceada*; esto es, si las impedancias en serie superiores e inferiores son iguales, el sistema puede estar eléctricamente balanceado a tierra. Similarmente, el cuadrado puede ser una *π* balanceada. La escalera se muestra desbalanceada, esto es usual, pero también puede construirse en forma balanceada. La celosía está balanceada inherentemente.

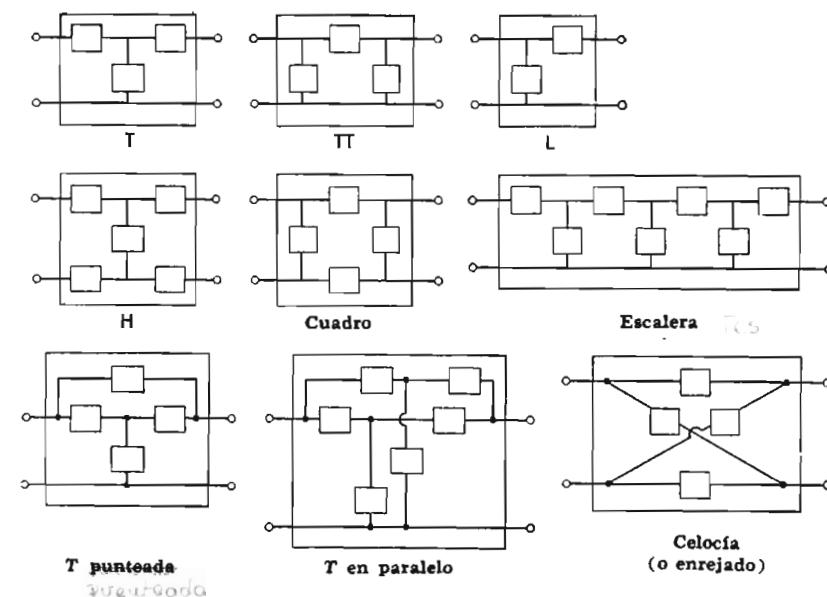


FIG. 18-2. Formas ilustrativas de redes de dos pares de terminales

La *L* se considera a veces el bloque básico de construcción; dos redes *L* pueden unirse para formar una *T*, o colocándola de otra manera puede formar una *π*, o varias forman una escalera. La *T*

* También se llama red de acoplamiento un transductor eléctrico, tetrapolar (*fourpole*, que viene del alemán *Vierpol*), o dos pares de terminales. El término *red de dos puertos*, que empieza a estar en uso, bien puede adoptarse generalmente.

puenteada, T en paralelo y celosía, sin embargo, son bastante distintas, y son en general más flexibles, más complicadas y más caras.

Con excepción de la L, cualquiera de estas redes puede ser simétrica o no simétrica. Una red simétrica puede cambiarse extremo por extremo sin afectar el resto del sistema de la que es parte. Si una T tiene brazos idénticos es obviamente simétrica. Si una II tiene elementos en paralelo iguales es simétrica. Una escalera puede tener simetría estructural obvia, pero puede tener también simetría eléctrica de acuerdo con esta definición de extremo por extremo aun si sus dos extremos son radicalmente diferentes en estructura.

Se supone que los pequeños rectángulos que constituyen las redes no están acoplados magnéticamente uno a otro por inductancia mutua; las únicas conexiones son los alambres conductores mostrados en los diagramas. Dentro de los rectángulos, cada red de un par de terminales consiste de elementos que pueden tener resistencia, capacitancia, autoinductancia y mutuoinductancia. La última posibilidad hace a los transformadores aceptables como elementos del circuito. Existe la posibilidad teórica de tener capacitancia mutua también, pero esto no se desea en la práctica excepto quizás, como un resultado no deseado de campos eléctricos desviados.

3. Tipos de problemas

Las preguntas que más comúnmente se originan con las redes de dos puertos pueden agruparse en tres clasificaciones mayores:

1. El problema de transferencia. Se requiere encontrar el voltaje o la corriente en las terminales de salida en función del voltaje o la corriente en las terminales de entrada, estando las terminales de salida, ya sea (a) en circuito abierto o (b) cortocircuitadas.

2. El problema de transmisión. Se requiere encontrar la potencia (o el voltaje y la corriente) de un par de terminales en función de la potencia (o el voltaje y la corriente) en el otro par de terminales.

a. Las condiciones terminales para la transmisión pueden ser bastante generales y no restringidas, o

b. Puede especificarse que la impedancia conectada a las terminales de salida es igual a un valor particular conocido como las impedancias de imagen de la red de dos puertos.

3. El problema de inserción. Se requiere encontrar el efecto de insertar una red de dos puertos en un sistema. Por ejemplo, un filtro, una red igualadora, o cualquier dispositivo tal que puede insertarse en un circuito para mejorar su operación. El voltaje, la corriente o

la potencia hacia la carga después de la inserción de la red de dos puertos se encontrará en función del voltaje, la corriente o la potencia hacia la carga antes de la inserción.

Estos problemas (y particularmente los dos primeros tipos) nos recuerdan fuertemente las funciones de transferencia que fueron discutidas en las Secs. 10-2 y 10-7. La admitancia de transferencia apareció por primera vez en la solución de las ecuaciones de malla generales y la impedancia de transferencia se presentó en la solución de las ecuaciones de nodos generales.

Por consiguiente, como un primer paso, veamos cómo las ecuaciones de malla y de nodo se aplican a las redes de dos puertos, y cómo los parámetros de transferencia y de punto impulsor caracterizan a las redes.

4. Ecuaciones de malla

La Fig. 18-3 muestra un rectángulo con dos pares de terminales. Dentro de él se encuentra una red pasiva bilateral. Las ecuaciones de malla pueden escribirse para esta red como para cualquier otra, pero deberán escribirse con bastante generalización porque hasta este momento no sabemos los detalles de la red dentro del rectángulo; aún más, no sabemos ni siquiera el número de mallas. Pero

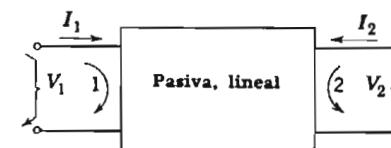


FIG. 18-3. Análisis de nodos y mallas de la red de dos puertos

se pueden asignar números indicadores a las mallas arbitrariamente, y empezaremos numerando la malla de la izquierda incluyendo el voltaje impuesto V_1 , como malla 1. Cualquier malla puede llamarse malla 2, y escogemos para asignar este número a la malla a la derecha que contiene el voltaje impuesto V_2 . Las mallas dentro del rectángulo se numerarán de 3 en adelante. Ninguna de las mallas internas tienen fuente; los voltajes aplicados en las mallas 1 y 2 son V_1 y V_2 respectivamente y los voltajes aplicados en todas las otras mallas son 0.

Por tanto, podemos escribir de las Ecs. 10-10,

$$\begin{aligned} I_1 &= y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \\ I_2 &= y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \end{aligned} \quad (18-1)$$

Estas ecuaciones se escriben con V (en vez de E) para enfatizar que el voltaje en el par de terminales no es necesariamente el resultado de fuentes electromotrices directamente aplicadas; cada par de terminales puede conectarse a una fuente, o puede conectarse a alguna combinación de fuente e impedancia, o (en un extremo) puede ser únicamente una red de impedancias pasivas. Todo esto queda estipulado definitivamente y el voltaje en un extremo será V_1 (por cualquier razón) y el voltaje en el otro extremo será V_2 .

Los parámetros en estas Ecs. y_{11} , y_{22} , y_{12} y y_{21} , se presentaron en el Cap. 10. Fueron definidas como las razones de ciertos cofactores al determinante de las ecuaciones de malla. En una red bilateral, $y_{12} = y_{21}$, así, hay únicamente tres parámetros diferentes. Tiene el siguiente significado físico.

Si V_2 se hace igual a cero—esto es, si se aplica un cortocircuito entre las terminales del par 2—y se hacen mediciones en el par de terminales 1, conocemos por las Ecs. 18-1 que:

$$\begin{aligned} I_1 &= y_{11}V_1 && \text{de la que} & y_{11} &= \frac{I_1}{V_1} \\ I_2 &= y_{21}V_1 && \text{de la que} & y_{21} &= \frac{I_2}{V_1} \end{aligned} \quad (18-2)$$

Si ahora, el cortocircuito se quita del par de terminales 2 y se pone en el par de terminales 1, haciendo $V_1 = 0$ mientras que se hacen mediciones en el par de terminales 2, encontramos que:

$$\begin{aligned} I_2 &= y_{22}V_2 && \text{de la que} & y_{22} &= \frac{I_2}{V_2} \\ I_1 &= y_{12}V_2 && \text{de la que} & y_{12} &= \frac{I_1}{V_2} \end{aligned} \quad (18-3)$$

Así vemos que las y son las razones entre corrientes y voltajes fácilmente medibles.

Nada de este desarrollo es nuevo; se hizo todo en el Cap. 10. Los parámetros y_{11} y y_{22} se llamaron admitancias de punto impulsor y y_{12} y y_{21} (que son iguales) la admittance de transferencia. Debemos ahora ser más específicos de una manera. Ahora que hablamos de una red con dos pares de terminales es necesario, mientras hacemos mediciones en un par, especificar cuál está conectado en el otro par. Por lo tanto, puesto que los tres parámetros de las Ecs. 18-2 y 18-3 se están midiendo mientras que el otro par de terminales se cortocircuita, las llamamos *admitancia en cortocircuito de punto impulsor* y *admitancia en cortocircuito de transferencia* respectivamente. Tendremos dentro de poco algunos parámetros diferentes con nombres algo similares.

5. Ecuaciones de nodo

Las ecuaciones de nodo también pueden escribirse para la red de dos puertos de la Fig. 18-3. En las ecuaciones de nodo V_1 y V_2 son voltajes en pares de nodos.* Se ha especificado que el circuito externo provee corrientes I_1 en un par de terminales e I_2 en el otro. Como no existen fuentes dentro de la red pasiva éstas son las dos únicas corrientes impuestas. Las Ecs. 10-29 por lo tanto se reducen a

$$\begin{aligned} V_1 &= z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \\ V_2 &= z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \end{aligned} \quad (18-4)$$

Aquí tenemos otro juego de parámetros familiares. Por definición, las z son razones de cofactores al determinante de las ecuaciones de nodo. En el Cap. 10 fueron llamadas impedancias de punto impulsor y de transferencia. En nuestro presente trabajo con redes de dos puertos es necesario ser más específico. A continuación se mostrará que estas z tienen un significado físico simple cuando se hacen mediciones en un par de terminales mientras que el otro par de terminales está en circuito abierto. Por lo tanto z_{11} y z_{22} se llaman *impedancias de circuito abierto de punto impulsor* y z_{12} y z_{21} (que son iguales) la *impedancia de circuito abierto de transferencia*.

* En el Cap. 9, los voltajes de nodo fueron medidos para cada "nodo independiente" con respecto a un nodo "de referencia". Esto es conveniente pero no necesario. En el trabajo presente se seleccionaron N pares de nodos independientes de tal modo que un par es el par 1 y el otro es el par terminal 2. Estos pueden o pueden no tener un nodo común de "referencia".

Para mostrar la interpretación física, I_2 se fuerza a ser cero dejando un circuito abierto en el par de terminales 2 mientras que se hacen mediciones en el par de terminales 1. Entonces, según las Ecs. 18-4

$$\begin{aligned} V_1 &= z_{11}I_1 \quad \text{de la que} \quad z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \\ y \\ V_2 &= z_{21}I_1 \quad \text{de la que} \quad z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \end{aligned} \quad (18-5)$$

El punto de medición se cambia entonces al par de terminales 2. I_1 se fuerza a ser cero dejando un circuito abierto en el par de terminales 1, y

$$\begin{aligned} V_2 &= z_{22}I_2 \quad \text{de la que} \quad z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \\ y \\ V_1 &= z_{12}I_2 \quad \text{de la que} \quad z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \end{aligned} \quad (18-6)$$

Así, pueden obtenerse por simple medición las impedancias de punto impulsor y de transferencia de *circuito abierto*.

Aplicando primero el método de mallas a nuestra red de dos puertos, y a continuación aplicando el método de nodos de solución, se habrán obtenido dos conjuntos de parámetros. Existen tres parámetros diferentes en cada conjunto: tres diferentes y y tres diferentes z . Cada uno de estos conjuntos es suficiente para decir todo acerca de la red de dos puertos, para caracterizarla. ¿Por qué entonces nos tomamos tanto trabajo para encontrar dos conjuntos tales cuando cualquiera de ellos es suficiente?

Obviamente las y y z pueden no ser independientes puesto que ambas describen la misma red. Más aún, las relaciones están implícitas en las Ecs. 18-1 y 18-4. Es importante reconocer que estas relaciones existen, aunque el álgebra, no siendo de valor inmediato se relega a una nota al pie de la página.*

* Las relaciones entre y y z se encuentran como sigue: la resolución simultánea de las Ecs. 18-1 para V_1 da

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} I_1 & y_{12} \\ I_2 & y_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}} = \frac{y_{22}}{\Delta \text{ de } y's} I_1 - \frac{y_{12}}{\Delta \text{ de } y's} I_2 \quad (18-7)$$

Pero según las Ecs. 18-4

6. Funciones de transferencia

La admitancia de transferencia en corto circuito y_{12} (o y_{21}) y la impedancia de transferencia en circuito abierto z_{12} (o z_{21}) serán muy útiles en cierto tipo de problemas. Por ejemplo, la Fig. 18-4a muestra una red de dos puertos entre pasos de un amplificador de tubo al vacío. La entrada a la red es la corriente I_1 , la corriente de placa de un tubo. El voltaje V_2 de la red se aplica a la rejilla del siguiente tubo. Por la inclusión de la capacitancia de la rejilla dentro de la red se ingenó para que la corriente de salida de la red de dos puertos sea cero. Con esta condición, el voltaje de rejilla del segundo tubo está relacionado a la corriente de placa en el primer tubo por z_{21} para (según Ecs. 18-5) $z_{21} = V_2/I_1$. Un ejemplo de un problema tal se dará en la Sec. 7. Otras aplicaciones similares de la función de impedancia de la transferencia de circuito abierto se imaginarán fácilmente.

La función de admitancia de transferencia en corto circuito se aplica cuando el dispositivo conectado a las terminales de salida de una red puede concebirse como que está cortocircuitando dichas terminales. Hay muchos ejemplos entre los circuitos de control con voltaje de entrada conocido y alguna clase de dispositivo actuando por corriente en el extremo de salida (la impedancia de este dispositivo se incluyó como parte de la red de modo que las terminales de salida de la red de dos puertos pueden considerarse como cortocircuitadas). En la Fig. 18-4b, por ejemplo, V_1 puede ser una señal de error amplificada desde un tacómetro e I_2 la corriente del campo de control de una máquina, quizás de tipo "amplidyne", en un sistema diseñado para suministrar velocidad constante en algún proceso industrial.

Estas dos funciones de transferencia, z_{12} e y_{12} , no son las únicas de interés común. La razón del voltaje de salida en circuito abierto al voltaje de entrada también se utiliza a menudo. La razón de la corriente de salida en corto circuito a la corriente de entrada es otra posibilidad, y en la Sec. 13 estudiaremos una función de transferencia que relaciona el voltaje de salida con el voltaje de entra-

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \quad (18-8)$$

Por lo tanto

$$z_{11} = \frac{y_{22}}{\Delta \text{ de } y's} \quad y \quad z_{12} = -\frac{y_{12}}{\Delta \text{ de } y's} \quad (18-9)$$

Las otras relaciones se encuentran de una manera semejante.

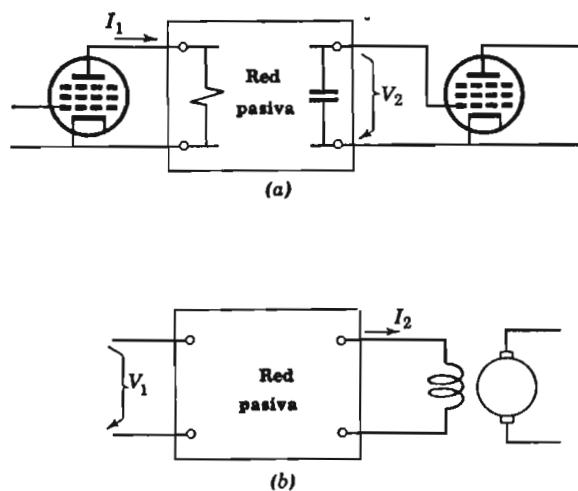


FIG. 18-4. Circuitos que ilustran (a) la impedancia de transferencia de circuito abierto y (b) la admitancia de transferencia en cortocircuito

da, cuando las terminales de entrada no están ni en circuito abierto, ni cortocircuitadas, pero tienen conectada a ellas la impedancia particular llamada impedancia de imagen.

Las funciones de transferencia en circuito abierto y en corto circuito pueden calcularse de las ecuaciones de malla o de las ecuaciones de nodo de la red de dos puertos, también están definidas en el Cap. 10. A menudo pueden calcularse más fácilmente por mera inspección de la red y aplicación de principios más elementales de combinación en serie y paralelo. Dos ejemplos se dieron en la Sec. 8 del Cap. 17. Las funciones de transferencia consideradas allí, no difieren en ninguna manera de las funciones de transferencia de este capítulo; su significado es claramente el mismo aunque la terminología de las redes de dos puertos no se presentó en ese momento. Otro ejemplo se dará ahora.

7. Ejemplo

La red mostrada en la Fig. 18-5a es de considerable importancia práctica; es una red interetapa de amplificador con acoplamiento por transformador o de doble sintonización. Puede muy bien ser la red pasiva representada por el cuadrado en la Fig. 18-4a. El problema es el de encontrar V_2 en función de I_1 , conociendo que $I_2 = 0$. En

otras palabras, se desea la impedancia de transferencia de circuito abierto.

El primer paso es sustituir por el transformador un circuito equivalente T como en la Fig. 18-5b. Son posibles varios equivalentes, pero éste (de la Fig. 12-7) es quizás el más simple.

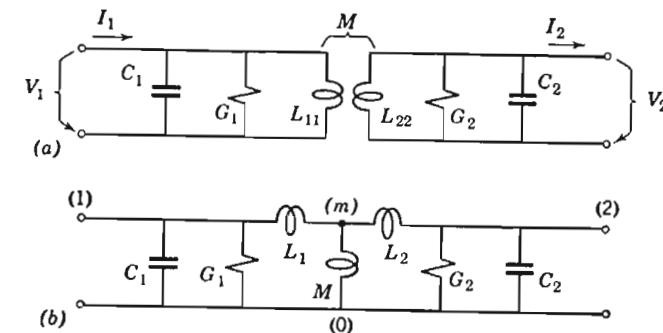


FIG. 18-5. Red con acoplamiento por transformador, y un circuito equivalente

Debido al gran número de ramas y el pequeño número de nodos, y porque se desea el voltaje de salida y se da la corriente de entrada, es claramente un problema atacar por medio de las ecuaciones de nodo. Existen únicamente tres nodos independientes, marcados (1), (m) y (2) en el diagrama, y el nodo de referencia es (O). Las ecuaciones de nodo se escriben fácilmente de la manera usual:

$$\begin{aligned} \left(G_1 + j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_1} \right) V_1 - \frac{1}{j\omega L_1} V_m &= I_1 \\ - \frac{1}{j\omega L_1} V_1 + \left(\frac{1}{j\omega M} + \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{j\omega L_2} \right) V_m - \frac{1}{j\omega L_2} V_2 &= 0 \quad (18-10) \\ - \frac{1}{j\omega L_2} V_m + \left(G_2 + j\omega C_2 + \frac{1}{j\omega L_2} \right) V_2 &= 0 \end{aligned}$$

En función del determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} G_1 + sC_1 + \frac{1}{sL_1} & -\frac{1}{sL_1} & 0 \\ -\frac{1}{sL_1} & \frac{1}{sM} + \frac{1}{sL_1} + \frac{1}{sL_2} & -\frac{1}{sL_2} \\ 0 & -\frac{1}{sL_2} & G_2 + sC_2 + \frac{1}{sL_2} \end{vmatrix} \quad (18-11)$$

(en el que s se escribe en vez de $j\omega$) encontramos V_2 por solución simultánea de las Ecs. 18-10 siendo

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} G_1 + sC_1 + \frac{1}{sL_1} & -\frac{1}{sL_1} & I_1 \\ -\frac{1}{sL_1} & \frac{1}{sM} + \frac{1}{sL_1} + \frac{1}{sL_2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{sL_2} & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} \quad (18-12)$$

$$= \frac{I_1}{\frac{s^2 L_1 L_2}{\Delta}}$$

Ahora el determinante Δ puede evaluarse en función de las constantes del circuito de la Fig. 18-5. Esto es tedioso, y lo que es peor (para nuestro presente propósito), la esencia del proceso se oscurece por medio de símbolos. Más bien veamos qué clase de cantidad representa Δ . Suponiendo que los valores numéricos se insertan en los determinantes para cada G , C , L y M , y se desarrolla el determinante; la inspección de la Ec. 18-11 muestra que Δ queda como una función racional con un numerador de polinomio de la forma $s^4 + K_1 s^3 + K_2 s^2 + K_3 s + K_4$ y para el denominador queda el término único $K_5 s^3$. Se comprenderá que cada K representa un número, una combinación de las constantes del circuito.

Teniendo Δ en esta forma para utilizar en la Ec. 18-12, la solución de nuestro problema puede ponerse en la forma

$$\frac{V_2}{I_1} = K_6 \frac{s}{s^4 + K_1 s^3 + K_2 s^2 + K_3 s + K_4} \quad (18-13)$$

(K_6 es otra constante, una combinación de K_5 y $L_1 L_2$). El polinomio en el denominador puede escribirse en forma factorizada:

$$\frac{V_2}{I_1} = K_6 \frac{s}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4)} \quad (18-14)$$

Esta función de transferencia tiene un cero, en el origen, y cuatro polos. Los polos, en s_1 , s_2 , s_3 y s_4 , serán complejos para redes prácticas de interetapa (siendo la Q de los circuitos relativamente alta aun para amplificadores de video de banda ancha) y, siendo complejos, estarán en pares conjugados.

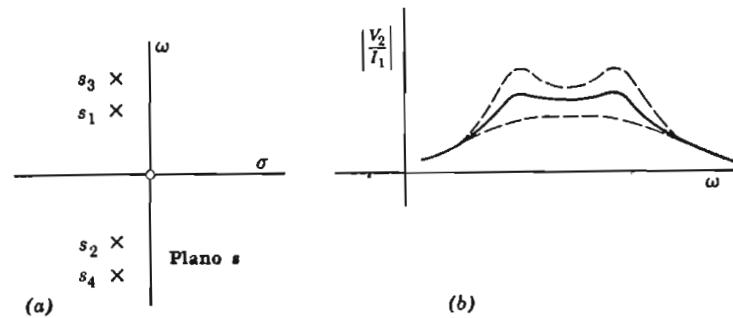


FIG. 18-6. Dependencia en la frecuencia de una función de transferencia: circuito con acoplamiento por transformador

La Fig. 18-6 muestra un posible arreglo de dos pares conjugados de polos en el plano complejo s , y el cero se muestra en el origen. Visualizando (como en el Cap. 16) una superficie elástica por encima del plano s , y considerando la forma de su trazo sobre un plano contenido en el eje ω , vemos que la función de transferencia de esta red de acoplamiento por transformador o doble sintonización es casi como la mostrada en la Fig. 18-6b. La forma de la curva depende de la relación de los parámetros. La curva llena está de acuerdo con los polos mostrados en el plano; si los polos se mueven acercándose al eje (Q más alta) las dos jorobas en la curva se van haciendo más prominentes, si los polos se mueven alejándose del eje tendrá únicamente una joroba en lugar de dos. Las líneas no continuas en la figura sugieren estas posibilidades. Los polos en el plano s pueden estar muy apartados o muy cercanos, determinados por las frecuencias naturales de las dos partes del circuito tomadas independientemente.

temente. Un polo puede estar más alejado del eje ω que el otro si las Q son diferentes, dando simetría de las jorobas.

Una red de interetapa de este tipo es útil para amplificación con amplitud razonablemente uniforme en una banda deseada de frecuencias, eliminando bruscamente cualquier exponente de frecuencia más alta o más baja de la salida. Una cantidad respetable de información acerca de sus características se puede obtener fácilmente aun de este breve estudio, y un estudio más cuidadoso desde el mismo punto de vista proveerá tanto un análisis preciso como datos para el diseño.* Debería hacerse notar, sin embargo, que el concepto del polo y ceros en el plano s no es esencial para la interpretación de la Ec. 18-13; el concepto es conveniente, pero el mismo resultado puede alcanzarse por otros métodos.†

8. Funciones generales de redes

Cuando no hay nada distintivo acerca de la terminación de una red de dos puertos—cuando no está en circuito abierto, ni en corto circuito, y la impedancia conectada a las terminales de salida puede ser de cualquier valor especificado—tenemos el problema de transmisión en su polo más general. Consideremos las ecuaciones que puedan ser utilizables para su solución.

Considerando las Ecs. 18-1:

$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \quad \text{y} \quad I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \quad (18-15)$$

Estas ecuaciones son bastante generales, pero no parecen ser convenientes para un problema de transmisión. Están adaptadas para suministrar corriente en función de dos voltajes conocidos, y sería un problema más bien raro en el que los voltajes en ambos extremos de una red de dos puertos fueran dados. Las Ecs. 18-4 son también generales pero inconvenientes; éstas dan voltaje en cualquier extremo en función de ambas corrientes.

Más comúnmente, en este problema de transmisión general, se conocen el voltaje y la corriente en un extremo, y el voltaje y la corriente en el otro extremo se deben encontrar. Un par de ecuaciones especialmente utilizables para estos datos tendrían la forma

$$V_s = AV_r + BI_r \quad (18-16)$$

* Esto está hecho, por ejemplo, en la Referencia 27 (*Amplifier Circuit Theory* de Pettit), Parte B.

† Ver "acoplamiento por transformador" en *Radio Engineering* de Terman (Referencia 19).

$$I_s = CV_r + DI_r \quad (18-17)$$

donde V_s e I_s son cantidades del extremo transmisor, V_r e I_r , del extremo receptor, como en la Fig. 18-7. Veamos si se pueden encontrar valores para A , B , C y D .

Las Ecs. 18-15 (de la 18-1) contienen la información necesaria si pueden rearrreglarse en la forma deseada. Primero escribamos nuevamente estas ecuaciones utilizando los símbolos de la Fig. 18-7 (el único cambio significativo es que la flecha para I_r es opuesta a la flecha para I_2 de la Fig. 18-3, por lo que $I_r = -I_2$):

$$I_s = y_{11}V_s + y_{12}V_r \quad (18-18)$$

$$-I_r = y_{21}V_s + y_{22}V_r \quad (18-19)$$



FIG. 18-7. Notación utilizada con los parámetros de red A , B , C , D

Resolviendo la Ec. 18-19 para V_s ,

$$V_s = -\frac{y_{22}}{y_{21}}V_r - \frac{1}{y_{21}}I_r \quad (18-20)$$

Pero esta es la misma forma que la de la Ec. 18-16, y una comparación simple muestra que los coeficientes deseados son

$$A = -\frac{y_{22}}{y_{21}} \quad B = -\frac{1}{y_{21}} \quad (18-21)$$

Resta encontrar C y D . Esto se hace sustituyendo la Ec. 18-20 en la Ec. 18-18 para eliminar V_s , dando

$$I_s = \left(y_{12} - \frac{y_{11}y_{22}}{y_{21}} \right) V_r - \frac{y_{11}}{y_{21}} I_r \quad (18-22)$$

La comparación con la Ec. 18-17 muestra que

$$C = y_{12} - \frac{y_{11}y_{22}}{y_{21}} \quad D = -\frac{y_{11}}{y_{21}} \quad (18-23)$$

A, B, C, y D se encontraron ahora en función de parámetros conocidos. Se les llama a menudo *constantes generales del circuito*, o constantes generales de la red, pero como son funciones de la frecuencia, y constantes solamente para una frecuencia única, el término *funciones generales de la red* es preferible.

9. Conjuntos de parámetros

Hemos desarrollado hasta ahora tres conjuntos de parámetros, las admitancias de corto circuito, las impedancias de circuito abierto, y las funciones *ABCD*, cualquiera de las cuales puede caracterizar por completo una red de dos puertos. Cualquiera de estos tres conjuntos puede calcularse de los otros; se dieron interrelaciones en las Ecs. 18-9, 18-21 y 18-23, y es fácil demostrar que *A, B, C, y D* están relacionadas con los parámetros de circuito abierto por:

$$A = \frac{z_{11}}{z_{21}} \quad B = \frac{z_{11}z_{22}}{z_{21}} - z_{12} \quad C = \frac{1}{z_{21}} \quad D = \frac{z_{22}}{z_{21}} \quad (18-24)$$

Cada conjunto consiste de cuatro parámetros, pero para redes bilaterales (y esto incluye todas las redes eléctricas pasivas ordinarias) los parámetros de transferencia son iguales (que es $y_{12} = y_{21}$ en un juego y $z_{12} = z_{21}$ en el otro juego) de modo que solamente hay tres admitancias de corto circuito independientes y solamente tres impedancias de circuito abierto independientes.

Esto sugiere fuertemente que *A, B, C, y D* pueden no ser todas independientes y de hecho no lo son. Si cualquiera de las tres se conocen, la cuarta puede calcularse. Están relacionadas por la ecuación

$$AD - BC = 1 \quad \text{o} \quad \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = 1 \quad (18-25)$$

Esto se prueba sustituyendo *A, D, B* y *C* en las Ecs. 18-25 de las Ecs. 18-21 y 18-23, dando

$$AD - BC = \frac{y_{11}y_{22}}{y_{21}^2} + \frac{y_{12}}{y_{21}} - \frac{y_{11}y_{22}}{y_{21}^2} = \frac{y_{12}}{y_{21}} \quad (18-26)$$

En un sistema bilateral, con $y_{12} = y_{21}$, las Ecs. 18-25 resultan. Así no hay más que tres parámetros *independientes* en el conjunto *ABCD* también.

La *simetría* de una red de dos puertos reduce el número de parámetros independientes a dos. La red simétrica si puede invertirse extremo por extremo en un sistema sin alterar el comportamiento del resto del mismo. En otras palabras, una red simétrica aparece como la misma (eléctricamente) cuando se ve desde cualquier par de terminales. Sin embargo, no quiere decir que necesariamente parezca la misma estructuralmente. Para satisfacer esta definición, una red simétrica debe tener $y_{11} = y_{22}$ y $z_{11} = z_{22}$. Sustituyendo la primera de éstas en las Ecs. 18-21 y 18-23, se ve que para una red simétrica $A = D$. Así, para una red simétrica existen solamente dos parámetros independientes en cada conjunto; esta conclusión nos será útil posteriormente.

10. Casos especiales

Uno de los ejemplos más simples de las redes de dos puertos es la red *T* de la Fig. 18-8a. Encontremos los valores *ABCD* de esta *T*.

Es más fácil encontrar *A, B, C* y *D* encontrando primero las impedancias de circuito abierto de *T*, porque éstas pueden obtenerse simplemente por inspección del circuito. Primero, deseamos z_{11} , z_{22}

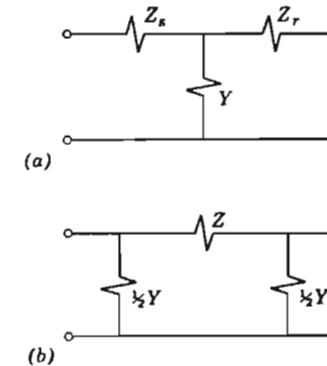


FIG. 18-8. Una red *T* y una red simétrica *II*

y z_{12} . Puesto que z_{11} es la impedancia del circuito de la Fig. 18-8 viéndola en el extremo transmisor mientras que el extremo receptor está abierto (Ecs. 18-5), es únicamente

$$z_{11} = Z_s + \frac{1}{Y} \quad (18-27)$$

Similarmente, viendo desde el otro extremo (según Ecs. 18-6),

$$z_{22} = Z_r + \frac{1}{Y} \quad (18-28)$$

A continuación se encuentra z_{12} . Cuando la corriente I está entrando en un extremo (y puede ser en uno o en otro), el voltaje entre el otro par de terminales (en circuito abierto) es I/Y , la razón de tal voltaje a la corriente es (según Ecs. 18-5 y 6) z_{21} o z_{12} , así

$$z_{21} = z_{12} = \frac{1}{Y} \quad (18-29)$$

El segundo paso es introducir estos valores en las Ecs. 18-24, para obtener, para cualquier red T:

$$A = Z_s Y + 1 \quad (18-30)$$

$$B = \frac{(Z_s + 1/Y)(Z_r + 1/Y)}{1/Y} - \frac{1}{Y} = Z_s Z_r Y + Z_r + Z_s \quad (18-31)$$

$$C = Y \quad (18-32)$$

$$D = Z_r Y + 1 \quad (18-33)$$

Para una red simétrica T —si $Z_s = Z_r$, y hacemos $Z_s + Z_r = Z$ — los valores ABCD se simplifican a

$$\begin{aligned} A &= 1 + \frac{1}{2}ZY & B &= Z + \frac{1}{4}Z^2Y = Z(1 + \frac{1}{4}ZY) \\ C &= Y & D &= 1 + \frac{1}{2}ZY \end{aligned} \quad (18-34)$$

Como un ejemplo numérico muy simple consideremos que cada uno de los elementos de la Fig. 18-8a tiene 4 ohms de resistencia pura. La red es simétrica; $Z = 8$ y $Y = \frac{1}{4}$, y utilizando las Ecs. 18-34.

$$A = 1 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{1}{4} = 2 \quad B = 8(1 + \frac{1}{4} \cdot 8 \cdot \frac{1}{4}) = 12$$

$$C = \frac{1}{4} \quad D = 2$$

Usando estos valores numéricos en las Ecs. 18-16 y 17 podemos encontrar V_s e I_s , para cualquier V_r e I_r :

$$V_s = 2V_r + 12I_r \quad I_s = \frac{1}{4}V_r + 2I_r$$

y éstas pueden verificarse probando varios ejemplos numéricos.

Como otro caso especial, la Fig. 18-8b muestra una red simétrica II. Encontremos los valores ABCD. Esto se calculará más fácilmente determinando primero las admitancias de corto circuito. La admittance viendo desde cualquier extremo de la Fig. 18-8b con el otro en corto circuito es

$$y_{11} = y_{22} = \frac{1}{2}Y + \frac{1}{Z} \quad (18-35)$$

Si un extremo, cortocircuitado, está llevando la corriente I , el voltaje aplicado entre las terminales en el otro extremo debe ser ZI . La razón es la admittance de transferencia en corto circuito y tomando en cuenta las flechas de referencia en la Fig. 18-3

$$y_{21} = y_{12} = -\frac{1}{Z} \quad (18-36)$$

Estas admittencias de corto circuito se sustituyen ahora, en las Ecs. 18-21 y 18-23 para encontrar los valores ABCD de la red simétrica II:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\frac{1}{2}Y + 1/Z}{1/Z} = 1 + \frac{1}{2}ZY & B &= Z \\ C &= -\frac{1}{Z} + \frac{(\frac{1}{2}Y + 1/Z)^2}{1/Z} = Y(1 + \frac{1}{4}ZY) & D &= A \end{aligned} \quad (18-37)$$

Como un ejemplo numérico simple, sea cada elemento de la Fig. 18-8b de 12 ohms de resistencia pura. (Estos valores se escogieron porque por los métodos de la Sec. 6-3, una II como ésta es equivalente a la T previa). Con estos valores numéricos, $Z = 12$ e $Y = \frac{1}{6}$. Entonces de las Ecs. 18-37:

$$A = 1 + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{1}{6} = 2 \quad B = 12$$

$$C = \frac{1}{6}(1 + \frac{1}{4} \cdot 12 \cdot \frac{1}{6}) = \frac{1}{4} \quad D = 2$$

Que estos valores son los mismos que se obtuvieron para la T en el ejemplo previo muestra que la II y la T son las más equivalentes.

Históricamente, las funciones ABCD fueron inventadas para manejar problemas en sistemas de potencia. Un transformador, por ejemplo, puede caracterizarse por sus funciones ABCD (o, a la frecuencia única de un sistema de potencia, sus constantes ABCD).

Es conveniente representar un transformador por su red equivalente T utilizando los métodos de la Ec. 12-10, y puesto que los transformadores se diseñan generalmente para ser aproximadamente simétricos (en el sentido eléctrico), las Ecs. 18-34 se aplicarán. Para transformadores de potencia, Z y Y son ambas generalmente pequeñas haciendo el producto ZY mucho menor que 1; por tanto a menudo existe un error, inapreciable al decir que $A = D = 1$, $B = Z$ y $C = Y$. Es por esta suposición que la prueba acostumbrada de corto circuito de un transformador puede decirse que da Z (realmente da B). La prueba acostumbrada del circuito abierto da C que es también Y.

La impedancia de un generador puede representarse por constantes apropiadas ($A = 1$, $B = Z$, $C = 0$, $D = 1$), y de la misma manera se puede hacer con todos los otros elementos lineales de un sistema de potencia. Los valores ABCD de las líneas de transmisión son especialmente útiles.* Cuando las constantes para diferentes partes del sistema son conocidas pueden combinarse y manipularse de varias formas.

Más recientemente, sin embargo estas constantes ABCD han encontrado uso en la teoría de redes de comunicación también. Nos referimos a ellas repetidamente en las páginas siguientes y en preparación para su uso será bueno derivar dos valores especiales.

IMPEDANCIA DE CIRCUITO ABIERTO. Las relaciones generales (Ecs. 18-16 y 17) son

$$\begin{aligned} V_s &= AV_r + BI_r \\ I_s &= CV_r + DI_r \end{aligned}$$

Estando el extremo receptor de cualquier red de dos puertos en circuito abierto, se requiere que $I_r = 0$. Entonces la impedancia viendo desde el extremo de transmisor V_s/I_s es simplemente

$$z_{1(\text{op})} = \frac{V_s}{I_s} = \frac{AV_r}{CV_r} = \frac{A}{C} \quad (18-37a)$$

IMPEDANCIA DE CORTOCIRCUITO. Si por otro lado, las terminales receptoras se cortocircuitan (en vez de dejarse en circuito abierto), entonces V_r debe ser cero, y con esta condición la impedancia vista desde el extremo transmisor es

* Ver por ejemplo el Cap. 11 del libro *Transmission Lines* del mismo autor (Referencia 5).

$$z_{1(\text{sh})} = \frac{V_s}{I_s} = \frac{BI_r}{DI_r} = \frac{B}{D} \quad (18-37b)$$

Estas relaciones que, como se habrá notado, son bastante generales, se desearán después.

11. Ecuaciones inversas

Las Ecs. 18-16 y 17 dan voltaje y corriente del extremo transmisor en función del voltaje y la corriente del extremo receptor. Estas ecuaciones se escriben nítidas y corrientemente en forma de matrices:

$$\begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r \\ I_r \end{bmatrix} \quad (18-38)$$

Esto, cuando se interpreta por las reglas de la Sec. 10-10, claramente dan las Ecs. 18-16 y 17. Para hacer nuestro trabajo aún más fácil, utilicemos [S] para la matriz del extremo transmisor, [K] para la matriz ABCD y [R] para la matriz del extremo receptor, escribiendo la Ec. 18-38 como

$$[S] = [K][R] \quad (18-39)$$

De esta forma muy abreviada la manipulación es fácil y requiere un mínimo de escritura.

La primera manipulación será para encontrar el voltaje y la corriente en el extremo receptor en función de cantidades del extremo transmisor, la inversa de lo que tenemos ahora. Esto es, deseamos encontrar [R] en función de [S] en vez de [S] en función de [R]. Esto se hace premultiplicando cada miembro de la Ec. 18-39 por $[K]^{-1}$. La matriz unitaria resulta cuando [K] se multiplica por $[K]^{-1}$, dando

$$[K]^{-1}[S] = [R] \quad \text{o} \quad [R] = [K]^{-1}[S] \quad (18-40)$$

Esto entonces es el resultado deseado, pero para ser útil es necesario encontrar $[K]^{-1}$.

$[K]^{-1}$ se encuentra de la Ec. 10-58:

$$[K]^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix} \quad (18-41)$$

Con las Ecs. 18-25 el determinante es igual a uno, por lo que $[K]^{-1}$ es justamente la matriz mostrada. Las Ecs. 18-40 pueden ahora desarrollarse en

$$\begin{bmatrix} V_r \\ I_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} \quad (18-42)$$

o finalmente, si se desea escribir las ecuaciones completas,

$$V_r = DV_s - BI_s \quad (18-43)$$

$$I_r = -CV_s + AI_s \quad (18-44)$$

Estas ecuaciones serán tan útiles como el par original.

12. Redes en cascada

Uno de los aspectos más valiosos de los parámetros $ABCD$ es el de que se combinan fácilmente para encontrar los parámetros completos cuando se tienen redes conectadas en cascada. La Fig. 18-9 muestra dos redes de dos puertos conectadas en cascada. Represen-

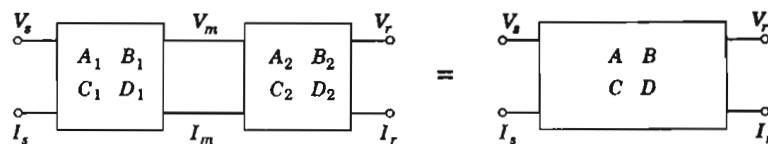


FIG. 18-9. Equivalencia de dos redes en cascada

temos la matriz $ABCD$ de la primera por $[K_1]$ y la de la segunda por $[K_2]$. Representemos la matriz de voltaje y corriente en el extremo transmisor por $[S]$, en el punto medio por $[M]$, y en el punto receptor por $[R]$.

Mirando ahora únicamente a la mitad del lado derecho

$$[M] = [K_2][R] \quad (18-45)$$

Mirando a la mitad del lado izquierdo

$$[S] = [K_1][M] \quad (18-46)$$

Combinando estas dos ecuaciones,

$$[S] = [K_1][K_2][R] \quad (18-47)$$

Por lo que somos capaces de relacionar el voltaje y la corriente del extremo transmisor con el voltaje y la corriente del extremo receptor por medio del producto de matrices $[K_1][K_2]$.

Si, por definición,

$$[K] = [K_1][K_2] \quad (18-48)$$

entonces

$$[S] = [K][R] \quad (18-49)$$

$$\text{y } [K] = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1A_2 + B_1C_2 & A_1B_2 + B_1D_2 \\ C_1A_2 + D_1C_2 & C_1B_2 + D_1D_2 \end{bmatrix} \quad (18-50)$$

Con la ayuda de la Ec. 18-50, la ecuación de matrices 18-49 puede desarrollarse * en dos ecuaciones ordinarias:

$$V_s = (A_1A_2 + B_1C_2)V_r + (A_1B_2 + B_1D_2)I_r \quad (18-51)$$

$$I_s = (C_1A_2 + D_1C_2)V_r + (C_1B_2 + D_1D_2)I_r \quad (18-52)$$

Pero de hecho la Ec. 18-47 contiene toda la información que está en las Ecs. 18-51 y 52.

Si existen tres redes conectadas en cascada, las cantidades de salida estarán relacionadas con las cantidades de entrada por

$$[S] = [K_1][K_2][K_3][R] \quad (18-53)$$

Esta sería una relación algo cansada para escribir en la forma de las Ecs. 18-51 y 18-52.

13. Impedancia de imagen

Aunque las funciones $ABCD$ son excelentes para la mayoría de las condiciones generales de transmisión, hay muchas ocasiones en que un sistema más simple puede utilizarse. Refiriéndonos a la clasificación de la Sec. 3, discutiremos ahora una red de dos puertos que termina en su impedancia de imagen. Esto es de gran importancia porque la terminación en impedancia de imagen es una práctica común en casi todas las redes de comunicación particularmente en sistemas telefónicos. Por supuesto, de hecho, el ingeniero de comunicaciones no suministra parejas de impedancia de imagen con el fin de hacer las matemáticas más simples; lo hace para obtener la máxima potencia de transferencia. Esta es una coincidencia afortunada que el análisis y el diseño se hagan más fáciles al mismo tiempo.

* Si alguien lo escoge así, las Ecs. 18-51 y 52, las Ecs. 18-43 y 44, y aun la forma desarrollada de la Ec. 18-53 pueden obtenerse de las Ecs. 18-16 y 17 sin la ayuda de la abreviación por matrices.

En los siguientes párrafos discutiremos por lo tanto redes de dos puertos terminadas en impedancia de imagen (la impedancia de imagen se definirá al presente). También limitaremos la discusión a redes simétricas. Esto no es necesario, pero como la mayoría de las redes pasivas de transmisión son simétricas, y puesto que la simplicidad se incrementa grandemente por esta función, el caso general se dejará para tratarse en libros más avanzados.

La Fig. 18-10 muestra una red de dos puertos simétrica. Está caracterizada por las funciones A , B y C ; como es simétrica, $D = A$. Por lo tanto:

$$V_s = AV_r + BI_r \quad (18-54)$$

$$I_s = CV_r + AI_r \quad (18-55)$$

La impedancia de entrada a esta red es $z_1 = V_s/I_s$. La impedancia externa conectada a las terminales de salida es $z_2 = V_r/I_r$. Obviamente, la impedancia de entrada depende de cuál esté conectada a las terminales de salida, y por tanto el valor de z_1 depende del valor de z_2 . Cambiando z_2 resultará un cambio en z_1 también.

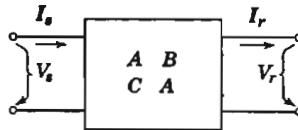


FIG. 18-10. Red simétrica pasiva y lineal

¿Hay algún valor de impedancia terminal para el que la impedancia de entrada sea igual a la impedancia terminal? ¿Podemos ajustar z_2 hasta que $z_1 = z_2$? Se mostrará que podemos hacerlo, y se ha dado un nombre especial para la impedancia que hace esto cierto. Se ha llamado la *impedancia de imagen*, * se utiliza el símbolo z_0 , y para una red terminada en su impedancia de imagen

$$z_1 = z_2 = z_0 \quad (18-56)$$

* Esta se ha llamado más propiamente la *impedancia iterativa*, pero para una red simétrica la impedancia de imagen y la impedancia iterativa son la misma, y la última es más fácil de visualizar. Correcta y generalmente, tanto para una red simétrica como asimétrica (o transductor), "La impedancia de imagen de un transductor son las impedancias con las que simultáneamente terminará cada par de terminales del transductor de tal manera que en cada par de terminales las impedancias en ambas direcciones son iguales". (American Standard, Referencia 8).

El valor de z_0 puede encontrarse en función de A , B , y C que caracterizan la red. Dividiendo la Ec. 18-54 entre la 18-55 da z_1 :

$$z_1 = \frac{V_s}{I_s} = \frac{AV_r + BI_r}{CV_r + AI_r} \quad (18-57)$$

Sustituyendo z_2I_r por V_r ,

$$z_1 = \frac{Az_2I_r + BI_r}{Cz_2I_r + AI_r} = \frac{Az_2 + B}{Cz_2 + A} \quad (18-58)$$

Pero, puesto que z_1 y z_2 deben ser iguales, y vamos a llamar la z_0 , la última puede sustituirse tanto por z_1 como por z_2 en la Ec. 18-58:

$$z_0 = \frac{Az_0 + B}{Cz_0 + A} \quad (18-59)$$

Ahora resolvemos para z_0 y el resultado es

$$z_0 = \sqrt{\frac{B}{C}} \quad (18-60)$$

Esta es la impedancia de imagen, expresada en función de B y C ; es el valor de la impedancia terminal que hace la impedancia de entrada igual a la impedancia terminal.

Aunque z_0 está adecuadamente expresada en función de B y C , se escribe más comúnmente en función de las impedancias de circuito abierto y cortocircuito, utilizando las Ecs. 18-37a y b. Puesto que

$$z_{1(\text{op})} = \frac{A}{C} \quad \text{y} \quad z_{1(\text{sh})} = \frac{B}{D} \quad (18-61)$$

$$z_{1(\text{op})}z_{1(\text{sh})} = \frac{AB}{CD} \quad (18-62)$$

Para una red simétrica, en la que $D = A$

$$z_{1(\text{op})}z_{1(\text{sh})} = \frac{B}{C} \quad (18-63)$$

y según la Ec. 18-60

$$z_0^2 = z_{1(\text{op})}z_{1(\text{sh})} \quad \text{o} \quad z_0 = \sqrt{z_{1(\text{op})}z_{1(\text{sh})}} \quad (18-64)$$

Esto es, la impedancia de imagen es simplemente la media geométrica, la raíz cuadrada del producto, de la impedancia de entrada en circuito abierto y la impedancia de entrada en cortocircuito. *

Como un *ejemplo numérico*, regresemos a la misma red T que utilizamos en la Sec. 10. La resistencia de cada elemento es de 4 ohms, como en la Fig. 18-11. Los valores ABCD, previamente calcu-

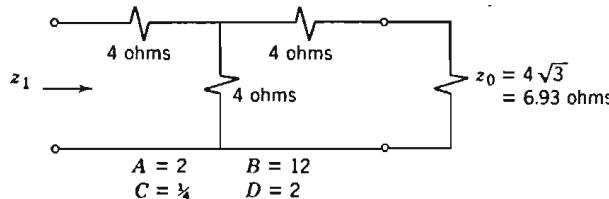


FIG. 18-11. Una red T terminada en z_0

lados, están dados con la figura. Ahora encontremos la impedancia de imagen. Según la Ec. 18-60

$$z_0 = \sqrt{\frac{12}{\frac{1}{4}}} = \sqrt{48} = 6.93 \text{ ohms}$$

Si ahora usamos este valor para la impedancia terminal deberíamos esperar, de acuerdo con la teoría anterior, que la impedancia de entrada z_1 sería también 6.93 ohms. ¿Es verdad esto? Probemos y veamos. Combinando en serie y paralelo

$$z_1 = 4 + \frac{(10.93)(4)}{(10.93) + (4)} = 4 + 2.93 = 6.93 \text{ ohms}$$

Así, como esperábamos, la impedancia de entrada es igual a la impedancia terminal cuando la impedancia terminal es la impedancia de imagen.

14. Función de transferencia de imagen

Cuando una red simétrica de dos puertos termina en su impedancia de imagen, el voltaje, la corriente y las relaciones de potencia

* Una red que no es simétrica tiene diferentes impedancias de imagen en los dos extremos: $z_{01} = z_{1(\text{op})}z_{1(\text{sh})}$ y $z_{02} = z_{2(\text{op})}z_{2(\text{sh})}$. En función de las funciones ABCD, $z_{01} = AB/CD$ y $z_{02} = BD/AC$.

son particularmente simples. Modifiquemos la Ec. 18-54 notando que cuando la impedancia terminal es z_0 , $I_r = V_r/z_0$ y

$$V_s = AV_r + BI_r = AV_r + B \frac{V_r}{z_0} \quad (18-65)$$

Dividiendo entre V_r , y sustituyendo la Ec. 18-60 por z_0 , encontramos que la función de transferencia

$$\frac{V_s}{V_r} = A + \sqrt{BC} \quad (18-66)$$

Esto puede simplificarse. Según Ecs. 18-25, $BC = AD - 1$ para cualquier red de dos puertos, y para una que es simétrica, $D = A$, dando $BC = A^2 - 1$. La Ec. 18-66 es entonces

$$\frac{V_s}{V_r} = A + \sqrt{A^2 - 1} \quad (18-67)$$

Podemos hacer dos cambios basados en las formas generales de la trigonometría hiperbólica: *

$$\operatorname{senh} x = \sqrt{\cosh^2 x - 1} \quad (18-68a)$$

$$e^x = \cosh x + \operatorname{senh} x \quad (18-68b)$$

Introducimos ahora arbitrariamente un nuevo símbolo γ que definimos diciendo que $\cosh \gamma = A$. Por lo que de la Ec. 18-68a, $\operatorname{senh} \gamma = \sqrt{A^2 - 1}$. Esta, sustituida en la Ec. 18-67, da

$$\frac{V_s}{V_r} = \cosh \gamma + \operatorname{senh} \gamma \quad (18-69)$$

lo que, según la Ec. 18-68b, es lo mismo que

$$\frac{V_s}{V_r} = e^\gamma \quad (18-70)$$

Este nuevo parámetro γ , que hace a la Ec. 18-70 muy simple, puede calcularse para cualquier red dada utilizando ya sea

* Son análogas a la más familiar $\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ y $e^{ix} = \cos x + j \operatorname{sen} x$; las fórmulas hiperbólicas pueden encontrarse en la Referencia 35 o 36, por ejemplo, o puede derivarse fácilmente.

$$\cosh \gamma = A \quad \text{o} \quad \tanh \gamma = \frac{\sinh \gamma}{\cosh \gamma} = \frac{\sqrt{A^2 - 1}}{A} = \frac{\sqrt{BC}}{A} \quad (18-70a)$$

La forma coseno es más simple, pero la forma tangente es útil porque puede cambiarse, utilizando las Ecs. 18-37a y b, a

$$\tanh \gamma = \sqrt{\frac{z_{1(\text{sh})}}{z_{1(\text{op})}}} \quad (18-70b)$$

una fórmula útil para cálculo.*

La relación bellamente simple de la Ec. 18-70, se aplica a una red † terminada en su impedancia de imagen. Puesto que las redes prácticas de comunicación a menudo en esta forma terminan, la ecuación es bastante importante. La aplicación a los filtros se verá en el siguiente capítulo.

Como una ilustración extremadamente simple prosigamos nuestro ejemplo numérico un paso más adelante. La red T de la Fig.

* Puesto que el radical de la Ec. 18-70b puede ser en general una cantidad compleja, se sigue que γ será en general también compleja. Para encontrar γ compleja de la Ec. 18-70b la trigonometría da el siguiente método (*Manual de Eshbach, Referencia 35*) puesto que γ es una cantidad compleja puede escribirse $\gamma = a + j\beta$. Por lo que, si $\tanh \gamma = \tanh(a + j\beta) = p + jq$, podemos expresar a y β en función de p y q como sigue:

$$\alpha = \frac{1}{2} \tanh^{-1} \frac{2p}{1 + p^2 + q^2} = 0.5756 \log_{10} \frac{(1 + p)^2 + q^2}{(1 - p)^2 + q^2}$$

$$\beta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2q}{1 - (p^2 + q^2)}$$

La atenuación α puede ahora calcularse con ayuda de una tabla de tangentes hiperbólicas o, quizás más fácilmente, unas tablas de logaritmos comunes; y β el ángulo de fase requiere únicamente una tabla de tangentes ordinarias. Para evitar valores espurios para β sin embargo, es necesario notar que si $p^2 + q^2 < 1$, el ángulo β puede únicamente tener valores que hagan $\cos 2\beta$ positivo, mientras que si $p^2 + q^2 > 1$, $\cos 2\beta$ debe ser negativo (*Rybnier, Referencia 36*). Otra comprobación para evitar valores espurios es sustituir α y β calculadas en la ecuación para $\tanh \gamma$ en la nota al pie de la página en la Sección 19-10 Pág. 590 para ver si los valores especificados de p y q se reproducen. Aun con estas comprobaciones, $\pm\pi$ puede sumarse a β .

† El desarrollo como se dio es para una red simétrica de dos puertos. Para una red asimétrica,

$$\frac{V_s}{V_r} = \sqrt{\frac{z_{01}}{z_{02}}} e^\gamma \quad (18-70c)$$

en lugar de la Ec. 18-70, y γ se calcula de la Ec. 18-70b, o de $\cosh \gamma = \sqrt{AD}$.

18-11 está terminada en su impedancia de imagen como se muestra; ¿cuál es la relación entre el voltaje de entrada y el de salida?

Primero encontraremos γ . Puesto que $\cosh \gamma = A = 2$, encontramos en una tabla de coseños hiperbólicos que $\gamma = 1.32$. Entonces

$$\frac{V_s}{V_r} = e^\gamma = e^{1.32} = 3.73$$

Una tabla de exponentiales da este último número, la respuesta de nuestro problema.

Es fácil comprobar en esta red simple. Supóngase que el voltaje en el extremo receptor entre las terminales de la impedancia terminal es 1 volt. La corriente en el extremo receptor es entonces $1/(4\sqrt{3})$. Usando el método de escalera, el voltaje entre las terminales del elemento en paralelo de 4 ohms es $1 + 1/\sqrt{3}$. La corriente en el extremo transmisor es $1/4 + 1/(2\sqrt{3})$. El voltaje en el extremo transmisor es $2 + \sqrt{3}$; puesto que esto es numéricamente 3.73, y el voltaje receptor es 1, el valor anterior para V_s/V_r está verificado.

RELACIÓN DE CORRIENTE. La Ec. 18-70 da la razón de voltaje entre las terminales de entrada y salida. Puesto que el voltaje y la corriente están relacionadas en cada par de terminales por la misma impedancia z_0 , deberán tener necesariamente la misma relación, así

$$\frac{I_s}{I_r} = e^\gamma \quad (18-71)$$

Refiriéndonos otra vez a nuestro ejemplo numérico, las cifras en el párrafo anterior dan la razón de la corriente:

$$\frac{I_s}{I_r} = e^{1.32} = 3.73$$

que es la misma que la razón del voltaje.

15. Funciones de atenuación y fase

La función γ es en general una cantidad compleja. En el ejemplo numérico de las fórmulas precedentes, con relación a una red puramente resistiva γ es puramente real, pero este es un caso especial: cuando se encuentran presentes reactancias podemos esperar que γ

tenga una componente real y una componente imaginaria. Llamemos arbitrariamente a ésta α y β respectivamente y escribamos, por definición

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (18-72)$$

Entonces, las Ecs. 18-70 y 71 se convierten en

$$\frac{V_s}{V_r} = \frac{I_s}{I_r} = e^\gamma = e^{\alpha+j\beta} = e^\alpha e^{j\beta} = e^\alpha / \beta \quad (18-73)$$

Por definición, α y β son números reales; e^α es real y según la Ec. 18-73

$$e^\alpha = \left| \frac{V_s}{V_r} \right| = \left| \frac{I_s}{I_r} \right| \quad (18-74)$$

Así, α muestra el cambio de magnitud entre las señales de entrada y salida y se llama apropiadamente la *función de atenuación* (es, en general, una función de la frecuencia). Una α grande corresponde a una gran pérdida de fuerza de la señal en la red. La diferencia de fase entre las señales de entrada y salida es β , y β se llama la *función de fase*.

Es posible que β sea igual a cero. Se vio un ejemplo en la red puramente resistiva de la sección precedente en la que la red atenúa una señal aplicada; las señales de entrada y salida están en fase una con otra.

Es posible que α sea cero. Una red de elementos puramente reactivos, por ejemplo, pueden dar una señal de salida de exactamente la misma magnitud que la señal de entrada, pero con una diferencia de fase de β , como veremos en el siguiente capítulo.

16. Nepers

Igual que γ , α y β son números sin dimensión; ahora es conveniente asignar nombres a las unidades en que se medirán. Puesto que β se ha interpretado como un ángulo, su unidad es naturalmente llamada *radián*. En la forma final de la Ec. 18-73 (aunque nunca en la forma exponencial) β puede expresarse en *grados*. Esté en grados o radianes, β es un valor sin dimensión, un ángulo que es básicamente la razón de dos distancias.

A la unidad de α se le ha dado un nombre que similarmente no tiene dimensión, el *néper*. Es conveniente hablar de atenuación de

cierto número de népers.* Nótese particularmente que la atenuación expresada en népers es una medida de una razón de voltaje o razón de corriente bajo ciertas condiciones especificadas, según la Ec. 18-74 es el logaritmo natural de la magnitud de la razón de voltaje o corriente:

$$\alpha = \ln \left| \frac{V_s}{V_r} \right| = \ln \left| \frac{I_s}{I_r} \right| \quad (18-75)$$

El néper no es, en general, una unidad para medir potencia o razón de potencia.

17. Razón de potencia

Si una red simétrica de dos puertos, terminada en su impedancia de imagen z_0 , y la componente real o resistiva de z_0 es r_0 , y la corriente de salida de la red es I_s , entonces, la potencia a la impedancia terminal es

$$P_r = |I_s|^2 r_0 \quad (18-76)$$

Al mismo tiempo, la potencia suministrada a la red en sus terminales de entrada (siendo también la impedancia de entrada igual a z_0) es

$$P_s = |I_s|^2 r_0 \quad (18-77)$$

La razón de potencias es

$$\frac{P_s}{P_r} = \left| \frac{I_s}{I_r} \right|^2 = e^{2\alpha} \quad (18-78)$$

forma final derivada de la Ec. 18-74. Así vemos que, para caso especial de una red simétrica de dos puertos terminada en su impedancia de imagen, el néper *puede* utilizarse como una medida de la razón de potencia.

18. Decibeles

Sin embargo, otra unidad ha sido inventada para el propósito particular de medir razones de potencia. Si la potencia de entrada es 10 veces la potencia de salida, la atenuación es de 1 bel. Si la

* De la forma latina, *Neperus*, de Napier, el matemático escocés (Siglo xvi) cuyo nombre está relacionado con los logaritmos.

potencia de entrada es 100 veces la potencia de salida, la atenuación es de 2 bels. La definición general es

$$\text{Atenuación medida en bels} = \log_{10} \frac{P_s}{P_r} \quad 18-79$$

El bel es más bien una unidad muy grande para uso práctico, por lo que se usa el *decibel*. El decibel es 1/10 bel, estando definido por

$$\text{Atenuación media en decibeles} = 10 \log_{10} \frac{P_s}{P_r} \quad 18-80$$

La razón de dos valores cualesquiera de potencia pueden medirse apropiadamente en decibeles (abreviado db). Esta puede ser potencia de entrada o de salida de una red de cualquier clase, o de un amplificador, o un sistema de servomecanismo, o aun, si se desea, la potencia de entrada y salida de un cuadernal de un apparejo o de la transmisión de un automóvil. Pero únicamente se mide legítimamente una razón de potencia en decibeles.* Se acostumbra hablar de un amplificador como que tiene ciertos decibeles de ganancia, o de una línea de transmisión como que tiene ciertos decibeles de pérdida. Si la pérdida o ganancia es 0 db, la potencia de salida y la potencia de entrada son iguales.

Si nos referimos ahora exclusivamente a una red simétrica de dos puertos terminada en impedancia de imagen, la Ec. 18-78 muestra que en tal red

$$\begin{aligned} \text{Atenuación en db} &= 10 \log_{10} \frac{P_s}{P_r} = 10 \log_{10} e^{2\alpha} = 20\alpha \log_{10} e \\ &= 20\alpha(0.4343) = 8.686\alpha \end{aligned} \quad (18-81)$$

Así, si podemos encontrar α para nuestro tipo de red en népers, podemos encontrar los decibeles de atenuación en la red multiplicando los népers por 8.686.

La Tabla 18-1 da las razones de potencia correspondientes a los valores en decibeles. Se encontrará conveniente recordar algunos de ellos. El sistema completo está basado en la relación:

$$\begin{aligned} 10 \text{ db da una razón de potencia de } 10 \\ 10 \cdot n \text{ db da una razón de potencia de } 10^n \end{aligned}$$

* La potencia (no la razón de potencia) se mide algunas veces en dbm. Esta es una expresión de decibeles de la razón de la potencia en cuestión a un valor standard a 1 milliwatt. Así 20 dbm son 100 miliwatts.

de lo que

- 20 db da una razón de potencia de 100
- 30 db da una razón de potencia de 1 000
- 60 db da una razón de potencia de 1 000 000

y así sucesivamente. Para diferencias menores:

- 1 db da una razón de potencia de cerca de $\frac{5}{4}$
- 3 db da una razón de potencia de cerca de 2
- 7 db da una razón de potencia de cerca de 5

Si únicamente éstos se recuerdan, los otros valores pueden estimarse cuando se necesiten añadiendo decibeles y multiplicando razones de potencia. Así 4 db es igual a $3 + 1$ db dando una razón de potencia de $2 \times \frac{5}{4}$ o $\frac{5}{2}$. También, 27 db es igual a $20 + 7$ db, dando una razón de potencia de 100×5 o (muy cerca de) 500.

EJEMPLO NUMÉRICO. En el ejemplo de la Fig. 18-11 encontramos (en la Sec. 14) que $\gamma = 1.32$. Según la Ec. 18-72, reconocemos que en esta red resistiva simple $\alpha = 1.32$ y $\beta = 0$.

La razón de la potencia de entrada a la de salida (Ec. 18-78) es

$$\frac{P_s}{P_r} = e^{2\alpha} = e^{2.64} = (3.73)^2 = 13.91$$

Por tanto, la potencia que entra a la red T de cerca de 14 veces la potencia recibida en la impedancia terminal para la que podemos asumir que tiene un propósito útil.

Las pérdidas de transmisión de decibeles pueden encontrarse de la Ec. 18-80 o (lo que es la misma cosa) de la Tabla 18-1, utilizando la razón de potencias calculadas:

$$\text{Db pérdidas} = 10 \log 13.91 = 10(1.143) = 11.4$$

Alternativamente, puede encontrarse utilizando el valor conocido de α en la Ec. 18-81:

$$\text{Db pérdidas} = 8.686\alpha = 8.686(1.32) = 11.4$$

RAZONES DE VOLTAJE Y CORRIENTE. Sustituyendo la Ec. 18-78 en la Ec. 18-80,

$$\text{Atenuación en db} = 10 \log \frac{P_s}{P_r} = 10 \log \left| \frac{I_s}{I_r} \right|^2 = 20 \log \left| \frac{I_s}{I_r} \right| \quad (18-82)$$

TABLA 18-1

RAZON DE POTENCIA EN DECIBELIOS

Deci- belios	Razón de potencia		Razón de potencia		Razón de potencia			
	Ganancia	Pérdida	Deci- belios	Ganancia	Pérdida	Deci- belios	Ganancia	Pérdida
0.1	1.02	.977	3.6	2.29	.437	7.1	5.13	.195
0.2	1.05	.955	3.7	2.35	.427	7.2	5.25	.191
0.3	1.07	.933	3.8	2.40	.417	7.3	5.37	.186
0.4	1.10	.912	3.9	2.45	.407	7.4	5.50	.182
0.5	1.12	.891	4.0	2.51	.398	7.5	5.62	.178
0.6	1.15	.871	4.1	2.57	.389	7.6	5.76	.174
0.7	1.17	.851	4.2	2.63	.380	7.7	5.89	.170
0.8	1.20	.832	4.3	2.69	.372	7.8	6.03	.166
0.9	1.23	.813	4.4	2.75	.363	7.9	6.17	.162
1.0	1.26	.794	4.5	2.82	.354	8.0	6.31	.159
1.1	1.29	.776	4.6	2.88	.347	8.1	6.46	.155
1.2	1.32	.759	4.7	2.95	.339	8.2	6.61	.151
1.3	1.35	.741	4.8	3.02	.331	8.3	6.76	.148
1.4	1.38	.724	4.9	3.09	.324	8.4	6.92	.145
1.5	1.41	.708	5.0	3.16	.316	8.5	7.08	.141
1.6	1.44	.692	5.1	3.24	.309	8.6	7.25	.138
1.7	1.48	.676	5.2	3.31	.302	8.7	7.41	.135
1.8	1.51	.661	5.3	3.39	.295	8.8	7.59	.132
1.9	1.55	.646	5.4	3.47	.288	8.9	7.76	.129
2.0	1.58	.631	5.5	3.55	.282	9.0	7.94	.126
2.1	1.62	.617	5.6	3.63	.275	9.1	8.13	.123
2.2	1.66	.603	5.7	3.72	.269	9.2	8.32	.120
2.3	1.70	.589	5.8	3.80	.263	9.3	8.51	.118
2.4	1.74	.575	5.9	3.89	.257	9.4	8.71	.115
2.5	1.78	.562	6.0	3.98	.251	9.5	8.91	.112
2.6	1.82	.550	6.1	4.07	.246	9.6	9.12	.110
2.7	1.86	.537	6.2	4.17	.240	9.7	9.33	.107
2.8	1.91	.525	6.3	4.27	.234	9.8	9.55	.105
2.9	1.95	.513	6.4	4.37	.229	9.9	9.77	.102
3.0	1.99	.501	6.5	4.47	.224	10.0	10.00	.100
3.1	2.04	.490	6.6	4.57	.219	Para mayores valores en db, sumar db y multiplicar las razones. Así para 36.5 db: Leer: 6.5 db, la razón es 4.47 sumar 30.0 db, multiplicando por 10 ³ . Por tanto: 36.5 db, la razón es 4470.		
3.2	2.09	.479	6.7	4.68	.214			
3.3	2.14	.468	6.8	4.79	.209			
3.4	2.19	.457	6.9	4.90	.204			
3.5	2.24	.447	7.0	5.01	.200			

Similarmente, en función del voltaje,

$$\text{Atenuación en db} = 20 \log \left| \frac{V_s}{V_r} \right| \quad (18-83)$$

Así, la atenuación en decibeles puede encontrarse de la razón del voltaje de entrada al voltaje de salida (o corriente). Puesto que la demostración utiliza la Ec. 18-78, el resultado se ha demostrado únicamente para una red simétrica de dos puertos terminada en su impedancia de imagen. De hecho, sin embargo, el resultado se aplica más ampliamente: una razón de potencia en decibeles puede determinarse de una razón de voltaje (Ec. 18-83) o de corrientes (Ec. 18-82) suponiendo que las potencias son proporcionales a los cuadrados de los voltajes en cuestión o a los cuadros de las corrientes. Esto es cierto, si los voltajes o corrientes están alimentados a impedancias iguales, pero no de otra manera.

Sin importar lo que pueda ser acostumbrado no es correcto medir una razón de voltaje (o de corriente) en decibeles a menos que ambos voltajes (corrientes) de la razón, estén aplicados a impedancias iguales. Cuando una red simétrica de dos puertos termina en su impedancia de imagen, el voltaje de entrada y el de salida son aplicados a z_0 , y todo está bien. Si la terminal fuese cualquier cosa en lugar de z_0 , no estaría todo bien.

La gran ventaja de una unidad logarítmica como el decibel (o el néper) es que la pérdida total en un determinado número de redes conectadas en cascada es que es meramente la suma de las pérdidas en las redes individuales. Por lo que si tres redes tienen una pérdida de 8 db cada una y un amplificador tiene una ganancia de 20 db, la pérdida total de las secciones conectadas en cascada es $8 + 8 + 8 - 20 = 4$ db.

19. Pérdidas por inserción

De los problemas mencionados al principio del capítulo, el problema de inserción permanece sin mencionar. La Fig. 18-12a muestra un circuito; una impedancia de carga z_L que tiene en sus terminales el voltaje V_o , la corriente I_o y la potencia P_o . En la parte b de la figura una red de dos puertos ha sido insertada en el circuito y el voltaje, la corriente y la potencia en las terminales de carga son ahora V_2 , I_2 y P_2 .

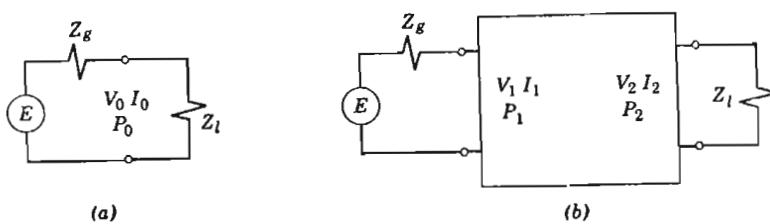


FIG. 18-12. Insercion de una red de dos puertos

Las dos razones que nos conciernen en el problema de inserción son V_0/V_2 y P_0/P_2 . Puesto que V_0 y V_2 ambas producen potencia en la misma impedancia Z_l se sigue que $P_0/P_2 = |V_0/V_2|^2$. También hay una razón de corriente I_0/I_2 , pero es igual a la razón de voltaje.

Similarmente en las pérdidas de trasmisión, es deseable una medición logarítmica, y se acostumbra decir

$$\text{Pérdida de voltaje por inserción} = \ln \left| \frac{V_0}{V_2} \right| \text{népers} \quad (18-84)$$

$$\text{Pérdida de potencia por inserción} = 10 \log \frac{P_0}{P_2} = 20 \log \left| \frac{V_0}{V_2} \right| \text{db} \quad (18-85)$$

Asociado con la pérdida de voltaje por inserción está el desplazamiento de fase por inserción, el ángulo por el cual V_2 atrasa a V_0 (relativo al voltaje del generador E).

Cualquiera de los cuatro conjuntos de parámetros de red que han sido discutidos en este capítulo puede utilizarse para el cálculo de las pérdidas por inserción. La elección está dictada por la conveniencia. Las fórmulas pueden contribuir a dar las pérdidas por inserción en función de los parámetros de la red junto con Z_l y Z_g . Estas, siendo bastante complicadas y utilizadas únicamente rara vez, no se desarrollarán aquí.

Puede hacerse notar que la diferencia entre el problema de transmisión y el problema de inserción es la de que el último toma en cuenta el efecto de inserción en la corriente que pasa por Z_g . El problema de transmisión relaciona V_2 a V_1 con la esperanza de que V_1 se mantenga constante. El problema de inserción supone que el voltaje de la fuente E permanece constante. La diferencia entre V_1 y E es la caída de voltaje en Z_g .

El problema de transmisión y el problema de inserción son indistinguibles en dos casos: (1) si $Z_g = 0$, o (2) si la inserción no cambia la corriente en Z_g . La última es cierto si Z_l es la impedancia de imagen de la red de dos puertos insertada (si es simétrica, o, si la red no es simétrica su impedancia iterativa). Esto es afortunado, porque las redes de dos puertos están a menudo terminadas en aproximadamente su impedancia de imagen y por tanto, el problema de inserción más difícil (que, en general, debe tomar en cuenta el sistema completo) se reduce al problema de transmisión que es más simple.

20. Emparejamiento por impedancia de imagen

Existen algunas razones para terminar cada red de dos puertos en su impedancia de imagen; una, relacionada con la máxima potencia transferida, amerita explicación adicional en este momento. La Fig. 18-13 muestra un sistema de comunicación que consiste de una fuente, una carga y dos redes de dos puertos intermedia. Si cada red es simétrica, con la impedancia de imagen de z_0 en cada par de ter-

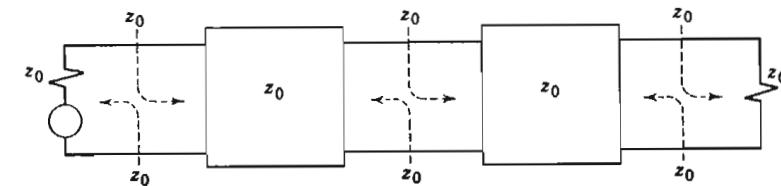


FIG. 18-13. Sistema emparejado sobre la base de la impedancia de imagen

minales, y la impedancia de la carga y la impedancia del generador son ambas iguales a z_0 , entonces el sistema se dice que tiene impedancias emparejadas sobre una base de impedancia de imagen. La impedancia "viendo en cualquier dirección" en cualquier punto intermedio es z_0 , como se indica por las flechas. (Nótese que si cualquiera de las impedancias se cambia, el emparejamiento falla en todos los puntos).

Se repetirá (Ec. 4-48) que la máxima potencia es recibida por una carga si la impedancia mirando hacia la carga es la conjugada de la impedancia mirando desde la carga hacia la red. Esto no es lo mismo para la condición para emparejamiento por impedancia de imagen a menos que la impedancia de imagen sea puramente resistiva. Pero es usual tener los sistemas prácticos para tener impedancia

de imagen que sea puramente resistiva y la consecuencia es la de que un sistema emparejado sobre una base de impedancia de imagen también suministra una potencia máxima de transferencia. Algunos valores convenientes * del nivel de impedancia se escogen y todas las redes conectadas en cascada se diseñan con esta impedancia de imagen. En la construcción real no se necesita un emparejamiento perfecto, y un emparejamiento aproximado es fácilmente obtenible.

Algunas veces es conveniente tener diferentes niveles de impedancia en diferentes partes del mismo sistema. En un sistema telefónico, por ejemplo, el equipo terminal puede tener 900 ohms como impedancia standard mientras que la impedancia de la línea es de 600 ohms. Pueden entonces usarse transformadores de emparejamiento de impedancia (ver Sec. 12-13). Como un medio alternativo de emparejamiento, una de las redes de dos puertos puede ser asimétrica. La red de dos puertos se designará entonces para emparejar impedancias diferentes en sus dos puertos, y así sirve como una red de emparejamiento de impedancia en adición a cualquier otro propósito que pueda tener.

El emparejamiento sobre una base de impedancia de imagen no es el único método de diseño que dará la máxima potencia de transferencia, pero tiene un buen número de ventajas que incluyen la simplicidad. Los filtros a la frecuencia de la banda de transmisión libre, están diseñados para terminar en su impedancia de imagen. El siguiente capítulo discutirá particularmente sobre filtros.

21. Sumario

Este capítulo comienza con una descripción de redes importantes de dos pares de terminales o de dos puertos. Los problemas que más comúnmente se presentan en el uso práctico de estas redes se clasificaron como (1) el problema de transferencia (2) el problema de transmisión, ya sea general o con terminal de impedancia de imagen, y (3) el problema de inserción.

Algunas familias de parámetros † son obtenibles para caracterizar redes de dos puertos: (1) admitancias de punto impulsor en cortocircuito y de transferencia, y_{11} , y_{12} , y_{21} , y_{22} ; (2) impedancias de

* El valor es algunas veces dictado por las líneas de transmisión asociadas, como 75 ohms para coaxial, 600 ohms para línea abierta, 900 ohms para conmutación; ver Referencia 5.

† Además de los mencionados pueden derivarse ciertos conjuntos híbridos que son útiles a veces para redes activas.

punto impulsor de circuito abierto y de transferencia, z_{11} , z_{12} , z_{21} , z_{22} ; (3) funciones generales de red, $ABCD$; y (4) la función de transferencia de imagen e impedancias de imagen, γ , z_{01} y z_{02} . (La función de atenuación de imagen α y la función de fase de imagen β son componentes de la función de transferencia de imagen γ). En cada familia tres parámetros son independientes; si la red es simétrica, únicamente, dos en cada familia son independientes.

Las razones de voltaje o corriente se expresaron logarítmicamente, con el néper y radián como unidades de magnitud relativa y ángulo. Las razones de potencia se expresaron logarítmicamente también, con el decibel como unidad.

Se mencionó el principio de diseño sobre una base de impedancia de imagen.

El propósito de este capítulo es presentar los principios generales de las redes de dos pares de terminales o de dos puertos, y los conceptos que son comúnmente útiles en su solución. Una discusión adicional podría extenderse a través de muchos capítulos, o a través de muchos volúmenes.* Este libro entrará en detalle con únicamente una clase de red de dos puertos, el filtro m -derivado, sujeto de nuestro siguiente capítulo. El filtro es tanto una aplicación práctica importante como una excelente ilustración de los principios de las redes de dos puertos.

PROBLEMAS

1. La Fig. 18-8a muestra una red T. Si $Z_s = 12$ ohms, $Z_r = 15$ ohms y $Y = 0.02$ mho, todos puramente resistivos: (a) Encontrar cada admittance de punto impulsor en corto circuito y la admittance de transferencia en corto circuito. (b) Encontrar cada impedancia de punto impulsor en circuito abierto y la impedancia de transferencia en circuito abierto. (c) Demostrar que satisfacen las Ecs. 18-9. (Considerando las flechas de referencia en la Fig. 18-3, tener especial cuidado de los signos de las funciones de transferencia). § 5

2. La Fig. 18-8b muestra una red simétrica II. Si $Z = 25$ ohms y $Y = 0.02$ mho, ambos puramente resistivos: (a) encontrar la ad-

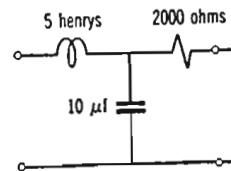
* Una extensa bibliografía estaría fuera de lugar aquí, pero podemos mencionar unos pocos libros como de especial utilidad, o nuevos, o como referencias standards: Guillemin, Referencia 15; Tuttle, Referencia 26; Bode, Referencia 37; Johnson, Referencia 38; LePage y Seely, Referencia 39.

mitancia de punto impulsor en cortocircuito y la admitancia de transferencia en cortocircuito. (b) Encontrar la impedancia de punto impulsor en circuito abierto y la impedancia de transferencia en circuito abierto. (c) Demostrar que satisfacen las Ecs. 18-9. (Considerando las flechas de referencia de la Fig. 18-3, tener especial cuidado de los signos en las funciones de transferencia). § 5

3. En la red T de la Fig. 18-8a, $Z_s = 10 + j\omega 3 \cdot 10^{-3}$, y $Z_r = 5 + j\omega 2 \cdot 10^{-3}$, y el elemento en paralelo marcado Y tiene una *impedancia* de $10 + j\omega 5 \cdot 10^{-3}$ ohms. Encontrar la admitancia de transferencia en cortocircuito, escribiéndola como una función racional de factores lineales (semejante a la Ec. 18-14), dando los valores numéricos de polos y ceros y mostrando la localización de los polos y ceros en un bosquejo del plano complejo s. § 7

4. El diagrama (de la Fig. 14-19a) muestra un filtro para fluctuación para un rectificador. Encontrar su admitancia de transferencia en cortocircuito, escribiendo $y_{21}(s)$ como una función racional de factores lineales (similar a la Ec. 18-14). Dar los valores numéricos de polos y ceros. § 7

5. Para el Prob. 4, mostrar la localización de los polos y ceros en un bosquejo del plano complejo s. De éste, deducir y bosquejar aproximadamente la admitancia de transferencia como una función de la frecuencia. ¿Cómo se relaciona esto con su efectividad como filtro de fluctuaciones? Discutir las características del filtro en función de polos y ceros. § 7

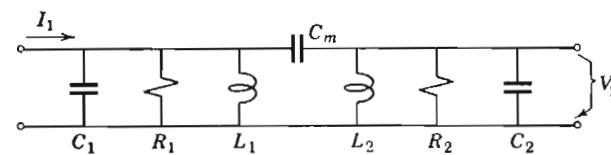


Probs. 4 y 5

6. Las Ecs. 18-9 dan las relaciones entre z_{11} y z_{12} de una red y las y de ella. Encontrar relaciones similares entre z_{22} y z_{21} (impedancias de circuito abierto) de la red y sus y (admitancias de cortocircuitos). § 5

7. Las Ecs. 18-9 dan z_{11} y z_{12} de una red en función de las y de la red. Encontrar y_{11} , y_{12} y y_{22} (admitancia de cortocircuito) de la red en función de las z (impedancia de circuito abierto). § 5

✓ 8. La figura (de la siguiente página) una red capacitativa entre etapas que tiene el mismo propósito que la red de transformador de la Fig. 18-5. (a) Escribir la función de transferencia V_2/I_1 para mostrar los factores lineales (como en la Ec. 18-14). (b) ¿De qué manera los polos y ceros de esta red con acoplamiento capacitivo difieren de los de la Ec. 18-14 para un circuito con acoplamiento inductivo? (c) Bosquéjese un posible arreglo de polos y ceros en el plano s, similar a la Fig. 18-6a. § 7



Prob. 8

9. Se describe un transformador en el Prob. 12-11. Representarlo por un circuito equivalente como en la Fig. 12-9c, y encontrar las funciones generales de la red ABCD para el circuito equivalente. § 10

10. Los datos de una prueba de circuito abierto y cortocircuito en un transformador se dieron en el Prob. 12-14. Representar el transformador por el circuito equivalente de la Fig. 12-11 y encontrar aproximaciones satisfactorias para las funciones ABCD de la red. § 10

✓ 11. El diagrama con el Prob. 11-16 muestra una red T (estando cerrado el interruptor S) con una fuente conectada en cada par de terminales. (a) Encontrar las funciones ABCD para esta red. (b) Si, en la notación del presente capítulo, $V_r = 110/0^\circ$, como se mostró en el diagrama, e $I_r = -4.55/58.4^\circ$, encontrar \bar{V}_s e I_s . (c) Encontrar (como en el Prob. 11-16) V_{ab} . § 10

✓ 12. Siguiendo las Ecs. 18-34 y 37 se dieron valores numéricos para las redes T y II. Encontrar A, B, C y D para la red formada por la T y la II conectadas en cascada. ¿Esta red es eléctricamente simétrica? § 12

13. Las Ecs. 18-37 dan ABCD para una red II simétrica. Encontrar ecuaciones similares para una II no simétrica. § 10

14. (a) En la red cuadrada de la Fig. 18-2, cada pequeño cu-

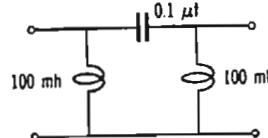
drado es una resistencia R . Encontrar la impedancia de imagen. (b) Encontrar z_0 de la red cuadrada en el Prob. 11-13. § 13

15. (a) En la red del Prob. 11-4, los elementos pasivos comprenden una T. Encontrar su impedancia de imagen. (b) Repetir para la red del Prob. 11-8. (c) Verificar cada una calculando la impedancia de entrada a la T cuando termina en z_0 . § 13

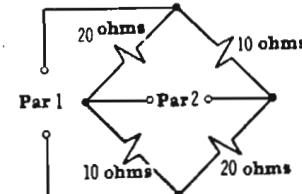
16. Para la red II mostrada: (a) Encontrar la impedancia de imagen z_0 para $\omega = 10^6$, para $\omega = 10^5$ y para $\omega = 10^3$. (b) Calcular la impedancia de entrada cuando esta II termina en z_0 , usando $\omega = 10^6$ (únicamente) para esta pregunta. § 13

17. En una red L (ver Fig. 18-2) el elemento en serie es $L = 0.045$ henrys; el elemento en paralelo es $C = 0.1875 \cdot 10^{-6}$ farad. Calcular ambas impedancias de imagen, z_{01} y z_{02} . (a) Sea $f = 1\,000$ cps y (b) sea $f = 500$ cps. § 13

Nota: esta L es una red de emparejamiento para utilizarse a 1 000 cps.



Prob. 16



Prob. 18

18. Encontrar z_{01} y z_{02} para el circuito fuente mostrado. Redibujar el circuito como una celosía. § 13

19. En el circuito del Prob. 18, conectar la impedancia de imagen z_{02} en el par de terminales 2, y verificar el valor calculando la impedancia de entrada en el par terminal 1. § 13

20. En el Prob. 12 se consideró una red de una T y una II conectadas en cascada. Encontrar γ para esta red terminada en su impedancia de imagen. Encontrar α y β . Encontrar e^γ . Encontrar la razón de potencia de entrada a la potencia de salida en decibeles. § 18

21. Para la red del Prob. 16, terminada en su impedancia de imagen, encontrar α y β para $\omega = 10^6$ y para $\omega = 10^5$ y para $\omega = 10^3$. En cada frecuencia dar atenuaciones en decibeles. § 18

22. Sea la red T mostrada con el Prob. 11-8 terminada en su impedancia de imagen; encontrar α y β .

19

Filtros Eléctricos

1. Filtros de ondas eléctricas

"Un filtro de onda eléctrica es una red selectiva que transmite libremente ondas eléctricas que cuentan con frecuencias dentro de una o más bandas de frecuencia y que atenúa sustancialmente ondas eléctricas que tienen otras frecuencias". (American Standard, Referencia 8).

El circuito resonante puede clasificarse como un filtro, porque transmite su frecuencia de resonancia mucho más libremente que otras frecuencias, y sus propiedades selectivas se emplean bastante corrientemente en receptores y transmisores de radio. Tiene selectividad extremada que es excelente para elegir una frecuencia portadora de radio particular fuera del conjunto de las otras, pero esta alta selectividad no es aconsejable cuando se desea transmitir una banda de frecuencia bastante ancha. Aun para un programa ordinario de radiodifusión se necesita un cierto rango para incluir las frecuencias de la banda lateral; es posible por selectividad excesiva reducir la fidelidad de la reproducción de la música. La televisión demanda un rango aún más ancho, y se requieren a menudo redes selectivas con mayor refinamiento de circuito resonante.

El circuito de doble sintonización o de acoplamiento por transformador, de la Fig. 18-6, muestra una función de transferencia más apropiada que la curva altamente aguda de un circuito resonante simple, para la selección de una banda de frecuencias. Esta función,



tiene dos pares de polos en el plano s , mientras que un circuito resonante simple tiene únicamente un par.

La Fig. 16-16 muestra una red que discrimina en favor de las bajas frecuencias. Sus polos y ceros están localizados de tal manera en el plano s que la impedancia es bastante constante, hasta que se alcanza una frecuencia crítica.

Estos ejemplos sugieren que los filtros pueden diseñarse desde el punto de vista de polos y ceros en el plano s . ¿Qué clase de función para s suministrarán las características que se desean en un buen filtro?

2. Filtro ideal

Se muestra un circuito filtro en la Fig. 19-1. Entre una fuente con impedancia interna R_g y una carga de impedancia R_L , se ha insertado un filtro de dos puertos. Podemos suponer que un filtro verdaderamente ideal transmitiría libremente las frecuencias en lo que podemos llamar su *banda de transmisión libre*, y que las señales a otras frecuencias, cayendo en una *banda de atenuación* del filtro, serían bloqueadas completamente. Este ideal no puede obtenerse, pero es una guía útil y objetiva.

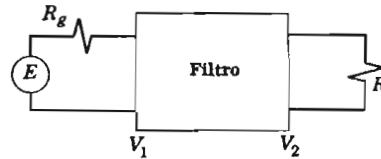


FIG. 19-1. Inserción de una red de filtro

Podemos esperar que un filtro ideal esté compuesto enteramente de elementos reactivos, inductores y condensadores. La razón es sencilla: si se encuentra resistencia presente, la red de filtro disipará indudablemente algo de la energía que se desea (a frecuencias de transmisión libre) para la carga. El filtro ideal, por lo tanto, no disipa energía.

Una señal transmitida por un filtro ideal, debería recibirse sin distorsión. Si una onda cuadrada se transmite a través de un filtro ideal de paso alto, deberá salir cuadrada, tal como entró. Esto requiere la relación de fase apropiada entre sus componentes armónicos (Cap. 14). Es permisible que la señal entera se retrase en el filtro, pero

todas las componentes de frecuencia deberán retrasarse igualmente. Este requerimiento se expresa comúnmente en función del desplazamiento de fase, entre las señales de entrada y salida: el desplazamiento de fase en la banda de transmisión libre debe ser o bien cero (o 180°) o bien proporcional a la frecuencia.* Este requerimiento es altamente importante para la transmisión de fotografías, aunque es difícilmente significativo para el sonido, puesto que el oído no distingue el desfasamiento relativo para las componentes de onda.

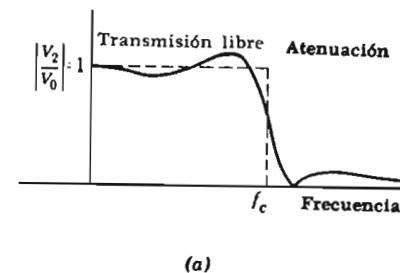
3. Diseño por pérdida por inserción

Una manera de diseñar el filtro de la Fig. 19-1 es el de estipular una pérdida apropiada por inserción. Si V_2 es el voltaje en las terminales de la carga con el filtro en su lugar y V_0 es el voltaje entre las terminales de la carga, antes de insertar el filtro, entonces con E constante:

$$\text{Razón de voltaje por inserción} = \frac{V_2}{V_0} \quad (19-1)$$

y

$$\text{Razón de potencias por inserción} = \left| \frac{V_2}{V_0} \right|^2 \quad (19-2)$$



(a)

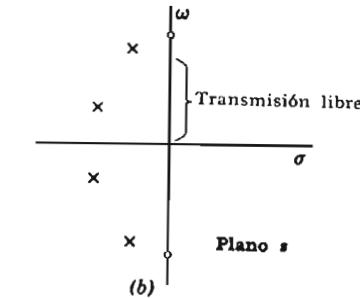


FIG. 19-2. Curva de pérdidas por inserción para un filtro de paso bajo, y esquema de los polos ceros de la función de pérdidas por inserción en el plano complejo s

* Considerando una onda cuadrada: si la componente fundamental se retrase en 10 grados, la tercera armónica 30 grados y así sucesivamente, el retraso de cada componente es la misma longitud de tiempo, pues 3 grados de la tercera armónica representan la misma longitud de tiempo que 1 grado de la fundamental, etc., etc.

Para tener algo parecido a un filtro ideal, $|V_2/V_0|$ debería ser 1, en la banda de transmisión libre, y tan pequeña como sea posible, en la banda de atenuación. Una curva ilustrativa para un filtro de paso bajo se muestra en la Fig. 19-2a; el ideal se muestra como una línea no continua.

Para diseñar tal filtro, $|V_2/V_0|$ debe considerarse como una función de la frecuencia. Puede ser más útil expresarlo como una función de la variable de frecuencia compleja s . (como en el Cap. 16, $s = \sigma + j\omega$). La Fig. 19-2a puede considerarse como un perfil a lo largo del eje ω de la superficie $|V_2/V_0|$ trazada arriba del plano s . Esta es la superficie, se repetirá nuevamente, y puede visualizarse como algo semejante a una hoja de hule sostenida arriba del plano s donde la función $|V_2/V_0|$ tiene polos, y empujada hacia abajo como por tachuelas, donde $|V_2/V_0|$ tiene ceros. La Fig. 19-2b muestra un arreglo de polos y ceros, que es razonablemente efectivo; puede reconocerse intuitivamente que los polos en este arreglo, en el plano s soportarán la hoja de hule de manera que $|V_2/V_0|$ será aproximadamente constante, dentro de la banda deseada de transmisión libre, de 0 a f_c (la frecuencia de corte), y que los ceros sobre el eje ω empujarán la función hacia abajo como se desea, para altas frecuencias.

Los resultados de este método pueden ser excelentes.* El diseño cuidadoso estipula que las pérdidas por inserción, serán menores que cualquier cantidad especificada dentro de la banda de transmisión libre, mientras que garantizan que tendrán al menos, un mínimo deseado en la banda de atenuación, alcanzándose los límites prescritos con la mayor economía de elementos de circuitos. El método, sin embargo, es bastante complicado.

Las complicaciones resultan parcialmente, de tomar en cuenta los efectos de R_i y R_o ; el trabajo de diseño es más simple si podemos suponer que R_i y R_o son iguales a la impedancia de imagen del filtro.

4. Diseño por atenuación de imagen

$$Z_0 = \sqrt{\frac{B}{C}}$$

Exploraremos este método más simple. Se sabe que el filtro termina en impedancia de imagen Z_0 como en la Fig. 19-3a. Las pérdidas de voltaje por inserción son entonces, iguales a la atenuación α del fil-

* Ver por ejemplo, Tuttle, Referencia 26; Pettit, Referencia 27. Debería estar bastante claro que cuando la analogía de la hoja de hule (o electrostática) se utiliza para trabajo cuantitativo, en lugar de la mera representación mental cualitativa sugerida aquí, representa no $|V_2/V_0|$ sino en $|V_2/V_0|$.

$$\alpha = \frac{V_s}{V_r}$$

$$\frac{V_s}{V_r} = e^{-\alpha/2}$$

tro, † y volvemos nuestra atención a la función de transferencia de imagen, de la Ec. 18-73. Debemos investigar la razón de $V_1/V_2 = e^{\alpha}$.

La razón recíproca V_2/V_1 , se trazó en la Fig. 19-3b, mostrando un ejemplo, para un filtro de paso bajo. Su magnitud es constante en 1 a lo largo de la banda de transmisión libre, donde V_2 debería ser igual a V_1 , y en la banda de atenuación V_2 disminuye hasta cero. Para un filtro ideal, V_2 debería disminuir abruptamente hasta cero, a la frecuencia de corte f_c , pero esto es esperar mucho.

Pensemos en $|V_2/V_1|$ como una superficie trazada encima del plano s , tal como lo hemos hecho para otras funciones de transferencia. La curva de la Fig. 19-3b es el perfil de esta superficie a lo largo del eje ω . La pregunta es, ¿qué clase de superficie tendrá este perfil? Visualicemos la superficie, como lo hemos hecho antes, como una hoja de hule por encima del plano s ; ¿cómo se mantiene en su lugar?

En trabajo previo, tratando con circuitos físicos reales hechos de resistencias fijas, inductancias y capacitancias, las funciones de admitancia de las funciones de transferencia, han sido funciones racionales. La hoja de hule ha estado por tanto, soportada en algunos puntos por polos, y sujetada abajo en otros puntos por ceros. La característica de filtro ideal de la Fig. 19-3b puede aproximarse, pero no obtenerse, por varios arreglos de polos y ceros.

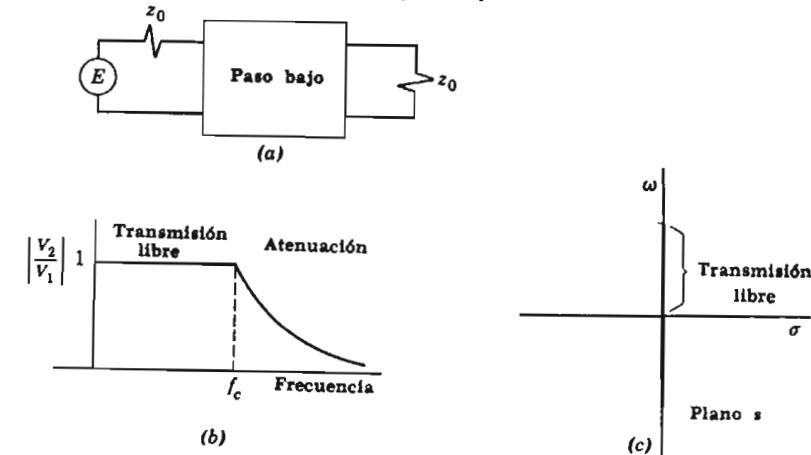


FIG. 19-3. Curva característica deseada para un filtro de paso bajo

Ahora, sin embargo, encontraremos que el ideal de la Fig. 19-3b puede obtenerse *exactamente*, si estamos dispuestos a suponer que

† Como se explicó en el último párrafo de la Sec. 18-19, si $Z_o = z$, la inserción del filtro no cambia I_1 ; V_1 es por tanto igual a V_0 y V_2/V_1 es la misma que V_2/V_0 .

la red de filtro termina, no en una impedancia fija, sino en una impedancia de imagen z_0 que varía con la frecuencia. Nuestra nueva suposición, la terminación en impedancia de imagen, no es físicamente posible. Esto podría obtenerse únicamente si las frecuencias fuesen aplicadas, una a la vez, y cada vez que se cambiase la frecuencia aplicada y corriese al otro extremo de la red, cambiando la impedancia terminal para que correspondiese. Los filtros por supuesto, no operan de esta manera. Sin embargo, las matemáticas pueden manejar mejor, haciendo esta suposición de terminación en impedancia de imagen, y posteriormente veremos lo que realmente nos aproximamos a esta situación deseada.

En función de la analogía de la hoja de hule, deseamos que la hoja se mantenga exactamente, una unidad por encima del plano s , donde se dibujó una línea gruesa en la Fig. 19-3c; esta es la banda de transmisión libre. Deslicemos una tabla por debajo de la hoja de hule, colocándola sobre un borde, como en la Fig. 19-4c. La tabla mantiene la hoja justamente, una unidad de alto y la longitud de la tabla se corta para fijar la banda de transmisión libre (a lo largo de ω positiva y negativa).

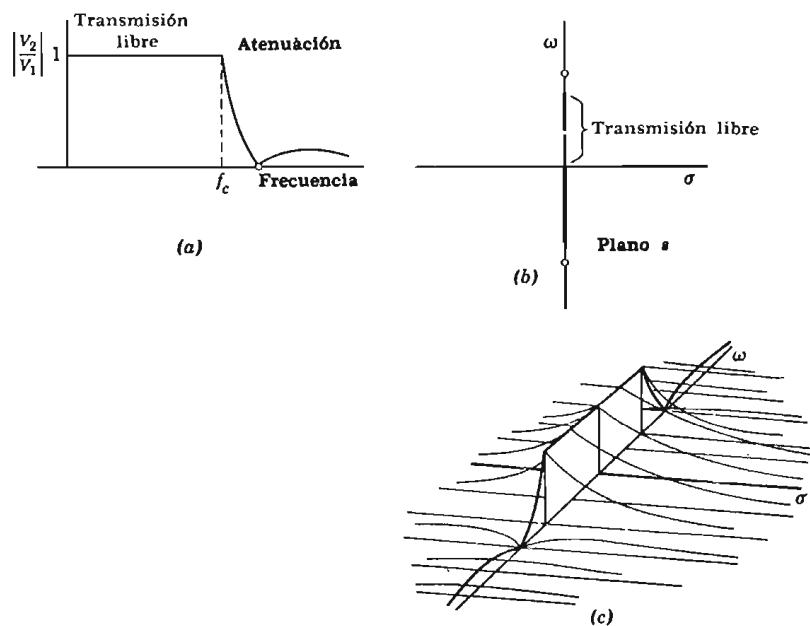


FIG. 19-4. Curva característica mejorada de un filtro de bajo paso, y la superficie de la función de transferencia

Mostraremos ahora que esta característica puede obtenerse tanto de una T o de una Π estipulando que deseamos especificar que la impedancia terminal, es igual a la impedancia de imagen de dicha red.

5. Realización

La Fig. 19-5 muestra dos redes, una T y una Π , cualquiera de las cuales, logra la característica deseada de la Fig. 19-3b. Para demostrar esto, nos referimos a la Ec. 18-67:

$$\frac{V_1}{V_2} = A + \sqrt{A^2 - 1} \quad (19-3)$$

A está dada según la Ec. 18-34 para la T y 18-37 para la Π , y sustituyendo valores de la Fig. 19-5 obtenemos

$$A = 1 + \frac{1}{2}ZY = 1 + \frac{1}{2}s^2LC \quad (19-4)$$

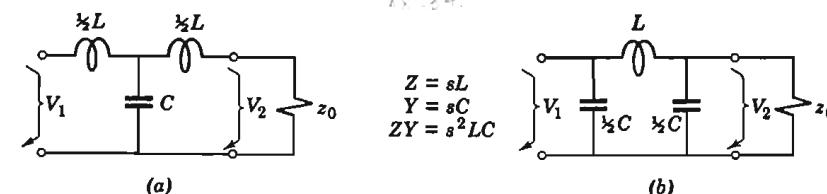


FIG. 19-5. Circuitos filtro de bajo paso, T y Π

tanto para la T como para la Π . Sustituyendo esta expresión para A en la Ec. 19-3

$$\frac{V_1}{V_2} = (1 + \frac{1}{2}s^2LC) + \sqrt{(1 + \frac{1}{2}s^2LC)^2 - 1} \quad (19-5)$$

y si simplificamos el álgebra definiendo un nuevo símbolo como

$$\omega_c^2 = \frac{4}{LC} \quad \text{rec. de arte} \quad (19-6)$$

la función de transferencia puede manipularse para dar

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\sqrt{1 + \frac{s^2}{\omega_c^2}} + \frac{s}{\omega_c} \right)^2 \quad (19-7)$$

Para ver el comportamiento de esta función a lo largo del eje ω , por comparación con la Fig. 19-3b, hagamos $s = j\omega$. Entonces

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}} + j \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \quad (19-8)$$

Ahora, si ω tiene cualquier valor menor que ω_c el radical es un número real y V_1/V_2 es un número complejo con la magnitud

$$\left| \frac{V_1}{V_2} \right| = \left(\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \right)} + \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \right)^2 = 1 \quad (19-9)$$

A tales frecuencias, $|V_2| = |V_1|$. Entonces, esta es la banda de transmisión libre, y el circuito es un filtro de bajo paso. La frecuencia de corte es $\omega = \omega_c$, que puede calcularse de la Ec. 19-6.

Si ω es mayor que ω_c el radical de la Ec. 19-8 se convierte en la raíz cuadrada de una cantidad negativa; y es por tanto imaginario. Este rango de frecuencias es la banda de atenuación; V_1/V_2 es un número negativo real, numéricamente mayor que 1, y por tanto V_2 es menor que V_1 en magnitud y opuesto en fase. La Fig. 19-3b muestra la relación de magnitud.

6. Perfeccionamiento

Desafortunadamente, la atenuación obtenida por esta clase de red filtro no es muy grande cerca de la frecuencia de corte; desearíamos que V_2/V_1 cayese más rápidamente hacia cero. Nos gustaría llevar la hoja de hule hasta el plano s en los puntos marcados cero en la Fig. 19-4. La función de la Ec. 19-7 no hace esto, pero la siguiente función sí:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{1 + s^2} + ms}{\sqrt{1 + s^2} - ms} \quad (19-10)$$

Esta función, trazada en la Fig. 19-4, tiene una banda de transmisión libre como se muestra y también hace $V_2/V_1 = 0$ en el punto en el que el denominador es cero:

$$s = \frac{1}{\sqrt{m^2 - 1}} \quad \text{or} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{1 - m^2}} \quad (19-11)$$

¿Puede encontrarse alguna red que suministre esta función? Exploraremos sistemáticamente las formas simples de redes.* Aparecerá entonces una respuesta, el filtro derivado m .

7. Redes reactivas

¿Dónde empezamos nuestra exploración? Primero será conveniente limitar la consideración a redes puramente reactivas (como han sido indicadas) porque desearíamos evitar potencia malgastada, en las frecuencias de banda de transmisión libre. Segundo, podemos principiar, por lo menos, estudiando las redes T y II; éstas son simples y prácticas.

Prestemos atención entonces a las redes de la Fig. 19-6. La función de transferencia de imagen y la impedancia de imagen de estas secciones serán necesarias.

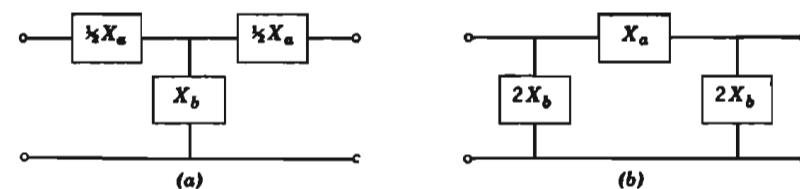


FIG. 19-6. Redes reactivas simétricas T y II

8. Función de transferencia de imagen

Tanto la Ec. 18-67 como la Ec. 18-70 dan la función de transferencia de imagen de una red simétrica. La primera ha sido utilizada (se repitió como Ec. 19-3) para encontrar V_1/V_2 para la red específica de la Fig. 19-5, pero para la consideración más general que seguirá, es conveniente empezar con la expresión exponencial equivalente:

* Existe un tratamiento más profundo de este asunto; ver Tuttle (Referencia 26). Este capítulo presentará el ataque histórico desde los filtros de constante k a los filtros derivados m ; las siguientes páginas pueden facilitar algunos de los pasajes áridos del acercamiento histórico.

$$\frac{V_1}{V_2} = e^\gamma \quad \text{donde } \cosh \gamma = A \quad (19-12)$$

Las redes T y Π de la Fig. 19-6 tienen la misma A; sustituyendo valores de reactancia de la Fig. 19-6 en las Ecs. 18-34 y 18-37 da, para ambas,

$$A = 1 + \frac{X_a}{2X_b} \quad (19-13)$$

Se notará que tanto en la T como en la Π la reactancia total en serie con una línea se llamó X_a , y la reactancia en paralelo de línea a línea se llamó X_b (los dos elementos en paralelo de la Π se combinan en paralelo para hacerlo igual a X_b).

Combinando las Ecs. 19-12 y 13 obtenemos una expresión para $\cosh \gamma$ en función de X_a y X_b :

$$\cosh \gamma = 1 + \frac{X_a}{2X_b} \quad (19-14)$$

Esto puede ponerse en una forma ligeramente más conveniente, aplicando la identidad matemática $\operatorname{senh} \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{1}{2}}(\cosh \gamma - 1)$ para dar

$$\operatorname{senh} \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{X_a}{4X_b}} \quad (19-14a)$$

En general, γ puede ser compleja, y escribimos sus componentes $\gamma = \alpha + j\beta$, pero la variación posible de γ está limitada para las redes reactivas por el hecho de que $X_a/4X_b$ debe ser real. Concluimos que todos los valores posibles de γ están comprendidos en tres rangos.

Para mostrar ésto, la Ec. 19-14a se desarrolla por medio de la identidad para el seno hiperbólico de la suma de dos argumentos:

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} \frac{1}{2}\gamma &= \operatorname{senh} \left(\frac{1}{2}\alpha + j\frac{1}{2}\beta \right) \\ &= \operatorname{senh} \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta + j \cosh \frac{1}{2}\alpha \operatorname{sen} \frac{1}{2}\beta \\ &= \sqrt{\frac{X_a}{4X_b}} \end{aligned} \quad (19-14b)$$

Puesto que $X_a/4X_b$ debe ser real, $\sqrt{X_a/4X_b}$ debe ser, ya sea real o

imaginaria; puesto que $\operatorname{senh} \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta = 0$ o $\cosh \frac{1}{2}\alpha \operatorname{sen} \frac{1}{2}\beta = 0$. La primera es cero si $\alpha = 0$ o si $\beta = \pi$; la segunda si $\beta = 0$. Consideraremos estas tres posibilidades.

1. Si $\beta = 0$, por lo que $\cos \frac{1}{2}\beta = 1$ y $\operatorname{sen} \frac{1}{2}\beta = 0$, la Ec. 19-14b se reduce a

$$\operatorname{senh} \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{X_a}{4X_b}} \quad \text{o} \quad \alpha = 2 \operatorname{senh}^{-1} \sqrt{\frac{X_a}{4X_b}} \quad (19-15)$$

Esta fórmula se aplica para cualquier valor positivo de $X_a/4X_b$.

2. Si $\beta = \pi$, la Ec. 19-14b, se convierte en

$$\cosh \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{j} \sqrt{\frac{X_a}{4X_b}} \quad \text{o} \quad \alpha = 2 \cosh^{-1} \frac{1}{j} \sqrt{\frac{X_a}{4X_b}} \quad (19-16)$$

El coseno hiperbólico de un número real es real, positivo y mayor que 1 (ver Fig. 19-7). Esta fórmula para atenuación se aplica si $X_a/4X_b$ es negativa (debido a j) y numéricamente mayor que 1.

3. Si $\alpha = 0$, la Ec. 19-14b llega a ser

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{j} \sqrt{\frac{X_a}{4X_b}} \quad \text{o} \quad \beta = 2 \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{j} \sqrt{\frac{X_a}{4X_b}} \quad (19-17)$$

El seno de un número real es real y menor que 1. Esta fórmula se aplica si $X_a/4X_b$ es negativa y numéricamente menor que 1. Ver Fig. 19-7 también para este rango.

Entre estos tres rangos abarcan *todos* los valores reales de $X_a/4X_b$, y, puesto que esta razón debe ser únicamente real, *todos* los valores posibles. Se verá que cuentan para todos los valores de atenuación α y ángulo de fase β que son posibles para una red puramente reactiva T o Π .

Nótese que hay atenuación en los dos primeros rangos, así que éstos constituyen la banda de *atenuación* de un filtro. El tercer rango, en el que hay atenuación cero, es la banda de *transmisión libre*.

La *frecuencia de corte*, que divide la banda de transmisión libre de la banda de atenuación, es la frecuencia a la que $X_a/4X_b = -1$, o $X_a = -4X_b$. Un criterio simple para identificar la banda de transmisión libre, y que es digno de recordar, es el siguiente: En la banda de transmisión libre, X_a se encuentra entre $-4X_b$ y cero.

Xa está entre $-4X_b$ y 0.

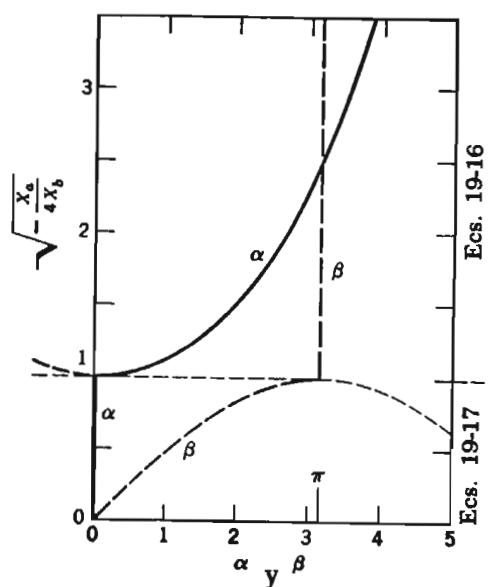


FIG. 19-7. Rangos de una función seno y de una función coseno hiperbólico

La Tabla 19-1 reúne estas fórmulas para referencia conveniente. La Fig. 19-8 es un diagrama de lugar geométrico que muestra α y β y una aproximación de las pérdidas de inserción en decibeles (ver nota al pie de la página 651) para todos los valores de $X_a/4X_b$. Los puntos sobre el círculo comprende la banda de transmisión libre, y la línea recta diametral representa la banda de atenuación. Los valores exactos de α y β deberán calcularse de las tablas, pero una ojeada al diagrama nos dará valores aproximados que pueden ser suficientemente buenos para algunos problemas, y nos darán en cualquier caso una comprobación rápida de un cálculo más exacto

9. Impedancia de imagen

La impedancia de imagen de cualquier red de dos puertos simétricos está dada por la Ec. 18-60 en función de B y C . Para una red T, como en la Fig. 19-6a, las funciones B y C están tomadas de las Ecs. 18-34. B y C están expresadas en función de Z y Y ; para la T puramente reactiva de la Fig. 19-6a, $Z = jX_a$ y $Y = 1/jX_b$, dando

TABLA 19-1

PROPIEDADES DE LAS SECCIONES REACTIVAS T Y II

Transmisión:

$$\frac{V_1}{V_2} = e^{\alpha/\beta}$$

Impedancia de imagen

Para Sección T*

$$z_{0T} = \frac{X_a}{2} \sqrt{-\frac{4X_b}{X_a} - 1}$$

Para Sección II*

$$z_{0II} = \frac{2X_b}{\sqrt{-\frac{4X_b}{X_a} - 1}}$$

Funciones de atenuación de imagen y fase (para T y II):

Banda de atenuación

Si $X_a/4X_b$ tiene cualquier valor positivo $\alpha = 2 \operatorname{senh}^{-1} \sqrt{\frac{X_a}{4X_b}}$ $\beta = 0$ z_0 es imaginario

Si $X_a/4X_b$ es negativa y numéricamente mayor que 1 $\alpha = 2 \cosh^{-1} \sqrt{-\frac{X_a}{4X_b}}$ $\beta = \pi$ z_0 es imaginario

banda de transmisión libre

Si $X_a/4X_b$ es negativa y numéricamente menor que 1 $\alpha = 0$ $\beta = 2 \operatorname{sen}^{-1} \sqrt{-\frac{X_a}{4X_b}}$ z_0 es real

menor que 1^{**}

* Si z_0 es real, es positiva; si es imaginaria, el radical es positivo.

** (El signo de β es el mismo que el signo de x_a).

En la banda de transmisión libre X_a se encuentra entre $-4X_b$ y cero.

$$\begin{aligned} z_{0T} &= \sqrt{\frac{B}{C}} = \sqrt{\frac{Z}{Y} \left(1 + \frac{1}{4} ZY \right)} = \pm \sqrt{-X_a X_b - \frac{1}{4} X_a^2} \\ &= \frac{X_a}{2} \sqrt{-\frac{4X_b}{X_a} - 1} \quad (19-18) \end{aligned}$$

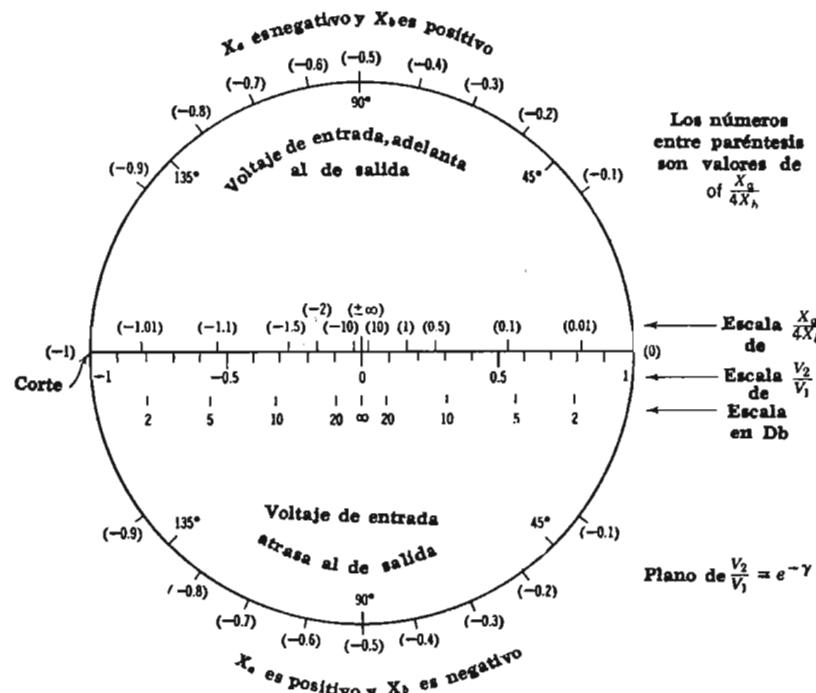


FIG. 19-8. Carta de V_2/V_1 para cualquier sección simétrica reactiva T o II

Para una red II, las funciones B y C se toman de las Ecs. 18-37. Entonces para una II puramente reactiva de la Fig. 19-6b, con $Z = jX_a$ y $Y = 1/jX_b$

$$z_{0\text{II}} = \sqrt{\frac{B}{C}} = \sqrt{\frac{Z}{Y(1 + \frac{1}{4}ZY)}} = \frac{\pm X_a X_b}{\sqrt{-X_a X_b - \frac{1}{4}X_a^2}} \\ = \frac{2X_b}{\sqrt{-\frac{4X_b}{X_a} - 1}} \quad (19-19)$$

Estas fórmulas* están incluidas en la Tabla 19-1 también.

Es desafortunado, por interés en la simplicidad, que las secciones

* Cuando Z y Y se hacen puramente reactivas en las Ecs. 19-18 y 19 el signo algebraico de z_0 parece ser incierto; en realidad no lo es. Si z_0 es real (o tiene una componente real) debe ser positivo. Si z_0 es imaginario el signo está determinado en consideración al límite al que se aproxime cuando la pérdida en los elementos de la red se reduce a cero; esto elimina la ambigüedad, con el siguiente resultado:

Si z_0 es real es positivo. Si z_0 es imaginaria, z_0 es la misma clase de reactancia que X_a (ambas inductivas, o ambas capacitivas), y $z_{0\text{II}}$ es de la misma clase de reactancia que X_b ; esto es, el radical en la forma final de la Ec. 19-18 o 19 se toma positivo.

T y II no tengan la misma z_0 , así como tienen la misma γ . En vez de esto, tienen una especie de relación recíproca, mostrada al multiplicar las Ecs. 19-18 y 19:

$$z_{0\text{T}} z_{0\text{II}} = \frac{Z}{Y} = -X_a X_b \quad (19-20)$$

10. z_0 real e imaginaria

La impedancia de imagen de cualquier red reactiva es real para frecuencias en la banda de transmisión libre, e imaginaria para frecuencias en la banda de atenuación.

Según la Ec. 18-64

$$z_0 = \sqrt{z_{1(\text{sh})} z_{1(\text{op})}} \quad (19-21)$$

y según la Ec. 18-70b

$$\tanh \gamma = \sqrt{\frac{z_{1(\text{sh})}}{z_{1(\text{op})}}} \quad (19-22)$$

Esto se aplica a redes de dos puertos de cualquier forma (no necesariamente T o II, o simétrica, o puramente reactiva). Si (como ocurre en los circuitos de filtro) las redes son puramente reactivas, las impedancias de entrada en circuito abierto y corto circuito, $z_{1(\text{sh})}$ y $z_{1(\text{op})}$, deben ser puramente imaginarias. Pueden ser, tanto imaginaria positiva o imaginaria negativa, dependiendo de la frecuencia. Si son del mismo signo (ambas inductivas, o ambas capacitivas), el producto en la Ec. 19-21 es negativo, haciendo z_0 imaginaria; la razón en la Ec. 19-22 es positiva y hay atenuación, así las reactancias en corto circuito y circuito abierto tienen el mismo signo, y z_0 es imaginaria en la banda de atenuación.

Inversamente, si las reactancias de entrada son de signo opuesto, el producto en la Ec. 19-21 es positivo y z_0 es real. El radical en la Ec. 19-22 es imaginario y $\alpha = 0$. Así las reactancias de cortocircuito y circuito abierto tienen signos opuestos, y z_0 es real, en la banda de

*Para que no haya atenuación
sig $X_a \neq \text{sig } X_b$.*

transmisión libre. Estas afirmaciones se aplican a *todos los filtros reactivos*.*

11. Cómo trabajan los filtros

Este teorema es profundamente significativo en la explicación de la operación de filtro. En la llamada banda de atenuación, los filtros no absorben potencia; actúan reteniendo la potencia; rehusan admitir potencia en sus terminales de entrada.

Considerando que una fuente está conectada a través de un filtro a unas cargas con impedancia de imagen. A las frecuencias de la banda de transmisión libre, la potencia entra al filtro y pasa a través de él a la carga; la fuente, alimentando a las terminales de entrada del filtro, de resistencia pura. En la banda de atenuación, la potencia no puede entrar al filtro; aunque puede haber tanto corriente como voltaje no existe potencia (o muy poca) que entre al filtro porque la corriente y el voltaje están fuera de fase.

Quizás es útil decir que el filtro es *transparente a las frecuencias de la banda de transmisión libre*, pero es un *espejo para frecuencias en la banda de atenuación*. No teniendo pérdidas, nunca es un cuerpo negro o un medio absorbente.

12. Terminación práctica

Debe reconocerse que la impedancia de imagen es una función de la frecuencia (Ecs. 19-18 y 19) pero que la red está realmente construida con un elemento particular como carga. La impedancia terminal de un filtro práctico es este elemento particular, sin importar cuál sea la frecuencia aplicada y por tanto un filtro práctico no puede estar terminado en su impedancia de imagen para todas las frecuencias. La práctica usual es utilizar una resistencia terminal lo más correcta posible para las frecuencias en la banda de transmisión libre, aunque sea algo errónea para las frecuencias en la banda de atenuación.

En la banda de atenuación esto tiene el efecto de hacer las pér-

* Para encontrar α y β de la Ec. 19-22, hágase $z_{1(sh)}/z_{1(op)} = u^2$. Entonces

$$\tanh \gamma = \tanh(\alpha + j\beta) = \frac{\operatorname{senh} \alpha \cos \beta + j \cosh \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cosh \alpha \cos \beta + j \operatorname{senh} \alpha \operatorname{sen} \beta} = u$$

Si $\beta = 0$ o π , $\operatorname{senh} \alpha / \cosh \alpha = \tanh \alpha = u$; para usarse si $0 < u^2 < 1$.

Si $\beta = \pi/2$, $\cosh \alpha / \operatorname{senh} \alpha = u$, $\tanh \alpha = 1/u$; para usarse si $u^2 > 1$.

Si $\alpha = 0$, $j \operatorname{sen} \beta / \cos \beta = u$; $\tan \beta = u/j$; para usarse si $u^2 < 0$.

didas reales por inserción mayores que α (o aun ligeramente menores, pero nunca significativamente menores).* Se acostumbra decir que la terminación incorrecta hace poca diferencia en la banda de atenuación, puesto que difícilmente ninguna señal llega hasta la carga, importa poco lo que pueda hacer la carga. (Si una superficie de espejo es buena, usted no verá qué es lo que se encuentra detrás de ella). Esto no es estrictamente lógico, pero la conclusión es cierta.

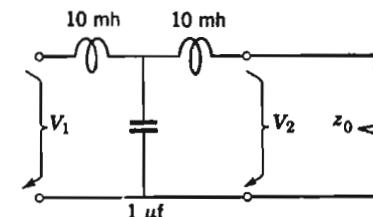


FIG. 19-9. Una T simétrica con $X_a = \omega L = \omega 2 \cdot 10^{-2}$ y $X_b = -(1/\omega C) = -10^6/\omega$

13. Un ejemplo

Una sección T está mostrada en la Fig. 19-9. Con los valores numéricos dados, encontrar la impedancia de imagen.

SOLUCIÓN. Los valores numéricos se sustituyen en la ecuación para ser z_{OT} de la Tabla 19-1:

$$z_{OT} = \frac{X_a}{2} \sqrt{-\frac{4X_b}{X_a} - 1}$$

* Esta discrepancia es la diferencia entre la verdadera pérdida por inserción (Sección 3) y la atenuación de imagen α (Sección 4). La última asume una característica simple yero físicamente irrealizable (Fig. 19-3b) que podría obtenerse únicamente teniendo impedancia terminal igual a la impedancia de imagen para cada frecuencia. La discrepancia puede hacerse pequeña en la banda de transmisión libre, y esto sobre la base de que se justifica el cálculo más simple. En la banda de atenuación, Guillemin (Referencia 15, Pág. 290-295) muestra que las pérdidas por inserción de un filtro simétrico pueden ser mayores que α , pero no menores, si las impedancias del generador y la carga son iguales. Si las impedancias del generador y la carga no son iguales, el filtro, actuando como una red de acoplamiento, puede hacer las pérdidas por inserción ligeramente menores que α . (En el caso más extremo el voltaje de salida puede ser el doble que el calculado para α , siendo la pérdida de voltaje de inserción 0.7 veces menor que α , y siendo la pérdida de potencia por inserción 8 db menos que 8.686 α). Por tanto, una fórmula práctica para el diseño es: pérdidas en decibeles = 8.686 α = 20 log $|V_1/V_2|$. La pérdida de potencia por inserción es ordinariamente más que la dada por esta fórmula, y en el peor de los casos puede ser únicamente de 6 db menos. Las escalas de decibeles en las Figs. 19-8 y 19-14 se calcularon por esta fórmula.

La impedancia de imagen se encontrará para las frecuencias de 500 a 3 000 cps. El cálculo es sencillo y los resultados están dados en la Tabla 19-2.

TABLA 19-2

$f = 500$	1000	1500	2000	2500	3000	cps
$X_a = 62.8$	125.7	188.4	251.2	313.8	376.8	ohms
$-\frac{X_a}{4X_b} = .0494$.1970	.444	.789	1.230	1.78	
$z_{0T} = 137$	127	105	65.0	$j67.8$	$j125$	ohms

Nótese que z_{0T} es casi constante para las frecuencias bajas pero disminuye rápidamente a casi 2 000 cps conforme el radical en la ecuación se aproxima a cero. El radical es cero a la frecuencia de corte, a la que

$$X_a = -4X_b$$

$$\omega_c \cdot 2 \cdot 10^{-2} = \frac{4 \cdot 10^6}{\omega_c} \quad \omega_c^2 = 2 \cdot 10^8 \quad \omega_c = 14,140$$

$$f_c = 2250 \text{ cps}$$

A 2 250 cps, entonces, termina la banda de transmisión libre (éste es un filtro de paso bajo) y comienza la banda de atenuación. A la misma frecuencia, z_{0T} cambia de real a imaginaria, y su magnitud se incrementa rápidamente.

A continuación calculemos la constante de transferencia de imagen.

SOLUCIÓN. Las ecuaciones de la Tabla 19-1 dan α y β . De aquí se encontrará la razón de voltaje V_2/V_1 . La cantidad $-X_a/4X_b$ se utiliza otra vez habiendo sido calculada en el proceso para encontrar z_{0T} y los resultados están dados en la Tabla 19-3.

Encontramos (como esperábamos) que en la banda de transmisión libre los voltajes de entrada y salida son iguales en magnitud, pero difieren en el ángulo de fase (comparar Fig. 19-7). Deberá recordarse que este resultado no se obtuvo con una resistencia fija única de carga; la carga es 137 ohms a 500 cps, 127 ohms a 1 000 cps, etc., etc.

TABLA 19-3

	$f = 500$	1000	1500	2000	2500	3000	cps
$\text{seak} = \sqrt{-\frac{X_a}{4X_b}} = .222$.444	.666	.888	1.11	1.33		
$\text{sen}^{-1} h = 12.8$	26.3	41.8	62.5				grados
$\cosh^{-1} h =$.465	.794		
$\alpha = 0$	0	0	0	.93	1.59	nep	
$\beta = 25.6$	52.7	83.6	125	180	180	grados	
$\frac{V_2}{V_1} = e^{-\alpha} / -\beta = 1/-25^\circ$	1/-53°	1/-84°	1/-125°	-0.40	-0.20		

en la escala de diámetro
de la potencia

En la banda de atenuación, encontramos que el voltaje de salida es menor que la mitad del voltaje de entrada a 2 500 cps, y un quinto del voltaje de entrada a 3 000 cps. Las pérdidas de inserción producidas por el filtro (en un circuito de acoplamiento por impedancia; ver nota al pie de la Pág. 650, Sec. 12), siendo a lo menos 8.688 α es al menos 8 db a 2 500 cps y 13.8 db a 3 000 cps.

Los valores de atenuación se comprueban fácilmente en la Fig. 19.8. A 3 000 cps, $X_a/4X_b = -1.78$; localizando el punto apropiado de diámetro, entre los puntos marcados (-1.5) y (-2), leemos en la escala sobre diámetro que $V_2/V_1 = -0.2$ y en la escala de decibeles un poco menos de 15 db de pérdida nominal.

A 1 000 cps $X_a/4X_b = -0.2$ (aproximadamente); esto da un punto sobre el círculo de la figura y, debido a que X_a es positiva, estará sobre el semicírculo inferior. La fase es de cerca de 50°; no existe atenuación. Estas lecturas del diagrama se comparan aproximadamente con los valores calculados más exactos, y la comparación puede continuarse con cálculos para otras frecuencias también.

14. Tipos de filtros

Empezamos explorando las redes reactivas desarrollando fórmulas generales para la función de transferencia de imagen y la impedancia de imagen. Consideraremos ahora los valores específicos por esperarse de algunos tipos prácticos de secciones de filtro.

Los filtros pueden clasificarse como de paso alto, de paso bajo, filtro de banda y filtro eliminador. Cualquiera de éstos puede dise-

ñarse ya sea, en forma T o II.* La gran mayoría son eléctricamente simétricas, (esto es, $z_{01} = z_{02}$). No existe necesariamente límite para la complicación de una sección T o II, para Z_a y Z_b pueden ambas ser complicadas redes de dos terminales. Sin embargo, veamos primero qué puede suceder con diseños simples.

15. Filtros de red inversa: paso bajo

El circuito de la Fig. 19-9, utilizado en el ejemplo de la Sec. 13, es uno de la clase conocida como filtros de red inversa. La Fig. 19-10

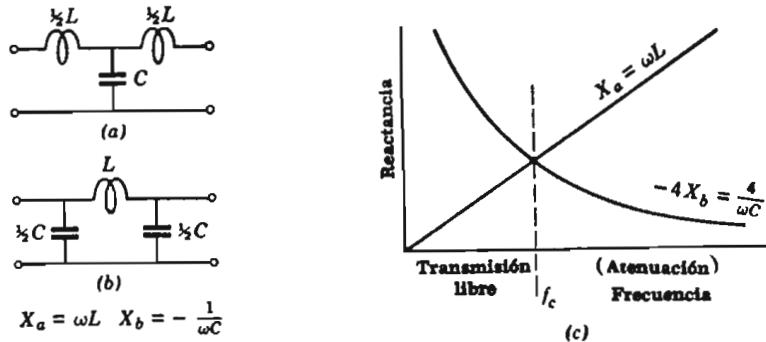


FIG. 19-10. Secciones filtro de bajo paso T y II inversas

muestra (a) una sección T y (b) una sección II, para cada una de las cuales $X_a = \omega L$ y $X_b = -1/\omega C$. El nombre de la clase indica que X_a y X_b varían de una manera inversa con la frecuencia, siendo uno directamente y otro inversamente proporcional a la frecuencia. Otro nombre para la clase es filtros de *k constante*; si *k* está definida escribiendo

$$k^2 = Z_a Z_b \quad (19-23)$$

podemos calcular *k* para las secciones de la Fig. 19-10 y encontraremos que *k* es constante (esto es, independiente de la frecuencia):

$$k^2 = Z_a Z_b = -X_a X_b = (\omega L) \left(\frac{1}{\omega C} \right) = \frac{L}{C} \quad (19-24)$$

* Los términos "sección media-serie" significando T y "sección media-paralelo" significando II, son usadas por algunos autores, pero parece innecesario utilizar tres palabras para expresar lo que puede decirse más gráficamente por una sola letra.

En la Fig. 19-10c, X_a y $-4X_b$ están trazadas como funciones de la frecuencia. Esta clase de diagrama es altamente conveniente para mostrar las bandas de transmisión libre y de atenuación. Puesto que la frecuencia de corte es aquélla en la que $X_a = -4X_b$, las curvas trazadas se intersectan en la frecuencia de corte. Puesto que la banda de transmisión libre está en el rango en el que X_a se encuentra entre $-4X_b$ y cero, una mirada al diagrama muestra que el filtro es un filtro de bajo paso.

El valor numérico de la frecuencia de corte f_c se encuentra escribiendo:

$$X_a = -4X_b \quad (19-25)$$

$$\omega_c L = 4 \frac{1}{\omega_c C} \quad \text{o} \quad \omega_c^2 = \frac{4}{LC} \quad (19-26)$$

$$\omega_c = 2\pi f_c = \frac{2}{\sqrt{LC}} \quad \text{o} \quad f_c = \frac{1}{\pi\sqrt{LC}} \quad (19-27)$$

Estas serán útiles posteriormente para el diseño.

Las impedancias de imagen de las secciones de red inversa T y II no son las mismas. Para la T (según Ec. 19-18):

$$z_{0T} = \sqrt{(\omega L) \left(\frac{1}{\omega C} \right) - \frac{1}{4} \omega^2 L^2} = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}} \quad (19-28)$$

Esta se trazó en la esquina inferior del lado izquierdo de la Fig. 19-11, y el ejemplo de la Sec. 13 da valores numéricos típicos para z_{0T} .

Es interesante demostrar que la curva para z_{0T} es circular. Elevando al cuadrado la Ec. 19-28, sustituyendo k^2 por L/C (Ec. 19-24) y ω_c por $4/LC$ (Ec. 19-26), y acomodando los términos:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 + \left(\frac{z_{0T}}{k} \right)^2 = 1 \quad (19-29)$$

Esta es la ecuación de un círculo de radio 1 siempre que las escalas estén escogidas adecuadamente. La Fig. 19-12 tiene f/f_c como abscisa y z_{0T}/k como ordenada, y la curva es por tanto, un círculo unitario.

En la banda de atenuación z_{0T} es imaginaria. Una ecuación similar a 19-29 muestra que una representación gráfica de su magnitud

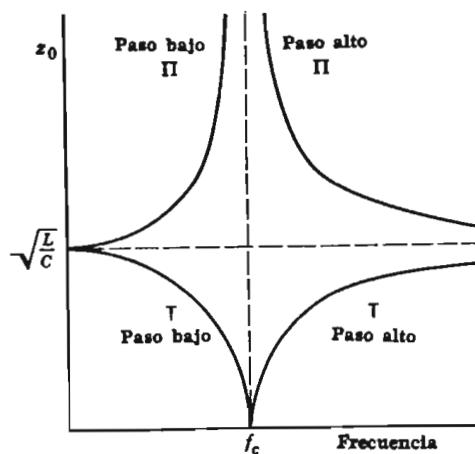


FIG. 19-11. Diagrama compuesto de impedancia de imagen (en la banda de transmisión libre) para cuatro secciones diferentes de filtro

sería una hipérbola rectangular, y la curva está indicada por una línea no continua en la Fig. 19-12. Se ha señalado anteriormente, sin

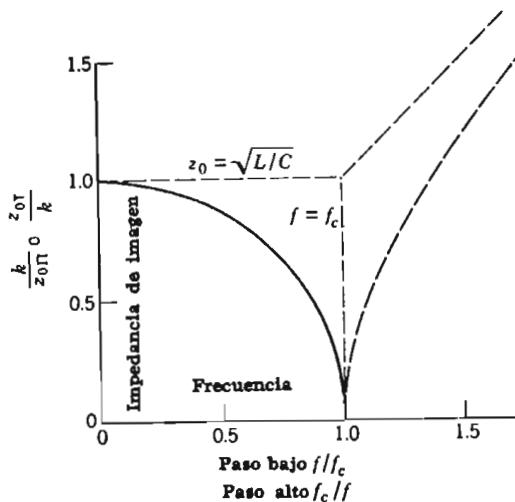


FIG. 19-12. Impedancia de imagen. Curva combinada para paso alto o bajo, sección II o T, prototipo o (si L y C se leen L_k y C_k) derivado m con cualquier m

embargo, que es relativamente sin importancia el comportamiento de la impedancia de imagen en la banda de atenuación siendo de poca consecuencia.

La impedancia de imagen de la sección II inversa se encuentra más fácilmente de la Ec. 19-20, notando que para una red inversa $-X_a X_b = k^2$:

$$z_{0II} = \frac{-X_a X_b}{z_{0T}} = \frac{k^2}{z_{0T}} \quad (19-30)$$

Esta se ha trazado como la curva en la parte superior izquierda de la Fig. 19-11. Puesto que k es constante z_{0II} crece cuando z_{0T} decrece.

La naturaleza recíproca de las curvas puede mostrarse aún más claramente sustituyendo la Ec. 19-30 en la Ec. 19-29, dando

$$\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + \left(\frac{k}{z_{0II}}\right)^2 = 1 \quad (19-31)$$

Esta es otra vez la ecuación de un círculo unitario, y puede ser el círculo de la Fig. 19-12 si la ordenada de la figura se toma como k/z_{0II} . Por lo tanto, suministrando una elección de escala esta curva puede hacerse útil tanto para la sección T como para la II.

16. Filtro de red inversa: paso alto

Intercambiando la inductancia y la capacidad en los filtros de la Fig. 19-10 da el par de filtros mostrados en la Fig. 19-13, uno de sección T y otro de sección II. Ambos son también filtros de red inversa o de k constante, pero son ahora de paso alto.

Para ver si son filtros de red inversa, escribimos

$$Z_a Z_b = -X_a X_b = \frac{L}{C} = k^2 \quad (19-32)$$

demonstrando que k es independiente de la frecuencia. Para ver que son filtros de paso alto, trazamos X_a y $-4X_b$ como en la Fig. 19-13c. Aplicando el criterio usual de que la banda de transmisión libre X_a se encuentra entre $-4X_b$ y cero, encontramos que esta condición se obtiene a frecuencias mayores que f_c , el punto de intersección. La frecuencia de corte se encontró como sigue:

$$X_a = -4X_b \quad (19-33)$$

$$-\frac{1}{\omega_c C} = -4\omega_c L \quad \omega_c^2 = \frac{1}{4LC} \quad (19-34)$$

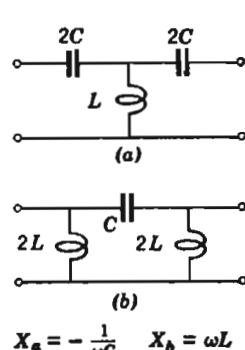


FIG. 19-13. Secciones filtro de paso alto T y II inversas

$$\omega_c = \frac{1}{2\sqrt{LC}} \quad f_c = \frac{1}{4\pi\sqrt{LC}} \quad (19-35)$$

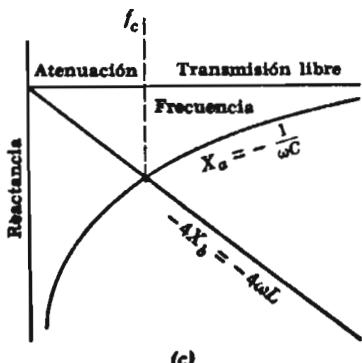
Las impedancias de imagen de las secciones de paso alto se encuentran como sigue. Para la sección T según la Ec. 19-18,

$$z_{0T} = \sqrt{\left(\frac{1}{\omega C}\right)(\omega L) - \frac{1}{4\omega^2 C^2}} = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{1}{4\omega^2 C^2}} \quad (19-36)$$

Esta está trazada como en la parte inferior derecha de la Fig. 19-11. La impedancia de imagen de la sección II guarda una relación recíproca a éstas, y la Ec. 19-30 se aplica también aquí; la curva se muestra en la esquina superior derecha de la figura.

La curva de la Fig. 19-12, que ha sido aplicada tanto a las secciones T como II en el diseño de bajo paso suministrando escalas de ordenadas recíprocas, puede también aplicarse a las secciones T y II de paso alto suministrando escalas recíprocas pero para las abscisas. Para demostrar esto, la Ec. 19-36 se combina con las Ecs. 19-30, 32 y 34 para dar

$$\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{z_{0T}}{k}\right)^2 = 1 \quad \text{o} \quad \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{k}{z_{0II}}\right)^2 = 1 \quad (19-37)$$



Estas son las ecuaciones de círculos unitarios para los que ω_c/ω , en vez de ω/ω_c , es la abscisa. Por tanto, la Fig. 19-12 puede hacerse para que se aplique a los cuatro tipos de redes inversas.

La curva hiperbólica de la Fig. 19-12 para la impedancia de imagen en la banda de atenuación es similarmente general si se utilizan las escalas apropiadas. La línea no continua indica que el valor es imaginario, en contraste con la curva circular para los que los valores son reales. El signo de los valores de la banda de atenuación está dado por la nota al pie de la Pág. 648 de la Sec. 9 y en forma resumida al pie de la Tabla 19-1.

Estas relaciones de las impedancias de imagen son más importantes que lo que su aplicación a las de k constante secciones simples sugeriría. Se verá posteriormente que las mismas curvas se aplican a todas las de una familia de los así llamados filtros derivados m , de los que la sección de k constante es el "prototipo".

17. Atenuación de filtros de red inversa

La atenuación de un filtro de red inversa, sea para cualquier filtro T o II está dada según la Tabla 19-1:

$$\alpha = 2 \cosh^{-1} \sqrt{-\frac{X_a}{4X_b}} \quad (19-38)$$

Para los filtros de paso bajo de la Fig. 19-10, sea T o II

$$X_a = \omega L \quad X_b = -\frac{1}{\omega C} \quad -\frac{X_a}{4X_b} = \frac{\omega^2 LC}{4} \quad (19-39)$$

Puesto que para los filtros de paso bajo, las Ecs. 19-26 dan $\omega_c^2 = 4/LC$, las Ecs. 19-39 se convierten en

$$-\frac{X_a}{4X_b} = \frac{\omega^2}{\omega_c^2} = \frac{f^2}{f_c^2} \quad (19-40)$$

Se ve que la Ec. 19-38 puede escribirse, para filtros de red inversa de paso bajo

$$\alpha = 2 \cosh^{-1} \frac{f}{f_c} \quad (19-41)$$

La Fig. 19-14b muestra una curva de α calculada de esta ecuación. La curva es por supuesto la familiar curva de coseno hiperbólico gi-

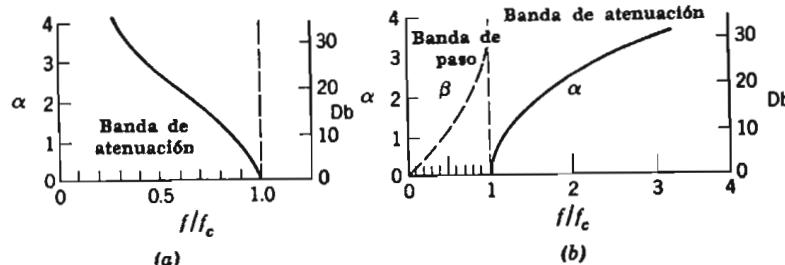


FIG. 19-14. Atenuación de filtros de red inversa. (a) Paso alto. (b) Paso bajo

rada de costado. Su característica más notable es la de que la atenuación se incrementa indefinidamente con la frecuencia, llegando a infinito para frecuencia infinita.*

El cambio de fase en la banda de transmisión resultante de estas secciones filtro de bajo paso se encontró de la ecuación para β en la Tabla 19-1, combinada con la Ec. 19-40, para hacer $\beta = 2 \operatorname{sen}^{-1} f/f_c$. Este desplazamiento de fase está trazado como una línea no continua en la Fig. 19-14b (ver también Fig. 19-7).

Para los filtros de paso alto de la Fig. 19-13, las relaciones similares son

$$\alpha = 2 \cosh^{-1} \frac{f_c}{f} \quad \beta = 2 \operatorname{sen}^{-1} \frac{f_c}{f} \quad (19-42)$$

La atenuación se trazó en la Fig. 19-14a (realmente, la Fig. 19-14b podría aplicarse a este filtro de paso alto también si se utilizara una escala de frecuencias recíprocas). El desplazamiento de fase es -180° ($-\pi$ radianes) en el corte y decrece hacia cero a frecuencias más altas.

18. Desventajas de los filtros de red inversa

Hemos investigado ahora las características de red inversa, y cuando los comparamos con las características especificadas en la Sec. 2 para un filtro ideal debemos reconocer que está muy lejos del ideal.

1. Un filtro ideal no tiene atenuación en la banda de transmisión libre. En este aspecto, un filtro de red inversa es teóricamente ideal.

* Las escalas en decibeles de la Fig. 19-14, dan una estimación de las pérdidas por inserción como se explicó en la nota al pie de la página de la Sección 12.

2. Un filtro ideal tiene atenuación infinita en la banda de atenuación. El filtro de red inversa no la tiene. Tienen más bien baja atenuación cerca de la frecuencia de corte y esto es lamentable. Sin embargo, la atenuación se va haciendo muy alta a frecuencias alejadas de la de corte, y esto es bueno.

3. Un filtro ideal tiene la misma impedancia de imagen para todas las frecuencias de la banda de transmisión libre. La impedancia de imagen del filtro de red inversa no es constante pero cae a cero o se va hasta infinito en el corte.

4. Un filtro ideal tiene un desplazamiento de fase en la banda de transmisión libre proporcional a la frecuencia. El filtro de red inversa no lo tiene. El ideal es aproximado para una sección de paso bajo, pero la aproximación desaparece cuando se aproxima al corte (ver Fig. 19-14b).

La desventaja más seria es el párrafo 2, baja atenuación cerca del corte, y el párrafo 3 variación de la impedancia de imagen. Antes de que la sección de red inversa pueda utilizarse en un filtro práctico, se debe hacer algo para evitar estas dificultades.

Algunas ideas saltan a la vista. Exploraremos algunas de las más alentadoras.

19. Secciones en cascada

La sección de red inversa o k constante no tiene suficiente atenuación a frecuencias cercanas al corte. ¿Puede esto mejorarse conectando algunas de estas secciones en cascada como se muestra en la Fig. 19-15?

Nos enfrentamos primeramente con esta pregunta: ¿es permisible conectar un número de secciones en cascada y esperar de esta manera que tengan las mismas características que si se utilizan individualmente? Es permisible, debemos reconocerlo, únicamente si las impedancias de imagen están correctamente acopladas. Toda la discusión precedente de filtros está basada en el requerimiento de que cada sección debe terminarse en su impedancia de imagen. Por lo tanto, en la Fig. 19-15 la impedancia de imagen de salida

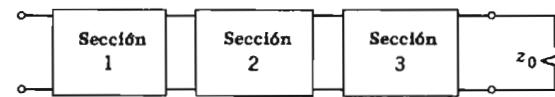


FIG. 19-15. Secciones en cascada

de la Sec. 1 debe acoplar con la impedancia de imagen de entrada de la Sección 2, y así sucesivamente, esto es, las secciones pueden conectarse en cascada si tienen idénticas funciones de impedancia de imagen, pero no de otra manera.

Con las impedancias de imagen acopladas apropiadamente de esta manera, dos secciones de k constante tienen el doble de atenuación que una. Las curvas de la Fig. 19-14 pueden entonces multiplicarse por dos o tres, o más, conectando secciones adicionales en cascada. Pero la forma de las curvas no cambia.

Quizá hay un plan mejor que el de conectar en cascada un número de secciones de k constante. Quizás una sección de k constante conectada en cascada con algún otro tipo de sección tenga mejores características de atenuación. Más aún, esto es cierto.

¿Cómo puede hacerse esto entonces? ¿Qué otra sección puede conectarse en cascada con una sección de k constante? El requerimiento necesario para una sección para conectarse en cascada con una sección de k constante es el de que tenga la misma impedancia de imagen. Si una sección T de k constante tiene elementos X_{ak} y X_{bk} , su impedancia de imagen es

$$z_{0T} = \sqrt{-(X_{ak}X_{bk} + \frac{1}{4}X_{ak}^2)} \quad (19-43)$$

Alguna otra sección T, aunque no sea una sección de k constante, tendrá idénticamente la misma impedancia de imagen si tiene los elementos X_a y X_b que satisfagan la relación.

$$X_a X_b + \frac{1}{4}X_a^2 = X_{ak}X_{bk} + \frac{1}{4}X_{ak}^2 \quad (19-44)$$

X_a no necesita ser igual a X_{ak} ; digamos que están relacionadas por algún factor m :

$$X_a = mX_{ak} \quad (19-45)$$

Con este valor de X_a , ¿qué valor de X_b satisfará la Ec. 19-44, dando la nueva sección la misma impedancia de imagen que la sección de k constante? Sustituimos mX_{ak} por X_a en la Ec. 19-44 y resolvemos para X_b . El resultado es

$$X_b = \frac{X_{bk}}{m} + X_{ak} \frac{1 - m^2}{4m} \quad (19-46)$$

Una sección con su X_a relacionada a la X_{ak} de una red de k constante por la Ec. 19-45 y su X_b a la X_{bk} de la red de k constante por la

Ec. 19-46 debe tener la misma impedancia de imagen que la red de k constante para todas las frecuencias. Estas secciones se llaman secciones derivadas m , y la sección de k constante desde la cual se inició la derivación se llama el prototipo (significando el primer mo-

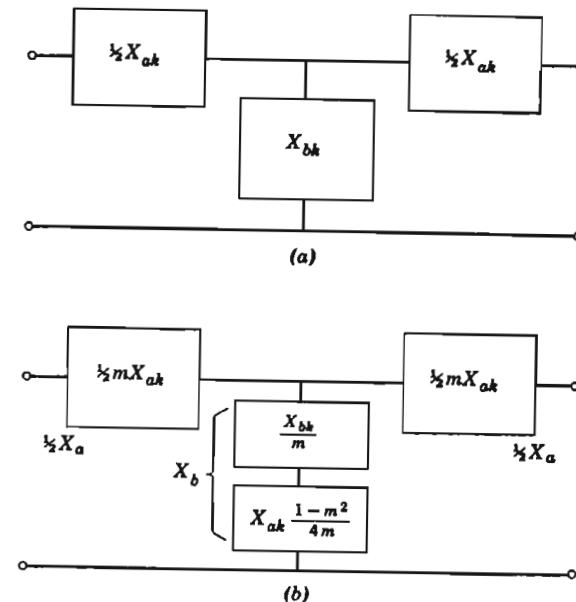


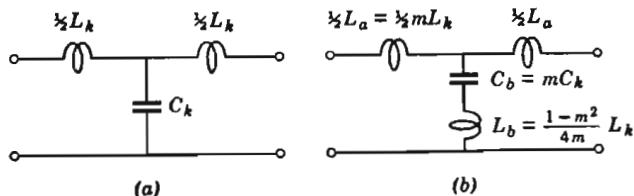
FIG. 19-16. Secciones T prototipo y derivada m

delo). Todas las secciones derivadas m con el mismo prototipo tienen la misma impedancia de imagen y pueden conectarse en cascada con la sección prototipo o con cuáquier otra de ellas.

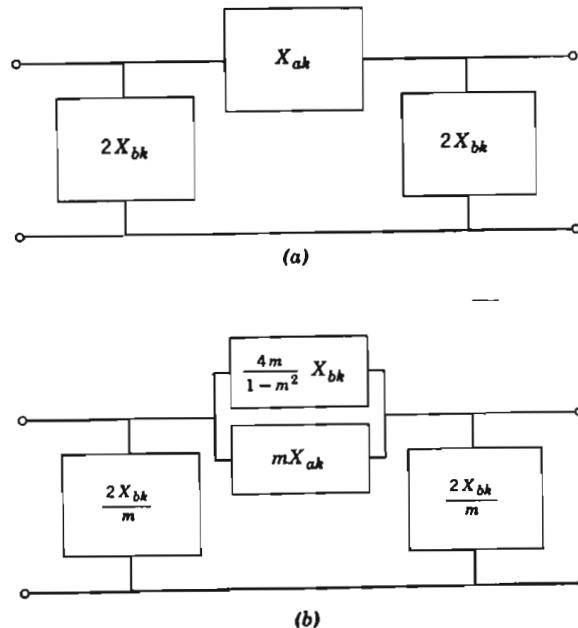
20. Secciones derivadas m

Matemáticamente m puede ser cualquier número. Físicamente es posible conseguir la red derivada m si m es un número real positivo entre cero y 1. La Fig. 19-16b, muestra una sección general T derivada m ; su X_a es mX_{ak} y su X_b está compuesta de dos partes, una igual a X_{bk}/m y la otra igual a $X_{ak}(1 - m^2)/4m$, de acuerdo con la Ec. 19-46.

La Fig. 19-17 muestra un caso especial, una sección T de bajo paso. X_{ak} del prototipo es ωL_k ; mX_{ak} de la sección derivada es por tanto $\omega m L_k$.

FIG. 19-17. Secciones T prototipo y derivada m de paso bajo

Físicamente esta reactancia se obtiene de un inductor algo pequeño, siendo m menor que 1. Para una parte del elemento en paralelo $X_{bk}/m = 1/\omega C_k m$ y ésta es la reactancia de un condensador con capacitancia igual a mC_k . La otra parte en paralelo es $X_{ak} (1 - m^2)/4m = \omega L_k (1 - m^2)/4m$; esto es un inductor cuyo tamaño depende de m . La fracción $(1 - m^2)/4m$ es un número real positivo, y la red de la Fig. 19-15b es por tanto físicamente realizable,* si m se encuentra entre 0 y 1.

FIG. 19-18. Secciones II prototipo y m derivada

* Como una ilustración simple de un elemento no realizable físicamente, intentemos hacer $m = -1$. Entonces $X_a = mX_{ak} = -X_{ak} = -\omega L_k$. Una reactancia igual a $-\omega L_k$ para todas las frecuencias, una característica de reactancia negativa, no es obtenible ni de un elemento eléctrico ni de una combinación de elementos. Es cierto por supuesto, que un condensador tiene reactancia negativa y la reactancia de un condensador puede hacerse igual a una reactancia negativa deseada para una frecuencia, pero la reactancia de un condensador varía de un manera bastante diferente de como lo hace una función de la frecuencia.

Una sección II derivada m es también físicamente realizable con la misma restricción. Para una sección II la impedancia de imagen de la sección derivada y la impedancia de imagen de la sección prototípico se acoplan a todas las frecuencias si (según Ec. 19-19).

$$\frac{X_a^2 X_b^2}{X_a X_b + \frac{1}{4} X_a^2} = \frac{X_{ak}^2 X_{bk}^2}{X_{ak} X_{bk} + \frac{1}{4} X_{ak}^2} \quad (19-47)$$

Hacemos arbitrariamente,

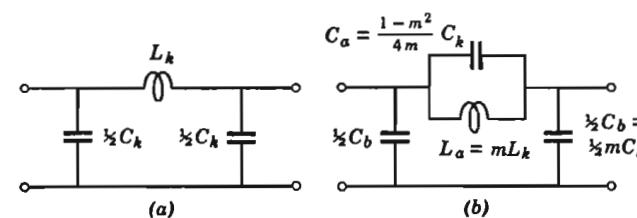
$$X_b = \frac{X_{bk}}{m} \quad (19-48)$$

y, después de sustituir esto en la Ec. 19-47, resolviendo para X_a :

$$\frac{1}{X_a} = \frac{1}{m X_{ak}} + \frac{1}{X_{bk}} \left(\frac{1 - m^2}{4m} \right) \quad (19-49)$$

Estas relaciones se mostraron en general en la Fig. 19-18, y específicamente para una sección de paso bajo en la Fig. 19-19.

Es interesante dibujar las curvas de reactancia para las secciones derivadas m como lo hicimos para las secciones de k constante. Para la T de paso bajo de la Fig. 19-17b, X_a y $-4X_b$ se muestran en la Fig. 19-20a, y la Fig. 19-20b muestra esta reactancia para la II de paso bajo de la Fig. 19-19b.

FIG. 19-19. Secciones II prototipo y derivada m de paso bajo

Recordando el criterio que se aplica a todas estas redes, la banda de transmisión libre es la región en la que X_a se encuentra entre $-4X_b$ y el eje.

Para ambas partes de la Fig. 19-20, este criterio se satisface a bajas frecuencias, entre 0 y f_c . Como es siempre cierto, f_c es donde las curvas de reactancia se cruzan.

Existe un punto crítico en la Fig. 19-20a en el que la curva para $-4X_b$ cruza el eje, esto es, donde $X_b = 0$. Un punto crítico correspondiente aparece en la Fig. 19-20b, donde X_a llega a infinito. Esto se verá que son frecuencias de resonancia, a la que la reactancia en paralelo en la T de la Fig. 19-17b llega a cero, o en la II de la Fig. 19-19b, la reactancia en serie tiende a infinito. Tanto en la T como

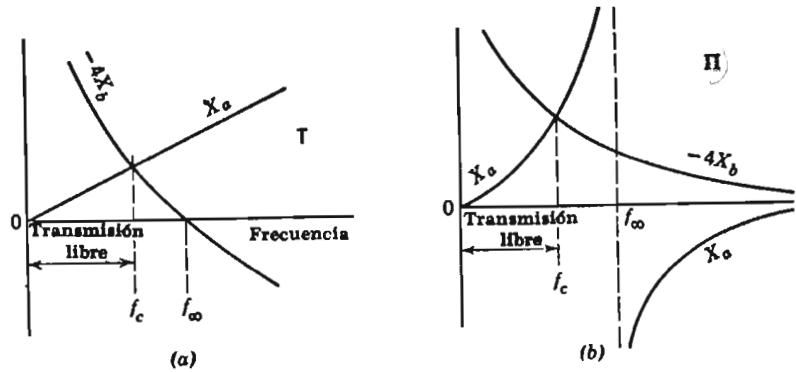


FIG. 19-20. Reactancia de secciones derivadas m de paso bajo, T y II

en la II, esta es la frecuencia a la que no aparecerá ningún voltaje en las terminales de salida y la atenuación es por tanto infinita, estas frecuencias se indican por el símbolo f_∞ .

Hasta ahora hemos visto que las secciones derivadas m son posibles, ¿pero son deseables? ¿Cuáles son los puntos buenos? El primero es que las secciones derivadas m pueden utilizarse en cascada porque tienen idénticas funciones de impedancia de imagen. Podemos ver ahora otro: la frecuencia de la atenuación infinita puede variarse por el diseñador para ajustarse a sus necesidades particulares. Eso se logra por una elección apropiada de m .

21. Atenuación de las secciones derivadas m

La Fig. 19-21 muestra las características de atenuación de las secciones derivadas m , tanto para paso bajo como para alto, sean T o II. Las características prototipo se muestran por líneas interrumpidas, y la diferencia obvia es que la atenuación de una sección derivada m es infinita a una frecuencia finita.

Estas curvas se obtuvieron utilizando las ecuaciones (de la Tabla 19-1):

$$\frac{X_a}{X_{aL}} = \frac{1}{m^2 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}$$

$$\alpha = 2 \cosh^{-1} \sqrt{-\frac{X_a}{4X_b}} \quad y \quad \alpha = 2 \operatorname{senh}^{-1} \sqrt{\frac{X_a}{4X_b}} \quad (19-50)$$

Considerando específicamente una sección derivada m de bajo paso, sea T o II, combinamos las Ecs. 45, 46 y 40 para encontrar:

$$\frac{X_a}{4X_b} = \frac{m^2}{1 - m^2 - (f_c/f)^2} \quad (19-51)$$

Seleccionando algún valor apropiado para m , entre 0 y 1, los valores numéricos obtenidos de la Ec. 19-51 pueden sustituirse en la Ec. 19-50 y los valores resultantes para la atenuación pueden graficarse. La Fig. 19-21a es una curva de esta clase dibujada para $m = 0.6$.

La frecuencia a la que la atenuación se hace infinita que llamamos f_∞ , es la frecuencia a la que el denominador de la Ec. 19-51 se hace cero. Esto es,

$$1 - m^2 - \left(\frac{f_c}{f_\infty}\right)^2 = 0 \quad (19-52)$$

Puesto que el diseñador de un filtro usualmente conoce la frecuencia a la que desea que la atenuación sea infinita, resolvamos para m en función de f_∞ :

$$m = \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f_\infty}\right)^2} \quad (19-53)$$

El valor deseado de f_∞ se sustituye en la Ec. 19-53 y la m resultante se utiliza para diseñar el filtro.

La discusión anterior, que siguió a las Ec. 19-50, se aplicó a secciones filtro de paso bajo. Con secciones de paso alto, sean T o II, se obtienen ecuaciones similares a la 19-51 y 19-53, pero con las razones de frecuencia reemplazadas por sus recíprocas. La curva de atenuación resultante, trazada en la Fig. 19-21b, es la inversa (con respecto a f_c) de la curva de la Fig. 19-21a.

Puesto que una sección derivada m puede tener alta atenuación a cualquier frecuencia deseada, una de las mayores desventajas de

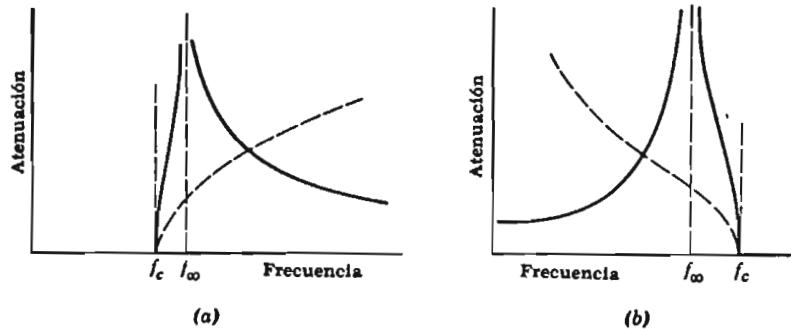


FIG. 19-21. Características de atenuación de secciones filtro de derivadas m . Sea T o II (dibujadas para $m = 0.6$). (a) Paso bajo. (b) Paso alto

la sección k constante fue superada ahora.* La otra gran desventaja, sin embargo, continúa existiendo: los filtros de m -derivados no son mejores que las secciones de k constante con respecto a impedancia de imagen constante en toda la banda de transmisión libre. Debemos buscar algún otro remedio para este problema.

22. Diseño para impedancia de imagen constante 1705

¿Cómo podemos mejorar la constancia de la impedancia de imagen sin gran aumento de complicación de la estructura de la sección filtro? Veamos qué podemos hacer fácilmente con una sección que no es ni k constante ni derivada m .

La Fig. 19-22a muestra algunas secciones T. La primera es una red inversa prototipo de paso bajo. La segunda, derivada m , tiene un elemento sumado en la rama en paralelo. La tercera, no derivada m , tiene un elemento sumado en la rama en serie. Este tercer tipo de sección T, que llamaremos derivada n (el nombre se utilizó primeramente para hacer énfasis en que no es una T derivada m) es una estructura comparativamente simple, y puede ser de valor práctico si se consigue que tenga buenas propiedades.

Un paso preliminar es determinar si la sección es un filtro y si lo es de qué clase. Con este propósito, las curvas de X_a y $-4X_b$ se trazaron en la Fig. 19-23. Claramente, existirá una banda de transmisión libre (donde X_a se encuentra entre $-4X_b$ y el eje) desde frecuencia cero a f_c . Más aún, estas curvas son esencialmente si-

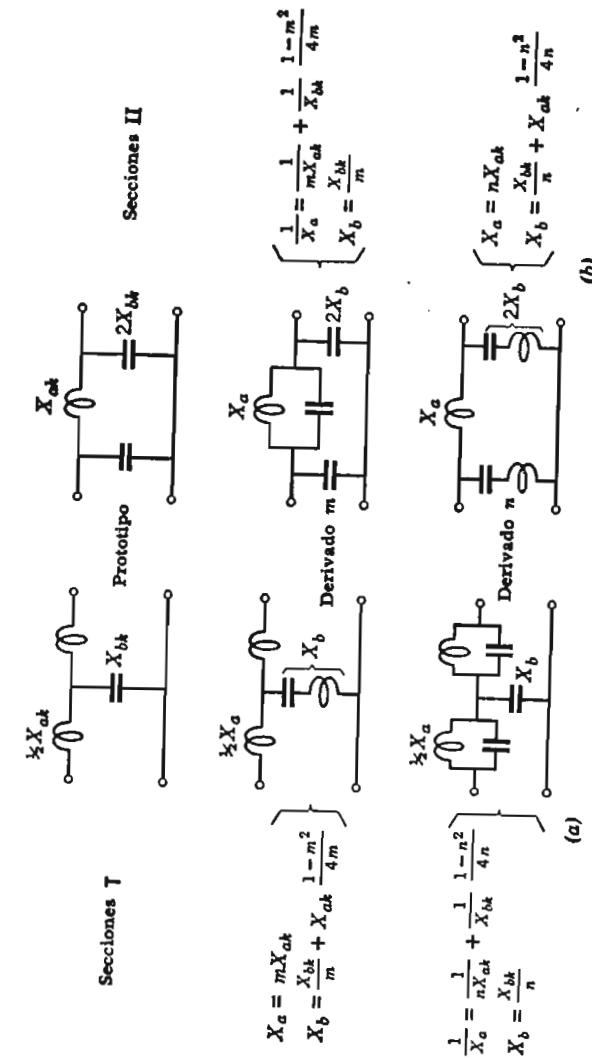


FIG. 19-22. Secciones de (a) derivada T y (b) II

milares a las curvas de la Fig. 19-20b que se aplican a una sección II derivada m y llegan a ser idénticas si $n = m$.

Para ver si esta sección derivada n puede hacerse que se aproxime al ideal de la impedancia de imagen constante en toda la banda de transmisión libre debemos encontrar su impedancia de imagen. La Ec. 19-20 nos dice que existe una relación inversa entre la impedan-

* Se habrá reconocido ahora que el filtro de la Fig. 19-3 fue de k constante y el de la Fig. 19-4 de m derivada.

cia de imagen de una sección T y la impedancia de imagen de una sección II. Si la T y II tienen la misma X_a y X_b .

$$z_{0T} z_{0II} = -X_a X_b \quad (19-54)$$

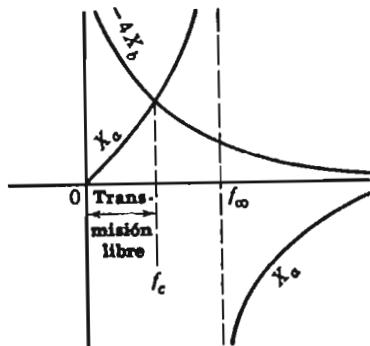


FIG. 19.23. Reactancias de secciones T derivada m de paso bajo

Esto puede aplicarse a la T derivada n y la II derivada m de la Fig. 19-22 haciendo $n = m$ (porque entonces tendrán idéntica X_a y X_b), dando

$$z_{0Tn} z_{0IIm} = -X_a X_b \quad (19-55)$$

Resolvemos para z_{0Tn} , siendo conocidas las otras cantidades, y el resultado es *

$$z_{0Tn} = \frac{z_{0Tk}}{1 - (f/f_c)^2(1 - n^2)} \quad (19-56)$$

* La solución se ve a continuación. Es característica de la sección derivada- m que $z_{0IIm} = z_{0Ia}$. Aplicando la Ec. 19-54 a las secciones prototipo T y II, y utilizando las Ecs. 19-24 y 19-32:

$$z_{0Tk} z_{0IIk} = -X_{ak} X_{bk} = k^2 \quad (19-57)$$

Combinando estos dos últimos pasos, $z_{0Tm} = k^2/z_{0Ta}$. Esto se sustituye en la Ec. 19-55 para dar

$$\frac{z_{0Tn}}{z_{0Tk}} k^2 = -X_a X_b \quad (19-58)$$

Ahora las dos Ecs. 19-48 y 49 se combinan (con $m = n$) para dar

$$-\frac{1}{X_a X_b} = \frac{1}{k^2} - \frac{4}{k^2} \left(\frac{f}{f_c}\right)^2 \frac{1 - n^2}{4} \quad (19-59)$$

donde z_{0Tk} es la impedancia de imagen de una sección prototipo de k constante (o de la sección T derivada m que por supuesto es lo mismo), f es la frecuencia, f_c es la frecuencia de corte, y n es la constante de diseño que puede dársele cualquier valor entre 0 y 1.

Esta impedancia de imagen depende del valor asignado a n . En la Fig. 19-24 están dadas curvas para valores diferentes de n . Se harán notar desde ahora que la impedancia de imagen puede estar mucho más cercana a ser constante en la mayor parte de la banda de transmisión libre que cualquier impedancia de imagen que hayamos visto antes. El mejor compromiso de trabajo para muchos propósitos es hacer $n = 0.6$, pero ligeras variaciones de este número pueden ser deseables para propósitos especiales. Si el interés se centra en la parte de la banda de transmisión libre cercana a la frecuencia de corte, puede obtenerse una impedancia de imagen razonablemente constante muy cerca del corte, haciendo $n = 0.5$.

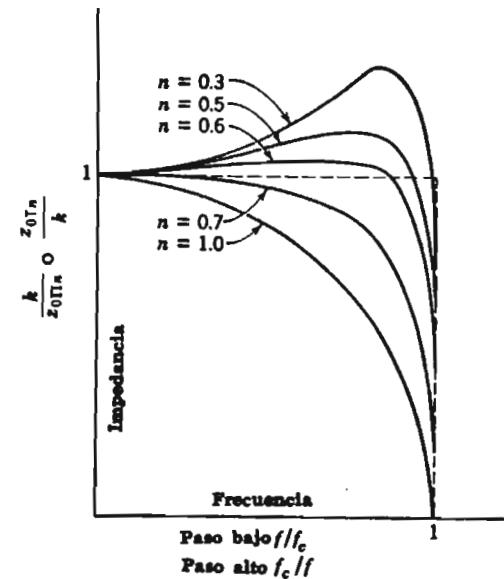


FIG. 19.24. Impedancia de imagen de secciones derivadas n para varias n
Para obtener esta última forma utilizamos la Ec. 19-40,

$$-\frac{X_{ak}}{4X_{bk}} = \left(\frac{f}{f_c}\right)^2 \quad \text{con} \quad -X_{ak} X_{bk} = k^2 \quad (19-60)$$

para dar

$$\frac{1}{X_{bk}^2} = \frac{4}{k^2} \left(\frac{f}{f_c}\right)^2 \quad (19-61)$$

Combinando las Ecs. 19-58 y 59, resulta la Ec. 19-56.

Esta discusión, que nos guía a la Fig. 19-24, se relaciona con una sección T de bajo paso. Las derivaciones en paralelo muestran que una sección de paso alto tiene impedancia de imagen dada por las mismas curvas si la abscisa se toma como f_c/f en vez de f/f_c , y que las secciones II se tomen en cuenta leyendo las ordenadas como k/z_0 en vez de z_0/k . Esta interpretación adicional de las escalas se muestran en la Fig. 19-24, haciendo una figura tan útil como una carta de impedancia de imagen tanto para secciones de alto y bajo paso, sean T o II estipulando que las secciones del tipo llamado derivada n en la Fig. 19-22.

23. Características de las secciones derivadas n

Está implicado en el último párrafo anterior que la sección derivada n tiene valor práctico. Esto es cierto. Es la forma más simple de sección filtro para tener impedancia de imagen razonablemente uniforme en la mayor parte de la banda de transmisión libre. Tiene también buenas características de atenuación para muchos propósitos. Puesto que (como en la Tabla 19-1) la atenuación está determinada por $X_a/4X_b$ y puesto que X_a y X_b de la T derivada n son iguales a X_a y X_b de la II derivada m , se sigue que las curvas como las de la Fig. 19-21 se aplican tanto a secciones derivadas n como derivadas m . Las curvas de la Fig. 19-21, dibujadas para una sección derivada m con $m = 0.6$, se aplican especialmente a una sección derivada n para la que $n = 0.6$.

Sin embargo, las secciones derivadas m pueden conectarse en cascada una con otra (y con secciones prototipo) sin importar el valor de m . Con la sección derivada n , la impedancia de imagen depende del valor de n y la conexión en cascada de las secciones de diferente n no es posible.

¿Cómo pueden obtenerse las ventajas de ambos tipos de secciones en un solo filtro? Esto, de hecho, se logra cortando la sección derivada n en dos.

24. Medias secciones terminales

La Fig. 19-25 muestra una sección T derivada m y una sección II derivada n (como en la Fig. 19-22). Muestra también una media sección. Esta media sección es la mitad de una II derivada n . Es también la mitad de una T derivada m .

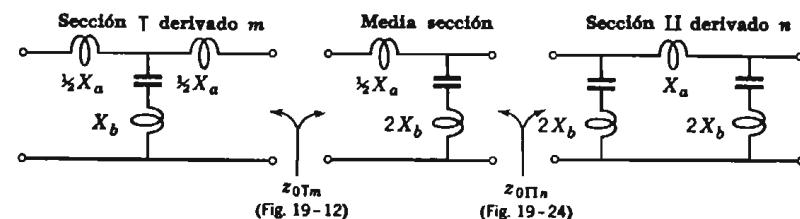


FIG. 19-25. La mitad de una sección T derivada m es idéntica a la mitad de una sección II derivada n

IMPEDANCIA DE IMAGEN. Esta media sección cuando se ve desde la izquierda parece como una T derivada m y cuando se ve desde la derecha parece una II derivada n . Si se termina apropiadamente del lado derecho, la impedancia, viendo las terminales del lado izquierdo será la impedancia de imagen altamente variable de una T derivada m . Si se termina apropiadamente del lado izquierdo, la impedancia viendo hacia las terminales del lado derecho tendrán la impedancia de imagen * casi constante de una II derivada n . La media sección puede, por lo tanto, utilizarse como una sección de transición, acoplando la impedancia de imagen de una sección T derivada m a su izquierda y al mismo tiempo acoplando muy aproximadamente una resistencia constante a su derecha.

ATENUACIÓN. Dos de las medias secciones puestas juntas final con final constituirían una T derivada m , o si se ponen juntas de otra manera opuesta constituiría una II derivada n . Tales medias secciones suministran la misma atenuación que una T o una II con igual X_a y X_b . Esto es obviamente cierto si las dos medias seccio-

* Esta afirmación se prueba calculando la impedancia de imagen de la media sección. Según la Ec. 19-21

$$z_{01}^2 = z_{1(\text{op})} z_{1(\text{sh})} \quad z_{02}^2 = z_{2(\text{op})} z_{2(\text{sh})}$$

Las impedancias de imagen de la media sección mostrada en la Fig. 19-25 son (desde la izquierda):

$$z_{01}^2 = (j\frac{1}{2}X_a + j2X_b)(j\frac{1}{2}X_a) = -\frac{1}{4}X_a^2 - X_aX_b$$

y (desde la derecha):

$$z_{02}^2 = (j2X_b) \left(\frac{j\frac{1}{2}X_a \cdot j2X_b}{j\frac{1}{2}X_a + j2X_b} \right) = \frac{4X_b^2}{-4X_b/X_a - 1}$$

La comparación con la Ec. 19-18 muestra que a la izquierda (z_{01}) la media sección se acopla con una T derivada- m ; la Ec. 19-19 muestra que a la derecha (z_{02}) la media sección se acopla con una II derivada n .

nes están separadas por secciones intermedias de otra forma, ~~secciones se conectan juntas.~~* Es también cierto si las dos medias secciones se propondrá en el siguiente párrafo.

~~Estas secciones se conectan juntas.~~

25. Filtros compuestos

El uso práctico de tales medias secciones se muestran en la Fig. 19-26a. Una sección derivada m y una sección prototipo se mues-

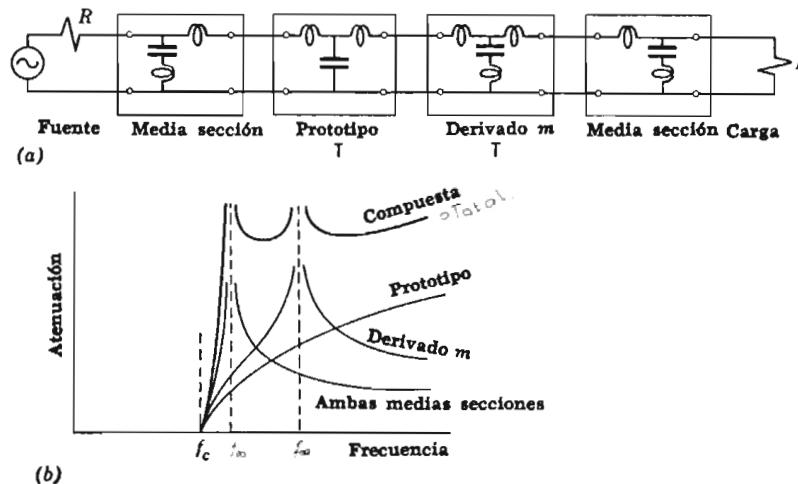


FIG. 19-26. Filtro compuesto y su curva de atenuación (secciones T y medias secciones)

tran en la mitad. Se muestran medias secciones en cada extremo. Viendo hacia adentro emparejan la impedancia de imagen de secciones prototipo y derivada m ; viendo hacia afuera, presentan una impedancia prácticamente constante (a frecuencias de la banda de transmisión libre) hacia los circuitos externos. Este valor constante está diseñado para emparejar la resistencia R de la carga del extremo derecho, y también la resistencia interna R igual del generador en el extremo izquierdo. Así, cada uno de los elementos conectados en cascada está emparejado a sus vecinos.

La atenuación total de este filtro compuesto se encuentra su-

* Algunos autores discuten exclusivamente las propiedades de las medias secciones (Mole, por ejemplo, en Referencia 40), puesto que éstas pueden combinarse en secciones completas de cualquier tipo.

mando las atenuaciones de las secciones individuales, como en la Fig. 19-26b. El diseñador puede escoger secciones derivadas m para dar alta atenuación a las frecuencias deseadas. Se puede desear insertar una sección con baja m para obtener un corte extremadamente brusco (aun a expensas de requerir bobinas y condensadores de gran tamaño y alta Q).

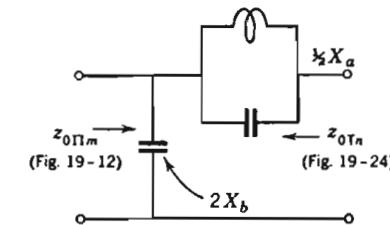


FIG. 19-27. Mitad de una sección II derivada m o mitad de una sección T derivada n

Para muchos propósitos prácticos un filtro bastante satisfactorio consiste de una sola sección prototipo flanqueada por dos medias secciones con $m = 0.6$. La adición de otra sección derivada m como en la Fig. 19-26 suplirá cercanamente cualquier necesidad.

Un filtro construido de esta manera tiene las siguientes ventajas: (1) está emparejado satisfactoriamente a sus impedancias de carga y fuentes. (2) Tiene atenuación infinita a frecuencia infinita. (3) Tiene atenuación infinita (o en la práctica muy alta atenuación) a una frecuencia 25 % mayor que la frecuencia de corte; esto se logra por las dos medias secciones que juntas tienen la impedancia de una sección completa con $m = 0.6$. (4) puede tener atenuación infinita a otras frecuencias, lograda por otras secciones derivadas m .

Esta discusión se aplica a un filtro de secciones T más terminaciones en medias secciones T. Es evidente que una red filtro de secciones II en cascada, prototipo o derivada m , puede terminarse de la misma manera con medias secciones II derivadas m . La Fig. 19-27 muestra la media sección obtenida bisectando una II derivada m . Vista desde la derecha, tendrá la impedancia casi constante de una T derivada * n ; ver Fig. 19-24. Un filtro compuesto útil puede arreglarse como en la Fig. 19-28.

* El término *derivado n* no es de uso común. Después de que los principios del diseño de filtros se han comprendido completamente no se necesita realmente, porque las secciones derivadas n se utilizan únicamente como medias secciones terminales. Media T derivada n es media II derivada m y viceversa, así, aquel que tenga práctica en la teoría de los filtros puede expresar sus ideas enteramente en función de secciones derivadas m y medias secciones. Sin embargo, se ha encontrado que es confuso para el principiante y para propósitos de enseñanza y la distinción entre *derivadas m* y *derivadas n* prueba ser decididamente útil.

Aunque los ejemplos dados en esta discusión se han referido específicamente a filtros de bajo paso, todos los principios se aplican igualmente a filtros de alto paso. Los filtros compuestos de la Fig. 19-26 y 19-28 se convierten en filtros de paso alto si las bobinas se reemplazan por condensadores y los condensadores por bobinas.

Debería notarse que en la construcción real, dos elementos semejantes en serie, como las bobinas de la Fig. 19-26, o dos elementos semejantes en paralelo, como los condensadores de la Fig. 19-28,

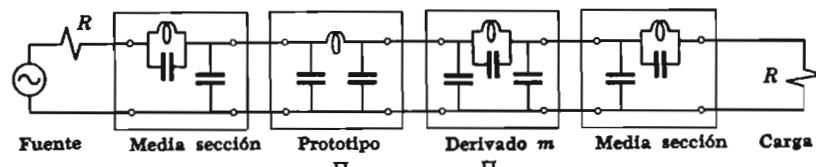


FIG. 19-28. Un filtro compuesto de secciones II y medias secciones; la curva de atenuación es la misma que la de la Fig. 19-26.

pueden convertirse en un solo elemento. Cuando se han hecho combinaciones de esta clase, el filtro compuesto de secciones T y el filtro compuesto de secciones II llegan a ser filtros en escalera, cada uno con diez elementos físicos distintos. El número de tales elementos es el que en su mayoría determina el costo de un filtro.

26. Filtros de banda

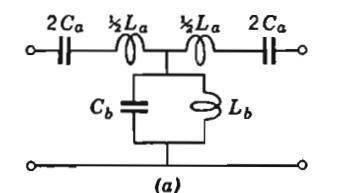
Se utiliza un filtro de banda cuando van a transmitirse libremente frecuencias entre una frecuencia de corte inferior f_1 y una frecuencia de corte superior f_2 , mientras que otras frecuencias, tanto más altas como más bajas, se atenúan. La Fig. 19-29 muestra la red de banda de tipo inverso o de k constante tanto para secciones T como II y las curvas de reactancia se aplican a ambas. La banda de transmisión libre es el rango de frecuencia en el que X_a se encuentra entre $-4X_b$ y el eje, extendiéndose entre los dos puntos de intersección de la curva de reactancia.

Se notará que X_a y X_b están ambas en resonancia a la misma frecuencia cerca de la mitad de la banda de transmisión libre, esto

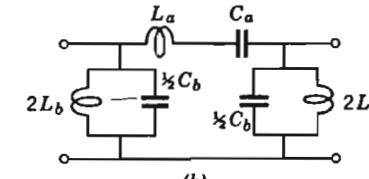
es, $L_a C_a = L_b C_b$. Si frecuencias ligeramente diferentes estuvieran en resonancia habría una banda de atenuación a la mitad de la banda de transmisión libre.

La Fig. 19-30 muestra la atenuación de un filtro de banda, se calcula de la fórmula de la Tabla 19-1 o se lee de la Fig. 19-8.

Esta red inversa es el prototipo de las secciones de banda de derivadas m . Como en los filtros de bajo paso y alto paso, la red inversa carece de un corte abrupto. Las secciones de banda que son derivadas m proveen alta atenuación (teóricamente infinita) a dos frecuencias como se indican en la curva de la Tabla 19-4, y tienen corte abrupto.



(a)



(b)

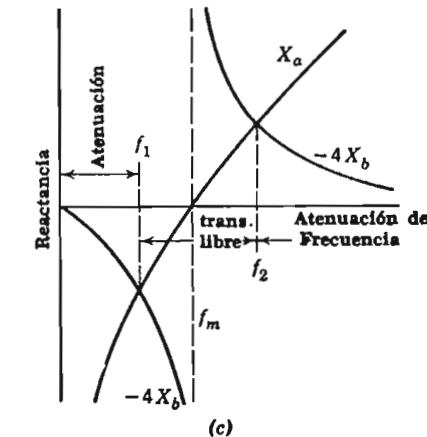
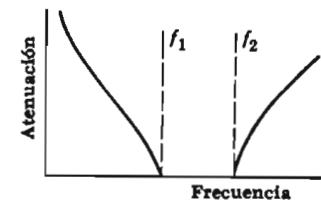


FIG. 19-29. Filtro de banda inverso. (a) Sección T. (b) Sección II. (c) Reactancia

Existe una oportunidad de seleccionar dos constantes de diseño arbitrario m_1 y m_2 , en una sección de banda. Las dos frecuencias de

FIG. 19-30. Atenuación de secciones de banda de k constante



atenuación infinita son de este modo ajustables independientemente a cualquier frecuencia deseada en sus respectivas bandas de ate-

nuación. Si los dos valores de m se toman iguales (si $m_1 = m_2 = m$), las dos frecuencias de atenuación infinita están relacionadas por

$$f_{1\infty} f_{2\infty} = f_1 f_2 = f_m^2 \quad (19-62)$$

Con igual m , entonces, las dos frecuencias de atenuación infinita están situadas simétricamente en los lados opuestos de f_m , la *frecuencia media* que es la media geométrica de las frecuencias de corte. Un pequeño valor de m suministra un corte abrupto en ambos lados, mientras que si m está cercana a 1, la red y sus características son similares al prototípico.*

La impedancia de imagen en la banda de transmisión libre se muestra en la Fig. 19-31. Las secciones T y II tienen igual impedancia de imagen únicamente a la frecuencia media, en la que $z_{0T} = z_{0II} = \sqrt{L_{bk}/C_{ak}} = \sqrt{L_{ak}/C_{bk}} = k$, y la impedancia de imagen de ambas secciones varía grandemente con la frecuencia. Puesto que esto no es satisfactorio para acoplar a circuitos externos, se utilizan medias secciones para filtros de banda, como se hace para filtro de bajo paso y alto. El mejor acoplamiento general a una resistencia terminal constante está suministrado por las secciones de banda, también,

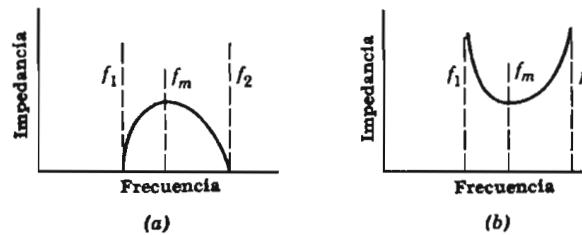


FIG. 19-31. Impedancia de imagen en la banda de transmisión libre de secciones de banda prototípico y derivada m . (a) Sección T. (b) Sección II

haciendo $m = 0.6$, aunque este valor puede variarse un poco para diseños excepcionales.

Cuando varios canales de frecuencia van a separarse por filtros de banda, varios filtros pueden conectarse en paralelo o en serie, como en la Fig. 19-32. Una frecuencia en la banda de uno de estos filtros está presumiblemente en la banda de atenuación de otro; la impedancia de entrada al otro es por tanto reactancia casi pura, aproximadamente igual a su impedancia de imagen. Se han obtenido esquemas ingeniosos para utilizar esta impedancia de entrada

* La teoría más simple utilizando una m única se considera aquí; para el diseño de filtros más adaptables con $m_1 \neq m_2$, ver Tabla 10-4 Transmission Lines del mismo autor (Referencia 5). El Handbook de Terman (Referencia 3), o los tratados minuciosos de Guillemin (Referencia 15) o de Mole (Referencia 40).

reactiva de un filtro bloqueador como parte de una red de un filtro que debería pasar la señal. Por tanto, cada uno de los filtros de la Fig. 19-32a actúa como una red reactiva en paralelo a la entrada de

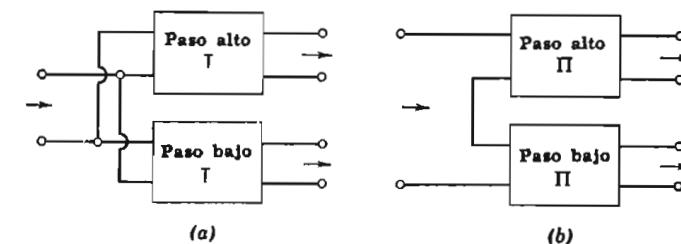


FIG. 19-32. Filtros en (a) paralelo y (b) serie

la otra; cada uno de los filtros de la Fig. 19-32b, actúa como un elemento reactivo en serie en la otra red. Esto puede ser realmente útil para el diseño mutuo.

Si cada filtro de la Fig. 19-32 pasa lo que otro rechaza se llaman filtros complementarios. Sucede afortunadamente, que filtros complementarios con secciones T intermedia, ambos teniendo la misma frecuencia de corte pero uno de paso alto y otro de paso bajo, y ambos empleando medias secciones terminales para las que $m = 0.6$, cada uno suministrará una aproximación satisfactoria de la primera rama en paralelo para el otro cuando se conectan en paralelo como en la Fig. 19-32a. Similarmente dos filtros con secciones intermedias II son complementarios cuando se conectan en serie como en la Fig. 19-32b*.

27. Diseño

Las Tablas 19-4, 5 y 6, resumen los resultados del capítulo para conveniencia en diseño. † Son bastante explicatorias por sí mismas. El único símbolo nuevo es R , la resistencia de carga. R es igual a la impedancia de imagen de filtro de bajo paso a $f = 0$, o del filtro de paso alto a $f = \infty$, y a la del filtro de banda a la frecuencia media. Por lo que $R = k$ para todos.

* Debido a Zobel; ver Guillemin, Referencia 15, Volumen II, Cap. IX.

† El arreglo se ha hecho imitando el utilizado por F. E. Terman en varias publicaciones, incluyendo las Referencias 3 y 41.

Ordinariamente el diseñador comienza con un conocimiento de la resistencia de carga y la frecuencia de corte. Los pasos en el diseño son como sigue:

1. Decir si se utilizarán secciones intermedias T o II. La elección se basa en conveniencia, y economía en parte obtenibles.
2. Diseño de una sección prototipo, utilizando las fórmulas de las tablas.
3. Diseño de las medias secciones terminales, utilizando $m = 0.6$ en las tablas.
4. Decidir cuándo se necesitan secciones derivadas m adicionales, ya sea para (a) dar mayor atenuación a ciertas frecuencias, o (b) dar un corte abrupto. La decisión puede requerir trazar la atenuación como una función de la frecuencia (como en la Fig. 19-26), además de calcular α de las fórmulas de la Tabla 19-1 o leer aproximadamente los decibeles de la carta de la Fig. 19-8.
5. Diseñar secciones derivadas m adicionales si se necesitan.
6. Arreglar las secciones en cascada y combinar elementos en serie o paralelo, obteniendo una red de escalera.

28. Ejemplo de diseño

Diseñar un filtro de paso bajo con corte a 4 000 ciclos por segundo para acoplar circuitos de 500 ohms a la entrada y a la salida. Se requiere que la atenuación sea al menos de 20 db (pérdida de potencia por inserción de 100 a 1) a todas las frecuencias arriba de 4 400 cps. Siguiendo los pasos del procedimiento de diseño mencionado arriba.

1. Se utilizarán secciones intermedias de tipo T. No existe razón para esta elección; es puramente arbitrario en este momento.
2. Utilizando la Tabla 19-4 los valores para la sección prototipo son:

$$L_k = \frac{500}{4000\pi} = 0.0398 \quad \frac{1}{2}L_k = 0.0199$$

$$C_k = \frac{1}{4000\pi \cdot 500} = 0.159 \cdot 10^{-6}$$

TABLA 19-4
Diseños de filtros de paso bajo

Constante de diseño	
	$R = \text{Resistencia de carga} = \frac{1}{R_L}$
	$m = \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f_\infty}\right)^2}$
Sección Prototipo	
$f_\infty = \infty \quad m = 1$	
	$L_k = \frac{R}{\pi f_c}$
	$C_k = \frac{1}{\pi f_c R}$
Secciones T derivados m	
	$L_a = mL_k$
	$L_b = \frac{1-m^2}{4m} L_k$
	$C_b = mC_k$
Secciones II derivados m	
	$L_a = mL_k$
	$C_a = \frac{1-m^2}{4m} C_k$
	$C_b = mC_k$

TABLA 19-5
Diseños de filtros de paso alto

Constante de diseño	
	$R = \text{Resistencia de carga}$
	$m = \sqrt{1 - \left(\frac{f_\infty}{f_c}\right)^2}$
Sección Prototipo	
$f_\infty = 0 \quad m = 1$	
	$L_k = \frac{R}{4\pi f_c}$
	$C_k = \frac{1}{4\pi f_c R}$
Secciones T derivados m	
	$C_a = \frac{C_k}{m}$
	$C_b = \frac{4m}{1-m^2} C_k$
	$L_b = \frac{L_k}{m}$
Media sección terminal $m = 0.6$	
Secciones II derivados m	
	$C_a = \frac{C_k}{m}$
	$L_a = \frac{4m}{1-m^2} L_k$
	$L_b = \frac{L_k}{m}$
Media sección terminal $m = 0.6$	

TABLA 19-6
Diseño de filtros de banda

Constante de diseño	
	$R = \text{Resistencia de carga}$
	$m = \sqrt{1 - \left[\frac{f_\infty(f_2 - f_1)}{f_\infty^2 - f_1 f_2}\right]^2}$
	$(f_\infty = f_{1oo} \quad o \quad f_{2oo})$
	$f_{1oo} f_{2oo} = f_1 f_2$
Sección Prototipo	
$f_{1oo} = 0 \quad f_{2oo} = \infty \quad m = 1$	
	$L_{ak} = \frac{R}{\pi(f_2 - f_1)} \quad C_{ak} = \frac{f_2 - f_1}{4\pi f_1 f_2 R}$
	$L_{bk} = \frac{R(f_2 - f_1)}{4\pi f_1 f_2} \quad C_{bk} = \frac{1}{\pi(f_2 - f_1)R}$
Secciones T derivados m	
	$L_a = mL_{ak} \quad C_a = \frac{C_{ak}}{m}$
	$L_b = \frac{L_{bk}}{m} \quad C_b = mC_{bk}$
Media sección terminal $m = 0.6$	$L_b' = \frac{1-m^2}{4m} L_{ak} \quad C_b' = \frac{4m}{1-m^2} C_{ak}$
Secciones II derivados m	
	$L_a = mL_{ak} \quad C_a = \frac{C_{ak}}{m}$
	$L_a' = \frac{4m}{1-m^2} L_{bk} \quad C_a' = \frac{1-m^2}{4m} C_{bk}$
Media sección terminal $m = 0.6$	$L_b = \frac{L_{bk}}{m} \quad C_b = mC_{bk}$

3. También de la tabla, los valores para las medias secciones terminales son:

$$L_a = (0.6)(0.0398) = 0.0239$$

$$\frac{1}{2}L_a = 0.0120$$

$$L_b = \frac{1 - (0.6)^2}{4(0.6)} (0.0398) = 0.0106$$

$$2L_b = 0.0212$$

$$C_b = (0.6)(0.159)10^{-6} = 0.0954 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{1}{2}C_b = 0.0477 \cdot 10^{-6}$$

4. ¿Tendrán la sección prototipo y las medias secciones terminales, suficiente atenuación sin secciones derivadas m adicionales? Se ha especificado que la atenuación debe ser de 20 db y arriba de 4 400 cps; el diseñador experimentado sospechará que la atenuación es adecuada a frecuencias más altas si el filtro da un corte suficientemente abrupto, y calculará $\alpha = 4 400$ cps:

$$X_{ak} = 2\pi f(0.0398) = 1100$$

$$4X_{bk} = \frac{-4 \cdot 10^6}{2\pi f(0.159)} = -913$$

$$\frac{X_{ak}}{4X_{bk}} = -\frac{1100}{913} = -1.205$$

La Fig. 19-8 muestra que esto logra cerca de 7 db de pérdida. Más exactamente,

$$\sqrt{1.205} = 1.10$$

$$\alpha = 2 \cosh^{-1} 1.10 = 0.88$$

$$\text{Pérdida} = 8.686(0.88) = 7.7 \text{ db}$$

Esto es para la sección prototipo. Para las dos medias secciones terminales tomadas juntas:

$$X_{am} = 660$$

$$X_{bm} = 292 - 380 = -88$$

$$\frac{X_{am}}{4X_{bm}} = -1.88$$

De la Fig. 19-8, las pérdidas son de cerca de 15 db. Los cálculos dan:

$$\sqrt{1.88} = 1.37$$

$$\alpha = 2 \cosh^{-1} 1.37 = 1.68$$

$$\text{Pérdida} = 8.686(1.68) = 14.6 \text{ db}$$

$$\text{Pérdida total en el filtro} = 7.7 + 14.6 = 22.3 \text{ db}$$

Esta es suficiente atenuación, pero muy justa. Si las especificaciones hubieran requerido cualquier corte más abrupto, hubiera sido necesario añadir una sección derivada m con f_∞ a quizás 4 500 cps.

Para una satisfacción completa sería bueno calcular la atenuación a varias frecuencias y trazar curvas. Esto se ha hecho en la Fig. 19-33. Nótese que a 7 000 cps la sección de k constante sola da una pérdida de 20 db, y eso garantiza suficiente atenuación a todas las frecuencias más altas.

5. No se necesitan secciones adicionales para obtener las especificaciones.

6. La Fig. 19-34a muestra las secciones ensambladas en un filtro, y la Fig. 19-34b muestra la combinación final de elementos en la red de escaleras que es para construirse realmente.

29. Comportamiento no ideal de los filtros prácticos

¿Se comportará realmente un filtro de la manera notable mostrada en la Fig. 19-33? De hecho no. Los infinitos, ceros y discontinuidades pertenecen más a lo ideal que a un mundo real. Sin embargo, nuestra curva es una buena aproximación del comportamiento real.

La diferencia entre la suposición de la terminación en z_0 y la terminación en una impedancia constante (en este ejemplo, 500 ohms) ha sido discutida ya en las Secciones 3, 4 y 12. Las Fig. 19-2a y 19-3b sugieren la diferencia por esperar.

Por supuesto, un circuito filtro está sujeto a exactamente la misma clase de análisis que cualquier otro circuito. Los métodos especiales de este capítulo y del anterior son únicamente simplificaciones. El comportamiento exacto de la red de la Fig. 19-34 puede encontrarse por un calculador paciente utilizando métodos de la primera parte de este libro. El método de escalera (Sección 5-10) es el más apropiado. Probablemente todo aquel interesado en filtros debería obtener las características de uno, por estos métodos elementales o

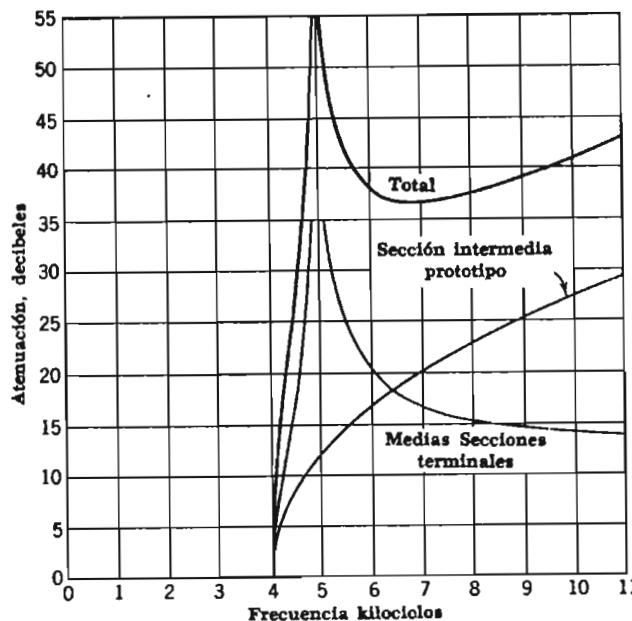


FIG. 19-33. Atenuación de secciones individuales y del filtro compuesto de la Fig. 19-34

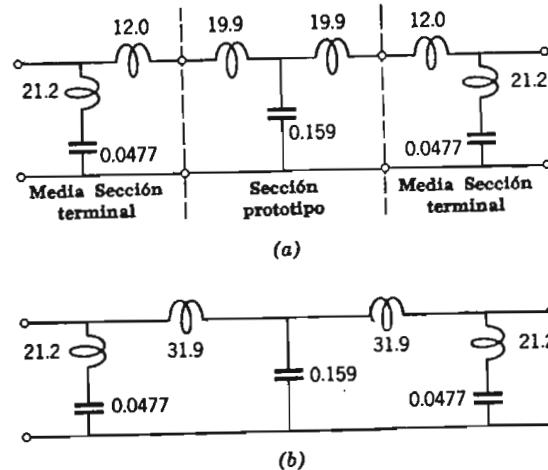


FIG. 19-34. Ejemplo del diseño de un filtro de paso bajo. (a) Secciones según diseño. (b) Elementos combinados. Los valores se muestran en milihenries y microfarads

de fuerza bruta para convencerse a sí mismo que los métodos algo esotéricos del capítulo presente no están fuera de realidad.

Otro factor en el desempeño de los filtros, despreciado hasta aquí, es la resistencia inevitable de los circuitos. Un circuito con poca pérdida, se comporta casi como un circuito sin ninguna, pero no igual. El efecto de pérdida es pequeño si la Q de las bobinas es 15 o más. El diseño de las bobinas depende de la frecuencia de operación. Los valores de Q hasta 400 puede obtenerse con núcleos de polvo de molibdeno-permaloy, y esto se utiliza para bobinas de filtro de teléfono para frecuencias de arriba de 30 kilociclos. A frecuencias más altas, los cristales de cuarzo suministran elementos resonantes con extremadamente alta Q (algunos miles) para redes de filtros. Esto permite filtros que tienen cortes excesivamente abruptos, con f_{∞} difiriendo de f_c un 2% o aún menos (en vez de 25% de la Fig. 19-33).

Para resumir la diferencia entre el comportamiento real y el comportamiento ideal como el predicho por la Fig. 19-33:

1. En la banda de transmisión libre, la atenuación es baja pero no cero.
2. A frecuencias de resonancia, la atenuación es alta pero no infinita.
3. El corte no es tan abrupto como se calcula; la atenuación se incrementa rápidamente hacia el borde de la banda de transmisión libre, redondeando la esquina de la curva en el corte.

30. Filtros de celosía

La exploración de los circuitos filtros que comenzó con la Sec. 7 nos ha llevado a un estudio de las redes de escalera. Estas son las más simples y a menudo las más prácticas, pero pueden igualmente obtenerse buenas características de redes de otros tipos. En conexión con esto deben mencionarse las redes de celosía, porque una celosía es la red más versátil; lo que pueda hacer cualquier red simétrica puede hacerlo igualmente bien una de celosía. Una de celosía es usualmente más difícil de diseñar y menos económica de construir que una red de escalera.

En principio, la celosía es simple. Como se muestra en la Fig. 19-35 puede desdoblarse en un puente. La señal de salida V_2 es alguna fracción de V_1 . Si el puente está balanceado, no existe señal de salida; $V_2 = 0$.

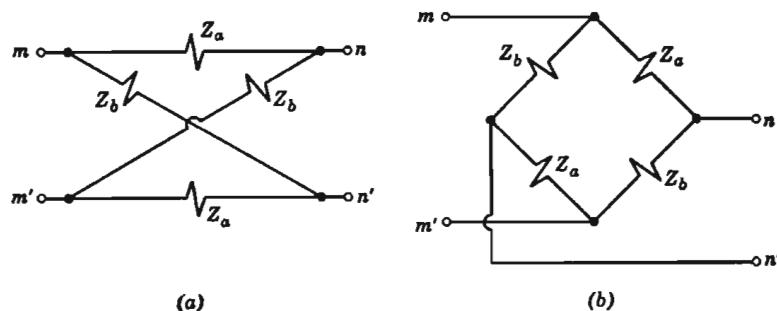


FIG. 19-35. Red de celosía

Investiguemos las características. Como con el filtro de escalera, podemos suponer una cierta impedancia de salida constante, o podemos suponer una terminación en impedancia de imagen. Adoptemos la última suposición, que es la más sencilla.

Mucho de nuestro estudio anterior ha sido suficientemente general para aplicarse a la celosía. La Ec. 19-21 se aplica para encontrar la impedancia de imagen:

$$z_0 = \sqrt{z_{1(\text{sh})} z_{1(\text{op})}} \quad (19-63)$$

y la Ec. 19-22 da la función de transferencia de imagen:

$$\tanh \gamma = \sqrt{\frac{z_{1(\text{sh})}}{z_{1(\text{op})}}} \quad (19-64)$$

Las impedancias en circuito abierto y cerrado son simples para la celosía:

$$z_{1(\text{sh})} = 2 \frac{Z_a Z_b}{Z_a + Z_b} \quad (19-65)$$

$$z_{1(\text{op})} = \frac{1}{2}(Z_a + Z_b) \quad (19-66)$$

Suponiendo celosías puramente reactivas, $Z_a = jX_a$, $Z_b = -jX_b$, y

$$z_0 = \sqrt{-X_a X_b} \quad (19-67)$$

La Ec. 19-64 se escribe primero para $\tanh \gamma$, y entonces se utiliza una identidad trigonométrica para obtener $\tanh \gamma/2$ que es más simple:

$$\tanh \gamma = \frac{2\sqrt{Z_a Z_b}}{Z_a + Z_b} \quad \tanh \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{Z_a}{Z_b}} = \sqrt{\frac{X_a}{X_b}} \quad (19-68)$$

$$\alpha + j\beta = \gamma = 2 \tanh^{-1} \sqrt{\frac{X_a}{X_b}} \quad (19-69)$$

Puesto que para argumentos reales, la función tangente hiperbólica es real y nunca mayor que 1, es conveniente considerar γ en tres rangos: *

Banda de transmisión libre: X_a/X_b es negativa (cualquier valor),

$$\alpha = 0 \quad \beta = \pm 2 \tan^{-1} \sqrt{-\frac{X_a}{X_b}} \quad (19-70)$$

(El signo de β es el mismo que el signo del valor de X_a).

Banda de atenuación: X_a/X_b es positiva, X_a/X_b es menor que 1,

$$\alpha = 2 \tanh^{-1} \sqrt{\frac{X_a}{X_b}} \quad \beta = 0 \quad (19-71)$$

o si X_a/X_b es mayor que 1,

$$\alpha = 2 \tanh^{-1} \sqrt{\frac{X_b}{X_a}} \quad \beta = \pi \quad (19-72)$$

Vemos (tanto de la Ec. 19-70 como de la Ec. 19-67) que si X_a y X_b son reactancias del mismo signo, la celosía produce atenuación; si X_a y X_b son reactancias de signos opuestos, no existe atenuación. Así, el criterio para la *banda de transmisión libre de una celosía* es simplemente que X_a y X_b deben ser reactancias de signo opuesto.

El filtro de celosía ideal debería tener $X_a = -1/X_b$ en la banda de paso, para esto haríamos z_0 constante, y $X_a = X_b$ en la banda de atenuación, porque esto haría infinita a la atenuación. Claramente, es mucho esperar la relación de X_a y X_b para hacer un cambio brusco a la frecuencia de corte. Sin embargo, el ideal puede casi lograrse, haciendo X_a y X_b redes de dos terminales bastante complicadas. El

* Los rangos se verifican por sustitución de $\alpha = 0$, y $\beta = 0$, y $\beta = \pi$, respectivamente, en

$$\tanh \frac{1}{2}(\alpha + j\beta) = \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta + j \cosh \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta}{\cosh \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta + j \sin \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}\beta}$$

arte del diseño es llegar tan cerca del ideal como esté justificado económicamente.

Unicamente se dará aquí una sugerión del método de diseño. El procedimiento básico es proyectar dos redes de dos terminales, una para X_a y otra para X_b , que tendrán signos opuestos para los valores de X_a y X_b en la banda de paso deseada, y el mismo signo en la banda de atenuación. Cuanto más nos acerquemos a z_0 constante, el corte será más abrupto, y se obtiene entonces una más uniformemente alta atenuación por refinamiento de diseño.

En el Cap. 8 las características de redes de dos terminales puramente reactivas se discutieron brevemente en conexión con la Fig. 8-20 se señaló que una escala de frecuencia mostrando los polos y ceros da información completa acerca de la función de reactancia de una red tipo. Tomemos ahora ventaja de este principio y dibujemos, como en la Fig. 19-36 las dos escalas de frecuencia de

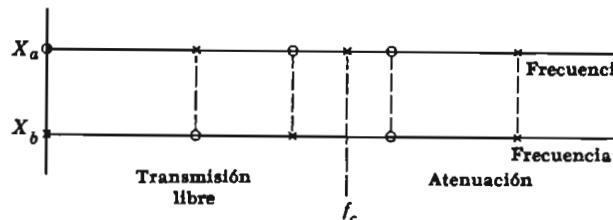


FIG. 19-36. Polos y ceros de X_a y X_b para un filtro de celosía de bajo paso este tipo, una para X_a y la otra para X_b . Sobre ésta tracemos los polos y ceros de reactancia. Las siguientes relaciones se aplican:

1. En la banda de atenuación, los polos están opuestos a polos (a las mismas frecuencias en X_a y X_b) y los ceros están opuestos a ceros.

2. En la banda de transmisión libre, los polos están apuestos a ceros, y los ceros opuestos a polos.

3. La frecuencia de corte es aquella a la que una de las funciones tiene un polo o un cero que no está emparejado ni por un cero ni por un polo de la otra función.

Esta relación se utiliza en la Fig. 19-36. Cuando los polos y ceros se arreglan de acuerdo a estas reglas, se logra automáticamente que X_a y X_b tengan signos opuestos en la banda de transmisión libre y sean del mismo signo que la banda de atenuación. Si esto no es claro se sugiere que se tracen con lápices curvas completas de reactancia, como en la Fig. 8-20a en la Fig. 19-36, y se verá entonces que los signos algebraicos de X_a y X_b deben ser como se estipuló.

Podrá verse que el corte agudo resulta de tener la primera frecuencia crítica en la banda de atenuación cercana a f_c , y que esta característica ideal se aproxima si existen muchos polos y ceros en cada función. Desafortunadamente, esto requiere varios pares de elementos resonantes y consecuentemente significa redes complicadas y costosas.

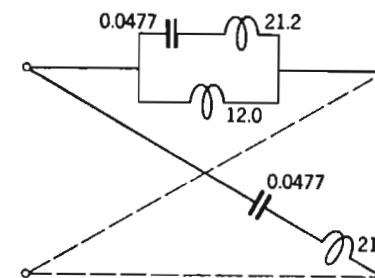


FIG. 19-37. Filtro de celosía simple. Los valores se dan en milihenries y microfarads. (Se sobreentiende que la celosía es simétrica; las líneas no continuas indican ramas idénticas con las mostradas)

Los filtros diseñados como redes de celosía puede a veces transformarse a redes de escalera por construcción real. Usualmente, las escaleras requieren menos elementos con menos exactitud en las tolerancias. Sin embargo, una escalera equivalente a una celosía no existe siempre, aunque siempre hay una celosía equivalente a una escalera. (Ver Guillemin, Referencia 15, volumen II).

Como un ejemplo simple, la Fig. 19-37 muestra un filtro de celosía que es equivalente a una Π derivada n compuesta de dos medianas secciones de la Fig. 19-34a. Nótese que esta Π contendría cinco elementos; la celosía contiene diez. Una de las curvas de la Fig. 19-33 muestra la atenuación de este filtro.

31. Sumario

El capítulo comienza con una exposición de las características del filtro *ideal*. El diseño de filtros puede basarse en la consideración de las *pérdidas por inserción* cuando un filtro se inserta en un circuito dado. Sin embargo, el diseño se simplifica grandemente, si se supone que la impedancia terminal es la *impedancia de imagen* del filtro; esta suposición se adopta con el entendimiento que (1) en la banda de transmisión libre esta terminal será muy aproximada, y (2) en la banda de atenuación la terminal no tiene importancia.

Los filtros se limitan a continuación a redes de elementos *reactivos*. Se dedujeron algunas relaciones generales (Sec. 10). Las redes

se restringen adicionalmente a secciones simétricas T y II para los que se estudiaron la función de transferencia de imagen y la impedancia de imagen.

Ejemplos específicos importantes son: secciones de red inversa (k constante); secciones derivadas m ; medias secciones terminales. Conectadas en cascada, éstas forman filtros compuestos en forma de escalera. Se discutieron filtros de bajo paso, de paso alto, y de banda, de cada tipo.

Se delineó un método de diseño y se dieron fórmulas y tablas de diseño. Un ejemplo ilustra el método. Se discutió la variación entre los filtros prácticos con respecto a la actuación calculada.

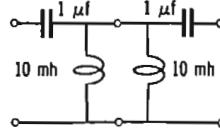
Se eliminó la restricción a secciones T y II y se presentó la red de diseño. Un ejemplo ilustra el método. Se discutió la variación en celosía". Si es realizable una red de dos pares de terminales reactivas simétricas, es realizable también en forma de celosía" (Guillemin, Referencia 15, volumen II). Se determinaron la función de transferencia de imagen y la impedancia de imagen. Se sugirió un método general de diseño, pero no se detalló.

PROBLEMAS

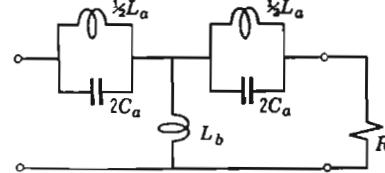
1. Derivar la Ec. 19-9 de las Ec. 19-3 y 4. § 5

2. Demostrar que la función de transferencia de la Ec. 19-10 da $|V_1/V_2| = 1$ para un rango de frecuencias que puede llamarse la banda de transmisión libre. § 6

3. El diagrama muestra dos secciones L agrupadas para formar una T. (a) ¿Cuál es la frecuencia de corte f_c en este filtro T? (b) Encontrar z_0 y β para $2f_c$ (c). Encontrar z_0 y α para $1/2f_c$. § 13



PROB. 3



PROB. 4

4. En el circuito mostrado, encontrar por métodos ordinarios de circuitos (no teoría de los filtros), a 900 cps y también a 1 100 cps, lo siguiente: (a) magnitud y ángulo de V_1/V_2 , (b) magnitud y án-

gulo de Z_{in} , (c) y si $e\gamma = V_1/V_2$, y (d) de γ calcular la pérdida en decibeles. Comparar el resultado y discutir el circuito como un filtro. § 12

5. Utilice las dos secciones L del Problema 3 para formar una II (reconectar en el orden opuesto), y repetir el Problema 3. § 13

6. En el circuito del Problema 4, calcular las mismas respuestas, a las mismas frecuencias, pero utilizando los métodos de este capítulo, suponiendo que el filtro termina en z_0 (y no necesariamente en 700 ohms). § 13

7. Para el circuito del Problema 4 calcular z_0 a frecuencias de 1 100, 1 250, 2 000 y 10 000 cps. § 13

8. Refiriéndonos al circuito filtro en el diagrama con el Problema 4, sea $L_a = 114.5$ mh, $C_a = 0.141 \mu F$, y reemplazar L_b con un condensador $C_b = 0.318 \mu F$. (a). Encontrar la impedancia de imagen de z_0 a 500 cps (b). Encontrar el límite al que se aproxime z_0 cuando f se aproxima a cero. § 14

9. Un filtro T o II tiene atenuación infinita si $X_a = \infty$ suponiendo que $X_b \neq \infty$. Existe también otra condición para atenuación infinita; ¿Cuál es? Encontrar dos circuitos entre los diagramas de este capítulo para ilustrar cada una de estas condiciones para atenuación infinita. § 14

10. Bosquejar X_a y $-4X_b$ como funciones de la frecuencia (las curvas deberán tener la forma correcta pero no se espera exactitud cuantitativa). Indicar las bandas de paso y atenuación; dar los valores numéricos para las frecuencias de corte y las frecuencias de atenuación infinita. Haga esto para los circuitos filtros de (a) Problema 3 (b) Problema 4 (c) Problema 8. § 14

11. Los elementos que comprenden X_a y X_b se han enlistado abajo para algunas secciones filtro (tanto T como II). Dibujar la sección filtro. Bosquejar X_a y $-4X_b$ como en la Fig. 19-20, indicando las bandas de paso y atenuación y las frecuencias de atenuación infinita. Clasifíquelos como de bajo paso, alto paso, etc. Si abarcan dos frecuencias resonantes, explicar su relación. § 14

X_a es:

- (a) L
- (b) L y C en paralelo
- (c) L y C en paralelo
- (d) L y C en serie
- (e) C
- (f) C
- (g) L y C en series

X_b es:

- L y C en serie
- L
- C
- C
- L y C en paralelo
- L y C en serie
- L y C en paralelo

- (h) L y C en paralelo
 (i) L y C en serie
 (j) L
 (k) L y C en paralelo

12. Derivar la Ec. 19-51 tanto para una sección T como para una II § 21

13. Dibujar secciones T y II de alto paso para derivadas m , como las Figs. 19-17 y 19 muestran secciones de bajo paso. Bosquejar las curvas de X_a y $-4X_b$ para cada uno, mostrando las bandas de paso y acumulación y las frecuencias de atenuación infinita. § 21

14. Repetir el Problema 13 para secciones derivadas n § 23

15. Bosquejar la impedancia de imagen para secciones derivadas n ($n = 0.6$) en un diagrama similar a la Fig. 19-11. § 23

16. Clasificar la sección filtro mostrada con el Problema 4. Si es de un tipo derivado, dar m o n y el prototipo k . Explicar cómo lo sabe usted. § 23

17. Bosquejar filtros compuestos de paso alto tanto T como II, como los filtros de paso bajo mostrados en las Figs. 19-26 y 28. § 25

18. Proyectar un circuito para una sección T de banda, derivada m . Bosquejar las curvas de X_a y $-4X_b$ y (estimando las razones de estas curvas), leer la atenuación de la Fig. 19-8 y trazarlas también. § 26

19. Repetir el Problema 18 para una Sección T de banda de k -constante en la que, debido a un error en el diseño, las frecuencias de resonancia de los brazos en serie y paralelo difieren en 10%. § 26

20. Diseñar con completo detalle un filtro de sección T de paso bajo que consiste de una sección prototipo y medias secciones terminales. $R = 600$ ohms, $f_c = 2\ 000$ cps. § 28

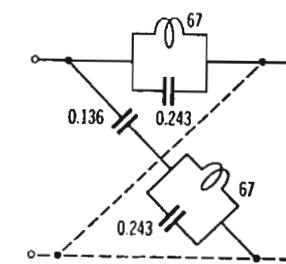
21. Estimar la atenuación del filtro diseñado en el Problema 20 y trazar como una función de la frecuencia. § 28

22. Proyectar un filtro de Sección II que tenga dos bandas de paso, una de 1 000 a 2 000 cps y la otra de 3 000 a 4 000 cps. Debe haber atenuación "infinita" a alguna frecuencia entre 2 000 y 3 000 cps. Utilizando las curvas de X_a y $-4X_b$ para mostrar que su circuito tiene la característica requerida. No se piden valores numéricos de los elementos. § 26

23. Proyectar un filtro de sección T de eliminación de banda. Debe ser una red inversa o de k constante; demostrar que lo es calculando k . Bosquejar las curvas de X_a y $-4X_b$. No se piden valores numéricos.

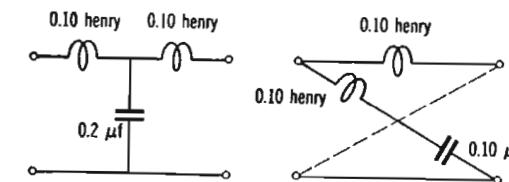
24. Diseñar un filtro de sección II de paso bajo; $R = 700$ ohms, $f_c = 1\ 000$ cps. La atenuación debe ser más de 20 db arriba de 1 100 cps. § 28

Nota: Cualquier número de problema de diseño pueden inventarse variando el Problema 24, paso alto, paso bajo, o de banda; II o T; cualquier R , cualquier f_c , cualquier agudeza de corte puede especificarse.



PROB. 25

25. Los números en el diagrama que muestra un filtro de celosía son milihenries y microfarads. Encontrar las bandas de paso y atenuación del filtro (dando valores numéricos). § 30



PROB. 26

26. Para la sección T y la sección de celosía mostradas: (a) encontrar la impedancia de imagen de cada una como una función de la frecuencia y demostrar que son iguales, (b) encontrar la atenuación de cada una como función de la frecuencia y demostrar que son iguales. § 30

27. Encuentre, si puede, una T o II exactamente equivalente a la celosía del Problema 25. § 30

28. Encontrar las bandas de paso y atenuación de filtro de celosía de la Fig. 19-37 trazando los polos y ceros de X_a y X_b . Compare con su II equivalente. § 30

20

Circuitos Trifásicos Balanceados

1. Campo de acción

No es estrictamente cierto que "cualquiera que utiliza electricidad, utiliza circuitos trifásicos". Se puede pensar fácilmente en excepciones. Sin embargo, las aplicaciones más obvias de la electricidad, toman potencia de sistemas trifásicos. El alumbrado doméstico monofásico está alimentado de un banco de transformadores trifásicos, a menudo en la línea propiedad del consumidor. La maquinaria industrial, operada principalmente por motores, es obviamente trifásica. Aun la potencia para sistemas telefónicos entra a la oficina central de barras colectoras trifásicas, y la potencia que envía ondas de radio o de video desde una estación transmisora es comprada (con toda probabilidad) por la compañía radiodifusora de un sistema trifásico. Los instrumentos de laboratorio que utilizan potencia están ordinariamente conectados a una línea alimentadora, y ésta a su vez a un sistema trifásico. Todo esto es perfectamente cierto.

Afortunadamente, la mayoría de los circuitos trifásicos pueden manejarse analíticamente considerando únicamente una fase. El análisis trifásico es por tanto tan fácil como el análisis monofásico. Es únicamente la excepcional carga desbalanceada la que requiere un tratamiento más sofisticado.

Puesto que los sistemas de potencia son comúnmente trifásicos, hay algunas razones abrumadoras para ello. Actualmente, las ven-

tajas decisivas se encuentran probablemente en los generadores y motores más que en los circuitos.

2. Ventajas de la operación trifásica

Veamos las ventajas de los sistemas de la corriente alterna en general de la operación trifásica en particular.

Primero la corriente alterna se utiliza con preferencia a la corriente directa porque su voltaje puede cambiarse por medio de transformadores. Esto permite una transmisión y distribución más económica, y es conveniente de muchas formas. La frecuencia de 60 ciclos por segundo en norteamérica (50 en el resto del mundo) es un compromiso entre la economía de la maquinaria que puede obtenerse a frecuencias más altas y la disminución de reactancia de transmisión a frecuencias más bajas.

La operación trifásica es preferible a la monofásica porque un devanado trifásico hace uso más eficiente del cobre y hierro del generador y porque el flujo de potencia es un sistema trifásico estable en vez de pulsante. Los motores trifásicos arrancan más convenientemente, y teniendo un par constante, trabajan más satisfactoriamente que los motores monofásicos. Los grandes generadores monofásicos, debido a la potencia pulsante, vibran de mala manera y son ruidosos. La potencia trifásica puede cambiarse por el uso de transformadores apropiados a potencia de cualquier otro número de fases (es eficiente para rectificadores que se alimenten con potencia de seis o más fases) pero la potencia monofásica, pulsante, no puede suministrar la potencia estable de cualquier sistema polifásico por mera transformación.

Los sistemas trifásicos son ligeramente más económicos en general que otros sistemas polifásicos. Las complicaciones de fases adicionales no se compensan con el ligero incremento de eficiencia de operación.

3. Generación trifásica

La armadura de un generador eléctrico se muestra en un dibujo altamente diagramático en la Fig. 20-1a. La armadura es un anillo de hierro; es la parte estable del generador, y la estructura del campo magnético (no indicada en el diagrama) gira dentro del anillo. El eje de la máquina es perpendicular al papel, pasando por el centro del anillo.

Existen ranuras, como se muestran, en la superficie interior de la armadura. En estas ranuras están colocados conductores de cobre aislados, habiendo sido prefabricados usualmente en bobinas de forma "de diamante". La apariencia del conductor no es del todo como la del diagrama, pero no es importante para la presente discusión. La parte activa de cada conductor, la parte en la que se genera voltaje, es la parte que yace en la ranura de la armadura; las líneas en el diagrama indican las conexiones extremas.

Supongamos que tenemos una armadura que no contiene en este momento ningún conductor ¿cómo deberán acomodarse los conductores? Como un primer paso, podrían colocarse una bobina con sus dos lados activos en ranuras opuestas como x y x' por ejemplo. El voltaje que se generaría en esta bobina cuando las máquinas estuvieran en operación, pero utilizando únicamente un par de ranuras en vez de los nueve pares mostrados, sería lamentablemente poco económico. Añadimos por tanto, dos bobinas más, una a cada lado de $x-x'$, y conectamos las tres bobinas en serie. Ahora estarán en uso tres pares de ranuras, como se muestra con la línea gruesa del diagrama.

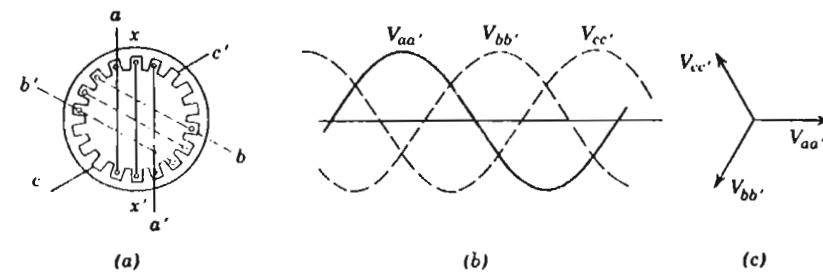


FIG. 20-1. Generación trifásica

Podrían añadirse más bobinas en otras ranuras en serie también, pero esto llega rápidamente a ser ineficiente. En vez de esto coloquemos tres bobinas más en las ranuras de la armadura, (como se muestra con las líneas no continuas en el diagrama) pero no la conectemos con las primeras tres bobinas; las terminales de bobinas de las primeras tres las sacamos de la máquina en a y a' , y las terminales de bobina del segundo juego en b y b' . Las restantes ranuras de la armadura las llenamos ahora con tres bobinas más (no mostradas en el diagrama) con terminales en c y c' .

De esta manera para utilizar todas las ranuras alrededor de la armadura de una manera razonablemente eficiente, hemos colocado

en la máquina tres devanados de armadura* que hasta ahora no están conectadas entre ellas de ninguna manera.

Estos se llaman los devanados trifásicos de la máquina. Actúan (excepto por efectos magnéticos mutuos) como tres generadores separados.

La Fig. 20-1b muestra los tres voltajes entre los pares de terminales. Se ha supuesto que la estructura del campo de la máquina está girando en la dirección de las manecillas del reloj, en la dirección *a-b-c*, de modo que los tres voltajes llegan a sus correspondientes máximos positivos en ese mismo orden. Las ondas de voltaje son aproximadamente senoidales (esto se requiere del diseñador de máquinas, pero no sucede sin ser cuidadoso) y los fasores que representan estos voltajes de salida se muestran en la Fig. 20-1c. Se recordará que el diagrama fasorial completo se supone que gira en la dirección contraria a las manecillas del reloj de modo que los voltajes (representados por proyecciones sobre un eje fijo) se seguirán uno a otro en el orden *a-b-c*.

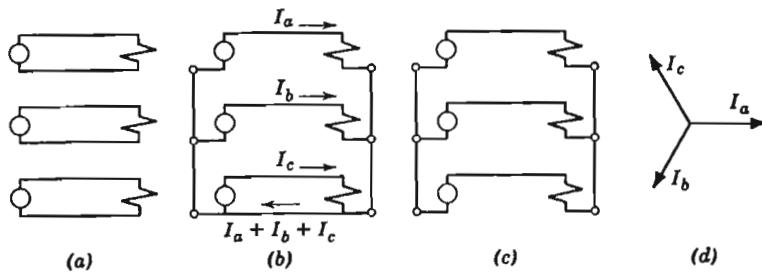


FIG. 20-2. Conexiones trifásicas

4. Conexiones de carga trifásica

La Fig. 20-2a muestra tres generadores separados representando los tres devanados de la máquina trifásica de la Fig. 20-1. La potencia se lleva desde los generadores a la carga a lo largo de seis alambres. La Fig. 20-2b muestra un cambio hecho por motivo de econo-

* Debe hacerse énfasis en que las bobinas no están realmente fabricadas como se indican en la Fig. 20-1. Las bobinas utilizadas en una máquina práctica son idénticas; también los lados de una bobina no están usualmente en ranuras de la armadura directamente opuestas. Sin embargo, los principios de la operación trifásica son realmente como se dan aquí, y el devanado mostrado en el diagrama, aunque difícil de instalar, operaría satisfactoriamente.

mía: en lugar de tener un alambre de retorno desde cada carga a cada generador, se utiliza un solo alambre para la corriente de retorno de los tres. Esto deja un total de cuatro alambres en vez de seis, que seguramente es más económico, aun si fuese necesario que el alambre común fuese mayor que los otros para llevar las tres corrientes. ¿Pero qué tamaño se necesita? Veamos qué corriente transporta en realidad este alambre común de retorno. Si las tres cargas son iguales (carga balanceada), y si los tres voltajes son iguales en magnitud y apartados 120° de fase (voltaje balanceado), las tres corrientes estarán balanceadas como se muestra en la Fig. 20-2d. La corriente en el alambre común de retorno es la suma de estas tres co-

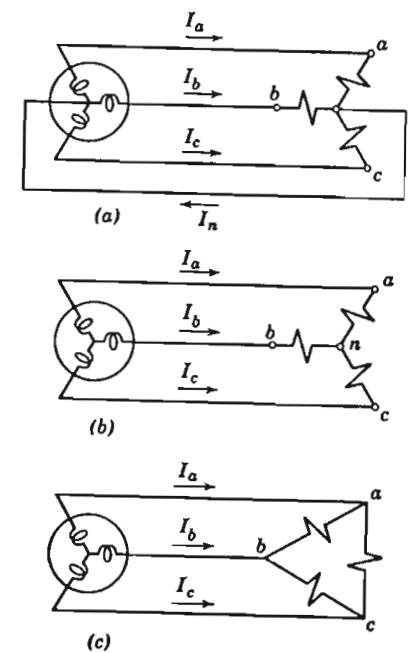


FIG. 20-3. Cargas en Y y Δ

rrientes de fase. Pero la suma de las tres es cero. Por tanto, bajo estas condiciones ideales de voltajes balanceados y cargas balanceadas, el alambre común de retorno realmente *no transporta ninguna* corriente. Con condiciones de balanceo menos ideales, sin embargo —con condiciones prácticas de carga en un sistema de potencia trifásica— las sumas de las tres corrientes de línea no es cero. Realmente es bastante pequeña, y el alambre común de retorno, el cuarto

alambre de un *sistema trifásico de cuatro hilos* puede realmente ser mucho más pequeño que los otros tres. Esta condición, mostrada en la Fig. 20-3a, es bastante importante en sistemas de potencia trifásica.

Puesto que el cuarto alambre, el alambre de retorno, no lleva corriente, ¿puede eliminarse completamente, como en los *sistemas trifásicos de tres hilos*, de la Fig. 20-2c o 20-3b? esto puede hacerse y se hace, si existe la seguridad de que la carga estará siempre bien balanceada. La dificultad con esta conexión es que un desbalanceo de la impedancia de carga produce voltajes desbalanceados entre las tres fases de la carga, aunque los tres voltajes generados puedan estar perfectamente balanceados.

Un sistema trifásico más ventajoso se muestra en la Fig. 20-3c. Aquí las cargas están conectadas entre líneas en una configuración Δ . Estas cargas conectadas en Δ no necesitan un balanceo exacto. Como un ejemplo extremo, sería posible conectar las cargas entre los puntos *a* y *b* con las otras fases sin carga, y el generador suministraría potencia a esta única carga. Con la conexión Y de tres hilos, por otro lado, sería absurdo conectar una única carga del punto *a* a *n* sin ninguna conexión de *b* o *c* a *n*.

La conexión Δ de las cargas sugiere la conexión Δ de los devanados del generador. Un generador conectado en Δ es posible, pero es desventajoso por dos razones principales. Primeramente, es deseable por seguridad y para protección del sistema tener una conexión del sistema eléctrico a tierra, y el *punto neutro* del generador, la unión de las Y, es el punto lógico para conectar a tierra. Segundo, una conexión Δ dentro de un generador suministra una trayectoria de corto circuito en la que la corriente puede fluir; veremos posteriormente que tal corriente circulante puede existir y es, si no algo peor, una causa de pérdida de potencia e ineficiencia de la máquina.

5. Conexiones de transformador

La mayoría de los sistemas de potencia trifásica utilizan transformadores para elevar y disminuir el voltaje. El voltaje del generador, usualmente de 12 a 16 kilovolts, se eleva a quizás 110 kilovolts para transmisión, el voltaje de transmisión se reduce para distribución; las grandes líneas de distribución pueden operar de 13 a 69 kilovolts, con distribución local a 2.4 o 14 kilovolts. Esta energía se entrega finalmente al consumidor de 120 a 240 volts.

Un banco de tres transformadores monofásicos (Fig. 20.4) se utiliza comúnmente para transformación trifásica. (Se supone que se está familiarizado con el principio general de la operación de transformadores: cada transformador es un par de bobinas acopladas muy íntimamente y devanadas sobre un núcleo de acero para lograr inductancia mutua alta). Es significativo para nuestra presente discusión que las bobinas están completamente aisladas una de otra, por tanto, las tres bobinas *primarias* (o de entrada) y las tres bobinas *secundarias* (de salida) pueden interconectarse independientemente.

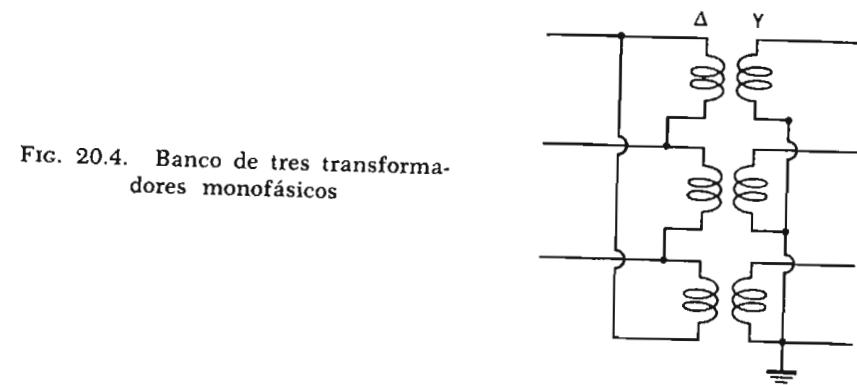


FIG. 20.4. Banco de tres transformadores monofásicos

Es generalmente ventajoso conectar un conjunto de bobinas de transformador en una Δ y la otra en una Y. La Fig. 20-4 muestra un arreglo como éste. La unión de la Y se conecta a un cuarto alambre *neutro*, que puede conectarse también a tierra. Esta conexión Δ -Y es bastante típica en instalaciones de transformadores en estaciones de generación, estando el primario conectado en Δ alimentado desde un generador conectado en Y, y el secundario conectado en Y alimentando el extremo transmisor de una línea trifásica de transmisión.

En otros puntos de transformación del sistema se utilizarán otros esquemas de conexión. Los transformadores finales para suministro al consumidor pueden tener los devanados del primario conectados como una Δ , o como una Y de cuatro hilos, con algo así como 4 000 volts de línea a línea.

Un consumidor industrial, probablemente necesita potencia trifásica para motores. Se utilizan entonces dos tipos de sistema de distribución. Un banco de transformadores con secundario en Δ (Fig. 20-5a), de 240 volts de línea a línea, puede suministrar potencia a

los motores, mientras que las lámparas de 120 volts y otras cargas monofásicas se conectan entre los alambres exteriores y una derivación intermedia de uno o más de los transformadores conectados en Δ .

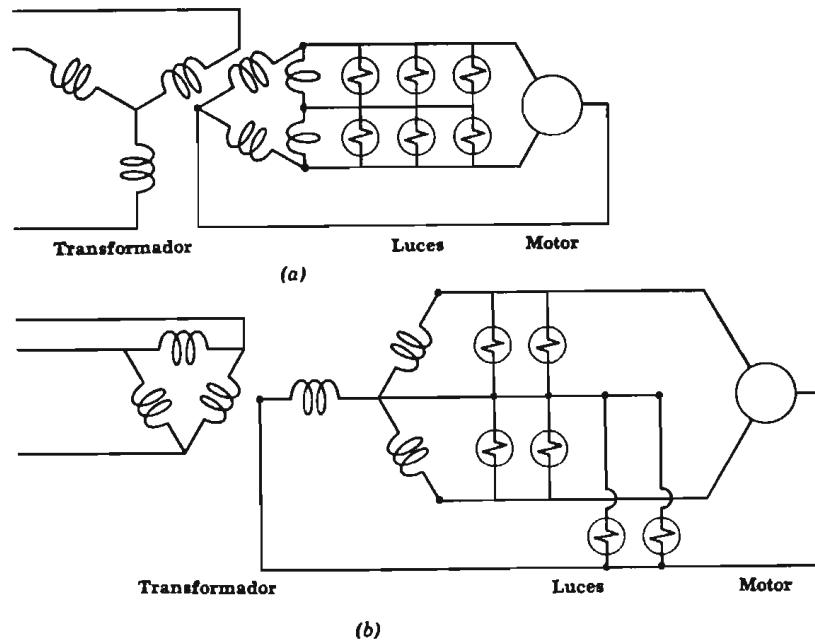


FIG. 20-5. Dos sistemas de distribución

Un sistema alternativo común (Fig. 20-5b) es conectar los secundarios del transformador como una Y para suministrar 120 volts de línea a neutro y 208 volts de línea a línea. Aunque el voltaje de línea a neutro es un poco alto para carga de alumbrado monofásica o el voltaje de línea a línea es un poco bajo para cargas de motores trifásicos, pero para instalaciones metropolitanas una solución satisfactoria. Como un consumidor residencial ordinariamente no requiere potencia trifásica, los transformadores en distritos residenciales pueden utilizarse como tres suministros separados monofásicos. Los sistemas monofásicos de tres alambres son comunes, el central de los tres alambres proviene de una derivación en el centro del devanado secundario del transformador. El voltaje entre los alambres exteriores es de 240 volts, con 120 volts entre cada uno de ellos y el alambre de la derivación o neutro que está generalmente conectado a tierra.

6. Reducción a monofásico

Volvamos ahora al análisis de la operación trifásica.* Cuando un sistema trifásico está balanceado, el método de análisis que se utiliza siempre (aunque no siempre establecido claramente) es determinar el voltaje, la corriente, y la distribución de potencia en una sola fase, conociendo que las otras fases tendrán cantidades correspondientes exactamente iguales, excepto por una diferencia de tiempo de $\frac{1}{3}$ ciclo. Así, si la corriente se calcula en la fase *a*, la corriente en la fase *b* es la misma en magnitud pero $\frac{1}{3}$ ciclo (120°) retrasada. La corriente en la fase *c* está retrasada otro $\frac{1}{3}$ ciclo.

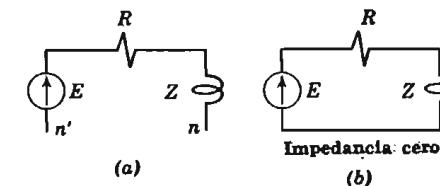


FIG. 20-6. Representación monofásica de un sistema trifásico

La Fig. 20-2c, sugiere que una fase de un sistema balanceado en la que todos los aparatos están conectados en Y pueden representarse como en la Fig. 20-6a. *E* es la fuerza electromotriz en una fase del devanado del generador, *R* es la resistencia de la línea de transmisión y *Z* es la impedancia de la carga. Hasta aquí, únicamente hemos duplicado un tercio del sistema trifásico. ¿Qué hacemos, sin embargo, para completar el circuito entre *n*, el neutro de la carga y *n'* el neutro del generador?

El espacio entre *n* y *n'* no puede cerrarse con un alambre semejante al alambre anterior, porque esto introduciría en el circuito otra resistencia igual a *R* que no existe realmente. La situación real en el sistema trifásico es que la corriente que va hacia la carga en la fase *a* se divide en el punto *n* y retorna por los alambres *b* y *c*. Ninguna corriente pasa de *n* a *n'* a través de ningún alambre neutro o de la tierra no hay corriente en el neutro; no existe caída de voltaje en la impedancia de un alambre neutro, ni ninguna pérdida de potencia en resistencia. El circuito equivalente monofásico de la Fig. 20-6 debe

* Para información práctica acerca de sistemas trifásicos ver Powell, Referencia 42.

por tanto cerrar el intervalo de n a n' con un conductor hipotético de *impedancia cero*.^{*} Este artificio está indicado en la Fig. 20-6b.

Las corrientes y voltajes a los diferentes puntos de la Fig. 20-6b se encuentran por los métodos que se nos han hecho familiares a lo largo de los primeros capítulos de este libro. Por supuesto, aun una fase de un sistema de potencia práctico es una red complicada, y el cálculo detallado de flujo de corriente y potencia es a menudo un problema a la medida para una computadora automática digital de alta velocidad. Desde el punto de vista de una compañía de potencia eléctrica, el valor de un análisis de flujo de potencia justifica fácilmente el gasto de la computadora. Otra alternativa es utilizar un computador analógico de propósito especial llamado *analizador de red*, que es un modelo a pequeña escala de un sistema de potencia en el que las cantidades eléctricas pueden medirse realmente.

7. Voltajes de línea a línea y de línea a neutro

En el circuito de la Fig. 20-6b (o en la semejante, pero más complicada representación de algún sistema más extenso) la *corriente* es igual a la corriente de línea en el sistema trifásico real. Es la corriente en un alambre de la línea de transmisión, en una fase de una carga conectada en Y, en un devanado de un generador conectado en Y. Si la corriente es I_a (en la notación usual de transformada o fasor), las corrientes correspondientes en otra línea y fase son:

$$I_b = I_a / -120^\circ \quad I_c = I_a / +120^\circ \quad (20-1)$$

Estas ecuaciones definen el conjunto de corrientes balanceadas de fase positiva de secuencia *a-b-c* mostrados en la Fig. 20-2d y repetidas en la Fig. 20-7b.

Los *voltajes* calculados de la Fig. 20-6, entre las terminales de la carga o entre las terminales del generador, son voltajes de línea a neutro en el sistema trifásico. V_{an} es un ejemplo. V_{bn} y V_{cn} están relacionados por

$$V_{bn} = V_{an} / -120^\circ \quad V_{cn} = V_{an} / +120^\circ \quad (20-2)$$

* Un conductor de resistencia cero puede visualizarse sin problema. Un conductor de inductancia cero, que no lo rodee ningún campo magnético, es más difícil. De hecho, la reactancia de la línea de transmisión en un sistema trifásico no es atribuible claramente al campo magnético que enlaza cualquier alambre único y deberá tratarse más exactamente. Ver *Transmission Lines* (Referencia 5).

Otra forma, exactamente equivalente, de escribir esta relación es:

$$V_{an} = V_{bn} / +120^\circ = V_{cn} / -120^\circ \quad (20-3)$$

(Estas ecuaciones definen un conjunto de voltajes de secuencias de fase positivas).

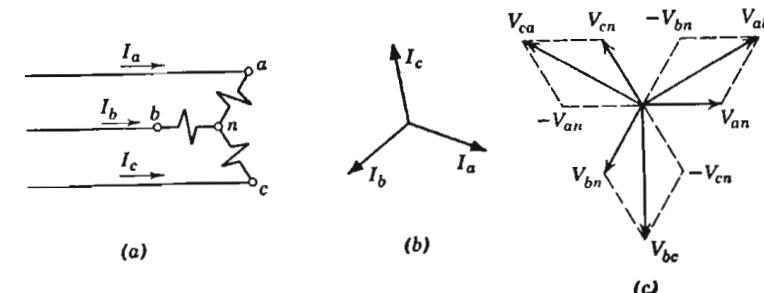


FIG. 20-7. Una carga Y balanceada, las tres corrientes de línea (o fase) y los voltajes, tanto de línea a neutro como de línea a línea

Los voltajes de línea a neutro son importantes, pero los voltajes de línea a línea se requieren también frecuentemente. La Fig. 20-7c muestra la relación. El voltaje de línea a línea, V_{ab} , por ejemplo es (según la ley de Kirchoff) igual a $V_{an} + V_{nb}$. Sin embargo, $V_{nb} = -V_{bn}$, por lo que

$$V_{ab} = V_{an} - V_{bn} \quad (20-4)$$

V_{an} aparece en el diagrama; $-V_{bn}$ se dibujó igual y opuesto a V_{bn} . Los dos se suman gráficamente para obtener V_{ab} .

Los otros dos voltajes de línea a línea se obtienen de la misma manera. Según la geometría y la relación de triángulos equiláteros, puede establecerse de una vez por todas que en un sistema trifásico balanceado (de secuencia de fase positiva),

$$V_{ab} = \sqrt{3} V_{an} / +30^\circ \quad (20-5)$$

Esto es, el voltaje de línea a línea es mayor que el voltaje de línea a neutro en $\sqrt{3}$, y V_{ab} adelanta a V_{an} por 30° .

Puesto que es enteramente opcional qué voltajes se comparan, algunos autores prefieren la forma ligeramente más concisa de la misma relación:

$$V_{bc} = -j\sqrt{3} V_{an} \quad (20-6)$$

La Ec. 20-5 (o 20-6) es extremadamente importante. La relación se utiliza cada vez que se calcula el voltaje de línea a línea partiendo del voltaje de línea a neutro, o viceversa, lo que es bastante frecuente. La relación de magnitud de $\sqrt{3}$ deberá por supuesto, ser recordada por todos. La relación angular puede memorizarse, también, si se desea, pero es mejor realmente ser capaz de reproducir el diagrama de la Fig. 20-7c rápidamente y sin cuidado cada vez que se necesite. Esto elimina el peligro de un posible error de memoria, y también libera de la necesidad de utilizar siempre el mismo sistema de símbolos.

Nótese que si los voltajes de línea a línea son conocidos y se van a encontrar los voltajes de línea a neutro, el diagrama de la Fig. 20-7c da la relación deseada. El diagrama se dibujó colocando primero los voltajes de línea a neutros desconocidos; esto parece poco natural pero si el diagrama se hubiese empezado dibujando primero los voltajes de línea a línea, el siguiente paso no sería obvio.*

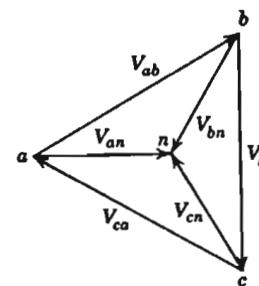


FIG. 20-8. Construcción gráfica para relacionar los voltajes de línea a línea y de línea a neutro

8. Corrientes de línea y de fase

Los voltajes y corrientes en la representación monofásica en la Fig. 20-6 son voltajes de línea a neutro y corrientes de línea. Ya he-

* Muchos métodos de computación gráfica, ingeniosos y economizadores de tiempo, han sido inventados para sistemas trifásicos, como podía esperarse en esta rama de la ciencia eléctrica importante y relativamente madura. La Fig. 20-8 es aplicable aquí. Dibújense los tres fasores de voltaje de línea a línea como un triángulo; los puntos *a*, *b* y *c* se rotulan y se marca el punto *n* en el centro del triángulo. Los voltajes de línea a neutro son entonces aparentes. La corrección de este método se prueba por comparación con la Fig. 20-7c. Este es un diagrama funicular (Sección 5-12, Pág. 163).

Esta construcción gráfica es de un gran valor cuando los voltajes están desbalanceados. Los voltajes de línea a línea deben sumar cero, aunque estén desbalanceados, y los fasores forman un triángulo muy cercano al equilátero aunque no necesariamente así. El punto *n* no necesita estar en el centro del triángulo; las cargas desiguales pueden forzarlo a cualquier punto dentro del triángulo y aún fuera de él.

mos mostrado cómo encontrar los voltajes de línea a línea de los voltajes de línea a neutro. Si todas las cargas y generadores de sistema trifásico están conectados en Y el análisis está completo. Sin embargo, las cargas y los devanados de transformadores se conectan a menudo en Δ y entonces el análisis requiere el conocimiento de la relación entre la corriente de línea y la corriente en cada fase de la Δ .

La Fig. 20-9a muestra una carga conectada en Δ . Está balanceada, y las tres corrientes de fase, I_{ab} , I_{bc} e I_{ca} se muestran en la Fig. 20-9b. Deseamos encontrar las corrientes de línea I_a , I_b e I_c .

La corriente en la línea *a* es la suma de I_{ab} e I_{ca} (ley de Kirchhoff de corriente), y puesto que $I_{ac} = -I_{ca}$:

$$I_a = I_{ab} + I_{ca} \quad (20-7)$$

La Fig. 20-9b muestra I_{ab} una de las tres corrientes de fase, e I_{ca} ; $-I_{ca}$, dibujada opuesta a I_{ca} , se suma a I_{ab} para dar I_a . Las otras dos corrientes de línea se obtienen de la misma manera.

La relación general que resulta del diagrama es:

$$I_a = \sqrt{3} I_{ab} / -30^\circ \quad (20-8)$$

La corriente de línea es mayor que la corriente de fase por $\sqrt{3}$, e I_a está atrasada con respecto a I_{ab} en 30° .

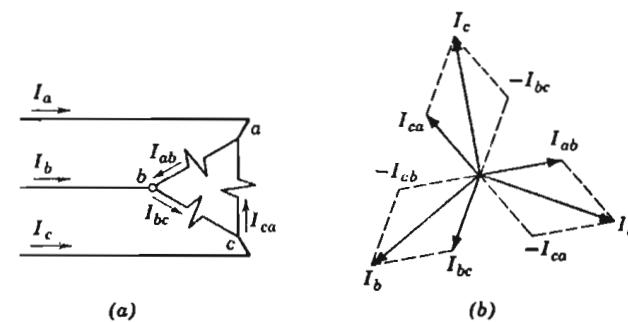


FIG. 20-9. Carga Δ balanceada, y la relación de las corrientes de fase a las corrientes de línea

No hay posibilidad de equivocar el factor de $\sqrt{3}$; la corriente de línea es la mayor. El ángulo, sin embargo, depende de la dirección de las flechas de referencia en el diagrama. Así, si el dispositivo trifásico de la Fig. 20-9a fuese un generador, las corrientes I_a , I_b e I_c podría probablemente tener flechas de referencia dibujadas en la

otra dirección (hacia afuera del generador); esto podría no ser necesario, pero sí posible. Las tres transformadas de la corriente de línea en la Fig. 20-9b se invertirían entonces, y el ángulo en la Ec. 20-8 se cambiaría de acuerdo con esto. La ecuación también depende de qué corriente son comparadas, y si la Ec. 20-6 se utiliza para voltajes de línea a línea, es consistente escribir, para la corriente de línea,

$$I_a = j\sqrt{3} I_{bc} \quad (20-9)$$

Como con las relaciones de voltaje, es realmente más satisfactorio ser capaz de dibujar la Fig. 20-9b en un momento más que memorizar una relación angular particular.

9. Cargas equivalentes Y y Δ

Si una carga está, de hecho, conectada en Δ y deseamos resolver para las corrientes y voltajes en una base monofásica a neutro como en la Fig. 20-6, es a menudo conveniente sustituir por la carga real en Δ una carga equivalente en Y. ¿Cuál debe ser la impedancia de cada fase de una carga Y (como en la Fig. 20-10a) para ser equivalente a una carga Δ balanceada (como en la Fig. 20-10b)?

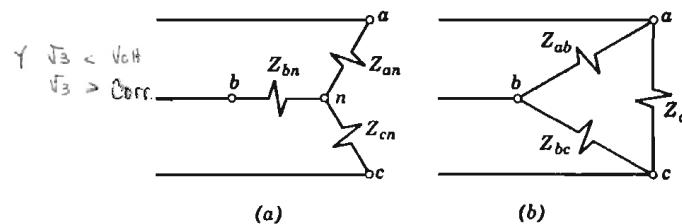


FIG. 20-10. Cargas equivalentes Y y Δ

Esta pregunta puede contestarse simplemente notándose que cada fase de la Y tiene $\sqrt{3}$ menos voltaje que cada fase de la Δ , y que también tiene $\sqrt{3}$ más corriente, así la impedancia de cada rama de la Y debe tener un tercio de la impedancia de cada rama de la Δ .

Esto es suficiente, pero el mismo resultado puede obtenerse de la transformación general Y- Δ de la Ec. 6-19. Aplicando esta ecuación a la Fig. 20-10, en la que las tres impedancias son iguales:

$$Z_{an} = \frac{Z_{ab}Z_{ca}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} = \frac{Z_{ab}}{3} \quad (20-10)$$

Como una Y equivalente recibe la misma corriente de línea que la Δ ; de hecho, las dos son intercambiables. Internamente son diferentes en corriente y voltaje, pero consumen la misma potencia.

10. Potencia trifásica

La potencia calculada en la representación monofásica de un sistema trifásico es la potencia producida, desarrollada o consumida en una fase. La potencia total en el sistema trifásico balanceado es tres veces mayor. Si una carga está conectada en Y, como en la Fig. 20-7, la potencia trifásica es:

$$P_{\text{total}} = 3|V_{an}| |I_a| (\text{f.p. carga}) \quad (20-11)$$

donde (f.p. carga) es el factor de potencia de la carga. Se repetirá según la Sec. 4-11 que el factor de potencia es el coseno del ángulo de fase entre el voltaje senoidal a través de las terminales de una carga y la corriente que pasa por la carga.

Si una carga está conectada en Δ , como en la Fig. 20-9, la potencia trifásica es

$$P_{\text{total}} = 3|V_{ab}| |I_{ab}| (\text{f.p. carga}) \quad (20-12)$$

La Ec. 20-11 está en función de voltaje de línea a neutro y la corriente de línea, y la Ec. 20-12 en función del voltaje de línea a línea y la corriente de fase.

A menudo la corriente de línea y el voltaje de línea a línea de un sistema trifásico son las cantidades conocidas. Entonces V_{an} , de la Ec. 20-5, puede sustituirse en la Ec. 20-11, o I_{ab} de la Ec. 20-8, puede sustituirse en la Ec. 20-12. La misma fórmula resulta en cualquier caso (no podía ser de otro modo) dando

$$P_{\text{total}} = \sqrt{3} |V_{ab}| |I_a| (\text{f.p. carga}) \quad (20-13)$$

Esta fórmula da la potencia total de una carga trifásica balanceada en función del voltaje de línea a línea y la corriente de línea, cantidades que pueden medirse en cualquier lado de un alimentador de tres alambres. Esta fórmula es suficientemente importante como para memorizarse. Nótese* que el factor de potencia se refiere a la carga, y que no tiene nada que ver con el ángulo entre V_{ab} e I_a .

* Nótese también que mientras las Ecs. 20-11 y 12 son válidas para cualquier forma de onda, estando definido el factor de potencia como en la Ec. 4-33, la Ec. 20-13 está derivada con la suposición de que los voltajes (en la primera) o las corrientes (en la segunda) son senoidales.

11. Medición de potencia trifásica

Cuando se utilizan vatímetros para medir potencia en un sistema trifásico, el método obvio es utilizar tres vatímetros, conectados cada uno para medir la potencia consumida en una fase. La Fig. 20-11a muestra esta conexión aplicada a una carga Y. Cada instrumento tiene su bobina de corriente conectada en una línea y su

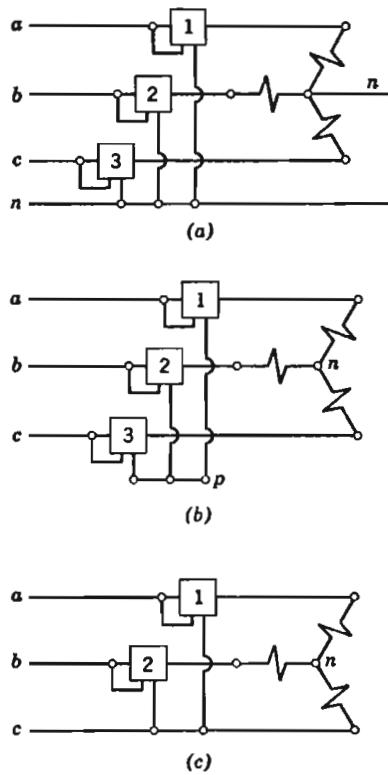


FIG. 20-11. Conexiones de tres vatímetros y de dos vatímetros

bobina de potencial de la línea al neutro. El vatímetro uno mide la potencia en la fase a , y así sucesivamente. Si la carga estuviera conectada en Δ , cada vatímetro tendría a su bobina de corriente conectada en un lado de la Δ y su bobina de potencial de línea a línea. Sin embargo, aunque este *método de tres vatímetros* es la conexión apropiada para una carga Y de cuatro hilos, se utiliza raramente para una Δ .

Una carga Y de tres hilos, frecuentemente no tiene una conexión neutra accesible; un motor trifásico de inducción, por ejemplo, usualmente tiene únicamente tres terminales. Pueden utilizarse entonces tres vatímetros como en la Fig. 20-11b, conectados juntos en p . Se demostrarán ahora que las sumas de las lecturas de los tres vatímetros es la potencia total verdadera aun si p no está conectada a n . De hecho el total es correcto aunque la corriente y el voltaje sean senoidales o no, tanto si la carga trifásica está balanceada o desbalanceada, y sin importar el potencial de punto p .

Según la Ec. 4-1, la potencia instantánea a cualquier carga es $v_i i$; la potencia promedio P es la v_i promedio, encontrada por integración a lo largo del ciclo y dividida entre el tiempo del ciclo:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T v_i i dt \quad (20-14)$$

Por tanto, la potencia total a la carga de la Fig. 20-11b es

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T (v_{an}i_a + v_{bn}i_b + v_{cn}i_c) dt \quad (20-15)$$

Cada vatímetro indica el promedio de la corriente de la línea por el voltaje al punto p , y la suma de las tres lecturas de los vatímetros, que podemos llamar P' , es

$$P' = \frac{1}{T} \int_0^T (v_{ap}i_a + v_{bp}i_b + v_{cp}i_c) dt \quad (20-16)$$

¿Es P' igual a P ?

Si p no está conectada a n y el potencial del punto p no es el potencial del punto n , v_{ap} no es igual a v_{an} , sino más bien $v_{ap} = v_{an} + v_{np}$, etc. Sustituyendo esto en la Ec. 20-16, la suma de las tres lecturas de los vatímetros es

$$P' = \frac{1}{T} \int_0^T [(v_{an}i_a + v_{bn}i_b + v_{cn}i_c) + v_{np}(i_a + i_b + i_c)] dt \quad (20-17)$$

Sin embargo, en un *sistema de tres hilos*, $i_a + i_b + i_c = 0$; por tanto, el último término de la Ec. 20-17 desaparece, dejando una expresión para P' idéntica a la de la Ec. 20-15 para P , esto demuestra que la suma de las tres lecturas de los vatímetros es igual a la potencia promedio total.

Viene ahora la deducción más notoria. Puesto que el punto p puede tener cualquier potencial, puede tener el potencial de una de las líneas; puede tener el potencial de la línea c . Conectemos, por lo tanto el punto p a la línea c . Esto deja al vatímetro tres sin operar, porque no existe potencial entre las terminales de su bobina de potencial; siempre indicará cero y puede omitirse simplemente. Nos quedamos, por lo tanto, con la conexión de la Fig. 20-11c.

Tenemos entonces el *método de los dos vatímetros*, que es la conexión standard para medir potencial en un sistema de tres hilos. Nótese su marcada generalidad. La única restricción es que la suma de las corrientes en los tres hilos debe ser cero. Puede ser un sistema trifásico balanceado, Y o Δ , o un sistema trifásico desbalanceado, o un sistema bifásico, o un sistema monofásico con un hilo neutro. La forma de la onda puede ser cualquiera. La impedancia de carga no se requiere que sea lineal. Fue para incluir este amplio rango que la demostración comenzó con una ecuación tan básica como $p = vi$.

Debería mencionarse que uno de los dos vatímetros en la conexión de dos vatímetros puede encontrarse que indica potencia negativa. (Algunos vatímetros están provistos con un interruptor reversible para permitir una lectura de potencia negativa; otros vatímetros deben tener las conexiones terminales invertidas). Con una carga trifásica balanceada, una lectura negativa indica que el factor de potencia de la carga es menor de $\frac{1}{2}$, porque el ángulo de fase entre la corriente de carga y el voltaje es entonces mayor de 60° , y la corriente en la bobina de corriente de uno de los vatímetros está más de 90° fuera de fase con el voltaje entre las terminales de sus bobinas de potencial. La potencia negativa no tiene por supuesto, ninguna realidad física.

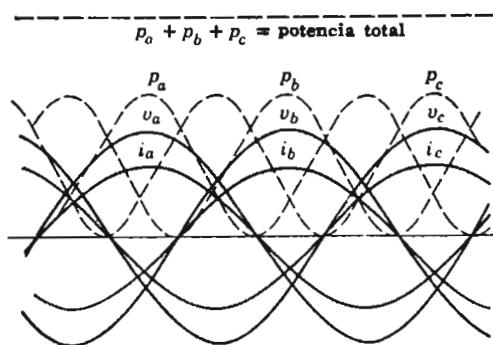


FIG. 20-12. Potencia en un sistema trifásico balanceado (factor de potencia unitario)

12. Potencia instantánea constante

Una ventaja de un sistema trifásico es la uniformidad de la potencia total. La potencia monofásica es pulsante (Fig. 4-2 o 4-8) pero la potencia total a una carga trifásica balanceada es constante.

La Fig. 20-12 muestra corriente y voltajes trifásicos balanceados, suponiendo una carga resistiva pura. La potencia instantánea en cada fase es vi . Las curvas mostradas para la potencia sugieren que la suma es constante, y esto se demuestra fácilmente.

Sean el voltaje y la corriente instantánea.

$$\begin{aligned} v_a &= V_m \cos \omega t = \sqrt{2}|V| \cos \omega t \\ i_a &= I_m \cos \omega t = \sqrt{2}|I| \cos \omega t \end{aligned} \quad (20-18)$$

Multiplicando y utilizando una identidad trigonométrica,

$$p_a = 2|V||I| \cos^2 \omega t = |V||I| (\cos 2\omega t + 1) \quad (20-19)$$

El voltaje y la corriente en la fase b son iguales en magnitud a las de la fase a , pero retrasadas $\frac{1}{3}$ de ciclo:

$$\begin{aligned} v_b &= \sqrt{2}|V| \cos (\omega t - 120^\circ) \\ i_b &= \sqrt{2}|I| \cos (\omega t - 120^\circ) \end{aligned} \quad (20-20)$$

Por lo tanto, la potencia en la fase b es

$$p_b = 2|V||I| \cos^2 (\omega t - 120^\circ) = |V||I|[\cos (2\omega t - 240^\circ) + 1] \quad (20-21)$$

Similarmente, la potencia en la fase c es

$$p_c = 2|V||I| \cos^2 (\omega t - 240^\circ) = |V||I|[\cos (2\omega t - 480^\circ) + 1] \quad (20-22)$$

La potencia instantánea total es la suma:

$$\begin{aligned} p &= p_a + p_b + p_c \\ &= |V||I|[\cos 2\omega t + \cos (2\omega t - 240^\circ) + \cos (2\omega t - 480^\circ) + 3] \end{aligned} \quad (20-23)$$

Pero la suma de los tres términos coseno es cero,* dejando

$$p = 3|V||I| \quad (20-24)$$

*Si ω está en radianes por segundo, el retraso de $\frac{1}{3}$ de ciclo debería aparecer en las Ecs. 20-20 como $2\pi/3$ en vez de como 120° . La popular, aunque algo descuidada, expresión del ángulo de fase en grados, puede racionalizarse estipulando que ω está en grados por segundo. La expresión en grados se permite aquí para hacer más claro el paso final en el que $\cos 2\omega t + \cos(2\omega t - 240^\circ) + \cos(2\omega t - 480^\circ) = 0$.

Por tanto, la variación con el tiempo desaparece, dejando la potencia total *instantánea* constante e igual a tres veces la potencia *promedio* por fase.

La demostración puede ampliarse para incluir cargas de cualquier factor de potencia insertando un ángulo de fase ϕ en cada expresión para la corriente instantánea. La trigonometría queda entonces algo revuelta pero la naturaleza de la demostración no cambia y el resultado final es $p = 3|V| |I| \cos \phi$, otra vez tres veces la potencia promedio por fase. La demostración es válida, sin embargo, únicamente para corriente y voltaje de forma de onda senoidal.

13. Ejemplo (Mejoramiento).

CARGA TRIFÁSICA BALANCEADA. Se necesita ahora práctica continua y repetida de resolución de problemas en vez de explicaciones adicionales de la operación trifásica. Puesto que en sistemas de potencia prácticos la carga balanceada se alcanza muy aproximadamente, se encontrará que la mayoría de los cálculos trifásicos pueden manejarse por los métodos simples de este capítulo. Unos pocos ejemplos se darán para ilustrar el casi ilimitado rango de problemas trifásicos balanceados.

La Fig. 20-13a muestra un alimentador trifásico con dos cargas. Una carga es un banco de lámparas conectadas de línea a neutro:

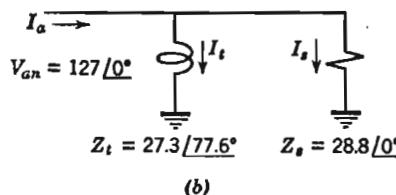
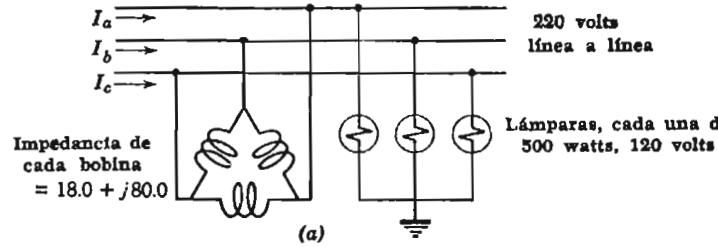


FIG. 20-13. Cargas de un alimentador trifásico, y su representación monofásica

cada lámpara es de 500 watts, 120 volts. La otra carga tiene tres bobinas conectadas en Δ , cada bobina tiene la impedancia dada en el diagrama; la naturaleza física de esta carga no nos concierne, pero bien puede ser un banco de transformadores con corriente magnetizante suministrada por los devanados primarios conectados en Δ (como se muestra en el diagrama) y con los secundarios (no mostrados) que no llevan corriente y por tanto no entran en el problema.

El voltaje de línea a línea en el alimentador es de 220 volts. Encontraremos la corriente en las líneas alimentadoras y la potencia total.

SOLUCIÓN. Calculemos la corriente y la potencia en una fase (fase a), representando las cargas como en la Fig. 20-13b. El voltaje de línea a neutro, con magnitud de $220/\sqrt{3} = 127.0$ volts, puede tomarse como referencia, siendo por tanto su ángulo cero.

Primero se calcula la impedancia de las lámparas. Es resistencia pura, y de la potencia y el voltaje especificados:

$$Z_s = R = \frac{(V \text{ especificado})^2}{P \text{ especificada}} = \frac{120^2}{500} = 28.8 \text{ ohms}$$

A continuación se calcula la impedancia para representar la bobina. Se da la impedancia de línea a línea, y la impedancia equivalente de línea a neutro, es un tercio de ésta:

$$Z_t = \frac{18.0 + j80.0}{3} = \frac{82.0 / 77.6^\circ}{3} = 27.3 / 77.6^\circ$$

Puesto que las impedancias de las lámparas y las bobinas están en paralelo (Fig. 20-13b), es conveniente convertir a admitancias:

$$Y_s = \frac{1}{28.8} = 0.0347$$

$$Y_t = \frac{1}{27.3 / 77.6^\circ} = 0.0366 / -77.6^\circ = 0.0080 - j0.0357$$

Sumando para obtener la admitancia total:

$$Y = 0.0427 - j0.0357$$

La corriente de línea (línea a) se encuentra ahora:

$$\begin{aligned} I_a &= YV_{an} = (0.0427 - j0.0357)(127.0) \\ &= 5.42 - j4.54 = 7.06 / -39.9^\circ \end{aligned}$$

La potencia transportada por la fase a es

$$P_a = (127.0)(7.06) \cos 39.9^\circ = 688$$

y la potencia total del alimentador trifásico es tres veces 688 o

$$P = 2064 \text{ watts}$$

COMPROBACIÓN. Una comprobación interesante se logra calculando la potencia de cada elemento individualmente y sumándolas. Cada lámpara, para 120 volts, y operándola a 127 volts, recibe

$$\text{Potencia a cada lámpara} = 500(127/120)^2 = 559 \text{ watts}$$

Potencia total de las lámparas es por tanto 1677 watts.

La magnitud de la corriente en cada bobina es $220/82.0 = 2.68$ amperes, por lo que

$$\text{Potencia a cada bobina} = (2.68)^2(18.0) = 129.5 \text{ watts}$$

La potencia de las tres bobinas es tres veces este número, o sea 388 watts. La potencia total en el alimentador es la suma:

$$P = 1677 + 388 = 2065$$

Esto, comparado con el cálculo previo de $P = 2064$, da una comprobación marcadamente cercana.

14. Ejemplo

TRANSFORMADOR CONECTADO EN Y. Los transformadores presentan problemas especiales. Un transformador tiene impedancia. También, en virtud de tener más vueltas en uno de sus devanados que en el otro, "transforman" voltajes y corriente. Un banco de transformadores puede representarse en el circuito equivalente monofásico por una impedancia en la línea si las características de transformación del voltaje y la corriente se toman separadamente. Este concepto separado se logra "refiriendo" todos los voltajes, corrientes e impedancias a un nivel de voltaje único. Si un transformador tiene una relación de vueltas de n a 1, los voltajes secundarios pueden "referirse" al lado primario multiplicando por n , porque esto los convierte a los voltajes que hubiesen aparecido si las vueltas en el primario y en el secundario fuesen iguales. Las corrientes se convierten dividiendo entre n , las impedancias multiplicando por n^2 . El siguiente ejemplo mostrará una aplicación del método.

Una subestación de distribución (Fig. 20-14) suministra potencia a través de una línea de aproximadamente una milla (alambre de cobre No. 1 AWG) y de un banco de transformadores a una carga de motor de inducción. La impedancia de la línea, un alambre a neutro, está dada en la figura; la impedancia de uno de los transformadores del banco trifásico está dada *referida al lado de alto voltaje*. La carga trifásica requiere un máximo de 150 kilowatts, 0.80 de factor de potencia a 480 volts, su voltaje terminal especificado. ¿Qué voltaje es necesario en las terminales de la subestación, en (t) en el diagrama? ¿Es la diferencia entre el voltaje sin carga y el voltaje a plena carga en las terminales del consumidor en (s), excesivo?

La Fig. 20-14 es un "diagrama de una línea" de un sistema trifásico. La línea desde la subestación al transformador y a la carga indica un circuito trifásico. El par de líneas en zig-zag es el símbolo para un transformador y los símbolos debajo muestran que es un banco Y-Y con los neutros conectados a tierra. La carga se muestra que está conectada en Y con neutro aislado, lo que es usual para un motor de inducción.

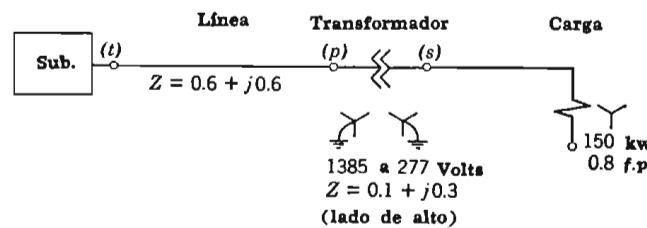


FIG. 20-14. Diagrama de una línea de un circuito de distribución

SOLUCIÓN. El primer paso es dibujar un diagrama monofásico del sistema trifásico (siguiendo el método general de la Sec. 6. Para hacer esto reemplazamos el transformador por una impedancia equivalente.

Un circuito equivalente de un transformador se dio en la Fig. 12-11 en el que los voltajes secundarios están utilizados por la razón de las vueltas del transformador n (en este ejemplo $n = 1385/277 = 5$). Las corrientes secundarias por $1/n$, y las impedancias secundarias por n^2 . Esto se llama "referir todas las cantidades al lado primario" y con todas las cantidades referidas al lado primario, el transformador se representa por una red T de impedancia. El efecto de la razón de las vueltas del transformador se ha separado de su im-

pedancia. Simplifiquemos adicionalmente el problema, en este ejemplo, suponiendo que la corriente de magnetización al transformador es despreciable; esto significa que el miembro central o en paralelo de la T lleva una corriente despreciable (tiene admitancia despreciable) y puede omitirse del circuito equivalente. Todo lo que queda entonces para representar el transformador en este circuito equivalente, es una impedancia igual a las impedancias en serie del transformador referidas al lado primario o de alto voltaje.

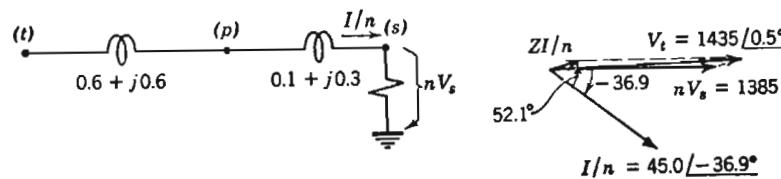


FIG. 20-15. Representación monofásica del sistema de la Fig. 20-14, y diagrama fasorial (el fasor ZI/n está exagerado en magnitud)

La Fig. 20-15 muestra el transformador representado de esta manera, por la impedancia $0.1 + j0.3$ ohms, la línea representada por la impedancia $0.6 + j0.6$ y la carga representada por una impedancia hasta ahora desconocida. El voltaje entre las terminales de la carga *referido al lado primario* es nV_s ; esto es, es n veces el voltaje real de la carga. Los voltajes de línea a línea especificados en los lados primario y secundario del transformador son $1385\sqrt{3} = 2400$ y $277\sqrt{3} = 480$ volts respectivamente.

La corriente de carga se encuentra a continuación. Según la Ec. 20-13, la potencia suministrada a las terminales de la carga (en s) es

$$P = \sqrt{3}|V_s||I| \text{ (f.p.)}$$

por lo que

$$|I| = \frac{P}{\sqrt{3}|V_s| \text{ (p.f.)}} = \frac{150,000}{\sqrt{3}(480)(0.8)} = 225$$

El valor deseado, por supuesto, no es la corriente real del motor, sino la corriente "referida al lado primario", I/n :

$$\frac{|I|}{n} = \frac{225}{5} = 45 \text{ amperes}$$

El ángulo de esta corriente se encuentra del factor de potencia:

$$\text{Angulo} = \cos^{-1} 0.8 = 36.9^\circ$$

Tomando arbitrariamente el ángulo de voltaje en (s) como cero, como en el diagrama fasorial de la Fig. 20-15, y conociendo que la corriente en un motor de inducción seguramente está *atrasada* con respecto al voltaje aplicado, la corriente (referida al lado primario) es

$$\frac{I}{n} = 45.0/-36.9^\circ$$

Esto también se muestra en el diagrama fasorial de la Fig. 20-15.

A continuación, la caída de voltaje en el sistema de transmisión puede encontrarse: la caída de voltaje entre la fuente en (t) y la carga en (s). La impedancia total es la impedancia de línea más la impedancia del transformador.

$$Z = (0.6 + j0.6) + (0.1 + j0.3) = (0.7 + j0.9) = 1.14/52.1^\circ$$

La caída de voltaje (ver Fig. 20-15) es

$$Z \left(\frac{I}{n} \right) = (1.14/52.1^\circ)(45.0/-36.9^\circ) = 51.3/15.2^\circ = 49.5 + j13.4$$

Esta caída de voltaje se debe sumar al voltaje en las terminales del motor (referido al lado primario) para encontrar V_t , voltaje de la subestación. (Ver diagrama fasorial.)

$$V_t = 1385 + (49.5 + j13.4) = 1435/0.5^\circ$$

Este, el voltaje de línea a neutro en el generador es la respuesta a la primera parte del problema. El voltaje de línea a línea es probablemente más interesante; su magnitud es $1435\sqrt{3} = 2485$ volts.

Para contestar la segunda parte, nótese que el voltaje en el extremo receptor del sistema de transmisión se aumentará de $2400/n$ volts o $2485/n$ volts cuando la carga se desconoce. Este incremento es $85/2400$, o 3.54%. Esto no es bueno; las luces sobre el mismo alimentador fluctuarán bastante con este cambio de voltaje tan grande. Una variación de 2% se considera una buena regulación de voltaje; 4% a menudo, no es tolerable.

15. Ejemplo 3

TRANSFORMADOR CONECTADO EN Δ . Aunque ordinariamente resolvemos para corrientes y voltajes en solamente una fase de un sistema trifásico, un banco de transformadores conectados en Δ pro-

duce un desplazamiento de 30° del ángulo de fase que la representación monofásica no toma fácilmente en cuenta. Por esta razón es mejor analizar un sistema contenido en un banco de transformadores conectados en Δ por partes, separando el sistema en las terminales de los transformadores conectados en Δ , y tratando las condiciones trifásicas reales en estas terminales. El procedimiento se ilustrará en el siguiente ejemplo.

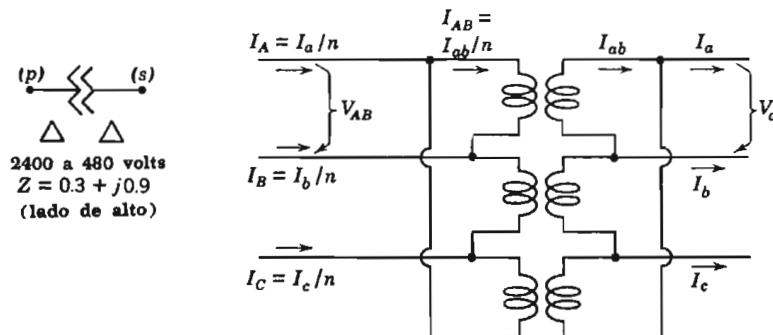


FIG. 20-16. Banco de transformadores Δ - Δ de la Fig. 20-14.

Reemplacemos el banco de transformadores Y-Y de la Fig. 20-14 por el banco Δ - Δ de la Fig. 20-16. Este banco consiste de tres transformadores, a 2 400 voltos en el lado de alta y a 480 en lado de baja. Las mediciones hechas en el lado de 2 400 voltos muestran que la impedancia de cada uno de estos transformadores es $0.3 + j0.9$ ohms. Se desea encontrar el voltaje en la subestación, como en el Ej. 2.

VALORES DE LÍNEA EN EL LADO DE CARGA DE LA Δ SECUNDARIA. Tomemos el voltaje de carga de la línea a neutro como referencia, y escribámoslo $V_{au} = 277/0^\circ$. La corriente de línea en la carga se calcula previamente: la magnitud y el ángulo son:

$$I_a = 225/-36.9^\circ$$

(Los símbolos para el presente ejemplo están identificados en la Fig. 20-16).

SECUNDARIO DEL TRANSFORMADOR. I_a es la corriente de línea secundaria; la corriente en el transformador conectado en Δ es (según la Ec. 20-8)

$$I_{ab} = \frac{I_a}{\sqrt{3}}/30^\circ = \frac{225/-36.9^\circ}{\sqrt{3}}/30^\circ = 130/-6.9^\circ$$

El voltaje del transformador es (según la Ec. 20-5)

$$V_{ab} = \sqrt{3} V_{an}/30^\circ = \sqrt{3} (277/0^\circ)/30^\circ = 480/30^\circ$$

PRIMARIO DE TRANSFORMADOR. (Las mayúsculas en el subíndice indican el lado primario). La razón de las vueltas del transformador es $2400/480 = 5$. Puesto que se desprecia la corriente de magnetización,

$$I_{AB} = \frac{I_{ab}}{n} = \frac{130/-6.9^\circ}{5} = 26.0/-6.9^\circ$$

La impedancia del transformador es $0.3 + j0.9$; puesto que fue medida en el lado primario del transformador se multiplicará por la corriente del primario del transformador para encontrar la caída de voltaje en el mismo. La caída calculada de esta manera será un voltaje *referido al primario* y esta caída se suma al voltaje secundario *requerido al primario* para obtener el voltaje primario real:

$$\begin{aligned} V_{AB} &= nV_{ab} + ZI_{AB} = 5(480/30^\circ) + (0.3 + 0.9)(26.0/-6.9^\circ) \\ &= 2420/30.3^\circ \end{aligned}$$

VALORES DE LÍNEA EN EL LADO DE LA SUBESTACIÓN DE LA Δ PRIMARIA. La corriente de línea en el lado primario se calcula ahora, utilizando la Ec. 20-8:

$$I_A = \sqrt{3} I_{AB}/-30^\circ = \sqrt{3} (26.0/-6.9^\circ)/-30^\circ = 45.0/-36.9^\circ$$

El voltaje de línea a neutro en el lado primario, según la Ec. 20-5 es,

$$V_{AN} = \frac{V_{AB}}{\sqrt{3}}/-30^\circ = \frac{2420/30.3^\circ}{\sqrt{3}}/-30^\circ = 1397/0.3^\circ$$

VALORES DE LÍNEA EN LA SUBESTACIÓN. I_A es la misma en la subestación que en el transformador. V_{AN} en la subestación es mayor que en el transformador debido a la caída en la línea $I_A Z$. Esta impedancia de línea es $0.6 + j0.6$. Calculando la caída y sumándosela a V_{AN} del transformador:

$$\begin{aligned} V_{AN} \text{ en la subestación} &= 1397/0.3^\circ + (45.0/-36.9^\circ)(0.6 + j0.6) \\ &= 1435/0.5^\circ \end{aligned}$$

Este, el voltaje en la subestación, es la respuesta a nuestro problema.*

* Es notable que el resultado es exactamente el mismo que en el ejemplo previo en

16. Eficiencia de transmisión

La gran economía de transmisión se cita a menudo como una ventaja de los sistemas de potencias trifásicos. Esta conclusión puede basarse en el simple argumento de que, en la Fig. 20-2, tres hilos (o aun cuatro) son más baratos que seis. Si lo son, pero este argumento deja fuera de consideración a muchos factores.

Otra comparación puede suponer que una línea monofásica y una línea trifásica están hechas de componentes semejantes, del mismo tamaño y teniendo igual voltaje y corriente. Se necesitan tres conductores para la línea trifásica, dos para la línea monofásica. La línea trifásica está alimentada de tres transformadores, como en la Fig. 20-17 y la línea monofásica de dos; en ambos sistemas los transformadores están conectados de línea a tierra. En cada punto de soporte, la línea trifásica requiere tres cadenas de aisladores, la línea monofásica tiene dos.

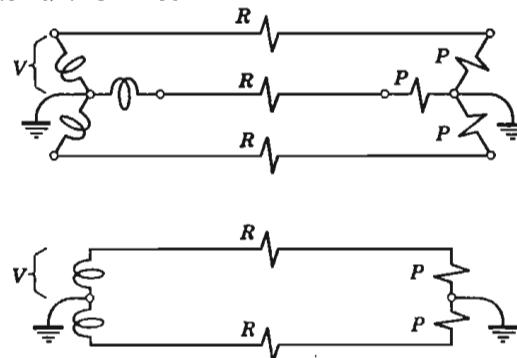


FIG. 20-17. Economía de transmisión, sistemas trifásicos y monofásicos

Si la corriente de línea es I , el voltaje de línea a tierra V , y (f.p.) es el factor de potencia de la carga, la potencia recibida por la carga trifásica es $3VI$ (f.p.); y la potencia recibida por la carga monofásica es $2VI$ (f.p.). La pérdida por resistencia en los tres hilos de la línea trifásica es $3I^2R$, y la pérdida en los dos hilos de la línea monofásica es $2I^2R$.

el que el banco de transformadores estaba conectado en Y-Y y cada transformador tenía un tercio de la impedancia. Esto no es una mera coincidencia sino una ilustración de principio general de que un banco de transformadores en Δ-Δ tiene tres veces la impedancia de un banco de transformadores en Y-Y equivalentes. Esto, a su vez, está relacionado con el hecho de que el voltaje de cada transformador en un banco Δ-Δ es mayor que el voltaje de cada transformador de un banco Y-Y por $\sqrt{3}$, y el nivel de impedancia varía con el cuadrado del nivel de voltaje (Sección 12-13).

Se verá que en dos sistemas tales, teniendo igual voltaje y corriente la inversión inicial, la cantidad de potencia transmitida y la cantidad de potencia perdida en transmisión están todas en la razón de 3 a 2. En otras palabras, la eficiencia y economía de transmisión es la misma para ambas.

La comparación puede hacerse más concreta notándose que hay poco que escoger desde el punto de vista económico entre alimentar una carga por medio de tres líneas monofásicas o por dos líneas, trifásicas. Se requiere el mismo número de conductores del mismo calibre, el mismo número de transformadores o la misma capacidad, los mismos aisladores y transmiten la misma potencia con la misma pérdida. Las ventajas de un sistema trifásico se encuentran más en la maquinaria terminal que en la línea de transmisión.

17. Sumario

Las primeras páginas de este capítulo presentan los sistemas de potencia trifásicos. La mayor ventaja son generadores económicos, arranque de los motores conveniente, y potencia instantánea constante.

Las cargas pueden conectarse en Y o Δ. Los transformadores se utilizan en varias combinaciones de Y y Δ. La distribución secundaria comúnmente utiliza sistemas trifásicos de cuatro hilos o sistemas monofásicos de tres hilos.

Los sistemas trifásicos balanceados se analizan reduciendo el problema trifásico a un problema monofásico. El voltaje a neutro, la corriente por línea y la potencia por fase se calcularon. Factores de multiplicación apropiados dan el voltaje de línea a línea, la corriente por fase en la Δ, y la potencia total trifásica. Las cargas balanceadas Y y Δ son equivalentes si la impedancia Δ es tres veces la de la Y.

La potencia total puede medirse en sistema de cuatro hilos por el método de tres vatímetros. En un sistema de tres hilos se utiliza el método de dos vatímetros. Estos métodos son correctos para cargas desbalanceadas y para cargas balanceadas.

Los ejemplos ilustran con cálculos en sistemas trifásicos balanceados. Algunas de las complicaciones que pueden presentarse por los transformadores están ilustrados en los ejemplos.

PROBLEMAS

1. Dado $V_{an} = 127/94^\circ$ kilovolts, $V_{bn} = 127/-26^\circ$ kilovolts, $V_{cn} = 127/-146^\circ$ kilovolts, encontrar V_{ab} , V_{bc} , V_{ca} (magnitud y ángulo). Muestre los seis voltajes en un diagrama fasorial. § 7

2. $I_b = 34.2/102^\circ$ amperes es una de tres corrientes de línea balanceadas que alimentan una carga conectada en Δ balanceada. Encontrar las otras dos corrientes de linea y las tres corrientes de la carga, y muestre las seis corrientes en un diagrama fasorial. § 8

3. La Fig. 20-4 muestra un banco de transformadores Δ -Y. Dibuje nuevamente el diagrama y ponga letras a las líneas de cada lado. Especifique la polaridad de los devanados del transformador colocando puntos cerca de los extremos correspondientes de las bobinas. Una de las corrientes de línea en el lado Y es 10 amperes, y las corrientes están balanceadas. Dibuje un diagrama fasorial de las corrientes de línea en cada lado del transformador, dando la magnitud y el ángulo de cada una. (La relación de vueltas del transformador es 1 a 1, y puede suponerse coeficiente de acoplamiento unitario). § 8

4. El banco de transformadores del problema precedente (Fig. 20-4) tiene 100 volts de línea a línea en el lado Δ . ¿Cuando no hay carga en el transformador, cuál es el voltaje de línea a línea en el lado Y? Dibujar un diagrama fasorial mostrando voltajes en cada lado y dando la magnitud y el ángulo de cada uno. § 8

5. Cada una de las tres cargas de la Fig. 20-11c recibe 1.00 kilowatts, a factor de potencia unitaria. ¿Qué leerá cada uno de los vatímetros? Utilice un diagrama fasorial para explicar § 11

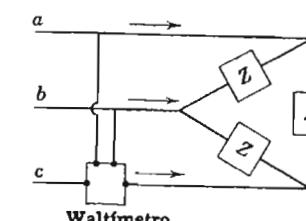
6. La carga mostrada en la Fig. 20-11c es un motor de inducción. Cuando trabaja con carga ligera recibe de la línea 1.00 kilowatts (total) a un factor de potencia de 0.4. ¿Qué leerá cada uno de los vatímetros? § 11

7. La razón de la lectura del vatímetro No. 1 de la Fig. 20-11c a la lectura del vatímetro No. 2 es una función del factor de potencia de la carga. Calcule y trace una curva de esta función (suponiendo que la reactancia de la carga es inductiva). § 11

8. En el circuito trifásico mostrado, el voltaje de línea a línea es de 100 volts. La secuencia de fase es $a-b-c$. Cada $Z = 10/30^\circ$.

(a) En un diagrama fasorial muestre todas las corrientes y voltajes. (b) ¿Cuál es la potencia total que fluye a la carga? (c) ¿Qué leerá el vatímetro? § 11

Problema 8



9. La carga del Prob. 8 está suministrada por un generador conectado en Y. Encontrar el voltaje de fase, la corriente de fase y la potencia por fase del generador. Dibuje un diagrama fasorial § 11

10. Para el circuito de la Fig. 20-13a (Ej. 1), dibújese un diagrama fasorial mostrando V_{ab} , V_{bc} , V_{ca} , V_{an} , V_{bn} , V_{cn} , I_a , I_b , I_c , la corriente en cada lámpara y la corriente en cada bobina. § 13

11. $|V_{ab}| = 240$ volts, y los voltajes están balanceados. ¿Cuál debe ser la resistencia de unos calefactores eléctricos conectados en Δ puramente resistivos para suministrar un total de 10 kilowatts de salida de calor?. ¿De cuánto es cada corriente de fase y cada corriente de línea? Dibuje un diagrama fasorial mostrando las seis corrientes y los tres voltajes. § 13

12. Con referencia a la Fig. 20-5b, la carga de alumbrado está balanceada: de cada línea a neutro hay dos lámparas en paralelo, cada lámpara de 500 watts a 120 volts. (Supóngase resistencia constante para las lámparas). El motor toma 5.00 kilowatts; su factor de potencia puede estimarse como 0.80 inductivo. El voltaje de salida del banco de transformadores se mantiene constante a 208 volts, balanceados de línea a línea. La línea de distribución del transformador a la carga (donde tanto las lámparas como el motor están localizados) es de 1 500 pies de largo. La resistencia de la línea de distribución es de 0.403 ohms por cada mil pies de alambre (alambre de cobre No. 6 AWG) y la reactancia inductiva de la línea es de 0.143 ohms por cada mil pies de alambre. Encontrar el voltaje en la carga. § 13

13. Cada uno de los transformadores de la Fig. 20-4 tiene 1.0 ohms de reactancia de dispersión ($X_{1L} + X_{2L} = 1.0$), corriente de excitación despreciable $G_0 + jB_0 = 0$) y relación de vueltas unitaria.

Una carga balanceada de factor de potencia unitario en el lado Y recibe 20.0 amperes en cada línea. El voltaje de línea a línea en el lado Δ se mantiene a 125 volts. Encontrar el voltaje terminal en el lado Y. Dibujar un diagrama fasorial mostrando todos los voltajes y corrientes, dando magnitudes y ángulos de cada uno. § 15

14. El equipo es el mismo que en el Prob. 12: las mismas lámparas se utilizan, y el motor toma 5.00 kilowatts a 0.80 de factor de potencia. Se utiliza la misma línea de distribución. Esta vez, sin embargo, se mantienen 120 volts en las terminales de la carga, de línea a neutro. La reactancia de dispersión de cada transformador del banco Δ -Y es 0.50 ohms referidos al lado secundario. El voltaje de cada transformador es de 2 400 a 120 volts. Encontrar las corrientes de línea y los voltajes de línea a línea en el lado primario del banco de transformadores. § 15

15. En el circuito trifásico del Prob. 9, ¿Cómo pueden conectarse vatímetros ordinarios para indicar la potencia reactiva Q (en vez de la potencia activa P) consumida en la carga? § 11

21

Circuitos Trifásicos Desbalanceados

1. Cargas desbalanceadas

Los sistemas de potencia trifásicos deben suministrar potencia en cantidades considerables a cargas monofásicas, incluyendo lámparas, calentadores, pequeños motores y otros procesos industriales. Los ingenieros de sistemas de potencia tratan de distribuir estas cargas igualmente en las tres fases, dependiendo de la suerte para mantener la demanda de potencia adecuadamente bien balanceada en todo momento.

En un sistema de potencia grande, el resultado es, de hecho, un balanceamiento aceptablemente bueno. Las cargas individuales, sin embargo, o alimentadores separados están a menudo desbalanceados y deben analizarse con esta base.

Muchos problemas que incluyen cargas desbalanceadas pueden manejarse como una fase a la vez, sin más dificultad que un problema monofásico aunque los cálculos numéricos puedan hacerlo tres veces más largo. Los siguientes ejemplos ilustran esta feliz situación.

EJEMPLO 1. Encontrar la corriente en cada fase de un generador conectado Y de la Fig. 21-1. Las cargas consistentes de calentadores eléctricos, toman corriente como sigue:

Supóngase que están balanceados en ángulo, pero no en magnitud y escribamos:

$$I_a = 150 / 0^\circ = 150 + j0$$

$$I_b = 100 / -120^\circ = -50 - j86.6$$

$$I_c = 50 / +120^\circ = -25 + j43.3$$

Es interesante, aunque no esencial para el problema, calcular la corriente en la conexión neutra del transformador a la carga:

$$I_n = I_a + I_b + I_c = 75 - j43.3$$

Por lo que el alambre neutral está llevando cerca de 87 amperes.

La corriente en el lado primario de cada transformador debe encontrarse de las corrientes secundarias conocidas. Se reconocerá que, aparte de la corriente de magnetización, los amperes vuelta del primario y los amperes vuelta del secundario de cualquier transfor-

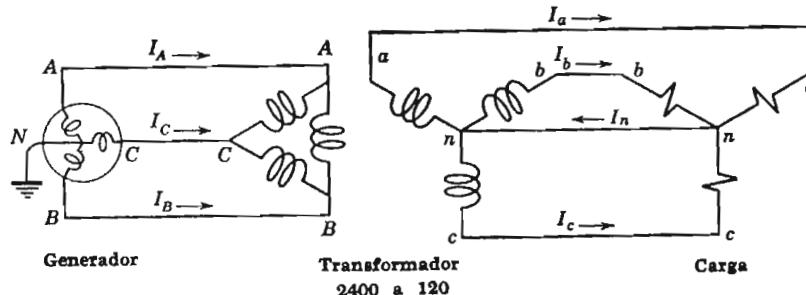


FIG. 21-1. Carga desbalanceada

mador deben ser siempre iguales y opuestos. Nuestra relación de vueltas de transformador, igual a la razón de los voltajes nominales es 2400 a 120, o 20 a 1; la razón de corriente es por tanto de 1 a 20.

Interpretando las bobinas paralelas en el diagrama de la Fig. 21-1 como pertenecientes al mismo transformador (suponiendo, que el devanado primario AB y el devanado secundario cn están en el mismo transformador, y así sucesivamente) tenemos

$$I_{AB} = \frac{I_c}{20} = \frac{-25 + j43.3}{20} = -1.25 + j2.16$$

$$I_{BC} = \frac{I_a}{20} = \frac{150 + j0}{20} = 7.5 + j0$$

$$I_{CA} = \frac{I_b}{20} = \frac{-50 - j86.6}{20} = -2.5 - j4.33$$

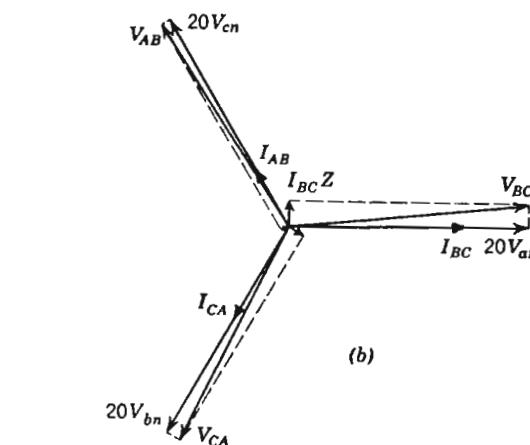
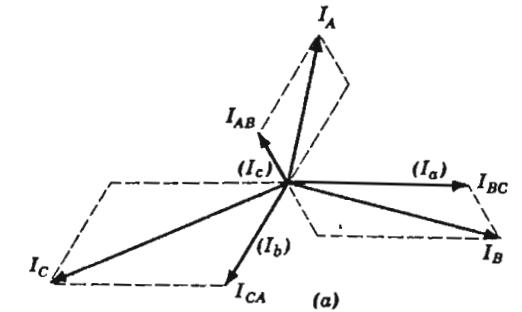


FIG. 21-2. Diagramas fasoriales para la carga desbalanceada polaridad.

(Puesto que la polaridad de los devanados del transformador no está especificada, estas corrientes primarias deberían quizás invertirse, pero esto no es importante). La corriente de línea primaria que es también la corriente de fase del generador, se calculará ahora. Ver Fig. 21-2a.

$$\begin{aligned} I_A &= I_{AB} - I_{CA} = (-1.25 + j2.16) - (-2.5 - j4.33) \\ &= 1.25 + j6.49 \end{aligned}$$

$$I_B = I_{BC} - I_{AB} = (7.5 + j0) - (-1.25 + j2.16) = 8.75 - j2.16$$

$$I_C = I_{CA} - I_{BC} = (-2.5 - j4.33) - (7.5 + j0) = -10.0 - j4.33$$

Nótese en el diagrama que estas corrientes retienen su secuencia positiva A-B-C a pesar de la transformación.

Esto completa la solución. De hecho es probable que las magnitudes absolutas de las corrientes del generador se deseen; estas son respectivamente 6.6, 9.0 y 10.9 amperes. Una carga tal podría sin duda, ser producida por un generador con una capacidad de 10 amperes con fase, o una capacidad total de $\sqrt{3}(2400)(10) = 41.6$ kw o más.

Es interesante calcular la corriente en la conexión neutra del generador. Esto se hace sumando las tres corrientes de fase: $I_N = I_A + I_B + I_C$. Sumando los valores numéricos anteriores, da $0 + j0$. Esta es una comprobación del álgebra más que una contribución a nuestra información física, porque es obvio que no puede haber corriente neutra: no hay circuito en el que pueda fluir. La suma de las corrientes de línea a una Δ (en este caso los transformadores primarios) debe ser siempre cero; y no hace ninguna diferencia que el otro lado del transformador tenga una conexión neutra que pueda llevar corriente.

2. Ejemplo 2

CÁLCULO DE VOLTAJE. Hasta aquí no hemos dicho nada acerca del voltaje real en la carga. Si se asumió que el voltaje terminal de la carga es 120 volts, de línea a neutro balanceado, es evidente que el voltaje terminal en el generador será algo mayor que el valor nominal de 2400 volts. Para calcular el voltaje del generador es necesario conocer las impedancias del sistema.

La impedancia del transformador (medida del lado de alta, por la prueba de corto circuito) es $j30$ ohms. La resistencia del transformador es despreciable. Las líneas son tan cortas que sus impedancias son despreciables. Los voltajes secundarios del transformador se supuso que son

$$V_{an} = 120/\underline{0^\circ} = 120 + j0$$

$$V_{bn} = 120/\underline{-120^\circ} = -60 - j104$$

$$V_{cn} = 120/\underline{+120^\circ} = -60 + j104$$

Los voltajes primarios del transformador, de línea a línea son por lo tanto

$$\begin{aligned} V_{BC} &= 20V_{an} + I_{BC}Z = (2400) + (7.5 + j0)j30 \\ &= 2400 + j225 = \underline{2410/5.4^\circ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{CA} &= 20V_{bn} + I_{CA}Z = (-1200 - j2080) + (-2.5 - j4.33)j30 \\ &= -1070 - j2155 = \underline{2410/-116.4^\circ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{AB} &= 20V_{cn} + I_{AB}Z = (-1200 + j2080) + (-1.25 + j2.16)j30 \\ &= -1263 + j2043 = \underline{2400/121.8^\circ} \end{aligned}$$

El diagrama fasorial es la Fig. 21-2b. No puede repetirse demasiado a menudo que tales diagramas deberían dibujarse *siempre*, aun en forma tosca; éstos ayudan para detectar innumerables errores en los cálculos.

Ahora no es práctico decir, como lo hemos hecho, que los voltajes de la carga están balanceados y el generador tendrá por tanto los voltajes justamente calculados como V_{AB} , V_{BC} , y V_{CA} . Un generador está de hecho diseñado para producir voltajes balanceados, y la carga debe tomar lo que le suministre. Resolvimos el problema que nos pusimos nosotros mismos, pero no es un problema práctico. La pregunta práctica es: con los voltajes del generador de 2400 volts, balanceados, ¿qué voltajes y corrientes aparecerán en la carga, estando dadas las resistencias de las tres cargas? Pero esta pregunta no es fácil de contestar. Si lo malo se convierte en peor podemos regresar a las leyes de Kirchhoff. Generalmente, sin embargo, el ingenio inventará algunos medios más simples. Las ecuaciones de malla son aplicables a menudo. La Sec. 4 mostrará una solución por medio de ecuaciones de malla.

Antes de dejar los presentes problemas, vale la pena hacer notar unas pocas conclusiones. Primero, la *conclusión práctica* de nuestra solución para el voltaje es que los voltajes del generador únicamente necesitan ser cerca de $\frac{1}{2}\%$ mayores que los voltajes de la carga debido a la pérdida por impedancia del transformador. Aunque esta conclusión se obtuvo en una solución que no está estrictamente de acuerdo con la operación real de un sistema de potencia, no puede haber duda de que la solución correcta (y más difícil) nos llevaría prácticamente a la misma conclusión. Por lo tanto, si el voltaje del generador se mantuviese a 2400 volts, los voltajes terminales en la carga caerían cuando la carga se aplicase, de 120 a algo así como 119.5 volts. Los voltajes terminales retrocederían en fase (con rela-

ción a los voltajes del generador) por casi 4 o 5 grados cuando la carga se aplicara, pero este es un hecho que no nos concierne particularmente.

Segundo, esta excelente *regulación de voltaje*, parece sugerir que la reactancia del transformador es baja. No lo es. La reactancia del transformador (si uno de los transformadores está cargado a casi su capacidad especificada) es aproximadamente 10%, lo que produce una caída de voltaje de cerca del 10% del voltaje especificado. Esto es algo para un transformador de distribución, siendo típico menos de un 5%. La razón para la pequeña caída de voltaje bajo carga, es que la corriente de carga está en fase con el voltaje (carga resistiva pura) y que la caída de voltaje en la reactancia del transformador está por tanto en cuadratura con el voltaje de la carga. Por tanto, como es aparente tanto del diagrama de transformadas como de los cálculos, el voltaje del generador es muy poco diferente del voltaje de la carga, en magnitud. Una generalización más importante puede obtenerse de este cálculo. Puesto que la impedancia de un sistema es generalmente más reactiva que resistiva, una carga de factor de potencia unitario causa mucho menos caída de voltaje que una carga inductiva igual de bajo factor de potencia. Por tanto, un calentador eléctrico de 10 kilowatts hará caer el voltaje de línea menos que lo que hará una carga de motor de inducción de 10 kilowatt-ampere. Una carga capacitiva, más aún, elevará el voltaje en sus terminales. Esto resulta de un efecto resonante entre la carga capacitiva y la reactancia inductiva de los transformadores y otras partes del sistema.

Tercero, se puede hacer notar que el ejemplo anterior puede tomarse fácilmente en cuenta cualquier *impedancia de línea* en el lado secundario de los transformadores, porque la corriente en cada una de las cuatro líneas es conocida. De la misma manera la impedancia de línea de lado primario puede incluirse en el problema, y lo mismo la impedancia interna del generador. La corriente de magnetización a los transformadores puede sumarse a la corriente primaria calculada y el dato es obtenible, esto es generalmente un refinamiento innecesario, porque la corriente de magnetización es comúnmente del 5% de la corriente especificada.

3. Carga Y con neutro aislado

Las conexiones Y y Δ de carga y bancos de transformadores son prácticas en casi todas las combinaciones. Solamente hay una o dos posibles combinaciones que no dan servicio aceptable. Una co-

nexión que debe evitarse para la mayoría de los propósitos, como sabemos, es una carga conectada en Y de tres hilos, en la que las fases pueden estar desbalanceadas.

Una carga conectada en Y a cuatro hilos es completamente satisfactoria suponiendo que el hilo neutral está conectado al punto neutro del generador (como en la Fig. 20-3a) o al punto neutro de un banco de transformadores Δ -Y (como en la Fig. 21-1). La conexión neutra de la carga no debe dejarse "flotante" o aislada.

Una conexión de tres hilos a una carga Y puede utilizarse si la carga está balanceada con seguridad. Las tres fases de un motor, por ejemplo, están casi siempre conectadas en Y con el neutro flotante, porque las tres fases de un motor están inherentemente balanceadas.

Los problemas comienzan cuando las tres fases están desbalanceadas, porque entonces los tres voltajes de fase de la Y son desiguales. Esto no es aceptable, por supuesto, para un sistema de distribución de potencia, pero tiene sus ventajas para propósitos especiales, puesto que el análisis es el mismo en ambos casos se dará un ejemplo de un circuito Y desbalanceado de utilidad particular.

4. Indicador de secuencia y fase

Está claro por supuesto, que la secuencia de fase es esencial con maquinaria rotatoria. Un generador que gira en un sentido desarrolla voltajes de secuencia de fase $a-b-c$; y girando en el otro sentido sus voltajes están en el orden $c-b-a$. La dirección de rotación de un motor de inducción se invierte si las conexiones de dos líneas se in-

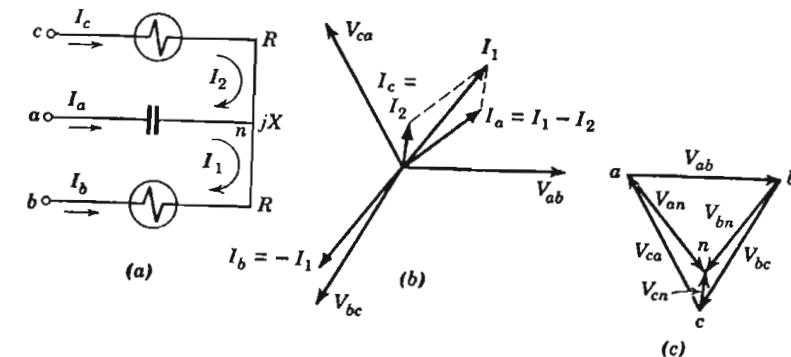


FIG. 21-3 Indicador de secuencia de fase

tercambian para proveer al motor con la energía de rotación de fase inversa desde la línea.

A primera vista parece que la secuencia de fase no tiene importancia con cargas estáticas. Esto no es siempre correcto. Las corrientes recibidas por las tres fases de una carga conectada en Y desbalanceada, por ejemplo, dependen de la secuencia de fase de la fuente.

Este hecho es de utilidad en un dispositivo llamado indicador de secuencia de fase. La Fig. 21-3 muestra una forma del indicador; dos resistencias y un condensador están conectados en una Y con neutro flotante. Las resistencias son lámparas; dos lámparas de 15 watts y un condensador de 2 microfarads hacen el indicador útil para un circuito trifásico de 120 volts. Las instrucciones en el dispositivo dicen: "conéctese a un circuito trifásico, sujetando la línea *a* a la terminal central; la lámpara que se encienda está en la línea *b*".

Analicemos el comportamiento de este dispositivo para ver qué lámpara se enciende y por qué solamente una. Puesto que el problema por sí mismo no sugiere otros métodos más simples de ataque, utilicemos el método de malla. Las corrientes de malla I_1 e I_2 pueden suponerse que fluyen como se muestra en el diagrama de alambrado; éstas se van a encontrar, siendo los voltajes aplicados

$$V_{ab} = 120/0^\circ \quad V_{bc} = 120/-120^\circ \quad V_{ca} = 120/+120^\circ$$

Se escriben primero dos ecuaciones de malla:

$$V_{ab} = (R + jX)I_1 - jXI_2$$

$$V_{ca} = (R + jX)I_2 - jXI_1$$

La solución de estas ecuaciones para I_1 da

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_{ab} & -jX \\ V_{ca} & R + jX \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (R + jX) & -jX \\ -jX & (R + jX) \end{vmatrix}} = \frac{RV_{ab} + jX(V_{ca} + V_{ab})}{(R + jX)^2 + X^2}$$

$$= \frac{RV_{ab} - jXV_{bc}}{R^2 + j2RX}$$

Ahora sustituimos valores numéricos. Si se utiliza un condensador de 2 microfarads

$$X = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{10^6}{(377)(2)} = -1325 \text{ ohms}$$

Utilizando como resistencia lámparas de 15 watts, para 120 volts,

$$R = \frac{(120)^2}{15} = 960 \text{ ohms}$$

Sustituyendo estos valores, y los voltajes dados, en la expresión para I_1 :

$$I_1 = \frac{(960)(120/0^\circ) - j(-1325)(120/-120^\circ)}{(960)^2 - j2(960)(1325)} = 0.0982/52.6^\circ$$

La corriente especificada para la lámpara de 15 watts es $15/120 = 0.125$ amperes. La corriente real en la lámpara I_1 es, por tanto, cerca del 80% de su corriente especificada, la que es suficiente para encender la lámpara aunque no a su completa brillantez.

La corriente en la otra lámpara se calcula a continuación. Resolviendo las ecuaciones de malla para I_2 :

$$I_2 = \frac{RV_{ca} - jXV_{bc}}{R^2 + j2RX} = 0.0306/84.3^\circ$$

Los detalles del cálculo son similares a los de I_1 ; más aún, la única diferencia es que V_{ca} reemplaza a V_{ab} en la ecuación. El resultado, 30 miliamperes, es únicamente un cuarto de la corriente especificada de la lámpara, lo que no es suficiente para dar una brillantez que se note.

Por tanto, hemos verificado que una lámpara se enciende brillantemente y la otra difícilmente se nota y que la lámpara en la línea *b* es la brillante. Aún más importante, hemos confirmado que la secuencia de fase sí produce una diferencia.

Los voltajes aplicados y las corrientes de línea calculadas se muestran en el diagrama de transformadas de la Fig. 21-3b. Nótese que las tres corrientes de línea sumadas dan cero, tal y como deben hacerlo. Los voltajes de línea a neutro pueden incluirse en este diagrama, pero es más informativo dibujar la construcción gráfica de la Fig. 21-3c (similar a la Fig. 20-8). Los voltajes de línea a línea se dibujaron como un triángulo con los vértices marcados *a*, *b* y *c*; las tres transformadas de línea a neutro se encuentran en un punto común *n*. El punto *n* debe estar localizado de modo que V_{hn} y V_{cn} son proporcionales a I_b e I_c , mientras que V_{an} está en cuadratura con I_a y relacionada apropiadamente en magnitud, y al mismo tiempo se reúne la condición de que $I_a + I_b + I_c = 0$. La solución por

el método de mallas satisface todos estos requerimientos. Una solución gráfica es posible pero es algo complicada.

5. Sustitución Δ -Y

Existen de hecho algunas otras formas de resolver este problema de la carga Y con neutro flotante. Uno es sustituir una carga Δ por la carga Y y resolver por fase para las corrientes de línea. Esta es una aplicación de un método muy útil e importante que veremos en detalle, aplicando este método también al indicador de secuencia de fase.

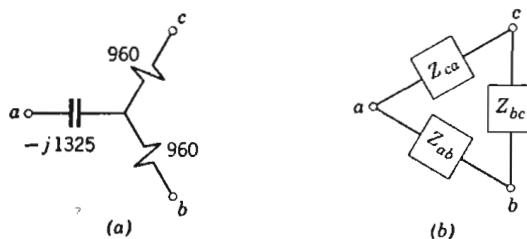


FIG. 21-4. Δ sustituida por Y

La Fig. 21-4a muestra el mismo dispositivo que la Fig. 21-3a, ligeramente arreglado. Deseamos encontrar la Δ equivalente. Aplicando las Ecs. 6-16, 17 y 18:

$$Z_{ab} = \frac{jXR + R^2 + jXR}{R} = R + j2X = 960 - j2650 = 2820/-70.1^\circ$$

$$Z_{bc} = \frac{jXR + R^2 + jXR}{jX} = 2R - j\frac{R^2}{X} = 1920 + j695 = 2040/19.9^\circ$$

$$Z_{ca} = Z_{ab} = 2820/-70.1^\circ$$

Utilizando los voltajes de línea a línea de la sección previa, calculamos la corriente de fase en la Δ :

$$I_{ab} = \frac{V_{ab}}{Z_{ab}} = \frac{120/0^\circ}{2820/-70.1^\circ} = 0.0425/70.1^\circ = 0.0145 + j0.0400$$

$$I_{bc} = \frac{120/-120^\circ}{2040/19.9^\circ} = 0.0588/-139.9^\circ = -0.0450 - j0.0379$$

$$I_{ca} = \frac{120/120^\circ}{2820/-70.1^\circ} = 0.0425/190.1^\circ = -0.0419 - j0.0075$$

Estas se combinan para dar las corrientes en la Y:

$$I_a = I_{ab} - I_{ca} = 0.0564 + j0.0475 = 0.0736/40.1^\circ$$

$$I_b = I_{bc} - I_{ab} = -0.0595 - j0.0779 = 0.0980/-127.4^\circ$$

$$I_c = I_{ca} - I_{bc} = 0.0031 + j0.0304 = 0.0306/84.2^\circ$$

Lo que completa la solución. La concordancia de I_c con I_2 de la solución previa, y de I_b con $-I_1$, es bastante satisfactoria para el trabajo con regla de cálculo. (Nótese que $I_a + I_b + I_c = 0.0000 + j0.0000$. Esto no prueba otra cosa que la corrección de la aritmética en el último paso de la solución, y podría haber sido cierto para cualquier valor arbitrario de I_{ab} , I_{bc} e I_{ca}).

Por tanto, han sido alcanzadas las mismas conclusiones por dos formas de análisis. Es difícil decir cual es la mejor; probablemente hay menos trabajo de cálculo en la solución por corrientes de malla que en la sustitución Δ -Y, pero la diferencia no es grande. Ambos métodos, por supuesto son de la mayor importancia y aplicables a muchas clases de problemas.

6. Conexiones prácticas e imprácticas

Se mencionó al principio de la Sec. 3 que una Y con neutro flotante no es práctica si una carga trifásica puede estar desbalanceada. La razón que ahora entendemos es que el desbalance de la carga mueve el punto n fuera del centro del triángulo de la Fig. 21-3c, desbalanceando los voltajes de línea a neutro. Como un ejemplo (Fig. 21-5), una carga de alumbrado residencial no puede alimentarse conectando lámparas desde tres hilos de una línea de distribución secundaria trifásica a un hilo neutro flotante.

Otra conexión que debe evitarse es la de la Fig. 21-6. Un banco de transformadores Y-Y y un banco de transformadores Y- Δ , aunque diseñados para tener el mismo voltaje primario y también el mismo voltaje secundario, no pueden conectarse nunca juntos, en paralelo, tanto en el lado primario como en el secundario. Un banco desfasea los voltajes 30 grados y el otro no, así, si los voltajes primarios son iguales, los voltajes secundarios, aunque deben ser iguales en magnitud, son necesariamente desiguales en ángulos. Si tales

transformadores se conectasen en paralelo, resultaría una corriente circulante muy grande.

Una conexión de transformadores que parece improbable pero que es de verdadero valor práctico es la Δ abierta de la Fig. 21-7. Esto es la misma que las conexiones standard Δ - Δ de la Fig. 20-14 pero con un transformador omitido. La carga trifásica puede conectarse al lado secundario de este banco en Δ abierto como si los tres

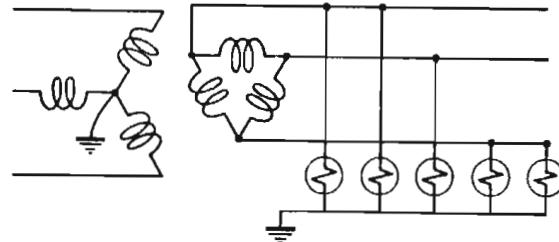


FIG. 21-5. Sistema de distribución impráctico

transformadores estuvieran presentes. Los dos transformadores suministran tres voltajes de línea a línea que tienen magnitud y ángulo correctos. Esta conexión Δ abierta es a veces conveniente para instalaciones temporales, particularmente si está ligeramente cargado.

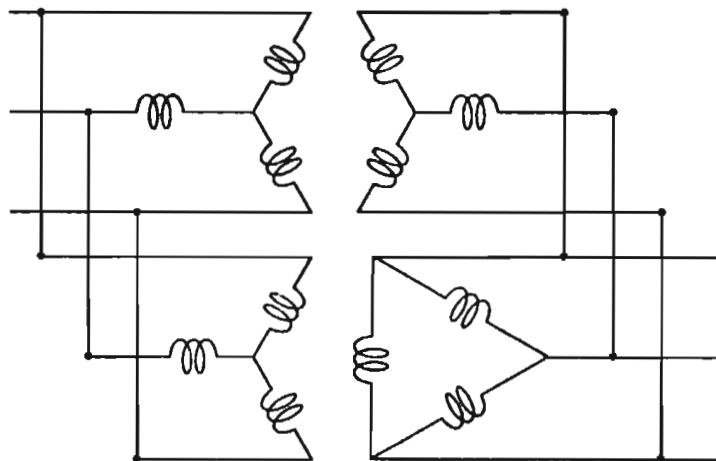


FIG. 21-6. Conexión de transformadores en paralelo imposible

Las desventajas que la hacen no conveniente para uso permanente es la pobre utilización de la capacidad de transformación y la baja eficiencia de operación.

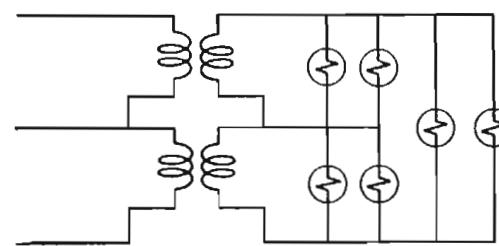


FIG. 21-7. Conexión de transformadores Δ abierta algunas veces útil

7. Componentes simétricas

El irregular estudio de los sistemas trifásicos desbalanceados, puede ser extremadamente confuso. Se verá fácilmente que existe un número ilimitado de casos especiales. Felizmente para el ingeniero, fue descubierto un sistema que pone orden en este caos. Es el método de componentes simétricas.

El principio es este. Tres sectores cualesquiera se pueden analizar en tres conjuntos de reactores desbalanceados. Aplicado a las corrientes trifásicas, tres fasores de corriente cualesquiera pueden analizarse en tres conjuntos de corrientes desbalanceadas; tres fasores de voltaje cualesquiera pueden analizarse en tres conjuntos de voltajes balanceados.

La aplicación del principio suministra el siguiente método. Los voltajes o corrientes en un punto de desbalance de un sistema trifásico están determinados y son analizados en tres conjuntos de componentes simétricas conocidas como de secuencia de fase positiva, secuencia de fase negativa y secuencia de fase cero. Los voltajes y corrientes de secuencia de fase positiva están entonces determinados a lo largo de todo sistema; este es un problema de corrientes y voltajes *balanceados* y por tanto es fácil. Los voltajes y corrientes de secuencia de fase negativa se determinan también independientemente. Los voltajes y corrientes de secuencia de fase cero se determinan igualmente en forma independiente. Por último, los voltajes trifásicos reales desbalanceados en cualquier punto en el sistema se encuentran sumando los voltajes de secuencia de fase positiva, negativa, y cero en este punto; las corrientes desbalanceadas reales se encuentran sumando las corrientes de secuencia de fase positiva, negativa y cero. De esta manera, la solución de un problema difícil que incluye corrientes y voltajes desbalanceados se reduce a las so-

lución de tres problemas fáciles que incluyen únicamente corrientes y voltajes desbalanceados.

Las ventajas únicas de este método aparecen cuando se considera maquinaria rotatoria. Con redes estáticas las ventajas son debatibles y no puede negarse que el uso de componentes simétricas hace a los problemas simples más difíciles aunque hace más simples a los problemas más difíciles. Quedaría fuera de lugar en este libro discutir los problemas trifásicos complicados para los que las componentes simétricas son realmente indispensables, y cualquier intento de aplicar el método a situaciones simples puede únicamente dejar al lector con la convicción de que el método de componentes simétricas hace las cosas peores en vez de mejores. Por tanto, tocaremos ligeramente este asunto.

Sin embargo, el lenguaje de las componentes simétricas está tan adentrado en la literatura técnica que el significado de las frases comunes y algunas de sus simplificaciones deben ser conocidas por todos los ingenieros electricistas. El propósito de los siguientes párrafos, por lo tanto, es indicar la naturaleza general del método.*

8. Síntesis

Los tres fasores de corriente que aparecen en la Fig. 21-8a están obviamente desbalanceados. Se demostrará que éstos son la suma de tres sistemas balanceados.

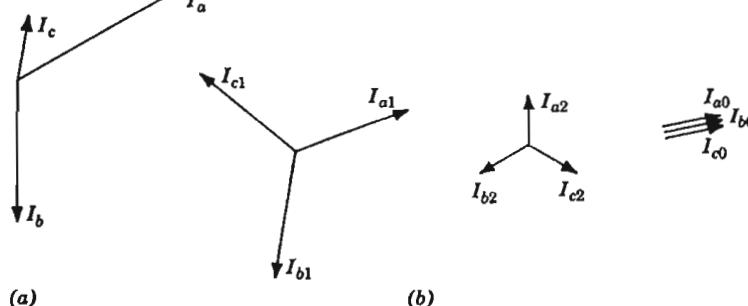


FIG. 21-8. (a) Corrientes desbalanceadas y (b) sus componentes simétricas

La Fig. 21-8b muestra tres conjuntos balanceados o simétricos. La definición de un conjunto simétrico de vectores es la de que son

* Existe un buen número de libros sobre este asunto. El primero fue el de Wagner y Evans, Referencia 43. El Westinghouse Reference Book también debe ser mencionado (Referencia 44).

iguales en longitud e igualmente espaciados en ángulo. Por lo tanto, los conjuntos simétricos de tres vectores (como los tres conjuntos de fasores en la Fig. 21-8b) están relacionados por la siguiente ecuación, haciendo n igual a 1, 2 o 3:

$$I_{an} = I_{bn}/n \cdot 120^\circ = I_{cn}/2n \cdot 120^\circ \quad (21-1)$$

Para el conjunto de secuencias positivas, $n = 1$, y

$$I_{a1} = I_{b1}/120^\circ = I_{c1}/240^\circ \quad (21-2)$$

Se reconocerá que para el conjunto de fase positiva, el orden de las fases es $a-b-c-a-b-c\dots$

Para el conjunto de secuencia negativa, $n = 2$. Este número de acuerdo con el subíndice 2 utilizado para identificar cantidades de secuencia negativa. El mismo conjunto simétrico resulta haciendo $n = -1$, y esto toma en cuenta el nombre de la secuencia *negativa*. Las fases tienen el orden $c-b-a-c-b-a\dots$

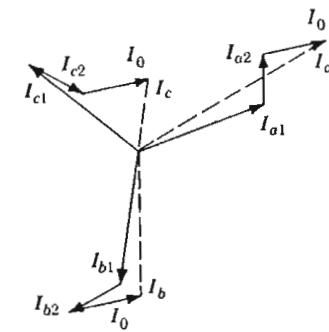


FIG. 21-9. Adición de componentes simétricas para obtener un conjunto trifásico desbalanceado

Para el tercer conjunto, $n = 3$, o alternativamente, $n = 0$; esto no hace ninguna diferencia. La última toma en cuenta el nombre de secuencia cero. Las tres componentes que comprenden el conjunto de secuencia cero son iguales en magnitud y ángulo, por lo que es innecesario distinguirlas como I_{a0} , I_{b0} e I_{c0} ; el único símbolo I_0 se utiliza para cualquiera de estas tres cantidades iguales.

Hasta aquí con las definiciones. Ahora veremos cómo los tres conjuntos simétricos de la Fig. 21-8b se suman para dar el conjunto original desbalanceado de tres corrientes. La Fig. 21-9 muestra la

adición. I_{a1} , I_{a2} e I_0 cada uno tomado de la Fig. 21-8b, se suman gráficamente para dar I_a ; I_{b1} , I_{b2} e I_0 sumados dan I_b ; I_{c1} más I_{c2} más I_0 es igual a I_c . La comparación de las líneas discontinuas para I_a , I_b e I_c con la Fig. 21-8a muestra que en efecto hemos obtenido el conjunto desbalanceado sumando las componentes simétricas.

9. Análisis

Es fácil sumar tres conjuntos de componentes simétricas para dar un conjunto desbalanceado de fasores; esto es obvio. El proceso inverso, encontrar los tres conjuntos de componentes simétricas de tres fasores cualesquiera desbalanceados que puedan darse, es otro asunto. ¿Cómo puede hacerse esto?

Las tres ecuaciones que logran este análisis en componentes simétricas se obtendrán ahora. Empezamos con las tres ecuaciones de síntesis; por definición

$$\begin{aligned} I_{a1} + I_{a2} + I_0 &= I_a \\ I_{b1} + I_{b2} + I_0 &= I_b \\ I_{c1} + I_{c2} + I_0 &= I_c \end{aligned} \quad (21-3)$$

Puesto que $I_{b1} = I_{a1} / -120^\circ$ e $I_{c1} = I_{a1} / +120^\circ$ para el sistema de secuencia de fase (positiva según las Ecs. 20-2), y similarmente $I_{b2} = I_{a2} / +120^\circ$ e $I_{c2} = I_{a2} / -120^\circ$ para el sistema de secuencia de fase negativa (ver Fig. 21-8b), esto puede escribirse

$$I_{a1} + I_{a2} + I_0 = I_a \quad (21-4a)$$

$$I_{a1} / -120^\circ + I_{a2} / +120^\circ + I_0 = I_b \quad (21-4b)$$

$$I_{a1} / +120^\circ + I_{a2} / -120^\circ + I_0 = I_c \quad (21-4c)$$

Sumando estas tres ecuaciones, las primeras dos columnas desaparecen, dejando $3I_a = I_a + I_b + I_c$ o

$$I_0 = \frac{1}{3}(I_a + I_b + I_c) \quad (21-5)$$

El siguiente paso es multiplicar la Ec. 21-4b, por $1 / +120^\circ$ y la Ec. 21-4c por $1 / -120^\circ$ y volver a sumar. Esta vez, la segunda y la tercera columna desaparecen, dejando $3I_{a1} = I_a + I_b / +120^\circ + I_c / -120^\circ$, o

$$I_{a1} = \frac{1}{3}(I_a + I_b / +120^\circ + I_c / -120^\circ) \quad (21-6)$$

Finalmente, la Ec. 21-4b se multiplica por $1 / -120^\circ$ y la Ec. 21-4c por $1 / +120^\circ$ la suma entonces da

$$I_{a2} = \frac{1}{3}(I_a + I_b / -120^\circ + I_c / +120^\circ) \quad (21-7)$$

Así como las Ecs. 21-3 muestran cómo las componentes simétricas se sintetizan en las tres corrientes totales, así las Ecs. 21-5, 6 y 7 muestran cómo las tres corrientes totales pueden analizarse en sus tres componentes.

El método de análisis se ilustra en la Fig. 21-10. I_a , I_b e I_c se tomaron de la Fig. 21-8. Para encontrar la componente de secuencia

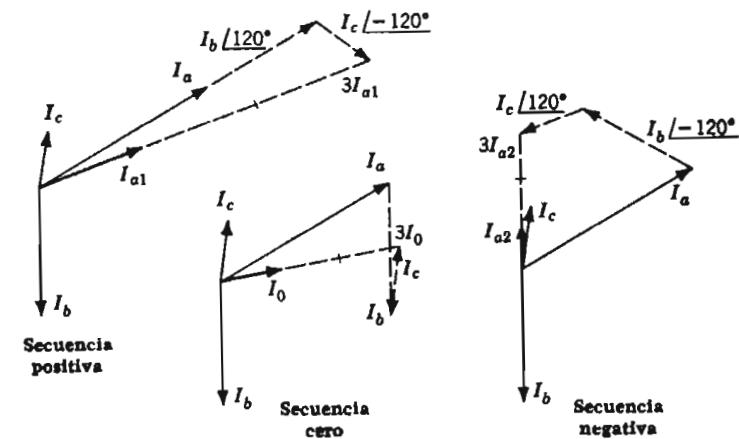


FIG. 21-10. Análisis de un conjunto trifásico desbalanceado para encontrar las componentes simétricas

cero, se suman a la punta de I_a líneas no continuas iguales a I_b e I_c , y un tercio de la resultante se toma como I_0 de acuerdo con la Ec. 21-5.

Para encontrar la componente de secuencia positiva, se suman al extremo de I_a una recta igual a I_b pero girada 120° y a continuación una línea igual a I_c girada -120° . Un tercio de la resultante (según la Ec. 21-6) es I_{a1} .

La componente de secuencia negativa se encuentra aplicando la Ec. 21-7 de manera semejante.

La Fig. 21-10 muestra cómo los sistemas de componentes simétricas de la Fig. 21-8 se derivan (fueron presentados originalmente sin ninguna indicación de donde provenían) y la Fig. 21-9 muestra cómo se recombinan en las tres cantidades no simétricas

dadas. La Fig. 21-10 ilustra el análisis, la Fig. 21-9 ilustra la síntesis.

10. Relaciones en un circuito trifásico

Las corrientes de una carga conectada en Y trifásica con neutro flotante (Fig. 21-11a) pueden *no tener componente de secuencia cero*. La componente de secuencia cero es (según la Ec. 21-5) un tercio de la suma de las tres corrientes; pero cuando el neutro no está conectado, la suma de las tres corrientes debe ser cero. No tiene

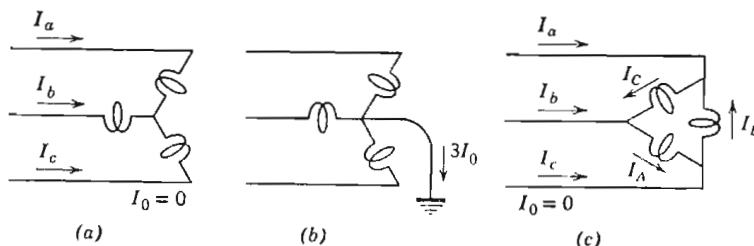


FIG. 21-11. Varias conexiones trifásicas

importancia como estén desbalanceadas las impedancias de la carga, o cuáles puedan ser los voltajes aplicados: No existe ninguna corriente de secuencia cero.

Si la unión de la Y se conecta a un alambre neutro, como en la Fig. 21-11b y existe corriente en el alambre, la *corriente en el neutro* es igual a $3I_0$. Esto es evidente, puesto que la corriente neutra es la suma de las tres corrientes de línea.

Las tres corrientes de línea que alimentan a una carga conectada en Δ (como en la Fig. 21-11c) *no tienen componente de secuencia cero*. Estas tres corrientes, I_a , I_b e I_c , sumadas deben dar cero. Sin embargo, esta afirmación no se aplica a las tres corrientes de fase de la Δ , I_a , I_b e I_c . Las corrientes de fase de la Δ no necesitan sumar cero; pueden o no serlo. Por tanto, puede o no, haber corriente de secuencia cero en la Δ , aunque nunca habrá ninguna en la línea.

Si existe corriente de secuencia cero en la Δ , es una corriente circulante. Nótense las flechas para I_a , I_b e I_c en la figura. Si únicamente existe corriente de secuencia cero fluyendo, estas tres corrientes estarían todas en la dirección de la flecha en el mismo instante; después se invertirán todas y a continuación nuevamente se invertirán todas en la dirección opuesta; la corriente fluye primero en

un sentido alrededor de la Δ y a continuación en el otro sentido alrededor de la Δ , pero nunca abandona la Δ .

¿Qué podría causar tal corriente circulante en la Δ ? parece que no es conveniente que suceda, y más aún que difícilmente puede existir sola. Pero esta corriente circulante hipotética es real y únicamente una componente de cada una de las tres corrientes de fase. Suponiendo que I_a , I_b e I_c de la Fig. 21-8 son las tres corrientes de fase de la Δ de la Fig. 21-11c (haciendo a un lado la diferencia de notación por el momento); no sería difícil obtener estas tres corrientes de fase en la Δ con un ajuste apropiado de las tres impedancias de carga. Entonces, la componente I_0 mostrada en la Fig. 21-8 existiría en la Δ . Y circularía teóricamente alrededor de la Δ , y no podría encontrarse sola en ningún lugar; es simplemente una componente de cada corriente de fase.

Puede mencionarse otra relación general. Nunca existe componente de secuencia cero en un voltaje de línea a línea. El voltaje de secuencia cero es un tercio de la suma de los tres voltajes y los tres voltajes de línea a línea (habiéndose medido alrededor de una trayectoria cerrada) siempre suman cero. Puede haber componente de secuencia cero de voltaje de línea neutro, pero de voltajes de línea a línea, no importa que tan desbalanceados, no puede existir componente de secuencia cero.

11. Fuentes de secuencia negativa y de secuencia cero

Un sistema trifásico en el que todos los generadores producen voltaje balanceado (secuencia de fase positiva), y en el que todas las impedancias de las cargas, líneas y otros aparatos *están balanceadas*, tiene únicamente corriente de secuencia de fase positiva. ¿Bajo qué circunstancia pueden aparecer corriente de secuencia de fase cero o negativa?

Si podemos suponer que los generadores producen nada más voltaje de secuencia de fase positiva (y esto es normal), entonces las corrientes de secuencia cero y negativa resultarán únicamente de impedancias desbalanceadas. Es un concepto válido mirar un conjunto desbalanceado de impedancias como una *fuente* de potencia de secuencia negativa y secuencia cero, esto es algo análogo a mirar un elemento del circuito no lineal como una fuente de potencia armónica. Igual que un elemento no lineal puede considerarse que transforma potencia de frecuencia fundamental a potencia de frecuencias armónicas, así una impedancia trifásica desbalanceada pue-

de concebirse que transforma potencia de secuencia de fase positiva a potencia de secuencias de fase negativa y cero.

Este concepto se ilustra en el ejemplo siguiente. Así, también, hay un número de otras ideas y métodos que aparecen en el ejemplo aunque no se discuten y el lector debe por tanto generalizarlas por sí mismo.

12. Ejemplo

El generador de la Fig. 21-12 está conectado a una línea de transmisión a través de un banco de transformadores. No existe carga en el sistema. Un alambre de la línea de transmisión cae, produ-

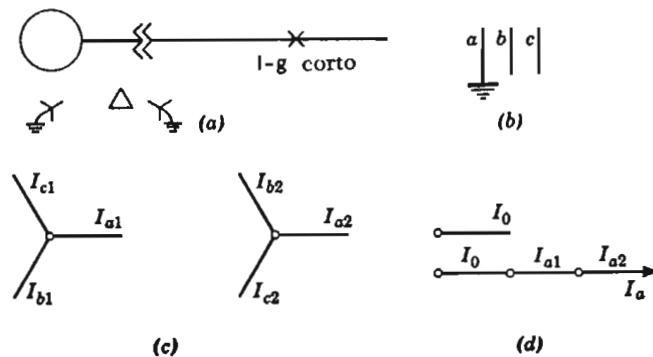


FIG. 21-12. Falla de línea a tierra

ciendo un corto circuito de línea a tierra. Encontrar las corrientes de componente simétrica y las corrientes totales en el generador.

SOLUCIÓN. El sistema está balanceado excepto en el punto de falla marcado con X en el diagrama. La corriente de falla es I_a ; I_b e I_c son ambas iguales a cero. Ver Fig. 21-12b. Las corrientes de secuencia positiva negativa y cero en el punto de falla se encuentran utilizando las Ecs. 21-5, 6 y 7. Puesto que I_b e I_c son ambas iguales a cero en el punto de falla, estas ecuaciones dan:

$$I_0 = \frac{1}{3}I_a \quad I_{a1} = \frac{1}{3}I_a \quad I_{a2} = \frac{1}{3}I_a \quad (21-8)$$

Por tanto $I_{a1} = I_{a2} = I_0$ como en la Fig. 21-12c. La suma de estas componentes es I_a como en la Fig. 21-12d, siendo esta la corriente en la línea que falló. También, $I_{b1} + I_{b2} + I_0 = 0$, e $I_{c1} + I_{c2} + I_0 = 0$, como deben ser, puesto que las corrientes en las líneas b y c son cero.

Es digno de notarse que las líneas b y c en la falla están concebidas que llevan corriente de secuencia positiva, corriente de secuencia negativa y también corriente de secuencia cero, aunque de hecho no llevan ninguna corriente. La corriente real en el alambre, la suma de las tres componentes, es cero.

Vamos a seguir la huella de la corriente de secuencia cero a lo largo del sistema. Existe una corriente de secuencia cero I_0 en el punto de falla, igual a un tercio de la corriente de falla. Del secundario del transformador al punto de falla cada alambre de la línea lleva esta corriente de secuencia cero, y la tierra o el alambre neutro de

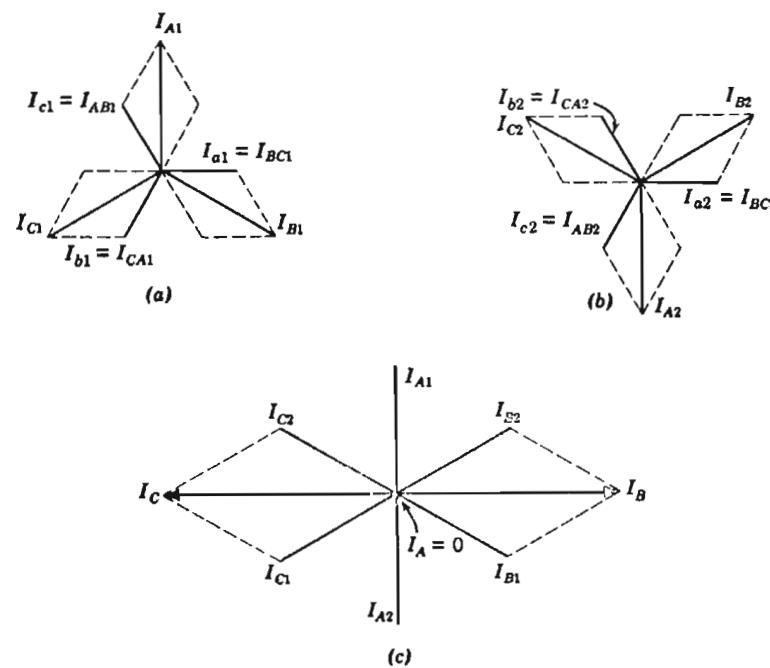


FIG. 21-13. Resultado de la transformación Δ -Y en las corrientes de la Fig. 21-12. (a) Secuencia positiva, secundario y primario. (b) Secuencia negativa, secundario y primario. (c) Corrientes de fases totales en el generador. (Nota:cción como la de la Fig. 21-1)

retorno lleva $3I_0$. La misma corriente de secuencia cero fluye en los devanados secundarios conectados en Y del transformador; el circuito para la secuencia cero se completa a través del alambre neutro hasta la unión del secundario Y.

Puesto que estas corrientes de secuencia cero fluyen en los tres devanados secundarios del transformador, deben también fluir en los tres devanados primarios. Un transformador no puede tener corriente (excepto corriente de magnetización) en uno de sus devanados sin que haya también en el otro devanado, debido esto a la razón de las vueltas; los amperes-vuelta deben ser iguales y opuestos. Por tanto la corriente de secuencia cero fluye en los primarios conectados en Δ . Estas circulan alrededor de la Δ . No aparecen, sin embargo, en las corrientes de línea entre el transformador y el generador, ni hay alguna componente de secuencia cero en los devanados del generador.

Las componentes de secuencia positiva y secuencia negativa son iguales a la componente de secuencia cero en la falla, y en los devanados secundarios del transformador, y por tanto en los devanados primarios del transformador. En la línea del generador al transformador, sin embargo, aparece un arreglo curioso. En esta línea no existe corriente de secuencia cero, aunque existe corriente de secuencia positiva y corriente de secuencia negativa. Llámemos a las tres corrientes de línea I_A , I_B e I_C (utilizando los símbolos de la Fig. 21-1), y llamemos a las tres corrientes en la falla I_{a1} , I_{a2} e I_{a3} . Entonces I_{a1} e I_{a2} están relacionados a I_{A1} e I_{A2} como se muestran en la Fig. 21-13a y b.

En la Fig. 21-13c, I_{A1} e I_{A2} , I_{B1} e I_{B2} , I_{C1} e I_{C2} se suman para obtener las corrientes de línea, que son también las corrientes de fase del generador. Como se muestra en la figura, las líneas B y C llevan corrientes mientras que la línea A no.*

13. Armónicas trifásicas

Es muy difícil extender una generalización para decir que todas las armónicas son indeseables en los sistemas de potencia, sin embargo, algunas no pueden evitarse, los generadores se diseñan cuidadosamente para hacer mínimo el contenido armónico en el voltaje de salida. Los transformadores, sin embargo, operan más económico con el circuito magnético parcialmente saturado por el flujo máximo; operan, por tanto, como inductancias no lineales, y sus corrientes magnetizantes tienen un contenido armónico con-

* El punto especial de interés de este ejemplo es que ilustra, esquemáticamente un tipo de problema que se resuelve comúnmente en la práctica real de ingeniería por medio de componentes simétricas. Este es un ejemplo simple, pero por lo menos es del tipo adecuado para mostrar como las componentes simétricas se utilizan realmente.

siderable. Ha sido mencionado que los elementos no lineales pueden considerarse que actúan como fuente de armónicas; las corrientes armónicas se originan en los puntos de no linealidad y circulan a lo largo del sistema.

Ciertas cargas también, siendo no lineales, introducen armónicas en el sistema, quizás los más prominentes en esta estimación son los rectificadores monofásicos y las lámparas de descarga luminosa (luces fluorescentes, señales de neón, y otras similares). Los grandes rectificadores no son a menudo serios transgresores, porque son generalmente polifásicos (por lo general son de 3, 6, 12 y aún más fases) y un rectificador polifásico toma de la línea de suministro una corriente alterna más cercana a la senoidal que lo que toma un rectificador monofásico. Las lámparas fluorescentes toman inherentemente corriente de una forma muy distorsionada.

A menudo dos tubos toman corriente en diferentes fases del ciclo, uno a través del reactor inductivo y el otro a través del capacativo, mejorando así la forma de la onda de corriente total. Sin embargo, generalmente se encontrará algo de contenido armónico en la corriente de línea de un sistema de potencia.

Por razones que vamos a discutir ahora, las armónicas pares (la segunda armónica y sus múltiplos) son menores en todos los sistemas de potencia de corriente alterna, y las armónicas triples (tercera armónica y sus múltiplos) se eliminan fácilmente de los problemas trifásicos.

14. Armónicas pares

Si se encontraran presentes armónicas pares, los medios ciclos positivos y negativos de una onda serían diferentes, sin embargo, los generadores ordinarios de corriente alterna no hacen distinción entre un medio ciclo y el otro. La simetría de media onda es inherente a la naturaleza del devanado y a la forma de la estructura del campo rotatorio. Las armónicas pares son por lo tanto despreciables en el voltaje generado.

Aunque las cargas en el sistema, como rectificadores y lámparas de descarga luminosa, pueden ser no lineales, y aunque los transformadores estuviesen saturados, reaccionan, a pesar de esto, simétricamente en los medios ciclos positivos y negativos tomando corriente con simetría de media onda. (Un rectificador de media onda es una excepción obvia, pero los rectificadores de media onda son despreciablemente pequeños).

No vemos razón, entonces, para que las armónicas pares aparezcan ya sea en el voltaje o en la corriente de un sistema de potencia. De hecho, las mediciones con un analizador de onda indican únicamente unos pocos décimos por ciento de contenido de armónicas pares, en el voltaje o corriente de un sistema ordinario.

15. Armónicas triples

Las tercera armónicas son producidas por generadores, transformadores y cargas no lineales de un sistema de potencia, pero pueden generalmente eliminarse por conexiones apropiadas trifásicas. Las componentes de tercera armónica puede hacerse que se anulen entre sí.

Las tres ondas fundamentales de un sistema de frecuencia de fase positiva mostrada en la Fig. 21-14, están marcadas I_a , I_b e I_c . Supongamos que la componente fundamental de I_a está acompañada

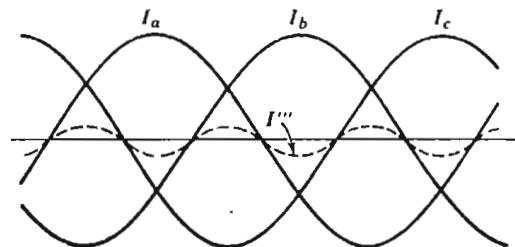


FIG. 21-14. La Tercera armónica es de la naturaleza de secuencia de fase cero

por una componente de tercera armónica, y que la relación de fase es tal que la armónica fundamental y la tercera lleguen a cero en el mismo instante como se muestra. La onda de tercera armónica está marcada I''' .

Supongamos que la componente fundamental de I_b está acompañada de la misma manera por una componente de tercera armónica que tiene la misma magnitud que la de la fase a , y la misma relación de fase con su fundamental. La curva que representa esta tercera armónica en la fase b es idéntica a la curva para la tercera armónica en la fase a . La tercera armónica en la fase c , teniendo la misma magnitud y la misma relación de fase con su fundamental también es idéntica. Esto es, las tres componentes de tercera armónica, aunque existen en tres fases diferentes, y fluyen en tres diferentes alam-

bres, están representadas por una curva única. Son idénticas en magnitud y fase. En este aspecto son como las corrientes o voltajes de secuencia cero.

La razón para esta relación es que las componentes *fundamentales* de un sistema trifásico difieren en fase por 120 grados. Las componentes de *tercera armónica* están por tanto desplazadas una de otra por 120 grados fundamentales, pero 120 grados fundamentales son 360 grados de tercera armónica. Cada onda de tercera armónica está por tanto desplazada de las otras por un ciclo completo de tercera armónica de 360 grados, lo que es equivalente a que no haya desplazamiento.

La conclusión práctica es que las corrientes de tercera armónica en los tres hilos de una línea de transmisión deben fluir en la misma dirección en cualquier instante, invirtiéndose todas cada medio ciclo, como lo hacen las corrientes de frecuencia cero. En consecuencia:

1. La corriente de tercera armónica puede fluir en los tres hilos de una línea o en las tres fases de un generador o carga, únicamente si existe una conexión neutra para suministrar a un circuito completo.
2. En una carga conectada en Δ , o en un generador o transformador conectados en Δ , la tercera corriente de tercera armónica puede circular en la Δ .
3. Puede existir un voltaje de tercera armónica a neutro, pero puede no existir una componente de tercera armónica del voltaje de línea a línea.

Las mismas limitaciones se aplican a la sexta armónica, la novena armónica y todas las armónicas que son múltiplos de la tercera. Nótese sin embargo, que la sexta armónica, la doceava, etc., serán inexistentes en cualquier caso, o al menos despreciables, porque son armónicas pares.

16. Armónicas triples en generadores

Los devanados trifásicos de un generador están generalmente conectados en Y, y la salida del generador es alimentada por un banco de transformadores con devanados primarios conectados en Δ , como en la Fig. 21-1. El diseñador del generador, por tanto, puede mostrarse interesado en eliminar el contenido de tercera armónica del voltaje de fase: las componentes de tercera armónica del voltaje de fase se anularán una a otra, y no puede aparecer voltaje de tercera

armónica entre líneas aunque puede existir de línea a neutro. Por lo tanto, no habrá voltaje de tercera armónica aplicado a los transformadores. Además, no puede fluir corriente de tercera armónica en el generador, porque los devanados primarios conectados en Δ del banco de transformadores no proveen circuito para la corriente de tercera armónica del generador. Debido a esto, no es importante si el voltaje de fase del generador tenga, o no, contenido de tercera armónica.

A primera vista parecería una alternativa práctica conectar las fases del generador en Δ porque se eliminarían al mismo tiempo, tanto el voltaje como la corriente de tercera armónica de la línea de salida. Sin embargo, esto no es práctico porque la Δ es una trayectoria rara para la corriente de tercera armónica. La impedancia del generador es baja, y aún una pequeña fuerza electromotriz de tercera armónica produciría una gran corriente circulante, consumiendo potencia y tendiendo a sobrecalentar la máquina.*

17. Armónicas triples en transformadores

Puesto que un transformador es un elemento no lineal, requiere una corriente de magnetización no senoidal para producir un voltaje senoidal. Esto se analizó en la Sec. 13-3. Si se aplica un voltaje senoidal, el transformador requerirá una tercera armónica, (así como otras armónicas) en su corriente de magnetización; y si la tercera armónica de las corrientes se suprime, el voltaje terminal tendrá necesariamente una componente de tercera armónica. Una cierta cantidad de tercera armónica *debe* aparecer ya sea en la corriente de magnetización o en el voltaje, y por supuesto puede haber algún contenido de tercera armónica en ambos.

La Fig. 21-15 muestra un transformador. Supóngase que se aplicó voltaje senoidal a la Y, y que más o menos existe saturación del núcleo magnético. La corriente de tercera armónica (y múltiplos de la tercera) no pueden fluir en el lado primario, porque el neutro del transformador Y está aislado. Si el secundario no lleva corriente esto resultaría en una componente de tercera armónica del voltaje de línea a neutro en el transformador, un voltaje de tercera armónica que podría medirse, (estando el resto del circuito completo) con un voltímetro desde la unión de la Y a tierra.

* El autor está familiarizado en forma poco agradable con un generador de laboratorio conectado en Δ (construido bajo orden especial por un predecesor mal guiado hace algún tiempo; en el que con excitación normal pero sin carga, la tercera armónica circulante en la Δ es algo así como más de un tercio de la corriente especificada de la máquina).

Sin embargo, tendría que aparecer un voltaje de tercera armónica entre las terminales de cada fase del primario, y también en las terminales de cada fase del secundario del transformador. Puesto que el secundario está conectado en Δ , esto es imposible; la Δ es una trayectoria en corto circuito para el voltaje de tercera armónica. El resultado es que fluye corriente de tercera armónica en el secundario conectado en Δ , suficiente para eliminar el voltaje de tercera armónica en el secundario, y también para suprimir el voltaje de tercera armónica en el primario.

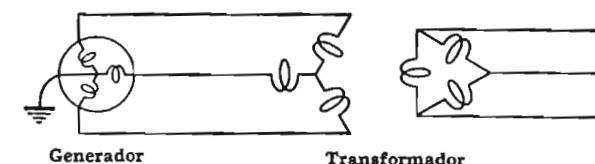


FIG. 21-15. La corriente de tercera armónica puede circular en la Δ

Es razonable considerar que la corriente de magnetización para el banco de transformadores fluye parcialmente en cada devanado; la componente fundamental fluye en el devanado primario conectado en Y, pero la tercera armónica (y múltiplos de la tercera) fluye en el secundario conectado en Δ . Así, cada devanado del transformador lleva parte de la corriente de magnetización, y los dos juntos llevan la corriente total que es requerida por las consideraciones de la Sec. 13-3.

La objeción práctica a un generador conectado en Δ no se aplica a un banco de transformadores conectado en Δ . En verdad, la corriente circulante de tercera armónica es indeseable, pero es necesariamente pequeña, estando limitada por la cantidad necesaria para magnetizar el transformador. (La reactancia de magnetización de un transformador puede ser 250 veces la reactancia de secuencia cero de un generador de igual capacidad).

18. Otras armónicas

Las terceras armónicas son esencialmente de secuencia de fase cero. Investiguemos otras armónicas.

La quinta armónica en la fase *b* está desplazada 120° fundamentales de la quinta armónica en la fase *a*. Esto es igual a 600° de quinta armónica, que $(360 + 240)$ grados. Por lo tanto, olvidán-

donos del ciclo completo de 360° , la quinta armónica de la fase *b* está desplazada por 240° de la fase *a*, y la fase *c* está desplazada por otros 240° . Esto se habrá reconocido como *secuencia de fase negativa*. Por lo tanto, la quinta armónica no está limitada, como lo está la tercera, por conexiones trifásicas; fluye en los mismos circuitos que la fundamental y no puede suprimirse.

Un argumento semejante muestra que las armónicas de los números siguientes tienen la forma de secuencia de fase indicadas:

Positiva	Negativa	Cero
1	(2)	[3]
(4)	5	(6)
7	(8)	[9]
(10)	11	(12)
13	(14)	[15]

Los números de armónicas pares están entre paréntesis para mostrar que comúnmente son despreciables. Las armónicas triples unipares están entre paréntesis cuadrado, indicando que pueden suprimirse por un diseño apropiado. De las restantes armónicas, la quinta es la más prominente.

19. Un problema

Un acertijo trifásico clásico está relacionado a la conexión de transformadores Y - Δ de la Fig. 21-15. Suponemos las siguientes condiciones: El generador produce una onda puramente senoidal de voltaje. El transformador no tiene resistencia o pérdidas de potencia de ninguna clase; por lo tanto, cuando el sistema no está cargado, como se muestra en el diagrama, la salida de potencia del generador es cero. Existe corriente de magnetización al transformador, pero la componente fundamental de la corriente de magnetización está en cuadratura con el voltaje del generador y no toma potencia del generador. Existen también, armónicas de corriente, pero puesto que no hay armónicas de voltaje en el generador, las armónicas de corriente no representan potencia. (Ver Sec. 14-15, y Ec. 14-16a).

Se reconocerá que las armónicas quinta y séptima de corriente fluyen en los devanados primarios del transformador, mientras que la corriente de tercera armónica, y múltiplos impares de la tercera, circulan en la Δ secundaria.

Ahora, abrimos la Δ secundaria de la Fig. 21-15 en una esquina e insertamos una resistencia, como en la Fig. 21-16. La corriente

circulante en la Δ tendrá ahora que fluir a través de esa resistencia. La cantidad de corriente circulante quedará algo disminuida por la resistencia, pero alguna corriente continuará fluyendo, y esta corriente, fluyendo en la resistencia, disipará energía. Deberá suministrarse potencia a la resistencia, y en el último análisis la potencia únicamente puede venir del generador.

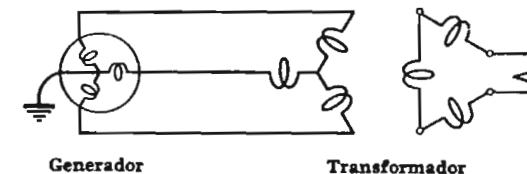


FIG. 21-16. El acertijo

Considerando que el generador no suministraba potencia antes de insertar la resistencia, y que la resistencia, después de ser insertada, no lleva corriente fundamental sino únicamente tercera armónica (y múltiplos de la tercera) ¿en qué forma suministra potencia el generador a la resistencia?

El lector que pueda resolver este acertijo, siguiendo el flujo de potencia del generador a la resistencia en la Δ , tiene un buen conocimiento de circuitos trifásicos, circuitos no lineales y armónicas.

20. Sumario

El capítulo comienza con ejemplos de análisis aplicados a sistemas trifásicos desbalanceados. En casos simples, la corriente y el voltaje pueden encontrarse en cada fase como si fuese independiente de las otras. En problemas más complicados las ecuaciones para las tres fases deben trabajarse juntas; un ejemplo muestra las ecuaciones de *malla* resueltas simultáneamente. La sustitución de una Δ por una conexión Y, o de una Y por una Δ , algunas veces simplifica el trabajo. Un número de observaciones referente a ingeniería práctica de sistemas trifásicos está basado en ejemplos numéricos, y un dispositivo útil, un indicador de secuencia de fase, sirve como una ilustración de una conexión Y con neutro flotante. Se mencionó la conexión de transformadores en Δ abierta.

Se presentó el método de *componentes simétricas*. El análisis de tres fasores desbalanceados determina tres conjuntos balanceados,

que tienen secuencias de fase positiva, negativa y cero. La síntesis combina estos tres conjuntos de componentes simétricas en los tres fasores desbalanceados originales.

Excepto en puntos de *impedancia desbalanceada*, los sistemas de secuencia de fase positiva, negativa y cero de voltaje, corriente y potencia son *independientes* uno de otro. Por tanto, cada secuencia puede tratarse separadamente y los resultados combinarse para dar las cantidades totales desbalanceadas. Ciertas conexiones trifásicas ofrecen impedancia infinita o cero para la corriente de secuencia cero, aunque no para las corrientes de secuencia positiva o negativa.

Un ejemplo ilustra el *análisis* de corrientes desbalanceadas en una falla asimétrica, la *supresión* de la secuencia cero, y el *desplazamiento de fase* de las secuencias positiva y negativa, por un banco de transformadores de $\Delta - Y$ y la *síntesis* de componentes para encontrar las corrientes de fase del generador.

Las *armónicas impares* son producidas en los sistemas de corriente alterna por generadores, transformadores saturados y cargas no lineales. Las armónicas pares son despreciables. Los sistemas trifásicos pueden diseñarse para suprimir las armónicas triples tomando ventaja de su naturaleza de secuencia de fase cero; los generadores conectados en Y y los transformadores $\Delta - Y$ son ventajosos.

Un acertijo muy conocido, pero entretenido, termina el capítulo y el libro.

PROBLEMAS

1. Cambie las cargas del Ejemplo 1, Fig. 21-1, de puramente resistiva a elementos puramente *inductivos* teniendo las reactancias $X_a = 0.80$, $X_b = 1.20$, y $X_c = 2.40$ ohms. Los voltajes secundarios del transformador están balanceados, 120 volts de línea a neutro, según se especificó en el Ejemplo 2. Encontrar los voltajes terminales del generador. § 2

2. Repetir el Prob. 1 haciendo que las cargas tengan reactancias puramente *capacitivas* de la misma magnitud. § 2

3. Considerando los Ejemplos 1 y 2, conectemos a las terminales de la carga un banco balanceado trifásico de condensadores conectado en Δ , así como las cargas puramente resistivas de la Fig. 21-1. ¿Con un voltaje del generador de 2400 volts, qué capacidad se necesita para lograr que ninguna fase tenga menos de 123 volts de

neutro a la carga? Exprésese como (a) microfarads por fase, y (b) kilovolts-amperes del banco trifásico de condensadores. Considerando esto un problema práctico, dé una respuesta por cualquier medio que considere adecuado. § 2

4. Voltaje trifásico balanceado, de 220 volts de línea a línea, secuencia de fase positiva, se suministra a la siguiente carga: la carga está conectada en Y con resistencias de 500 ohms de neutro a las líneas a y b , y un condensador de 500 ohms a la línea c . Encontrar la corriente en cada fase. Dibujar un diagrama fasorial. § 4

5. Un buen indicador de secuencia de fase opera con una lámpara tan brillante y la otra tan opaca como sea posible. Teniendo las mismas lámparas, pero cambiando el condensador ¿puede usted diseñar un indicador mejor que el descrito en la Sec. 4? § 4

6. Diseñar un indicador de secuencia de fase para utilizar lámparas de 10 watts. § 4

7. Dibujar el diagrama de conexiones de un banco de transformadores $Y-Y$ y de otro $Y-\Delta$. Conéctense las Y primarias de ambos al mismo suministro trifásico. Dibujar los diagramas fasoriales incluyendo los voltajes secundarios de cada banco; discutir la posibilidad de interconexión del lado secundario. § 6

8. Dibujar un diagrama de conexiones de un banco de transformadores $Y-\Delta$ y de otro $\Delta-Y$. Conectar los primarios (Y de uno, Δ del otro) al mismo suministro trifásico y, si esto es posible, conectar los secundarios juntos de forma que los transformadores operen en paralelo. ¿Cómo deben estar relacionadas las razones de vueltas de los transformadores? § 6

9. Dos transformadores idénticos conectados en Δ abierta están alimentando a una carga trifásica balanceada de factor de potencia unitario. Mostrar en un diagrama fasorial todos los voltajes y corrientes. (La impedancia del transformador y la corriente de magnetización pueden despreciarse). § 6

10. La carga trifásica del Prob. 9 recibe un total de 30 kilowatts. ¿Cuáles deben ser los kilovolts-amperes totales especificados de los dos transformadores? § 6

11. Un banco de transformadores $\Delta-\Delta$ está alimentando a una carga trifásica balanceada de resistencia pura. Uno de los tres transformadores se quita, dejando una conexión en Δ abierta. ¿Cuánto aumentó la pérdida de resistencia (I^2R) en el banco de transformadores? Dibujar un diagrama fasorial. § 6

12. Las corrientes de un sistema trifásico son $I_a = 500$, $I_b = -j8.66$, e $I_c = j10.00$ amperes. Calcular I_{a1} , I_{a2} , e I_{a0} . Bosqueje los fasores de las tres componentes de secuencia positiva, las tres componentes de secuencia negativa y la componente de secuencia cero, e indique gráficamente la suma para obtener nuevamente las tres corrientes dadas.

13. Podrían las corrientes del Prob. 12 ser: (a) ¿Corrientes de línea a una carga de alumbrado trifásica? (b) ¿Corrientes de línea al primario conectado en Δ de un banco de transformadores? (c) ¿corrientes de línea al primario conectado en Y de un banco de transformadores? (d) ¿corrientes de fase en un banco de transformadores conectados en Δ ? § 10

14. Se encontró (Prob. 9) que las corrientes del transformador en un banco en Δ abierta son I_{ab} , $I_{bc} = I_{ab}/\sqrt{3}$ e $I_{ca} = 0$. Encontrar las componentes de secuencia positiva, negativa y cero de estas corrientes de transformador. Sumar los sistemas de componentes gráficamente para demostrar que son las corrientes del transformador. ¿Ayuda este análisis a explicar las desventajas de una operación en Δ abierta? § 10

15. El voltaje aplicado es de 240 volts de línea a línea, trifásico balanceado. Una rectancia capacitiva es $X_{ab} = -12$ ohms está conectada de la línea a a la línea b ; una reactancia inductiva $X_{bc} = +12$ ohms está conectada de la línea b a la línea c . Encontrar las componentes de secuencia positiva, negativa y cero de la corriente de línea (esto es, I_{a1} , I_{a2} e I_{a0}). Mostrar los voltajes y corrientes en un diagrama fasorial. § 9

16. Repetir el Prob. 15 con las reactancias intercambiadas. Esto es, sea $X_{ab} = +12$ ohms y $X_{bc} = -12$ ohms. § 9

17. Sea la falla indicada en la Fig. 21-12a un corto circuito de la línea b a la línea c (en lugar de un corto circuito de la línea a a tierra). La línea a no lleva corriente. Encontrar I_{a1} , I_{a2} e I_{a0} en el alimentador entre el transformador y la falla. Mostrar cómo las componentes se suman para dar las tres corrientes de línea. § 12

18. Considerando la falla de línea a línea del Prob. 17, tomar en cuenta el efecto del banco de transformadores sobre los tres sistemas de componentes balanceadas y obtener las componentes de secuencia cero negativa y positiva de la corriente entre el generador y el transformador. Sumar estas componentes para obtener las corrientes del generador. § 12

19. (a) Mostrar, sin referirse a componentes simétricas, sino únicamente siguiendo cada corriente individual a lo largo del sistema que la Fig. 21-13c da los valores correctos para I_1 , I_k e I_r , si la corriente de falla es I_a como se mostró en la Fig. 21-12d. (b) Mostrar de la misma manera, que su respuesta al Prob. 18 es correcta. § 12

APENDICE 3

Respuesta a los Problemas

CAPÍTULO 1

4. $2.45 \cdot 10^{-4}$ ohms; suponiendo conductividad 97.5%, $2.51 \cdot 10^{-4}$ ohm.
8. Para $t = 0, 10, 20, 30$ ms, $i = 0, 0.05, 0.15, 0.20$ amp respectivamente.
12. Para $t = 0, 10, 20, 30$ ms, $v = 0, 250, 750, 1\,000$ volts respectivamente.
16. $312 \mu\text{h}$.
20. 2 min, 13 seg.
24. 5 920.

CAPÍTULO 2

4. Para pequeños bulbos, no hay cambio. Para grandes bulbos X_L no puede despreciarse.
8. $i = \frac{v_0 + E}{R} e^{-t/RC}$. No existe componente forzado.
12. (a) 314 ohms, 330 ohms, 72.3° . (b) $6.28 \cdot 10^5$ ohms, $6.28 \cdot 10^5$ ohms, 89.99° .
16. (a) L y C en serie únicamente. (b) Sí, si $\omega = 1/\sqrt{LC}$; para cualquier I_m . (c) No; es inevitable alguna R . (d) Inicial: I_m en la bobina, 0 carga en el condensador.
20. $f = 5, 10, 15, 20, 25$ kc/seg; $X = -287, -96.3, -12.0, 46.0, 93.4$ ohms.

CAPÍTULO 3

4. (a) 4. (b) Magnitud 1.78, ángulo 15° o 105° o -75° o -165° . (c) Magnitud 1.82, ángulo -9° o 63° o 135° o -81° o -153° .
8. (a) $-250 + j250$. (b) Magnitud 2, ángulo 18° o 90° o 162° o 306° . Ningún conjugado.

12. $\ln A + ja$.

16. $V = 250/\sqrt{2}/0^\circ$; $Z = 25.0/73.7^\circ$; $I = 10/\sqrt{2}/-73.7^\circ$; $i = 10 \cos(\omega t - 73.7^\circ)$.

20. $R = 0.296, 0.143, 0.083$ ohms. $C = 0.224, 0.206, 0.199 \mu F$.

CAPÍTULO 4

4. 14.14 amp; 9.0 amp.

8. $I_{rms} = 1/\sqrt{3} = 0.577$ amp.

12. (a) 14.7 amp, p.f. 0.0678. (b) 13.00, 0.520. (c) 15.00, 0.20.

16. 10 kw; el número 2 actúa como motor porque la corriente en fase está contra la fuerza electromotriz.

20. (a) I_m/π . (b) $I_m/2$. (c) $\frac{1}{4}I_m^2R$.

CAPÍTULO 5

4. 45.1 mh.

8. (a) $8 + j43$. (b) 8. (c) $0.023/-79.5^\circ$. (d) 0.0042.

12. 713 cps; 6 250 ohms.

16. 0.850 amp.

20. (a) $58.4/21.6^\circ$. (b) $1.71 \cdot 10^{-2}/-21.6^\circ$.

CAPÍTULO 6

4. 0.121 amp, de derecha a izquierda.

8. $3 + j10$.

12. (a) 0.645 amp, 0.097 amp. (b) 0.742 amp. (c) Si, gracias a Dios

16. (a) $V' = 60.0/0^\circ$, $Z' = 43.3/0^\circ$. (b) $V' = 100$, $Z' = 30$.

CAPÍTULO 7

4. (a) 500 kc/seg. (b) 40. (c) $6.53/38.6^\circ$.

8. 1.59 mh, $15.9 \mu\mu F$, 50 ohms.

12. (a) 1 503 y 1 497 kc/seg. (b) 1 509 y 1 491 kc/seg.

16. (a) $0.02 - j0.01$ mho. (b) 866 cps; 0.02 mho.

CAPÍTULO 8

4. La recta para $\omega L/R = \frac{2}{3}$, a $-\theta = -33.7^\circ$, pasa por la intersección de los círculos $X = 2$, $R = 3$, y así sucesivamente.

8. (a) Ver Sec. 8. (b) $0.178 - j0.0975$, 0.1. (d) 2 puntos en los que $B = 0$.

12. Principiando en el origen, curvándose (como en la Fig. 8.15a desplazada hacia arriba) asintóticamente al eje B .

16. $\sqrt{L/C}$.

20. Polos en 0, 1 000. ∞ ; ceros en 699, 4 590.

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS

CAPÍTULO 9

4. $E_r/(4.025 + 4.25r)$; aproximadamente, para pequeños desbalances.

8. $-j11.1$ ohms.

12. 33.3 ohms.

16. $V_{AB} = 87.1$ volts.

20. $\frac{5}{6}$ ohms.

CAPÍTULO 10

4. $58.4/21.6^\circ$.

8. $y_{11} = 0.0958/-73.3^\circ$.

12. $\begin{bmatrix} 7 & 7 & 6 \\ 9 & 6 & 1 \\ 7 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ 16. $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}$

CAPÍTULO 11

4. $P_1 = -13.9$ kw (como motor); $P_2 = +13.9$ kw (como generador).

8. $150 - j150$ volts.

12. $V_{AB} = 87.1$ volts.

16. (a) $116.4/0.3^\circ$. (b) $113.9/-2.0^\circ$.

20. $8.48/-64.85^\circ$.

CAPÍTULO 12

4. $j\omega(L_{11}L_{22} - M^2)/(L_{11} + L_{22} + 2M)$.

8. $L_1 = -0.04$, $L_2 = 0.95$, $M = 0.05$ henry.

12. (a) 0.0530 amp, 196 volts. (b) 0.024 amp, 0.291 amp.

CAPÍTULO 13

4. $\frac{a}{2} \frac{k^2 V_m^2}{2!} + \frac{3a}{8} \frac{k^4 V_m^4}{4!} + \dots$

8. $i(v) = 1 + 3(v-1) + 3(v-1)^2 + (v-1)^3$.

12. $K = 2.83$, $E_b = 2.0$ (aproximadamente).

CAPÍTULO 14

4. $\frac{8}{\pi^2} \left(\cos \omega t + \frac{1}{9} \cos 3\omega t + \frac{1}{25} \cos 5\omega t + \frac{1}{49} \cos 7\omega t + \dots \right)$.

8. $\frac{2}{\pi} \left(\cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \dots + \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots \right)$.

12. $103 \sin x + 3.82 \sin 3x + 0.82 \sin 5x + 0.30 \sin 7x + \dots$.

16. 60 cps, 25.3%; 120 cps, 2.4%.

20. $0.902 \sin(\omega t + 44.9^\circ) + 0.401 \sin(3\omega t + 18.4^\circ) + 0.250 \sin(5\omega t + 11.3^\circ) + 0.181 \sin(7\omega t + 8.1^\circ) + \dots$.

24. (a) $21.2 \cos(\omega t - 45^\circ) + 3.16 \cos 3(\omega t - 23.8^\circ)$. (c) 230 watts.

CAPÍTULO 15

4. $A_{-1} = 0.1125/45^\circ$, $A_0 = 0.159$, $A_1 = 0.1125/-45^\circ$.

8. (a) $Z_n = 1 + jn$. (b) $I_n = 2V_{\max}/jn\pi(1 + jn)$.

(c) $I = -\frac{2V_{\max}}{\pi} \left(\dots + \frac{1}{9+j3} e^{-j\omega_1 t} + \frac{1}{1+j1} e^{-j\omega_1 t} + \frac{1}{1-j1} e^{j\omega_1 t} + \frac{1}{9-j3} e^{j\omega_1 t} + \dots \right)$.

12. $\frac{\tau \sin^2(\omega\tau/2)}{2\pi (\omega\tau/2)^2}$.

CAPÍTULO 16

4. $i = (2.01 \cdot 10^{-3})e^{-12.5 \cdot 10^4 t} \sin(1.66 \cdot 10^6 t)$.

8. El numerador de $Z(s)$ es $(s - s_1)$; s_1 , la raíz, es una fracción racional de R y L o C y es por tanto real.

12. 7.9.

16. Cero en el origen, polo en $-1/RC$; la superficie está en $1/R$ para $s = \infty$ en todas direcciones; $|Y(j\omega)|$ crece desde 0, asintóticamente a $1/R$.

20. 1 250 ohms, 5 ohms, 0.167 mh, 0.0267 μf .

CAPÍTULO 17

4. $F(s) = \frac{s + \alpha}{(s - s_1)(s - s_2)}$; $s_1, s_2 = -\alpha \pm j\omega$.

8. $I(s) = \frac{3}{s + 6} + \frac{12}{s(s + 6)}$; $i(t) = 2 + e^{-6t}$.

12. (d) 10 ma.

16. $e^{-at}(1 - at)$.

20. $3e^{-1414t}(1 - 1414t)$.

CAPÍTULO 18

4. $\frac{-10}{(s + 25 - j139)(s + 25 + j139)}$.

8. (a) $\frac{Ks^3}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4)}$
(b) Tercer orden cero en el origen.

12. $\begin{bmatrix} 7 & 48 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$. Simétrica para $A = D$.

16. (a) 707 ohms, 708 ohms, $-j101$ ohms, (b) 707 ohms.
20. $\gamma = \alpha = 2.634$, $\beta = 0$; $e^\gamma = 13.93$; decibeles = 22.9.

CAPÍTULO 19

4. (a) $8.17/113.4^\circ$, $0.895/-107^\circ$. (b) $1605/-88^\circ$, $560/-4^\circ$. (c) $2.1 + j2.01$, -0.11 , $-j1.88$. (d) 18.2 db, -0.9 db.

8. (a) 619 ohms. (b) 600 ohms.

16. T de paso alto, derivada-n; $n = 0.60$, $k = 700$.

20. Dos elementos en serie, cada uno de 76.4 mh; dos ramas en paralelo, cada una de 50.8 mh, 79.7 μf ; la rama central en paralelo 265 μf .

24. Dos elementos en paralelo, cada uno de 364 μf ; dos circuitos en serie cada uno de 66.9 mh, 243 μf ; la rama central en serie 226 mh.

CAPÍTULO 20

4. $V_{ab} = 173/30^\circ$, $V_{bc} = 173/-90^\circ$, $V_{ca} = 173/150^\circ$ es una respuesta posible.

8. (b) 2 600 watts. (c) 866 watts.

12. $V_{an} = 103.6/-1.1^\circ$; $|V_{ab}| = 179.5$ volts.

CAPÍTULO 21

4. $I_a = 0.372 - j0.078$; $I_b = -0.068 - j0.072$; $I_c = -0.304 + j0.150$.

8. Es posible si la polaridad de la conexión(o del devanado) se invierte en un banco. La razón de vueltas en el Y- Δ n:1, en el Δ -Y, 3n:1.

12. $I_{a1} = 7.05/-1.74^\circ$, $I_{a2} = -3.72/3.28^\circ$, $I_0 = 1.73/15.0^\circ$.

16. $I_{a1} = 0$, $I_{a2} = 20/-90^\circ$, $I_0 = 0$.