



HUGH
HILDRETH
SKILLING

LOS
FUNDAMENTOS
DE LAS
ONDAS
ELÉCTRICAS

HUGH HILDRETH SKILLING

LOS FUNDAMENTOS DE LAS ONDAS ELÉCTRICAS



BUENOS AIRES

EDICIONES LIBRERIA DEL COLEGIO

La segunda edición en inglés de esta obra, que sirvió para hacer la presente traducción, incluye dos importantes mejoras. Una, la de agregar materiales más amplios acerca de la teoría y la aplicación de las ondas eléctricas; otra, la de cambiar las unidades y la notación para adaptar mejor la obra al uso aceptado ya por la mayor parte de las publicaciones recientes.

Los materiales agregados aportan, en efecto, una mayor información acerca de las guías cilíndricas y rectangulares de las ondas y una ordenación nueva con mayor cantidad de datos sobre la reflexión de las ondas, tanto en lo relacionado con las superficies conductoras como en lo relacionado con las dieléctricas y ya se trate de incidencias normales u oblicuas. Han permitido también la revisión del capítulo sobre antenas; la mayor extensión en lo concerniente a la propagación de las ondas en medios semi-conductores; la presentación más racional del potencial, en particular del retardado, y un contenido más sustancial en lo relativo a la reflexión de la ionosfera y de las superficies de tierra.

Los demás cambios que se han introducido se refieren: primero, a la adopción del sistema racionalizado de unidades mks, que es hoy el más comúnmente empleado en la literatura técnica y que ha sido recomendado insistentemente por los que han utilizado la primera edición de este libro; segundo, a la representación de las ondas sinuidales por medio de funciones exponenciales, y tercero, a la incorporación de una mayor cantidad de problemas con el objeto de ilustrar más ampliamente la materia tratada.

En cuanto al autor, basta decir que se trata del Dr. Hugh Hildreth Skilling, que ha formado parte de la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Stanford, desde 1931, y que en la actualidad es Presidente ejecutivo del Departamento de Ingeniería Eléctrica. Ocupó también una cátedra en el Instituto de Tecnología de Massachusetts.

El Dr. Skilling se graduó en la Universidad de Stanford en 1926, obtuvo su grado de M. S. en el Instituto de Tecnología de Massachusetts, y el de Ph. D en la Universidad de Stanford.

HUGH HILDRETH SKILLING

PROFESOR DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
DE LA UNIVERSIDAD DE STANFORD

Los
FUNDAMENTOS
de las
ONDAS ELÉCTRICAS

EDICIONES LIBRERÍA DEL COLEGIO
BUENOS AIRES

*Traducción autorizada del Dr. Oscar Varsavsky
de la segunda edición en inglés, publicada por
John Wiley & Sons, New York.*

*Copyright en los Estados Unidos de Norte
América, H. H. Skilling.*

PRIMERA EDICIÓN
Publicada en Julio de 1952

SEGUNDA EDICIÓN
Publicada en Abril de 1958

IMPRESO EN LA ARGENTINA
*Queda hecho el depósito que previene la
ley. Copyright 1952 Librería del Colegio,
Sociedad Anónima, calle Alsina 500.
Buenos Aires.*

TÍTULO DEL ORIGINAL EN INGLÉS:
“Fundamentals of Electric Waves”

PREFACIO

*En esta segunda edición * se extiende el alcance de Los FUNDAMENTOS DE LAS ONDAS ELÉCTRICAS, ampliando el estudio de algunas de sus aplicaciones más importantes y profundizando algo más la teoría.*

Se incluyen nuevos materiales en relación con las guías de onda; se ha redactado de nuevo el capítulo sobre antenas; se amplía y ordena el estudio de la reflexión en amplia medida; se toma en consideración la propagación de las ondas en los medios semiconductores, y, en un corto capítulo sobre la ionosfera, se trata de la propagación en regiones ionizadas.

Se adopta el sistema de unidades racionalizado, de metro-kilogramo-segundo, llamado sistema Giorgi. Para facilidad de los que están más familiarizados con el sistema centímetro-gramo-segundo, se agregan, en los primeros capítulos, unas notas destinadas a facilitar el cambio de unidades. Es evidente que, en la literatura técnica corriente, los estudiantes van a encontrar que el sistema MKS es ya de uso mucho más común, y, por lo tanto, cuanto antes lo aprendan, tanto más fácil les será el trabajo.

Cuando se escribió la primera edición de este libro en 1941, un curso sobre teoría electromagnética era más bien un lujo para un ingeniero electricista. El progreso experimentado durante la última guerra cambió rápidamente este concepto. No existe ya necesidad alguna de explicar en este prefacio el valor práctico de las ondas centimétricas, ni es menester hablar de la importancia de las guías de onda.

*Este libro ha resultado muy útil para los estudiantes de Ingeniería eléctrica que cursaban su último año de “College”. ** Está preparado para aquellos que no adquirieron conocimiento previo alguno de la teoría electromagnética; todo lo que se requiere es el conocimiento de los cursos generales de física de los “College” y el manejo del cálculo matemático. En este libro se utiliza el aná-*

* Se refiere a la segunda edición en inglés.

** “College” es, en los Estados Unidos, el primer período de la enseñanza universitaria.

lisis vectorial, pero no se considera que el lector haya tenido un conocimiento anterior del mismo.

Los capítulos iniciales de este libro se refieren a electrostática, a la utilización del análisis vectorial y a temas similares que podrían desalentar un poco al lector impaciente. Para algunos resultarán muy atrayentes, y para otros, lo contrario. De cualquier modo, no se podía prescindir de ellos, pues no se pueden concebir ondas sin campos eléctricos y magnéticos, ni se puede comprender lo que es una onda sin estar familiarizado a fondo con los campos básicos.

Las ecuaciones de Maxwell, que aparecen hacia la mitad del libro, se presentan como conclusiones lógicas del trabajo realizado anteriormente. Con su ayuda, la radiación y la propagación de las ondas se tratan rápidamente, lo cual conduce a un breve estudio de las antenas, de las líneas de transmisión y de las guías de onda.

Con cada capítulo se dan problemas que forman parte integrante del mismo, pues muchos de ellos aportan algunas ideas que se dejan sin tratar por completo en el texto. Se disponen en el mismo orden en que se exponen en el párrafo con el cual han de ser utilizados, y, en general, deben ser resueltos uno o dos por día. Además —y esto es muy importante— muchos de los conceptos del libro son nuevos para el lector y sólo dejarán de serle extraños después de una elaboración continuada y repetida de aquéllos. Abraham y Becker, al comienzo de los ejemplos de su libro: "Teoría clásica de electricidad y magnetismo", citan a Jacobo 1: 22. No puedo pensar en ningún consejo mejor.

La preparación de este libro ha comprometido mi gratitud con mucha gente. Ante todo, con Hazel Dillon Skilling, mi esposa, cuyo nombre debería justamente figurar en la primera página como coautora, si no fuera porque ella no lo habría aceptado.

La Universidad de Stanford sigue una política generosa, de amplia visión, que estimula las publicaciones. Este libro es un resultado de esa política, administrada por el Consejero Wilbur, el Presidente Tresidder y el Decano Terman.

Debo agradecer también la colaboración técnica de Terman y de muchos otros autores, incluyendo Stratton, Schelkunoff, Everitt, Page, Mason y Weaver, Abraham y Becker, King, Slater, Barrow, Fink, Albert, Harnwell, Guillemin, Ramo y Whinnery, Pierce, Ballantine, Carson, Chu, Southworth; demasiados para poderlos enumerar.

Recomiendo encarecidamente el estudio teórico y práctico más allá de lo que contiene este libro. La literatura de la teoría electromagnética en sus vinculaciones con la Ingeniería es tan intensa

que no se puede ni siquiera intentar una bibliografía. King da una amplia lista de libros en su obra "Electromagnetic Engineering" (Mc Graw-Hill Book Co., 1945, vol. I, pág. 539). Además de los textos comunes y de los libros de consulta, las revistas técnicas ofrecen, a menudo, particular interés y suministran referencias bibliográficas actualizadas.

Aprovecho la oportunidad para expresar mi agradecimiento a los profesores que me han aconsejado en lo relacionado con esta "revisión". Les estoy agradecido puesto que de este modo he aprovechado su experiencia en más de cincuenta escuelas donde se ha utilizado esta obra. Las sugerencias recibidas me han servido de guía al preparar esta nueva edición.

H. H. S.

CAPÍTULO I

EXPERIMENTOS EN UN CAMPO ELECTROSTÁTICO

Campos. — El estudio de la electricidad comienza comúnmente con la teoría del circuito eléctrico. Se considera que la corriente fluye en un alambre, impulsada, a través de la resistencia, induc- tancia y capacidad, por la diferencia de potencial apropiada. Esta es la manera natural de abordar el tema, pues los circuitos eléctricos son algo tangible y, para la mayor parte de la gente, lo bastante familiares.*

El desarrollo histórico fué, sin embargo, justamente el opuesto: los campos magnético y electrostático eran bien comprendidos antes de haberse desarrollado la teoría de los circuitos y aun antes de que fuera descubierta la ley de Ohm. Lógicamente, también, como se verá más tarde, la teoría de los circuitos eléctricos puede ser considerada como un caso especial de la teoría más general de los campos electromagnéticos.

Hay varias clases de campos. Hay campos vectoriales y campos escalares. Un campo gravitatorio, por ejemplo, es un campo vec- torial. Consideremos el campo gravitatorio dentro de una habita- ción. Si se coloca un cuerpo de la unidad de masa en cualquier punto de la misma, sobre él actúa una fuerza.

Este es un ejemplo muy simple de un campo de fuerzas, pues en él la fuerza es prácticamente la misma en cualquier punto de la habitación y es igual en magnitud y, vertical hacia abajo, en dirección y sentido. Los campos de fuerza son siempre campos vectoriales. Un campo escalar puede ser ilustrado con la tempe- ratura. Un campo de temperatura está determinado si medimos con un termómetro la temperatura en cada punto. En cada punto hay un valor de la temperatura, pero no hay ninguna dirección asociada. Este campo es, por lo tanto, un campo escalar.

Los campos eléctrico y magnético son campos vectoriales. El campo electrostático será considerado primero por ser, en algunos aspectos, el más sencillo.

* Este modo de abordar el tema se emplea en "Transient Electric Cu- rents", McGraw Hill Co, New York, 1937.

12 EXPERIMENTOS EN UN CAMPO ELECTROSTÁTICO

EXPERIMENTO I. — *El campo eléctrico.* Se sabe, por experimentación, que alrededor de cualquier objeto hay un campo de fuerzas que tienen carga eléctrica. Este campo de fuerzas se hace evidente cuando se coloca una partícula exploradora, con una pequeña carga eléctrica, en algún punto de la región cercana al cuerpo cargado. Si se coloca en el punto *a* en la fig. 1, actúa una fuerza \mathbf{F}_a ; en los puntos *b* y *c* actúan las fuerzas \mathbf{F}_b y \mathbf{F}_c .

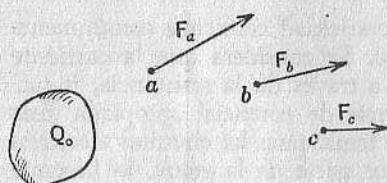


FIG. 1

Si se modifica la carga de la partícula exploradora, las fuerzas que actúan sobre ella cambian proporcionalmente. Este experimento, que llamaremos Experimento I, hace posible dar la siguiente definición de campo electrostático.

La intensidad del campo electrostático en cada punto es igual, en magnitud y dirección, a la fuerza ejercida sobre una pequeña partícula exploradora cargada con la unidad positiva de electricidad que actúa en ese punto.

Simbólicamente:

$$\mathbf{F} = aQE \quad (1)$$

donde \mathbf{F} y \mathbf{E} son la fuerza y la intensidad del campo eléctrico, respectivamente, y Q es la carga de la partícula exploradora. Nótese que esta ecuación no está limitada a ningún punto particular, sino que se aplica a todos los puntos. Es, por lo tanto, una ecuación de campo y, por relacionar la magnitud y la dirección de los dos vectores, es una ecuación de campo vectorial.

La cantidad a es simplemente un factor de proporcionalidad, y su valor depende de las unidades usadas. Una definición apropiada de la unidad de carga eléctrica y de la unidad de intensidad de campo eléctrico hará $a = 1$, de modo que:

$$\mathbf{F} = QE \quad (2)$$

Así Q puede medirse en unidades electrostáticas de cantidad de electricidad y \mathbf{E} en u.e.s. de diferencia de potencial por centímetro *; \mathbf{F} queda expresada en dinas en la ecuación (2). Q puede

* Las palabras inglesas "stacoulomb", "statvolt", no tienen su equivalente en castellano con un solo vocablo. (N. del T.)

EL CAMPO ELÉCTRICO

también expresarse en coulombs, \mathbf{E} en volts por metro, y \mathbf{F} en newtons.

La ecuación (2) define el campo eléctrico.

Una vez definido el campo eléctrico, podemos estudiar sus propiedades. ¿Cómo se dispone en el espacio? Con este propósito haremos nuevos experimentos. Consideraremos tres experimentos con la partícula de prueba. Estos experimentos no están sugeridos como experimentos prácticos para ser hechos en el laboratorio. Sería muy difícil realizarlos. Pero son excepcionalmente útiles, pues sirven como fundamento de la teoría. Aceptemos, para el estudio, que los siguientes experimentos fueron hechos con los resultados que se indican más abajo.

EXPERIMENTO II. — Una partícula exploradora, con carga eléctrica pequeña, se mueve en una región en que hay un campo electrostático. Se encuentra que cuando la partícula recorre una curva cerrada, de modo que vuelva al punto de partida, no ha recibido ni producido trabajo.

En la fig. 2, por ejemplo, una partícula *a* puede ser movida a lo largo de la trayectoria indicada con línea punteada. Mientras la partícula se aleja del cuerpo cargado, fuente del campo eléctrico (como está indicado por las flechas \mathbf{E}), recibe el trabajo realizado por el campo eléctrico. Pero cuando la partícula vuelve hacia el cuerpo cargado, siguiendo la otra parte de la trayectoria indicada, debe hacer el mismo trabajo para moverse en contra de la fuerza del campo.

Se notará que esta conclusión está de acuerdo con el principio de conservación de la energía. Si la partícula volviera a su punto inicial con un exceso de energía, podría recorrer nuevamente la trayectoria, y así sucesivamente, ganando cada vez un poquito de energía sin la correspondiente pérdida en otra parte del sistema.

Esto haría posible el movimiento continuo, que es contrario al principio de conservación de energía. Es igualmente imposible que la partícula vuelva a su punto inicial con falta de energía, pues, suponiendo que no hay fricción, la energía total del sistema habría disminuido.

La conclusión del Experimento II es completamente independiente de la forma de la trayectoria seguida por la partícula de exploración; puede ser circular, elíptica, cuadrada o de cualquier

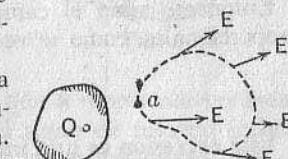


FIG. 2

14 EXPERIMENTOS EN UN CAMPO ELECTROSTÁTICO

otra forma cerrada. La conclusión es también independiente del origen del campo eléctrico, que puede radicar en un cuerpo cargado, o en un número de cuerpos cargados, o en una carga que esté difundida en el espacio. La carga que produce el campo eléctrico no debe cambiar en ninguna forma mientras la partícula está recorriendo su circuito completo, pues se trata de un experimento electrostático; se deduce que la carga de la partícula exploradora debe ser tan pequeña que su presencia no altere apreciablemente la distribución de la carga principal.

Como la energía es igual al producto de fuerza por distancia, y la energía total es la sumatoria o integral de las energías individuales de cada incremento de distancia a lo largo de la trayectoria cerrada, se sigue que:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (3)$$

Entonces, como el campo de fuerza y el campo eléctrico son proporcionales, como se ve en la ecuación (2), se obtiene:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (4)$$

Esta expresión es una integral lineal, representando s la distancia a lo largo de la curva de integración. El pequeño círculo sobre el signo de integral indica que la integración debe efectuarse a lo largo de una trayectoria cerrada. La anotación será explicada más ampliamente en el capítulo II.

EXPERIMENTO III. — Una superficie cerrada está ubicada en el espacio. Puede tener cualquier forma: esférica, elipsoidal, cúbica o irregular, pero debe ser completamente cerrada; no debe ser, por ejemplo, una esfera con un agujero en ella. Se trata de una superficie puramente ideal y se usa solamente para aislar el espacio interior del exterior.

Elijamos la superficie ideal de modo que no corte ningún material líquido ni sólido. (Esta es una restricción que será quitada más tarde, pero por ahora simplifica la discusión.) Sería mejor, desde el punto de vista teórico, que la superficie ideal no cortara ninguna sustancia material, incluso el aire, pero el aire afecta los resultados del Experimento III en menos de un décimo por ciento y esto es usualmente despreciable.

El Experimento III se hace ahora por medio de la partícula de prueba, midiendo la intensidad del campo eléctrico en todos los puntos de la superficie cerrada. Esto puede ser hecho dividiendo

EL CAMPO ELÉCTRICO

15

la superficie en un número muy grande de pequeñas secciones, como en la fig. 3, que tienen cada una un área: da . Se determina luego la componente del campo eléctrico normal al elemento de área: da . Si la componente normal está dirigida hacia fuera, se llama positiva, y si está dirigida hacia dentro, negativa. Se multiplican luego todas las componentes normales por sus respectivas áreas, sumándose los resultados, como en la expresión (5). Cuando se ha hecho este experimento con todas las superficies posibles, con la variedad más grande posible, se llega a la conclusión de que la sumatoria descripta anteriormente es proporcional a la carga encerrada dentro de la superficie considerada. Si ϵ_0 es constante y Q es la carga dentro de la superficie, tendremos:

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot da = Q \text{ (en el vacío)} \quad (5)$$

Esta es una integral superficial, en la que a representa un área. El pequeño círculo que aparece sobre el signo de integral indica que la integración debe hacerse sobre una superficie cerrada, como ya se ha dicho.

Si en la figura 3 la sumatoria de la componente normal de \mathbf{E} sobre toda la superficie es cero, se deduce que no hay carga eléctrica dentro de la superficie; si hay alguna carga positiva, hay también una cantidad igual de carga negativa. Si la sumatoria es distinta de cero, hay carga eléctrica dentro de la superficie y la cantidad de carga es proporcional a la integral del campo eléctrico sobre la superficie, como lo indica la fórmula 5.

El valor de ϵ_0 depende de las unidades con que se miden la intensidad del campo, el área y la carga: * Usando el sistema práctico, con \mathbf{E} en volt por metro, a en metros cuadrados y Q en coulomb, ϵ_0 es muy aproximadamente $\frac{10^{-9}}{9 \cdot 4\pi}$, o, más precisamente, $8,855 \times 10^{-12}$.

* El sistema comúnmente adoptado cuando se trabaja en electrostática es el "electrostático cgs" (centímetro-gramo-segundo). Este sistema emplea la unidad electrostática de diferencia de potencial, de intensidad, de resistencia, etc. El sistema práctico MKS (metro-kilogramo-segundo) emplea relativamente las unidades del volt, amper y ohm. Todas las ecuaciones de

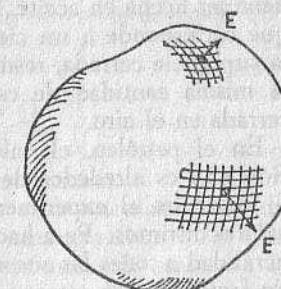


FIG. 3

16 EXPERIMENTOS EN UN CAMPO ELECTROSTÁTICO

EXPERIMENTO IV. — Repitamos ahora el experimento III, pero esta vez midiendo la intensidad del campo eléctrico sobre una superficie ideal de aceite. Como antes, la intensidad del campo se mide determinando la fuerza que actúa sobre la partícula exploradora; pero, mientras en el Experimento III la partícula cargada estaba en el aire o, estrictamente, en el vacío, ahora cada medición debe ser hecha en aceite. El valor de la integral de la ecuación (5), que corresponde a un cierto valor de la carga eléctrica dentro de la superficie cerrada, resulta ser distinto del valor obtenido cuando la misma cantidad de carga estaba encerrada en una superficie cerrada en el aire.

En el petróleo, el valor experimental obtenido para la ecuación (5) es alrededor de la mitad del valor obtenido en el aire. Si se repite el experimento con otras sustancias, se encontrarán valores distintos. Para hacer que la ecuación (5) se aplique con generalidad a todas las sustancias, es necesario incluir en la ecuación un factor que es característico del material en el cual se efectúan las mediciones. Este factor, que se expresará por la letra κ , se llama la constante relativa dielectrífica (a veces "capacidad inductiva específica") del material.

Tenemos, por lo tanto:

$$\kappa\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = Q \quad (6)$$

El factor κ se llama relativo porque muestra cuánto menores son las fuerzas electrostáticas en un medio dado de lo que son en el vacío. El valor de κ depende principalmente de la naturaleza del material, pero cambia algo con la temperatura y con otras condiciones físicas. Para casi todos los aceites derivados del petróleo su valor está entre 2 y 2,5. En el aceite de semillas o en el aceite de oliva, su valor es alrededor de 3. En el alcohol etílico, a la tem-

Este capítulo se aplican igualmente con cualquiera de los dos sistemas. Las unidades se estudian más adelante, en las págs. 19 y sig.

En lo que se refiere a unidades debe hacerse ahora otra elección entre un sistema "racionalizado" de ecuaciones y uno "no racionalizado". Ambos sistemas difieren en el factor 4π en la definición de ϵ_0 . La ecuación 5 está racionalizada; la no-racionalizada, es:

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 4\pi Q \quad (5a)$$

Las igualdades "racionalizadas" pueden usar unidades cgs o MKS; lo mismo que las "no-racionalizadas". El sistema cgs "no racionalizado" es el Gaussiano. El sistema mks "racionalizado" es el sistema Giorgi. El valor numérico de ϵ_0 en la ecuación 5a, en el sistema Gaussiano, es la unidad.

FLUJO ELECTROSTÁTICO

17

peratura corriente de una habitación, su valor es alrededor de 25; en agua pura destilada, alrededor de 80. En el vacío, κ es 1, y en el aire, alrededor de 1,0006.

Para concluir el experimento IV vamos a hacer mediciones sobre superficies de sustancias distintas. La superficie de integración puede estar parte en aire y parte en aceite. El valor de κ debe ser cambiado al pasar de un material a otro y la ecuación (6) se escribe más propiamente así:

$$\oint \kappa\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = Q \quad (7)$$

pues κ varía durante el proceso de integración.

Frecuentemente, la constante κ que está vinculada a las características del medio y la constante ϵ_0 que se refiere a las dimensiones y unidades, están combinadas en una sola constante ϵ .

Con $\epsilon = \kappa\epsilon_0$ tenemos: *

$$\oint \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = Q \quad (8)$$

Flujo electrostático. — Con el objeto de introducir el flujo electrostático, consideremos un vector \mathbf{D} definido de la siguiente manera:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (9)$$

Usando este nuevo símbolo, transformamos la ecuación (8) en:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q \quad (10)$$

En que se expresa el producto de \mathbf{D} por un área. \mathbf{D} es la densidad de flujo eléctrico y el producto de \mathbf{D} por un área es el flujo eléctrico.

Por definición:

$$\text{Flujo electrostático} = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} \quad (11)$$

* En unidades de Gauss, con $\epsilon_0 = 1$ y la ecuación no-racionalizada 5a;

$$\oint \kappa \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 4\pi Q$$

(La notación de esta expresión se explica en el capítulo siguiente, pero su significado surge claramente de su análisis.) En la figura 4 se muestra que la densidad de flujo del campo es normal a la superficie, y el flujo que pasa por ella es simplemente D veces el área. Si el campo no es normal a la superficie, el flujo es igual al producto del área por la componente normal del campo. En el caso extremo, con D paralelo a la superficie, no hay componente normal y, por lo tanto, el flujo no penetra en la superficie.

Con esta definición de flujo, el miembro de la izquierda de la ecuación 10 es el flujo que pasa a través de la superficie cerrada

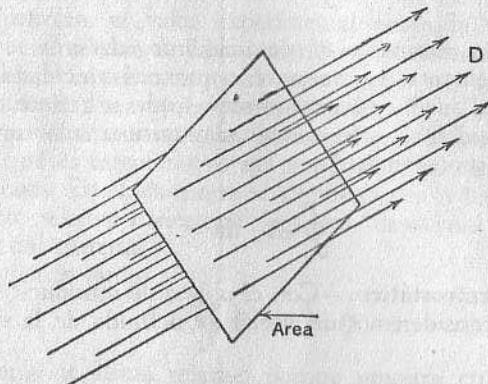


FIG. 4

de integración. La ecuación es, entonces, la formulación matemática de la siguiente afirmación: el flujo que pasa a través de una superficie cerrada es igual* a la carga eléctrica contenida dentro de la superficie.

Se pueden dibujar las líneas de flujo (o al menos imaginarlas) saliendo de las cargas positivas, pasando a través del espacio, y terminando en las cargas negativas. Si cada línea representa la unidad de flujo, habrá una línea saliendo de cada unidad de carga positiva y una terminando en cada unidad de carga negativa. En una zona del espacio donde no hay cargas eléctricas, las líneas de flujo deben ser continuas, pues no pueden ni nacer ni terminar en ninguna parte.

* En unidades de Gauss $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = 4\pi Q$, y de la unidad de carga salen 4π líneas de fuerza.

Cuando las líneas de flujo pasan de una carga $+Q$ a una $-Q$, como en la figura 5, todas las líneas de fuerza atraviesan cualquier superficie que rodee completamente a la carga $+Q$. La superficie cerrada está indicada por la línea punteada a . Contando las líneas de flujo que atraviesan la superficie es posible saber cuánta carga hay dentro de la superficie. Las líneas que salen de la superficie se cuentan como positivas. Las que entran, como negativas. Por lo tanto, dentro de la superficie b no hay cargas, pues la suma al-

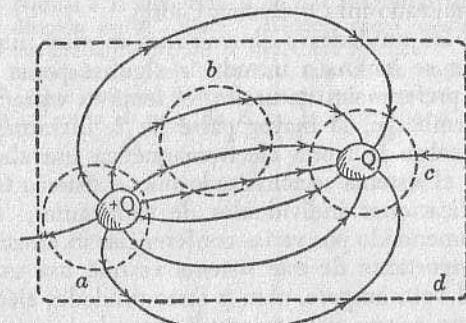


FIG. 5

gebraica de las líneas que atraviesan la superficie es nula. Dentro de c la carga es negativa. Dentro de d es nula la carga total: la suma algebraica de las líneas de flujo a través de ella es nula. La carga positiva dentro de ella es igual a la negativa.

Unidades. — Además de Q , carga, tenemos que introducir ahora cinco cantidades eléctricas. Será útil mencionarlas.

E es la intensidad del campo eléctrico; una magnitud vectorial, determinada por la fuerza que actúa sobre la partícula de prueba. En unidades prácticas se mide en volt por metro.

D es la densidad de flujo eléctrico; una magnitud vectorial, determinada por la dirección y densidad de las líneas de flujo que nacen en una carga eléctrica y siguen la dirección del campo eléctrico. En unidades prácticas se mide en culomb por metro cuadrado.

ϵ es la relación de D a E . Es distinta en diferentes sustancias. Se llama constante dieléctrica o permeabilidad.

ϵ_0 es la relación de D a E en el vacío. En unidades prácticas, su valor es $8,855 \times 10^{-12}$. Se llama la constante dieléctrica absoluta, o permeabilidad, del espacio libre.

κ es ϵ/ϵ_0 . Se llama la constante dieléctrica relativa, o capacidadductiva específica, y es característica del material dieléctrico.

Las "Unidades prácticas" a que nos hemos referido en este capítulo incluyen el volt, el ampere, el culomb, el farad, el henry, el ohm, el watt y el ampere-vuelta, con la distancia en metros, la masa en kilogramos y el tiempo en segundos. La unidad de trabajo es el joule (o watt por segundo), y la unidad de fuerza es el newton (o joule por metro). Un newton es igual a 10^3 dinas, que es una fuerza de alrededor de 102,0 gramos o también $3\frac{1}{2}$ onzas (este libro, en su edición original, pesa alrededor de 6 newtons). Este sistema, que comprende las unidades eléctricas prácticas, es el sistema racionalizado mks o sistema Giorgi.

El estudio de las unidades y dimensiones es muy interesante *. Como cada autor se inclina a introducir algunas pocas novedades para seguir sus preferencias naturales, el tema es extremadamente complejo. Sin embargo, la mayor parte de la literatura de ingeniería eléctrica sobre la teoría electromagnética usa ahora unidades prácticas en el sistema racionalizado mks o sistema Giorgi, con o sin las modificaciones individuales de cada autor. El sistema mks ha sido recomendado por varias conferencias internacionales **.

La ventaja importante de este sistema es que usa unidades familiares como el volt, ampere, ohm y otras unidades eléctricas. La desventaja es que asigna valores peculiares a la constante dieléctrica y a la permeabilidad del vacío. En todos los sistemas ocurren inconvenientes, pero el sistema Giorgi está dispuesto inteligentemente de modo que las potencias de 10, los factores 3×10^{10} y la mayoría de los factores 4π quedan relacionados en ϵ_0 y μ_0 . Una vez que se llega a dominar el manejo de estos valores incómodos, desaparecen todos los inconvenientes.

La información sobre los campos electrostáticos, que será necesaria en ulteriores capítulos, puede ser deducida de las ecuaciones (2), (4) y (8) por métodos matemáticos, para lo cual lo más conveniente es el análisis vectorial. Es útil, por lo tanto, exponer algunas relaciones matemáticas generales del cálculo vectorial antes de continuar con el estudio del campo eléctrico.

* Para un resumen excelente véase "Physical Units and Standards", por Ernst Weber, sección 3 de *Handbook of Engineering Fundamentals*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1936.

** "I.E.C. Adopts MKS System of Units", Arthur E. Kennelly, *Trans. AIEE*, volumen 54, 1935, págs. 1373-1384.

"Recent Developments in Electrical Units", Arthur E. Kennelly, *Electrical Engineering*, volumen 58, febrero, 1939, págs. 78-80.

"Revision of Electrical Units", E. C. Crittenden, *Electrical Engineering*, volumen 59, abril, 1940, págs. 160-163.

PROBLEMAS

1. Un cuerpo cargado positivamente con 1000 micromicroculombs (100×10^{-12}) está en un campo eléctrico de 5000 volts por centímetro. ¿Cuál es la fuerza eléctrica que se ejerce sobre el cuerpo en newtons? ¿Cuál en miligramos?

2. La intensidad del campo eléctrico se mide en todos los puntos de una superficie esférica de 10 cm. de radio en el aire. Se encuentra que es en todas partes normal a la superficie y de una magnitud igual a 10.000 volts por metro, dirigida hacia afuera. ¿Cuánta carga eléctrica (en microcoulombs) está contenida dentro de la superficie esférica?

3. ¿Qué cantidad de flujo eléctrico sale de la superficie esférica del problema 2? ¿Qué cantidad obtendría si tuviera la misma carga en aceite de petróleo? ¿Cuál sería el valor de E en la superficie si el medio es aceite de petróleo?

CAPÍTULO II

ANÁLISIS VECTORIAL

Multiplicación de vectores. — Los vectores son útiles por varias razones. Una fuerza puede ser representada por un vector. Lo mismo se puede hacer con una distancia. Si una fuerza \mathbf{F} actúa sobre un cuerpo mientras ese cuerpo se mueve en una distancia s , como en la figura 6, el trabajo efectuado por la fuerza es el producto de la fuerza por la distancia. Pero no se trata de un simple producto algebraico, pues el ángulo entre la dirección de la fuerza y la dirección del trabajo es importante. Si el módulo de la fuerza está representado por F , el módulo de la distancia por s , siendo el ángulo de sus direcciones θ , entonces el trabajo efectuado es

$$W = F \cdot s \cos \theta \quad (12)$$

Nótese que las cantidades vectoriales para la fuerza y la distancia se escriben \mathbf{F} y \mathbf{s} , mientras que sus magnitudes escalares son F y s . Este sistema de notación es el que se adopta generalmente y será usado en el presente estudio.

Como el tipo de multiplicación indicado en la ecuación (12) es muy común en problemas físicos, recibe un nombre especial en análisis vectorial. Cuando dos vectores se escriben con un punto entre ellos, se indica una multiplicación de este tipo. Por lo tanto, la fórmula (12) puede ser escrita:

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} \quad (13)$$

En el caso general de dos vectores cualquiera \mathbf{A} y \mathbf{B} el producto escalar se define de la siguiente manera:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad (14)$$

Como en el caso considerado del trabajo en la ecuación 13, esta clase de producto da siempre una cantidad escalar, aunque las

cantidades multiplicadas sean vectores. Por esta razón se le llama producto escalar.

Hay otro tipo de multiplicación de vectores que se encuentra a menudo en problemas físicos. El ejemplo más simple lo da el cálculo de un área, como en la figura 6b, donde los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} son los lados de un paralelogramo. El área del paralelogramo es:

$$\text{Area} = AB \sin \theta \quad (15)$$

El mismo tipo de multiplicación de vectores aparece en la fórmula que da la fuerza que actúa sobre un conductor que es recorrido por una corriente en un campo magnético. En la figura 6c, una corriente de I amperes (una cantidad escalar) circula en un conductor de la dirección, longitud y sentido dados por el vector \mathbf{L} . El campo magnético está representado, en módulo, dirección y sentido por el vector \mathbf{B} . La fuerza ejercida sobre el conductor está representada

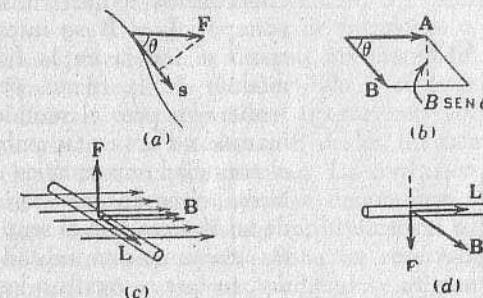


FIG. 6

por el vector \mathbf{F} , que es perpendicular a \mathbf{L} y a \mathbf{B} . Esto define su dirección, y su magnitud estará dada por

$$F = ILB \sin \theta \quad (16)$$

El sentido de la fuerza es hacia arriba en la figura, de acuerdo con la regla para las fuerzas en un campo magnético.

Como este tipo de multiplicación es muy común, recibe también un nombre especial en análisis vectorial. Los vectores \mathbf{L} y \mathbf{B} se escriben con un signo de multiplicación entre ellos, de modo que la fórmula (16) se escribe usualmente:

$$\mathbf{F} = IL \times \mathbf{B} \quad (17)$$

Este tipo de operación es lo que se conoce como producto cruzado o producto vectorial. Este último nombre resulta del hecho que el resultado de este tipo de multiplicación, tal como la fuerza en la fórmula (17), es también un vector.

No resulta inmediato que el área de la figura 6b sea una magnitud vectorial. Pero una superficie tiene, evidentemente, una orientación en el espacio y, por convención, un área está representada por un vector cuya dirección es normal a la superficie, y con una longitud proporcional al área. Por lo tanto, el área de la superficie 6b se representa por un vector proporcional al plano del papel.

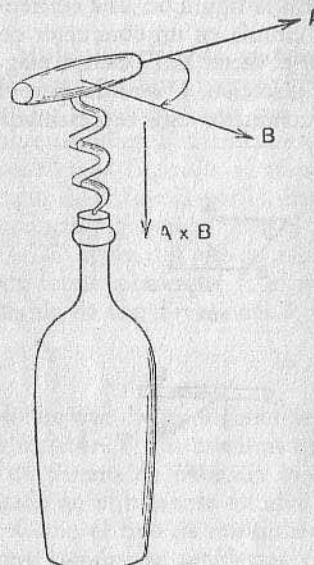


FIG. 7

un poco engorroso. Es costumbre recordar la relación por una cierta disposición de los dedos de la mano derecha o por la rotación de un tornillo a derechas o un simple sacacorchos.

El producto de dos vectores $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es también un vector de magnitud $AB \sin \theta$ en la dirección normal al plano que contiene ambos factores y de un sentido tal que si un tornillo a derechas o un sacacorchos (véase figura 7) girara de \mathbf{A} a \mathbf{B} (en un ángulo menor de 180°) avanzaría en la dirección del producto.

Surge naturalmente una cuestión con respecto al sentido del vector resultante, tal como el \mathbf{F} en la fórmula 17. ¿Qué hay en la fórmula interior que indique si la fuerza está dirigida hacia arriba o hacia abajo? Si, por ejemplo, \mathbf{L} y \mathbf{B} se intercambiaran, como se indica en la figura 6d, el módulo de la fuerza permanecería inalterado, pero el sentido se habría invertido. Para evitar ambigüedad en el enunciado matemático de este problema, el producto vectorial se define de tal manera que el sentido del vector resultante está indicado por el orden en que se escriben los dos vectores componentes del producto.

Este es un método útil y completamente satisfactorio para definir la dirección del vector producto. Expressar con palabras la relación que define el producto vectorial es todavía

Según esta regla, se ve que la ecuación (17) da correctamente la dirección de la fuerza en las figuras 6c y 6d y el vector $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ que representa el área en la figura 6b penetra en la hoja de papel. Nótese, sin embargo, que el producto $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$, aplicando la misma regla, es un vector dirigido hacia afuera de la hoja de papel. Esto es simplemente una ilustración de la regla general que establece:

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (18)$$

Se ve que esta operación no cumple la propiedad commutativa del álgebra ordinaria que establece que $ab = ba$. Es natural preguntarse qué justificación existe para rechazar una ley fundamental del álgebra. Una discusión sobre este asunto puede ser útil.

Todas las operaciones del álgebra, incluyendo la multiplicación, se definen para ser aplicadas con números. La regla para la multiplicación es particularmente sencilla para los enteros; por ejemplo, 7 por 5 equivale a sumar cinco veces el número 7 (o, por la ley commutativa, siete veces el número 5). Esta regla se extiende fácilmente a la multiplicación de fracciones y, por una convención adicional con respecto al signo, sirve también para números negativos. Sin embargo, no tiene sentido si se la trata de aplicar a vectores. Existen, empero, ciertas operaciones con vectores tan comúnmente usadas que es necesario darles un nombre. Dos de estas operaciones fueron ya expuestas. La confusión que surge se origina en el hecho de que ambas se denominan multiplicación. Es dudoso que sea correcto llamar multiplicación a cualquiera de ellas. Probablemente ese nombre deba ser reservado para el producto de dos cantidades escalares, pudiéndose asignar nuevos nombres a las operaciones vectoriales conocidas (aunque impropiamente) como multiplicaciones vectoriales y que llevan, en un caso, al producto escalar y, en el otro, al producto vectorial. La nomenclatura está tan difundida que no puede ser evitada *.

* Se define todavía otra clase de multiplicación con cantidades complejas. Esta es la operación, según la cual,

$$(Ae^{j\alpha})(Be^{j\beta}) = AB e^{j(\alpha+\beta)}$$

Esta ley es familiar a los que estudian los fenómenos de corriente alterna, pues es muy usada debido a una convención que hace posible representar cantidades reales, que varían sinusoidalmente, por medio de cantidades complejas. Las cantidades* complejas, que son escalares, pueden representarse por medio de vectores que giran en el campo complejo. Este tipo de multiplicación es un tercer tipo de multiplicación vectorial, completamente distinto de los otros dos.

Se ve ahora claro que, por no ser los productos vectoriales multiplicaciones algebraicas y estar definidos independientemente, no están obligados a seguir las leyes del álgebra. No es, por lo tanto, sorprendente que la propiedad conmutativa no se aplique al producto vectorial y que se deba señalar que la propiedad conmutativa se aplica en el caso del producto escalar, definido por la ecuación (14).

Vectores unitarios. — No se ha dado todavía una expresión única del producto vectorial. Puede ser usada la siguiente, aunque requiere una breve explicación:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = nAB \sin \theta \quad (19)$$

En esta expresión, A y B son los módulos de \mathbf{A} y \mathbf{B} , θ es el ángulo entre los dos vectores, y n es un vector de unidad de longitud en una dirección normal al plano determinado por los otros dos vectores y con el sentido definido de acuerdo a las reglas arriba mencionadas.

El miembro de la derecha de la fórmula (19) presenta un modo de indicar un vector. La magnitud del producto vectorial está dada por $AB \sin \theta$, pero esta expresión no da ninguna dirección ni sentido. El vector unitario n sirve para definir una dirección normal a los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} y, por lo tanto, determina la dirección del producto vectorial. El artificio de emplear un vector unitario para determinar una dirección es sumamente útil.*

El uso más común de vectores unitarios para designar direcciones es el que se hace en relación con los ejes de coordenadas. En la figura 8 se representan los tres ejes señalados con X , Y y Z . La

* Debe señalarse que ninguna fórmula puede ser correcta a menos que ambos miembros sean cantidades escalares o ambos miembros cantidades vectoriales. Una magnitud vectorial no puede ser igualada a una magnitud escalar. Por esto, la ecuación (19) no sería correcta en ausencia del símbolo n , pues sin él el miembro de la izquierda sería un vector y el de la derecha una cantidad escalar.

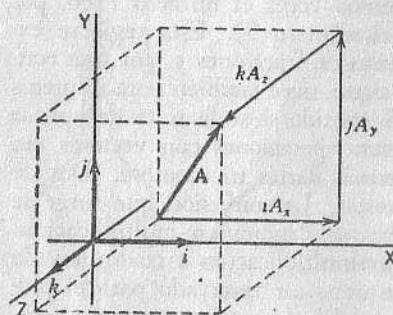


FIG. 8

posición de cualquier punto en el espacio se puede definir con referencia a estos ejes en la forma usual de la geometría analítica. Análogamente, la longitud y dirección de cualquier vector puede ser expresada dando las proyecciones de dicho vector sobre cualquiera de los tres ejes. Cualquier vector \mathbf{A} puede ser descompuesto en tres componentes mutuamente perpendiculares (como en la fig. 8): A_x en la dirección x , A_y en la dirección y , A_z en la dirección z .

A_x es una cantidad escalar. Representa la longitud de la componente según x de \mathbf{A} . A_y y A_z son también cantidades escalares. Por lo tanto, no es correcto decir que el vector \mathbf{A} es igual a la suma de A_x , A_y y A_z , pero sí lo es decir que \mathbf{A} es igual a la suma de un vector en la dirección x de longitud A_x , de un vector en la dirección y de longitud A_y , y de un vector en la dirección z de longitud A_z .

Esta forma de enunciar la igualdad es bastante difícil, y puede ser simplificada definiendo los tres vectores unitarios de la siguiente manera: El vector i es un vector de unidad de longitud en la dirección x (véase fig. 8); el vector j es un vector de unidad de longitud en la dirección y ; el vector k es un vector de unidad de longitud en la dirección z . Cuando sea necesario hablar de un vector en la dirección x de longitud A_x diremos simplemente " iA_x ", que expresa exactamente la misma idea. Por lo tanto, es correcto escribir:

$$\mathbf{A} = iA_x + jA_y + kA_z \quad (20)$$

Esta notación será usada frecuentemente.

Los productos que utilizan estos vectores unitarios se presentan con frecuencia y merecen especial consideración. Consideremos el producto $i \cdot i$; ambos i tienen longitud unitaria, y el ángulo entre ellos es cero. Por lo tanto, de acuerdo con la fórmula (14), el producto de ambos es la unidad: un escalar. Consideremos ahora $i \cdot j$. El ángulo entre estos dos vectores es de 90° . Por la ecuación (14) el producto escalar es cero.

Consideremos el producto vectorial $i \times j$. Por la ecuación (19) el producto será un vector de unidad de longitud normal a estos dos vectores y con el sentido en que avanzaría un tornillo a derechas o sacacorchos que girara de i a j . Se ve inmediatamente en la figura 8 que este producto es igual a k . Por lo tanto, $i \times j = -k$.

Como el ángulo de un vector consigo mismo es cero, se deduce de la fórmula (17) que $i \times i = 0$, como puede verse en la figura

ra $6b$, en la que el área del paralelogramo tiende a cero cuando los dos vectores tienden a ser paralelos.

La tabla parcial de los productos de vectores unitarios es la siguiente:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 & \mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0 & \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0 & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \end{array} \quad (21)$$

El sistema de coordenadas es esencial en relación con el análisis vectorial, por lo que será útil expresar algunas de las operaciones más importantes de análisis vectorial en función de las componentes cartesianas. (Un sistema de coordenadas de "mano derecha", como el de la fig. 8.)

El producto escalar de dos vectores cualesquiera, \mathbf{A} y \mathbf{B} , puede ser desarrollado de la siguiente manera:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (22)$$

Para ver que esto es cierto reemplazemos \mathbf{A} y \mathbf{B} por su expresión (20) y multipliquemos término a término:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (\mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z) \cdot (\mathbf{i}B_x + \mathbf{j}B_y + \mathbf{k}B_z) \\ &= \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}A_x B_x + \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}A_y B_y + \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}A_z B_z \\ &\quad + \mathbf{i} \cdot \mathbf{j}A_x B_y + \mathbf{i} \cdot \mathbf{k}A_x B_z + \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}A_y B_x + \mathbf{j} \cdot \mathbf{k}A_y B_z \\ &\quad + \mathbf{k} \cdot \mathbf{i}A_z B_x + \mathbf{k} \cdot \mathbf{j}A_z B_y \end{aligned} \quad (23)$$

Los primeros tres términos de este desarrollo dan el miembro de la derecha de la fórmula (22), pues el producto escalar de un vector por sí mismo da la unidad. Los otros seis términos desaparecen porque los productos escalares de vectores perpendiculares son nulos.

Como un ejemplo físico del desarrollo del producto escalar en la forma señalada por la fórmula (22), consideremos el producto de la fuerza \mathbf{F} por la distancia \mathbf{S} , tal como se indica en la figura 9. Los ejes de coordenadas se eligen de tal modo que ambos vectores estén en el plano $X-Y$. Con esto, el problema se reduce a uno bidimensional. Los vectores indicados tienen las componentes F_x y F_y ; S_x y S_y . Por razones físicas es evidente que la componente F_x de la fuerza que actúa en la distancia S_y no representa

ningún trabajo, pues los ejes son perpendiculares. Lo mismo es cierto para la otra componente de la fuerza que actúa en la dirección x . Pero la fuerza F_x , aplicada en la dirección x en una longitud S_x , da un trabajo igual a $F_x S_x$. La otra componente, aplicada en la dirección y , da un trabajo $F_y S_y$. Por consiguiente, sólo se retienen estos últimos términos del producto escalar, pues los productos de componentes según distintos ejes son nulos y no contribuyen al valor del producto escalar.

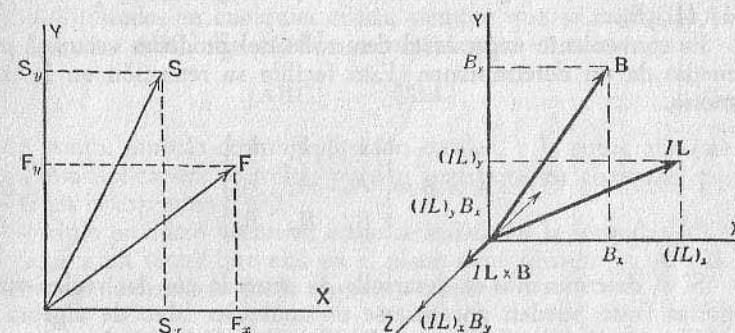


FIG. 9

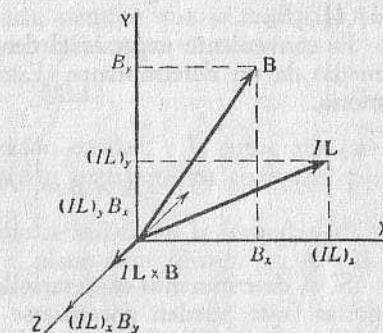


FIG. 10

El producto vectorial o producto cruzado puede ser desarrollado de una forma similar:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \mathbf{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \mathbf{k}(A_x B_y - A_y B_x) \quad (24)$$

La demostración de esta fórmula es paralela a la de la fórmula (22).

Una ilustración física del significado de los términos se encuentra en la ecuación (24) al considerar un elemento de corriente (IL) en un campo magnético \mathbf{B} . La fuerza que actúa sobre el conductor es, como sabemos, $IL \times \mathbf{B}$. Elegimos los ejes de coordenadas de modo que ambos vectores estén contenidos en el plano $X-Y$, como en la figura 10. La componente del campo magnético según el eje x no actúa sobre la misma componente del vector intensidad, pues un campo magnético no ejerce ninguna fuerza sobre una corriente paralela a su dirección. Pero sobre $(IL)_x$ actúa una fuerza, debida a B_y , que está dirigida en la dirección del eje Z . IL_y y B_x dan una fuerza dirigida, según el eje Z , en la dirección

negativa. En consecuencia, la fuerza total ejercida será la suma algebraica de estas dos, es decir:

$$(IL)_x B_y - (IL)_y B_x \quad (25)$$

Se ve que esta expresión corresponde al último término de la fórmula (24). Los otros dos términos se obtienen razonando de una manera análoga si (IL) y \mathbf{B} tienen también componentes en la dirección Z. En el desarrollo del producto vectorial no aparecen productos con iguales subíndices, como, por ejemplo: $(IL)_x B_x$ o $(IL)_y B_y$.

Es conveniente expresar el desarrollo del producto vectorial por medio de un determinante. Esto facilita su retención en la memoria.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{i} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (26)$$

Si el determinante se desarrolla de acuerdo con las reglas ordinarias (que pueden encontrarse en cualquier libro de álgebra o en las secciones matemáticas de los manuales), resulta una expresión idéntica a la (24).

Productos triples. — El producto vectorial de dos vectores es, a su vez, un vector que puede ser multiplicado por otro vector.

La segunda multiplicación puede ser un producto vectorial o escalar, es decir:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \quad (27)$$

$$o \quad (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} \quad (28)$$

Estos dos productos son, evidentemente, distintos, y deben ser considerados uno a uno.

Consideremos primero la expresión (27). Si \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} son tres vectores cualesquiera, como en la figura 11, el producto escalar triple que figura en (27) es el volumen del paralelepípedo indicado, cuyas aristas son \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} . Esto es evidente cuando se piensa que $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es el área de la base superior del paralelepípedo, y que $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ es el producto de esta área por la componente normal de la arista \mathbf{C} .

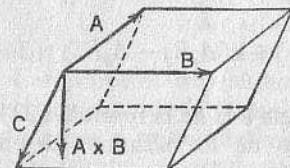


FIG. 11

Se encontrará el volumen del mismo paralelepípedo cuando se multiplique el área de la cara determinada por los vectores \mathbf{B} y \mathbf{C} por la componente normal de \mathbf{A} . En consecuencia, es válida la siguiente igualdad:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} \quad (29)$$

Cualquiera de estos dos términos es igual a $(\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$.

Este producto triple se escribe a veces $[\mathbf{ABC}]$. Esta notación es adecuada, pues un rápido estudio mostrará que los vectores pueden ser multiplicados en cualquier orden, siempre que se mantenga el orden cíclico \mathbf{ABC} . En cambio, se notará que:

$$[\mathbf{ABC}] = -[\mathbf{CBA}] \quad (30)$$

El punto, símbolo de multiplicación escalar, y la equis, símbolo de la multiplicación vectorial, pueden insertarse en cualquier posición en la expresión (30).

El triple producto vectorial, como se indica en la fórmula (28), da lugar a un vector que está en el plano determinado por \mathbf{A} y \mathbf{B} . Puede ser desarrollado de la siguiente manera:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \quad (31)$$

No damos la prueba de esta igualdad, pero se obtendría muy fácilmente desarrollando ambos miembros en coordenadas rectangulares.

Campos vectoriales. — Los campos vectoriales y escalares pueden ser representados en distintas formas. La representación gráfica de estos campos es útil para entender su comportamiento matemático.

Los mapas acotados son particularmente interesantes, pues representan un campo escalar: en función de la altura. La figura 12, por ejemplo, representa una montaña, singularmente simétrica, que alcanza un máximo en el centro del dibujo. La cota, representada en un mapa acotado, es una magnitud escalar. Cada punto está a una elevación de tantos metros. Uniendo todos los puntos de igual altura por líneas de igual cota, la forma de la superficie de la tierra queda completamente determinada.

Consideremos una bolita colocada en la punta de la montaña de la figura 12. Rodará hacia abajo, en cualquier parte que se la coloque sobre la pendiente; será necesaria una fuerza para mantenerla en esa posición, lo que define un campo de fuerzas vec-

torial. En la figura 13a, otra representación de la montaña, se dibujan unas flechas para indicar la dirección e intensidad de la fuerza necesaria para mantener la bolita en cada punto. Estas flechas no son esencialmente distintas de las del "rayado", que se usan en los mapas geográficos para indicar las montañas, como se muestra en la figura 13b. Un mapa con flechitas puede ser considerado como una representación primitiva de un campo vectorial.

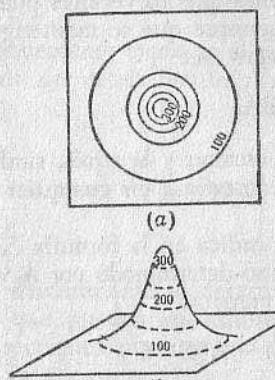


FIG. 12

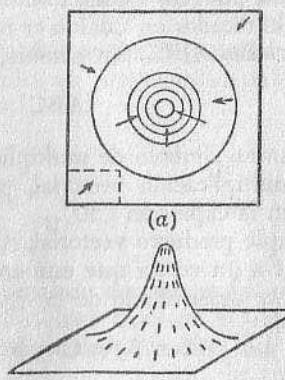


FIG. 13

Se ve que hay una relación entre el campo escalar en función de la altura y el campo vectorial en relación con la fuerza que actúa sobre la bolita. Es una relación simple y familiar. La fuerza depende de la pendiente o, en otras palabras, de la variación de altura por unidad de distancia.

Esta relación es una derivada, de naturaleza similar a la derivada ordinaria del cálculo diferencial. Es más compleja, sin embargo, por la necesidad de encontrar la dirección de máxima pendiente que determina la dirección en que se deslizará la bolita. La máxima pendiente en un punto se conoce como el gradiente en un punto. Es una cantidad vectorial en cada punto y, por lo tanto, constituye un campo vectorial.

Gradiente. — En el extremo inferior izquierdo de la figura 13a queda indicada, por líneas punteadas, una sección del mapa. Esta sección rectangular queda ampliada en la figura 14, a la que se superpone un sistema de coordenadas de referencia. El gradiente

es prácticamente uniforme en esta sección del campo; es decir, tiene la misma dirección y magnitud en todos los puntos. Al gradiente lo representamos por un vector. Este vector gradiente se descompone en dos componentes: uno es la pendiente en la dirección x , $\frac{\partial P}{\partial x}$; el otro es la pendiente según la dirección y , $\frac{\partial P}{\partial y}$. La altura se indica por el símbolo P^* . En este campo bidimensional tenemos la siguiente igualdad:

$$\text{gradiente} = i \frac{\partial P}{\partial x} + j \frac{\partial P}{\partial y} \quad (32)$$

El vector gradiente tiene dos características tan importantes que deben ser mencionadas en seguida. Primero, el gradiente es siempre perpendicular a las líneas de nivel. Esto es evidente, pues el gradiente señala la dirección de máxima pendiente. Esta dirección es aquella en la cual la unidad de altura desciende en la menor distancia horizontal posible. Pasar de una superficie de nivel a la siguiente significa un cambio de altura. La menor distancia se obtiene caminando perpendicularmente a la línea de nivel.

Segundo, cuanto más cercanas están entre sí las líneas de nivel, mayor es la pendiente y mayor el gradiente.

Si se conoce la altura de cada punto y se la puede expresar analíticamente, dando P en función de x e y , resulta entonces fácil aplicar la fórmula (32). Se puede considerar un ejemplo simple, que se refiere a la figura 14: la altura del origen es de 1000 metros y la pendiente de la ladera apunta hacia el noreste. Si caminando hacia el este la altura aumenta 4 metros por kilómetro, mientras que hacia el norte aumenta 3 metros por kilómetro,

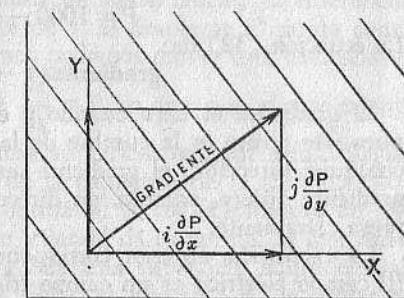


FIG. 14

* Se usa el símbolo P porque la altura es un potencial gravitatorio.

tro, la altura resulta entonces (dentro de esta limitada zona), expresada en función de x e y , de la siguiente manera:

$$P = 1000 + 4x + 3y \quad (33)$$

Sustituyendo la ecuación (33) en la (32) da:

$$\text{gradiente} = i4 + j3 \quad (34)$$

Esto indica que la pendiente es igual en todas partes (pues en la fórmula (34) no figuran las coordenadas x ni y) y que en esta dirección la bolita avanzaría 3 metros hacia el sur por cada 4 hacia el oeste. La pendiente más pronunciada o gradiente es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes, y resulta igual a 5 metros por kilómetro.

Otro ejemplo numérico ilustrará un caso algo menos simple. Consideremos que el origen de coordenadas esté en la cumbre de una montaña de 1000 metros de altura, de forma que:

$$P = 1000 - x^2 - y^2 \quad (35)$$

La ecuación (32) da:

$$\text{gradiente} = -i2x - j2y \quad (36)$$

El gradiente es cero cuando x e y son cero. Esto es natural, pues este punto es la cumbre de la montaña. Al desplazarnos en cualquier dirección, el gradiente aumenta. En distintos puntos el gradiente difiere, además, en dirección. La ecuación (36) lo expresa claramente.

La exposición anterior corresponde a un campo bidimensional. El campo eléctrico es un campo tridimensional en el espacio. Las corrientes de agua en un tanque, por ejemplo, pueden ser representadas por un campo vectorial en que los vectores representan la velocidad del líquido. La temperatura, en un gran bloque de metal calentado desigualmente, es un campo escalar. El flujo de la cantidad de calor está determinado por el gradiente de temperatura.

Un gradiente tridimensional, tal como el gradiente de temperatura, es exactamente análogo al gradiente bidimensional de altura que ha sido considerado más arriba, y su definición es similar. Dado un campo escalar tridimensional P , el gradiente de P es el campo vectorial dado por:

$$\text{gradiente de } P = i \frac{\partial P}{\partial x} + j \frac{\partial P}{\partial y} + k \frac{\partial P}{\partial z} \quad (37)$$

La fórmula (32), en la cual P es una función de x e y solamente, es un caso particular de esta definición más general.

Se han hecho ciertas afirmaciones sobre el gradiente que no fueron demostradas, pero que fueron ilustradas con ejemplos numéricos. Para demostrarlas, consideremos una longitud infinitesimal, cuyas componentes son:

$$ds = idx + jdy + kdz \quad (38)$$

Este elemento de arco está en un campo escalar P , cuyo gradiente es el campo vectorial definido por la ecuación (37). Multiplicando la fórmula (37) por la (38) se obtiene:

$$(\text{Gradiente de } P) \cdot ds = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \quad (39)$$

El miembro de la derecha representa la diferencial de P , de modo que

$$(\text{Gradiente de } P) \cdot ds = dP \quad (40)$$

Como se explica en los libros de matemáticas, la diferencial total dP es el cambio del valor de P al desplazar el punto considerado en la distancia ds . Si nos podemos mover una distancia ds

sin que cambie P , es decir que $\frac{dP}{ds} = 0$, se dice que el movimiento

ha sido hecho a lo largo de una superficie equipotencial. Según la fórmula (14), el miembro de la izquierda de la fórmula (40) es cero cuando el vector ds es normal al vector (**Gradiente de P**): esto hace $dP = 0$. Por lo tanto, cuando ds es normal al gradiente, el punto se desplaza a lo largo de una superficie equipotencial.

También, según la fórmula (14), el miembro de la izquierda de la ecuación (40) tiene un valor máximo si el vector ds está en la misma dirección que el vector (**Gradiente de P**).

Por lo tanto, la dirección del gradiente es la del máximo valor de $\frac{dP}{ds}$, es decir, la dirección de máxima variación de la función.

Finalmente, podemos hallar la magnitud del gradiente extrayendo la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus componentes cartesianas, en lo cual se asemeja a cualquier vector. Considerando que el gradiente está definido por el vector de la expresión (37), se verá que:

Módulo del vector gradiente de P =

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)^2} \quad (41)$$

Divergencia. — Lo que llamamos gradiente es una variación del campo escalar por unidad de longitud en una cierta dirección. Un campo vectorial cambia también de punto a punto, pero de una manera más complicada. No se puede decir que tenga un gradiente, pero hay otras formas con que se puede definir la variación de un campo vectorial al desplazarnos de un punto a otro. Una de las más útiles se conoce con el nombre de divergencia. La divergencia de un campo vectorial \mathbf{A} es:

$$\text{Divergencia de } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (42)$$

A_x es la componente, según x , del vector \mathbf{A} . Como \mathbf{A} es un vector tridimensional, A_x es un campo escalar tridimensional. A_x puede variar de punto a punto y es, en general, una función de x, y, z . Su derivada con respecto a x es el primer término de la expresión (42). Los términos segundo y tercero se encuentran en forma similar a partir de las componentes A_y y A_z , respectivamente.

Se ha mencionado que la divergencia es una cantidad útil. Su aplicación se ilustra perfectamente con el movimiento de los fluidos. La figura 15 muestra un tubo a través del cual fluye el agua. La línea punteada dentro del tubo representa una superficie imaginaria. El agua pasa a través de esta superficie. La superficie es completamente cerrada. El agua entra por un lado y sale por el otro. El líquido puede circular en cualquier forma irregular, pero el agua es incompresible; la cantidad de agua que entra debe ser igual a la que sale. Se probará un poco más tarde que esto equivale a decir que el agua, siendo incompresible, circula de tal manera que si representamos su velocidad por el campo vectorial \mathbf{V} , la divergencia de \mathbf{V} debe ser idénticamente nula. Este es el origen de la denominación divergencia: el agua no puede divergir de un punto, pues dejaría un vacío; tampoco puede converger a un punto, pues es incompresible.

Pero el movimiento del aire es diferente. La figura 15b representa un tubo de aire comprimido, con cierre en un extremo. Un cierre similar acaba de ser removido del otro extremo y el aire sale hacia afuera. Consideremos la superficie cerrada, señalada con líneas de puntos. Como el aire se expande, es más el aire que sale por un lado de la superficie que el que entra por el otro. En consecuencia, hay una divergencia de aire. Hay diver-

gencia distinta de cero en todos los puntos en que el aire se expande. Si la velocidad del aire está representada por el campo vectorial \mathbf{V} , la divergencia del vector \mathbf{V} es distinta de cero.

Rotor. — Otra forma de describir la variación de un campo vectorial recibe el nombre de rotor. Consideremos una bañera circular. La figura 16b muestra la bañera vista desde arriba. Se ve que el agua ha sido movida con una pala. Los vectores representan la velocidad \mathbf{V} . Al lado de la bañera se muestra una pequeña rueda con paletas. Si esta rueda, montada sobre un mecanismo libre de fricción, se sumerge en el centro de la bañera, girará en sentido contrario a las agujas del reloj. En cual-

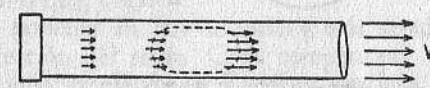
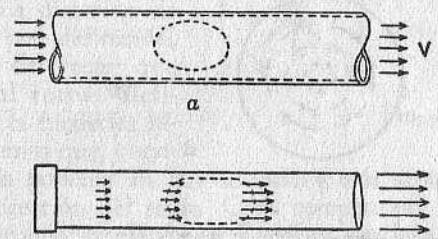


FIG. 15

quier punto que se la coloque, la ruedita girará, pues aunque no está en el centro, el agua corre más ligero por un lado de la ruedecita que por el otro. El movimiento de la rueda está indicando que el campo de velocidades tiene un rotor que no es nulo.

El nombre rotor está vinculado con el movimiento en líneas curvas. Esto, sin embargo, no es necesario, pues el movimiento rectilíneo de un fluido puede tener también un rotor que no sea nulo. Si el agua fluye en un canal, como en la figura 16b, en tal forma que su velocidad sea mayor cerca de la superficie que en el fondo, toda partícula líquida se mueve según una recta. Sin embargo, el rotor no es nulo, lo que se reconoce usando una ruedecita exploradora. Como se observa mirando la figura, la ruedecita gira en el sentido contrario a las agujas del reloj, pues la corriente es más rápida en las capas superiores que en las inferiores.

La figura 17 representa un canal donde el agua circula con rotor nulo. En la parte recta el agua circula con velocidad uni-

forme. Es evidente que la rueda no girará si la colocamos en la posición *a*. Es posible que en la curva del canal el agua circule con rotor nulo. Para ello es necesario que el agua circule con mayor velocidad en la margen interna del canal, en la proporción justa. En la figura se muestra con más detalle lo que sucede cuando la rueda está en *b*. (Se entiende que la rueda es lo suficientemente pequeña como para no perturbar apreciablemente el movimiento.) Las flechitas indican la influencia del agua sobre las paletas de la ruedecita. A causa de la curvatura de las líneas de corriente, más de la mitad de las paletas son dirigidas en el

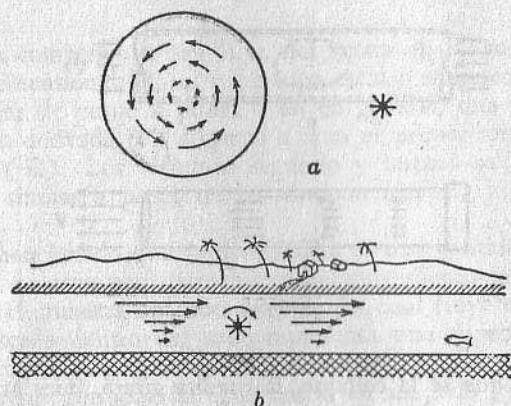


FIG. 16

sentido de las agujas del reloj. La velocidad, sin embargo, es mayor, según supusimos, en la orilla interior, y aunque sean empujadas menos en el sentido opuesto, reciben un impulso mayor. Se puede concebir que la curvatura y la variación de velocidad estén relacionadas de tal manera que la ruedecita quede sin girar. Es, por lo tanto, posible la existencia de movimientos de fluidos curvos cuyos campos de velocidades sean de rotor nulo. Esta clase de movimiento es característica de los fluidos sin fricción. El propósito de las líneas aerodinámicas es construir superficies por las cuales el aire o agua fluyan con un mínimo de rotor. Los movimientos con rotor no nulo desarrollan remolinos que disipan energía.

La divergencia de un vector es un valor escalar. Hay divergencia de un punto o hacia un punto (positiva o negativa), pero no hay asociada a este concepto idea alguna de dirección. El rotor de un campo vectorial, por el contrario, es un vector. Si imaginamos al rotor como un torbellino, es evidente que éste gira alrededor de un eje que puede ser vertical, horizontal o con cualquier inclinación. La dirección de tal eje es, por definición, la dirección del vector que representa al rotor. Refiriéndonos a la ruedecita hipotética diremos que, cuando está en la posición en que se mueve más rápidamente, su eje está en la dirección del rotor. Cada componente del rotor se encuentra colocando el eje de la ruedecita paralelo a cada uno de los ejes coordenados.

El sentido del rotor está determinado por el sentido de rotación de la ruedecita. Se determina de acuerdo a la regla de la mano derecha, o del tornillo a derechas, como está indicado en la figura 18. Matemáticamente, el rotor de un campo vectorial \mathbf{A} está definido por:

$$\begin{aligned} \text{rotor de } \mathbf{A} = & i \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + j \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \\ & + k \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (43)$$

Se mostrará más tarde que esta expresión es equivalente al concepto físico de rotor que ha sido explicado en los párrafos precedentes.

Nabla. — Se ahorra mucho tiempo al escribir las fórmulas del análisis vectorial y, lo que es más importante, se hacen más fá-

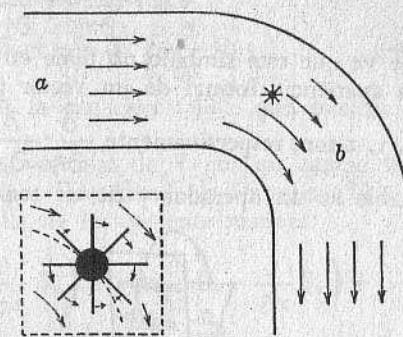


FIG. 17

ciles de recordar usando un símbolo conocido bajo el nombre de "nabla" y escrito ∇^* . Su definición formal es

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (44)$$

Se ve que este símbolo no tiene en sí ningún significado. Tiene la apariencia formal de un vector para el cual las componentes x, y, z son, respectivamente, $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ y $\frac{\partial}{\partial z}$. Pero, igual que $\frac{\partial}{\partial x}$, nabla es un operador y ha de tener algo sobre lo cual operar.

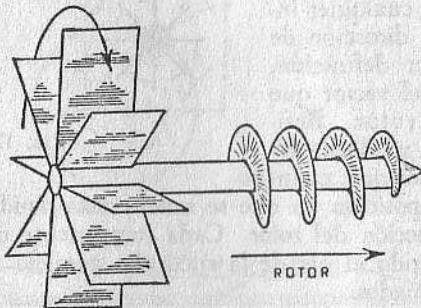


FIG. 18

Si se aplica sobre un escalar, da el gradiente de la función sobre la cual opera. Operando sobre P da:

$$\nabla P = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} P + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} P + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} P \quad (45)$$

que es, por comparación con la fórmula (37), el gradiente de P . La expresión ∇P se desarrolla exactamente como si fuera el producto de un vector ∇ por un escalar P . En realidad, no se trata de ninguna multiplicación, sino de una operación de derivación. El símbolo ∇ , tal como se definió en la expresión (44), puede ser sometido a cualquiera de las transformaciones vectoriales algebraicas, como si fuera, en realidad, una cantidad vectorial, y ésta

* A este símbolo se le da el nombre "del", pero éste lleva a confusión con la letra griega delta, que es muy similar en su forma pero tiene un significado matemático distinto por completo. Por lo tanto, el nombre hamiltoniano "nabla" se ha hecho más común y es recomendado, por ejemplo, por el Instituto Americano de Ingenieros Electricistas. La nabla original era un harpa hebrea de forma triangular: נֶבֶל, el salterio de los salmos.

es una de las ventajas de su empleo. Por ejemplo, en la expresión (46) se escribe formalmente el producto escalar de ∇ por un campo vectorial, lo que da la divergencia de ese campo. En relación con la ecuación (22), escribimos:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial x} B_x + \frac{\partial}{\partial y} B_y + \frac{\partial}{\partial z} B_z \quad (46)$$

Se ve, por comparación con la ecuación (42), que esto es la divergencia de \mathbf{B} .

Análogamente, el producto vectorial de ∇ por un campo vectorial da el rotor de ese campo. Recordando la fórmula (24), el producto vectorial se desarrolla de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} = & \mathbf{i} \left(\frac{\partial}{\partial y} B_z - \frac{\partial}{\partial z} B_y \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial}{\partial z} B_x - \frac{\partial}{\partial x} B_z \right) + \\ & + \mathbf{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} B_y - \frac{\partial}{\partial y} B_x \right) \end{aligned} \quad (47)$$

Por comparación con la fórmula (43) se reconoce que esto es el rotor de \mathbf{B} .

La fórmula para el rotor es de forma análoga a la del producto vectorial y puede ser expresada también por medio de un determinante. En esta forma es mucho más fácil de recordar que con la expresión (47).

$$\nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (48)$$

La siguiente tabla resume la información referente a operaciones diferenciales con campos vectoriales o escalares.

TIPO DE OPERACIÓN	SÍMBOLO	DEBE SER APlicADA A	DANDO
Gradiente de A	∇A	Campo escalar	Campo vectorial
Divergencia de A	$\nabla \cdot A$	Campo vectorial	Campo escalar
Rotor de A	$\nabla \times A$	Campo vectorial	Campo vectorial

La *divergencia* y el *rotor* son operaciones de derivación en campos vectoriales. Ambas implican derivadas espaciales; es decir, son derivadas parciales respecto de las coordenadas x, y, z . La diferencia matemática esencial entre ellas es bastante simple.

La divergencia es una relación de variación de la intensidad del campo en la dirección del campo del vector en ese punto. Así, en la definición de la divergencia, fórmula (46), se toma la derivada parcial con respecto a x de la componente según x del campo, la derivada parcial con respecto a y de la componente según y , y la derivada parcial con respecto a z de la componente según z . En la figura 15b se indica un ejemplo físico. El rotor es una relación de variación de la intensidad del campo en una dirección perpendicular al campo; así, en la ecuación (47) obtenemos el rotor por medio de las derivadas de la componente de x respecto de y y de z , las derivadas según x y z de la componente de y y, análogamente, con la componente de z , pero no consideramos la derivada de la componente de x respecto de x . La figura 16b muestra un ejemplo sencillo de un campo que varía perpendicularmente al campo, pero no paralelamente. Lo mismo pasa con el ejemplo de la figura 19b.

Ejemplos ilustrativos. — La manera más satisfactoria de familiarizarse con los conceptos de gradiente, divergencia y rotor, es estudiando unos pocos ejemplos de campos vectoriales. Por ahora estudiaremos campos puramente geométricos sin asignarles ningún significado físico. Algunos de ellos resultarán más tarde de importancia en el electromagnetismo.

En esta sección estudiaremos sólo campos bidimensionales. Una vez que se ha comprendido bien el problema en dos dimensiones, su extensión a tres dimensiones es sencilla. Los ejemplos en el plano son más claros porque están menos oscurecidos por la elaboración matemática. Además, muchos problemas prácticos de tres dimensiones pueden ser reducidos a dos dimensiones por una elección apropiada del sistema de coordenadas, de tal manera que las funciones que intervengan dependan sólo de dos variables.

Cuando se trabaja con un campo escalar que es el mismo para todos los valores de z y, por lo tanto, tiene sólo derivadas respecto de x y de y , es evidente, según la fórmula (45), que el gradiente se reduce a:

$$\nabla P = i \frac{\partial P}{\partial x} + j \frac{\partial P}{\partial y} \quad (49)$$

Para un campo vectorial \mathbf{A} de dos variables, la divergencia es:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \quad (50)$$

Si es cierto también que el campo vectorial no tiene componente en la dirección z ($A_z = 0$), el rotor es:

$$\nabla \times \mathbf{A} = k \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (51)$$

Las fórmulas vectoriales se encuentran reunidas en la tabla II (en la última página del libro) para facilitar su referencia.

Ejemplo 1. — Consideremos un campo vectorial definido por las ecuaciones

$$A_x = 1 \quad A_y = 2 \quad (52)$$

Estas son las componentes del campo vectorial \mathbf{A} , que es igual a

$$\mathbf{A} = iA_x + jA_y = i1 + j2 \quad (53)$$

En la figura 19a se ilustra este campo. Las líneas indican la dirección del campo. Se ha mencionado ya que la representación de los campos vectoriales no es sencilla. Se requiere, por lo tanto, algún esfuerzo de visualización. Se ve en la ecuación que define el campo que la intensidad del mismo en cada punto (P en la figura) es de 1 unidad en la dirección x y de 2 unidades en la dirección y . Este valor es constante, pues ni A_x ni A_y son funciones de las variables. Este campo no tiene ni rotor ni divergencia. Se ve que no hay divergencia cuando se sustituyen A_x y A_y en la ecuación (50), puesto que las derivadas parciales son ambas nulas. Del mismo modo, no hay rotor porque las derivadas parciales de la ecuación (51) son ambas nulas.

Ejemplo 2. — Consideremos un campo vectorial definido por

$$A_x = y + 10 \quad A_y = 0 \quad (54)$$

Este campo está representado en la figura 19b. El campo está completamente en la dirección x porque A_y es cero en todas partes; se hace más intenso a medida que avanzamos según el eje y , pues A_x aumenta con y . Esto se muestra en la figura dibujando más juntas las líneas que indican la dirección del campo en la región más intensa (como se hace usualmente con las líneas de fuerza eléctricas y magnéticas). Si y fuera menor que -10, la dirección

del campo se invertiría y a lo largo de la línea $y = -10$ el campo es nulo, pero el diagrama no se extiende hasta esa región.

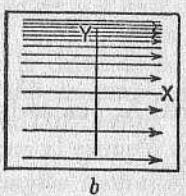
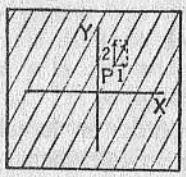


FIG. 19

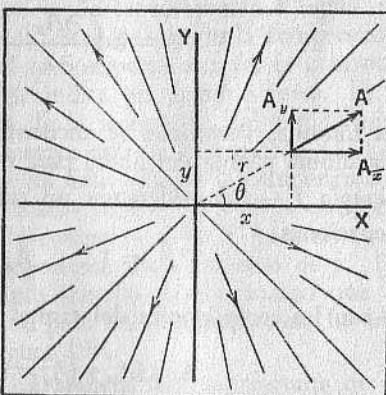


FIG. 20

La ecuación (50) nos dice que este campo no tiene divergencia.

Al aplicar la ecuación (51) encontramos que $\frac{\partial A_y}{\partial y} = 0$, pero $\frac{\partial A_x}{\partial y} = 1$. De aquí se deduce que el rotor del campo es igual a $-k$ (piénsese en la ruedita exploradora o medidora del rotor de la fig. 18).

Ejemplo 3. — Vamos ahora a considerar un campo que tiene la unidad de intensidad en todos los puntos, y de dirección radial a partir del origen de coordenadas. Una ilustración de este tipo la tenemos en la figura 20, donde se ha tratado de mantener uniforme la densidad de líneas radiales. Consideremos cualquier punto p de coordenadas x e y . Puesto que \mathbf{A} es radial, A_x es igual a $A \cos \theta$, y A_y igual a $A \sin \theta$. Por lo tanto, si A es igual a la unidad en todos los puntos, tenemos:

$$A_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad A_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (55)$$

Estas ecuaciones definen el campo en todos los puntos de cual-

quier cuadrante. Para determinar la divergencia y el rotor es necesario calcular las cuatro derivadas parciales siguientes:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} - \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (56)$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial y} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} - \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (57)$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (58)$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (59)$$

Sumando las dos primeras obtenemos la divergencia

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{1}{r} \quad (60)$$

Restando la cuarta de la tercera obtenemos el rotor

$$\nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (61)$$

La divergencia en este campo es particularmente interesante. La presencia de una divergencia está asociada con la necesidad de agregar nuevas líneas a fin de mantener constante la intensidad del campo. Es evidente, en este ejemplo, que si las líneas parten de una región del espacio, habrá más líneas saliendo de esa región que entrando. Esto significa que la divergencia no es nula en esa región. Se puede ver cualitativamente en la figura 20 que la divergencia aumenta a medida que nos acercamos al origen, pues ahí es donde se originan más líneas de fuerza. La ecuación (60) nos dice cuantitativamente que la divergencia es inversamente proporcional al radio y que aumenta indefinidamente a medida que nos aproximamos al origen.

Cualquier operación de derivación sobre un campo puede ser repetida, dando un resultado parecido a la segunda derivada. En el ejemplo de arriba la divergencia de \mathbf{A} es un campo escalar, al cual, a su vez, se le puede hallar el gradiente. Esto dará el gradiente de la divergencia de \mathbf{A} [simbólicamente $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$].

$$(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \nabla \nabla \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = i \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)^{-1/2} + j \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2)^{-1/2} =$$

$$= -\mathbf{i} \frac{x}{r^3} - \mathbf{j} \frac{y}{r^3} \quad (62)$$

Este resultado es un campo vectorial que puede, a su vez, ser diferenciado para encontrar su rotor o su divergencia. Para encontrar el rotor se necesitan dos derivadas parciales:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{y}{r^3} \right) = \frac{\partial}{\partial x} [-y(x^2 + y^2)^{-3/2}] = (-y)(-\frac{3}{2})(x^2 + y^2)^{-5/2}(2x) \quad (63)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{r^3} \right) = \frac{\partial}{\partial y} [-x(x^2 + y^2)^{-3/2}] = -x(-\frac{3}{2})(x^2 + y^2)^{-5/2}(2y)$$

La resta de estas dos derivadas parciales da el rotor. Como son iguales, el rotor es nulo. Por lo tanto, el rotor del gradiente de $1/r$ es cero:

$$\Delta \times \nabla \frac{1}{r} = 0 \quad (64)$$

Esto no es una coincidencia ni una propiedad especial de este campo particular. Demostraremos en el siguiente párrafo que el rotor del gradiente de un campo escalar es siempre nulo.

Un campo gradiente de otro campo es irrotacional ($\nabla \times \nabla F \equiv 0$). — Para probar este teorema consideremos cualquier campo escalar. Indicaremos a este campo por F . Escribamos primero su gradiente usando la ecuación (45):

$$\nabla F = \mathbf{i} \frac{\partial F}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial F}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial F}{\partial z} \quad (65)$$

Nótese que este gradiente es un vector con componentes $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ y $\frac{\partial F}{\partial z}$. El rotor de este vector se encuentra sustituyendo en la ecuación (47):

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla F) &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial y} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z} \right) \\ &\quad + \mathbf{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (66)$$

Como el orden de derivación de una derivada segunda no influye en su valor, cada uno de los paréntesis de la expresión de arriba es idénticamente nulo.

Otro teorema similar establece que para cualquier campo vectorial A , $\nabla \cdot \nabla \times A \equiv 0$. En pocas palabras, un campo que es el rotor de otro tiene divergencia nula. Este caso está ilustrado por los problemas 11 y 12. El teorema general se prueba fácilmente (como en el problema 13) por un método muy similar al usado para probar que $\nabla \times \nabla F \equiv 0$. Como en este caso, el desarrollo de las operaciones indicadas lleva a derivadas segundas parciales de igual valor absoluto, pero de signo opuesto.

Hay otra diferenciación repetida de gran importancia en las aplicaciones a problemas físicos. Es la divergencia del gradiente. La divergencia del gradiente es de tanta importancia que se le da un nombre especial. Se la llama laplaciano, por el famoso matemático francés que vivió hace siglo y medio. Se le da, además, un símbolo especial. Aunque se lo debiera escribir, propiamente, $\nabla \cdot \nabla F$, se acostumbra abreviarlo así: $\nabla^2 F$. Por supuesto, el significado es siempre el mismo. Siendo el laplaciano una divergencia, es un campo escalar. Expresado en función de las derivadas segundas, es de una gran simplicidad y de importancia obvia:

$$\begin{aligned} \nabla^2 F &= \nabla \cdot (\nabla F) = \nabla \left(\mathbf{i} \frac{\partial F}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial F}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial F}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial z} = \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) F \end{aligned} \quad (67)$$

El laplaciano no es, en general, igual a cero. (Las únicas operaciones que son siempre idénticamente nulas son el rotor de un gradiente y la divergencia de un rotor.) El laplaciano es cero frecuentemente en problemas físicos, dependiendo esto de las condiciones físicas. En la electrostática, por ejemplo, el laplaciano del potencial eléctrico es cero en cualquier punto que no contenga carga eléctrica. Esto se verá en el capítulo siguiente.

La ecuación (67) da el laplaciano de un campo escalar F . Es también útil el laplaciano de un campo vectorial. El laplaciano

de un campo vectorial \mathbf{A} se escribe $\nabla^2 \mathbf{A}$ y se interpreta de la siguiente manera:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2(\mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z) \quad (68)$$

El laplaciano de un campo vectorial es, por lo tanto, la suma del laplaciano de las tres componentes escalares del campo vectorial*. Frecuentemente, es importante conocer si el laplaciano de un campo vectorial es nulo. El laplaciano de un campo vectorial es nulo, y sólo lo es si los laplacianos de cada uno de los campos escalares componentes son independientemente nulos.

Coordenadas polares. — Se habrá notado que algunos ejemplos y problemas de la primera parte del libro se adaptan naturalmente al uso de coordenadas polares. El ejemplo 3 y la figura 20, por ejemplo, muestran simetría con respecto al origen, de modo que la referencia a la distancia radial r y al ángulo θ difícilmente podría ser evitada. ¿No sería, por lo tanto, posible, usar coordenadas polares en vez de rectangulares en problemas de simetría radial y, con ello, simplificar los cálculos?

Esta cuestión introduce un aspecto del análisis vectorial, que es de la mayor importancia. Es el siguiente: El análisis vectorial es totalmente independiente del sistema de coordenadas. Un campo eléctrico, un campo de velocidades o un campo de fuerzas, existen, físicamente, aunque ningún matemático haya fijado sistema alguno de coordenadas. Un campo tiene divergencia, rotor o gradiente, o no los tiene, independientemente del sistema de coordenadas. Los productos escalares, los productos vectoriales, las sumas y diferencias de vectores y las integrales lineales e integrales superficiales, tienen todos significado, sin referencia a las coordenadas (excepto en los casos especiales en los que las propiedades de la materia son distintas en distintas direcciones).

Evidentemente, es más sencillo establecer relaciones generales en un sistema matemático sin relación con determinados ejes coordenados, que tener que fijar primero dichos ejes, de los cuales depende luego todo el proceso mental. Por lo tanto, los teoremas y generalizaciones del análisis vectorial son mucho más fáciles de comprender que las afirmaciones similares desarrolladas en función del sistema de coordenadas.

* Esto puede tomarse como la definición del laplaciano de un campo vectorial. Se puede dar otra definición del laplaciano que evite la referencia al sistema de coordenadas. Esta definición sería: $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \times \nabla \times \mathbf{A})$.

Desgraciadamente, para el cálculo efectivo es usualmente necesario referirse a las coordenadas. Los ejes son indispensables, pues, ¿cómo se podría definir un campo en cada punto del espacio si no se identifica cada punto por medio de las coordenadas? Sin embargo, podemos hacer, al menos, consideraciones generales en términos del análisis vectorial, y luego usar un sistema conveniente de coordenadas para facilitar el cálculo. Con este propósito, después de haber definido las operaciones del análisis vectorial en función de vectores, como en las ecuaciones (14) y (19), se las expresa también, con referencia al sistema de coordenadas, como en las ecuaciones (22), (24), (45), (46) y (47).

Algunos sistemas de coordenadas son más convenientes que otros para un cálculo determinado. Como se mostró en el problema 6, la elección del sistema de coordenadas no influye en el resultado final. Como las coordenadas polares se adaptan mejor a muchos problemas que las coordenadas rectangulares, será conveniente expresar algunas de las operaciones vectoriales en coordenadas polares.

Consideremos un sistema polar bidimensional usando como coordenadas la distancia radial r y el ángulo θ . Primero es necesario conocer r y θ en función de x e y , y viceversa. Estas fórmulas son familiares:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & y &= r \sin \theta \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} & \theta &= \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{aligned} \quad (69)$$

Luego, es necesario expresar en coordenadas polares un vector que ha sido dado en coordenadas rectangulares. Si se conocen A_x y A_y , debe ser posible encontrar A_r y A_θ (A_r se define como la componente de \mathbf{A} en la dirección del radio, y A_θ es la componente en la dirección normal al radio). La figura 21 muestra la relación entre las componentes en ambos sistemas. En un punto de coordenadas (x, y) o (r, θ) hay un vector \mathbf{A} . Las componentes polares del vector \mathbf{A} , A_r y A_θ , están dibujadas en la figura, y lo mismo las componentes A_x y A_y . Se observan también dos triángulos: A_r es la hipotenusa de uno y A_θ del otro. Ambos triángulos tienen un ángulo igual a θ . De la construcción de la figura se puede ver que:

$$\begin{aligned} A_r &= A_x \cos \theta + A_y \sin \theta \\ A_\theta &= A_x \sin \theta - A_y \cos \theta \end{aligned} \quad (70)$$

Esta relación nos da A_r y A_θ en función de A_x y A_y . Cuando se conocen las componentes según el radio y según la dirección normal al radio, se usan las siguientes ecuaciones (estas ecuaciones se obtienen resolviendo las (70) o bien analizando una figura ligeramente diferente de la 21):

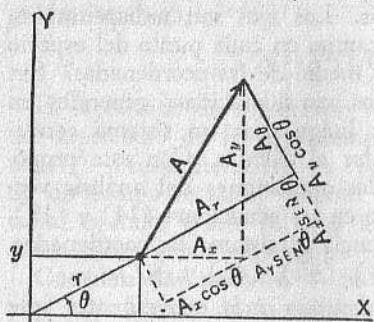


FIG. 21

El gradiente en coordenadas polares se encuentra ahora fácilmente. En coordenadas rectangulares bidimensionales es:

$$\nabla P = i \frac{\partial P}{\partial x} + j \frac{\partial P}{\partial y} \quad (49)$$

De las ecuaciones (69) tenemos:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

Por las reglas de derivación de una función compuesta (véase un libro de cálculo) tendremos:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \quad (72)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \quad (73)$$

El gradiente es un vector, y de la expresión para ∇P se deduce que sus componentes según x e y están dadas por las ecuaciones (72) y (73), respectivamente. Pero no es suficiente conocer las componentes según x e y . Es necesario encontrar las componentes según θ y r . Esto se logra por medio de las ecuaciones (70), sustituyendo en ellas la ecuación (72) en lugar de la componente

según x , y la ecuación (73) en lugar de la componente y . Obtenemos de este modo las siguientes componentes radial y angular:

$$(\nabla P)_r = \left(\frac{\partial P}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right) \cos \theta + \\ + \left(\frac{\partial P}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \right) \sin \theta = \frac{\partial P}{\partial r} \quad (74)$$

$$(\nabla P)_\theta = \left(\frac{\partial P}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \right) \cos \theta - \\ - \left(\frac{\partial P}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right) \sin \theta = \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad (75)$$

Por lo tanto, si 1_r es el vector unitario en la dirección radial en el punto considerado, y 1_θ es un vector unitario en la dirección normal al anterior, el gradiente en coordenadas polares es:

$$\nabla P = 1_r \frac{\partial P}{\partial r} + 1_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad (76)$$

En la página 34 se describió la forma de una montaña por la ecuación (35). En coordenadas polares la elevación de cada punto es:

$$P = 1000 - r^2 \quad (77)$$

(La ecuación (77) podría ser obtenida a partir de la (35) por medio de las (69) si la transformación no fuera tan evidente.) Para encontrar el gradiente, que es la pendiente de la montaña, usamos la ecuación (76):

$$\nabla P = -1_r 2r \quad (78)$$

¿Es este resultado equivalente al valor del gradiente dado en la ecuación (36), computado en coordenadas rectangulares?

La divergencia puede también ser expresada en coordenadas polares. Con coordenadas rectangulares, en dos dimensiones, tenemos:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \quad (50)$$

La sustitución de las ecuaciones (72) y (73) da

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \quad (79)$$

Las componentes rectangulares de \mathbf{A} deben ponerse en función de las componentes polares por medio de las ecuaciones (71).

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial(A_r \cos \theta - A_\theta \sin \theta)}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial(A_r \cos \theta - A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \\ &\quad + \frac{\partial(A_r \sin \theta + A_\theta \cos \theta)}{\partial r} \sin \theta \\ &\quad + \frac{\partial(A_r \sin \theta + A_\theta \cos \theta)}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \end{aligned} \quad (80)$$

Desarrollamos ahora la ecuación (80), teniendo en cuenta que θ no es función de r , pero que A_r y A_θ son cada una de ellas funciones de r y de θ ; agrupando los términos resultantes, la expresión final de la divergencia es:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{A_\theta}{r} \quad (81)$$

El rotor puede también ser expresado en coordenadas polares, y el paso de un sistema a otro es similar a la transformación del gradiente. La expresión polar resultante para el rotor en dos dimensiones es:

$$\nabla \times \mathbf{A} = k \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \frac{A_r}{r} \right) \quad (82)$$

Ejemplo 4. — Para ilustrar el uso de las ecuaciones (81) y (82) busquemos la divergencia y el rotor del campo vectorial, explicado en el ejemplo 3, página 44, e ilustrado en la figura 20. De las fórmulas que definen el campo, es evidente que sus componentes polares son:

$$A_r = 1 \quad A_\theta = 0 \quad (83)$$

Según la ecuación (81), la divergencia del campo es $1/r$. Por ser cada término de la ecuación (82) igual a cero, el rotor resul-

tante es cero. Estos resultados son los mismos que los que se encontraron anteriormente utilizando coordenadas rectangulares, según las ecuaciones (60) y (61), pero el cálculo es mucho más simple en coordenadas polares.

Tablas. — La tabla II, al final del libro, reúne las fórmulas para el gradiente, divergencia, rotor y laplaciano, en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas.

PROBLEMAS

1. Complete la tabla de la ecuación (21) incluyendo todos los posibles productos escalares y vectoriales de los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} .

2. a) Pruebe que la ecuación (24) es correcta. b) Pruebe que la ecuación (31) es correcta.

3. Un terreno tiene forma de paralelogramo; el lado que apunta hacia el este mide 7 kilómetros, y el que apunta hacia el noreste, 5 kilómetros. Usando la ecuación (24) encuéntrese el área de la misma.

4. La lluvia, empujada por el viento sur, cae, formando con la vertical un ángulo de 30° , con una velocidad de 18 metros por segundo. Hay 30 gramos de lluvia por cada metro cúbico de aire. ¿Cuánta lluvia cae sobre cada metro cuadrado de la pared sur de un edificio? ¿Cuánta sobre la pared oeste? ¿Cuánta en el techo plano? Úsese la ecuación (22) para resolver este problema, representando el área por un vector.

5. Dibújese un mapa acotado de la montaña de la ecuación (35) y un esquema de su forma en tres dimensiones. Dibújense vectores en el mapa acotado para mostrar el gradiente en los siguientes puntos: $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,3)$, $(0,-3)$, $(3,0)$, $(2,2)$, $(2,1)$, $(1,2)$, $(-1,-2)$, $(-2,1)$, $(-1,2)$.

6. Si, en la figura 19b, los ejes de coordenadas se eligen a 45° de la posi-

ción indicada, el campo habría estado definido por $\mathbf{A} = \frac{y-x+10\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i}+\mathbf{j})$.

Encuéntrese el rotor y la divergencia en cada punto usando estos ejes, que son más incómodos que los anteriores.

7. $V_x = \sin y$, $V_y = 0$. Hágase un esquema del campo de V , como en la figura 19, y encuéntrese su rotor y divergencia.

8. $V_x = \frac{x}{x^2+y^2}$, $V_y = \frac{y}{x^2+y^2}$. Hágase el esquema de V y encuéntrese su rotor y divergencia.

9. Dibújense las líneas de contorno de divergencia constante de la ecuación (60) y hágase un esquema del campo vectorial del gradiente de esta divergencia, usando la ecuación (62).

10. Determinese el rotor del gradiente de P en la ecuación (35).

11. Determinese la divergencia del rotor $[\nabla \cdot (\nabla \times V)]$ del campo vectorial definido en el problema 7, usando la ecuación (46).

12. $V_x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $V_y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Hágase un esquema del campo definido por estas ecuaciones y encuéntrese su divergencia y rotor, y la divergencia del rotor.

13. Pruébese que $\nabla \cdot \nabla \times V \equiv 0$.

14. Determíñese el laplaciano de P , dado por la fórmula (35).

15. Determíñese el laplaciano de P , siendo $P = -1/nr$ (siendo r la distancia escalar de cualquier punto del plano a un punto fijo, es decir, por una elección adecuada del origen de coordenadas: $r^2 = x^2 + y^2$).

16. Calcúlese el laplaciano de P , si $P = 1/r$ (siendo r la distancia escalar a un punto fijo). Hállese en: a) un campo bidimensional, y b) un campo tridimensional.

17. Pruébese por medio de las ecuaciones (69) y (70) que la ecuación (78) es equivalente a la ecuación (36).

18. Partiendo de la ecuación (51), pruébese que la (82) es correcta.

19. Expóngase el problema 8 en coordenadas polares y hállese su divergencia y rotor.

20. Determíñese si es ventajoso el uso de coordenadas polares para resolver el problema 12.

21. En la Tabla II (al final del libro) el producto escalar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ está desarrollado en coordenadas rectangulares. Desarrollese $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ en coordenadas cilíndricas. Desarrollese $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ en coordenadas esféricas.

22. En la Tabla II (al final del libro) el producto vectorial esá desarrollado en coordenadas rectangulares y expresado en forma de determinante. Exprése $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ análogamente en coordenadas cilíndricas y esféricas.

23. Desarrollese el determinante del rotor en coordenadas esféricas, dadas en la tabla II. Hágase tantas derivaciones de productos como sea posible y simplifíquese el resultado.

CAPÍTULO III

ALGUNOS TEOREMAS RELATIVOS A CAMPOS

Divergencia. — El concepto general de divergencia fué introducido en el capítulo precedente. Tienen divergencia distinta de cero aquellos puntos en los cuales se originan líneas de corriente (significado literal de "líneas de flujo"). Se dió ya una ecuación para calcular la divergencia (ecuación 46), pero no se demostró que esta ecuación estuviera relacionada con la idea física de divergencia.

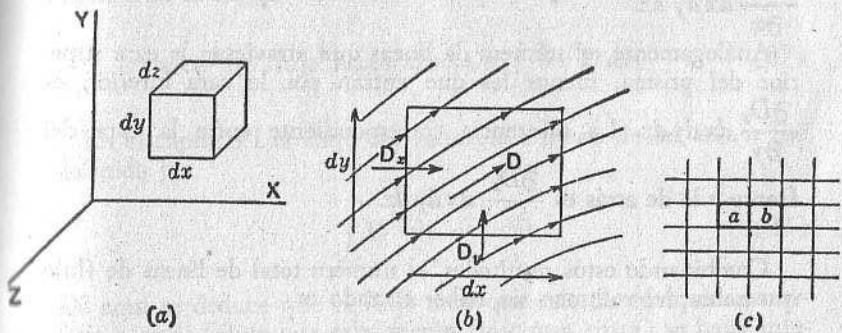


FIG. 22

Esta demostración será dada ahora, no en forma rigurosa, pero sí indicando los pasos principales para una demostración rigurosa. Consideremos un pequeño prisma rectangular con sus aristas paralelas a los tres ejes coordinados, como en la figura 22a. Consideremos el caso límite en que los lados son dx , dy y dz . La figura 22b muestra el prisma desde un costado, con el plano de la figura paralelo al plano $X - Y$. Miramos la cara de área $dx dy$. Las caras laterales tienen área $dy dz$ y las bases superior e inferior, $dx dz$.

Este pequeño volumen prismático está colocado en un campo

vectorial que, por conveniencia, llamaremos **D**. Las líneas de flujo del campo entran al prisma por un lado y salen por el otro. Queremos averiguar cuántas líneas se originan dentro del volumen considerado. Refiriéndonos a la figura 22b, el número de líneas de flujo que entran por el lado izquierdo del prisma es igual al área de la superficie por la componente normal de la intensidad del campo. Este producto vale $D_x dy dz$. El número de líneas que salen a través de la superficie de la derecha es distinto si D_x varía en el intervalo dx . Si la derivada parcial de D_x respecto de x vale $\frac{\partial D_x}{\partial x}$ la variación en el intervalo dx está dada por $\frac{\partial D_x}{\partial x} dx$. Por lo tanto, el número de líneas de fuerza que salen por la cara de

derecha es $(D_x + \frac{\partial D_x}{\partial x} dx) dy dz$. Restando a este valor el número de líneas de fuerza que entran por la cara izquierda obtenemos $\frac{\partial D_x}{\partial x} dx dy dz$.

Análogamente, el número de líneas que atraviesan la cara superior del prisma, menos las que entran por la cara inferior, es $\frac{\partial D_y}{\partial y} dx dy dz$. La diferencia correspondiente entre la cara del

frente y la de atrás es $\frac{\partial D_z}{\partial z} dx dy dz$.

Combinando estos resultados, el número total de líneas de flujo que salen del volumen sin haber entrado es

$$\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (84)$$

Pero la divergencia está definida como el número de líneas de flujo que se originan por unidad de volumen; de modo que si el volumen del prisma es dv ,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \frac{dx dy dz}{dv} \quad (85)$$

Como el volumen del prisma dv es igual a $dx dy dz$, se deduce que

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \quad (86)$$

y esto es lo que afirma la ecuación 46.

Teorema de Gauss. — Consideremos ahora que el espacio esté dividido en un número ilimitado de pequeñas celdillas de volumen dv , como en la figura 22c. El número de líneas de flujo que se originan en la celda designada con a está dado, como vimos, por $\nabla \cdot \mathbf{D} dv$. El número de líneas originadas en la celda b está dado por el valor de la divergencia en ese punto multiplicada por el volumen de ella. El número de líneas generadas en las dos celdas juntas consideradas como una sola es la suma de los productos de las divergencias por los respectivos volúmenes. Agregando más celdas al grupo así iniciado, el número de líneas originadas dentro de las mismas está dado por la suma (o integral) de los productos de las divergencias por los respectivos volúmenes. Esto es igual, por tanto, a la diferencia del número de líneas que salen, menos el número de líneas que entran al volumen considerado. Es decir:

$$\text{Exceso de flujo hacia afuera} = \int \nabla \cdot \mathbf{D} dv \quad (87)$$

En el capítulo I el flujo del vector **D** a través de un área a fué definido por

$$\int \mathbf{D} \cdot da \quad (11)$$

De aquí se deduce que el flujo total que sale de cualquier superficie cerrada (flujo que sale, menos flujo que entra) se halla integrando sobre toda la superficie cerrada: *

$$\oint \mathbf{D} \cdot da \quad (88)$$

* Hagamos dos comentarios con respecto a la notación. El circulito sobre el símbolo de integración indica que ésta debe ser hecha sobre un trayectoria cerrada, ya sea una línea o una superficie, según que la integración sea con respecto a una distancia o a un área, como se indica por la naturaleza de la diferencial. En este caso da indica que la integración se hace sobre un área y el circulito sobre la integral indica que la superficie de integración debe ser una superficie cerrada.

En la ecuación (4) la cantidad diferencial ds , siendo s una distancia, in-

La ecuación (88) y la (87) son distintas expresiones para la misma cantidad de flujo y pueden ser igualadas, dando:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \int \nabla \cdot \mathbf{D} dv \quad (89)$$

Este es un teorema de gran importancia. Vincula la integral de la divergencia, dentro de un volumen, a la integral superficial del vector de campo sobre la superficie que encierra al volumen considerado. A veces se lo llama el teorema de la divergencia, y a veces el teorema de Gauss, o teorema de Green.

Algunas ilustraciones sobre la aplicación de este teorema se dan en el capítulo precedente, especialmente con referencia a la figura 15.

Rotor. — El concepto de rotor fué desarrollado en el capítulo II refiriéndolo a una ruedita de prueba en un campo vectorial de velocidades de un fluido. Había rotación de la ruedecita cuando la suma de las componentes de la intensidad del campo tangenciales a la ruedecita era distinta de cero. Esto se ilustró con referencia a la fuerza ejercida sobre determinadas palas de la ruedecita, lo que resulta una ilustración un tanto burda. El concepto de rotor se formula mucho mejor en términos de la circulación del vector a lo largo de la periferia de la ruedecita. Podemos luego suprimir la ruedecita, quedando el rotor definido en función de la circulación a lo largo de una pequeña trayectoria cerrada.

La expresión matemática **circulación**, es la integral lineal de un campo vectorial según una cierta trayectoria cerrada. Si el campo vectorial es \mathbf{E} su circulación está dada por:

$$\oint \mathbf{E} \cdot ds \quad (90)$$

Esta es la expresión matemática del concepto ordinario de circulación (puede ser de aire, de agua, etc.), y es claramente la circulación del fluido a lo largo de su periferia lo que hace girar a la ruedecita.

dica integración a lo largo de una línea; que esta línea debe ser cerrada se indica por el circuito sobre el signo de integral.

El área da es, como se discutió en el capítulo II, una cantidad vectorial. La dirección del vector da es normal al área y , por convención, es hacia fuera. Es evidente que esta convención es útil sólo para superficies cerradas.

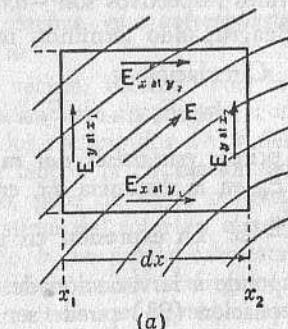
El rotor es una circulación microscópica. Consideremos la ruedecita en un campo vectorial y orientémosla de modo que su velocidad de rotación sea máxima. (Esto determina la orientación en la cual la circulación a lo largo de la circunferencia es máxima.) Ahora hagamos desaparecer la ruedecita pero retengamos la circunferencia como una trayectoria en el espacio. La circulación del campo vectorial en esta trayectoria (conocida según la definición de arriba) depende del área encerrada por la curva. La división de la circulación por el área da un valor que es independiente de la medida o forma de la trayectoria, siempre que ésta sea pequeña. Esta relación es:

$$\frac{\text{Circulación alrededor de una curva cerrada}}{\text{Área de la superficie limitada por esa curva}} \quad (91)$$

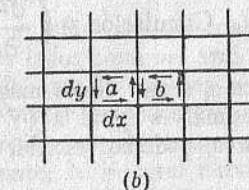
El límite de esta relación cuando la trayectoria tiende a un punto se llama el **rotor** en ese punto.

El rotor es, así, el valor límite de la circulación por unidad de área. Se sigue que la circulación de un campo vectorial alrededor de una curva cerrada de medida infinitesimal depende del rotor del campo en ese punto y del área infinitesimal encerrada por la curva. La circulación depende también de la orientación de la curva. El rotor se debe tratar como una cantidad vectorial. La dirección del rotor se define como normal al plano en el cual la circulación es máxima. La circulación según una trayectoria infinitesimal en uno u otro plano es el producto escalar del rotor por el vector representativo del área: $(\nabla \times \mathbf{E}) \cdot da$.

Hemos definido ahora el rotor en función de la circulación. Para encontrar una expresión del rotor en función del mismo campo vectorial, determinamos la circulación según una pequeña curva cerrada en el campo vectorial. No es necesario que la trayectoria sea circular. Supongamos un pequeño rectángulo, como el de



(a)



(b)

FIG. 23

la figura 23a, situado en el plano X-Y. Deseamos encontrar la circulación del vector \mathbf{E} al recorrer su perímetro. Vamos a hallarla (de acuerdo con la definición de circulación) multiplicando la longitud de cada lado del rectángulo por la componente de la intensidad del campo paralela a ese lado. Las longitudes de los lados son (en el caso límite) dx y dy . Partiendo del extremo inferior izquierdo, consideremos la base inferior del rectángulo: su longitud es dx , en la dirección positiva, y la componente del campo es E_x at y_1 . La base inferior del rectángulo nos da el primer término de la siguiente expresión de la circulación. Los otros tres se obtienen de los restantes tres lados del rectángulo, siguiendo el sentido contrario a las agujas del reloj.

Circulación =

$$= E_{x \text{ at } y_1} dx + E_{y \text{ at } x_2} dy - E_{x \text{ at } y_2} dx - E_{y \text{ at } x_1} dy \quad (92)$$

Los términos tercero y cuarto son negativos porque, manteniendo una dirección contraria a las agujas del reloj, la base superior y el lado izquierdo son recorridos en la dirección negativa. Los recorridos respectivos son $-dx$ y $-dy$.

Reagrupando términos, tenemos:

Circulación =

$$= (E_{y \text{ at } x_2} - E_{y \text{ at } x_1}) dy - (E_{x \text{ at } y_2} - E_{x \text{ at } y_1}) dx \quad (93)$$

El primer paréntesis del miembro de la derecha es el aumento de E_y en la distancia dx , entre x_1 y x_2 : es, por lo tanto, igual a $\frac{\partial E_y}{\partial x} dx$. La expresión en el segundo paréntesis es similar y corresponde a la variación de E_x al pasar de y_1 a y_2 . Por lo tanto, la ecuación (93) puede ser escrita

$$\text{Circulación} = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} dx \right) dy - \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} dy \right) dx \quad (94)$$

Como, según vimos más arriba, la circulación en una curva infinitesimal es igual a $(\nabla \times \mathbf{E}) \cdot da$, siendo a el área dentro de la curva, podemos escribir

$$(\nabla \times \mathbf{E}) \cdot da = \frac{\partial E_y}{\partial x} dx dy - \frac{\partial E_x}{\partial y} dy dx \quad (95)$$

El área diferencial dentro de la trayectoria rectangular es igual a $dx dy$. Dividimos ambos lados de la ecuación por esta cantidad.

Como da representa un área en el plano X-Y, la ecuación (95) da la componente del rotor normal a ese plano. En el campo bidimensional éste es el rotor total, y

$$\nabla \times \mathbf{E} = k \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \quad (96)$$

Este es idéntico a la ecuación (51). En un campo tridimensional ésta es sólo una componente. La expresión completa para el rotor está dada por la ecuación (47).

Teorema de Stokes. — La discusión de la sección previa se refiere al rotor en un solo punto, es decir, la zona dentro de un rectángulo infinitesimal. Se desea ahora determinar la integral del rotor sobre una superficie de dimensión finita. Esto se hace calculando el rotor en todos los puntos de la superficie y luego integrando. Afortunadamente, hay un teorema de Stokes muy útil que frecuentemente ahorra mucho trabajo.

Consideremos un pequeño rectángulo, señalado con a en la figura 23b, supuesto en un campo vectorial. Hay una circulación en este rectángulo, indicada por las flechas, que corresponde al rotor del campo vectorial en el área a .

Consideremos ahora el rectángulo vecino, indicado con la letra b . También hay una circulación en este rectángulo, correspondiente al rotor del área b . Como los rectángulos a y b tienen un lado en común, el aporte de este lado a la circulación en el rectángulo es igual en valor absoluto, pero de signo opuesto al del otro rectángulo. Por lo tanto, la suma del rotor en el rectángulo a , más el rotor en el rectángulo b , se puede calcular midiendo la circulación alrededor del perímetro del rectángulo, que se obtiene considerando a y b juntos, sin tener en cuenta el aporte del lado común, que, como vimos, es nulo.

Se pueden agregar más rectángulos a estos dos, en cualquier número. La circulación a lo largo de los lados comunes será siempre nula, de modo que, sin importar lo grande que sea el área final, ni cuál sea su forma, la suma del rotor en todos los puntos de una superficie es igual a la circulación en el perímetro que encierra a la superficie. Matemáticamente, la integral curvilínea de un vector, que define la circulación, es igual a la integral superficial del rotor del vector, y el resultado es el teorema de Stokes:

$$\oint \mathbf{E} \cdot ds = \int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot da \quad (97)$$

La validez de este teorema no se limita a una superficie plana. Aunque la explicación anterior ha sido hecha con referencia a la superficie plana de la figura 23, el teorema se aplica, y puede ser rigurosamente demostrado, para una superficie de cualquier forma. La superficie sobre la cual se integra el rotor en la ecuación (97) puede ser, por ejemplo, cóncava, como una taza o una vasija. En este último caso la integración del rotor sobre la superficie de la vasija sería igual a la circulación en el borde de la vasija.

Supongamos que la vasija tenga una tapa colocada en la forma usual. El borde de la tapa y el de la vasija coinciden. Por lo tanto, la integración del rotor sobre la superficie de la vasija debe ser igual a la hecha sobre la superficie de la tapa. En términos abstractos, la integración del rotor sobre una superficie en un campo vectorial, como se indica por el miembro de la derecha en la ecuación (97), es la misma para todas las superficies que tienen un perímetro común, y es independiente de la forma de la superficie.

Comparación de los teoremas. — El teorema de Gauss y el teorema de Stokes son muy similares en su naturaleza, pues relacionan fenómenos de escala grande con fenómenos de escala pequeña, o, lo que es lo mismo, lo macroscópico con lo microscópico.

Si se examina un campo vectorial minuciosamente en un punto particular, como con un microscopio, se encontrará que tiene cierta divergencia en ese punto. Este examen se hace, en realidad, no con un microscopio, sino con una derivada parcial, y la ecuación (86) da la divergencia cuando se conocen las derivadas parciales en el punto.

Pero la divergencia tiene un resultado macroscópico que puede ser detectado sin la ayuda de un microscopio o de una derivada parcial. Este es el flujo. Si sale flujo de un volumen, hay una divergencia dentro de ese volumen, y el teorema de Gauss da la relación entre ambos. Uno de los términos del teorema de Gauss está expresado en función del campo que atraviesa la superficie. Esta superficie es de medida finita y es una cantidad macroscópica. El otro término del teorema está expresado en función de la divergencia en todo el volumen. Ésta es una cantidad microscópica y debe ser considerada punto a punto.

Análogamente, el teorema de Stokes relaciona el efecto macroscópico, circulación a lo largo de una trayectoria cerrada, con el

efecto microscópico, rotor en cada punto de una superficie limitada por esa trayectoria.

Estos teoremas son frecuentemente útiles cuando se conoce la naturaleza microscópica de un campo y se desea conocer la naturaleza macroscópica (esto es, cuando se conocen las derivadas y se desea conocer el campo), o viceversa. Tales aplicaciones se ilustrarán en el próximo capítulo, en el cual continuaremos nuestro estudio del campo eléctrico.

Potencial escalar. — El campo escalar de la altitud sobre el nivel del mar es un campo *potencial*. Es un campo de potencial gravitatorio. Su valor en cada punto se define como el trabajo necesario para mover un cuerpo de la unidad de masa a ese punto desde el nivel del mar, o como la energía potencial ganada por el cuerpo cuando se lo mueve de esa manera.

Una superficie de nivel $-o$, más precisamente, una superficie de altura constante sobre el nivel del mar— es una *superficie equipotencial*.

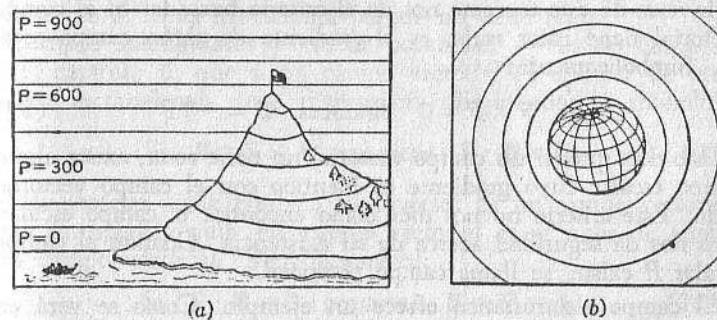


FIG. 24

potencial, pues un cuerpo puede ser movido de un punto a otro de esa superficie sin ningún cambio de potencial gravitatorio y, por lo tanto, sin que se haga ningún trabajo. Las superficies equipotenciales cerca del nivel del mar se muestran en la figura 24a, y las superficies equipotenciales a distancias mayores de la tierra, en la figura 24b.

El *campo gravitatorio* es un campo de fuerzas. Es, por lo tanto, un campo vectorial. Su valor en cada punto es igual, por definición, a la fuerza gravitatoria sobre un cuerpo de la unidad de masa colocado en ese punto. Es un campo dirigido hacia abajo, hacia el centro de la tierra.

El potencial gravitatorio se define en función del trabajo, y

el campo gravitatorio en función de fuerzas, de modo que hay una simple relación entre ellos. El campo es el gradiente, cambiado de signo, del potencial:

$$\mathbf{F} = -\nabla P \quad (98)$$

Aunque esta ecuación está escrita con referencia al campo gravitatorio, expresa una relación general entre fuerza y potencial. El campo de fuerzas se obtiene del campo potencial por derivación. Todo campo potencial tiene un gradiente, y \mathbf{F} puede ser siempre obtenido de un campo potencial. Pero no es siempre posible, conocido el campo de fuerzas, encontrar el correspondiente campo potencial. Éste no siempre existe. Afortunadamente, hay un criterio muy sencillo que nos permite conocer si un campo de fuerzas dado tiene un campo potencial correspondiente o no.

Se mostró en el capítulo II que, si un campo vectorial es el gradiente de algún campo escalar, el campo vectorial no tiene rotor. El inverso de este teorema nos da el criterio buscado: Si el campo vectorial tiene rotor nulo, es el gradiente de algún campo escalar. Simbólicamente:

$$\text{Si } \nabla \times \mathbf{F} = 0 \text{ entonces } \mathbf{F} = -\nabla P \quad (99)$$

Esto dice que, si un campo vectorial no tiene rotor, existe algún campo escalar cuyo gradiente es idéntico con el campo vectorial dado. Este criterio no nos dice cómo encontrar el campo escalar, pero nos da seguridad acerca de su existencia. Cuando el campo escalar P existe, se llama campo potencial.

El campo electrostático ofrece un ejemplo. Como se verá en el siguiente capítulo, el campo electrostático no tiene rotor. Por lo tanto, el corolario de arriba nos dice que existe un campo potencial electrostático. En efecto, es bien conocido que existe un potencial electrostático y que el voltaje es la diferencia de potencial.

El campo magnetostático no tiene rotor en los puntos donde no hay corriente; esto se discutirá en el capítulo VI. Por lo tanto, si un alambre conduce corriente, hay a su alrededor un campo magnético de rotor nulo. Se puede encontrar un campo escalar de potencial magnético en el espacio que rodea al conductor. (Si el alambre es recto, las superficies equipotenciales del campo escalar potencial magnético son cilindros con el conductor como eje.) Pero dentro del alambre, donde fluye la corriente, habrá un campo magnético cuyo rotor no es nulo. Dentro del alam-

bre, por consiguiente, no puede encontrarse un potencial magnético*.

El flujo de cantidad de calor en un cuerpo sólido nos ofrece otro ejemplo de un campo cuyo rotor es nulo. Según el criterio mencionado, debe existir un campo potencial. Sabemos que existe. Es la temperatura y el gradiente de la temperatura, es un campo vectorial proporcional al flujo de cantidad de calor.

En el campo gravitatorio, una superficie contendrá todos los puntos al nivel del mar (potencial = 0) y otra todos los puntos a 100 metros por encima del nivel del mar (potencial = 100), y así sucesivamente. (Véase la fig. 24a y b.) Por estas superficies equipotenciales el espacio se divide en capas, delgadas llamadas láminas.

Sólo campos vectoriales irrotacionales tienen esta propiedad de dividir el espacio en láminas por medio de las superficies equipotenciales. Siguiendo a James Clerk Maxwell, un campo vectorial sin rotor se llama un campo *laminar*. A veces, a un campo laminar se lo llama irrotacional porque no tiene rotor.

Campos solenoidales y vector potencial. — Se vió también, en el capítulo II, que si un campo vectorial es el rotor de otro campo vectorial, no tiene divergencia. Expresado en símbolos:

$$\text{Si } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \text{ entonces } \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (100)$$

Este teorema tiene también su inversa: Si un campo vectorial tiene divergencia nula, ese campo vectorial es el rotor de algún otro campo vectorial. Simbólicamente:

$$\text{Si } \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \text{ entonces } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (101)$$

En otras palabras, si un campo vectorial tiene divergencia nula (lo que es cierto, por ejemplo, en un campo de velocidades de un líquido incompresible), se puede encontrar algún otro campo vectorial, que llamaremos \mathbf{A} , tal que el rotor de \mathbf{A} es igual en todos los puntos a \mathbf{B} . Podemos, al menos, esperar que este campo pueda encontrarse. El proceso de encontrarlo es algunas veces difícil y otras imposible, pero si \mathbf{A} existe, se le da el nombre de *vector potencial*, sea o no posible hallarlo.

* El significado físico de esto es que, si se pudiera colocar un polo magnético dentro del conductor (por ejemplo, si fuera de mercurio), el trabajo necesario para mover el polo magnético de un punto a otro dependería de la trayectoria seguida, no pudiendo, en consecuencia, asignársele al potencial un valor.

El potencial vectorial es, en cierto sentido, análogo al potencial escalar anteriormente indicado. Sin embargo, se debe señalar que se trata de una cantidad enteramente diferente. Si un campo vectorial no tiene ni rotor ni divergencia, tendrá potencial escalar y vectorial, y serán cantidades distintas con pequeña similitud entre sí.

Un campo vectorial sin divergencia se llama solenoideal o sin fuentes. Todas las líneas de flujo son curvas cerradas, que no tienen ni comienzo ni fin. Esto es una consecuencia de que su divergencia sea nula. Todo campo solenoideal tiene un vector potencial. Todos los campos magnéticos son solenoideales y, por lo tanto, existe siempre un potencial magnético vectorial.

Ejemplo. — La figura 16a, página 38, muestra el agua que circula en una bañera circular. Puede ser interpretado como el campo magnético dentro de un conductor circular. Supongamos un sistema de coordenadas cilíndricas, en las cuales r es la distancia radial al eje z , la coordenada z es una distancia paralela a este eje y θ es el mismo ángulo que en coordenadas polares [ecuación (69)]. Se supone que el sistema de coordenadas tiene su eje z coincidiendo con el eje de rotación de la figura 16. El sistema de coordenadas cilíndricas es el que se adapta mejor a esta clase de problemas. (Las fórmulas en función de las coordenadas cilíndricas se dan en la tabla II.)

El campo de la figura 16a, ya sea considerado como la velocidad del agua o como la intensidad del campo magnético, se expresa por las ecuaciones

$$\begin{aligned} H_r &= 0 \\ H_\theta &= ar \\ H_z &= 0 \end{aligned} \quad (102)$$

en que a es una constante conocida. Se desea determinar los potenciales escalar y vectorial de este campo.

Para saber si existe campo escalar buscamos el rotor del campo dado \mathbf{H} . Como \mathbf{H} es bidimensional, podemos usar la ecuación (82) (también se puede usar la expresión completa para el rotor que se da en la tabla II), con el resultado siguiente:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{k} \left(a \frac{\partial r}{\partial r} - 0 + \frac{ar}{r} \right) = \mathbf{k} 2a \quad (103)$$

Vemos que el rotor no es cero. Luego, el campo no es laminar, y sería inútil tratar de encontrarle el potencial escalar.

Para determinar si existe un potencial vectorial se halla la divergencia de \mathbf{H} . Por medio de la ecuación (81) vemos que esta divergencia es nula, pues lo es cada término de dicha expresión. Es, por lo tanto, posible encontrar un potencial vectorial. Llámemos \mathbf{A} al supuesto campo potencial vectorial, y tratemos de encontrarle.

El rotor de \mathbf{A} debe ser \mathbf{H} . Si colocamos las pequeñas ruedecitas, medidoras del rotor, de la figura 18, con sus ejes paralelos al vector \mathbf{H} , como en la figura 25, el campo potencial vectorial \mathbf{A} las hará girar a la velocidad relativa apropiada. (Otra forma de encarar el problema es el siguiente: Si todas las ruedecitas de la figura 25 giran con la velocidad adecuada, proporcional a la intensidad de \mathbf{H} , imprimirán al líquido hipotético, en el cual se las supone, una velocidad equivalente al campo potencial vectorial \mathbf{A} .)

Observando la figura 25 se ve que una solución posible para el potencial vectorial sería un campo vertical que tuviera cero de intensidad en el centro del recipiente y que aumentara su intensidad verticalmente hacia abajo al acercarse a los bordes. Esto haría girar a todas las ruedecitas en la dirección apropiada y sugiere un campo potencial vectorial paralelo al eje Z . La intensidad de este campo potencial vectorial variaría con el radio; pero como, muy presumiblemente, sería simétrico, no variaría ni con θ ni con z . La variación del potencial vectorial con el radio nos es desconocida y puede ser expresada simbólicamente mediante $f(r)$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} A_r &= 0 \\ A_\theta &= 0 \\ A_z &= f(r) \end{aligned} \quad (104)$$

Esta formulación para \mathbf{A} se basa simplemente en una hipótesis. Si es correcta, satisfará la exigencia que $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{H}$. Para que

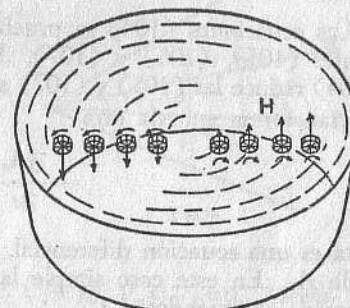


FIG. 25

esto sea cierto es necesario que cada componente del rotor de \mathbf{A} iguale a la correspondiente componente de \mathbf{H} .

Escribiendo las componentes de $\nabla \times \mathbf{A}$, usando la tabla II e igualando con las componentes de \mathbf{H} obtenidas de la ecuación (102), encontramos las siguientes tres ecuaciones que deben ser satisfechas:

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial z} \right) = 0 \quad (105)$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} = ar \quad (106)$$

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (107)$$

Las ecuaciones (104) se prueban reemplazándolas en las ecuaciones (105), (106) y (107). La sustitución de las ecuaciones (104) reduce las (105) y (107) a identidades, y la ecuación (106) se transforma en esta otra:

$$-\frac{\partial A_z}{\partial r} = ar \quad (108)$$

Ésta es una ecuación diferencial, cuya solución es la función buscada A_z . En este caso simple la solución se encuentra por integración, obteniéndose:

$$A_z = b - \frac{ar^2}{2} \quad (109)$$

en la cual b es una constante de integración que puede tomar cualquier valor* (que no sea función de las variables).

A_z se obtiene de la ecuación (109); A_r y A_θ , de la ecuación (104). Las tres dan la solución buscada a nuestro problema y representan un campo cuyo rotor es \mathbf{H} . Sin embargo, éste no es el único campo cuyo rotor es \mathbf{H} . Un campo no está definido sólo especificando su rotor. Se verá en un capítulo posterior que podría darse también la divergencia de \mathbf{A} . Por ahora es suficiente decir que el potencial vectorial \mathbf{A} , determinado más arriba, es de particular interés porque no solamente tiene el rotor apropiado

* Obsérvese que se puede sumar a \mathbf{A} cualquier función irrotacional, pues su rotor es nulo.

en cada punto, sino que también tiene divergencia nula en todo el campo.

PROBLEMAS

1. Dedúzcase una expresión para el rotor en coordenadas polares, como en la ecuación (82), no solamente deduciéndola a partir de la expresión en coordenadas rectangulares mediante las transformaciones indicadas, sino también calculando la circulación en el perímetro que rodea al área indicada en la figura adjunta.

2. La figura 19a muestra un campo irrotacional que, por lo tanto, debe tener un campo potencial escalar. Suponiendo que el potencial en el origen de coordenadas sea cero, encuéntrese el potencial en todos los puntos. En una representación del campo dibújense las líneas equipotenciales del mismo.

3. Estúdiense la figura 19b y determíñese si es posible trazar las líneas equipotenciales. ¿Existe rotor distinto de cero?

4. ¿Admite el campo vectorial de la figura 20 un campo potencial escalar? ¿Puede ser determinado?

5. El potencial gravitatorio es inversamente proporcional a la distancia al centro de la tierra. ¿Cuál es la naturaleza del campo gravitatorio según la ecuación (98)?

6. ¿Existen superficies equipotenciales dentro del canal de la figura 17 (superficies que definen el potencial escalar del campo de velocidades dado)? ¿Pueden ser ubicadas?

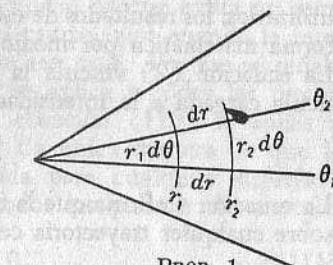
7. Se define un campo vectorial \mathbf{V} por $V_x = 10$, $V_y = V_z = 0$. Encuéntrese su potencial escalar. Encuéntrese su potencial vectorial. Ambos son nulos en el origen de coordenadas.

8. Considerérese la posibilidad de la existencia de un campo vectorial con divergencia y rotor nulo en todos sus puntos. Impóngase luego la exigencia de que la intensidad del campo no debe ser infinita en ningún punto. Exíjase luego también que la intensidad del campo sea nula a una distancia infinita en todas las direcciones.

9. Partiendo de un elemento de volumen convenientemente pequeño (como en la fig. 22a, pero con una forma adaptada al sistema de coordenadas), determíñese el flujo que sale de ese volumen y relacioneselo con la expresión de la divergencia en coordenadas esféricas (tabla II).

10. Un campo vectorial está definido por $E_r = \frac{B}{r}$, $E_\theta = 0$, $E_\phi = 0$ (coordenadas cilíndricas). Determinar un potencial vectorial \mathbf{A} tal que $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{E}$ y $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. ¿Puede \mathbf{A} ser cero a una distancia infinita?

11. Un campo vectorial está definido por $E_r = \frac{B}{r^2}$, $E_\theta = 0$, $E_\phi = 0$ (coordenadas esféricas). Determinar el potencial vectorial \mathbf{A} tal que $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{E}$, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ y $\mathbf{A} = 0$ a cualquier distancia finita.



PROB. 1

CAPÍTULO IV

CAMPO ELECTROSTÁTICO

En el capítulo I describimos cuatro experimentos. Con el fin de utilizarlos, los resultados de estos experimentos fueron expresados en forma matemática por medio de las ecuaciones (2), (4) y (10). La ecuación (2) vincula la fuerza que se ejerce sobre una partícula cargada a la intensidad del campo eléctrico:

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E} \quad (2)$$

La ecuación 4 afirma que la integral lineal del campo electrostático sobre cualquier trayectoria cerrada es nula:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (4)$$

La ecuación (10) afirma que el flujo total que sale de cualquier superficie cerrada es proporcional al exceso de carga positiva dentro de la superficie:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \oint \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = Q \quad (10)$$

La ecuación (2) es cierta *en todos los puntos*.

La ecuación (4) es cierta con *cualquier* trayectoria cerrada de integración.

La ecuación (10) es cierta para *cualquier* superficie cerrada de integración.

Las ecuaciones (2), (4) y (10) contienen todos los conocimientos necesarios de electrostática. No es necesaria ulterior experimentación para desarrollar la ciencia de la electrostática en el vacío o en material isótropo. Las deducciones matemáticas basadas en estas fórmulas determinarán cualquier campo electrostático

cuando se conozcan las cargas que producen el campo. El cálculo matemático necesario no es, sin embargo, fácil, en general. Este capítulo será dedicado a los principios fundamentales de la solución matemática, seguidos de algunos ejemplos.

Consideremos, primero, la ecuación (4). La aplicación del teorema de Stokes [ecuación (97)] da:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (110)$$

De esta ecuación se deduce que el campo electrostático es irrotacional. Esta conclusión no resultaría de una medición particular que diera valor nulo para la integral curvilinear, pues este resultado experimental no excluye la posibilidad de que exista un rotor distinto de cero en varios puntos del campo, aun cuando la integral sobre la superficie de integración sea nula. Por eso se señaló especialmente que la ecuación (4) se aplica a todas las trayectorias cerradas, y, por lo tanto, la ecuación (110) se aplica a *todas* las superficies de integración. La única manera de que la ecuación (110) pueda resultar válida para cualquier superficie es que el rotor de \mathbf{E} sea nulo en todos los puntos. Se cumple, por lo tanto,

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (111)$$

De la ecuación (111) se deduce que el campo electrostático es laminar y que admite una función potencial. Si llamamos V al potencial, el campo eléctrico será [por la ecuación (98)] el gradiente de V (con signo negativo), es decir,

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (112)$$

A menudo se puede encontrar V en la solución de un problema electrostático. Resulta entonces fácil obtener \mathbf{E} con la ecuación (112).

Otra relación fundamental es la que se expresa por la ecuación (10). La aplicación del teorema de Gauss a esta ecuación da:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \int (\nabla \cdot \mathbf{D}) dv = Q \quad (113)$$

En cualquier lugar donde no haya cargas eléctricas ($Q = 0$) se tiene $\int \nabla \cdot \mathbf{D} dv = 0$. De aquí resulta que la divergencia de \mathbf{D} es nula.

Cuando la carga no es cero, la divergencia no se anula. Es conveniente expresar la divergencia en función de la densidad de la carga eléctrica (carga por unidad de volumen) que llamaremos ρ . La carga dentro de una superficie cerrada es igual a la integral de la densidad de carga aplicada al volumen considerado.

Si expresamos la carga Q , en la ecuación (113), como $\int \rho dv$, tendremos:

$$\int (\nabla \cdot \mathbf{D}) dv = \int \rho dv \quad (114)$$

Las dos integrales que aparecen en esta ecuación son integrales de volumen. Además, son integrales aplicadas al mismo volumen, esto es, al volumen contenido dentro de la superficie cerrada considerada. La superficie cerrada es completamente arbitraria. Puede de tener cualquier superficie, forma y ubicación. La ecuación (114) sólo puede cumplirse bajo esta variedad de condiciones si los integrandos son iguales. Es decir:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (115)$$

Dentro de un material homogéneo, donde ϵ no cambia de punto a punto, esta última fórmula puede ser escrita:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (116)$$

Esta es una expresión que vincula el campo eléctrico a la densidad de carga. Es también posible vincular el potencial eléctrico a la densidad de carga sustituyendo la ecuación (112) en la (116), dando:

$$\nabla \cdot (\nabla V) = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (117)$$

que se escribe

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (118)$$

Recordando el significado del operador *nabla* resulta evidente que esta ecuación es una ecuación de derivadas parciales, de segundo orden. Su importancia es tan señalada que se le asigna un nombre especial: *ecuación de Poisson*. En el caso especial

que se aplique a una región del espacio donde no hay cargas, se reduce a

$$\nabla^2 V = 0 \quad (119)$$

Esta es una ecuación diferencial aun más famosa que la anterior, llamada *ecuación de Laplace*.

El estudio de la electrostática es, esencialmente, la solución de estas ecuaciones. Para resumir:

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (112)$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (118)$$

Estas ecuaciones definen completamente un campo electrostático. Consideraremos ahora su aplicación a problemas específicos.

Conductores. — Material conductor es aquel en el que puede circular la corriente. Los materiales conductores contienen electricidad libre que se desplaza por la acción de un campo eléctrico. Esto se cumple aun cuando el conductor sea eléctricamente neutro, es decir, sin exceso de carga de cualquier signo.

Como las cargas eléctricas se pueden mover dentro del conductor, no puede haber campo electrostático dentro del mismo. Si lo hubiera, las cargas se desplazarían hasta reducir el campo a cero.

Por lo tanto, dentro de un conductor, en el caso electrostático, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= 0 \\ \text{de la cual resulta: } V &= \text{constante} \end{aligned} \quad (120)$$

Como \mathbf{E} es cero, se deduce que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ y, por lo tanto, $\rho = 0$. No puede haber carga eléctrica dentro de un conductor. Pero \mathbf{E} no es necesariamente cero en la superficie de un conductor. En consecuencia, puede haber allí cargas eléctricas. La consecuencia es que en un conductor toda la carga se deposita en la superficie.

Podemos deducir ciertas conclusiones acerca del campo que hay fuera de la superficie del conductor. Como todo el conductor está al mismo potencial [ecuación (120)], la superficie del conductor es equipotencial. El campo eléctrico es siempre normal a las superficies equipotenciales y es el gradiente del potencial, el cual, a su vez, es siempre normal a las superficies equipoten-

ciales del campo del cual él se deriva, como se consideró en el capítulo II. Por lo tanto, el campo electrostático, en la superficie de cualquier conductor, será normal a la superficie del conductor.

El párrafo previo da la dirección del campo en la superficie del conductor. Se puede decir algo sobre la intensidad del campo. Como la carga en el cuerpo conductor está distribuida sobre la superficie, es conveniente hablar de la densidad de carga en términos de carga por unidad de área. Así como se usó ρ en la ecuación (114) para representar la carga por unidad de volumen, usaremos ahora σ para representar la carga por unidad de superficie. La carga total resulta ser, entonces:

$$\int \sigma da = Q \quad (121)$$

Si la densidad superficial de una superficie conductora es σ , debe haber σ líneas de flujo que salen normalmente a la superficie de cada unidad de área. Esto se deduce del hecho de que una línea sale de cada unidad positiva de carga. La densidad de flujo electrostático en el espacio que rodea al conductor es igual a la densidad de carga en la superficie y en dirección normal a la superficie. D es la densidad de flujo, y su componente normal a la superficie (que puede escribirse D_n) es:

$$D_n = \epsilon E_n = \sigma \quad (122)$$

Si se conoce la distribución de carga en la superficie del conductor, se puede calcular el campo eléctrico en el espacio que rodea al conductor. Análogamente, si se conoce el campo, se puede calcular la distribución de carga. De ordinario, sin embargo, no se conoce ninguno de los dos, y ambos deben ser deducidos del hecho de que la superficie del conductor es equipotencial y del conocimiento de la carga total. Esto hace la solución más complicada.

Campo de una esfera cargada. — Consideremos un conductor esférico aislado con una carga Q conocida. Vamos a encontrar el campo eléctrico en el espacio que rodea la esfera, que supondremos lleno con un material de constante dieléctrica relativa.

El problema estará resuelto si encontramos un potencial que satisfaga la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 V = 0 \quad (119)$$

y, al mismo tiempo, las siguientes condiciones de contorno: 1) la

superficie de la esfera es una superficie equipotencial, y 2) la carga total en la esfera es Q .

La expresión del laplaciano en coordenadas polares fué dada en la ecuación (67), pero para este problema de la esfera será más conveniente usar coordenadas esféricas. En este sistema se ubica cada punto del espacio por medio de la distancia radial r y dos ángulos, θ y ϕ , como en la ecuación (26). La deducción del laplaciano en coordenadas esféricas no se dará aquí (puede encontrarse en los libros de matemáticas superiores). El resultado está incluido en la tabla II. Es el siguiente:

$$\begin{aligned} \nabla^2 V = & \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \\ & + \frac{\cos \theta}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (123)$$

Una solución de nuestro problema será, por tanto, una expresión del potencial que haga a la expresión (123) idénticamente nula y que, al mismo tiempo, haga equipotencial a la superficie de la esfera.

Afortunadamente, el problema puede ser muy simplificado por razones de simetría. Como nuestra esfera cargada está aislada en el espacio, el campo será independiente de la dirección considerada, dependiendo sólo del radio. No se puede definir otra dirección que no sea la radial. Para definir cualquier otra necesitaríamos algún otro objeto en el espacio que sirviera de referencia.

Puesto que no hay distinción entre distintas direcciones, el potencial V no puede ser distinto al pasar de una a otra. Debe ser el mismo para todos los valores de θ y ϕ (nos referimos a la fig. 26, suponiendo el centro de la esfera en el centro del origen de coordenadas), variando sólo cuando varía r .

Como V es una función de r y no varía con las otras dos variables, la ecuación de Laplace se reduce a la siguiente:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad (124)$$

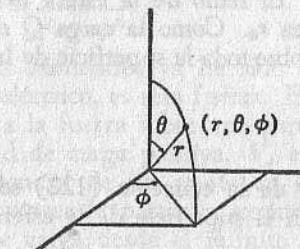


FIG. 26

Ésta es una ecuación diferencial ordinaria que puede reducirse a una ecuación lineal de coeficientes constantes. La solución es:

$$V = \frac{a}{r} + b \quad (125)$$

en la cual a y b son constantes arbitrarias. Para probar la corrección de esta solución la sustituimos en la fórmula (123), que se reduce, con esto, a una identidad.

El siguiente paso es calcular a y b teniendo en cuenta las condiciones de contorno*. Supongamos que el potencial a una distancia muy grande de la esfera no esté afectado por la carga de la misma, de modo que cuando $r = \infty$, $V = 0$. La sustitución de estos valores en la ecuación (125) da $b = 0$, y la ecuación se reduce a la siguiente:

$$V = \frac{a}{r} \quad (126)$$

La constante que queda, a , debe ser calculada en función de la carga sobre la esfera.

El radio de la esfera tiene que ser conocido; supongamos que sea r_0 . Como la carga Q debe estar distribuida homogéneamente sobre toda la superficie de la esfera, la carga por unidad de área es:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi r_0^2} \quad (127)$$

y de la ecuación (122) se deduce que la intensidad del campo en la superficie de la esfera, de dirección radial, será:

$$F = \frac{Q}{4\pi \epsilon r_0^2} \quad (128)$$

* Las soluciones de las ecuaciones diferenciales contienen, en general, términos que deben ser calculados a partir de las condiciones de contorno. Estos términos (constantes o funciones) se anulan cuando la solución se sustituye en la ecuación diferencial y, por lo tanto, no pueden ser determinados a partir de ella. Pero cualquier solución físicamente útil debe coincidir con ciertos valores conocidos del contorno, y esto da un medio de calcular los coeficientes indeterminados. La solución de una ecuación diferencial que concuerda con las condiciones iniciales y de contorno, es una solución única. Específicamente, se obtiene una solución única de la ecuación de Laplace si el laplaciano es cero en todo el espacio y si la función satisface ciertos valores de contorno sobre una superficie, anulándose en el infinito. (Véase también la nota ** al pie de la página 117.)

Como el potencial no varía con θ ni ϕ , el gradiente de potencial es radial en todos los puntos, y el módulo de la intensidad del campo eléctrico en cualquier punto es*:

$$E = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{a}{r^2} \quad (129)$$

Esta fórmula es válida en todo el espacio y, particularmente, en la superficie de la esfera. Igualando (129) con (128) con la condición $r = r_0$, se obtiene:

$$\frac{a}{r_0^2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon r_0^2} \quad (130)$$

de la cual resulta $a = \frac{Q}{4\pi \epsilon}$. Finalmente, en cualquier punto exterior a la esfera cargada

$$V = \frac{Q}{4\pi \epsilon r} = \frac{Q}{4\pi \kappa \epsilon_0 r} \quad (131)$$

$$E = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} = \frac{Q}{4\pi \kappa \epsilon_0 r^2}$$

La interpretación física de estas cantidades ya ha sido dada, pero es útil repetirla. E , el campo eléctrico, es una fuerza. En un punto, el campo eléctrico es igual a la fuerza sobre una partícula exploradora que contiene la unidad de carga positiva. V , el potencial, representa trabajo. El potencial de un punto en el espacio es el trabajo necesario para mover la partícula exploradora que contiene la unidad positiva de carga desde el infinito hasta ese punto.

El sentido del campo eléctrico es siempre hacia afuera en los cuerpos positivamente cargados, pues la fuerza sobre la partícula exploradora será de repulsión. Los potenciales aumentan a medida que nos acercamos a un cuerpo positivamente cargado, porque es necesario hacer trabajo para mover la partícula contra las fuerzas del campo.

Condensador esférico. — Una esfera conductora cargada, cuyo radio es a , está situada concéntricamente dentro de una esfera hueca B , conductora, cuyo radio es b , como se indica en la figura

* Véase la expresión del gradiente en coordenadas esféricas en la tabla II.

ra 27. El campo eléctrico en el espacio entre las esferas A y B es idéntico al que se obtendría en la misma región si no estuviera la esfera B. Tiene dirección radial y su intensidad es

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \quad (132)$$

La esfera exterior B tiene una carga eléctrica igual en valor absoluto y opuesta en signo a la de A. El campo eléctrico termina en la superficie interna de B. Las dos esferas constituyen un condensador. Tienen una cierta capacidad y existe una diferencia de potencial entre ellas. Nótese que, con una carga dada, el campo eléctrico E depende de κ , constante dieléctrica del medio interpuesto entre las esferas. En cambio, el vector D no depende de esta constante.

Voltaje. — Es esencialmente la *diferencia de potencial* entre dos puntos (ordinariamente entre dos conductores metálicos) y se lo define como:

$$V_{12} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (133)$$

Es decir, la diferencia de potencial entre dos puntos, 1 y 2, es la integral curvilínea a lo largo de cualquier trayectoria desde el punto 1 al punto 2. Este valor representa el exceso de potencial del punto 1 sobre el punto 2.

Es interesante notar que la diferencia de potencial entre dos puntos es el trabajo hecho por la fuerza eléctrica sobre la unidad positiva de masa eléctrica cuando ésta se mueve de un punto a otro. Sustituyendo la ecuación (2) en la ecuación (133), obtenemos:

$$V_{12} = \frac{1}{Q} \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (134)$$

Como la integral representa un trabajo, podemos poner

$$V_{12} = \frac{W_{12}}{Q} \quad (135)$$

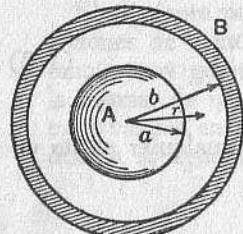


FIG. 27

La diferencia de potencial entre las caras del condensador esférico se encuentran situando el punto 1 en la superficie A y el punto 2 en la superficie B. La integración se simplifica si los puntos 1 y 2 están en el mismo radio, pues entonces la trayectoria de integración es paralela al campo eléctrico. En este caso obtenemos:

$$V_{AB} = \int_a^b E dr = \int_a^b \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} dr = \frac{Q(b-a)}{4\pi\epsilon ab} \quad (136)$$

Capacidad de un condensador es, por definición, la carga dividida por la diferencia de potencial

$$C = \frac{Q}{V} \quad (137)$$

La capacidad del condensador esférico queda expresada por la fórmula

$$C = \frac{4\pi\epsilon ab}{b-a} \quad (138)$$

determinada completamente por la geometría y el material del condensador.

Es raro encontrar referencias a la capacidad de una esfera aislada. Este caso puede considerarse como límite del anterior cuando el radio de la esfera exterior tiende a infinito. Si en la ecuación (138) hacemos tender b a infinito, obtenemos el siguiente valor límite de la capacidad:

$$C = 4\pi\epsilon a \quad (139)$$

La capacidad de cualquier condensador es proporcional a ϵ , la constante dieléctrica. Este hecho sugiere un método para medir constantes dieléctricas de materiales. Tal método fué usado por Faraday y otros para la determinación clásica de constantes dielectrísticas.

Polarización. — Es conveniente hablar de la constante dieléctrica relativa a materiales como vidrio, aceite o polistireno. Para los cálculos debemos usar el valor apropiado de κ , pero no resulta claro si no damos más explicaciones de *por qué* el efecto de una partícula cargada sobre otra depende de la naturaleza del material interpuesto entre ellas. ¿Por qué el campo eléctrico es menor en cualquier dieléctrico sólido o líquido que en el vacío?

Se supone que todos los materiales no conductores contienen cargas positivas y negativas ligadas, formando parte, probablemente, del mismo átomo. Cuando una sustancia de esta clase se coloca en el interior de un campo eléctrico, las cargas positivas tienden a moverse en un sentido y las negativas en el opuesto, pero como están ligadas sólo pueden moverse en tanto la naturaleza elástica de la ligadura lo permita. Cada átomo está un poco deformado por la tensión del campo eléctrico, y se hace positivo por un lado y negativo por el otro.

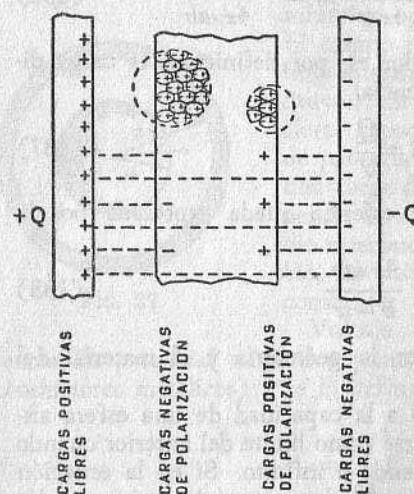


FIG 28

en la derecha. El resultado de esta orientación de las cargas consiste en que la superficie de la izquierda del material considerado es predominantemente negativa, y la superficie de la derecha, positiva. Cualquier centímetro cúbico del material es, sin embargo, neutro, pues contiene igual número de cargas de ambos signos.

De esta manera, sin ninguna corriente de cargas en el material, sino simplemente como resultado de la polarización, éste se hace equivalente a una superficie cargada. Esto explica por qué la intensidad del campo eléctrico E es menor en un dieléctrico que en el espacio vacío: las cargas superficiales de polarización hacen de pantalla y disminuyen el campo en el interior de la sustancia. Las cargas superficiales de polarización no son tenidas en cuenta en las fórmulas de este libro. Su efecto se representa

introduciendo adecuadamente la constante relativa κ . Sería posible desarrollar, si se deseara, una teoría matemática completa en términos de polarización, que es lo que se hace en los tratados más extensos de electrostática.

Ley de la inversa del cuadrado. — En el espacio que rodea a una esfera con carga Q_1 existe un campo eléctrico radial. Su intensidad está dada por la ecuación (131), haciendo $Q = Q_1$. Se tiene:

$$E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon r^2} \quad (140)$$

Una segunda esfera, con carga Q_2 , se mueve en el campo eléctrico de la primera esfera. Se trata de calcular la fuerza ejercida sobre esta segunda esfera por el campo de la primera.

Por la ecuación (2) tenemos:

$$F = Q_2 E_1 \quad (141)$$

Si la distancia entre los centros de las esferas es r , la ecuación (140) nos da:

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon r^2} \quad (142)$$

Ésta es la bien conocida *ley de Coulomb*. Esta ley fué descubierta experimentalmente en la segunda mitad del siglo pasado por Coulomb, que usó su balanza de torsión recientemente inventada. Gran parte de la teoría de la electrostática fué deducida de este modo. En nuestra presente explicación, sin embargo, deducimos la ley de Coulomb de los experimentos descritos en el capítulo I.

Debemos hacer una importante observación con respecto a la ecuación (142). Ésta es exacta sólo si las dos esferas cargadas están suficientemente separadas, de tal manera que una de ellas no perturba la distribución de cargas en la otra. Si la carga de la primera esfera fuera redistribuida en forma apreciable, el campo eléctrico ya no sería estrictamente radial en todos los puntos, desapareciendo la simetría esférica. Si el radio de cada esfera es pequeño comparado con la distancia entre ellas, no hay ninguna perturbación apreciable y la ecuación (142) es exacta. Por razones de rigor matemático consideramos el caso límite: las cargas Q_1 y Q_2 se consideran concentradas en puntos y no distribuidas en esferas. Pero esto tiene la desventaja de ser físicamente impo-

sible. Podemos señalar que la fuerza es inversamente proporcional a ϵ y, por lo tanto, menor en cualquier dieléctrico que en el vacío. Dos cuerpos cargados en aceite se atraen con menos fuerza que si están en el aire.

Campo dentro de una esfera hueca cargada. — Es bastante difícil comprobar la ley de Coulomb con gran exactitud, pues las fuerzas que hay que medir son muy pequeñas. La mejor verificación de la ley está basada en el resultado experimental conocido de que dentro de una esfera cargada, hueca, la fuerza sobre la partícula exploradora es nula. Esta verificación, hecha por Cavendish aun antes de la medición directa de la fuerza hecha por Coulomb, y repetida con mayor exactitud por Maxwell en la segunda mitad del siglo diecinueve, es una prueba experimental de la ley de Coulomb, pues si la fuerza obedeciera a una ley diferente, habría un campo resultante en el interior de la esfera. Esto se prueba integrando el campo debido a las cargas distribuidas homogéneamente sobre la superficie de la esfera.

Vamos a deducir este resultado de lo expuesto en capítulos precedentes, partiendo de la ecuación de Laplace. Consideremos cualquier superficie conductora cerrada que rodee una zona del espacio. Como la superficie es conductora, debe ser equipotencial. Si una línea de flujo entrara al interior de la superficie, debería ser normal a la superficie. Ninguna de esas líneas puede terminar en el interior, pues en el punto terminal habría divergencia no nula, y esto es incompatible con la ecuación de Laplace. Tampoco puede terminar ninguna línea de flujo en una superficie equipotencial habiéndose originado en ella, pues si ello ocurriera, el campo tendría rotor no nulo, lo que es también incompatible con la ecuación de Laplace. Por lo tanto, las líneas de flujo no entran al interior de la esfera, lo que significa que dentro de una esfera conductora el campo es nulo (si no contiene carga en el espacio interior).

El potencial integral. — Mediante la ecuación (112) podemos encontrar el campo eléctrico si conocemos el campo potencial. La distribución de las cargas se obtiene de la ecuación (115). En un material homogéneo estas relaciones se pueden incluir en la llamada fórmula de Poisson, que liga directamente la distribución de cargas con el potencial. Se expresa así:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (118)$$

Como las operaciones diferenciales que aparecen en el laplaciano son muy sencillas de hacer, podemos encontrar fácilmente la distribución de las cargas si conocemos el potencial.

En los problemas usuales, sin embargo, no conocemos el campo potencial como punto de partida. Más a menudo se conoce la distribución de cargas y se busca el campo potencial. La ecuación (118) resulta entonces una ecuación diferencial más o menos complicada, según los casos. Un ejemplo muy sencillo es la determinación del campo de una esfera. Sería muy útil poder encontrar una expresión explícita que diera el potencial en función de la carga sin necesidad de resolver la ecuación diferencial. Esto se puede lograr, y el resultado se obtiene en forma de integral.

El potencial en un punto situado a una distancia r_1 del centro de una pequeña esfera con carga Q_1 es [según la ecuación (131)]:

$$V = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon r_1} \quad (143)$$

Si hay también una segunda esfera cargada, el potencial en el punto en consideración será:

$$V = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon r_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon r_2} \quad (144)$$

Si hay muchos cuerpos cargados, el potencial en un punto será la suma de los potenciales debidos a cada esfera:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum \frac{Q}{r} \quad (145)$$

Finalmente, si la carga está distribuida en el espacio, con densidad (carga por unidad de volumen) representada por la letra ρ , la cantidad de carga en un pequeño volumen dv será ρdv , y el potencial toma la forma de una integral, que suma las contribuciones de cada carga infinitesimal:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho dv}{r} \quad (146)$$

Esta es la expresión deseada de la carga en función del potencial. El significado surge claro de su deducción: el numerador es el elemento diferencial de carga, r es la distancia de ese elemento de carga al punto cuyo potencial buscamos, y la integra-

ción da la suma de todos los efectos de las cargas presentes. Los límites de integración son tales que incluyen todas las cargas. Si las cargas estuvieran en una región esférica, por ejemplo, la integración se haría en todo el volumen de la esfera. Si, en cambio, la carga estuviera distribuida en la superficie de la esfera, el elemento diferencial de carga sería σda en lugar de ρdv , y la integración se haría sobre la superficie.

La distancia r depende de las coordenadas del punto cuyo potencial buscamos y de las coordenadas del elemento de carga. La expresión de la distancia es, desgraciadamente, tan complicada, que la integración es imposible de hacer, excepto en los campos eléctricos más simples.

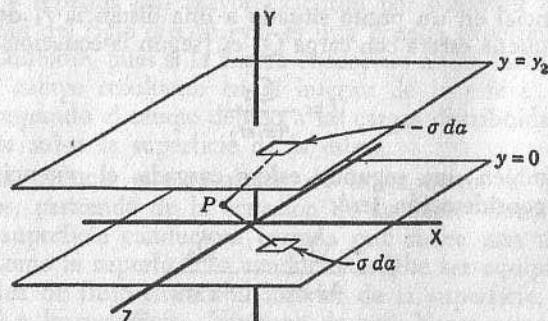


FIG. 29

tricos más simples. Sin embargo, el método general es de gran importancia para determinar la radiación de antenas. Preparándonos para esta aplicación, damos a continuación un ejemplo sencillo.

Ejemplo. — Consideremos el campo eléctrico entre dos planos paralelos uniformemente cargados. Los planos son de extensión infinita. El plano inferior tiene una carga σ por unidad de área, y el superior, $-\sigma$ por unidad de área. Se eligen las coordenadas con los ejes $X-Z$ en el plano inferior. El punto P es cualquier punto de la región intermedia, y sus coordenadas son x y z . En un área infinitesimal, da , situada en $(x, 0, z)$, hay una carga eléctrica $\sigma da = \sigma dx dz$, y directamente sobre ella, en el plano superior, en el punto de coordenadas (x, y_2, z) , hay una carga opuesta $-\sigma dx dz$. La distancia de la carga eléctrica situada en el plano inferior al punto P es $\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2 + (z - z_1)^2}$, y la de la carga en el plano superior a P es $\sqrt{(x - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$.

La integral se escribe ahora:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\sigma da}{r} =$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z - z_1)^2}} \right] dx dz \quad (147)$$

El proceso de integración es un poco complicado, pero el resultado es sencillo:

$$V = -\frac{\sigma}{\epsilon} \left(y_1 - \frac{y_2}{2} \right) \quad (148)$$

Este mismo resultado se podría haber obtenido, y mucho más fácilmente, resolviendo la ecuación de Laplace (véase problema 2, pág. 67).

Energía electrostática. — Para crear un campo electrostático es necesario consumir una cierta cantidad de energía. Una cantidad exactamente igual se libera cuando el campo desaparece. Mientras existe campo electrostático, la energía reside en el campo (al menos, esta es la hipótesis usual). Es posible, incluso, determinar la distribución de esta energía en el mismo.

Consideremos dos cuerpos conductores de cualquier forma, tales como A y B de la figura 30. Al principio, ambos están descargados. Vamos sacando gradualmente cargas positivas de B y agregándolas a A . A causa de la fuerza electrostática, es necesario hacer un cierto trabajo para pasar la carga de un cuerpo a otro. Puesto que la energía es la integral curvilínea de la fuerza, y el potencial es la integral curvilínea del campo eléctrico, se deduce de la ecuación (2) que la energía necesaria para transportar una pequeña carga dQ a través de una diferencia de potencial V entre los cuerpos es:

$$\text{Aumento de energía} = VdQ \quad (149)$$

V puede ser expresado en función de la capacidad de los cuerpos y de la carga que ya ha sido colocada en A antes de haber llevado el dQ . Obtenemos entonces:

$$\text{Aumento de energía} = \frac{Q}{C} dQ \quad (150)$$

La energía total entregada al sistema para pasar una carga Q de B a A es la integral de todas las energías debidas al transporte de los elementos diferenciales de carga, y está expresada por

$$\text{Energía} = \int_0^Q \frac{Q}{C} dQ = \frac{Q^2}{2C} \quad (151)$$

Como C es, por definición, $\frac{Q}{V}$, esto puede escribirse así:

$$\text{Energía} = \frac{1}{2} QV \quad (152)$$

La energía total del sistema es, por lo tanto, la mitad del producto de la *carga que hay en uno de los cuerpos por la diferencia*

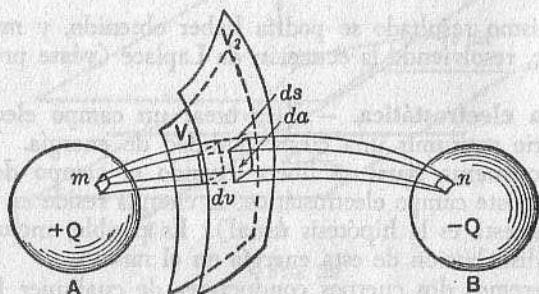


FIG. 30

de potencial entre los mismos. La energía total puede ser subdividida a fin de determinar su distribución en el espacio.

Primero, la energía correspondiente a una carga dada es proporcional, como en la ecuación (152), a la diferencia de potencial a través de la cual se mueve la carga. Sean V_1 y V_2 los potenciales de superficies equipotenciales que encierran al cuerpo A . En la figura 30 se muestra una parte de cada una de estas superficies, que podrían ser metálicas sin alterar el campo eléctrico. En este caso, la carga $+Q$ tendría que pasar del cuerpo A a la superficie metálica con potencial V_1 que envuelve completamente a A . El campo entre A y V_1 habría cesado de existir. Sin embargo, el campo eléctrico entre V_1 y el cuerpo B quedará sin modificarse. La superficie en V_1 seguirá siendo una superficie equipotencial. El mismo flujo anterior seguirá saliendo de ella y

con la misma distribución. Pasemos ahora toda la carga de la superficie V_1 a la V_2 . El campo entre V_2 y B queda sin modificarse, pero habremos eliminado el campo entre las dos superficies equipotenciales. Al mismo tiempo, la energía del sistema se reduce de $\frac{1}{2} QV_1$ a $\frac{1}{2} QV_2$ (siendo V_1 y V_2 los potenciales de las superficies consideradas con respecto a B). Resulta razonable decir que la energía almacenada en el espacio entre las dos superficies era

$$\frac{1}{2} Q(V_1 - V_2) \quad (153)$$

Podemos extender esta discusión a todo el espacio y mostrar cómo la energía se reparte entre las superficies equipotenciales del campo electrostático.

Segundo, la energía puede estar distribuida entre las líneas de flujo. Como cada centésimo de la carga en A corresponde a un centésimo de la energía total [lo que resulta razonable, según la ecuación (152)], y como de allí sale la centésima parte del flujo, podemos decir que esta fracción de la energía está situada en la porción del espacio por donde pasan las correspondientes líneas de flujo. En la figura 30 se indica una sección tubular del espacio entre los cuerpos cargados que contiene al flujo que pasa del elemento de superficie m sobre A al elemento n de superficie sobre B . La energía contenida en el tubo en el espacio de m a n es proporcional al número de líneas de flujo que atraviesan el tubo, contenidas en su interior.

Si el tubo de m a n es una sección diferencial, da , en su intersección con la superficie equipotencial V_2 , y la densidad del flujo eléctrico en ese punto es D , la cantidad de flujo en el tubo es $D \cdot da$. El flujo electrostático total es Q . La energía que hay dentro del tubo es $\frac{D \cdot da}{Q}$ multiplicado por la energía total del campo, o sea, según la ecuación (152),

$$\frac{1}{2} (D \cdot da) V_{AB} \quad (154)$$

Si cortamos este tubo con dos superficies equipotenciales V_1 y V_2 , la energía en la zona del tubo comprendida entre las dos superficies es, según las ecuaciones (153) y (154),

$$\frac{1}{2} (D \cdot da) (V_1 - V_2) \quad (155)$$

Finalmente, si la distancia entre las dos superficies equipotenciales

se reduce a ds —es decir, $V_1 - V_2 = \mathbf{E} \cdot ds$ —, la energía en el elemento diferencial de volumen dv es

$$\frac{1}{2}(\mathbf{D} \cdot d\mathbf{a})(\mathbf{E} \cdot ds) = \frac{1}{2}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E})dv = \frac{\epsilon}{2} E^2 dv \quad (156)$$

Esto se puede interpretar diciendo que la densidad de energía (energía por unidad de volumen) en cualquier punto es $\frac{1}{2}\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$ o $\frac{1}{2}\epsilon E^2$. Indica también que para calcular la energía en una región del espacio hay que integrar sobre tal región:

$$\text{Energía} = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv \quad (157)$$

La energía en todo el campo eléctrico se obtiene integrando en todo el espacio.

Se puede probar directamente que esta integral iguala al total de la energía dada por la fórmula (152). No debe pasarse por alto el hecho de que no existe una prueba definitiva de que la energía se almacene en el campo, como lo sugiere la fórmula (156). Podemos sólo decir que las cosas suceden *como si* esta hipótesis fuera cierta. La distinción es fundamental y está ligada a la gran controversia entre la "teoría del campo" y la "teoría de las acciones a distancia". Esta última predominó durante el siglo diecinueve. Más adelante volveremos sobre esta controversia.

PROBLEMAS

1. Se carga una esfera metálica aislada de radio r_0 con Q unidades. Determíñese la intensidad del campo eléctrico y el potencial en todos los puntos del interior de la esfera.

2. Dos superficies conductoras, planas y paralelas, forman un condensador. Resuélvase la ecuación de Laplace del campo eléctrico entre las superficies cuando tienen cargas $+\omega$ y $-\omega$ por unidad de área. Determíñese la capacidad por unidad de área. (Considérese una región del campo lo suficientemente alejada de los bordes de las superficies para que el campo eléctrico sea uniforme.)

3. Calcular el campo eléctrico entre dos superficies planas conductoras cargadas dispuestas con un ángulo α entre sí, pero sin llegar a tocarse. Encuéntrese la distribución de las cargas en las superficies. Considérese, como en el problema 2, una zona distante de los bordes, de modo que el resultado no esté influído por defectos de homogeneidad introducidos por éstos. La diferencia de potencial entre las placas es V .

4. Calcular el campo eléctrico debido a un conductor cilíndrico de radio r_0

y longitud infinita con una carga de q unidades por unidad de longitud. Encuéntrese el rotor de este campo eléctrico.

5. Calcular la diferencia de potencial entre el conductor del problema 4 y cualquier punto del espacio.

6. Determinar una ley (similar a la inversa del cuadrado para cargas esféricas) para la fuerza por unidad de longitud entre dos cilindros paralelos de longitud infinita.

7. Calcular, con la fórmula (152), la energía necesaria para cargar la unidad de superficie del condensador del problema 2. Calcular la energía por unidad de volumen en el campo electrostático de ese condensador, usando la ecuación (156).

8. Dos placas metálicas se colocan muy cercanas entre sí, pero aisladas. Una está cargada positivamente, la otra negativamente. Están unidas, por alambres flexibles, a un electroscopio. Sin que haya modificación de las cargas de las placas, éstas se separan. Explíquese por qué el electroscopio indica mayor potencial a medida que se separan las placas. Si la separación inicial era de 0,1 mm y la diferencia de potencial inicial de 100 volts, encuéntrese la diferencia de potencial cuando están separadas por 10 centímetros. (Nota: Esto explica el alto potencial de los relámpagos.)

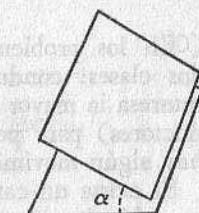
9. Calcular la capacidad por centímetro cuadrado de un par de placas paralelas muy grandes, separadas un centímetro, en el aire. Convírtase el resultado a micromicrofaradios (10^{-12} faradios). Recuérdese este resultado, al menos aproximadamente, pues es a menudo útil para apreciar capacidades.

10. Calcular la capacidad de un condensador esférico, como el de la figura 27, si el espacio que rodea a la esfera A está lleno de parafina hasta un radio igual a $\frac{1}{2}(a+b)$. Encuéntrese el campo eléctrico que resulta con una carga Q en ambos dieléctricos, parafina y vacío.

11. Refiriéndonos al problema 8, si la separación inicial es de 0,1 mm de *papel parafinado* con una constante dieléctrica de 2,3, determinar la diferencia de potencial cuando las placas están separadas por 10 centímetros de aire.

12. Escribase la expresión integral del potencial [ecuación (146)] del campo que rodea una esfera cargada con radio r_0 y carga Q . No se integre la expresión obtenida.

13. Usando la ecuación (148), calcular \mathbf{E} en el espacio entre las placas del condensador del ejemplo de la figura 29. Calcular la diferencia de potencial entre las placas.



PROB. 3

CAPÍTULO V

CORRIENTE ELÉCTRICA

En los problemas electrostáticos los materiales se dividen en dos clases: conductores y no conductores. En electrostática no interesa la mayor o menor aptitud de los distintos materiales (conductores) para permitir el paso de la corriente eléctrica, pues si hay algún movimiento de cargas, el fenómeno no es electrostático.

Si existe un campo eléctrico en un material conductor, las cargas eléctricas que hay en el material son impulsadas en la dirección del campo. Esta corriente de cargas se llama *corriente eléctrica*. La corriente eléctrica a través de una superficie es, por definición, la carga eléctrica que pasa a través de esa superficie por unidad de tiempo. Es decir:

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (158)$$

en la cual Q es la carga total que ha pasado por la superficie.

Es necesaria ahora la experimentación para determinar las características conductoras de varios materiales. Esta experimentación será llamada Experimento V, y constituyó el trabajo de Jorge Ohm, con su resultado: la *ley de Ohm*.

EXPERIMENTO V. — Se mide la intensidad de la corriente en un conductor metálico y se determina la diferencia de potencial entre los extremos de una porción del conductor (cada extremo de la porción es una superficie equipotencial).

La diferencia de potencial se mantiene constante mientras se hace el experimento. Esto se repite para una infinita variedad de formas y medidas de conductores y para distintos materiales metálicos. Se encuentra que la intensidad de corriente y la diferen-

cia de potencial están siempre ligadas por la fórmula siguiente:

$$I = \frac{1}{R} V \quad (159)$$

en que R es una constante determinada por la composición y la geometría del conductor*. Se encuentra, además, que R es directamente proporcional a la longitud de un conductor de sección constante e inversamente proporcional a la sección transversal de un conductor de longitud constante. Llamando γ a un coeficiente que es característico del material conductor, tenemos:

$$\frac{1}{R} = \gamma \frac{\text{área}}{\text{longitud}} \quad (160)$$

El coeficiente γ se llama la *conductividad* del material.

La diferencia de potencial fué definida por la ecuación (133) como la integral curvilinea de la intensidad del campo eléctrico:

$$V = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (161)$$

Es fácil introducir ahora un nuevo término: la *densidad de corriente*, que se define de tal modo que su integral sobre una superficie da la intensidad de corriente a través de esa superficie:

$$I = \int i \cdot da \quad (162)$$

puesto que la ley de Ohm se aplica a los conductores cualesquiera sean sus dimensiones, se aplica también si éstas son diferenciales. Consideraremos la sección considerada en la figura 31.

* La temperatura y otras condiciones físicas afectan en alguna proporción a R . El hecho esencial es que cualquier muestra del material tiene una cierta resistencia, que es característica del material y no depende de la intensidad de corriente que circula ni del potencial aplicado.

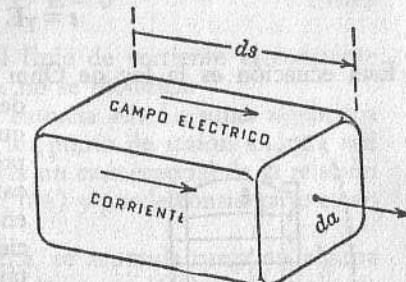


FIG. 31

La corriente que fluye a través de esta sección es $i \cdot da$ [según la ecuación (162)], y la diferencia de potencial entre los extremos es $E \cdot ds$ [según la ecuación (161)]. Además, de la ecuación (160) tenemos:

$$\frac{1}{R} = \gamma \frac{da}{ds} \quad (163)$$

Combinando estas tres expresiones en la ley de Ohm, ecuación (159), se obtiene:

$$i \cdot da = \gamma \frac{da}{ds} E \cdot ds \quad (164)$$

Como ds y da , considerados como vectores, tienen la misma dirección que E y i , la densidad de corriente y la intensidad del campo eléctrico están ligadas simplemente por:

$$i = \gamma E \quad (165)$$

Esta ecuación es la ley de Ohm *microscópica*. Señala que la densidad de corriente en cualquier punto del conductor es proporcional a la intensidad del campo eléctrico en ese punto y en su misma dirección. Esto es cierto para los conductores metálicos, a los cuales ha sido limitada la explicación anterior, y también para los conductores electrolíticos y para muchos otros materiales conductores, pero no es cierto para ciertas sustancias cristalinas, tales como el carburo, en el cual la intensidad de corriente no es proporcional a la diferencia de potencial, ni tampoco para las sustancias anisótropas, en las cuales la conductividad no es la misma en distintas direcciones, ni para el paso de la electricidad a través de gases. La ley de Ohm no se aplica a estos casos sino con una interpretación especial, pero en este libro no se considerarán los casos en que la ecuación (165) no se aplique.

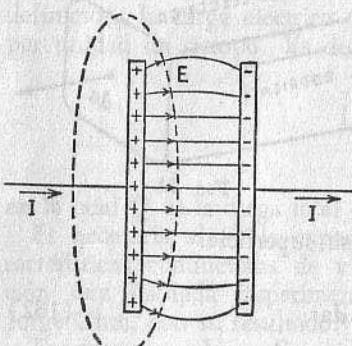


FIG. 32

Figura 32: Diagrama de un conductor cilíndrico de sección transversal rectangular. Se muestra una red de líneas de campo eléctrico E dirigidas horizontalmente hacia la derecha. Una corriente i fluye horizontalmente hacia la derecha a través del conductor. Los lados opuestos del conductor tienen signos de carga positiva (+) y negativa (-).

Cuando el campo eléctrico no varía (como se indicó en el Experimento V) no puede haber cambio de la carga acumulada, pues si lo hubiera, el campo eléctrico se habría modificado también. Se deduce de ello que cualquiera sea la carga que haya en la superficie del conductor, quedará invariable mientras la corriente fluya a través de la sección transversal. Repitamos que si no hay modificaciones en el campo eléctrico, tampoco habrá cambio en la densidad de carga en ningún punto. Es decir, las líneas de corriente no terminan en ningún punto del conductor y, por lo tanto, el campo vectorial de la densidad de corriente tiene divergencia nula. Se cumple que:

$$\nabla \cdot i = 0 \quad (166)$$

o sea, según la ecuación (165), que dentro del conductor se da:

$$\nabla \cdot \gamma E = \gamma \nabla \cdot E = 0 \quad (167)$$

Esta fórmula es válida cuando el flujo de corriente es constante y el campo eléctrico, por lo tanto, no se modifica.

La primera ley de Kirchhoff se enuncia así: La suma algebraica de las intensidades que llegan a un punto de unión en una red eléctrica es igual a cero. Viene a ser un caso especial de la relación más general dada por la ecuación (166) y puede considerarse como derivada de dicha fórmula.

Si, como resultado de la corriente, se acumula carga en alguna parte del circuito, las ecuaciones (166) y (167) no se aplican. Consideremos, por ejemplo, el condensador de láminas paralelas de la figura 32. La corriente llega a una cara del condensador y sale por la otra. Sin embargo, no hay corriente alguna de una cara a la otra, aun cuando el campo eléctrico E , en esa región intermedia, está continuamente cambiando, a medida que las cargas se depositan en una cara y son removidas de la otra.

Imaginemos ahora una superficie cerrada alrededor de una de las placas, como se indica en la figura por la línea punteada. Debido a la corriente, entra carga a esta superficie, pero no sale. Consecuentemente, al aumentar la carga que encierra la superficie aumenta el flujo del vector D que sale de ella.

El aumento de la carga encerrada en la superficie por unidad de tiempo es I , pues, según la ecuación (158), $I = \frac{dQ}{dt}$. Como de

cada unidad de carga sale una línea de flujo, la variación del flujo a través de la superficie por unidad de tiempo es:

$$\frac{d}{dt}(\text{flujo}) = \frac{d}{dt}Q = I \quad (168)$$

Pero sabemos que

$$\text{Flujo} = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} \quad (169)$$

de modo que la corriente que entra a cualquier superficie cerrada está relacionada con el flujo que sale de la misma por la fórmula siguiente:

$$I = \frac{d}{dt} \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \oint \frac{d\mathbf{D}}{dt} \cdot d\mathbf{a} \quad (170)$$

La corriente que sale de una superficie cerrada se obtiene integrando el vector densidad de corriente sobre esa superficie:

$$\oint \iota \cdot d\mathbf{a} \quad (171)$$

Teniendo en cuenta que la ecuación (170) es para la corriente que entra, obtenemos:

$$-\oint \iota \cdot d\mathbf{a} = \oint \frac{d\mathbf{D}}{dt} \cdot d\mathbf{a} \quad (172)$$

Las dos integraciones de la ecuación (172) se hacen sobre la misma superficie cerrada, de modo que podemos escribir

$$\oint \left(\iota + \frac{d\mathbf{D}}{dt} \right) \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (173)$$

y aplicando el teorema de Gauss,

$$\oint \nabla \cdot \left(\iota + \frac{d\mathbf{D}}{dt} \right) dv = 0 \quad (174)$$

Como esta fórmula es cierta cualquiera que sea el dominio de integración, se deduce que la cantidad entre paréntesis del integrando tiene divergencia nula:

$$\nabla \cdot \left(\iota + \frac{d\mathbf{D}}{dt} \right) = 0 \quad (175)$$

Dos sustituciones obvias en esta fórmula dan:

$$\nabla \cdot \left(\gamma \mathbf{E} + \epsilon \frac{d\mathbf{E}}{dt} \right) = 0 \quad (176)$$

La comparación de la fórmula (175) con la (166) es muy ilustrativa. La ecuación (166) nos dice que la corriente estacionaria no tiene divergencia. En este caso la intensidad del campo eléctrico es constante. Si la intensidad del campo, por el contrario, cambia, la corriente no fluye con divergencia nula. La ecuación (175) nos informa entonces que si a la intensidad de corriente le agregamos la variación \mathbf{D} por unidad de tiempo, el resultado es una cantidad que tiene divergencia nula en todos los puntos.

Es natural, entonces, considerar este término adicional como algo similar a la corriente, incluso como una clase de corriente.

No es una *corriente de conducción* como lo es $\gamma \mathbf{E}$, de modo que la llamaremos *corriente de desplazamiento*. La corriente total se forma de la suma de dos términos, uno correspondiente a la corriente de conducción y otro a la de desplazamiento. Es decir:

$$\iota_t = \iota_c + \iota_d = \gamma \mathbf{E} + \frac{d\mathbf{D}}{dt} \quad (177)$$

La divergencia de esta densidad *total* de corriente es siempre cero y ι_t es, por lo tanto, *solenoidal*.

Fuerza electromotriz. — Como se ha considerado hasta ahora, el campo eléctrico resulta de la presencia de cargas eléctricas libres. Las líneas de flujo del campo nacen y terminan en cargas eléctricas. Sin embargo, cualquier fuente de fuerza electromotriz contribuye al campo eléctrico; un ejemplo familiar e importante, que recibirá mucha atención en ulteriores capítulos, es el campo eléctrico inducido que aparece en las cercanías de un campo magnético variable con el tiempo. Si llamamos \mathbf{E}_s a la componente del campo eléctrico debido a la presencia de cargas, y \mathbf{E}_m a la componente que resulta de las acciones electromotrices, tendremos que \mathbf{E} , campo eléctrico total, se compone de dos sumandos:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_m \quad (178)$$

El voltaje, término comúnmente usado, es la integral curvilínea

de \mathbf{E} . Se define con este significado en la ecuación (133), que debe ahora ser desarrollada más explicitamente así:

$$V = \int \mathbf{E}_s \cdot ds \quad (179)$$

La fuerza electromotriz es, análogamente, una integral curvilinear de \mathbf{E}_m :

$$\text{Fuerza electromotriz} = \int \mathbf{E}_m \cdot ds \quad (180)$$

Como mencionamos arriba, la fuerza electromotriz puede resultar de la acción magnética, como en un generador o en un trans-

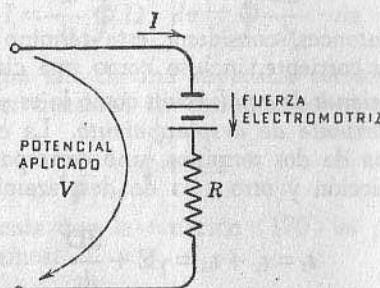


FIG. 33

formador. Puede obtenerse de la acción química en una batería, del calor en una termocouple o par eléctrico, o por varios otros procesos físicos. En general, aparece una fuerza electromotriz cuando la energía de alguna otra clase, tal como la energía química, o la energía calorífica, o mecánica, se transforman en energía eléctrica.

En la fórmula (159) se expresa la ley de Ohm para un trozo del circuito en el cual no hay fuerza electromotriz y la corriente fluye únicamente como resultado del voltaje aplicado:

$$IR = V = \int \mathbf{E}_s \cdot ds \quad (181)$$

En aquellas partes del circuito donde hay fuerzas electromotrices, éstas contribuyen a la intensidad de corriente y se tiene:

$$IR = V + \text{Fuerza electromotriz} \quad (182)$$

En la figura 33 el voltaje aplicado es V , la resistencia es R y la fuerza electromotriz que aparece contribuye también a la intensidad de la corriente. Esta resulta igualada, entonces, a:

$$I = \frac{V + \text{Fuerza electromotriz}}{R} \quad (183)$$

como se deduce de la ecuación (182). Esta última puede también escribirse:

$$IR = \int \mathbf{E}_s \cdot ds + \int \mathbf{E}_m \cdot ds = \int \mathbf{E} \cdot ds \quad (184)$$

El voltaje en la figura 33 es, matemáticamente, la integral curvilinear de \mathbf{E}_s entre los extremos superior e inferior, siguiendo cualquier camino de integración. Estos extremos y los alambres conectados a ellos son, por supuesto, cuerpos cargados. Si elegimos el camino de integración de modo que no pase por ninguna región en la cual exista fuerza electromotriz, es decir, que \mathbf{E}_m es nula, el voltaje se puede igualar a la integral de \mathbf{E} , como puede verse en la ecuación (184), pues en la ausencia de fuerza electromotriz, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_s$.

Un caso especial, particularmente interesante, se presenta en un circuito cerrado que contiene fuerzas electromotrices. Si el trozo de circuito que consideramos en las ecuaciones (182) y (184) se amplía hasta ser igual a todo el circuito, uniendo los extremos de integración, la integral se hará a lo largo de un camino cerrado. La integral curvilinear de \mathbf{E}_s alrededor de cualquier trayectoria cerrada es nula, según vimos en la ecuación (4), y la ecuación (184) se reduce a la siguiente:

$$IR = \text{Fuerza electromotriz} = \oint \mathbf{E} \cdot ds \quad (185)$$

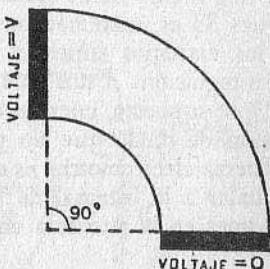
Esta relación será útil en el capítulo siguiente, al explorar el campo magnético.

Se puede observar, al pasar, que el término que aparece en los cálculos de circuitos comunes de corriente alterna como "caída de potencial en la reactancia inductiva", forma parte, en las ecuaciones (182) y (184), del término correspondiente a la fuerza electromotriz, pues es, fundamentalmente, una fuerza "contraelectromotriz" producida por modificaciones del campo magnético. Si hay

un condensador en el circuito, su voltaje forma parte del término $\int \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{s}$.

PROBLEMAS

- Calcular, por medio de las tablas o de cualquier otra manera, la conductividad de la plata, cobre, hierro y aluminio. Darse los valores en mhos por metro. ¿Cuál es la unidad mks de resistividad?
- Dedúzcase la primera ley de Kirchhoff, como se enunció en la página 93, de la ecuación (166). La segunda ley de Kirchhoff dice que, en au-



PROB. 3

sencia de fuerzas electromotrices, la suma de las caídas de potencial a lo largo de cualquier circuito de una red es cero. Dedúzcase esta ley también como un caso especial de una ecuación del capítulo V.

3. Una lámina de metal, de espesor uniforme, está limitada por dos cuartos de círculo y dos líneas radiales, como se muestra en la figura. Las aristas radiales están mantenidas a una diferencia de potencial constante. Encuéntrese la distribución de densidad de corriente en la lámina.

4. El espesor de la placa del problema 3 es 1,5 milímetros. El círculo interior tiene un radio de 25 milímetros, y el exterior, de 50. La intensidad total es de 100 amperios. Encuéntrese el máximo de densidad de corriente en la placa.

5. El material de la placa de los problemas 3 y 4 es aluminio. Encuéntrese el voltaje V .

6. De los terminales de un generador de corriente alterna de 10 kilovatio-amper, dos conductores paralelos se extienden en 500 metros hasta una carga consistente en un calentador eléctrico, un condensador estático, una bobina de relé, o elevador magnético, y un motor de inducción, todos conectados en paralelo. Usando las definiciones dadas en la sección sobre fuerza electromotriz, ¿dónde existe \mathbf{E}_m ? ¿Dónde hay \mathbf{E}_s ? ¿Dónde se puede medir exactamente el voltaje con un voltímetro ordinario? Indíquese en un diagrama las líneas de flujo de \mathbf{E}_s . ¿Pueden dibujarse las líneas de flujo de \mathbf{E}_m ? Explíquese.

CAPÍTULO VI

CAMPO MAGNÉTICO

Fuerza magnética. — Cuando un conductor es recorrido por la corriente, puede haber una fuerza mecánica que se ejerce sobre él distinta de la fuerza electrostática y de todas las fuerzas no eléctricas, pues desaparece cuando se interrumpe la corriente. Esta fuerza se observa cuando el conductor está en las proximidades de otro conductor recorrido por una corriente eléctrica o en las proximidades de un imán. Se la llama, por lo tanto, fuerza magnética.

EXPERIMENTO VI. — Este experimento se hace para estudiar la fuerza magnética. El aparato es el indicado en la figura 34.

Un trozo de conductor, corto y recto, se dispone de tal manera que se pueda medir la fuerza ejercida sobre él mientras es recorrido por la corriente. Como el trozo de conductor debe tener posibilidad de ciertos movimientos, para poder medir la fuerza que actúa sobre él, se debe usar alguna conexión flexible para llevar la corriente. El contacto por medio de un dispositivo de cubetas de mercurio puede ser cómodamente empleado*.

El experimento muestra que la fuerza magnética sobre el conductor de prueba es siempre perpendicular a éste. El módulo de la fuerza es perpendicular a la intensidad de la corriente que circula por el alambre. La fuerza es también proporcional a la longitud del conductor de prueba. Se entiende fácilmente la de-

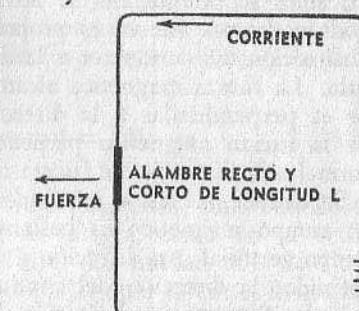


FIG. 34

* Históricamente, Ampère usó varias formas de este aparato en 1821 para establecer la ley de la fuerza entre conductores, conocida con el nombre de "ley de Ampère".

pendencia de estos factores, pues provienen del conductor de prueba y de la corriente que circula por el mismo. Pero el módulo y la dirección de la fuerza magnética dependen también de la colocación y de la orientación del conductor de prueba en el espacio, particularmente con referencia a los imanes y a otros circuitos que lleven corriente eléctrica. Esto sugiere la idea de la existencia de algo en el espacio (especialmente en las cercanías de los imanes y corrientes eléctricas) que produce la fuerza eléctrica. Esto sugiere que tendríamos que considerar la posible existencia de un *campo magnético*.

La evidencia experimental nos dice que es posible orientar al conductor en el espacio de tal manera que ninguna fuerza actúe sobre él. Si dejamos al conductor en el mismo punto, pero modificamos su orientación, se advierte una fuerza magnética, y el módulo de esta fuerza es proporcional al seno del ángulo entre la dirección del conductor y la dirección correspondiente a fuerza nula. La fuerza magnética alcanza su máximo cuando el conductor es perpendicular a la dirección de fuerza nula. Además de ser la fuerza magnética perpendicular al conductor, es también normal a la dirección de fuerza nula.

Se deduce, de estos resultados experimentales, que la idea de un campo magnético es bastante razonable. Tiene que ser un campo vectorial con dirección y con magnitud. Hay una dirección definida: la dirección del conductor cuando la fuerza magnética es nula. Ésta es, por definición, la *dirección* del campo magnético. La *intensidad* del campo magnético se obtiene de la máxima fuerza magnética, la cual aparece cuando el conductor es normal a la posición de fuerza nula. La intensidad se define como proporcional a este máximo de fuerza. El *sentido* del campo se define en función del máximo de fuerza, pues se supone una relación de "mano derecha" entre la dirección positiva de la intensidad en el conductor, la dirección positiva del campo magnético y el sentido de la fuerza resultante.

Con estas definiciones estamos en condiciones de calcular la fuerza magnética sobre el conductor de prueba partiendo de la siguiente ecuación:

$$\mathbf{F} = IL \times \mathbf{B} \quad (186)$$

F representa la fuerza, **L** la longitud y dirección del conductor sobre el que se ejerce la fuerza, **I** es la intensidad que circula. **B** se llama la *inducción magnética* (como veremos más tarde, re-

presenta también la *densidad de flujo magnético*). Con **F** en newtons, **L** en metros e **I** en amperes, queda **B** medido en webers por centímetro cuadrado. No se necesita ningún factor de proporcionalidad*. Se observará que la corriente se escribe como una cantidad escalar, mientras que **L**, longitud del conductor, es un vector, y su dirección es, evidentemente, la dirección del conductor. Se elige arbitrariamente el sentido positivo de **L**, y cuando la corriente tiene el mismo sentido se dice que es corriente positiva.

La ecuación (186) tiene en cuenta todos los hechos descubiertos con el experimento VI. El lector puede repasar los resultados experimentales y ver cómo están incorporados en la ecuación. Es interesante la analogía existente entre la ecuación (2) de la electrostática y la (186) para magnetostática. También son interesantes sus diferencias.

Flujo magnético. — Se pueden imaginar las líneas de flujo magnético como si fueran líneas de flujo electrostático, y la definición es similar:

$$\text{Flujo magnético} = \Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (187)$$

La cantidad **B** es la densidad de flujo magnético, pues cuando se la multiplica por un área [o se la integra, como en la ecuación (187)], el producto es un flujo. La unidad mks de flujo es el weber (un weber es 10^8 maxwells) y, por lo tanto, la unidad de densidad de flujo es, como en la ecuación (186), el weber por metro cuadrado**.

EXPERIMENTO VII. — Vamos a hacer ahora otro experimento para estudiar la relación entre los campos eléctrico y magnético. El descubrimiento que un campo eléctrico puede ser producido magnéticamente fué hecho por Miguel Faraday, en Inglaterra, en

* La ecuación (186) es correcta también para el sistema cgs "electromagnético" de unidades: **F** en dinas, **L** en centímetros, **I** en amperes absolutos, **B** en gauss. El sistema gaussiano, que tiene el mismo sistema cgs de unidades, excepto que **I** se mide en unidades electrostáticas de intensidad, requiere un factor de proporcionalidad (entre ambas unidades de intensidad), que se lo designa usualmente con la letra **c** y es igual a $2,998 \times 10^{10}$; en unidades de Gauss se tiene

$$\mathbf{F} = \frac{IL \times \mathbf{B}}{c}$$

** Siendo el weber por metro cuadrado igual a 10 kilogausses, resulta una unidad conveniente.

el año 1831. A menudo se lo considera como el más importante de sus experimentos. Fue hecho independientemente, aunque unos meses más tarde, por José Henry, en los Estados Unidos.

El aparato necesario para el experimento VII es una espira de alambre conectada a un galvanómetro balístico. La disposición del aparato puede ser la indicada en la figura 35, donde se ve al par de conductores entre el anillo de alambre y el galvanómetro. La lectura en el galvanómetro balístico es una medida de la carga eléctrica que pasa por él. Se encuentra que, si la espira está en un campo magnético, el galvanómetro indica el paso de cargas por él cada vez que la intensidad del campo magnético aumenta o disminuye. Midiendo la densidad de flujo magnético en la espira por los métodos del experimento VI, encontramos que la lectura del galvanómetro balístico es proporcional al aumento o disminución de flujo que pasa a través de la espira de nuestro aparato. Se determina también que la desviación del galvanómetro es inversamente proporcional a la resistencia total del aparato, incluyendo la espira, conductores y galvanómetro. Como el galvanómetro mide carga eléctrica, escribiremos:

$$Q = -\frac{\Phi}{R} \quad (188)$$

El signo negativo en la fórmula (188) indica que si relacionamos la dirección positiva de la corriente eléctrica alrededor de la espira con la dirección positiva del flujo por la "regla de la mano derecha", un aumento positivo de flujo produce una corriente negativa.

De la ecuación (188) deducimos la ley de Faraday. Esta ecuación puede expresarse así:

$$RQ = -\Phi \quad (189)$$

y por diferenciación obtenemos:

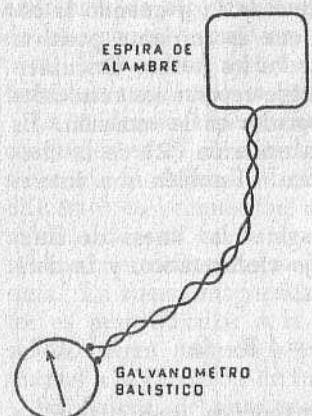


FIG. 35

$$R \frac{dQ}{dt} = RI = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (190)$$

En el capítulo V mostramos que en un circuito cerrado el producto RI es igual a la fuerza electromotriz a lo largo del circuito. De modo que de las ecuaciones (185) y (190) obtenemos:

$$\text{Fuerza electromotriz} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (191)$$

Esta es la famosa ley de Faraday. El flujo Φ es aquel que pasa a través de una superficie cuyo borde es el conductor y corresponde al concepto usual de concatenación de flujo (véase página 116). El flujo se mide en weberes y la fuerza electromotriz en voltios.

La fuerza electromotriz inducida magnéticamente está dada por la ecuación (191) y se expresa como la integral lineal del campo eléctrico alrededor de la espira conductora. Haremos ahora una generalización de esta relación experimental: supondremos que un campo magnético variable induce un campo eléctrico, según la ecuación (191), no sólo en los materiales conductores, sino también en los no conductores y aun en el vacío. Esto es natural, pues si reemplazamos la espira de cobre del experimento VII por otra de un material muy poco conductor, como una aleación de níquel-cromo, el voltaje inducido es exactamente el mismo. Un campo magnético variable induce un voltaje incluso en un pedazo de madera, y si fluye muy poca corriente, ello se debe a que la resistividad de la madera es extremadamente alta. Este hecho se puede establecer experimentalmente si se dispone de instrumentos suficientemente precisos. No es, por lo tanto, aventurado suponer que, si se cumple para todos los materiales, se cumpla también en el aire y aun en el vacío. A primera vista esto parece una sutiliza, pues, ¿qué importa producir un campo eléctrico si no hay sustancia presente sobre la cual él pueda actuar? Sin embargo, veremos más adelante que este concepto es de la mayor importancia y que sin campos eléctricos y magnéticos produciéndose mutuamente en el vacío, no podría haber transmisiones de radio, de luz ni de otras radiaciones electromagnéticas a través del mismo.

Con esta hipótesis (que afirma que hay un campo eléctrico inducido, continuo, en el espacio) podemos aplicar el teorema de Stokes a la integral de la ecuación (191). Al mismo tiempo, podemos reemplazar el flujo por la fórmula (187), dando:

$$\int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{a} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \quad (192)$$

Estas dos integrales se desarrollan sobre una superficie cuyos bordes sean los conductores del aparato experimental. Dicha superficie puede tener cualesquiera dimensiones, forma y orientación; ambos miembros sólo pueden ser iguales en todas circunstancias si se cumple:

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (193)$$

Esta ecuación muestra que el campo eléctrico tendrá rotor en los puntos donde el campo magnético es variable con el tiempo. El campo electrostático, donde nada varía con el tiempo, es irrotacional. En el capítulo VIII se indicará la gran importancia de esta ecuación.

Voltaje inducido por el movimiento. — Para derivar el miembro de la derecha de la ecuación (192) a partir de la ecuación (191), se supone que el flujo magnético a través del circuito varía debido exclusivamente a la variación de la densidad de flujo magnético. Sin embargo, es posible que el circuito esté en movimiento en el espacio, como, por ejemplo, en el caso de un generador eléctrico. Si este movimiento se realiza en presencia de un campo magnético, hay variación de flujo a través de una superficie cuyo borde sea el conductor, aun cuando el campo magnético sea constante en todos los puntos. En general*, si un medio se mueve con velocidad \mathbf{v} en un espacio en el que el campo magnético es \mathbf{B} , habrá un campo eléctrico inducido en el medio, debido a su movimiento, e igual a $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Este campo eléctrico debe ser su-

* Véase un tratado más avanzado sobre la teoría electromagnética, como, por ejemplo: *Classical Electricity and Magnetism*, por Abraham y Becker, G. E. Stechert & Co., Nueva York, o *Principles of Electricity and Magnetism*, de G. P. Harnwell, McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1938.

mado al que resulta de la variación del campo magnético. Teniendo en cuenta este resultado, la ecuación (193), válida para medios en reposo, se transforma, en medios en movimiento, en la siguiente:

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (194)$$

EXPERIMENTO VIII. — Hemos definido un campo magnético en función de la fuerza que se ejerce sobre un conductor recorrido por la corriente eléctrica. Se ha visto, también, que un campo magnético variable induce un campo eléctrico, pero no hemos estudiado las fuentes del campo magnético ni su distribución en el espacio. Es necesario para ello mayor información experimental. Con ese propósito describiremos ahora dos nuevos experimentos. Éstos son muy análogos a los experimentos II y III, que se hicieron al estudiar los campos eléctricos. Veremos que los experimentos VIII y IX pueden ser hechos solamente en un campo magnético que no varía con el tiempo. A un tal campo, por analogía con el campo electrostático, lo llamaremos *magnetostático*.

El experimento VIII se hace con un instrumento para medir la densidad de flujo magnético. Puede ser el conductor usado en el experimento VI o la espira conectada a un galvanómetro balístico del experimento VII. Este último es el más práctico. Un aparato con muchas espiras envueltas una al lado de otra, unidos sus extremos por conductores flexibles a un galvanómetro balístico de un período extremadamente grande, convenientemente calibrado, es un instrumento común de laboratorio conocido como "fluxímetro".

Usamos el instrumento para medir la densidad de flujo y con él determinamos la componente normal del vector \mathbf{B} en todos los puntos de una superficie cerrada en un campo magnético. La superficie cerrada es puramente ideal y puede tener cualquier forma y dimensiones. Este experimento debe ser repetido para muchas de estas superficies, y la conclusión de los resultados experimentales es que, en todos los casos, la sumatoria del campo magnético sobre toda superficie cerrada es cero. Es decir:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (195)$$

Si aplicamos el teorema de Gauss a este resultado experimental, resulta que el campo magnético tiene divergencia nula en cualquier circunstancia:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (196)$$

Las líneas del campo magnético son, por lo tanto, cerradas, pues de la ecuación (196) se sigue que ninguna línea de flujo magnético tiene comienzo ni fin. Todas son cerradas.

El experimento VIII se hace en toda clase de sustancias materiales, así como en el vacío, y el resultado es siempre el mismo: la divergencia del campo magnético es nula. Es imposible, evidentemente, investigar el campo magnético dentro de las sustancias sólidas, tales como el bronce o el hierro, midiendo la fuerza que se ejerce sobre un conductor. En estos casos podemos usar el fluxímetro de espira y determinar el flujo magnético total dentro de cualquier pieza de material sólido, y el resultado es siempre compatible con la ecuación (196).

EXPERIMENTO IX. — Éste, que será el último de nuestros experimentos, puede ser hecho con cualquiera de los instrumentos sugeridos para el experimento VIII. Igual que antes, el fluxímetro de espira es la única manera de determinar la cantidad de flujo magnético dentro de materiales sólidos. El instrumento de medida se utiliza en el experimento IX para determinar la densidad de flujo magnético en todo punto de una trayectoria cerrada, e integrando luego la componente tangencial de la densidad de flujo magnético a lo largo de la trayectoria elegida, se calcula $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$.

Se descubre primeramente que, si la trayectoria de integración está en un material homogéneo, el valor de la integral es proporcional a la intensidad eléctrica que atraviesa una superficie cuyo borde es dicha trayectoria. Si dicha intensidad es nula, el valor de la integral es, en medios homogéneos, igual a cero. Si la corriente circula de tal manera que concatena la trayectoria de integración, el valor de la integral está dado por

$$\frac{1}{\mu} = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = I \quad (197)$$

La intensidad de corriente se representa por I , y μ es un valor característico del material. Al coeficiente μ se lo llama *permeabi-*

lidad. La permeabilidad del vacío* se designa por μ_0 , y, cuando I se expresa en amperes, \mathbf{B} en weberes por metro cuadrado y s en metros cuadrados, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-6}$ o, aproximadamente, $1,257 \times 10^{-6}$.

Podemos hacer este experimento con un anillo de hierro, como en la figura 36. La espira exploradora del fluxímetro se coloca envolviendo al hierro para medir el flujo que existe dentro del metal, y se coloca un alambre normalmente al plano del anillo, atravesándole por su centro. Se hace pasar una intensidad conocida por el conductor y se mide la desviación del galvanómetro balístico. Se repite esta operación en varios lugares del anillo (aunque se encuentre que la lectura del galvanómetro sea siempre la misma). Quitemos después el anillo para repetir el experimento en el vacío. Como las lecturas en el fluxímetro son de varios cientos de veces mayores cuando se mide con el anillo de

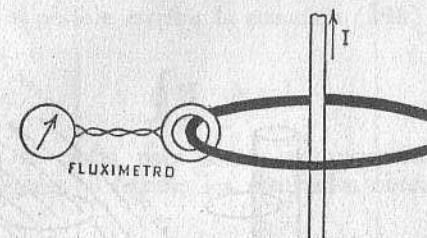


FIG. 36

hierro que en el vacío, resulta que la permeabilidad del hierro, en las condiciones de la experiencia, es varios cientos de veces mayor que la del vacío.

La permeabilidad de una sustancia tal como el hierro se representa por μ . La permeabilidad del vacío es μ_0 , con los valores dados arriba. La permeabilidad *relativa* de cualquier sustancia

* La permeabilidad magnética del vacío se hace arbitrariamente igual a la unidad en los sistemas no racionalizados de unidades electromagnéticas; esto exige que la intensidad sea medida en amperes absolutos, \mathbf{B} en gauss, s en centímetros, y que el miembro de la derecha de la ecuación (197) incluya un factor 4π . En unidades de Gauss, el factor en la ecuación (197) es $\frac{4\pi}{c}$ y la corriente está en u. e. s. de intensidad.

(relativa respecto al vacío) es $\frac{\mu}{\mu_0}$, que es el valor usualmente encontrado en las tablas que dan las propiedades magnéticas de los materiales.

Este experimento nos muestra que la permeabilidad de la mayoría de las sustancias es prácticamente igual a la del vacío. Sólo el hierro, cobalto, níquel y ciertas aleaciones tienen permeabili-

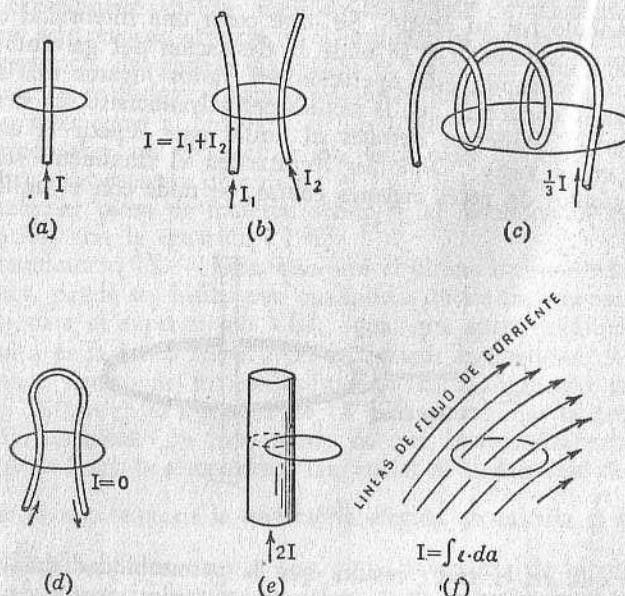


FIG. 37

dades magnéticas que difieren de la permeabilidad del vacío en más de unas pocas millonésimas. Estas sustancias tienen permeabilidades relativas altas, que alcanzan a algunos miles, y, como el hierro es el más típico del grupo, se los conoce como materiales *ferromagnéticos*. Son extremadamente inconvenientes para estudios analíticos porque su permeabilidad no es constante, sino que depende de la densidad de flujo magnético (como, por ejemplo, en el caso extremo de la saturación magnética) y, lo que es peor, la permeabilidad es afectada por la "historia" previa del material (como se ve en los fenómenos de histéresis y magnetismo perma-

nente). Afortunadamente, no es necesario usualmente considerar los materiales ferromagnéticos en relación con las ondas eléctricas. En este capítulo se supondrá que la permeabilidad es constante aun en aquellas sustancias ferromagnéticas en las cuales difiere apreciablemente de la unidad.

Finalmente, cuando extendemos la investigación del experimento IX a la medición de densidad del flujo magnético a lo largo de trayectorias radicadas parte en un material y parte en otro, es necesario asociar a cada material el valor de la permeabilidad correspondiente. Para una trayectoria de integración en un material no-homogéneo, la ecuación (197) se transforma en

$$\oint \frac{\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}}{\mu} = I \quad (198)$$

Introduciendo un nuevo símbolo \mathbf{H} , que representa al campo vectorial de *intensidad magnética*, definido de acuerdo con la relación $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, es posible escribir la ecuación (198) de la siguiente manera:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I \quad (199)$$

Esta ecuación es cierta para todas las trayectorias cerradas de integración posibles y resume los resultados obtenidos del experimento IX.

La ecuación (199) es una ecuación de *fuerza magnetomotriz*. La intensidad I puede ser la corriente en un solo conductor, como en la figura 37a, o en algunos conductores, como en la figura 37b, c o d, o en parte de un conductor, como en e. La corriente puede también ser un flujo difuso de cargas en toda una región, como en f. En cualquier caso, se la puede definir como la integral de la densidad de corriente sobre una superficie cuyo borde es la trayectoria de integración de la ecuación (199). Es decir:

$$I = \int \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} \quad (200)$$

La superficie de integración de la ecuación (200) puede ser *cualquier* superficie limitada por la trayectoria cerrada, pues (en las condiciones del experimento) si una línea de corriente concatena la trayectoria de integración, la línea atravesará *cualquier* superficie limitada por esa trayectoria.

La fuerza magnetomotriz, miembro izquierdo de la ecuación (199), es directamente proporcional a la corriente. En unidades prácticas, como en la ecuación (199), es numéricamente igual a la intensidad de corriente, y la unidad de fuerza magnetomotriz es el ampere o ampere-vuelta. Dimensionalmente, es suficiente decir que la fuerza magnetomotriz se mide en amperes, pero en muchos casos prácticos el efecto magnético de una corriente pequeña se multiplica si se convierte el conductor en una bobina con muchas vueltas, como en la figura 37c, y es costumbre hablar de fuerza magnetomotriz en amperes-vueltas. El multiplicar los amperes que pasan por un alambre bobinado por el número de vueltas es una forma de calcular la integral de la ecuación (200).

La intensidad magnética o fuerza magnetizante \mathbf{H} se mide en unidades de amperes-vueltas por metro, lo que da una imagen cómoda de su significado.

La introducción de la ecuación (200) en la (199) da:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} \quad (201)$$

Por medio del teorema de Stokes, el miembro izquierdo de la ecuación (201) puede transformarse en una integral superficial extendida a una tal superficie cuyo borde sea la trayectoria cerrada de la integral curvilínea. Tenemos que:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{a} = \int \mathbf{i} \cdot d\mathbf{a} \quad (202)$$

El segundo y tercer miembros de la ecuación (202) se integran sobre la misma superficie, y, como ésta puede ser cualquiera, resulta que los integrandos son iguales en cada punto:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} \quad (203)$$

Esta ecuación expresa que el rotor del campo magnético en cada punto es proporcional a la densidad de corriente en cada punto. Si no hay corriente eléctrica, el campo es irrotacional y es, por lo tanto, laminar, pero, en los puntos donde circula corriente, el campo magnético tiene rotor no nulo. Hay rotor, por ejemplo, en el campo magnético en el interior de un conductor recorrido por la corriente.

Convención con respecto al signo. — Todavía no ha sido aclarado el significado del signo de las ecuaciones (197), (198) y

(199). La ecuación (199) dice, por ejemplo, que una corriente produce fuerza magnetomotriz a lo largo de cualquier trayectoria que encierre al conductor. Surge ahora la siguiente cuestión: ¿En qué sentido está dirigida la fuerza magnetomotriz?

Para aclarar el problema necesitamos aún una definición. Cuando relacionamos un sentido de circulación en un círculo con el sentido de la normal al plano del mismo, una u otra de las posibles relaciones debe tomarse como positiva. Es costumbre usar la siguiente convención: si dibujamos un círculo en la hoja de papel y definimos en él el sentido positivo de circulación como el contrario a las agujas del reloj, la dirección normal positiva es

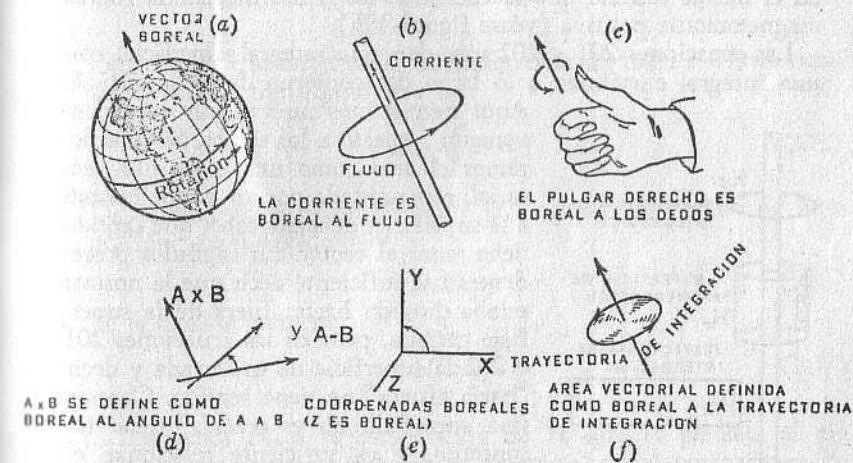


FIG. 38

hacia arriba de la página. Si, por el contrario, hubiéramos tomado como sentido positivo el de las agujas del reloj, el sentido positivo de la normal habría sido hacia abajo. Para expresar esta relación en una sola palabra usamos el término *boreal**. Esto hace posible

* El término *boreal* deriva de la rotación de la tierra y significa la dirección norte, comparada con la rotación de la tierra, y generalizando a cualquier otra relación similar entre una dirección axial y un sentido de rotación. La expresión tiene la misma raíz que "aurora boreal" (*boreas*, viento norte). El término se basa en la rotación de la tierra, tomada como standard de la definición de Este y Oeste, como los términos de Faraday, ánodo y cátodo. Lo opuesto a *boreal* es *austral*, como en "Australia".

enunciar muy simplemente la convención aceptada con respecto a las direcciones axial y de circulación: la dirección boreal es positiva.

Cuando hacemos girar un tornillo derecho o un sacacorchos, éste avanza en la dirección boreal en su rotación. El pulgar de la mano derecha es boreal a los dedos cuando se lo dispone como en la figura 38c. Esto establece "la regla de la mano derecha", que es, ciertamente, la forma más conveniente de encontrar la dirección boreal en casos individuales. Como en la ecuación 199, la intensidad de la corriente en el alambre es boreal a la fuerza magnetomotriz que produce. Por lo tanto, si colocamos el dedo pulgar paralelo y en el mismo sentido que la corriente, los dedos indican la fuerza magnetomotriz positiva (véase figura 38b).

Las ecuaciones 201 y 202 vinculan una integral superficial con una integral curvilínea a lo largo del contorno de la superficie.

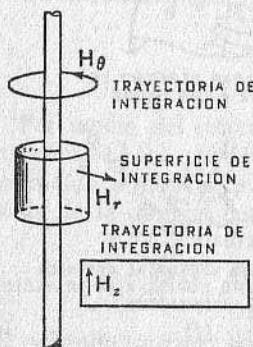


FIG. 39

la dirección boreal es la positiva. En la ecuación 201 la integral curvilínea del miembro de la izquierda puede tomarse en cualquier dirección elegida arbitrariamente, y esta elección del sentido a lo largo del contorno define también, por la convención arriba mencionada, el sentido positivo del área en el miembro de la derecha de la ecuación. Con esta convención desaparece toda ambigüedad.

Ejemplo. Como ejemplo de solución para un campo magnético, calculemos el campo en el aire en torno a un conductor muy largo, recto, de sección circular, como en el de la figura 37a o 39, recorrido por una intensidad I . Se trata de encontrar las tres componentes del campo magnético.

La ecuación 199 da la integral del campo magnético a lo largo de cualquier camino que rodee al conductor. Para aplicar esta ecuación, elijamos primero un camino circular de integración concéntrico al conductor, como en la figura 39. A lo largo de esta trayectoria, \mathbf{H} es constante. Esto es cierto por razones de simetría, pues un punto de esta circunferencia, en torno a un conductor circular, no puede distinguirse de otro.

Llamemos H_θ a la componente de \mathbf{H} que es tangente a este camino circular de integración. Sólo esta componente contribuirá al producto escalar de la ecuación 199, de modo que:

$$\oint H_\theta ds = I \quad (204)$$

Pero, como a lo largo de la circunferencia de radio r , H_θ es constante, ésta se transforma en:

$$H_\theta \oint ds = I \quad (205)$$

La integral de ds es simplemente la longitud del camino de integración, y con el radio r es:

$$H_\theta 2\pi r = I \quad (206)$$

de la cual se deduce:

$$H_\theta = \frac{I}{2\pi r} \quad (207)$$

Llamemos H_z a la componente de \mathbf{H} que es paralela al eje del conductor. Esta componente, si existe, debe, por razones de simetría, ser igual en todos los puntos de igual radio.

Llamemos H_r a la componente de \mathbf{H} en la dirección radial. Consideremos una superficie coaxial al conductor con forma de lata de envase o cajita redonda de píldoras. La superficie es cerrada y se compone de un cilindro cerrado por las dos secciones circulares, como lo indica la figura 39. Se desea obtener $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ sobre dicha superficie para utilizarla en la ecuación 195. Como H_θ no atraviesa esta superficie, no contribuye a $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$. La componente axial H_z no contribuye tampoco a $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$, pues siendo igual a distancias

iguales del conductor, si contribuyera algo a la integral sobre una superficie plana, le restaría una cantidad igual en la otra superficie. Además, como no atraviesa la superficie cilíndrica, su contribución a ella es nula. Si la componente radial existiera, daría una contribución a $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$, en la superficie cilíndrica, diferente de cero.

Cómo la ecuación 195 $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ es siempre cero, se deduce, cuando se consideran todas las superficies semejantes a la anterior, que H_r es cero en todos los puntos.

Queda por evaluar H_z . Consideremos una integral curvilinea como la indicada en la figura 39. Es de forma rectangular. Uno de los lados es paralelo al conductor y se halla muy cercano al mismo. El otro lado, paralelo al anterior, está infinitamente alejado. Cuando integramos $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}$ a lo largo de este rectángulo, H_θ no contribuye a la integral, pues es perpendicular a la trayectoria en todos sus puntos. Hemos visto ya que $H_r = 0$. Queda sólo por determinar H_z . Si existe, contribuye a la integral a lo largo de los lados más pequeños del rectángulo.

La integral total debe ser nula pues la trayectoria no concatena corriente (ecuación 199). La contribución de H_z a la integral debe ser cero. Esto es posible solamente si H_z tiene el mismo valor cerca del conductor que en el infinito, o si $H_z = 0$. Como es imposible que un conductor recorrido por una corriente finita produzca un campo magnético uniforme en todo el espacio infinito (para esto se necesitaría energía infinita), se deduce que H_z así como H_r son iguales a cero.

En resumen, hemos visto que sólo H_θ es diferente de cero, y su valor está dado por la ecuación 207, que se conoce como ley de *Biot-Savart*. La solución de este simple problema ha sido desarrollada con todo detalle porque ilustra la utilidad de elegir trayectorias especiales de integración para obtener conclusiones respecto de los campos eléctrico y magnético.

Fuerzas entre corrientes. — En el experimento VI se encontró que una fuerza mecánica actúa sobre un conductor que lleva corriente en las cercanías de otro conductor que también la lleva. Estamos ahora en condiciones de determinar el valor de esa fuerza.

Vamos a ilustrar el caso más simple, que es la determinación de la fuerza que actúa entre conductores paralelos. El mismo método puede aplicarse, si se desea, al caso general de cualesquiera conductores.

La figura 40 muestra la sección transversal de dos conductores. Las intensidades I_1 e I_2 , medidas en amperes, circulan por los conductores, dirigidas hacia arriba del papel. Si d es la distancia en metros entre los dos conductores, el campo magnético producido por I_1 a la distancia del conductor 2 es (según la ecuación 207):

$$B_1 = \mu H_1 = \frac{\mu I_1}{2\pi d} \quad (208)$$

La dirección de este campo es normal a la línea que une los dos conductores, como lo ilustra la figura. Existe una fuerza mecánica que actúa sobre el conductor 2, y que es dada por la fórmula (186); cuando sustituimos la ecuación 208 en la 186, se ve que la magnitud de la fuerza es:

$$F = I_2 L_2 \frac{\mu I_1}{2\pi d} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} L^2 \quad (209)$$

La fuerza en newtons por metro de longitud del conductor 2 es:

$$\frac{F}{L_2} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} \quad (210)$$

Esta es una ecuación escalar que da solamente la magnitud de la fuerza. El producto vectorial $\mathbf{L} \times \mathbf{B}$ que aparece en la ecuación 186 es aquí igual en magnitud al producto de las magnitudes escalares L y B , porque los dos vectores son normales entre sí. La dirección de la fuerza está dada por la dirección del producto vectorial y, como en la figura 40, \mathbf{L} está dirigido hacia arriba del papel (correspondiendo con el sentido de la corriente) y \mathbf{B} es tangencial a la circunferencia de radio d , dirigido hacia la cabeza de la página, \mathbf{F} , siendo boreal al ángulo de \mathbf{L} a \mathbf{B} , resulta dirigida hacia el conductor 1.

Es evidente que la ecuación 210 da también el módulo de la fuerza ejercida sobre el conductor 1 por la corriente que circula en el conductor 2. La dirección de esta fuerza va hacia el conductor 2. Hemos determinado que dos conductores que son recorridos por la corriente en igual sentido se atraen mutuamente con una fuerza



FIG. 40

de módulo dado por la ecuación 210. Esta es una forma simple de la *ley de Ampere*. Tal como la dimos aquí, supone que la distancia que separa los conductores es grande con relación al radio de los mismos y que ambos son rectos y paralelos en una longitud infinita.

Si se invierte el sentido de cualquiera de las corrientes, el signo de I en la ecuación 186 debe ser cambiado y la fuerza es de repulsión en lugar de atracción. De aquí surge la frase fácilmente recordada, aunque de significado un tanto vago: "corrientes semejantes se atraen, corrientes opuestas se rechazan".

Concatenación de flujo magnético. — La corriente que pasa por una bobina conductora, como en la figura 37c, produce un campo magnético. La configuración del campo es tal que las líneas de flujo se extienden axialmente por el interior de la bobina y vuelven, ampliamente dispersadas por el espacio exterior a la misma. Cada línea de flujo atraviesa, al menos una vez, y posiblemente varias, una superficie cuyo borde es el conductor. Se puede imaginar esta superficie en la figura 37c como una lámina de goma con sus bordes unidos al conductor. Cuando el conductor se dobla de modo de formar una hélice, la lámina de goma se arruga de una manera complicada que es más fácil de imaginar que de ser dibujada o descrita. La línea cerrada que se ve en la figura 37c puede representar una línea de flujo. Dicha línea corta tres veces a la superficie limitada por el conductor. Se reconoce que el hecho de atravesar la línea de flujo a la superficie, es equivalente al concepto ordinario de "concatenación de flujo".

Potencial magnético. — En la discusión de campos electrostáticos, prestamos especial atención al campo potencial V . Éste es un campo escalar. Se sabe que existe porque $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, y su gradiente, con signo negativo, es \mathbf{E} .

Uno se pregunta ahora, naturalmente, si existe un campo escalar potencial magnético. La ecuación 203 ya nos advierte que tal campo puede no existir, porque $\nabla \times \mathbf{H}$ no es siempre cero. Podemos decir: en cualquier región donde no hay corriente eléctrica el campo magnético (estático) no tiene rotor y existe un potencial magnético escalar. Esto es a menudo útil, pero no en relación con las ondas eléctricas, por lo que no lo vamos a discutir aquí.

El vector potencial fué mencionado en el capítulo III. No se hizo ningún esfuerzo para encontrar un vector potencial electrostático, pues la divergencia del campo electrostático no es siempre cero y cuando no lo es no existe campo potencial vectorial. En el espacio donde no hay cargas se puede, seguramente, encontrar un potencial vectorial, pues ahí la divergencia es nula. El campo mag-

nético tiene, en cambio, divergencia nula en todos los puntos (ecuación 196) y es posible encontrar un potencial vectorial magnético que resulte muy eficaz.

Llamemos \mathbf{A} al potencial vectorial magnético. \mathbf{A} es, por definición,* un campo que cumple la siguiente ecuación:

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (211)$$

Puesto que $\iota = \nabla \times \mathbf{H}$, según la ecuación 203, resulta que:

$$\iota = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \quad (212)$$

Usando la identidad dada en la nota al pie de la página 48, esta ecuación se transforma en la siguiente:

$$\iota = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (213)$$

La ecuación 213 es similar a la ecuación de Poisson de la electrostática y da una manera de encontrar la distribución de corrientes si se conoce el potencial vectorial \mathbf{A} . Sin embargo, \mathbf{A} no es conocido, pues no ha sido aún completamente definido. Lo único que conocemos es el rotor de \mathbf{A} . Hay infinitos campos que tienen el mismo rotor, pero sólo uno tiene un rotor dado y una divergencia dada **. Si especificamos la divergencia de alguna manera, el vector \mathbf{A} quedará completamente definido en todo el espacio. En el campo magnetostático, la elección más conveniente es obvia; pongamos:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (214)$$

La ecuación 213 se simplifica entonces a:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\iota \quad (215)$$

y que es bastante análoga a la ecuación de Poisson

* Muchos autores definen $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Estas definiciones de \mathbf{A} difieren en un factor μ y cualquiera de las dos es satisfactoria si se usa consistentemente.

** Para que el campo esté completamente definido se deben tener las condiciones de contorno, así como su divergencia y rotor. Aquí es suficiente saber que el potencial vectorial se anula en el infinito. Hay un teorema, conocido como teorema de unicidad, que dice: "Un campo vectorial está únicamente determinado si se conocen su divergencia y rotor y si se da la componente normal del vector sobre una superficie cerrada, o si se da anula en el infinito (al menos tan rápidamente como $1/r^2$)".

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (118)$$

Si conocemos la corriente ρ y tenemos que encontrar el potencial vectorial, la ecuación (215) es una ecuación diferencial para la cual se debe buscar la solución. Se mostró en el capítulo IV que la ecuación de Poisson tiene una solución expresada en forma de integral:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho dv}{r} \quad (146)$$

y esto ayuda a encontrar la solución para el potencial vectorial magnético.

La ecuación (215) es una ecuación vectorial. Si la desarrollamos según sus componentes escalares, cada una de las tres componentes resulta formalmente idéntica con la 118. La solución matemática de cada una de ellas debe ser igual a la 146 con sólo un cambio de símbolos. Estas ecuaciones componentes y sus soluciones son las siguientes:

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_x &= -i_x & A_x &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{i_x dv}{r} \\ \nabla^2 A_y &= -i_y & A_y &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{i_y dv}{r} \\ \nabla^2 A_z &= -i_z & A_z &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{i_z dv}{r} \end{aligned} \quad (216)$$

A_x , A_y y A_z se combinan para dar:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{i}{r} dv \quad (217)$$

La interpretación de la ecuación 217 es análoga a la de la ecuación 146. El potencial vectorial se encuentra integrando sobre toda la porción del espacio donde hay corrientes. Designando por r la distancia del elemento de corriente al punto cuyo potencial estamos averiguando, y si tenemos solamente un circuito, la integración se hace a lo largo del circuito. Donde no hay corriente, la

contribución a la integral es nula. El resultado de la integración da el potencial vectorial.

Se ve que la corriente que circula en la dirección del eje x produce sólo la componente x del potencial vectorial. Es decir, la dirección del potencial vectorial es la misma que la del elemento de corriente que lo produce. El potencial vectorial es mayor en las cercanías de la corriente que lo produce y decrece gradualmente con la distancia. Se describe a veces dicho potencial como "semejante a la distribución de la corriente, pero confuso en los bordes", o también "como una imagen de la corriente, pero fuera de foco". Estas ideas, aunque poco elegantes, tienen diversa utilidad. Es interesante considerar cómo se aplican al ejemplo del final del capítulo III (página 66).

El cálculo del potencial vectorial magnético a partir de la ecuación 217 es tan difícil como el del potencial escalar electrostático a partir de la 146.

Tiene, sin embargo, aplicaciones tan importantes que daremos un ejemplo en el cual encontramos una solución aproximada.

Ejemplo. Consideremos un conductor de pequeña longitud recorrido por corriente alterna dada por:

$$i = I \operatorname{sen} \omega t \quad (218)$$

El conductor está aislado en el espacio. La forma como se alimenta de corriente es un problema que no nos interesa por el momento (se puede pensar que forma parte de un circuito). Suponemos que la frecuencia de la corriente es tan baja que podemos aplicar las ecuaciones de la magnetostática. Esto se conoce como estado cuasiestacionario. En otras palabras, nuestra pequeña antena no irradia.

La longitud del conductor es l , y elegimos el sistema de coordenadas de manera que el conductor se extiende desde $-l/2$ hasta $+l/2$, como en la figura 41.

Queremos encontrar el potencial vectorial magnético usando la ecuación 217. Como la única corriente que nos interesa es la que circula en el conductor, la integración se hace solamente a lo largo de él. La corriente circula únicamente en la dirección del eje x ,

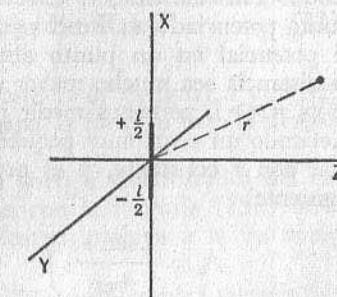


FIG. 41

y, por lo tanto, sólo hay una componente del vector potencial. Si el conductor tiene una sección transversal da , el elemento de corriente es simplemente $i dx$, en lugar de $i_x dv$, pues $i_x dv = i_x da dx = i dx$. Tenemos entonces:

$$A_x = \frac{1}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{I \sin \omega t}{r} dx \quad (219)$$

La integración exacta de esta expresión sería difícil, pues, hablando estrictamente, r , distancia de un punto del conductor al punto potenciado, es función de x . Sin embargo, si determinamos el potencial en un punto distante del conductor, de modo que la distancia sea mucho mayor que la longitud del mismo, en símbolos $r \gg l$, podemos medir r desde el centro del conductor cometiendo un error muy pequeño. Esta aproximación permite integrar con r constante, y el potencial vectorial es simplemente el siguiente:

$$A_x = \frac{I \sin \omega t}{4\pi r} \int_{-l/2}^{l/2} dx = \frac{Il}{4\pi r} \sin \omega t = \frac{il}{4\pi r} \quad (220)$$

Este es el potencial vectorial magnético. Las otras componentes son nulas. \mathbf{H} se puede encontrar, según la ecuación 211, calculando el rotor de esta expresión. Se debe recordar que esta solución no es exacta en la zona próxima al conductor. Ella no da allí el campo magnético. La fórmula es buena para distancias grandes y la solución puede ser identificada con el campo magnético producido por un dipolo oscilante.

Energía magnética. — Se necesita energía para producir un campo magnético. La energía proviene del circuito eléctrico, de la siguiente manera: cuando la corriente se inicia, se produce un campo magnético (ecuación 198). A medida que aumenta el campo magnético induce un campo eléctrico en y cerca de la región del mismo. La integral de este campo eléctrico a lo largo del circuito es la fuerza electromotriz (ecuación 191). El aumento de un campo magnético induce una fuerza electromotriz en el circuito de tal dirección que se opone al aumento de la corriente *. Esta fuerza

* De este modo se deduce la ley de Lenz partiendo de las ecuaciones (191) y (198).

electromotriz inducida debe ser vencida por el voltaje aplicado. Se muestra fácilmente que el producto de corriente por voltaje por tiempo es energía. A medida que se crea el campo magnético, el circuito pierde energía. Cuando la corriente deja de circular, el campo magnético desaparece y la energía es devuelta al circuito.

Se supone que la energía tomada al circuito eléctrico durante la formación del campo magnético reside en este campo. Si la densidad de energía se toma igual a $\frac{1}{2}\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$ o sea $\frac{1}{2}\mu H^2$, la energía total que existe en el campo magnético es:

$$\text{Energía magnética} = \frac{1}{2} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv \quad (221)$$

Como se puede demostrar que este valor es igual a la energía total necesaria para establecer el campo, la fórmula para la densidad de energía está justificada.

El problema es análogo al de la energía electrostática del capítulo IV, y se verá, por comparación con la fórmula (157) que la expresión para la energía magnética es análoga a la de energía electrostática.

Teorías. — Hay dos puntos de vista usuales para considerar el comportamiento magnético de las sustancias. Uno considera que la intensidad magnética \mathbf{H} , producida por la corriente eléctrica o por un imán permanente, es una especie de fuerza magnética y se considera que \mathbf{B} es la densidad de flujo magnético resultante. La permeabilidad es, entonces, una medida de la facilidad con que el flujo puede ser producido en un material dado. De acuerdo con este punto de vista se llama fuerza magnetomotriz a la integral curvilínea de \mathbf{H} . Se considera que la fuerza magnetomotriz es análoga a la electromotriz en un circuito eléctrico, en cuyo caso \mathbf{B} es análoga a la densidad de corriente y el flujo a la corriente.

Dada la analogía de este punto de vista con conceptos familiares, resulta conveniente para imaginar campos magnéticos y es, además útil para hacer los cálculos. Sin embargo, por motivos teóricos y para obtener una comprensión del proceso físico que existe bajo el comportamiento magnético, se acepta generalmente un concepto completamente diferente.

Se acepta a modo de teoría física que el campo \mathbf{B} no depende de la naturaleza de la sustancia sino que está determinado exclusivamente por la intensidad de corriente eléctrica. Se evita así la introducción de un factor no explicado: la "permeabilidad relativa". Este concepto es válido si se tienen en cuenta *todas las corrientes*.

Esto incluye las corrientes *dentro* de la estructura atómica de la materia así como las corrientes ordinarias que son conducidas por los electrones entre los átomos de los materiales conductores. Consideremos primero al hierro, pues es un caso extremo. Se cree que las sustancias son formadas por átomos y que cada átomo consiste en un núcleo con electrones que giran alrededor de él. A causa de las rotaciones electrónicas y spins, que son corrientes que circulan dentro del átomo, algunos átomos son equivalentes a pequeñas espiras que producen campos magnéticos. Esto es cierto en las sustancias paramagnéticas, con las ferromagnéticas como caso extremo.

En el hierro ordinario hay muchos átomos orientados al azar, y aunque cada átomo es un pequeño circuito que conduce corriente permanentemente, el total de un pedazo de hierro no es un imán en su totalidad. Sin embargo, si se lo coloca en un campo magnético externo, hay una fuerza sobre cada átomo que tiende a orientar todos los átomos de la misma manera. Los átomos de hierro responden a esta fuerza alineándose paralelamente al campo externo. Entonces, en un caso extremo de polarización, todas las corrientes eléctricas subatómicas contribuyen a intensificar el campo eléctrico que las orienta. El resultado final de todo esto es que el campo

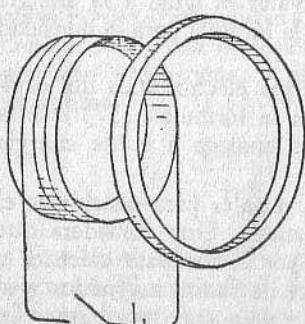


FIG. 42

magnético total es muchísimo más grande que el producido por las corrientes externas solamente, que sirven sólo para orientar a los átomos.

Materiales diamagnéticos. — Debemos decir una palabra acerca de los materiales diamagnéticos, aunque el diamagnetismo sea un efecto muy tenue. Se supone que resulta de lo que pueden ser consideradas corrientes inducidas dentro de los átomos de la sustancia.

La figura 42 muestra una bobina que se puede conectar a una batería y un anillo muy conductor. Cuando la batería se conecta a la bobina, se produce un campo magnético, parte del cual se concatena con el anillo. La formación de este campo induce fuerzas electromotrices en el anillo y, como consecuencia, la corriente circula por el mismo. El resultado de esta corriente que circula por el anillo es debilitar al campo magnético producido por la bobina. Si

el material del anillo tuviera conductividad perfecta, la corriente inducida en el anillo circularía en tanto hubiera corriente en la bobina y el campo magnético total sería siempre menor que el que habríamos tenido en ausencia del anillo. Se cree que los electrones dentro de los átomos de las sustancias materiales actúan en forma similar al anillo de la figura 42. Cuando se crea un campo magnético, se altera su movimiento produciéndose lo equivalente a una corriente desmagnetizante. Por lo tanto, el campo magnético en la sustancia es más débil que lo que sería en el vacío. En estos casos se dice que la sustancia es diamagnética.

Este efecto es independiente de la orientación de los átomos polares, que constituye el paramagnetismo. En efecto, se supone que todas las sustancias son diamagnéticas, pero que algunas tienen una tendencia paramagnética, y que el último efecto es, en muchos casos, más marcado que el primero, con el resultado que la sustancia se comporta, en conjunto, como paramagnética y aun ferromagnética. La corriente desmagnetizante del diamagnetismo es siempre extremadamente pequeña. Afecta al campo magnético en sólo unos millonésimos.

PROBLEMAS

1. ¿Sería posible definir la intensidad del campo magnético como un vector *paralelo* a la fuerza magnética sobre el conductor de prueba de la figura 34?

2. ¿Cuál sería la dirección del campo magnético de la figura 34 si la corriente circulara hacia abajo en el conductor de prueba? Compárese con la ecuación (186).

3. Si el flujo magnético concatena una bobina de alambre de algunas vueltas, el voltaje inducido en la bobina por un cambio de flujo es proporcional al número de vueltas. ¿Cómo se expresa esto por la ecuación (191)? ¿Cuál es la superficie de integración de esa ecuación en este caso?

4. Se arrollan diez vueltas de alambre en un carrete de madera y se hacen circular 5 amperes por el mismo. Se arrollan diez nuevas vueltas y con ello la corriente se reduce a 4 amperes. Usando la ecuación (201) con un camino de integración que pase axialmente por el carrete, encuéntrese en cuánto se modificó el campo magnético cerca del centro del carrete. Hágase un esquema mostrando la dirección de la corriente, la dirección del flujo y el camino de integración de la ecuación (201).

5. Demuéstrese que el campo magnético en un radio r dentro de un conductor de cobre por el cual circula corriente de intensidad I es $(Ir)/(2\pi r_0^2)$. El radio del conductor cilíndrico es r_0 , que es, por supuesto, mayor que r . La corriente está distribuida uniformemente a través de la sección transversal del conductor.

6. Calcular el rotor del campo magnético del problema 5. ¿Está de acuerdo con la ecuación (203)?

7. ¿Cómo está relacionada la corriente desmagnetizante de un transformador con el número de vueltas del primario si no hay cambio en las dimensiones generales del transformador o del voltaje aplicado? ¿Usando qué ecuaciones obtiene usted el resultado?

8. Determíñese y trácese el módulo del potencial vectorial A en función de la distancia radial al centro del conductor del problema 5. Dibújese, en una sola curva, la intensidad del potencial vectorial dentro y fuera del conductor. Se deben verificar las siguientes condiciones: $\nabla \times A = H$; $\nabla \cdot A = 0$, cuando $r = 0$, $A = 0$, y además que no haya discontinuidades de A en $r = r_0$.

9. Calcúlese (a partir del potencial vectorial de la ecuación 220) el campo magnético que rodea a un conductor recorrido por corriente alterna. Es conveniente usar coordenadas esféricas. Véase la Tabla II y la figura 58.

10. Dibújense flechas en el plano X-Z de la figura 41 para representar A . Úsense puntos y cruces para representar H .

11. Compárese el resultado del problema 9 con el campo magnético de un dipolo oscilante, tal como se da en los libros de electricidad.

CAPÍTULO VII

EJEMPLOS E INTERPRETACIÓN

La mayoría de las relaciones físicas que han sido discutidas en los capítulos anteriores, eran ya familiares. Son leyes sencillas de electrostática, flujo magnético, corrientes estacionarias y voltaje inducido. Si parecen algo extrañas ello se debe a que se han generalizado de modo que abarquen el mayor número de casos posibles. Estas relaciones generalizadas tienen algo en común con los espíritus incorpóreos y parecen insustanciales a la mayoría de nosotros hasta que se las liga con situaciones concretas. La notación vectorial no ha aliviado nada esta situación, aunque ha hecho mucho al impedir que nos sumerjamos en un laberinto de ecuaciones diferenciales.

El propósito de este capítulo es el de dar unas pocas ilustraciones concretas. No se presentará hecho alguno experimental nuevo.

Ejemplo 1. En la figura 43 se muestra una bobina con núcleo de madera, en forma de toro de sección rectangular. El núcleo es un anillo de sección transversal rectangular. Hay N vueltas del conductor alrededor de él y cada una lleva la corriente I . Se desea encontrar el campo magnético producido por la corriente y la inductancia de la bobina.

Será cómodo usar coordenadas cilíndricas en que el eje Z coincida con el eje del anillo. El radio menor del anillo es r_1 , y el de la superficie externa es r_2 .

Por razones de simetría y por la naturaleza conocida del campo magnético, es evidente que, en este caso, éste va a ser circular. Esto

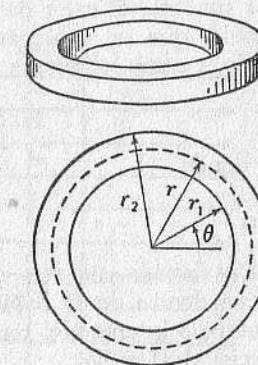


FIG. 43

es, H_θ existirá, pero H_r y H_z serán nulas*. Esto puede, por supuesto, ser demostrado, pero ahorramos tiempo aceptándolo sin demostración. Para encontrar la intensidad del campo, consideremos una circunferencia de radio r (indicada en la figura 43 por líneas punteadas) que será el camino de integración de la ecuación 201:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int i \cdot da \quad (201)$$

Si integramos el miembro de la izquierda a lo largo del círculo de radio r , la integral del miembro de la derecha nos da la intensidad total que pasa a través de la superficie interior al círculo.

Si r es menor que r_1 y está en el interior del anillo, o si r es mayor que r_2 , o si el camino de integración está por encima o por debajo del anillo, entonces no pasa ninguna corriente a través del mismo. En tales casos \mathbf{H} es cero, y no hay campo magnético en esas regiones.

Pero si la circunferencia de integración está dentro de la bobina, como se muestra en la figura, la corriente I pasa N veces a través de cualquier superficie limitada por la circunferencia, y tenemos:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = NI \quad (222)$$

Por simetría, el valor de \mathbf{H} es constante a lo largo de un camino circular que es, análogamente al considerado, concéntrico con el anillo, y como solamente existe H_θ se sigue que

$$H_\theta \oint ds = 2\pi r H_\theta = NI \quad (223)$$

de donde

$$H_\theta = \frac{NI}{2\pi r} \quad (224)$$

De acuerdo con esta ecuación, el campo magnético no es uniforme dentro de la bobina, sino que es más intenso cerca de la superficie interior del toro, siendo la intensidad inversamente proporcional al radio.

Se puede reconocer que $\int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}$ es la diferencia de potencial

* Hay una sola capa de vueltas arrolladas en el núcleo, de modo que la corriente recorre una sola vez el anillo cuando circula en la bobina. Dentro del núcleo hay una pequeña componente vertical H_z del campo. Si se usa un bobinado doble, esta componente es completamente eliminada y, aun en cualquier bobina, se la desprecia ordinariamente.

magnético (potencial magnético escalar), análogo a la diferencia de potencial o voltaje. La diferencia de potencial magnético a lo largo de un camino cerrado, como en la ecuación (222), recibe comúnmente el nombre de **fuerza magnetomotriz** (véase pág. 109).

Calculemos el flujo dentro del toro. Para encontrar el flujo total, integramos \mathbf{B} sobre la sección transversal del toro.

Puesto que $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, el valor deseado es:

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot da = \int \mu H_\theta da \quad (225)$$

Si el espesor de la bobina paralelo al eje Z es z_1 , tenemos:

$$\Phi = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu NI}{2\pi r} z_1 dr = \frac{\mu NI z_1}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (226)$$

Ahora podemos calcular la inductancia de la bobina. La **inductancia** es, por definición,

$$L = \frac{N\Phi}{I} \quad (227)$$

Φ es el flujo a través de una sola espira del conductor y es, por

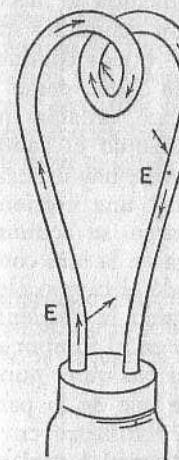


FIG. 44

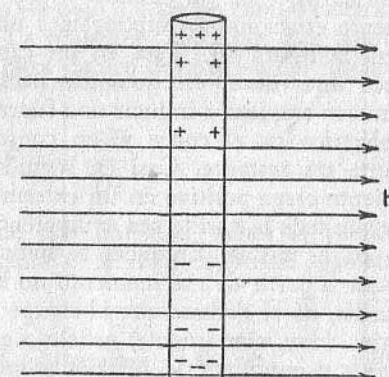


FIG. 45

tanto, el flujo en el núcleo. Sustituyendo la ecuación (226) por la (227), la inductancia de la bobina toroidal es:

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu N^2 z_1}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (228)$$

La inductancia se mide en henrys, y las dimensiones son metros. Como el núcleo es de madera, $\mu = 1,26 \times 10^{-6}$. El símbolo \ln indica el logaritmo natural.

Ejemplo 2. La figura 44 muestra un antiguo filamento de carbon para iluminación eléctrica. Se ha exagerado el espesor del filamento para poder dibujar las flechas que indican el campo eléctrico dentro del mismo. Una corriente estacionaria circula por el filamento y se desea encontrar el campo eléctrico que existe.

Dentro del filamento hay una densidad uniforme de corriente, paralela a la superficie del conductor, y como la intensidad del campo eléctrico es proporcional a la densidad de la corriente (ecuación 165), el campo eléctrico está también dirigido según el filamento y es de módulo uniforme. Si el filamento es de 25 cm. de longitud y el voltaje aplicado es de 110 voltios, la intensidad del campo eléctrico es uniforme de 4,4 voltios por centímetro. Este campo no está afectado por las vueltas del filamento, extendiendo el mismo campo en cualquier conductor de sección uniforme recorrido por corriente estacionaria. En un conductor por el cual no circula corriente no hay campo eléctrico.

Esta última afirmación podría parecer contradictoria al hecho que un campo eléctrico puede ser inducido en un conductor que no forma parte de un circuito y, por lo tanto, no puede conducir corriente estacionaria. Supongamos una varilla de cobre, como lo ilustra la figura 45. Está en un campo magnético variable que induce una fuerza electromotriz hacia arriba. Cuando el campo magnético empieza a inducir una fuerza electromotriz, hay un campo eléctrico en el cobre y, en consecuencia, hay una corriente durante un instante. Casi en seguida, sin embargo, se acumula suficiente carga positiva en un extremo y negativa en la otra como para que toda la varilla sea equipotencial, anulando el campo eléctrico en la misma. Entonces se habrá interrumpido la corriente. Aunque a partir de ese momento no haya campo en el interior de la varilla, no se deduce que el campo sea nulo en cualquier punto exterior. Hay, ciertamente, un flujo eléctrico que sale de la parte superior y entra por la inferior y mediante un voltímetro cuyos conductores no fueran afectados por el campo magnético variable se podría medir la fuerza electromotriz inducida. Véase en la página 95 una discusión sobre la fuerza electromotriz, de la que esto constituye un ejemplo.

Volviendo al filamento luminoso, habrá un campo eléctrico en el espacio que rodea al filamento. Ello se debe a que existe una

diferencia de 110 voltios entre los extremos del mismo. Esto resulta de la carga situada en la superficie del filamento. Esta carga fué depositada allí en el instante en que se aplicó la diferencia de potencial, debido a la componente del campo normal a la superficie. Cuando esta carga llegó a su posición final en la cantidad apropiada, la componente normal del campo dentro del filamento fué reducida a cero y la carga en la superficie quedó constante a partir de ese momento.

El campo eléctrico en el espacio que rodea al conductor es bastante complicado. Hay una componente normal a la superficie debida a la carga superficial. Hay una componente tangencial igual al campo dentro del filamento. La geometría del filamento no es sencilla y nosotros no vamos a intentar ninguna solución cuantitativa del problema sino anotar simplemente que la integral curvilinea de $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ desde un punto del filamento a otro, siguiendo cualquier trayectoria debe ser igual a la diferencia de potencial entre esos dos puntos, y la intensidad del campo eléctrico estará distribuida de tal manera que esto sea cierto. El campo eléctrico en el espacio cerca de la superficie del filamento, particularmente en los extremos del mismo, puede tener una intensidad de miles de voltios por centímetro.

Ejemplo 3. Cuando se modifica la corriente en la bobina toroidal del ejemplo 1 (figura 43), se cambia proporcionalmente el campo magnético, y el campo magnético variable induce un campo eléctrico dentro y alrededor del toroide. La ecuación (193) nos dice que el campo eléctrico inducido tiene rotor dentro del núcleo del toroide, y este rotor es igual a:

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (229)$$

Integrando cada miembro de esta igualdad, sobre la sección transversal de la bobina, y aplicando el teorema de Stokes al miembro de la izquierda se obtiene:

$$\int \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{E} \cdot ds = - \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (230)$$

El segundo miembro de esta ecuación es una integral curvilinea del campo eléctrico. Para nuestro propósito, elegimos un camino de integración que bordee al núcleo del solenoide. Puede ser prácticamente idéntico a una espira del arrollamiento que en-

vuelve al núcleo. La integral del campo eléctrico inducido a lo largo de un tal camino es la fuerza electromotriz inducida en una espira de la bobina [como en la ecuación (191)], en que hay N vueltas. La integral superficial en el miembro de la derecha de la ecuación (230), según la (187), es el flujo magnético a través del núcleo. La fuerza electromotriz inducida en todas las N vueltas es:

$$\text{Fuerza electromotriz} = -N \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (231)$$

Esta es una ecuación familiar. Otra forma familiar resulta cuando se sustituye la definición de inductancia dada en la ecuación (228) por la ecuación (231), dando:

$$\text{Fuerza electromotriz} = -L \frac{\partial I}{\partial t} \quad (232)$$

El signo negativo indica que si la corriente aumenta, de modo que su derivada es positiva, la fuerza electromotriz inducida es negativa y se opone al flujo de la corriente.

Ejemplo 4. Cuando un campo magnético se modifica, induce un campo eléctrico aun en el vacío, como se discutió en el capítulo VI. El campo eléctrico así inducido es capaz de actuar sobre cualquier partícula cargada que exista en la región de campo magnético variable; este principio se usa * en el "acelerador por inducción" para dirigir los electrones con el propósito de "bombardear átomos".

Consideremos un espacio angosto, evacuado, entre las caras grandes, redondas y chatas de polos magnéticos de hierro. El espacio evacuado tiene forma de disco, delgado en toda su extensión, pero de diámetro grande, y a través de él pasa un campo magnético muy fuerte desde el polo magnético de arriba al polo magnético de abajo. El campo magnético está producido por una corriente que circula a través de muchas vueltas alrededor de la estructura de hierro (véase fig. 46).

Consideremos ahora que aumentamos la corriente desde cero hasta un valor dado, en una pequeña fracción de segundo ($1/600$

* "Aceleración de electrones por inducción magnética", D. W. Kerst, *Physical Review*, volumen 60, julio 1 de 1941; páginas 47-53.

segundos); el campo magnético aumenta a la velocidad correspondiente. Esto induce un campo eléctrico en el espacio evacuado, y los electrones y otras partículas cargadas que están libres allí son acelerados en trayectoria espiral, aumentando su velocidad.

En una primera aproximación podemos considerar que el campo magnético es uniforme en la región que está entre los polos, cayendo rápidamente a cero al salir de la misma. Esto no es completamente cierto, pues es imposible tener un cambio abrupto desde una región donde hay campo magnético a una región donde no lo hay. Un cambio discontinuo de la intensidad del campo

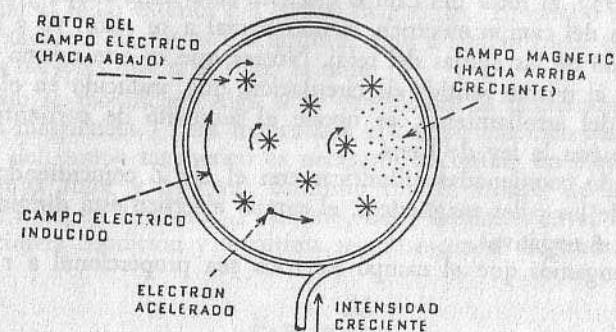


FIG. 46

magnético significa un rotor infinito en el campo magnético. (Considérese el "medidor del rotor" del capítulo II). En el caso actual, el campo magnético entre los polos tiene, como se sabe, una dispersión de sus líneas de fuerza, haciendo posible que la intensidad del campo disminuya gradualmente a cero sin que haya rotor. (En realidad, el acelerador actual, o "betátron" se diseña con un campo no uniforme, aun en el espacio entre caras de los polos, para dar estabilidad a las órbitas de los electrones, pero esta no-uniformidad no será considerada aquí.)

Donde el campo magnético es variable con el tiempo, hay un rotor del campo eléctrico [ecuación (193)], y el siguiente paso del problema es encontrar el campo eléctrico. Cuando se modifica la intensidad en el arrollamiento, hay una modificación del campo magnético en el espacio entre los polos, y como el campo aumenta su intensidad sin modificar su sentido, se deduce

que el vector "variación del campo por unidad de tiempo" tiene el mismo sentido que el campo mismo.

Imaginemos un conjunto de ruedecitas medidoras del rotor, como en la figura 46, todas girando con la misma velocidad y en la misma dirección. Es aparente que su rotación puede ser causada por un campo eléctrico en forma de remolino con la mayor intensidad en el borde. Será útil definir bien la dirección.

Si por medio de una corriente que gira en sentido contrario a las agujas del reloj se produce un campo magnético creciente, como se indicó, siendo éste boreal a la corriente, su sentido será hacia arriba de la página. A causa del signo negativo de la ecuación (193), el rotor del campo eléctrico será hacia abajo, y la circulación del campo eléctrico, siendo boreal a su rotor, va a tener el sentido de las agujas del reloj. Nótese que es este mismo campo, con el mismo sentido de circulación, que, inducido en el conductor del arrollamiento, se opone al aumento de corriente, de acuerdo con la ley de Lenz.

Usando coordenadas cilíndricas con el eje Z coincidiendo con el eje de los polos magnéticos, el campo eléctrico está dirigido según las θ negativas.

Supongamos que el campo eléctrico sea proporcional a r^* ; es decir:

$$E_\theta = -Ar \quad (233)$$

Debemos determinar el valor de A , que no es una función de r , θ o z .

Resulta de la tabla II que el rotor del campo eléctrico es:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -k \left(A + \frac{Ar}{r} \right) = -k2A \quad (234)$$

y de la ecuación (193),

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = k2A \quad \text{o} \quad \frac{\partial B}{\partial t} = 2A \quad (235)$$

* Véase un ejemplo similar, mucho más detallado, en la página 66.

Con esta fórmula calculamos A para usarlo en la ecuación (233), deduciéndo, para el campo eléctrico, la siguiente expresión:

$$E_\theta = -\frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \quad (236)$$

Aunque la proporcionalidad entre intensidad de campo y radio fué sólo una hipótesis en la ecuación (233), su corrección resulta probada mostrando que la ecuación (193) se satisface con el campo eléctrico de la ecuación (236) y el campo magnético dado de distribución uniforme.

El campo eléctrico inducido tiene su valor máximo a un radio r_0 igual al radio exterior del campo magnético. El campo eléctrico no desaparece en forma discontinua, sino de tal manera que para radios mayores que r_0 el rotor es nulo.

(Esto se modificaría algo si se considerara la dispersión de las líneas magnéticas.) Para determinar el campo eléctrico que existe fuera del campo magnético es necesario encontrar un campo que no tenga rotor y que sea continuo con el campo de la ecuación (236) en el radio r_0 . Además, debe anularse en el infinito. La primera condición y la última se satisfacen si elegimos:

$$E_\theta = -\frac{A'}{r} \quad (237)$$

Para $r = r_0$, éste debe ser igual a la (236), de modo que:

$$\frac{A'}{r_0} = \frac{r_0}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \quad (238)$$

De aquí sacamos el valor de A' , resultando para el campo en el exterior:

$$E_\theta = -\frac{r_0^2}{2r} \frac{\partial B}{\partial t} \quad (239)$$

La ecuación (239) se deduce con la hipótesis de un espacio vacío ilimitado. Por supuesto, la estructura del campo magnético y otros aparatos interfieren con esta condición ideal, y la ecua-

EJEMPLOS E INTERPRETACIÓN

ción (239) es una aproximación del campo eléctrico en radios que no son mucho mayores que r_0 .

Es muy interesante comparar los campos eléctricos que, en este ejemplo, resultan de un campo magnético variable con los campos magnéticos que, como se mostró en el capítulo VI, resultan de corrientes en un conductor largo y recto. La distribución del campo dentro y alrededor de un conductor largo es estrictamente análoga a la de las ecuaciones (236) y (239) respectivamente *.

Las ecuaciones (236) y (239) no son las únicas soluciones posibles de la ecuación (193) dentro de las regiones que estamos considerando. En efecto, cualquier campo eléctrico sin rotor podría ser agregado a estas soluciones, y la suma habría constituido una solución de la ecuación. (Un campo sin rotor es, en este caso, análogo a una constante de integración.) Pero no hay ningún campo que sea irrotacional, de divergencia nula y que se haga cero a distancia infinita sin ser infinito en ningún punto. Dentro de estas limitaciones físicas evidentes, nuestras soluciones son las únicas que satisfacen las ecuaciones electromagnéticas y las condiciones de contorno.

Sin embargo, nosotros hemos descuidado un factor. En estos casos no tiene importancia cuantitativa, pero en otros será la única parte importante de la solución. Es la *radiación*. Cuando un campo magnético variable produce un campo eléctrico alrededor de un imán, se produce emisión de una onda de energía electromagnética. En nuestro ejemplo del "acelerador por inducción", la energía irradiada en forma de onda es completamente despreciable.

Pero la radiación no es siempre despreciable; en radiocomunicaciones es el *sine qua non* de valor práctico. La teoría electromagnética que ha sido desarrollada en los capítulos precedentes no explica el fenómeno de radiación. Trata con campos eléctricos que son *cuasi-estacionarios*; es decir, campos tan lentamente variables que pueden ser considerados como electrostáticos.

Hemos ido un poco más lejos en los campos magnéticos, pues hemos visto la importancia que tiene la variación del campo magnético con el tiempo. Un campo magnético variable es capaz de producir un campo eléctrico. Debemos a James Clerk Maxwell la idea que un campo eléctrico variable es análogamente capaz

* La razón de esta analogía es simplemente que las dos distribuciones del campo son soluciones paralelas de las ecuaciones de Maxwell.

PROBLEMAS

de producir un campo magnético. Con la consideración de esta hipótesis adicional avanzamos del estado *cuasi-estacionario* al estado *electrodinámico*.

PROBLEMAS

1. Se tiene un solenoide con muchas vueltas y núcleos de madera cilíndrica. Hay n vueltas en cada metro de longitud y la intensidad que pasa por cada espira es I . El radio del solenoide es r . Demuéstrese que la inductancia por unidad de longitud es $3,95r^2n^2$ microhenries por metro. (Nota: Esto es cierto para un solenoide de longitud infinita, pero si la longitud es mayor de cuatro veces su diámetro, se comete un error inferior al diez por ciento.)
2. Se envuelve un conductor alrededor de un núcleo como en el ejemplo 1, de la página 125, excepto que el núcleo tiene forma cuadrada en lugar de ser un anillo. Además, es de hierro y no de madera. Pruebese si el flujo magnético puede o no estar completamente confinado al hierro.
3. Repítase el ejemplo 1, página 125, con un núcleo toroidal de sección transversal circular. Encuéntrese el flujo magnético y la inductancia en el núcleo. Compárese el valor obtenido con el que se puede obtener de un manual.
4. Pruebese que el campo de la ecuación (237) es irrotacional, como se afirmó en la página 106.
5. Para integrar qué campo vectorial sobre qué superficie constituye el concepto de *amper-vuelta*, una abreviación conveniente?
6. Para integrar qué campo vectorial sobre qué superficie constituye el concepto de *concatenación de flujo* una abreviación conveniente?
7. Usando los conceptos de este libro, explicar qué significa: a) voltaje; b) corriente; c) inductancia; d) capacitancia; e) fuerza electromotriz; f) fuerza magnetomotriz.
8. Señale los pasos importantes para deducir, de los resultados experimentales de este libro, las siguientes leyes: a) Las dos leyes de Kirchhoff; b) La ley de Lenz; c) La ley de inducción de Faraday; d) La ley de Biot-Savart; e) La ley de Ampère; f) La ley de Coulomb; g) La ley de Poisson.

CAPÍTULO VIII

HIPÓTESIS DE MAXWELL

Dejamos atrás los resultados experimentales que nos informaron completamente acerca de los campos eléctrico y magnético. Resumimos los resultados de tales experimentos e incluimos dos nuevas hipótesis que son, esencialmente, definiciones.

Experimento I: Se encuentra y se define la existencia de un campo eléctrico.

Experimento II: El campo electrostático es laminar (irrotacional).

Experimento III: La divergencia del campo electrostático es proporcional a la densidad de carga.

Experimento IV: Se establece el comportamiento de los dieléctricos.

Experimento V: Se establece la ley de Ohm.

Experimento VI: Se encuentra y se define la existencia de un campo magnético.

Experimento VII: Se encuentra que un campo magnético variable induce un campo eléctrico.

Experimento VIII: El campo magnetostático es solenoidal (sin divergencia).

Experimento IX: El rotor del campo magnetostático es proporcional a la densidad de corriente.

Se supone que el campo eléctrico dinámico tiene divergencia proporcional a la densidad de carga eléctrica. (Esto se prueba en el Experimento III sólo para el campo electrostático.)

Se supone que el campo magnético dinámico tiene divergencia nula. (Esto se prueba en el Experimento VIII sólo para el campo magnetostático.)

La información obtenida de los experimentos mencionados es la base de la siguiente exposición del electromagnetismo. Estos experimentos u otros que den resultados equivalentes deben ser la base de cualquier desarrollo de la teoría electromagnética.

Los hombres de ciencia tuvieron información experimental respecto a los campos eléctrico y magnético hacia mediados del siglo diecinueve, pero no se tenía entonces la formulación matemática que hemos dado aquí. En realidad, el concepto mismo de campo eléctrico o magnético era en ese tiempo una idea nueva de Faraday, considerada con cierta duda por la mayoría de los hombres de ciencia. En esa época, la controversia entre los que aceptaban las "acciones a distancia" y los partidarios de la "teoría del campo" estaba en su apogeo. Por supuesto, los campos electrostático y magnetostático habían sido calculados y representados gráficamente, pero Faraday fué el primero (según la opinión de James Clerk Maxwell) en creer en la existencia del campo electromagnético. Anteriormente se consideraba a los campos como una forma conveniente de imaginar la distribución de las fuerzas que resultaban de la acción magnética y eléctrica, pero para Faraday, como para nosotros, el campo magnético era el medio por el cual se ejercía la fuerza magnética.

Desde la época de los trabajos de Ampère (1820 a 1825), se consideraba que un conductor por el que circulaba corriente ejercía una fuerza sobre otro conductor por el que también circulaba corriente; no se tenía en cuenta ningún agente intermediario para la actuación de tal fuerza. Esta era la teoría de acciones a distancia, continuación lógica de la famosa ley de gravitación de Newton, que tenía ya un siglo de existencia y era universalmente aceptada. La ley de Newton suponía acciones a distancia, pues no consideraba la necesidad de ningún medio para la transmisión de la fuerza gravitatoria. Era perfectamente natural que los hombres de ciencia que estudiaban la electricidad siguieran a tan ilustre precursor.

Faraday, en cambio, concibió la realidad física de los campos magnético y eléctrico, y Maxwell dió forma matemática a su teoría. Fué Maxwell quien señaló que "una corriente de desplazamiento" (como en la ecuación 177) simplificaría y mejoraría el esquema matemático. Maxwell hizo entonces la proposición, muy importante, siguiente: se sabe por la experiencia que la corriente de *conducción* produce un campo magnético; con propósitos matemáticos se expresa la corriente *total* como la suma de la corriente de *convección* y la corriente de desplazamiento; ¿no es, por lo tanto, aceptable que

la corriente de *desplazamiento* produzca también un campo magnético? La técnica experimental no permitía, en la época de Maxwell, que esto fuera comprobado o desecharido por la investigación directa, pues las cantidades implicadas eran muy pequeñas. Pero esta hipótesis llevó a una conclusión de importancia fundamental, pues Maxwell mostró que, si fuera cierta esa hipótesis, la energía podría ser transmitida en ondas electromagnéticas.

La teoría de acciones a distancia suponía que la acción eléctrica aparecía simultáneamente en todos los puntos, por remotos que estuvieran. La teoría de Maxwell, por el contrario, exigía que la energía fuera transmitida por ondas que caminaran con velocidad finita. Esta velocidad de propagación podía ser medida y probablemente se podría obtener una verificación experimental de la teoría estudiando la velocidad de las perturbaciones electromagnéticas. Antes de considerar la comprobación experimental, vamos a seguir el razonamiento de Maxwell que lleva a las ondas electromagnéticas.

La hipótesis de Maxwell era que, en general, cuando hay campos eléctricos variables, se produce un campo magnético variable por la suma de las corrientes de conducción y de desplazamiento. En la ecuación 203, que es:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \iota \quad (203)$$

el miembro de la derecha de la ecuación sería, según Maxwell, la densidad total de corriente, como en la ecuación 177, resultando entonces:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \iota + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (240)$$

Esta es una de las ecuaciones conocidas como **ecuaciones de Maxwell**. Otra es la ecuación (193) del capítulo VI:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (193)$$

Las otras dos ecuaciones fundamentales son:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (196)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (115)$$

Estas son las ecuaciones básicas del electromagnetismo. Se repiten,

para comodidad de referencia, en la Tabla III (véase al final de este volumen).

Se notará que las ecuaciones de Maxwell son muy sencillas y simétricas cuando se aplican en un medio homogéneo en el cual no hay cargas ni conductividad:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (241)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (242)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (243)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (244)$$

Será útil recordar una vez más el significado físico de estas ecuaciones. La ecuación 241 dice que un campo eléctrico variable producirá un campo magnético, y la ecuación 242 dice que un campo magnético variable producirá un campo eléctrico. La última relación es el principio familiar que rige el funcionamiento de los transformadores. La primera es la hipótesis de Maxwell que dice que la corriente de desplazamiento así como la de conducción pueden producir un campo magnético. La ecuación 241 no contiene ningún término que dé cuenta del campo magnético producido por la corriente de conducción. Ello se debe a que esa ecuación está simplificada, pues la aplicamos a una región en la cual $\gamma = 0$ y, por lo tanto, $\iota = 0$. La ecuación 240 es la completa.

Las ecuaciones 241 y 242 son particularmente interesantes con respecto a la propagación de las ondas eléctricas. Vemos en seguida que si un campo eléctrico variable produce un campo magnético variable, y éste, a su vez, produce un campo eléctrico que da otro campo magnético, y así sucesivamente, debe tener lugar una cierta serie de transferencias de energía cuando tiene lugar cualquier perturbación eléctrica o magnética. La energía pasa del campo eléctrico al magnético, y de nuevo al campo eléctrico, y así sucesivamente. Si, como es realmente cierto, la energía magnética no está confinada a la misma porción del espacio que la eléctrica, de la cual ella deriva, sino que se desplaza algo más allá, y si la energía eléctrica que se deriva de esa energía magnética se desplaza, a su vez, otro poco más y así sucesivamente, de modo que cuando la energía cambia de forma se desplaza también en el espacio,

podemos razonablemente pensar que lo que se propaga es una onda de energía electromagnética.

Consideremos una situación algo análoga. Por algún medio pongamos artificialmente en movimiento oscilatorio un volumen pequeño de agua, que está en el medio de un lago. Puede lograrse esto, por ejemplo, volcando repentinamente un cubo de agua en el lago. Cualquiera que sea el carácter de la perturbación, la superficie de agua en este punto sube y baja en forma oscilatoria. Pero no es posible que el agua que se vertió oscile independientemente del agua que la rodea. Sus excesos y deficiencias de presión, periódicas, se transmiten al agua que lo rodea, que, de esta manera, recibe energía y es puesta en movimiento. En su ondulación resultante, transfiere energía a las regiones vecinas. Por este proceso, una onda se propaga a través de la superficie del lago. La razón fundamental de la existencia de una onda de agua es la siguiente: el movimiento y la presión de un volumen dado de agua no son independientes del movimiento y la presión del agua que rodea ese volumen, y cuando un elemento de volumen es perturbado, transmite energía al agua que está cercana a él.

La razón fundamental de la existencia de una onda eléctrica es muy similar. Un campo magnético variable induce un campo eléctrico, ambos en la región donde varía el campo magnético y también en la región vecina; análogamente, un campo eléctrico variable produce un campo magnético en la región en la cual tiene lugar el cambio y también en la región vecina*. En consecuencia, cuando hay una perturbación de carácter eléctrico o magnético, en una región dada del espacio, la perturbación no puede ser confinada a ese espacio. Los campos variables dentro de esa región inducen campos en la región vecina también, y éstos, a su vez, en las siguientes, y la energía se propaga hacia fuera. A medida que esta acción continúa, se propaga una onda de energía electromagnética.

Cuando hay un exceso de energía electromagnética en alguna región del espacio ilimitado no queda estacionada en ese lugar, de la misma manera que un exceso de agua no puede quedar esta-

* Es útil, probablemente, pensar que las cosas pasan de la siguiente manera: la corriente que fluye en un conductor produce un campo magnético en el mismo, pero también produce un campo magnético en el espacio que rodea al conductor, espacio en el que no fluye corriente. Análogamente, la corriente de desplazamiento que resulta de un campo eléctrico variable, produce un campo magnético en la región donde ocurre el desplazamiento, es decir, donde se modifica el campo eléctrico, y también en la región cercana.

cionario en la superficie del mismo. No puede subsistir. Camina como una onda hasta que la energía se disipa.

Para mostrar que este es, en realidad, el comportamiento impuesto por las ecuaciones de Maxwell, vamos a deducir de ellas las llamadas ecuaciones de ondas. Para empezar tenemos dos ecuaciones, cada una de las cuales contiene simultáneamente \mathbf{E} y \mathbf{H} y el primer paso es resolver las ecuaciones simultáneamente, a fin de eliminar una de las variables y retener la otra. Eliminemos \mathbf{H} y obtengamos una ecuación en que las únicas variables sean \mathbf{E} y el tiempo. Una ecuación de esta clase se interpretará más fácilmente.

Antes de seguir adelante es bueno señalar que las ecuaciones de Maxwell son ecuaciones en derivadas parciales. La ecuación 242, por ejemplo, iguala el rotor del campo eléctrico con la derivada temporal del campo magnético. No debemos esperar que la solución sea sencilla, pues ello no es común en sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Como en todas las ecuaciones de este tipo, las condiciones de contorno son indispensables para hallar la solución.

Dijimos más arriba que, de acuerdo con la ecuación 241, un campo eléctrico variable produce un campo magnético. Estrictamente, la ecuación dice que un campo eléctrico variable va a producir una derivada espacial (rotor) de un campo magnético, pero es evidente que si un campo magnético tiene un cierto valor del rotor, varía de punto apunto y no puede ser cero en todos los puntos. Como el rotor de \mathbf{H} no puede existir sin que exista también \mathbf{H} , podemos decir que un campo eléctrico variable produce un campo magnético.

Podemos ahora proceder a la solución simultánea de las ecuaciones 241 y 242, obteniendo

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu \nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (245)$$

Se ve, en el miembro de la derecha de esta ecuación, que el rotor, que implica derivadas espaciales, opera sobre una derivada respecto del tiempo. Es un hecho muy conocido en matemáticas que el orden de derivación no afecta el resultado. Se tiene entonces:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) \quad (246)$$

(Si esto no resulta claro, desarrollese el rotor en coordenadas rectangulares.)

Conocemos el rotor de \mathbf{H} de las ecuaciones (241). Lo sustituimos en la (246) y obtenemos:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (247)$$

Esta ecuación diferencial contiene solamente a \mathbf{E} , como deseábamos, pero puede todavía ser simplificada.

El miembro de la izquierda de la ecuación (247) es el rotor del rotor de un vector. Se puede demostrar que el rotor del rotor de cualquier vector es igual al gradiente de la divergencia de ese vector menos el laplaciano *. Simbólicamente:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (248)$$

Sustituimos esta igualdad en la ecuación (247). La divergencia del campo eléctrico es nula, pues hemos supuesto que no hay cargas presentes. El primer término del desarrollo desaparece, quedando simplemente:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (249)$$

Para algunos lectores, la ecuación (249) será familiar. Es la llamada ecuación de las ondas. Para otros, resultará más clara si la desarrollamos en sus componentes cartesianas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} &= \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} &= \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (250)$$

Si consideramos ahora un caso particular en que sean nulas las componentes según x y z del vector E y E_y una función de x ,

* Véase la nota al pie de la página 48.

pero no de y ni de z , las ecuaciones (250) se reducen a las siguientes:

$$E_x = 0 \quad E_z = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad (251)$$

Cada una de las restricciones que nos condujo a la ecuación (251) tiene un significado físico, que será discutido en un capítulo ulterior.

La expresión (251) es la forma más sencilla de la ecuación diferencial de la propagación de una onda. Su solución es:

$$E_y = f(x - vt) \quad (252)$$

en la cual $v = 1/\sqrt{\mu \epsilon}$. La función $f(x - vt)$ representa cualquier función de $(x - vt)$.

(La ecuación (251) tiene también otras soluciones, una de las cuales es $f_2(x + vt)$. Por ahora no estamos interesados en estas otras soluciones.)

Para probar que la ecuación (252) es una solución de (251), hacemos la sustitución y las derivaciones indicadas, como en el problema 5.

Es necesario ahora reconocer que la ecuación (252) describe la propagación de una onda de forma y dimensiones constantes que se propaga a lo largo del eje de las X con velocidad v . Los lectores que no están familiarizados con esto encontrarán útil considerar funciones específicas de $(x - vt)$ y representar $f(x)$ para distintos valores del tiempo.

Consideremos un ejemplo de éstos. Supongamos primero que la onda se propaga en el vacío; la velocidad se llama entonces c (es un valor determinado de v que se aplica al vacío). Según la definición que sigue a la ecuación (252), tenemos:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (253)$$

Supongamos que la onda es sinusoidal y que puede ser descrita por la función:

$$E_y = \sin(x - ct) \quad (254)$$

La figura 47 presenta un ciclo de esta onda, dibujado en función de x para distintos valores del tiempo. En otras palabras, si la onda fuera visible cuando se propaga en el espacio, la figura 47 sería una sucesión de instantáneas en instantes en los cuales ct es igual a $0, \pi/6, \pi/3, \pi/2$. Resulta claro de la ecuación que todas estas curvas son semiovaladas de la misma forma y amplitud. La curva para la cual $ct = \pi/6$ está desplazada con respecto a la correspondiente a $ct = 0$ y cada uno de sus correspondientes valores ocurrirá en un valor de x corrido en $\pi/6$. Con esto el valor del paréntesis permanece constante. Por lo tanto, para obtener el mismo valor de E_y , es necesario que x aumente a medida que aumente el tiempo.

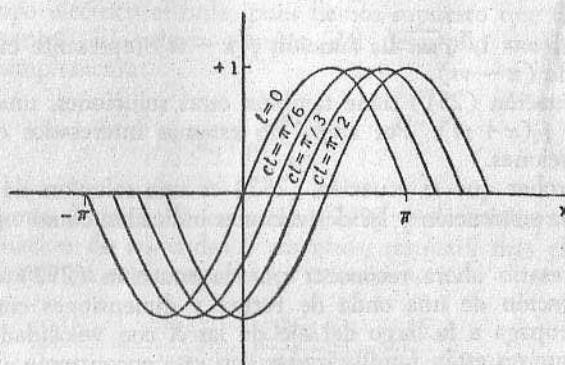


FIG. 47

El resultado es una onda que se desplaza de izquierda a derecha a medida que transcurre el tiempo. El tiempo y la distancia están ligados por el valor c , con el significado de una velocidad. (Se notará, sin embargo, que no hay ningún ente físico moviéndose con la velocidad c . El campo eléctrico no se desplaza; simplemente varía en cada punto de manera tal que si fuera visible, aparecería como ondas de esa velocidad.)

La ecuación de onda (252) es *transversal* porque el campo eléctrico E_y está en la dirección y y la onda se propaga en la dirección x .

La ecuación (249) se obtiene eliminando H y reteniendo E en las ecuaciones (241) y (242). Si se sigue el procedimiento opues-

to, es decir, eliminar E , quedándonos con H , obtenemos una ecuación similar para el vector magnético:

$$\nabla^2 H = \mu\epsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \quad (255)$$

La solución de esta ecuación es una onda progresiva de H .

Es evidente que no se puede tener una perturbación eléctrica sin tener una magnética, y viceversa, y se encontrará que toda onda electromagnética tiene una porción eléctrica y una magnética que se propagan juntas. Tener una sin la otra sería lo análogo a tener una onda de agua en la cual hubiera movimiento sin desplazamiento, o desplazamiento sin movimiento. Aunque hay una ecuación de onda para H y otra para E , ambas representan magnitudes físicamente inseparables.

El reconocimiento de que estas ecuaciones electromagnéticas tienen una solución que se propaga condujo a Maxwell a especulaciones muy interesantes. En primer lugar, si se pudiera mostrar que las ondas electromagnéticas existen, la hipótesis de Maxwell con respecto a la producción de campos magnéticos por la corriente de desplazamiento estaría justificada, pues sin esa hipótesis las ondas no podrían existir. La situación sería análoga a la de un lago en que el agua tuviera peso pero no masa: las ondas no podrían existir.

Si existe una onda electromagnética, debe propagarse en el vacío con la velocidad c , según la ecuación (253). Pero c es una cantidad conocida, pues se puede calcular conociendo μ_0 y ϵ_0 . Estas últimas son constantes dimensionales que pueden ser evaluadas por mediciones electrostáticas y de fuerzas magnéticas. Equilibrando dos fuerzas en un ingenioso equilibrio de corrientes, Maxwell encontró, alrededor de 1865, que el valor numérico de c es un poco menor que 3×10^8 . Por lo tanto, si las ondas electromagnéticas existen, deben propagarse con la velocidad de 3×10^8 metros, o sea 300.000 kilómetros por segundo.

¿En qué medio existen las ondas eléctricas? En la época de Maxwell se aceptaba la idea de que la luz era un fenómeno ondulatorio en un éter imponderable que llenaba todo el espacio, con propiedades elásticas que permitían la propagación de ondas transversales a través de él. Las ecuaciones de Maxwell indicaban que las perturbaciones electromagnéticas se propagaban como on-

HIPÓTESIS DE MAXWELL

das transversales en algún medio similar. ¿No podría ser que la luz fuera simplemente una onda electromagnética?

Faraday había ya especulado sobre esta posibilidad algunos años antes y había señalado que si pensar en un éter imponderable, infinito, que ocupa todo el espacio exigía un esfuerzo de imaginación, la creencia en dos éteres, imponderables, infinitos y ocupando todo el espacio, uno para la luz y otro para la electricidad, estaba más allá de los límites de la credulidad. Por lo tanto, solamente sobre esta base él había pensado que la luz era un fenómeno eléctrico.

Maxwell tenía razones más sustanciales para llegar a la misma conclusión, pues él disponía de las mejores mediciones de la velocidad de la luz en el vacío, y encontró que el promedio de ellas era asombrosamente cercano a 300.000 kilómetros por segundo, que era la velocidad que él había deducido para las ondas electromagnéticas, a partir de mediciones de laboratorio de unidades eléctricas.

Presentadas así las cosas, la hipótesis de Maxwell estaba respaldada por hechos experimentales, y era muy probable que la luz fuera una onda electromagnética.

Aunque Maxwell aceptó estas conclusiones, muchos otros científicos no. Veinticinco años más tarde Hertz probó la existencia física de las ondas electromagnéticas, y las ideas de Maxwell fueron definitivamente aceptadas. Hertz mostró fenómenos de interferencia, reflexión y refracción de ondas electromagnéticas. Después de esto no era ya posible dudar de que la energía se propagaba como un movimiento ondulatorio. Pero hav que evitar, todavía, la cuestión embarazosa del carácter del medio en que se propagan tales ondas. Lo mejor que podemos hacer es seguir la "sombra de razonamiento" de Faraday y "rechazar al éter, pero quedarnos con las vibraciones".

PROBLEMAS

1. Desarróllense las ecuaciones de Maxwell (241) y (242) en coordenadas rectangulares. Por igualación de las componentes, obténganse tres ecuaciones escalares de cada una de ellas (como en las ecuaciones [264] a [266]).

2. Pruébese la ecuación (248) desarrollándola en sus componentes cartesianas.

3. Encuéntrese el laplaciano de \mathbf{H} , ecuación (255). Supóngase la conductividad cero.

PROBLEMAS

4. Amplíese el teorema 3 suponiendo que la región sea conductora. 5. Pruébese que la ecuación (252) es una solución de la ecuación de onda (251). La función compuesta $f(x - vt)$ se diferencia de acuerdo con los métodos discutidos en los libros de cálculo infinitesimal.

6. Muéstrese que $E_y = f(x - vt)$ es una solución de la ecuación (251), usando las siguientes funciones: $f(x) = A_1 j\beta x$; $f(x) = A(e^{-ax} - e^{-bx})$; $f(x) = xe^{-ax}$; $f(x) = \operatorname{sen} ax \cos bx$; $f(x) = A_1 \operatorname{sen} \beta x + A_2 \operatorname{sen} 2 \beta x$; $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$. (Nota: ¿Cuál de estas funciones puede ser identificada como de importancia práctica para la propagación de ondas?)

7. Muéstrese que $E_y = f(x + vt)$ es una solución de la ecuación (251) para una de las funciones dadas en el problema 6 para $f(x)$.

8. Dedúzcanse las ecuaciones (243) y (244) de las ecuaciones (241) y (242) suponiendo que los campos no son estáticos.

CAPÍTULO IX

ONDAS PLANAS

Cuando la luz parte de un punto del sol, se irradia en todas direcciones y se propaga como una onda esférica. Parte de esa onda llega a la tierra, donde podemos observarla y medirla en nuestros laboratorios.

La parte que llega nos parece una onda plana. Esto es simplemente porque estamos limitados por el tamaño del laboratorio (o el de la tierra) y podemos observar sólo una parte muy pequeña de toda la onda esférica. Así como el océano parece chato a un hombre que puede observar unas pocas millas del mismo, las ondas esféricas parecen planas si se puede observar sólo una parte de ellas.

Con las ondas de radio la situación es más o menos la misma. Desde la antena transmisora, la onda es irradiada en todas direcciones. En realidad, desde el punto de vista de la antena transmisora, la forma de la onda

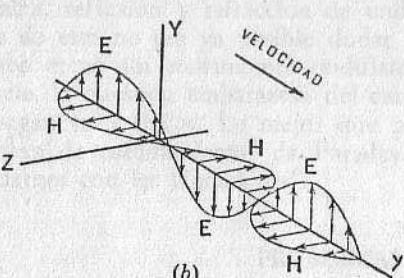
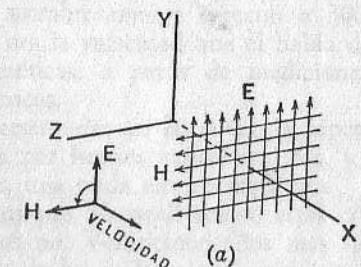


FIG. 48

irradiada es una consideración práctica importante, pero, desde el punto de vista de la antena receptora, cualquier onda transmitida desde una estación a distancia de algunas millas es prácticamente una onda plana. (Esta afirmación desprecia posibles complicaciones, tales como el efecto de tierra o las reflexiones en la ionosfera.)

Consideremos un ejemplo simple de una onda plana. En la fig. 48a. se indica una sección transversal de una onda plana. Los campos eléctrico y magnético se representan en un plano paralelo al Y-Z. La onda se propaga de la izquierda a la derecha en la dirección positiva del eje de las X. Llena toda la región representada en la figura, pero sólo se indica una sección transversal. El campo eléctrico es vertical. Es uniforme en todo el plano en dirección y magnitud.

Campo eléctrico. — Debemos describir matemáticamente esta onda. Primero, análogamente a todas las ondas electromagnéticas, debe satisfacer la ecuación de las ondas.

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (249)$$

Además, como el campo eléctrico es paralelo a la dirección y:

$$E_x = 0 \quad E_z = 0 \quad (256)$$

Finalmente se supone que la intensidad del campo eléctrico es uniforme en todo el plano de la onda y no varía de un punto a otro de ese plano cuando cambian y o z. Así:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} = 0 \quad (257)$$

La ecuación 249 puede ser desarrollada en tres ecuaciones que representan sus componentes cartesianas, como en la ecuación (250), página 142. Si hacemos esto, teniendo en cuenta las condiciones 256 y 257, la ecuación de onda se transforma simplemente en lo siguiente:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad (258)$$

La solución de esta ecuación * será la expresión matemática de nuestra onda.

* Se puede observar que ésta es idéntica a la ecuación 251, que resulta de hipótesis matemáticas similares a las ecuaciones 256 y 257, pero sin ninguna interpretación física.

La solución completa de la ecuación 258 es la siguiente:

$$E_y = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \quad (259)$$

La primera parte de esta solución fué discutida en el Capítulo VIII y representa una onda que se propaga en la dirección del eje X , como en la fig. 47. La función f_1 puede ser cualquier función y depende del tipo de perturbación que produce la onda. La mayoría de las ondas de radio son aproximadamente funciones sinusoidales y para éstas f_1 va a ser una función seno o coseno de $(x - vt)$.

La segunda parte de la solución es también una onda progresiva, pero representa una onda que se propaga en la dirección negativa de las x . Por lo tanto, la solución completa describe dos ondas que se propagan* una en dirección opuesta a la otra, pasando simultáneamente a través del mismo espacio, y la ecuación nos dice que cada una camina independientemente de la otra. Por ahora será conveniente poner $f_2 = 0$. Con esto, la solución representa solamente una onda.

Campo magnético. — Hasta ahora sólo hemos discutido la componente eléctrica del campo. Esta debe estar acompañada por una componente magnética que puede ser determinada a partir de la componente eléctrica por medio de las ecuaciones de Maxwell. El método general es el que damos a continuación. Una de las ecuaciones de Maxwell (Tabla III) dice

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (260)$$

Conocemos \mathbf{E} y, por lo tanto, podemos hallar su rotor, determinando de este modo la derivada temporal de \mathbf{B} . La integración con respecto al tiempo nos dará \mathbf{B} .

Este camino para hallar el campo magnético se puede seguir en términos generales, pero resultará más claro considerar una onda dada. Se ha mencionado que la onda más común en la prá-

* Se podrían todavía agregar otros términos a la ecuación 259, como solución de la ecuación 258. Se podría agregar un término constante y términos conteniendo x o t en el primer grado, pues las segundas derivadas de tales términos se anulan. Tales términos no representan ninguna acción de onda y pueden ser descartados en nuestra discusión presente.

tica es aproximadamente sinusoidal. Supongamos una onda en la que el campo eléctrico se describe mediante:

$$E_x = 0 \quad E_y = E_m \cos \beta(x - vt) \quad E_z = 0 \quad (261)$$

Se verá que estas ecuaciones son consistentes con la ecuación 259, pues dan la componente y del campo eléctrico como una función de $(x - vt)$. Representan, por lo tanto, una solución de la ecuación de las ondas. Los coeficientes E_m y β pueden tener cualquier valor. Desde el punto de vista matemático son simplemente constantes arbitrarias, pero físicamente la primera determina la amplitud de la onda y la última (conocida como *constante de fase*) determina la frecuencia de su variación sinusoidal. Una tal onda se indica en la figura 48b.

Se obtiene una forma más usual de la ecuación poniendo $\beta v = \omega$ y escribiendo:

$$E_x = 0 \quad E_y = E_m \cos(\omega t - \beta x) \quad E_z = 0 \quad (262)$$

Se ve en estas ecuaciones que ω se identifica con $2\pi f$, en que f es la frecuencia. Introduciendo λ como longitud de onda, y tomando v como velocidad de propagación de fase en un medio dado, resultan las siguientes relaciones, sencillas* pero útiles:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = 2\pi \frac{f}{\beta} \quad \lambda = \frac{v}{f} = \frac{2\pi}{\beta} \quad (263)$$

La fase β es inversamente proporcional a la longitud de onda; λ se mide en metros por ciclo, y β en radianes por metro.

El primer paso para determinar el campo magnético es el de desarrollar la ecuación 260 en sus partes componentes:

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = -\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \quad (264)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = -\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \quad (265)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \quad (266)$$

* Estas y otras relaciones están recopiladas en la Tabla III, al final del libro, para comodidad de referencia.

Para la onda particular que estamos considerando, descrita por las ecuaciones 262, las componentes de las ecuaciones de Maxwell son:

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0 \quad (267)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\beta E_m \operatorname{sen}(\omega t - \beta x) \quad (268)$$

Las componentes del campo magnético se encuentran por integración respecto del tiempo:

$$\begin{aligned} B_x &= 0 \\ B_y &= 0 \end{aligned} \quad (269)$$

$$B_z = \frac{\beta}{\omega} E_m \cos(\omega t - \beta x) = \frac{\beta}{\omega} E_y$$

Recordando que ω/β es la velocidad de propagación de la fase,

$$E_y = v B_z \quad (270)$$

Por lo tanto, en una onda plana que se propaga en un medio dieléctrico, las componentes eléctrica y magnética de la onda son idénticas de forma y perpendiculares en dirección. Son ambas perpendiculares a la dirección de propagación de la onda. En unidades, el campo eléctrico, que se mide en voltios por metro, es igual a la densidad de flujo magnético en webers por metro cuadrado multiplicado por la velocidad, expresada en metros por segundo. Se mostró que la velocidad v es igual a $1/\sqrt{\mu\epsilon}$, cuando la onda está en el vacío, tiene el valor numérico c , alrededor de $2,998 \times 10^8$, o sea, aproximadamente, 3×10^8 metros por segundo.

Puesto que $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, podemos también escribir

$$E_y = v \mu H_z = \frac{\mu}{\sqrt{\mu\epsilon}} H_z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_z \quad (271)$$

Esto da una relación entre E y H . Es a menudo útil dar un nombre especial, *impedancia intrínseca*, y un símbolo η a la relación de E a H en una onda. La ecuación 271 muestra que, para una onda plana en medio dieléctrico, se tiene:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (272)$$

La impedancia intrínseca es algo análogo a la impedancia característica de una línea de transmisión. Tiene las dimensiones de ohmios, pues E se mide en voltios por metro y H en amperes por metro. El valor de η en el vacío es $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 4\pi c \cdot 10^{-7}$; éste es aproximadamente 376,7 y, para muchos casos, se puede poner igual a 377 ó 120π .

En la fig. 48a se muestran las líneas de los campos eléctrico y magnético. En todo el plano indicado en la figura, \mathbf{E} y \mathbf{H} son uniformes. Si el plano que se muestra en la figura se imagina fijo en el espacio, \mathbf{E} y \mathbf{H} varían en ese plano constantemente con el tiempo. Si, por otra parte, se imagina al plano indicado propagándose a lo largo del eje de las X con la velocidad de la luz, \mathbf{E} y \mathbf{H} resultan constantes en el mismo. Esta es, en realidad, la característica distintiva de una *onda plana*.

La figura 48b es una representación gráfica de una onda sinusoidal. Se propaga en la dirección positiva del eje de las X . Se representan los vectores \mathbf{E} y \mathbf{H} , y cada flecha representa la intensidad eléctrica o magnética en todo su plano. La longitud de cada vector muestra la intensidad del campo. Los campos varían sinusoidalmente a lo largo del eje de las X y, si se recuerda que toda la onda se propala a lo largo de dicho eje, resulta evidente que en cada punto las intensidades eléctrica y magnética varían sinusoidalmente con el tiempo.

Ni la figura 48a ni la 48b son representaciones completas de la onda. Para mostrar la onda tal cual es en el espacio tridimensional, se necesitaría una combinación de estos diagramas, mostrando la distribución de los campos eléctrico y magnético en muchos planos. Aun esto sería sólo una imagen instantánea de la onda y no daría idea de su movimiento. Para una imagen completa de la onda, la imaginación debe suplir lo que no se puede representar en el papel.

Polarización. — Esta onda es una onda plana y es también una onda polarizada. Una onda se dice polarizada si el vector oscila manteniendo siempre la misma dirección mientras pasa la onda. La ecuación 256 especifica que la onda es polarizada, y las ecuaciones 256 y 257 especifican una onda plana polarizada. En el caso general de una onda no-polarizada, los vectores eléctrico y magnético cambian de dirección y de módulo al pasar la onda. (Un ejemplo de ondas transversales lo tenemos en las vibraciones de una cuerda: si la cuerda vibra en un solo plano, su movimiento ondulatorio está polarizado.)

La polarización de las ondas de radio está determinada principalmente por la antena transmisora. La "onda de tierra" de una antena vertical, como las que se usan comúnmente en la banda de frecuencia de broadcasting o radiodifusión, está verticalmente polarizada porque el campo eléctrico de una antena transmisora es fundamentalmente vertical. Las antenas de alta frecuencia, por el contrario, son usualmente horizontales, y el campo eléctrico de extremo a extremo de la antena produce una onda horizontalmente polarizada en el receptor. La luz ordinaria no está polarizada; pero si pasa a través de un material que refleje, refracte o absorba una componente de la vibración mientras permite pasar a la otra, la luz que pasa está polarizada *.

Notación exponencial. — En los párrafos precedentes hemos descrito el campo eléctrico de una onda por medio de la ecuación 261, usando una función coseno para representar la variación sinusoidal del campo como una función de x y también como una función del tiempo:

$$E_y = E_m \cos(\omega t - \beta x) \quad (261)$$

Otra formulación matemática posible se obtiene mediante la función exponencial y escribiendo:

$$E_y = \text{Parte real de } E_m e^{j(\omega t - \beta x)} \quad (273)$$

La equivalencia de estas dos expresiones aparece cuando la exponencial se desarrolla de acuerdo con la fórmula general: **

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

obteniéndose:

$$\begin{aligned} E_y &= \text{Parte real de } \{ E_m [\cos(\omega t - \beta x) + j \sin(\omega t - \beta x)] \} \\ &= E_m \cos(\omega t - \beta x) \end{aligned} \quad (274)$$

* En óptica, el plano de polarización es el plano (paralelo a la dirección de propagación) que contiene al vector magnético. Esta definición es arbitraria y fué adoptada antes de que se sospechara la naturaleza electromagnética de la luz. En los libros de radio es común considerar la onda polarizada en la dirección del vector eléctrico.

** La j escrita en bastardilla es, por definición, $\sqrt{-1}$ y no debe confundirse con la letra negra j , que es un vector unitario del sistema cartesiano de coordenadas. La notación vectorial no debe confundirse con la notación de una cantidad compleja. Véase también la nota al pie de la pág. 25.

Se debe señalar que una magnitud física (E_y en estas ecuaciones) se representa sólo por la parte real de la función exponencial y que las ecuaciones deben contener las palabras "parte real de" o algún símbolo con el mismo significado. Sin embargo, es costumbre omitir tal símbolo y escribir:

$$E_y = E_m e^{j(\omega t - \beta x)} \quad (275)$$

dejando al lector el recordar que sólo se debe usar la parte real de la función exponencial. Esta práctica puede ocasionalmente llevar a confusiones, como se verá más tarde; pero las dificultades pueden ser allanadas escribiendo "parte real de" donde corresponda.

El uso de la función exponencial es muy útil en la manipulación de las ecuaciones, y es común en los libros sobre circuitos de corriente alterna, así como en la teoría del campo. En realidad, el uso de la función exponencial está tácitamente supuesto cuando se menciona la "impedancia", pues la impedancia es la relación del voltaje exponencial a la intensidad exponencial, y no la relación del voltaje a la corriente expresadas por medio de un seno o un coseno.

Propagación en un material conductor. — Hasta ahora hemos considerado ondas que se propagan en medios dieléctricos perfectos. La restricción a un dieléctrico perfecto fué introducida poniendo $\gamma = 0$ en las ecuaciones de Maxwell. La solución en forma de ondas puede también extenderse a ondas en materiales con conductividad finita, pero las dificultades matemáticas son muy grandes, a menos que la solución se restrinja a ondas sinusoidales. Pero justamente lo que se desea son soluciones sinusoidales, ya que cualquier onda periódica puede ser analizada en sus componentes de Fourier. Por lo tanto, en lo que sigue supondremos que los campos eléctrico y magnético varían sinusoidalmente con el tiempo. Habiendo supuesto esto, sabemos que \mathbf{E} y \mathbf{H} contendrán un factor, función del tiempo, que se puede expresar $e^{j\omega t}$, y escribimos:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{j\omega t} \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{j\omega t} \quad (276)$$

\mathbf{E}_0 y \mathbf{H}_0 son campos vectoriales, funciones de las coordenadas espaciales, pero no del tiempo. Pueden considerarse como una fotografía de la onda en el instante $t = 0$. Resolvemos ahora las ecuaciones de Maxwell respecto de \mathbf{E} , y el primer paso es escribir la

ecuación de onda en forma que incluya la conductividad, pero simplificada por estar restringida a ondas sinusoidales. Partimos de las ecuaciones generales (193) y (240):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (277)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (278)$$

Sustituyendo las ecuaciones 276 y diferenciando con respecto al tiempo,

$$\nabla \times \mathbf{E}_0 e^{j\omega t} = -j\omega\mu \mathbf{H}_0 e^{j\omega t} \quad (279)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_0 e^{j\omega t} = \gamma \mathbf{E}_0 e^{j\omega t} + j\omega\epsilon \mathbf{E}_0 e^{j\omega t} \quad (280)$$

Como el rotor implica derivadas espaciales, podemos simplificar el factor exponencial, quedando:

$$\nabla \times \mathbf{E}_0 = -j\omega\mu \mathbf{H}_0 \quad (281)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_0 = (\gamma + j\omega\epsilon) \mathbf{E}_0 \quad (282)$$

Estas ecuaciones contienen sólo las coordenadas espaciales; el tiempo ha sido eliminado.

Tomando el rotor de cada lado de la ecuación (281), sustituyendo en el resultado la ecuación (282) de modo a eliminar \mathbf{H}_0 , y usando la identidad (248) (con la hipótesis de que no hay cargas libres en el espacio), obtenemos:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_0 &= -j\omega\mu (\nabla \times \mathbf{H}_0) \\ &= -\nabla^2 \mathbf{E}_0 = -j\omega\mu(\gamma + j\omega\epsilon) \mathbf{E}_0 \end{aligned} \quad (283)$$

Para abreviar, vamos a usar Γ^2 para representar el coeficiente:

$$\Gamma^2 = j\omega\mu(\gamma + j\omega\epsilon) \quad (284)$$

de modo que:

$$\nabla^2 \mathbf{E}_0 = \Gamma^2 \mathbf{E}_0 \quad (285)$$

Esta es la ecuación de onda, para una onda sinusoidal, que incluye la conductividad.

Supongamos ahora, como hicimos en las páginas 143 y 149, que estamos interesados en una onda plana polarizada en la dirección Y, es decir:

$$E_x = E_z = 0 \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \quad (286)$$

La ecuación (285) se transforma en:

$$\frac{\partial^2 E_{0y}}{\partial x^2} = \Gamma^2 E_{0y} \quad (287)$$

y la solución de la ecuación de onda para una onda plana polarizada es:

$$E_{0y} = E_m e^{\pm \Gamma x} \quad (288)$$

Que esta solución es correcta resulta evidente cuando se la sustituye en la ecuación (287), siendo E_m cualquier constante. E_{0y} , la única componente del campo eléctrico es, por lo tanto:

$$\begin{aligned} E_y &= E_{0y} e^{j\omega t} = E_m e^{j\omega t} e^{\pm \Gamma x} \\ &= E_m e^{j\omega t \pm \Gamma x} \end{aligned} \quad (289)$$

Vamos ahora a revisar el significado de los símbolos. \mathbf{E} es el campo eléctrico; \mathbf{E}_0 es su valor inicial y no es una función de t ; E_{0y} es la componente según Y de \mathbf{E}_0 ; E_m es una constante (es el valor de E_{0y} en el origen) y no es una función de x , y , z o t .

Si aplicamos la ecuación (289) a la propagación en un dieléctrico perfecto, en el cual la conductividad es cero, la ecuación se reduce a una forma familiar. Con $\gamma = 0$ en la ecuación (284),

$$\Gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} = \frac{j\omega}{v} = j\beta$$

Poniendo $j\beta$ en vez de Γ en la ecuación (289) (reteniendo sólo el signo menos) se obtiene:

$$E_y = E_m e^{j(\omega t - \beta x)} \quad (290)$$

Considerando el significado de la notación exponencial, ésta es idéntica * a la ecuación (262). [El signo \pm en la ecuación (289) significa que la onda que estamos discutiendo puede, dentro de las restricciones establecidas, propagarse en ambas direcciones, como se discutió en la página 150.]

En general, de la ecuación (284)

$$\Gamma = j\omega \sqrt{\mu\epsilon \left(1 + \frac{\gamma}{j\omega\epsilon}\right)} \quad (294)$$

Si la conductividad es cero, Γ se reduce simplemente a $j\omega\sqrt{\mu\epsilon} = j\beta$, como se observó más arriba; pero si la conductividad no es cero, Γ es complejo. Tendrá una parte real y una imaginaria, que se llamarán α y $j\beta$, respectivamente. Podemos escribir:

$$\Gamma = \alpha + j\beta \quad (295)$$

Los valores de α y β se calculan de la ecuación 294. Usando estos valores en la ecuación 289, la onda progresiva en un medio conductor está descripta por

$$E_y = E_m e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)} \quad (296)$$

(Esta expresión describe una onda que se propaga en la dirección positiva del eje de las x , pues sólo hemos usado el signo negativo precediendo a Γ en la ecuación 289.)

La onda en un medio conductor es análoga a la onda en un dieléctrico perfecto o en el vacío, excepto que se hace más pequeña como resultado de la pérdida de energía a medida que se propaga.

* En la ecuación (262), donde no hacemos uso de la notación exponencial, E_m es necesariamente real, y la fase se indica por un término adicional en el argumento del coseno. Así, si tenemos que incluir una diferencia de fase de ϕ , la ecuación (262) se transforma en la siguiente:

$$E_y = E_m \cos(\omega t - \beta x + \phi) \quad (291)$$

La forma correspondiente de (289) es

$$E_y = |E_m| e^{j(\omega t - \beta x - \phi)} \quad (292)$$

que puede ser escrita igualmente

$$E_y = |E_m| e^{j\phi} e^{j(\omega t - \beta x)} = E_m e^{j(\omega t - \beta x)} \quad (293)$$

donde $E_m = |E_m| e^{j\phi}$. Se acostumbra usar esta inclusión de la fase en E_m .

El factor $e^{-\alpha x}$ representa el amortiguamiento. Si la conductividad del dieléctrico es pequeña, la onda se propaga con amortiguamiento pequeño, pues entonces α es pequeño. En un buen conductor, tal como un metal, el amortiguamiento es tan grande que prácticamente toda la energía llevada por la onda se pierde en el metal en una pequeña fracción de milímetro (véase el problema 9 de la página 136). En un conductor moderado, tal como la tierra húmeda, las ondas de radio de frecuencia de las estaciones transmisoras pueden penetrar varios metros antes de ser extinguidas. Evidentemente, sólo la energía que entra en el conductor se disipa de esta manera; la reflexión de energía por una superficie conductora es un problema diferente que será considerado en el Capítulo X.

La constante de fase β en un medio conductor es diferente de la constante de fase en un material no conductor de la misma constante dieléctrica y permeabilidad; β aumenta con la conductividad (véase el problema 11, página 169). Por lo tanto, la longitud de onda que corresponde a una frecuencia dada es menor y la velocidad de propagación * disminuye. En una sustancia que tenga la conductividad de un aislador pobre (un cuasi-dieléctrico), el cambio en longitud de onda que resulta de la conductividad puede ser inapreciable, pero en conductores bastante buenos la longitud de onda es una fracción pequeña de la longitud de onda en el vacío.

El campo magnético de una onda que se propaga en un material conductor no está en fase con el campo eléctrico, como vimos que sucedía en un dieléctrico perfecto. Esto resulta de calcular \mathbf{H} a partir de \mathbf{E} por medio de la ecuación 281:

$$\nabla \times \mathbf{E}_0 = -j\omega\mu\mathbf{H}_0 \quad (281)$$

* La velocidad de propagación es $v = j\omega/j\beta$. Algunos autores llaman a $j\omega/\Gamma$ la "velocidad compleja" y la usan para representar el amortiguamiento y la velocidad. En una forma similar, $\epsilon \left(1 + \frac{\gamma}{j\omega\epsilon}\right)$ se puede llamar la "constante dieléctrica compleja" del medio. $Q = \omega\epsilon/\gamma$ es un factor conveniente en algunos casos, análogamente al Q en un circuito resonante. Estos conceptos, confusos al principio, resultan útiles cuando uno se habita su uso.

En la onda plana que estamos discutiendo:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}_0 &= k \frac{\partial E_{0y}}{\partial x} \\ &= k \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{E}_m e^{-rx} \\ &= -k\Gamma E_m e^{-rx}\end{aligned}\quad (297)$$

Introduciendo este valor del rotor en la ecuación 281, obtenemos:

$$j\omega\mu\mathbf{H}_0 = k\Gamma E_m e^{-rx} \quad (298)$$

o

$$H_z = \frac{\Gamma}{j\omega\mu} E_y \quad (299)$$

de donde resulta la impedancia intrínseca:

$$\eta = \frac{E_y}{H_z} = \frac{j\omega\mu}{\Gamma} \quad (300)$$

Usando la ecuación (284) para expresar Γ se tiene:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon \left(1 + \frac{\gamma}{j\omega\epsilon}\right)}} \quad (301)$$

Esta expresión para la impedancia intrínseca se reduce claramente a $\sqrt{\mu/\epsilon}$, como en un dieléctrico perfecto (véase la ecuación 272), si la conductividad es cero; pero cuando el medio es conductor, resulta una cantidad compleja y, puesto que $E_y = \eta H_z$, aquella describe la diferencia de fase y de módulo entre los campos eléctrico y magnético de una onda que se propaga en un medio conductor. Como η es una cantidad compleja en el primer cuadrante, el campo eléctrico tiene una fase temporal adelantada con respecto al campo magnético.

Pérdidas en el dieléctrico. — En materiales que son buenos aisladores, de los usados ordinariamente como dieléctricos, es despreciable la pérdida debida a la conductividad. Sin embargo, hay otra pérdida de gran importancia, conocida como **histéresis dieléctrica**,

En un campo eléctrico alterado, la energía pasa al campo y desaparece una vez cada medio ciclo. Si hay alguna sustancia material presente en el campo eléctrico, la recuperación de la energía no es completa. Se pierde una fracción de energía, posiblemente debido a fricciones moleculares. Esta pérdida se repite cada ciclo y, por lo tanto, la pérdida de potencia es proporcional (aproximadamente) a la frecuencia.

Como la pérdida debida a la histéresis dieléctrica es casi proporcional a la frecuencia, es conveniente expresar la pérdida en una sustancia dada en función de un *factor de potencia*. Es el factor de potencia de un condensador — perfecto en cuanto a todas las otras condiciones — en el cual se usa como dieléctrico la sustancia dada.

El factor de potencia es independiente de la forma y dimensiones de la sustancia dieléctrica, pero aumenta con la temperatura y humedad. Es independiente de la frecuencia, pero como cambia apreciablemente si se cambia el orden de magnitud de la frecuencia, es conveniente determinar el factor de potencia para la frecuencia con que se trabaja. Los factores de potencia de los dieléctricos varían desde un orden de 0,0005 para la mica, cuarzo y polistireno, a 0,005 para el vidrio y esteatita, y hasta 0,05 para los productos fenólicos *.

Es costumbre representar la pérdida del dieléctrico determinando la conductividad equivalente que causaría la misma pérdida a la frecuencia dada, y usar este valor en las ecuaciones de la sección precedente.

La conductividad equivalente se encuentra considerando un metro cuadrado de un condensador en el cual el material dieléctrico tiene un metro de espesor: si la pérdida es conductiva, el factor de potencia es $\gamma/\omega\epsilon$ (en esta expresión se desprecia la diferencia entre el seno y la tangente del pequeño ángulo del factor de potencia.) La conductividad equivalente de un dieléctrico que representa las pérdidas de histéresis de un factor de potencia conocido es, por lo tanto, $\omega\epsilon \times (\text{factor de potencia})$.

Conociendo el factor de potencia de un medio, el amortiguamiento de la intensidad del campo de una onda que se propaga puede ser fácilmente expresado en función de él. Usando el primer

* Los valores se dan en los manuales de radio. Véase, por ejemplo, *Radio Engineers Handbook*, F. E. Terman, McGraw-Hill Book Co., 1943, página 111; *Microwave Transmission Design Data*, Sperry Gyroscope Co., 1944.

término de una expansión binomial de Γ , una buena aproximación es la siguiente:

$$a = \frac{1}{2} \omega \sqrt{\mu\epsilon} \times (\text{factor de potencia})$$

Expresando la potencia en decibels (multiplicando a por 8,686) se obtiene que la pérdida es igual a $9,1f\sqrt{\kappa} \times (\text{factor de potencia}) \times 10^{-8}$ decibels por metro, siendo f la frecuencia en ciclos por segundo y κ la constante dieléctrica relativa del medio*, con $\mu = \mu_0$.

Potencia y vector de Poynting. — Un aspecto muy importante de la propagación ondulatoria es el flujo de potencia en el espacio. Es evidente que una onda que se propaga transporta energía; por ejemplo, lleva energía del transmisor al receptor.

Cuando una onda pasa a través de una superficie imaginada en el espacio, su energía atraviesa tal superficie y en cada instante habrá un flujo de potencia a través de cada unidad de área. Esta magnitud, expresada en watts por metro cuadrado, se indicará por el símbolo \mathbf{P} . El producto $\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}$ es la potencia que atraviesa, en un instante dado, un área \mathbf{a} . \mathbf{P} es una magnitud vectorial, llamada el vector de Poynting, matemático del siglo diecinueve. Cuando se dibujan las líneas de flujo del campo vectorial de \mathbf{P} , éstas muestran el flujo de la energía electromagnética. El campo del vector de Poynting es marcadamente útil en electrodinámica, y la formulación matemática del vector de Poynting es mucho más simple de lo que podría esperarse.

Consideremos una región del espacio, encerrada dentro de una superficie ideal. El flujo de energía electromagnética por unidad de tiempo hacia afuera de dicha región se encuentran integrando \mathbf{P} sobre la superficie exterior. Así, tenemos:

$$\text{Flujo saliente de potencia} = \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{a} \quad (302)$$

Pero si la energía sale de esa región, debe haber una correspondiente pérdida de la energía contenida en la misma. La energía

* Aunque esta fórmula fué deducida para una forma específica de la onda, es bastante general. Da el amortiguamiento debido a histéresis dieléctrica en una línea de transmisión coaxial con aislación sólida; o, por supuesto, para cualquier línea con una onda $T E M$. Si se la divide por el factor de guía G de la Tabla VIII, página 256, da el amortiguamiento debido a pérdidas dieléctricas en una guía de ondas llena con dieléctrico.

electromagnética es la suma de las energías eléctrica y magnética dadas por* las integrales de volumen siguientes:

$$\text{Energía eléctrica} = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV \quad (157)$$

$$\text{Energía magnética} = \frac{1}{2} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV \quad (221)$$

$$\text{Energía total} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) dV \quad (303)$$

La variación por unidad de tiempo de la energía se encuentra por diferenciación:

$$\left. \begin{aligned} \text{Derivada de la energía} \\ \text{respecto al tiempo} \end{aligned} \right\} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) dV \quad (304)$$

Suponiendo que la energía eléctrica no se transforma en calor por el flujo de corrientes dentro del volumen, una hipótesis que es correcta si hay conductividad cero dentro de la región (como, por ejemplo, en el vacío o en cualquier aislador perfecto) sólo puede haber una disminución de la energía que reside en el campo si hay un flujo de potencia igual hacia afuera. Igualando 302 y 304:

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{a} &= -\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) dV \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{\partial}{\partial t} (\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} + \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) dV \quad (305) \end{aligned}$$

Cuando se hace la diferenciación indicada, el miembro de la derecha se transforma en:

$$-\int \left(\mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) dV = -\int \left(\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dV \quad (306)$$

* En este capítulo usamos el símbolo “ V ” para significar el volumen, para evitar confusión con el uso de v para la velocidad.

Ahora usamos las ecuaciones de Maxwell para sustituir las derivadas temporales, obteniendo:

$$+ \int [\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})] dV \quad (307)$$

Se puede demostrar, como un teorema puramente matemático que se aplica a cualquier campo vectorial, la siguiente igualdad:

$$\nabla \cdot (\mathbf{M} \times \mathbf{N}) = \mathbf{N} \cdot (\nabla \times \mathbf{M}) - \mathbf{M} \cdot (\nabla \times \mathbf{N}) \quad (308)$$

El miembro de la derecha de ésta ecuación corresponde exactamente a la expresión entre corchetes de la ecuación (307), y la sustitución en la (307) da:

$$\int \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV \quad (309)$$

Aquí la divergencia se integra en un volumen, y por el teorema de Gauss podemos transformar la integral de volumen en una superficial. Haciendo esto y sustituyendo el resultado en el miembro de la derecha de la ecuación (305), se obtiene:

$$\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{a} = \oint (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{a} \quad (310)$$

Ambos miembros de la ecuación (310) son integrales superficiales y ambas se integran sobre la misma superficie que encierra la región considerada del espacio, que es arbitraria. La ecuación (310) se satisface claramente si el vector de Poynting es igual a:

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (311)$$

obteniéndose así el flujo de potencia* en el movimiento de una onda.

* La ecuación (310) se satisface igualmente si se le agrega a la (311) una función cuya integral extendida a la superficie es nula; esto es, una función con divergencia nula. Por lo tanto, aunque la integral de \mathbf{P} extendida a una superficie puede ser interpretada como el flujo de potencia, esta idea puede llevar a interpretaciones absurdas (por ejemplo, si en una región existe un campo electrostático y uno magnetostático). Pero la integral de \mathbf{P} extendida a una superficie cerrada da siempre el flujo de potencia hacia afuera del recinto limitado por la misma.

Esta deducción del vector de Poynting considera una región sin conductividad, eliminando de esta manera las pérdidas de energía debidas a la resistencia. Esto se hace sólo por simplicidad, y si se tiene en cuenta la conductividad, el resultado es exactamente el mismo. La ecuación (311) expresa el flujo de energía electromagnética en una región conductor o no conductora.

Como ejemplo simple de un campo vectorial de Poynting con-

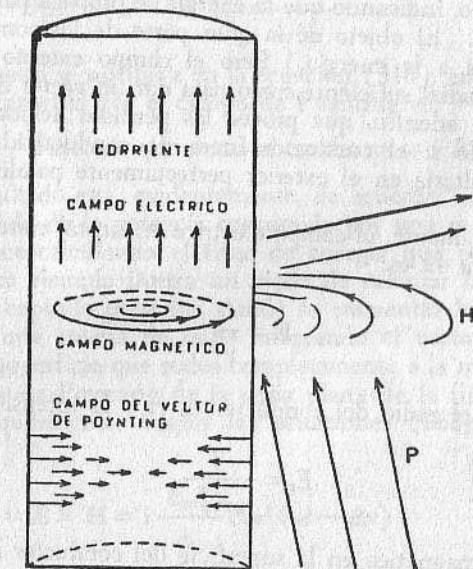


FIG. 49

sideremos un conductor largo cilíndrico recorrido por la corriente. En la figura 49, una corriente estacionaria circula hacia arriba en el conductor cilíndrico, cuya sección se representa. El campo eléctrico dentro del conductor corresponde en uniformidad y hacia arriba. El campo eléctrico fuera del conductor es mucho más intenso, teniendo una componente tangencial igual al campo dentro del conductor y una componente radial que termina en algún otro punto del circuito. El campo magnético dentro del conductor es circular y su intensidad es proporcional al radio. El vector de Poynting dentro del conductor, siendo igual a $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$, está dirigido

radialmente hacia el interior del conductor, disminuyendo su intensidad a medida que nos acercamos al centro del conductor.

La disminución del vector de Poynting indica consumo de energía. Ésta atraviesa la superficie del conductor dirigida hacia el centro, y suple la pérdida debida a la resistencia del conductor, y a medida que nos acercamos al centro el flujo hacia el interior decrece a cero. La energía se obtiene de la energía electromagnética del campo. El vector de Poynting fuera del conductor es paralelo al mismo, indicando que la energía se propaga paralelamente a la corriente. (El objeto de la gran parte de los conductores es servir de guía a la energía.) Pero el campo externo tiene una componente radial suficiente como para dar un vector de Poynting dirigido hacia adentro, que provee las pérdidas debidas a las resistencias. Sólo si el conductor fuera de conductividad perfecta el vector resultaría en el exterior perfectamente paralelo a la corriente.

Cuantitativamente, el campo eléctrico en un tal conductor como el de la figura 49 es:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{l}}{\gamma} \quad (312)$$

de donde, si el radio del conductor es r , y la intensidad total I :

$$E_z = \frac{I}{\pi r^2 \gamma} \quad (313)$$

El campo magnético en la superficie del conductor es, según la ecuación (207), el siguiente:

$$H_\theta = \frac{I}{2\pi r} \quad (314)$$

Por lo tanto, la intensidad del vector de Poynting justo dentro de la superficie del conductor es:

$$P_r = -\frac{I^2}{2\pi^2 \gamma r^3} \quad (315)$$

donde el signo negativo indica que \mathbf{P} está dirigido radialmente hacia adentro. La potencia total que entra en una longitud l del

conductor se encuentra multiplicando P_r por la superficie del cilindro; es decir, $2\pi rl$. Obtenemos:

$$\text{Potencia que entra al conductor} = \frac{I^2 l}{\pi r^2 \gamma} \quad (316)$$

Pero la resistencia R del conductor es (según la ecuación [160]):

$$R = \frac{l}{\pi r^2 \gamma} \quad (317)$$

Cuando esto se sustituye en la ecuación (316), encontramos que la energía provista por el campo de Poynting es:

$$\text{Potencia que entra al conductor} = I^2 R \quad (318)$$

Este resultado está, evidentemente, de acuerdo con la expresión bien conocida de la potencia consumida por una resistencia. Aquí se deduce calculando el flujo de energía que penetra al conductor. Este ejemplo ilustra un modo de calcular la potencia. Se usa en un capítulo posterior, donde se encuentra la potencia irradiada por una antena de radio integrando el vector de Poynting sobre una superficie que rodea completamente a la misma.

El vector de Poynting de la onda plana de la figura 48 se determina rápidamente. Según las ecuaciones (262) y (271), se tiene: *

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{i} \frac{E_m^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta x) \quad (319)$$

* Este es uno de los casos mencionados anteriormente, donde la forma exponencial puede llevar a confusiones, a menos que se tenga cuidado. No se puede obtener, de la ecuación (276), lo siguiente:

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = (\mathbf{E}_0 e^{j\omega t}) \times (\mathbf{H}_0 e^{j\omega t}) = (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0) e^{j\omega t}$$

Sin embargo, es correcto escribir:

$$\mathbf{P} = \text{Parte real de } (\mathbf{E}_0 e^{j\omega t}) \times \text{Parte real de } (\mathbf{H}_0 e^{j\omega t})$$

que no es la misma cosa. Como se ha dicho antes, estas ambigüedades pueden ser siempre eliminadas mediante la frase "parte real de" (o su abreviatura usual "R"). Por lo tanto:

$$(R e^{jx})(R e^{jy}) \neq R (e^{jx} e^{jy})$$

Pero nótese que

$$(R e^{jx}) + (R e^{jy}) = R (e^{jx} + e^{jy})$$

En todos los puntos el vector de Poynting tiene la dirección positiva del eje de las x . Este resultado está de acuerdo, evidentemente, con la dirección del flujo de energía. Es máxima donde lo son E y H , sean positivos o negativos, y es cero donde E y H son cero.

Nótese especialmente que el sentido del vector de Poynting y, por lo tanto, la dirección de propagación de la onda, es boreal al ángulo de E a H . Si los dedos índice y mayor se dirigen en la dirección de E y H , el pulgar señala la dirección en que se propaga la onda plana.

Esta relación muy importante se recuerda fácilmente si " $E \times H$ " se tiene presente en la memoria. Evidentemente, una inversión del orden de estos vectores sería incorrecta, pero se puede ayudar a la memoria recordando que E precede a H , como en el alfabeto.

PROBLEMAS

1. Si en la ecuación (261), $\beta = 1$, ¿cuáles son la longitud de onda y la frecuencia?

2. La dirección de propagación de una onda plana es normal al eje Z e intermedia entre el eje de las X y el de las Y (a 45° de cada uno de ellos). La onda está polarizada con el vector eléctrico paralelo al plano $X-Y$. Escríbanse las ecuaciones necesarias para definirla (análoga a las ecuaciones [256] y [257]) e introduzcanse en la ecuación de onda. Encuéntrense las soluciones correspondientes a las componentes de E y H , como en la ecuación (259).

3. Pruébese que E y H tienen direcciones perpendiculares, de forma idéntica y de módulos proporcionales cuando la onda es una función cualquiera $E_y = f(x - vt)$ y no solamente para la onda sinusoidal de la ecuación (261).

4. Pruébese que la ecuación (308) es correcta. Explíquese por qué la relación $\nabla \cdot (B \times C) = C \cdot (\nabla \times B) - B \cdot (\nabla \times C)$ no es análoga a $A \cdot (B \times C) = C \cdot (A \times B) = -B \cdot (A \times C)$.

5. ¿Cuál es la impedancia intrínseca de a) vidrio blando, b) polistireno, c) esteatita? (Calcúlese usando los datos de un libro de consulta, citando la fuente. Úsense valores aplicables a frecuencias del orden de 10^9 a temperatura normal.)

6. Considérese la ecuación de la teoría de los circuitos comunes de corriente alterna $V = ZI$, siendo Z complejo. Muéstrese que es consistente con $v = V_m e^{j\omega t}$ e $i = (I_m e^{-j\phi}) e^{j\omega t}$. ¿Cuál es la impedancia si $v = V_m \cos \omega t$ e $i = I_m \cos(\omega t - \phi)$?

7. Una onda está definida por $E_x = E_z = 0$, $E_y = 55 e^{j(6283t - \beta x)}$. Escribanse las expresiones para E , E_0 , E_{0y} y E_m .

8. Calcúlese Γ , α y β a una frecuencia de un megaciclo para tierra húmeda (ver valores en la Tabla V, página 224).

PROBLEMAS

9. Calcúlese Γ , α y β a una frecuencia de un megaciclo para el cobre, tomando la conductividad de un libro de consulta (cítese la fuente de información), despreciando la constante dieléctrica.

10. Calcúlese Γ , α y β a una frecuencia de un megaciclo para goma endurecida. La constante dieléctrica relativa es 2,8. El factor de potencia es 0,007 a 1 megaciclo.

11. Compárese las longitudes de onda de una onda de un megaciclo en aire, tierra húmeda (problema 8), cobre (problema 9) y en goma endurecida (problema 10). ¿Cuál es la longitud de onda en goma endurecida si se desprecian las pérdidas?

12. Muéstrese que, como se enunció, una buena aproximación para el amortiguamiento de una onda plana en un material dieléctrico es $9,1fV\kappa \times (\text{factor de potencia}) \times 10^{-8}$ decibeles por metro.

13. Muéstrese que una buena aproximación para el amortiguamiento en un medio semiconductor es $\alpha = \frac{1}{2} \gamma \eta$. ¿Cómo se restringirá el uso de esta aproximación para evitar errores de α en más de 5 por ciento?

14. Si P es la potencia en vatios por metro cuadrado de superficie paralela al plano de la onda en el aire, y si E se mide en voltios por metro, encuéntrese n en $P = nE^2$. Compárese los resultados obtenidos con los de cualquier libro de consulta de radio.

15. Muéstrese que en las ondas de las ecuaciones (261) y (269), la mitad de la energía es eléctrica y la mitad magnética. En un medio en el cual $\kappa = 4$ y $\mu = \mu_0$, ¿qué fracción de la energía total está en el campo eléctrico?

16. Un alambre se dobla en forma de espiral y se aplica a sus extremos una diferencia de potencial constante. Hágase un esquema del campo del vector de Poynting en el espacio que rodea a la espiral.

17. Considérese la posible recepción de señales de radio por un submarino sumergido. Calcúlese a qué distancia deberá propagarse la onda en el agua para que la intensidad del campo de la onda de radio se reduzca a $1/10$ de su valor inicial. Úsese $\kappa = 81$ y la resistividad $1/\gamma = 0,20$ ohmios metros. (Véase Tabla V, pág. 224.) Calcúlese para frecuencias de señales de 30 kilociclos por segundo y 30 megaciclos por segundo.

CAPÍTULO X
REFLEXIÓN

Superficies de contorno. — Las ondas se propagan en el vacío o en materiales homogéneos en forma simple, pero en los problemas prácticos siempre se debe tener en cuenta las complicaciones debidas a las superficies de contorno. Las superficies de contorno están entre regiones de distinta constante dieléctrica (como entre el vidrio y el aire) o entre regiones de distinta conductividad (como entre aire y cobre). Hay también superficies de contorno entre regiones de distinta permeabilidad que son interesantes en general pero que tienen poca importancia con respecto a las ondas.

Un campo eléctrico se refleja, por ejemplo, en una superficie de cobre, y la reflexión es un problema de contorno. Una onda

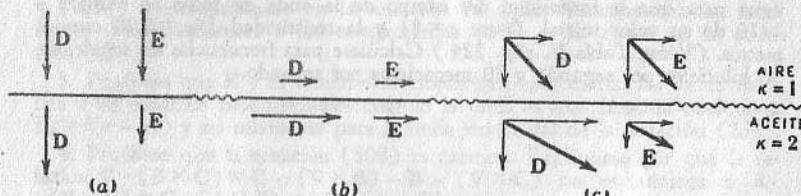


FIG. 50

que incide sobre un cuerpo de sustancia dieléctrica es, en parte, reflejada y en parte transmitida. La porción transmitida se refracta. La refracción es también un problema de contorno. La recepción de la energía por una antena receptora está determinada por condiciones de contorno en la superficie de la antena. Una guía de ondas hace uso obvio de las superficies de contorno, y la determinación de los campos debidos a una línea de transmisión es igualmente, aunque menos evidente, un problema de contorno.

Cualquier conductor, por ejemplo, es eléctricamente importante porque ofrece una superficie límite para un campo electromagnético, pero esta es una interpretación extrema cuando se aplica, por ejemplo, a un cordón para lámparas.

Cuando un campo eléctrico pasa de una sustancia a otra de distinta constante eléctrica, como de aire a aceite, se deben satisfacer ciertas condiciones en el contorno. Si el campo es normal a la superficie, como en la figura 50a, no puede haber cambio en la intensidad de D en la superficie, pues el Experimento IV mostró que la divergencia de D es nula, excepto donde hay cargas y se supone que no hay cargas en la superficie en discusión. D debe ser el mismo dentro del aceite que encima de la superficie. Correspondientemente, E es menor en el aceite; si la constante dieléctrica relativa del aceite es $2(k=2)$, E es la mitad en el aceite que en el aire.

Si un campo eléctrico es tangencial a la superficie de separación de dos dieléctricos, como en la figura 50b, es E quien debe ser continuo en la superficie, pues una discontinuidad del campo tangencial correspondería a un rotor de E en ese punto, y el Experimento II mostró que el rotor de E es nulo en todos los puntos. Como la componente tangencial de E debe ser continua, D no puede serlo. La relación de los D a ambos lados de la superficie es la de las constantes dieléctricas. En este caso en el aceite es el doble que en el aire.

El Experimento II, del cual se saca esta conclusión, se limita al caso electrostático, pues en general el rotor de E no es cero sino igual a $-\partial B / \partial t$. Debemos considerar si es que esto cambia la condición de continuidad de E en la superficie de discontinuidad de los dieléctricos. Debemos observar primero que una discontinuidad de E en el contorno no sólo produciría un rotor en ese punto sino que el rotor sería infinito. Una discontinuidad corresponde a una derivada infinita de la función. Puesto que no puede haber un valor infinito de $\partial B / \partial t$, se deduce que, en estado dinámico como en estado estático, no puede haber discontinuidad en la componente tangencial de E .

Finalmente, si el campo eléctrico incide con un ángulo distinto de cero y de 90° en la superficie de separación, se considera cada componente, la normal y la tangencial. La figura 50c muestra un campo que incide oblicuamente a la superficie, con cada componente comportándose de acuerdo con las reglas discutidas arriba. El resultado es que D y E son paralelos en el aire y en el aceite,

pero el ángulo de ambos cambia cuando atraviesan la superficie. La relación de D a E en el aceite es doble que en el aire, correspondiendo al hecho que $\kappa = 2$.

En una superficie de separación entre sustancias de distinta permeabilidad, el campo magnético se comporta en una forma similar: la componente normal de B es continua al atravesar una superficie de discontinuidad de μ para evitar la divergencia y la componente transversal H es continua para que no haya rotor infinito.

Conductores como contorno. — En la superficie de un conductor hay dos efectos importantes. Se supone que un conductor tiene carga eléctrica en su superficie, pues la carga puede circular libremente hacia la superficie desde cualquier punto interior del conductor. Las cargas superficiales dan una condición de contorno para el campo eléctrico, y la corriente da una condición de contorno para el campo magnético.

Consideremos primero la carga superficial. Supongamos que existe una componente normal del campo en la superficie del conductor. O bien el campo termina en la superficie del mismo, cumpliendo la ecuación (122), $\sigma = D_n$, o bien penetra en el conductor. Sin embargo, si existe campo dentro del conductor, debe haber la correspondiente corriente, de modo que se cumpla la ecuación (165), $i = \gamma E$, y esta intensidad lleva rápidamente cargas a la superficie. Tales cargas, situadas en la superficie, son límites del campo eléctrico, eliminan la penetración del campo en el conductor, y, por lo tanto, detienen el flujo de corriente. Se deduce, como se mencionó en el Capítulo IV, que no puede haber campo estático dentro del conductor. Cuanto mayor es la conductividad, tanto más rápidamente será eliminado el campo interior. En un campo dinámico rápidamente variable puede haber algún campo eléctrico en el interior de un conductor pobre, pero muy pequeño en un buen conductor. En el caso límite de un conductor perfecto (conductividad infinita) no puede haber campo eléctrico.

El principio básico de proteger un circuito o parte del mismo de la influencia de un campo eléctrico encerrándolo dentro de una envoltura metálica, resulta evidente de lo dicho arriba. La posibilidad de protegerlo de la influencia de un campo magnético será discutida en lo que sigue.

Un campo magnético variable induce corriente en un conductor. Consideremos primero un campo magnético fuera de un conductor y tangencial a la superficie, como se indica en la figura 51. Se

supone que el campo magnético aumenta con el tiempo, de modo que $\partial B / \partial t$ es positiva. La sustancia del conductor que se muestra en la figura tiene una conductividad γ , por tanto es buena conductora. Como no se trata de un conductor perfecto, debe existir un campo magnético en el interior del mismo que no es nulo. Este campo magnético dentro del material crece con el tiempo y, por lo tanto, habrá un campo eléctrico inducido (ecuación 193) que, según la ecuación (165), hará circular una corriente en el sentido indicado por las líneas punteadas. Sin embargo, a causa del flujo de la corriente, el campo magnético tendrá un rotor diferente de cero (ecuación 240) en la dirección de la corriente*, y esto significa que B disminuye a profundidades crecientes dentro del conductor. Así, en un conductor que es buen conductor, pero no perfecto, un campo magnético creciente puede penetrar en alguna profundidad e inducirá un voltaje, que hará circular corriente. La corriente se distribuirá de tal manera a debilitar el campo magnético e impedir que el mismo penetre profundamente en el conductor.

Si se anula la derivada del campo magnético tangencial, haciéndose éste estático, no inducirá más campo eléctrico en el conductor. La corriente cesará rápidamente y sin densidad de corriente el campo magnético será irrotacional. El campo magnetostático será entonces igual en el conductor que en una sustancia no conductora de la misma permeabilidad. Pero se necesita tiempo para que se establezca el campo magnético en un medio conductor. Si el campo magnético externo es alternado, no hay nunca tiempo para que el campo esté completamente establecido, y cuanto mayor sea la frecuencia, el campo magnético en el interior del conductor será menor. También, cuanto mayor sea la frecuencia, la mayor parte de la corriente se concentrará en la superficie. Este es el efecto pelicular ("skin effect").

Cuanto mayor es la conductividad del material de la figura 51, mayor es la densidad de corriente que resulta de un campo eléctrico inducido dado. Una sustancia de gran conductividad tendrá gran densidad de corriente cerca de la superficie, pero habrá menos penetración del campo magnético y de la corriente dentro del material. El efecto pelicular será más señalado. Si se considera el

* Por la ecuación 240 $\nabla \times H = i + \partial D / \partial t = \gamma E + \epsilon \partial E / \partial t$. Como γ es grande para la mayoría de los metales (del orden de magnitud de 10^7 mhos por metro) y ϵ bajo (del orden de 10^{-11}), el término $\partial D / \partial t$ en la ecuación 240 es despreciable en los conductores, aun a frecuencias muy altas, y aproximadamente resulta: $\nabla \times H = i$.

caso extremo de una sustancia perfectamente conductora ($\gamma = \infty$), habrá una densidad de corriente infinita justo en la superficie y no habrá ninguna penetración.

Se puede imaginar la corriente como la superficie de contorno del campo magnético. La corriente hace que el campo magnético tenga rotor no nulo y, por lo tanto, que sea cero o casi cero en la superficie del conductor y cerca de él.

Cuando la corriente constituye una condición de contorno para el campo magnético, la cantidad total de corriente en el conductor

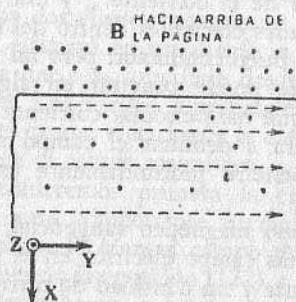


FIG. 51

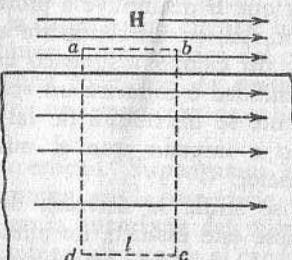


FIG. 52

no depende de la conductividad del material sino que está determinada por la intensidad del campo magnético externo. La distribución de la densidad de corriente depende de la conductividad y de la frecuencia, pero la intensidad total de corriente es sólo proporcional a la intensidad del campo externo. Para ver esto, consideremos la figura 52, que muestra la sección transversal del mismo trozo de material presentado en la figura 51, en un plano paralelo al campo.

El rectángulo $abcd$ es un camino de integración para calcular el miembro de la izquierda de la ecuación 199:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I \quad (199)$$

(Esta era originariamente una ecuación magnetostática, pero como hemos considerado que la corriente de desplazamiento $\partial D / \partial t$ es despreciable dentro de un buen conductor, esta ecuación puede

considerarse deducida de la (240). Si la longitud del lado ab es l , la integración a lo largo de ab da Hl , como contribución a la integral curvilinea. La integración a lo largo de bc y da no agrega nada, pues esos lados son normales al campo. El lado cd se elige lo suficientemente profundo dentro del material, de modo que \mathbf{H} sea despreciable, y, por lo tanto, este lado tampoco contribuye a la integral. De aquí I , que es la corriente total en el rectángulo $abeda$ que en la figura 52 entra a la página, es igual a Hl , es decir:

$$\frac{I}{l} = H \quad (320)$$

La idea de corrientes superficiales es útil en problemas que se refieren a buenos conductores, tales como metales, en un campo de alta frecuencia. La intensidad total en el metal estará concentrada casi completamente en la región inmediata a la superficie, y su valor se calcula fácilmente con la ecuación (320)*. En ciertos problemas es suficiente suponer que el metal es un conductor perfecto y que la intensidad total circula en una capa infinitamente delgada justo en la superficie límite. Se sabe que esto no es cierto y que de ahí resulta una densidad infinita en la superficie, pero la hipótesis representa una conveniencia muy grande y una aproximación aceptable en algunos problemas, tal como la reflexión de ondas en una superficie metálica.

En la explicación que hemos dado hemos hablado de un campo magnético externo *tangencial* y de su relación con lo que pasa dentro del metal. La razón de este énfasis en relación con el campo tangencial es que en un conductor perfecto (de alta frecuencia) el campo tangencial es el único que puede existir con cierta importancia. A primera vista parecería que tendría que haber también una componente *normal* del campo magnético, pero se debe recordar que si hubiera una componente normal de \mathbf{B} justo fuera de la superficie, la misma componente normal tendría que aparecer en el metal dentro de la superficie, porque no puede haber divergencia de \mathbf{B} . Sin embargo, no puede haber un campo varia-

* Si la superficie del conductor no fuera una superficie plana, como la que ilustra la figura 52, la ecuación (320) sigue lo mismo siendo válida. El camino de integración de la ecuación (199) se elige de tal manera que ab es paralelo y pegado a la superficie, bc y da son siempre normales a \mathbf{H} , y cd se elige lo suficientemente alejado de la superficie, de modo que el campo magnético sea despreciable en él.

ble dentro de un conductor perfecto a causa del proceso que se describió más arriba. El campo magnético variable produciría un campo eléctrico que daría lugar a una corriente que, a su vez, crearía un campo magnético opuesto al anterior, y en un material de conductividad perfecta la corriente circularía en la forma necesaria para impedir la penetración del campo magnético. Por lo tanto, el campo magnético dentro del conductor es cero, y el campo magnético normal a la superficie debe también ser cero. Desde el punto de vista del campo magnético externo, las líneas de flujo que se aproximan a un conductor perfecto no penetran al mismo, sino que se curvan de tal manera que pasan tangencialmente a la superficie. Con campos de alta frecuencia y conductores metálicos comunes, aunque la conductividad de los mismos no es la perfecta, lo dicho constituye una buena aproximación.

Efecto pelicular ("Skin effect"). — La limitación de la corriente y del campo magnético a una capa superficial se llama usualmente efecto pelicular. Aparece de distintas maneras en problemas como la resistencia efectiva de los conductores de una línea de transmisión, amortiguamiento en guías de ondas, blindaje de una parte de un circuito de radio contra los campos producidos en otra, y la penetración del flujo en el rotor de un motor de inducción. Estos problemas son esencialmente similares y sus soluciones requieren un uso apropiado de la ecuación de las ondas aplicada a la propagación dentro del material conductor.

La expresión (288) es una solución de la ecuación de las ondas para un campo eléctrico en un medio conductor:

$$E_{0y} = E_m e^{\pm \Gamma x} \quad (288)$$

Puesto que la densidad de corriente en un conductor es proporcional al campo eléctrico, se puede escribir una ecuación similar para la distribución de corriente:

$$i_{0y} = i_m e^{\pm \Gamma x} \quad (288a)$$

En esta ecuación $\Gamma^2 = j\omega\mu(\gamma + j\omega\epsilon)$. Sin embargo, como se mencionó en la nota al pie de la página 173, cuando consideramos campos en metales comunes, en los cuales la conductividad es mucho mayor que la constante dieléctrica, el término $j\omega\epsilon$ dentro del paréntesis es despreciable comparado con γ , a menos que la frecuencia sea del orden de magnitud de la de la luz visible. Por

lo tanto, para campos de aun las más altas frecuencias de radio en conductores metálicos,

$$\Gamma = \sqrt{j\omega\mu\gamma} = \sqrt{\pi f\mu\gamma}(1+j) = \frac{1+j}{\delta}$$

si δ se define como $1/\sqrt{\pi f\mu\gamma}$.

La ecuación (288a) describe la distribución de corriente que se muestra en la figura 51 si los ejes de coordenadas se orientan de tal manera que la corriente i está en la dirección y , B en la dirección z , y el eje X apuntando hacia abajo. Supongamos que la superficie de separación corresponda a $x=0$.

Se verá que la ecuación permite una elección de signo en el exponente. Sin embargo, en este trozo de material, lo suficientemente grueso como para ser considerado semiinfinito, el signo positivo se descarta, pues representaría una densidad de corriente que crece sin límite a medida que avanza en el metal. (Este término es necesario si el metal es de espesor finito y la corriente penetra por ambos lados del mismo.) Es suficiente, por lo tanto, escribir:

$$i_{0y} = i_m e^{-\Gamma x} = i_m e^{-x/\delta} e^{-j(x/\delta)}$$

Esta ecuación, que da la densidad de corriente a cualquier profundidad x dentro del material, vincula la densidad de corriente a cualquier profundidad con la densidad de corriente en la superficie, donde $x=0$, pero no calcula i_m . Para hacer esto debemos usar la información que da la ecuación (320) de que la intensidad total, obtenida integrando la densidad de corriente desde la superficie hasta una profundidad infinita, es igual al campo magnético tangencial a la superficie. La intensidad que atraviesa una sección del trozo de metal que tiene una unidad de longitud de espesor y que se extiende hasta una profundidad ilimitada (véase la fig. 52) es:

$$\frac{I}{l} = \int_0^\infty i_{0y} dx = \frac{i_m}{\Gamma} = H$$

Esta ecuación tiene muchas aplicaciones. Lleva, por ejemplo, a una expresión para las pérdidas de potencia cuando hay efecto pelicular. Fundamentalmente, la pérdida de potencia por unidad de volumen es $|i|^2/\gamma$. La integración para encontrar el promedio temporal de la pérdida de potencia en un conductor semi-

infinito (por unidad de área) da $\epsilon_m^2 \delta / 4\gamma$. Esta es una expresión particularmente interesante porque se muestra fácilmente que si toda la corriente del conductor semiinfinito circulara con distribución uniforme en una capa superficial de espesor δ , la perdida sería exactamente igual a la real. Por lo tanto, encontrando la resistencia a la corriente continua de una capa de espesor δ en la superficie del conductor, se obtiene un valor llamado la resistencia efectiva. Éste es el que hace que δ se llame la "profundidad equivalente de penetración" de la corriente o "profundidad pelicular". En la realidad la corriente penetra apreciablemente a una profundidad que es muchas veces mayor que la "profundidad pelicular", decreciendo exponencialmente.

Aunque la deducción de arriba se hace para un trozo de conductor semiinfinito, puede usarse como una buena aproximación con cualquier conductor grande recorrido por una corriente de alta frecuencia. Específicamente, es una buena aproximación si todas las dimensiones del conductor son, en mucho, mayores que la profundidad pelicular. Como ejemplo diremos que la resistencia efectiva de un alambre cilíndrico a una alta radiofrecuencia es aproximadamente la resistencia a la corriente continua de la parte del conductor que está a una distancia δ de la superficie. Como para la resistencia efectiva de un conductor cilíndrico se puede calcular una expresión exacta, encontrando una solución de la ecuación de onda en un cilindro conductor, es interesante comparar los resultados exactos con los aproximados. El resultado aproximado, considerando que la resistencia efectiva sea la resistencia a la corriente continua de una capa superficial, comete un error inferior al diez por ciento si el radio del conductor es unas seis veces δ .

Otro concepto vinculado al efecto pelicular es la "resistividad superficial" de un conductor. El significado es el siguiente: "resistividad superficial" es la resistencia a la corriente continua (medida entre dos cristas opuestas) de un cuadrado de metal de un metro de longitud y uno de ancho, y de espesor igual a δ . Por lo tanto, la "resistividad superficial" es $1/\gamma\delta$, y este valor se usará en las guías de ondas.

Reflexión en un conductor. — Cuando una onda eléctrica se propaga en el vacío hay un equilibrio exacto entre los campos eléctrico y magnético. En efecto, la mitad de la energía de la onda está en el campo eléctrico y la otra mitad en el magnético. Si la onda penetra en un medio diferente, debe haber una nueva

distribución de la energía. Ya sea el nuevo medio un material dieléctrico, un material magnético, un conductor o una región ionizada que contiene cargas, habrá un reajuste de las relaciones de la energía cuando la onda llegue a la superficie de separación. Como no se puede agregar energía a la onda, la única manera de que haya un nuevo equilibrio es que parte de la energía incidente sea reflejada. Esto es lo que sucede realmente, y la energía devuelta es una onda reflejada. Por eso se ve reflexión de luz en una superficie metálica y en una superficie dieléctrica de vidrio.

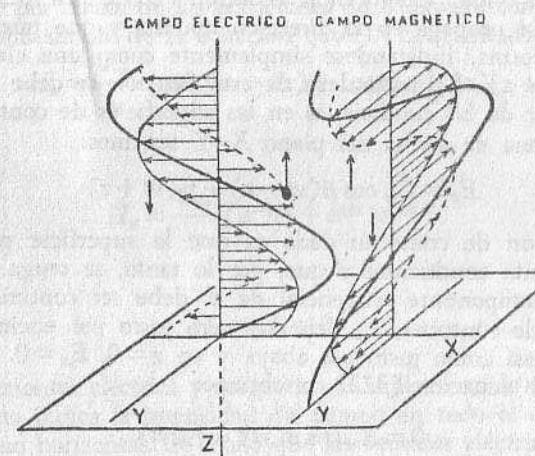


FIG. 53

A menudo, la onda transmitida es rápidamente absorbida y desaparece, como cuando la luz incide en la porcelana, lana u oro. Sin embargo, si la porcelana, lana u oro son lo suficientemente delgados, pasará algo de luz transmitida a través de ellos. La reflexión más fácil de estudiar es la de una onda plana que incide sobre una superficie plana perfectamente conductora. Este es un caso extremo, pues en una sustancia perfectamente conductora, la intensidad del campo eléctrico es siempre cero, y se verá que una onda incidente sobre una de estas superficies es totalmente reflejada.

En la figura 53 el sistema de ejes se orienta con el eje Z hacia abajo. Una superficie perfectamente conductora coincide con

el plano X-Y será horizontal. Una onda electromagnética plana, polarizada, que incide sobre esta superficie, se representará por:

$$E_{x1} = E_m \cos \beta(vt - z) \quad (321)$$

Se ve que esta ecuación, por su similitud con la ecuación (252), describe una onda que se propaga en la dirección de las z positivas, y polarizada, en la dirección x.

La ecuación (321) describe sólo la onda incidente, y cuando hay una onda reflejada se debe usar la solución completa de la ecuación de onda. Como en la ecuación (259), esto incluye una onda que se propaga en la dirección opuesta y que puede tener cualquier forma, indicándose simplemente como una cierta función $f_2(vt + z)$. La naturaleza de esta función se debe determinar a partir de las condiciones en las superficies de contorno.

En la zona de arriba del plano X-Y tenemos:

$$E_x = E_m \cos \beta(vt - z) + f_2(vt + z) \quad (322)$$

La condición de contorno dada es que la superficie plana sea perfectamente conductora y que, por lo tanto, se tenga: $E_x = 0$. Como la componente tangencial de \mathbf{E} debe ser continua en la superficie de contorno, E_x debe ser cero justo por encima de la superficie, así como justo por abajo, y en $z = 0$, $E_x = 0$. Sustituyendo en la ecuación (322), se obtiene:

$$0 = E_m \cos \beta(vt) + f_2(vt) \quad (323)$$

de donde:

$$f_2(vt) = -E_m \cos \beta(vt) \quad (324)$$

Cambiando el argumento de la función f_2 de (vt) a $(vt + z)$:

$$f_2(vt + z) = -E_m \cos \beta(vt + z) \quad (325)$$

Se ve, por lo tanto, que para satisfacer la condición de contorno en un conductor perfecto, el campo eléctrico completo de la ecuación (322) debe ser:

$$E_x = E_m \cos \beta(vt - z) - E_m \cos \beta(vt + z) \quad (326)$$

Introduciendo $\beta v = \omega$ (tabla III):

$$E_x = E_m \cos(\omega t - \beta z) - E_m \cos(\omega t + \beta z)$$

$$E_y = E_z = 0 \quad (327)$$

Este resultado podría haberse obtenido como una función exponencial. Expresada en esta forma, la ecuación (327) es:

$$\begin{aligned} E_x &= E_m e^{j(\omega t - \beta z)} - E_m e^{j(\omega t + \beta z)} = E_m (e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}) e^{j\omega t} \\ E_y &= E_z = 0 \end{aligned} \quad (328)$$

Conocemos ahora la componente eléctrica del campo encima de la superficie reflectora. La componente magnética se encuentra fácilmente por medio de las ecuaciones de Maxwell, como se hizo para la onda simple de la ecuación (269). El resultado es:

$$H_y = \frac{E_m}{\eta} [\cos(\omega t - \beta z) + \cos(\omega t + \beta z)] \quad (329)$$

o también:

$$H_y = \frac{E_m}{\eta} (e^{-j\beta z} + e^{j\beta z}) e^{j\omega t} \quad (330)$$

y

$$H_x = H_z = 0$$

Las componentes eléctrica y magnética se indican en la figura 53. Cada flecha indica la intensidad del campo en todo el correspondiente plano horizontal, de modo que los vectores eléctrico y magnético tienen el mismo valor en planos paralelos. Nótese particularmente que mientras el campo eléctrico se refleja con una inversión de signo de modo que se anula en la superficie reflectora, el campo magnético no sufre la inversión del signo y su valor es duplicado. La correspondencia con ondas que se propagan en una línea de transmisión * es más que una simple analogía, pues, en efecto, una onda que se propaga a lo largo de una línea de transmisión es una onda electromagnética y su reflexión es un ejemplo del tipo de reflexión considerado.

Debemos tener en cuenta las condiciones en la superficie conductora para mostrar que son consistentes con los principios de la electrodinámica. El campo eléctrico debe ser cero en la superficie

* Véase *Transient Electric Currents*, H. H. Skilling, McGraw-Hill Book Co., N. Y., 1937.

conductora. Cuando incide la onda, la corriente circula en el plano, con una intensidad infinita y voltaje cero. La densidad de corriente es infinita, pero la profundidad de penetración en el plano es cero. La intensidad magnética justo arriba de la superficie es finita; justo abajo es nula. Este cambio tiene lugar en una distancia cero, pues ocurre justamente en la superficie y, en consecuencia, el rotor del campo magnético *en la superficie* es infinito. Esto no sólo es posible sino necesario si la densidad de corriente ha de ser infinita. El estudio de la figura 53 muestra que las direcciones de la intensidad, rotor y campo magnético están de acuerdo con las ecuaciones de Maxwell.

La línea gruesa de la figura 53 muestra la suma de las dos ondas que se propagan. La onda resultante se modifica continuamente, pero no es una onda progresiva. Oscila en magnitud, pero es fija en el espacio: es una onda "estacionaria". La intensidad eléctrica total es siempre cero en la superficie reflectora, a una distancia de la superficie igual a la semilongitud de onda y a distancias múltiples de la semilongitud de onda. Estos puntos son nodos. Los nodos del campo magnético están a un cuarto de longitud de onda, tres cuartos, y así sucesivamente.

Por la detección de estos nodos frente a una superficie reflectora de cinc, Hertz probó la existencia de las ondas electromagnéticas cuando exploraba el campo con una espira de alrededor de un metro de diámetro, con los extremos separados por una distancia muy pequeña. La chispa eléctrica que saltaba entre estos terminales indicaba la existencia de una fuerza electromotriz inducida y la ausencia de chispa indicaba que la espira había sido colocada en un nodo. Como sólo puede haber nodos si hay ondas, la teoría de Maxwell fué definitivamente comprobada.

Las ondas estacionarias se ven mejor en forma matemática transformando la ecuación (328) en:

$$E_x = -2E_m \frac{e^{j\beta z} - e^{-j\beta z}}{2j} j e^{j\omega t} \quad (331)$$

$$= 2E_m \operatorname{sen} \beta z (-j e^{j\omega t}) \quad (332)$$

Esta expresión significa realmente lo siguiente:

$$E_x = \text{parte real de } [2E_m \operatorname{sen} \beta z (-j e^{j\omega t})] \quad (333)$$

Para encontrar la parte real, la exponencial se desarrolla como en

la página 154, usando $-j e^{j\omega t} = -j(\cos \omega t + j \operatorname{sen} \omega t) = \operatorname{sen} \omega t - j \cos \omega t$. Reteniendo sólo la parte real *, se obtiene:

$$E_x = 2E_m \operatorname{sen} \beta z \operatorname{sen} \omega t \quad (334)$$

(Se podría haber obtenido este resultado de la ecuación 327 por sustitución trigonométrica, pero de una manera menos sencilla.)

La ecuación 334 da el campo eléctrico en el semiespacio por encima de la superficie reflectora. De la ecuación 330 el campo magnético resulta ser:

$$H_y = \frac{2E_m}{\eta} \cos \beta z \cos \omega t \quad (335)$$

Estas dos últimas ecuaciones no describen ondas progresivas sino estacionarias a lo largo del eje Z. La vibración máxima aparece en los "vientres" y la vibración nula en los "nodos". Se ve que los vientres eléctricos ocurren cuando $\operatorname{sen} \beta z = \pm 1$; los nodos, cuando $\operatorname{sen} \beta z = 0$. Donde hay vientres del campo eléctrico, hay nodos del campo magnético. También con respecto al tiempo los campos eléctrico y magnético vibran fuera de fase, de modo que cuando el campo magnético es cero en todo el espacio, el campo eléctrico alcanza su máximo, y viceversa. Así, la onda estacionaria tiene un aspecto completamente distinto que la onda progresiva, aunque no es más que la superposición de dos ondas progresivas.

En esta discusión hemos considerado la reflexión de un plano de conductividad infinita. En una superficie de conductividad tal como cobre, las condiciones son casi las mismas. Una pequeña cantidad de energía será llevada débilmente por la onda transmitida en el interior del cobre, mientras que la mayor parte de la energía incidente es reflejada como sucede en un conductor perfecto.

Reflexión dieléctrica. — Cuando una onda incide sobre una superficie de un trozo de material dieléctrico, hay una reflexión parcial y una transmisión parcial de la energía incidente. Si la energía que pasa al material dieléctrico es transmitida con un amortiguamiento grande o no depende de las características del material.

* Para pasar las expresiones de la forma trigonométrica a la exponencial se usan dos relaciones muy útiles, que son las siguientes:

$$\begin{aligned} \cos x &= \text{parte real de } e^{jx} \\ \operatorname{sen} x &= \text{parte real de } -j e^{jx} \end{aligned}$$

Estas relaciones se usarán frecuentemente.

El amortiguamiento ocurre si el material no es un dieléctrico perfecto o si hay una pérdida asociada con cada ciclo del campo eléctrico ("histéresis dieléctrica"). En la transmisión de microondas, el último efecto es el más importante, pues las pérdidas dieléctricas aumentan aproximadamente con la frecuencia. En las frecuencias luminosas la absorción de energía dentro del átomo es importante y, por lo tanto, muchos dieléctricos que transmiten ondas de radio son opacos a la luz.

Como ejemplo, consideremos una onda en el vacío, o aire, que incide normalmente sobre un trozo grande de material dieléctrico

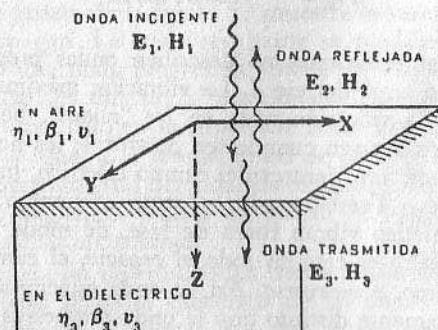


FIG. 54

con constante ϵ . Véase la figura 54. En lo que sigue usaremos un subíndice 1 para indicar la onda incidente, 2 para indicar la reflejada y 3 la transmitida. Usaremos la misma orientación de los ejes que la usada en la figura 53. No es necesario probar nuevamente que la onda reflejada tendrá la misma forma que la incidente. Por lo tanto, aceptaremos este resultado. En el aire tendremos:

$$E_x(\text{aire}) = E_{m1} e^{j(\omega t - \beta_1 z)} + E_{m2} e^{j(\omega t + \beta_1 z)} \quad (336)$$

y en el material dieléctrico

$$E_x(\text{diel}) = E_{m3} e^{j(\omega t - \beta_3 z)} \quad (337)$$

Como la componente tangencial del campo eléctrico es continua en la superficie de contorno, sabemos que, en $z=0$,

$$E_x(\text{aire}) = E_x(\text{diel}) \quad (338)$$

igualando (336) con (337), en $z=0$, se obtiene:

$$E_{m1} + E_{m2} = E_{m3} \quad (339)$$

Como en un ejemplo previo, el campo magnético de cada onda progresiva es normal al campo eléctrico y normal a la dirección de propagación de la onda.

$$H_y(\text{aire}) = H_{m1} e^{j(\omega t - \beta_1 z)} + H_{m2} e^{j(\omega t + \beta_1 z)} \quad (340)$$

$$H_y(\text{diel}) = H_{m3} e^{j(\omega t - \beta_3 z)} \quad (341)$$

Se deduce de las ecuaciones de Maxwell, como en los ejemplos anteriores, que E y H están vinculadas por la impedancia del medio en que se propagan:

$$E_{m1} = \eta_1 H_{m1} \quad E_{m2} = -\eta_1 H_{m2} \quad E_{m3} = \eta_3 H_{m3} \quad (342)$$

El signo negativo para la componente reflejada de la onda indica que (considerando la dirección de propagación y la relación boreal de E , H y la velocidad) cuando la componente eléctrica es positiva (según el eje de las X), la componente magnética (según el eje de las Y) es negativa. En la superficie de contorno la componente tangencial de H es continua, de modo que cuando $z=0$, $H_y(\text{aire}) = H_z(\text{diel})$ y

$$H_{m1} + H_{m2} = H_{m3} \quad (343)$$

o

$$\frac{E_{m1}}{\eta_1} - \frac{E_{m2}}{\eta_1} = \frac{E_{m3}}{\eta_3} \quad (344)$$

De las ecuaciones (339) y (344) se obtienen las magnitudes relativas de las ondas incidente, reflejada y transmitida:

$$E_{m2} = \frac{\eta_3 - \eta_1}{\eta_3 + \eta_1} E_{m1} \quad H_{m3} = \frac{2\eta_1}{\eta_3 + \eta_1} H_{m1} \quad (345)$$

$$H_{m2} = -\frac{\eta_3 - \eta_1}{\eta_3 + \eta_1} H_{m1} \quad E_{m3} = \frac{2\eta_1}{\eta_3 + \eta_1} E_{m1} \quad (346)$$

La fracción $\frac{\eta_3 - \eta_1}{\eta_3 + \eta_1}$ se llama el *coeficiente de reflexión*.

Es más interesante considerar un caso especial que intentar una discusión de estos resultados generales. Supongamos que el material dieléctrico de este ejemplo tenga una constante dieléctrica

relativa igual a 4 (bakelite, tal vez), de modo que $\frac{\epsilon_3}{\epsilon_1} = 4$. Puesto que $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$, y μ es prácticamente el mismo para el aire que para cualquier dieléctrico, encontramos $\eta_1/\eta_3 = 2$. Para este caso especial, las ecuaciones (345) y (346) resultan:

$$E_{m2} = -\frac{1}{3} E_{m1} \quad E_{m3} = \frac{2}{3} E_{m1} \quad (347)$$

$$H_{m2} = \frac{1}{3} H_{m1} \quad H_{m3} = \frac{4}{3} H_{m1} \quad (348)$$

Nótese que la relación de las magnitudes de E y de H para la onda reflejada es igual que para la onda incidente, y que la amplitud de la onda reflejada es un tercio de la incidente. El coeficiente de reflexión es $-\frac{1}{3}$. La onda transmitida, estando en un medio diferente, tiene un valor distinto para la relación de E a H , determinada por el valor de η .

En esta onda sencilla basta considerar la potencia de cada onda individualmente. El vector de Poynting, potencia por unidad de área en $z = 0$, en la onda incidente es:

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1 \quad (349)$$

está completamente en la dirección z y su magnitud escalar es:

$$\begin{aligned} P_1 &= E_{x1} H_{y1} \\ &= E_{m1} \cos \omega t H_{m1} \cos \omega t \\ &= E_{m1} H_{m1} \cos^2 \omega t \end{aligned} \quad (350)$$

Por lo tanto, la energía de la onda incidente llega a la superficie del dieléctrico como una vibración de doble frecuencia que es siempre positiva. El valor máximo, P_{m1} , es:

$$P_{m1} = E_{m1} H_{m1} = \frac{E_{m1}^2}{\eta_1} \quad (351)$$

El valor máximo de la potencia en la onda reflejada es, análogamente:

$$\begin{aligned} P_{m2} &= E_{m2} H_{m2} \\ &= \left(\frac{1}{3} E_{m1} \right) \left(\frac{1}{3} H_{m1} \right) = \frac{1}{9} \frac{E_{m1}^2}{\eta_1} \end{aligned} \quad (352)$$

y en la onda transmitida:

$$P_{m3} = E_{m3} H_{m3}$$

$$= \left(\frac{2}{3} H_{m1} \right) \left(\frac{4}{3} H_{m1} \right) = \frac{8}{9} \frac{E_{m1}^2}{\eta_1} \quad (353)$$

Se ve que $\frac{1}{9}$ de la energía incidente se refleja en la superficie y es propagada por la onda reflejada, mientras que $\frac{8}{9}$ de la energía pasan al material dieléctrico.

Podemos ahora preguntarnos si el campo eléctrico en la zona de arriba de la superficie reflectora del dieléctrico puede expresarse como una onda estacionaria, como lo hicimos en el caso de una superficie reflectora perfectamente conductora. La respuesta es que no, pero puede expresarse como la suma de una onda progresiva y una estacionaria. Si el coeficiente de reflexión es cercano a la unidad (esto corresponde a un cambio extremo en ϵ , μ o γ en la superficie reflectora), la onda reflejada tiene casi la misma amplitud que la incidente, y el campo total tiene la apariencia de una onda estacionaria. Véase la figura 55.

Si el coeficiente de reflexión es cercano a la unidad, el máximo (o raíz del promedio cuadrático efectivo) de la intensidad de campo varía como una función de la distancia a la superficie con marcados nodos y vientos, y la *relación de onda estacionaria*, que se define como la relación de la intensidad de campo en un vientre a la intensidad de campo en un nodo, será grande.

Si el coeficiente de reflexión es cercano a cero (esto corresponde a una pequeña modificación de las constantes en la superficie reflectora), la onda reflejada es muy pequeña, y el campo total por encima de la superficie reflectora es ligeramente diferente del de una onda progresiva. El máximo (raíz del promedio cuadrático efectivo) de la intensidad del campo será casi independiente de la posición por encima de la superficie reflectora. La *relación de onda estacionaria* es en este caso cercana a la unidad.

Reflexión en un semiconductor. — Si la resistividad eléctrica es tan grande que puede haber un campo eléctrico considerable dentro del material o (lo que es realmente la misma cosa) si la conductividad de un dieléctrico es suficiente como para permitir una corriente apreciable, la reflexión en la superficie muestra algunos resultados interesantes. La propagación en un tal medio, que no es ni un dieléctrico perfecto ni un conductor perfecto, fué considerada en el capítulo IX. Se introdujo el factor com-

plejo de propagación Γ y se encontró que, cuando hay conductividad, la impedancia intrínseca η es compleja.

Nuestra discusión sobre la reflexión dielectrónica se aplica sin ninguna modificación a la reflexión en una superficie de un semiconductor si usamos el valor apropiado de Γ , factor de propagación del medio, y el valor complejo de η . Por lo tanto, si una onda en el aire incide en un material semiconductor, como en la

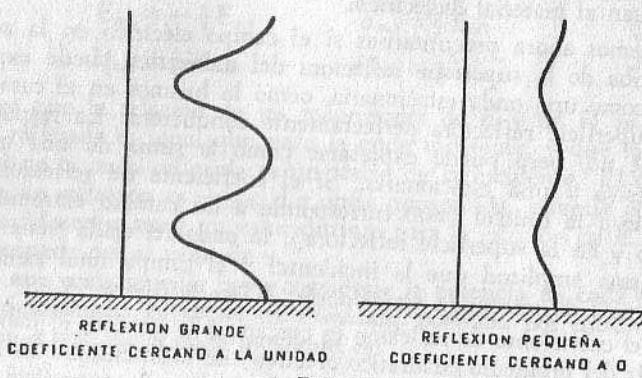


FIG. 55

figura 54, escribimos Γ_3 , en lugar de $j\beta_3$, para describir la onda transmitida. La ecuación (337) se transforma en:

$$E_{x(\text{diel})} = E_{m3} e^{j\omega t - \Gamma_3 z} \quad (354)$$

y la ecuación (341) se debe escribir:

$$H_{y(\text{diel})} = H_{m3} e^{j\omega t - \Gamma_3 z} \quad (355)$$

La ecuación (342) queda como antes:

$$E_{m1} = \eta_1 H_{m1} \quad E_{m2} = -\eta_1 H_{m2} \quad E_{m3} = \eta_3 H_{m3} \quad (342)$$

Se debe tener en cuenta que η_3 es ahora un número complejo, y de la ecuación (301) se obtiene:

$$\eta_3 = \sqrt{\frac{\mu_3}{\epsilon_3 \left(1 + \frac{\gamma_3}{j\omega\epsilon_3}\right)}} \quad (356)$$

Como los campos eléctrico y magnético de la onda transmitida

no están en concordancia de fase temporal (γ_3 es complejo y representa el corrimiento de fase) se deduce que la onda reflejada no puede estar exactamente en fase con la incidente en la superficie de contorno, aunque ellas satisfacen las ecuaciones (339) y (343).

Como ejemplo del corrimiento de fase que aparece cuando una onda se refleja, consideremos una onda de radio reflejada en la superficie de la tierra. Las siguientes constantes son características de la tierra húmeda:

$$\gamma = 10^{-2} \text{ mho por metro}$$

$$\kappa = 25$$

$$\epsilon = \kappa\epsilon_0 = 220 \times 10^{-12}$$

$$\mu = \mu_0 = 1,26 \times 10^{-6}$$

Suponemos que una onda de frecuencia igual a 10 megaciclos por segundo, y, por lo tanto, $\omega = 6,28 \times 10^7$, incide normalmente sobre la superficie de la tierra. La impedancia intrínseca de la tierra es:

$$\eta_3 = \sqrt{\frac{1,26 \times 10^{-6}}{220 \times 10^{-12}(1,24/-35,9^\circ)}} = 68,0/18,0^\circ \text{ ohms}$$

Es interesante comparar este dato con la impedancia intrínseca del vacío, igual a 377 ohms. La diferencia se debe en gran parte a la constante dieléctrica de la tierra húmeda, más bien que a la conductividad. El denominador de la expresión, bajo el signo radical, se modifica por un factor igual a 25 a causa de la constante dieléctrica, y sólo en 1,24 debido a la conductividad. Sin embargo, la conductividad da un argumento de 18° a la impedancia intrínseca, indicando que H se retrasa 18° (en el tiempo) con respecto a E en la tierra.

Desde el punto de vista práctico, nos interesa conocer el factor de reflexión, pues éste da la magnitud y la fase de la onda reflejada, que es usualmente la componente útil. De la ecuación (345):

$$\frac{E_{m2}}{E_{m1}} = \frac{68,0/18,0^\circ - 377}{68,0/18,0^\circ + 377} = -0,705/-6,6^\circ$$

Esta fórmula dice que la onda reflejada tiene una amplitud igual a 0,7 de la amplitud incidente (por lo tanto, alrededor de la mi-

tad de la energía). La onda reflejada es siempre de fase opuesta a la fase de la onda incidente en la superficie de separación, pero, a causa de la conductividad de la tierra, se atrasa $6,6^\circ$ con respecto a una inversión de fase ideal.

El ejemplo muestra que aun a 10 megaciclos la tierra húmeda actúa más bien como un mal dieléctrico que como un conductor.

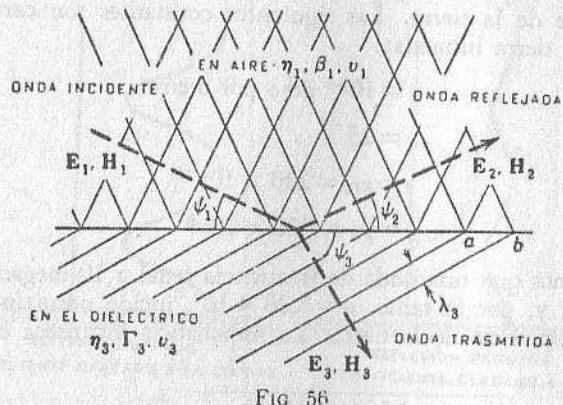


FIG. 56

A frecuencias radioeléctricas muy bajas, por otra parte, la tierra actúa más bien como un conductor pobre que como un dieléctrico.

Reflexión oblicua. — La mayor parte de los problemas prácticos tratan de reflexión oblicua y no normal. El problema general de una onda de cualquier polarización, que se propaga en cualquier sustancia e incide con cualquier ángulo sobre una superficie, es bastante complicado. En principio, sin embargo, la reflexión oblicua no difiere mucho de la reflexión normal.

Consideremos uno de los ejemplos más importantes. Una onda en el aire (o en cualquier otro medio no conductor) incide con un cierto ángulo sobre la superficie de un material semiconductor, tal como la tierra. Supongamos polarización horizontal (el vector eléctrico paralelo a la superficie reflectora). Esto se supone a causa del interés práctico de las ondas reflejadas en la tierra en el dominio de las altas frecuencias, para las cuales es usual la polarización horizontal.

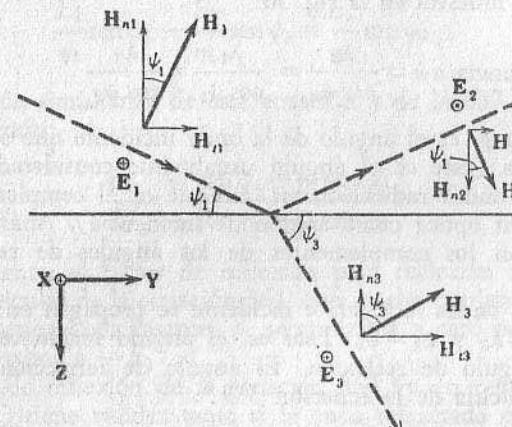
En la figura 56 la línea llena muestra la dirección de propagación de cada onda, y la línea punteada representa la dirección de propagación de la onda. En el enunciado del problema sólo

se conoce la onda incidente; se deben buscar las ondas reflejada y transmitida.

La solución se basa en la condición de contorno familiar: en la superficie reflectora, las componentes tangenciales de E y H deben ser continuas. Esto se expresa en las ecuaciones:

$$E_1 + E_2 = E_3 \quad (357)$$

$$H_{t1} + H_{t2} = H_{t3} \quad (358)$$



⊕: VECTOR HACIA ARRIBA DE LA PÁGINA
⊖: VECTOR HACIA ADENTRO DE LA PÁGINA

FIG. 57

El subíndice t indica la componente tangencial a la superficie, como en la fig. 57. Puesto que la onda incidente está horizontalmente polarizada, la componente E es completamente tangencial a la superficie, no necesitándose, por lo tanto, ningún subíndice (aunque en un caso más general la ecuación sería $E_{t1} + E_{t2} = E_{t3}$).

No es necesario hacer un análisis detallado para ver que si se busca una suma de las ondas incidente y reflejada igual a la transmitida en toda la superficie límite, las ondas deben tener todas la misma frecuencia. Deben moverse también todas a lo largo de la superficie en la misma dirección; en la figura 56, de izquierda a derecha.

A lo largo de la superficie, la distancia entre las crestas de onda

REFLEXIÓN

debe ser también la misma para las tres ondas. (Esta es la distancia $a-b$ de la figura para cada onda componente.) Si cualquiera de estas condiciones no se cumpliera, las ecuaciones 357 y 358 no se satisfarían.

Como la onda transmitida se propaga más lentamente que la reflejada y la incidente (suponiendo que la tierra tiene mayor constante dieléctrica), la longitud de onda es menor y la única manera de que haya correspondencia entre las crestas en la superficie es ajustando el ángulo de la onda transmitida. Es evidente que, como λ , la longitud de onda es la distancia entre las crestas tal como se muestra en la fig. 56:

$$\text{Distancia } a-b = \frac{\lambda_3}{\cos \psi_3} = \frac{\lambda_1}{\cos \psi_1} = \frac{\lambda_2}{\cos \psi_2} \quad (359)$$

El ángulo ψ_1 es el ángulo de la onda incidente que se muestra en la figura (este es el ángulo usualmente considerado cuando se trata de ondas radioeléctricas, aunque es el complemento del designado en óptica como ángulo de incidencia). Análogamente, ψ_2 y ψ_3 son los complementos de los ángulos de reflexión y refracción.

Como las ondas reflejada e incidente se propagan en el mismo medio, $\lambda_1 = \lambda_2$ y $\psi_1 = \psi_2$. Esto es, el ángulo incidente debe ser igual al ángulo de reflexión. El ángulo de refracción, sin embargo, se calcula de la ecuación 359*:

$$\frac{\cos \psi_1}{\cos \psi_3} = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} = \frac{v_1}{v_3} = \frac{\beta_3}{\beta_1} \quad (360)$$

Las distintas relaciones de la onda, satisfechas en la superficie reflectora, se muestran en la fig. 57. Como en el caso de ondas planas, E y H están vinculadas por la impedancia intrínseca, de la siguiente manera:

$$E_1 = \eta_1 H_1 \quad E_2 = \eta_1 H_2 \quad E_3 = \eta_3 H_3 \quad (361)$$

* Los cocientes de la ecuación 360 son los "índices de refracción" de la óptica si la onda incidente está en el vacío. Para un material no conductor, dicho cociente es $\sqrt{\mu_3 \epsilon_3 / \epsilon_0 \mu_0}$ y para una sustancia no-magnética y no-conductora (que es el caso usual) es $\sqrt{\epsilon_3 / \epsilon_0}$ o $\sqrt{\kappa_3}$. Los valores ópticos no son comparables con los radioeléctricos, pues ϵ es función de la frecuencia en las frecuencias ópticas. Sin embargo, el brillo del diamante puede ser atribuido a su alta constante dieléctrica.

REFLEXIÓN OBLICUA

De éstas y de la fig. 57:

$$H_{t1} = \frac{E_1}{\eta_1} \sin \psi_1 \quad H_{t2} = -\frac{E_2}{\eta_1} \sin \psi_1 \quad H_{t3} = \frac{E_3}{\eta_3} \sin \psi_3 \quad (362)$$

El signo negativo indica que, cuando la componente tangencial de H_2 es positiva, E_2 es negativa. Esto se deduce de la elección de coordenadas y de la dirección de propagación, como en la figura. Sustituyendo en la ecuación 358, se obtiene:

$$\frac{E_1}{\eta_1} \sin \psi_1 - \frac{E_2}{\eta_1} \sin \psi_1 = \frac{E_3}{\eta_3} \sin \psi_3 \quad (363)$$

La sustitución simultánea de esta ecuación y de la 357 da el factor de reflexión:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\eta_3 \sin \psi_1 - \eta_1 \sin \psi_3}{\eta_3 \sin \psi_1 + \eta_1 \sin \psi_3} \quad (364)$$

Naturalmente, el factor de reflexión para reflexión normal es un caso particular de la ecuación 364, que resulta poniendo $\psi = 90$ grados. Para una onda rasante, ψ_1 se aproxima a cero pero ψ_3 no, y E_2 se aproxima a $-E_1$.

El factor de reflexión de la ecuación 364 (y en realidad toda la discusión) tiene validez tanto si la onda refractada penetra en un material conductor como en el que no lo es. Se aplica, por lo tanto, a la tierra real como a una tierra ideal. La única diferencia es que η_3 para la tierra real es complejo, como se ve en la ecuación 356, y β_3 en la ecuación 360 es la componente imaginaria de Γ de la ecuación 294.

Es interesante y de importancia práctica (como se verá en la ulterior discusión sobre antenas) notar que, cuando una onda horizontalmente polarizada se refleja en la tierra, la *fase* de la onda reflejada no diferirá más que en unos pocos grados de la inversión completa de la onda incidente. Esto se muestra por el ejemplo de la sección precedente junto con la deducción, a partir de la ecuación 364 de que la incidencia normal da el máximo de diferencia de fase como resultado de la conductividad de la tierra, y que la reflexión a un ángulo menor se acerca más a dar la completa inversión de la fase. Tampoco la *amplitud* de la onda reflejada será muy diferente de la amplitud de la onda incidente. En el ejemplo calculado, era las siete décimas partes. En otros ejemplos de

incidencia normal puede valer más o menos que esto. Se aproxima a la igualdad con la onda incidente para la incidencia rasante. Estas consideraciones justifican la hipótesis que se hace siempre de que una onda horizontalmente polarizada se refleja totalmente en la superficie de la tierra con una perfecta inversión de fase.

Una onda verticalmente polarizada puede ser tratada matemáticamente en forma análoga a como hemos señalado para la onda horizontalmente polarizada. Una onda polarizada con cualquier ángulo se puede descomponer en sus dos componentes polarizadas vertical y horizontalmente. Por lo tanto, con paciencia, el método que ha sido sugerido aquí se puede aplicar a la mayoría de los problemas de reflexión.

PROBLEMAS

1. Un campo eléctrico pasa del aire al aceite ($\kappa = 2$). El campo en el aire está a un ángulo de 45 grados con la superficie de aceite. ¿Cuál es el ángulo entre la superficie y el aceite? Encuéntrese este ángulo para D y E.

2. ¿Es siempre el campo eléctrico normal a la superficie en la superficie de un metal? Explíquense las relaciones entre el campo interno y el externo en la fig. 44, página 184.

3. Pruébese que B_n , la componente de B normal a una superficie perfectamente conductora, es o nula o estática.

4. Pruébese que $\partial B_{tan} / \partial n = 0$. B_{tan} es la componente de B tangencial a una superficie perfectamente conductora en un espacio no-conductor, y la derivada se toma normalmente a esa superficie. (Pruébese para una superficie plana. ¿Puede extenderse la prueba para cualquier superficie?)

5. El campo magnético H es tangencial a la superficie de un conductor semiinfinito. Calcúlese la densidad de corriente a distancia x en el interior del material, tales que $x/\delta = 1, 2$ y 3. Represéntense la relación de módulo-fase de estas densidades de corriente representándolas como vectores complejos a partir de un origen común. Sobre el mismo diagrama represéntese la fase de la corriente total I y el campo superficial H .

6. Determínese el campo magnético a cualquier profundidad x dentro de un conductor semiinfinito, conociendo el campo magnético tangencial a la superficie. Represéntense los vectores de H a distintas profundidades como se hizo para la densidad de corriente en el problema 5; úsese $x/\delta = 0, 1, 2$ y 3. ¿Qué se puede decir sobre H a una distancia δ por encima de la superficie del conductor? Compárese su fase con los vectores densidad de corriente del problema 5.

7. Muéstrese que el promedio temporal de la pérdida de potencia en una hoja de material conductor de 1 metro cuadrado de superficie y de espesor δ recorrido por una intensidad paralela a una arista del cuadrado, siendo la corriente uniformemente distribuida y de valor total igual a $(I_m / |\Gamma|) \cos \omega t$, es $I_m^2 \delta / 4\gamma$.

8. ¿Qué valor de t en la ecuación (327) daría concordancia con la figura 53?

9. Si el valor efectivo (raíz del promedio cuadrático) del campo eléctrico de la onda incidente de la figura 53 es de 10 milivoltios por metro, ¿qué corriente fluye en el plano conductor X-Y? Encuéntrese el valor efectivo (promedio cuadrático). Supóngase la onda en el aire.

10. Una onda en el aire incide normalmente en una superficie de parafina ($\kappa = 2,2$). Determínese el coeficiente de reflexión y la onda radioeléctrica estacionaria.

11. Repítase el problema 10 para una onda progresiva en parafina, que incide sobre una superficie de separación de parafina-aire.

12. Repítase el problema 10 para una onda en el aire que incide normalmente sobre una superficie de agua ($\kappa = 80$), siendo la frecuencia tan alta que el agua puede considerarse como un dieléctrico perfecto.

13. Dibújense esquemas similares a los de la figura 55, mostrando los resultados de los problemas 10, 11 y 12.

14. Después de la ecuación 356 se da un ejemplo de la reflexión en tierra húmeda. Escríbanse las ecuaciones completas de los campos eléctrico y magnético en el espacio por arriba de la superficie y por abajo. Dese los valores conocidos e incluyase las relaciones temporales.

15. Calcúlese el factor de reflexión de la tierra húmeda [como en el ejemplo que sigue a las ecuaciones (356)] para una onda con una frecuencia de 10.000 megaciclos por segundo. Repítase lo mismo para una frecuencia de 10.000 ciclos por segundo.

16. Calcúlese el factor de reflexión, como en el ejemplo que sigue a la ecuación 356, para la misma onda en tierra más seca con $\kappa = 10, \gamma = 0,004$ mhos por metro.

17. Dibújese un diagrama análogo a la figura 56 mostrando los frentes de onda cuando una onda que se propaga en un material dieléctrico incide oblicuamente en la superficie del contorno aire-dieléctrico. Considérese el ángulo crítico de incidencia para el cual los frentes de onda en el aire son normales a la superficie de contorno, y la relación a la reflexión total.

18. Dedúzcase una ecuación, de forma similar a la (364), para el factor de reflexión de una onda verticalmente polarizada (más precisamente, una onda con el vector magnético paralelo a la superficie reflectora). Muéstrese que, si la reflexión se hace en la superficie de un dieléctrico perfecto, hay un ángulo de incidencia para el cual el factor de reflexión es cero (ángulo de Brewster).

CAPÍTULO XI RADIACIÓN

Potenciales electrodinámicos. — Es conveniente resolver problemas electrostáticos en función del campo potencial escalar electrostático, pues donde no hay cargas y el material dieléctrico es homogéneo, es sólo necesario resolver la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 V = 0 \quad (119)$$

En problemas magnetostáticos hay una conveniencia similar en el uso del potencial vectorial magnético, pues en un material homogéneo que no conduce corriente resolvemos simplemente

$$\nabla^2 A = 0 \quad (365)$$

Para problemas dinámicos, sin embargo, incluyendo problemas con ondas, estas ecuaciones estáticas son incompletas. Mostraremos que las ecuaciones dinámicas completas que se aplican en el espacio libre o en un material homogéneo en el cual no hay cargas o corriente son:

$$\nabla^2 V - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \quad (366)$$

$$\nabla^2 A - \mu\epsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \quad (367)$$

Estas ecuaciones se reducen naturalmente a las ecuaciones estáticas si los potenciales no varían con el tiempo.

La comparación con la ecuación (249) muestra que las (366) y (367) son ecuaciones de ondas. Esto es, ambos potenciales se propagan en el espacio con la velocidad $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$. Por lo tanto, cuando una carga en movimiento o una corriente variable inicien un cambio en el potencial, ese cambio no afectará las condiciones en

POTENCIALES ELECTRODINÁMICOS

197

TABLA IV

POTENCIALES ESTÁTICOS		POTENCIALES DINÁMICOS	
$\nabla \times E = 0$	(111)	$\nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t}$	(193)
$\nabla \times H = \iota$	(203)	$\nabla \times H = \iota + \frac{\partial D}{\partial t}$	(240)
$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon}$	(116)	$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon}$	(116)
Puesto que $\nabla \cdot B = 0$ podemos poner $H = \nabla \times A$	(196) (211)	Puesto que $\nabla \cdot B = 0$ $\nabla \cdot H = \frac{1}{\mu} \nabla \cdot B = 0$ podemos poner $H = \nabla \times A$	(196) (211)
Como según 111		Entonces, de la 193 $\nabla \times E = - \mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times A$	(368)
$\nabla \times E = 0$ podemos poner $E = - \nabla V$	(111) (112)	Como, según la 368 $\nabla \times \left(E + \mu \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0$	(369)
		podemos poner $E + \mu \frac{\partial A}{\partial t} = - \nabla V$	(370)
		de donde $E = - \left(\nabla V + \mu \frac{\partial A}{\partial t} \right)$	(371)
Luego, de la 116		Ahora, de la 116 $\nabla \cdot \left(\nabla V + \mu \frac{\partial A}{\partial t} \right)$ $= \nabla^2 V + \mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot A = - \frac{\rho}{\epsilon}$	(372)
De la 203		De la 240 $\nabla \times H - \frac{\partial D}{\partial t} = \iota$ $\nabla \times \nabla \times A - \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}$ $= \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A = \iota$	(373)
		$= \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla V + \mu \frac{\partial A}{\partial t} \right)$ $= \nabla \left(\nabla \cdot A + \epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \right) - \nabla^2 A + \mu \epsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \iota$	
Pero ahora estipulamos que $\nabla \cdot A = 0$	(214)	Pero ahora estipulamos que $\nabla \cdot A = - \epsilon \frac{\partial V}{\partial t}$	(374)
De aquí $\nabla^2 A = - \iota$	(215)	De aquí $\nabla^2 A - \mu \epsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = - \iota$	(375)
y como arriba: $\nabla^2 V = - \frac{\rho}{\epsilon}$	(118)	y de la 374 y 372 $\nabla^2 V - \mu \epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = - \frac{\rho}{\epsilon}$	(376)

relación con un punto distante, hasta un tiempo posterior que permita que la onda progresiva llegue a dicho punto.

Para deducir los potenciales dinámicos partimos de las ecuaciones de Maxwell en lugar de las relaciones más simples de la electrostática y magnetostática. La deducción se prosigue luego paso a paso en forma análoga. En el lado izquierdo de la Tabla IV se da la deducción familiar de las ecuaciones del potencial estático y, en el derecho, la de los potenciales dinámicos. Se supone que ϵ y μ son constantes.

Exceptuando los cambios introducidos por el uso de las ecuaciones de Maxwell, las ecuaciones dinámicas son similares a las estáticas hasta que se hace una diferencia con respecto a la divergencia del potencial vectorial. Se recordará de la discusión del Capítulo VI que puede especificarse cualquier divergencia para \mathbf{A} , eligiéndose la más conveniente. Para campos estáticos ponemos $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Para campos dinámicos se especifica la relación de la ecuación (374). Cuando se hace esto resultan las ecuaciones (375) y (376).

Si se pudiera encontrar fácilmente una solución para estas ecuaciones diferenciales, ello sería muy útil, pues si se conocen la corriente y la carga, pueden encontrarse \mathbf{A} y V y, con ellos, \mathbf{E} y \mathbf{H} por las ecuaciones (371) y (211). La posibilidad de encontrar soluciones para las ecuaciones (375) y (376) se puede considerar como un solo problema, pues estas ecuaciones son de la misma forma. Algunas características de la solución son evidentes. Un ejemplo nos ayudará para mostrar su significado.

Consideremos una simple perturbación electromagnética. Un impulso de corriente circula por un corto trozo de alambre (como en una antena); la carga fluye repentinamente de un extremo al otro del conductor. Antes y después del impulso, las condiciones son estáticas y las soluciones de las ecuaciones (375) y (376) deben ser soluciones potenciales estáticas de (215) y (218). Dichas soluciones son*:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho}{r} dV \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho}{r} dV \quad (146)$$

Estas soluciones electrostáticas deben aplicarse antes de que comience la perturbación y después que desapareció, pero durante la perturbación, como se ve de las ecuaciones (366) y (367), se

* En este capítulo usamos el símbolo "V" para indicar el volumen, para evitar confusión con el uso de v para la velocidad.

producen cerca de la antena cambios de \mathbf{A} y V que se propagan a todo el espacio como ondas progresivas. (Se notará que, en este ejemplo, las ecuaciones (375) y (376) se reducen a ecuaciones de onda en todo el espacio, menos en el interior de la antena.)

Sabemos, por lo tanto, que el campo potencial estático inicial se transforma en el campo potencial estático final mediante una perturbación en forma de onda progresiva. El potencial en todo punto del espacio se afecta por esta perturbación, pero los puntos más distantes no serán afectados hasta un tiempo después, que es proporcional a la distancia. La perturbación se propaga con una velocidad v (previamente definida como $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$) y, de aquí, si

la distancia de la antena a un punto del espacio es r , el potencial en ese punto se afecta después del tiempo r/v .

Para expresar la misma idea en una forma un poco diferente, a un tiempo dado t determinamos los potenciales \mathbf{A} y V en un punto a una distancia r de la fuente de la perturbación, no por la intensidad y la carga en la antena en ese tiempo particular t , sino por la corriente y la carga que existía en un tiempo anterior ($t - r/v$). (Esto es similar a decir que cuando miramos una estrella distante a algunos años luz, no la vemos tal como está ahora, sino como estaba hace algunos años.)

Usando la notación funcional, si la densidad de carga es una función del tiempo, se la escribe $\rho(t)$, indicando con esto cualquier función de la variable t . Si ρ cambia con el tiempo en la misma manera que $\rho(t)$, pero con un cierto retraso, la variable se escribe $(t - t_0)$ en lugar de t ; esto introduce un retraso de t . La función densidad de carga retardada se escribe, por lo tanto, $\rho(t - t_0)$.

Con esta notación, la ecuación (146) para el potencial electrostático se escribe:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(t)}{r} dV \quad (377)$$

donde t indica en el paréntesis que ρ es una función del tiempo. Ahora, en vista de que tenemos que tomar un tiempo retardado en la expresión correspondiente para los potenciales dinámicos, nuestra discusión indica que la solución de la ecuación (376) puede, razonablemente, ser:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(t - \frac{r}{v})}{r} dU \quad (378)$$

con lo que el potencial en el tiempo t depende de la carga en el tiempo retardado $(t - r/v)$. Una solución de la ecuación (375) sería:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{t(t - \frac{r}{v})}{r} dU \quad (379)$$

Esto parece lógico, pero ha sido basado en especulaciones. Como sucede con la mayoría de las ecuaciones diferenciales, la prueba se obtiene bastante fácilmente una vez que se ha conjecturado una solución, sustituéndola en la ecuación diferencial. De esta manera, sustituimos la expresión (378) en la ecuación (376), que se reduce, de esta manera*, a una identidad. La analogía de la ecuación (375) con ésta muestra que su solución es, ciertamente, (379).

* La sustitución de V de las ecuaciones (378) en la ecuación (376) no es, sin embargo, inmediata. La sustitución directa de la ecuación (378) en la (376) lleva a dificultades al determinar el laplaciano de ρ/r en los puntos donde r es cero. Como r es la distancia del elemento de carga al punto en que se determina el potencial, sólo es cero cuando el potencial se determina en un punto en el cual está ubicada la carga. Para evitar esta dificultad, el espacio se divide en dos regiones: una tan cercana al punto potenciado que podemos aplicar la ecuación $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon$, por ser cuasiestacionarias las condiciones. La otra contiene todo el resto del espacio. Para la segunda región, ρ/r es regular, y el laplaciano de V se desarrolla fácilmente en coordenadas esféricas para obtener:

$$\frac{1}{4\eta\epsilon} \int \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \rho \left(t - \frac{r}{v} \right) dU$$

Como ambas regiones contribuyen al potencial en el punto en cuestión, la expresión completa que debemos sustituir en el laplaciano de la ecuación (376) es la siguiente:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\rho} + \frac{1}{4\eta\epsilon} \int \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \rho \left(t - \frac{r}{v} \right) dU$$

Después de esto la solución se obtiene sin inconvenientes y la ecuación (376) se reduce a una identidad. Véase, por ejemplo, *Classical Electricity and Magnetism*, de Abraham y Becker.

Estos potenciales se conocen a menudo bajo el nombre de *potenciales retardados* a causa del retraso del tiempo en que se los considera.

No es siempre necesario usar potenciales retardados, aun en problemas dinámicos. Cuando los tiempos son grandes y las distancias cortas, los potenciales retardados son indistinguibles de los potenciales estáticos. Matemáticamente, si r es pequeño comparado con vt , una función de $(t - r/v)$ difiere en un valor despreciable de una función de t . Las ecuaciones más simples electrostáticas se pueden usar entonces, aunque los campos sean lentamente variables, y esta condición se llama *estado cuasiestacionario*. Todos los problemas con frecuencias industriales son cuasiestacionarios, excepto aquellos que tratan de largas líneas de transmisión. El atraso de tiempo en la propagación de un campo magnético dentro de un generador, por ejemplo, es despreciable.

Radiación. — El fenómeno eléctrico que puede considerarse más esencialmente como un problema dinámico es la radiación de ondas de una antena. Cuando consideramos en el capítulo IV una antena corta de radio no hicimos mención alguna de la radiación de energía, pues la radiación es el factor que las soluciones cuasiestacionarias desprecian. Por lo tanto, para determinar la radiación de una antena buscaremos una solución para el potencial vectorial dinámico, tal como está dado por la ecuación (379). Con este propósito hemos introducido los conceptos de vector potencial y potencial retardado.

Consideraremos un conductor de pequeña longitud recorrido por una corriente alterna:

$$i = I \sin \omega t \quad (380)$$

El conductor se aísla en el espacio. (No hay ninguna superficie de tierra cercana.) Su longitud es l , y tomaremos un sistema de coordenadas esféricas de tal manera que el conductor se extienda a lo largo de un eje polar desde $-l/2$ a $+l/2$; véase la figura 58.

Usando la ecuación (379) escribimos el potencial vectorial en el entorno del conductor; la integración se hace a lo largo del alambre solamente. La dirección del conductor coincide con el eje x . Se tiene:

$$A_x = \frac{1}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{I \sin \omega \left(t - \frac{r}{v} \right)}{r} dx \quad (381)$$

Puesto que hay corriente sólo en la dirección x , hay solamente

una componente x del potencial vectorial. [Esto puede compararse con la ecuación (219)].

Ahora, si la longitud del conductor es pequeña comparada con la distancia del punto donde se mide \mathbf{A} , el denominador del integrando es prácticamente constante durante el curso de la integración. Si la longitud es pequeña comparada con la longitud de onda de la señal irradiada, el numerador es también prácticamente constante; esto significa que en cualquier punto del espacio la diferencia de fase entre las señales que llegan a un punto desde los extremos del conductor es despreciable.

Con estas hipótesis el integrando de la ecuación (381) es simplemente una constante, y resulta:

$$A_x = \frac{Il}{4\pi r} \sin \omega \left(t - \frac{r}{v} \right) \quad (382)$$

De esta manera se encuentra el vector potencial, partiendo de la corriente conocida.

Para encontrar el campo magnético debido a una antena corta, se determina el rotor del vector potencial. Esto se hace más cómodamente en coordenadas esféricas, usando las fórmulas de la tabla II. El potencial vectorial se cambia fácilmente a coordenadas esféricas, como se ilustra en la figura 58, dando:

$$A_r = \frac{Il}{4\pi r} \sin \omega \left(t - \frac{r}{v} \right) \cos \theta$$

$$A_\theta = -\frac{Il}{4\pi r} \sin \omega \left(t - \frac{r}{v} \right) \sin \theta \quad (383)$$

$$A_\phi = 0$$

Tomando el rotor se obtiene, de acuerdo con la ecuación (211), el campo magnético:

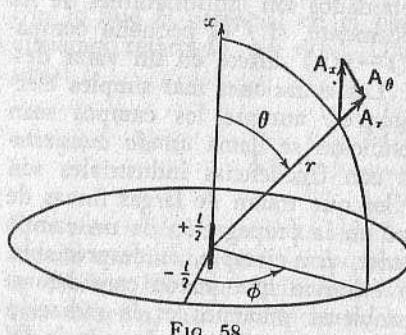


FIG. 58

$$H_r = 0$$

$$H_\theta = 0$$

$$H_\phi = \frac{Il}{4\pi r} \sin \theta \left[\frac{\omega}{v} \cos \omega \left(t - \frac{r}{v} \right) + \frac{1}{r} \sin \omega \left(t - \frac{r}{v} \right) \right] \quad (384)$$

El campo eléctrico se encuentra a partir del campo magnético por medio de las ecuaciones de Maxwell, ecuación (240), o a partir del potencial vectorial por la ecuación (371). Para ilustrar el último método debemos obtener el potencial escalar V de la ecuación (374):

$$V = -\frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \int \mathbf{A} dt \quad (385)$$

Cuando esto se sustituye en las ecuaciones (371) resulta una expresión en \mathbf{A} :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \nabla \cdot \int \mathbf{A} dt - \mu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (386)$$

Esta disposición un tanto engorrosa de signos indica operaciones que se hacen fácilmente una por vez, obteniéndose:

$$E_r = \frac{Il}{2\pi \epsilon r} \cos \theta \left[\frac{1}{vr} \sin \omega \left(t - \frac{r}{v} \right) - \frac{1}{\omega r^2} \cos \omega \left(t - \frac{r}{v} \right) \right]$$

$$E_\theta = \frac{Il}{4\pi \epsilon r} \sin \theta \left[\frac{\omega}{v^2} \cos \omega \left(t - \frac{r}{v} \right) + \frac{1}{rv} \sin \omega \left(t - \frac{r}{v} \right) - \frac{1}{\omega r^2} \cos \omega \left(t - \frac{r}{v} \right) \right] \quad (387)$$

$$E_\phi = 0$$

Se descubre más fácilmente el significado físico de las ecuaciones (384) y (387) si se expresan en función de la longitud de onda λ y de la frecuencia f . Usando (véase la tabla III, al final del volumen):

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2\pi v}{\omega} \quad y \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (388)$$

dichas fórmulas se pueden escribir:

$$\left. \begin{aligned} E_r &= -\eta \frac{Il \cos \theta}{r\lambda} \left[\frac{1}{4\pi^2} \frac{\lambda^2}{r^2} \cos \left(2\pi \frac{r}{\lambda} - \omega t \right) + \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda}{r} \sin \left(2\pi \frac{r}{\lambda} - \omega t \right) \right] \\ E_\theta &= \eta \frac{Il \sin \theta}{2r\lambda} \left[-\frac{1}{4\pi^2} \frac{\lambda^2}{r^2} \cos \left(2\pi \frac{r}{\lambda} - \omega t \right) - \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda}{r} \sin \left(2\pi \frac{r}{\lambda} - \omega t \right) + \cos \left(2\pi \frac{r}{\lambda} - \omega t \right) \right] \\ E_\phi &= 0 \\ E_r &= 0 \\ E_\theta &= 0 \\ H_\phi &= \frac{Il \sin \theta}{2r\lambda} \left[-\frac{1}{2\pi} \frac{\lambda}{r} \sin \left(2\pi \frac{r}{\lambda} - \omega t \right) + \cos \left(2\pi \frac{r}{\lambda} - \omega t \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (390)$$

Consideremos estas ecuaciones en dos regiones generales: primero, cerca del conductor que irradia en la zona donde r es pequeño comparado con la longitud de onda λ , y segundo, a una distancia de algunas longitudes de onda, de modo que r sea grande comparado con λ . En la región cercana a la antena predominan los términos que contienen λ/r en las mayores potencias. Muy cerca de la antena podemos despreciar todos los términos menos el primero en cada paréntesis de las ecuaciones 389 y 390. Cuando hacemos esto, la ecuación se reduce a las ecuaciones cuasiestacionarias de un dipolo oscilante*. Estos términos dan lo que se llama **campo de inducción** alrededor de la antena, esto es, despreciamos el campo de radiación.

Si, por otra parte, observamos el campo a una distancia de muchas longitudes de onda de la fuente, de modo que λ/r sea pequeña, aparece otra simplificación sencilla e importante. En este caso, los términos que contienen λ/r y λ^2/r^2 son tan pequeños que pueden ser despreciados. Sólo necesitamos retener el último término en la expresión de E_θ , y la expresión completa de la E_r es despreciable comparada con E_θ . También en H_ϕ sólo el último término tiene importancia. Con esta aproximación, que es buena a distancias del orden de algunas longitudes de onda del origen,

* Véase la ecuación 220 y el problema 11, Capítulo VI.

la ecuación de onda describe lo que se denomina **campo de radiación**.

$$\left. \begin{aligned} E_r &= 0 \\ E_\theta &= \eta \frac{Il \sin \theta}{2r\lambda} \cos \left(2\pi \frac{r}{\lambda} - \omega t \right) \end{aligned} \right\} \quad (391)$$

$$\left. \begin{aligned} E_\phi &= 0 \\ H_r &= 0 \\ H_\theta &= 0 \\ H_\phi &= \frac{Il \sin \theta}{2r\lambda} \cos \left(2\pi \frac{r}{\lambda} - \omega t \right) \end{aligned} \right\} \quad (392)$$

Estas ecuaciones (391) y (392) describen un campo electromagnético extraordinariamente sencillo. Es una onda que se propaga radialmente hacia afuera. Las componentes eléctrica y magnética son idénticas de forma y mutuamente ortogonales. Sus módulos están en la relación siguiente:

$$E_\theta = \eta H_\phi \quad (393)$$

(una relación similar a la encontrada en ondas planas en la ecuación 271). Las componentes eléctrica y magnética se debilitan a medida que la onda se propaga porque ambas son inversamente proporcionales al radio. El vector de Poynting que describe el flujo de energía está radialmente dirigido hacia afuera y es inversamente proporcional al cuadrado del radio; esto no significa que hay pérdida de energía sino simplemente que la densidad de energía disminuye a medida que la onda se expande.

La fig. 59 muestra el aspecto de una sección de la onda. Es una onda esférica. Las líneas del campo magnético son paralelos de latitud en la esfera y el campo eléctrico es paralelo a los meridianos. Ambos campos son más intensos cerca del ecuador y se anulan en los polos. Los campos, en cualquier punto del espacio, oscilan sinusoidalmente.

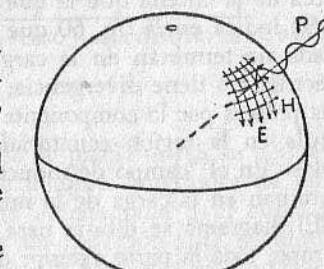


FIG. 59

Una parte cualquiera de la onda esférica progresiva no puede distinguirse de una onda plana. La analogía de la fig. 59 con la 48a es evidente. En las ecuaciones (391) y (392) el término $\cos(2\pi r/\lambda - \omega t)$ puede considerarse como definiendo una onda plana, y el coeficiente de ese término se interpreta como dando la intensidad de la onda en distintas partes del espacio. Esta es una aproximación basada en el hecho que si sólo observamos una pequeña porción de la onda, ni el seno de θ en el numerador, ni r en el denominador del coeficiente, pueden cambiar apreciablemente en la zona en observación. Las derivadas del coeficiente serán, por lo tanto, infinitesimales. Por esta razón, cualquier onda de radio recibida puede ser usualmente considerada como una onda plana.

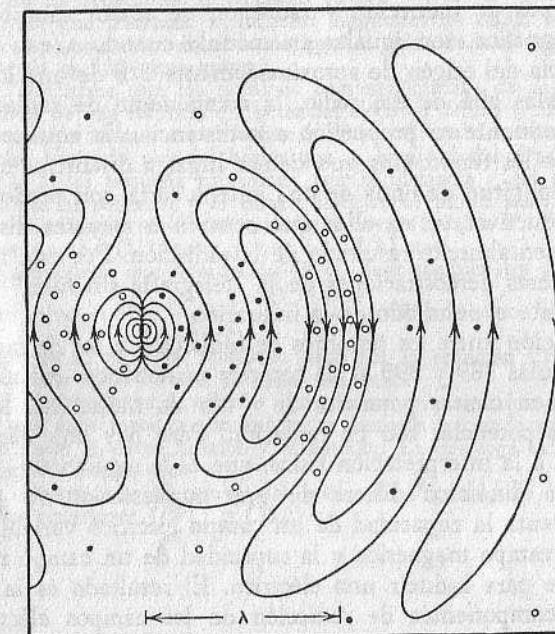
La onda esférica. — Las ecuaciones (389) y (390), que son la expresión completa de una onda esférica, contienen gran información que se pierde en las expresiones aproximadas (391) y (392). (Se notará, al pasar, que estas últimas no son soluciones de las ecuaciones de Maxwell, ni tampoco debíamos esperar que lo fueran.) La fig. 60 da una idea general de los campos descritos por las ecuaciones (389) y (390); se presenta una sección transversal de un plano que contiene a la antena, donde las líneas indican el campo eléctrico y los pequeños círculos o puntos indican donde el flujo magnético entra o sale del plano, respectivamente. Las líneas de flujo magnético son circulares, alrededor de un eje que contiene a la antena. Hay en realidad una mayor concentración del campo cerca de la antena que la que puede representarse en el diagrama.

Se indica en la fig. 60 que las líneas eléctricas de la onda irradiada no terminan en la carga, sino que son cerradas. El campo eléctrico no tiene divergencia; las curvas son cerradas en las regiones polares por la componente radial E_r . La componente radial se anula en la región ecuatorial, mientras que E_θ se anula en los polos. En el "campo de inducción", cercano a la antena, las líneas terminan en la carga de la misma.

El diagrama se dibuja para $t=0$. A medida que transcurre el tiempo, toda la parte exterior del diagrama se expande con la velocidad de propagación de la onda, mientras que la parte interior, cercana al conductor, vibra con la corriente en la antena.

Las relaciones de fase son complicadas. Cerca del conductor los campos eléctrico y magnético están fuera de fase en el tiempo. El campo magnético cerca de la antena está en fase con la corriente, mientras que el campo eléctrico lo está con la carga en cada uno de los extremos de la antena.

Estas componentes de inducción de los campos eléctrico y magnético contienen una cantidad de energía relativamente grande, que es alterna a causa de los campos eléctrico y magnético.



• FLUJO HACIA FUERA DE LA PAGINA

○ FLUJO HACIA DENTRO DE LA PAGINA

FIG. 60

La componente de inducción puede despreciarse por su pequeña magnitud a distancias del orden de algunas longitudes de onda de la antena, pues disminuye como el cuadrado o el cubo del radio, mientras que la componente de radiación que disminuye sólo como la primera potencia del radio, se hace predominante. La componente de radiación representa energía que se propaga hacia afuera y que nunca vuelve al circuito del cual partió. Las componentes de radiación de los campos eléctrico y magnético están en fase entre sí. Las componentes de inducción y radiación del campo eléctrico, en la región donde ambos existen, están en oposición de fase, mientras que las del campo magnético están

en cuadratura de fase. Este resultado inesperado puede ser explicado considerando que la componente de radiación no se origina directamente de la corriente y la carga de la antena, sino de los cambios en los campos de inducción que rodean a la antena.

Los campos de inducción y radiación de ambos campos, eléctrico y magnético, son iguales en módulo cuando $\lambda/r = 2\pi$, o a una distancia del origen de aproximadamente 1/6 de una longitud de onda. Más allá de ese radio, la componente de radiación se hace predominante en proporción a la distancia. De aquí se puede deducir que los fenómenos que tienen lugar a distancias mayores de 1/6 de longitud de onda de una antena corta, son predominantemente inductivos, y aquellos que ocurren a mayores distancias son fundamentalmente resultado de la radiación. Por eso, muchas de las primeras demostraciones de la "telegrafía sin hilos" fueron primariamente el resultado de la inducción.

La distinción entre los términos de inducción y los de radiación en las fórmulas 389 y 390 es de carácter matemático: los términos que contienen ciertas potencias de r son de inducción, los que tienen otras potencias son de radiación. Pero hay otra distinción más abierta a la interpretación física, que es la siguiente:

El estado dinámico difiere de uno cuasiestacionario porque tiene en cuenta la capacidad de un campo eléctrico variable para inducir un campo magnético y la capacidad de un campo magnético variable para inducir uno eléctrico. El resultado es la radiación. Las componentes de radiación de los campos eléctrico y magnético no tienen una relación tan estrecha con la intensidad y la carga como la tienen los campos de inducción. Se han desprendido de su origen. El campo eléctrico de una onda no resulta de la presencia cercana de cargas, sino de la componente magnética variable de la onda; el campo magnético no resulta del flujo de corriente, sino del campo eléctrico variable. Esto se ve en las zonas alejadas en la fig. 60. Una onda no podría ser producida, por supuesto, si no hubiera carga y corriente en algún punto; pero una vez producida, una onda puede propagarse a distancia ilimitada. Considérese, por ejemplo, la luz de una nava extragaláctica que llega a nosotros millones de años después que ha cesado la perturbación que las originó, habiendo ya desaparecido la estrella.

PROBLEMAS

1. Dedúzcase las ecuaciones (387) para E a partir de las ecuaciones (384) usando las ecuaciones de Maxwell (240).

2. ¿A qué distancia, medida en longitudes de onda, es la componente del campo magnético de radiación igual al doble de la de inducción? ¿A qué distancia es 100 veces mayor?

3. Muéstrese que los términos cuasiestacionarios de la ecuación (387) resultan de una solución del potencial eléctrico debida a un dipolo oscilante en la región en que se puede usar la (144). (Nota: La solución se simplifica mucho haciendo uso del hecho que la longitud del dipolo, que podemos llamar l , sea pequeña comparada con la distancia r del punto en el que medimos el potencial y el campo eléctrico al punto medio del dipolo. En estas condiciones $r^2 - l^2$ es aproximadamente igual a r^2 . También podemos poner $r_1 = r - (l/2) \cos \theta$ y $r_2 = r + (l/2) \cos \theta$.

4. Muéstrese que la ecuación (376) tiene también un *potencial avanzado*

$$\text{como solución } V = \frac{1}{2\pi\epsilon} \int \frac{\rho(t + r/v)}{r} dV \text{ así como la solución corres-}$$

pondiente al potencial retardado dado por la ecuación (378). ¿Cuál es el significado físico de este potencial avanzado?

5. Un condensador esférico que consiste en una esfera de metal rodeada por una capa metálica concéntrica se descarga haciendo una conexión eléctrica entre la esfera interior y la exterior. La descarga es osculatoria. ¿Hay radiación? Explíquese.

6. Determinese el campo del vector de Poynting de la onda irradiada de las ecuaciones (391) y (392).

CAPÍTULO XII
ANTENAS

En el capítulo anterior consideramos la radiación de un pequeño conductor en la hipótesis de que la corriente era la misma en toda la longitud del conductor. Esto, por supuesto, es imposible físicamente, a menos que el pequeño conductor forme parte de un circuito. Puede formar parte, por ejemplo, de una antena más grande y, en este caso, habrá una radiación de cada parte de la antena. La radiación total se encuentra luego por suma o integración de las componentes de radiación provenientes de las pequeñas secciones de la antena.

Antenas cortas. — Considérese un conductor de longitud razonable, pero mucho más corto que la longitud de onda de la señal irradiada. Considérese que este conductor está aislado en el espacio sin ninguna tierra ni otros cuerpos perturbadores a su alrededor; sin embargo, en el medio del conductor hay algún oscilador o alguna fuente de energía que produce corriente en el mismo. Véase la fig. 61a. La corriente circula a causa de la capacitancia distribuida del alambre. La corriente carga las capacitancias y pasa de un máximo en el centro del conductor a cero en los extremos del mismo. La corriente se representa en la figura 61b.

Para encontrar la radiación total consideremos la antena de la figura 61 como constituida por muchas secciones, cada una tan pequeña que la corriente es sustancialmente constante en su longitud. Queremos encontrar el campo de radiación en un punto que está a algunas longitudes de onda de la antena y, por lo tanto, a muchas veces la longitud de la antena. Cada trozo contribuye al campo eléctrico en ese punto, según la ecuación (391). Esta ecuación se vuelve a escribir ahora y, puesto que las antenas

irradian en el vacío o, lo que es casi lo mismo, en el aire, usamos c en lugar de v :

$$E_\theta = \frac{\eta I l \sin \theta}{2r\lambda} \cos \omega \left(t - \frac{r}{v} \right) \quad (394)$$

La intensidad del campo total en el punto de observación es simplemente una suma de las amplitudes de las componentes recibi-

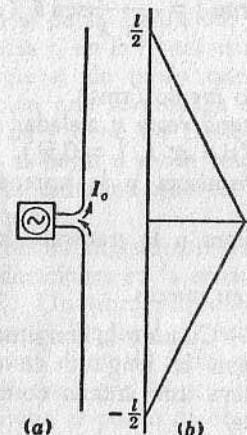


FIG. 61

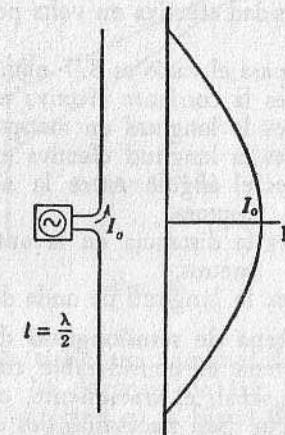


FIG. 62

dadas de cada trozo de la antena. El único factor en la ecuación (394) que varía apreciablemente de un punto a otro de la antena es la intensidad I . Cada componente de radiación es directamente proporcional a la intensidad de corriente en el trozo de donde proviene. Por lo tanto, la radiación recibida de un trozo cercano a los extremos de la antena de la figura 61 es mucho menor que la radiación de una sección de igual longitud cerca del centro. Teniendo en cuenta la distribución de la corriente, la radiación total recibida en cualquier punto, proveniente de la antena de la figura 61, es igual a la radiación que se obtendría de una antena de longitud mitad si fuera posible tener en toda su longitud una intensidad igual a la intensidad I_0 en su centro.

Se dice que una tal antena, como la de la figura 61 —aislada, recta y pequeña comparada con λ —, tiene una longitud equivalente de la mitad de su longitud real. Para calcular la radiación

de la antena que nos interesa usaremos la ecuación (394), pero el valor que sustituiremos en l es el *equivalente* o longitud *efectiva*, igual a la mitad de la longitud real.

En la práctica, la cantidad deseada es el valor medio cuadrático o el valor efectivo del campo en la antena receptora. Esto se puede escribir en función de la longitud efectiva y de la corriente efectiva o raíz del promedio cuadrático en el punto medio de la antena, I_0 , de la siguiente manera:

$$\text{Intensidad efectiva en volts por metro (rms)} = \eta \frac{I_0 l_e}{2r \lambda} \sin \theta \quad (395)$$

η para el vacío es 377 ohmios.

I_0 es la corriente efectiva en el punto medio (rms).

l es la longitud en metros de la antena recta y aislada.

l_e es la longitud efectiva en metros (si $l \ll \lambda$, $l_e = 0,5l$).

θ es el ángulo entre la antena transmisora y la antena receptora.

r es la distancia de la antena receptora a la transmisora, en metros.

λ es la longitud de onda de la señal en metros.

Antena de semilongitud de onda. — Cuando la longitud de la antena es considerable comparada con la longitud de onda de la señal, el tratamiento, como si fuera una antena corta, es inexacto. Son necesarias dos correcciones.

Primero, si la longitud de la antena es comparable a la longitud de onda, la intensidad en la antena no va a ser proporcional a la distancia al extremo. Una antena actúa como una línea de transmisión de circuito abierto con capacitancia distribuida; si es pequeña, la distribución de corriente es fundamentalmente lineal, como en la figura 61, pero si la antena es más larga, esta aproximación no es satisfactoria. Suponiendo que la capacitancia esté uniformemente distribuida en la antena (una hipótesis que no es precisa, pero suficientemente buena y bastante generalmente aceptada), la corriente es proporcional al seno de la distancia al extremo de la antena. Como ejemplo, la figura 62 muestra la distribución de corriente en una línea que tiene una longitud igual a la semilongitud de onda; suponiendo que la intensidad en el medio de la antena es I_0 , la amplitud de la corriente I a una distancia x del centro de la antena es:

$$I = I_0 \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \quad (396)$$

Una antena receptora a alguna distancia recibe una componente de la señal de cada sección pequeña de la antena de la figura 62, y la intensidad de cada componente será proporcional al valor de I en el correspondiente trozo de antena.

Resulta una complicación por el hecho de que las diferentes componentes de la señal pueden no estar en fase entre sí cuando llegan a la antena receptora.

Consideremos que la antena receptora esté en un punto como el p de la figura 63. La distancia r_e en la figura es menor que r , de modo que la radiación que se propaga a lo largo de r tiene un cierto retraso al llegar a p con respecto a la radiación que se propaga por r_e .

Debemos introducir estas consideraciones en la ecuación (394). Un trozo pequeño de antena de longitud dx , ubicado a una distancia x del punto medio, tiene una amplitud de corriente dada por la ecuación (396). La distancia de este trozo de antena al punto de observación p es, como en la figura 63, r_e . El campo eléctrico total recibido en p , debido a la antena, se encuentra integrando la ecuación (394) a lo largo de la longitud de la antena, desde $x = -\lambda/4$ hasta $x = +\lambda/4$:

$$E_\theta = \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \frac{\eta I_0 \sin \theta_e}{2r_e \lambda} \cos \left(2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \cos \omega \left(t - \frac{r_e}{c} \right) dx \quad (397)$$

Aquí, como en la figura 63, r_e es la distancia del elemento recorrido por la corriente al punto en el cual se mide la intensidad del campo; r es la distancia del origen de coordenadas al punto medio de la antena. Como estamos interesados en el campo eléctrico a distancias mayores que algunas longitudes de onda, la diferencia entre r y r_e que aparece en el denominador es despreciable. Pero en el término coseno la distinción entre r y r_e es esencial, pues es la diferencia que determina la relación de fase entre las radiaciones de distintos trozos de la antena; $r - r_e$ puede no ser despreciable comparada con λ , aunque es ciertamente despreciable comparada con r . Es bastante satisfactorio sustituir en el

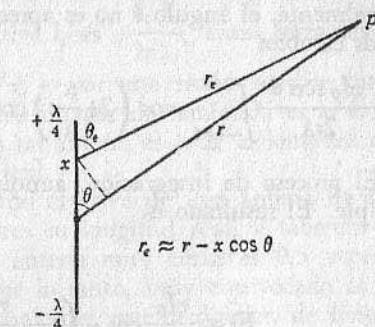


FIG. 63

denominador r_e por r , pero en la relación de fase es necesario usar una aproximación que no puede tener un error mayor que una pequeña fracción de longitud de onda. Refiriéndonos nuevamente a la figura 63, vemos que una buena aproximación es

$$r_e = r - x \cos \theta \quad (398)$$

Finalmente, el ángulo θ no es apreciablemente distinto de θ_e . Con estos cambios

$$E_\theta = \frac{\eta I_0 \sin \theta}{2r\lambda} \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} + \frac{x \cos \theta}{c}\right) dx \quad (399)$$

El proceso de integración, aunque algo largo, es esencialmente simple. El resultado es

$$E_\theta = \frac{\eta I_0}{2\pi r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c}\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \quad (400)$$

Las otras componentes del campo eléctrico son, por supuesto, nulas, igual que para una antena corta.

El campo magnético es perpendicular al eléctrico (ya que lo es para cada trozo elemental de la antena), y la relación entre ambos es la impedancia intrínseca. Se obtiene:

$$H_\phi = \frac{I_0}{2\pi r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c}\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \quad (401)$$

Las otras componentes de campo magnético son nulas. En las ecuaciones (400) y (401) los símbolos y unidades son las mismas que en la ecuación (395), y H_ϕ se mide en amperes por metro (o en amperes-vuelta).

Las ecuaciones (400) y (401) son válidas sólo para antenas cuya longitud es de una semilongitud de onda. El método usado para deducir esas ecuaciones se puede extender fácilmente a antenas de cualquier longitud. En ese caso se usa una expresión más general que la (396) para la distribución de corriente. Sin embargo, desde el punto de vista teórico y del práctico, la antena de semionda es un ejemplo muy interesante de antena larga y es el único que será tratado en detalle.

Es interesante comparar la ecuación (400) para una antena dipolar de semionda con la ecuación (395) para una antena corta. El campo efectivo (raíz del promedio cuadrático) en cualquier punto de un plano normal a la antena (para el cual $\theta = 90$ grados) es, para una antena dipolar de semionda, $\eta \frac{I_0}{2\pi r}$.

Para una antena corta de longitud efectiva l_e es $\eta \frac{I_0 l_e}{2r\lambda}$. Estas fórmulas dan el mismo resultado si $l_e = \lambda/\pi$, y por esta razón se dice que la longitud efectiva de una antena dipolar de semionda es λ/π . Como la longitud actual de una tal antena es $\lambda/2$, la longitud efectiva es $2/\pi$ veces la longitud real.

Esto nos dice que la longitud efectiva de una antena de semionda es $2/\pi$, o sea 0,637 veces su longitud real, y sabemos que la longitud efectiva de una antena muy corta es 0,5 veces su longitud real. No se está, por lo tanto, muy equivocado al estimar la longitud efectiva de cualquier antena dipolar, de longitud más corta que una semionda, como igual a cinco o seis décimas de la real longitud.

Diagrama polar de radiación. — La longitud efectiva da una idea de la intensidad del campo sólo en una dirección normal. Para comparar la distribución de radiación de un dipolo de semionda con la de una antena corta en otras direcciones, es útil el "diagrama polar de radiación". Se trazan vectores radialmente a partir de un punto (véase la figura 64), siendo la longitud de cada vector proporcional a la intensidad del campo a una distancia dada de la antena en la dirección indicada por el vector. Una curva que une los extremos de los vectores es un diagrama polar de radiación. Frecuentemente se representa la intensidad del campo en microvoltios por metro a una distancia de una milla.

La radiación normal a la antena es igual en todas direcciones, ya se trate de una antena corta o de un dipolo de semionda. El modelo de radiación en un plano normal es, por lo tanto, un círculo, como en la figura 64a.

El modelo de radiación para una antena corta en un plano que contiene a la antena se representa por la línea gruesa de la figura 64b. El máximo de radiación es normal a la antena, y la radiación en la dirección del eje de la antena es cero. La radiación en otras direcciones es proporcional al seno del ángulo que hace con el eje, como en la ecuación (395), de modo que

el diagrama se compone de un par de círculos como los que se indican en la figura.

Es, a veces, útil suponer que las figuras 64a y b sean secciones transversales de una superficie sólida semejante a un toro. Una tal superficie es el modelo de radiación completo tridimensional.

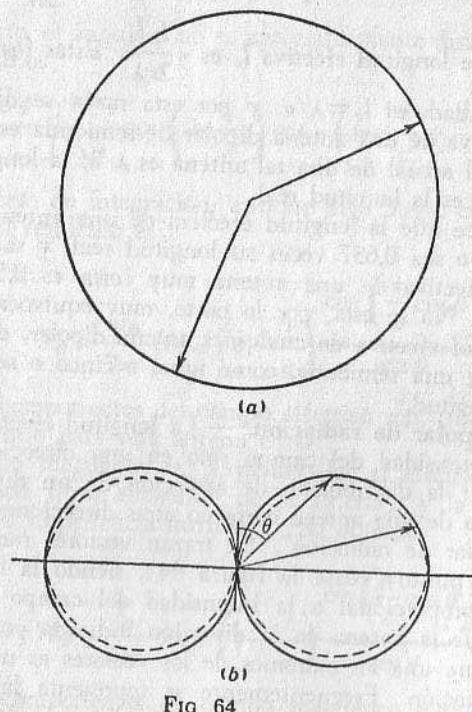


FIG. 64

El modelo de radiación de una antena dipolar es sorprendentemente parecido. La función trigonométrica peculiar que aparece en el numerador de la ecuación (400) es numéricamente similar a $\sin^2 \theta$; esta función, dividida por $\sin \theta$, no es, por lo tanto, muy diferente de $\sin \theta$, que es el término correspondiente de la ecuación (394). El modelo de radiación de una antena dipolo de semionda se muestra en la figura 64 por una línea punteada, ajustando la escala de tal manera que la radiación normal a la antena sea igual a la radiación normal de una antena corta.

Puesto que el modelo de radiación del dipolo de semionda está dentro del de la antena corta, se deduce que para tener la misma intensidad de campo en la dirección normal a la antena es necesario emitir menos energía con la antena dipolar de semionda que con una antena corta. Es interesante, a veces, trazar los diagramas suponiendo igual energía emitida, más bien que igual intensidad normal. La emisión normal de una antena de semionda es alrededor del seis por ciento mayor que la de una antena corta que emita igual potencia. Así se obtiene un cierto grado de directividad.

Potencia emitida. — Es a menudo de interés la potencia total emitida por una antena. Hay varias maneras de calcular la potencia emitida, pero todas implican el vector de Poynting. Como un ejemplo básico y sencillo, calcularemos la potencia de la antena corta de la ecuación (394).

La energía es emitida por la antena por medio del campo de radiación, y no por medio del campo de inducción. Considerando sólo la componente de radiación, el vector de Poynting es radial, y como está en la dirección de $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$, está dirigido hacia afuera. La energía total llevada por la onda progresiva de radiación se encuentra integrando el vector de Poynting sobre una superficie esférica de radio muy grande por centro en el origen. A causa de la simetría de la onda esférica, esta integración es muy sencilla y da:

$$\begin{aligned} \int \mathbf{P} \cdot d\mathbf{a} &= \int (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{a} \\ &= \int \eta \left[\frac{Il \sin \theta}{2r\lambda} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]^2 (2\pi r^2 \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{\eta \pi l^2 l^2 \cos^2 \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}{2\lambda^2} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \\ &= \frac{2\eta \pi l^2 l^2}{3\lambda^2} \cos^2 \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \end{aligned} \quad (402)$$

El vector de Poynting es una función del tiempo que varía como el cuadrado del coseno. En muchos casos se necesita la potencia media de la onda emitida y, como el valor medio del coseno al

cuadrado es $\frac{1}{2}$, se deduce que la potencia media emitida por una antena corta aislada con distribución uniforme de corriente es:

$$\text{Potencia media} = \frac{\eta\pi I^2 l^2}{3\lambda^2} \quad (403)$$

Resistencia de radiación. — Es un término que se define como la potencia media emitida dividida por el cuadrado del valor efectivo de la intensidad de corriente en la antena. En la ecuación (403) I es el valor **máximo** de la corriente; el cuadrado de la intensidad efectiva es $\frac{1}{2}I^2$, de modo que la resistencia de radiación de una antena corta es:

$$\frac{2\pi\eta l^2}{3\lambda^2} \quad (404)$$

Esta fórmula se deduce para un dipolo teórico y se puede aplicar a una antena corta dipolar si se usa la longitud equivalente l_e en lugar de l . Si introducimos el valor η para el vacío, la resistencia de radiación de una antena dipolar corta de longitud equivalente l_e es:

$$789 \left(\frac{l_e}{\lambda} \right)^2 \text{ohmios} \quad (405)$$

Esta fórmula no es, sin embargo, correcta para un dipolo de semionda, ni tampoco para cualquier antena con un diagrama de radiación apreciablemente distinto del de un dipolo, aun cuando se use la longitud equivalente.

Para encontrar la resistencia de radiación de un dipolo de semionda, o de cualquier otra antena, se sustituyen en la ecuación (402) las funciones apropiadas para \mathbf{E} y \mathbf{H} . Para la antena bipolar de semionda se podrían usar \mathbf{E} y \mathbf{H} de las ecuaciones (400) y (401). El resultado es sencillo, aunque los cálculos son algo complicados. La **resistencia de radiación de una antena bipolar de semionda, para cualquier frecuencia**, es 73,1 ohmios.

Antenas sin contacto a tierra. — Prácticamente, las antenas no están aisladas en el espacio; la superficie de la tierra rara vez está lejos. Las antenas de operación en las transmisoras comunes o de frecuencias más bajas son usualmente verticales y aprovechan la presencia de tierra para doblar su longitud efectiva. Las antenas de alta frecuencia, por otra parte, son comúnmente dipolos horizo-

tales a alguna distancia de tierra, y la señal recibida en cada instante consiste en la radiación reflejada en la tierra y en la recibida directamente. La radiación reflejada en la tierra puede ser ventajosa o desventajosa, dependiendo de las dimensiones.

Consideremos primero una antena horizontal a una distancia h_1 sobre tierra, como en la fig. 65, junto con una antena receptora que está a una altura h_2 . En la antena receptora hay un campo total que comprende la radiación recibida directamente y la recibida después de la reflexión en tierra. La radiación está pola-

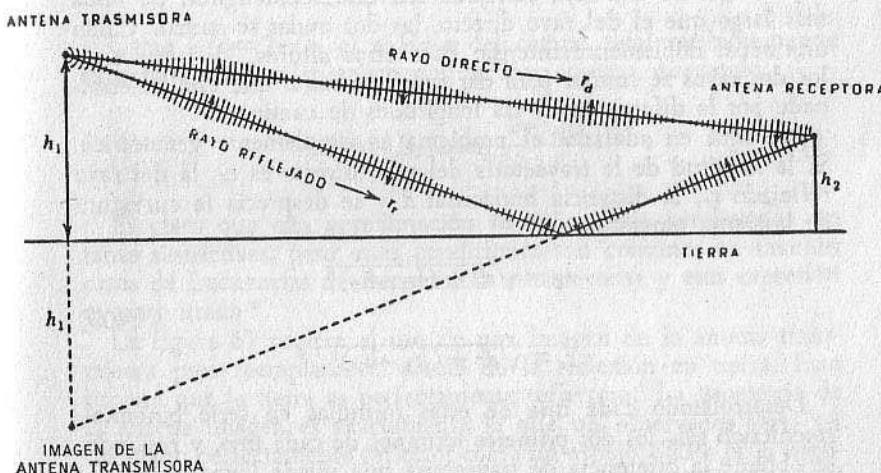


FIG. 65

rizada horizontalmente (la representación gráfica de la intensidad del campo puede tomarse, si se desea, como representando la componente magnética de la onda).

Debido a que la radiación reflejada recorre mayor camino y a causa del corrimiento de fase que resulta de la reflexión, las dos componentes no llegan en fase.

En el capítulo X nos ocupamos de la reflexión oblicua en la superficie de un aislador imperfecto tal como la tierra. Obtuvimos una expresión general para el coeficiente de reflexión de una onda horizontalmente polarizada. Se mostró que el coeficiente de reflexión de una onda horizontalmente polarizada en la superficie de tierra común no difería mucho de -1 y que cuando la onda

incidía en forma casi rasante, el valor -1 era casi exactamente correcto. Esto significa que, si las alturas de las antenas son pequeñas comparadas con la distancia, el rayo reflejado en la fig. 65 invertirá su fase por reflexión, pero su amplitud no disminuirá.

Si la longitud de la trayectoria seguida por el rayo reflejado fuera la misma que la de un rayo directo, las dos componentes llegarían justamente en oposición de fase a la antena receptora y se anularían recíprocamente. No se recibiría ninguna señal. Se presentaría esta situación desafortunada si h_1 o h_2 fuera muy pequeño. Pero si las antenas son lo suficientemente altas como para que el camino del rayo reflejado sea una semilongitud de onda más largo que el del rayo directo, las dos ondas se suman y dan una señal doblemente intensa. Para otras alturas, los campos de los dos rayos se suman para dar uno resultante que está determinado por la diferencia de las longitudes de camino.

De aquí en adelante el problema es simplemente geométrico. Si la longitud de la trayectoria del rayo directo es r_d , la del rayo reflejado r_r , la distancia horizontal d y se desprecia la curvatura de la tierra, tenemos:

$$r_d = \sqrt{d^2 + (h_1 - h_2)^2} \quad (406)$$

$$r_r = \sqrt{d^2 + (h_1 + h_2)^2}$$

Desarrollando cada una de estas fórmulas en serie binomial, reteniendo sólo los dos primeros términos de cada uno, y restando, se obtiene la diferencia de trayectoria que puede llamarse Δr :

$$\Delta r = r_r - r_d \approx \frac{2h_1h_2}{d} \quad (407)$$

La intensidad de la señal del rayo directo está dada por:

$$E_d = \frac{\eta I l \sin \theta}{2r_d \lambda} \cos \omega \left(t - \frac{r_d}{c} \right) \quad (408)$$

Considerando las inversiones de fase después de cada reflexión, el rayo reflejado es:

$$E_r = -\frac{\eta I l \sin \theta}{2r_r \lambda} \cos \omega \left(t - \frac{r_r}{c} \right) \quad (409)$$

La diferencia entre r_d y r_r en el coeficiente es despreciable, y sumando la componente directa y la reflejada, se obtiene:

$$E = \frac{\eta I l \sin \theta}{2r \lambda} \left[\cos \omega \left(t - \frac{r_d}{c} \right) - \cos \omega \left(t - \frac{r_r}{c} \right) \right] \quad (410)$$

Un cambio trigonométrico no introduce ulteriores aproximaciones:

$$E = \frac{\eta I l \sin \theta}{2r \lambda} \left[2 \sin \omega \left(\frac{\Delta r}{2c} \right) \sin \omega \left(t - \frac{r_d}{c} - \frac{\Delta r}{2c} \right) \right] \quad (411)$$

Como $\omega/c = 2\pi/\lambda$, el módulo del campo total recibido puede expresarse en función solamente del rayo directo, quedando:

$$|E| = |E_d| 2 \sin \frac{2\pi h_1 h_2}{\lambda d} \quad (412)$$

Es claro que esta aproximación se aplica bajo condiciones un tanto restrictivas, pero estas condiciones son comunes en muchos casos de frecuencias de transmisión ultraelevadas y esta expresión es muy usada*.

La figura 65 sugiere el uso de una imagen de la antena transmisora para reemplazar el efecto de la reflexión en tierra. Esto supone que la tierra es perfectamente reflectora. La geometría de la antena imagen es exactamente lo que un observador vería en un plano perfectamente reflector como un espejo. (Esto es lo natural cuando se supone que un espejo es un plano reflector, y el principio general que un espejo produce una imagen es igualmente válido para ondas luminosas como para ondas de radio.) Pero, a causa de la inversión de fase, la intensidad eléctrica y la carga que se deben suponer en la antena imagen son exactamente opuestas a la intensidad y carga que un observador vería (si la intensidad y la carga fueran visibles) al mirar en el espejo. Esta es una regla general para antenas de cualquier configuración por encima de una superficie perfectamente reflectora. Es evidente en la figura 65 y se puede extender a dispositivos más complicados considerando los rayos reflejados.

* Véase, para este caso y para muchas otras aplicaciones de antenas, *Radio Engineers' Handbook*, F. E. Terman, McGraw-Hill Book Co., New York, 1943, Secciones 10 y 11.

Prácticamente, no es deseable tener antenas horizontales demasiado bajas. La ecuación (412) da la amplitud del campo total en una antena receptora en función del campo E_d que existiría si no hubiera reflexión. La intensidad de E_d , rayo directo, varía inversamente a la distancia. Para alturas de antenas relativamente pequeñas, el campo total E es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Por lo tanto, si la altura de la antena y otros factores quedan constantes, la energía recibida varía en forma inversa a la cuarta potencia de la distancia. Esto es cierto si $h_1 h_2$ es mucho menor que $4\lambda d$, lo que expresa claramente una circunstancia desfavorable.

El alcance del radar para detectar blancos bajos está fuertemente influído por este efecto de anulación de las señales por reflexión en tierra. Si la energía reirradiada por un blanco es proporcional a la energía que incide sobre el mismo, y si la energía en el blanco es inversamente proporcional a la cuarta potencia de su distancia al transmisor, la energía reflejada hacia el punto de transmisión es inversamente proporcional a la octava potencia de la distancia. (Esta es una primera aproximación para un blanco bajo a una distancia de algunos kilómetros y una longitud de onda de decímetros o más, y se supone una superficie terrestre lo suficientemente plana o la superficie del mar donde la reflexión sea especular y no simplemente difusa.)

Antena con toma de tierra. — Se usan a menudo antenas verticales con un voltaje aplicado entre la base de la misma y tierra. Tales antenas se usan para frecuencias inferiores a unos pocos megaciclos. La radiación recibida en cualquier punto distante, como el P de la fig. 66, comprende una componente directa y una reflejada. Si la reflexión en tierra fuera perfecta, con una inversión de fase completa, podríamos considerar que el rayo reflejado viene de una antena imagen, como se discutió antes. El problema de la radiación de una antena y su imagen es más simple que el problema de una antena y un plano reflector.

La reflexión en la superficie de la tierra no es perfecta, pero es bastante buena para ciertos valores prácticos típicos de la frecuencia y conductividad. En un capítulo anterior consideramos la reflexión de ondas horizontalmente polarizadas. La radiación de una antena vertical está verticalmente polarizada (o, más exactamente, polarizada en un plano vertical que contiene al rayo) y sus características de reflexión son diferentes, como veremos en seguida.

Si la tierra fuera un conductor perfecto, el coeficiente de reflexión sería -1 para todos los ángulos de incidencia, porque la suma de las componentes tangenciales del campo eléctrico de la onda incidente y de la reflejada tiene que ser cero. Esto es, la componente horizontal del campo eléctrico (véase fig. 66) se inver-

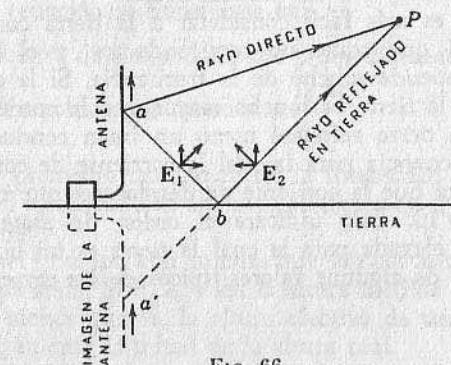


FIG. 66

tiría completamente por reflexión; la componente vertical no sería invertida; se ve en el diagrama que es necesario que la componente vertical no se modifique al invertirse la fase de la onda horizontal.

Si, por otra parte, la tierra fuera un dieléctrico perfecto, la onda reflejada sería menos intensa que la incidente. El módulo del coeficiente de reflexión dependería mucho del ángulo de incidencia. En efecto, a un cierto ángulo, conocido como ángulo de Brewster, toda la energía incidente en la superficie penetra al dieléctrico, y la reflexión sería nula. Si existe o no una inversión de fase del rayo reflejado depende de que el ángulo de incidencia sea mayor o menor que dicho ángulo de Brewster. Análogamente a la ecuación (364), no es difícil deducir para una tal onda, polarizada en lo que se llama plano de incidencia, el siguiente coeficiente de reflexión:

$$\frac{E_{t2}}{E_{t1}} = \frac{\eta_3 \operatorname{sen} \psi_3 - \eta_1 \operatorname{sen} \psi_1}{\eta_3 \operatorname{sen} \psi_3 + \eta_1 \operatorname{sen} \psi_1} \quad (413)$$

E_{t1} y E_{t2} son las componentes tangenciales de las ondas incidente y reflejada; η_1 y η_3 son impedancias intrínsecas en el medio

de las ondas incidente y refractada; ψ_1 y ψ_3 son los ángulos entre los rayos incidente y refractado, respectivamente, con la superficie de reflexión. (Se notará nuevamente que los ángulos que convencionalmente se toman como de incidencia y reflexión son los complementarios de éstos.) La ecuación (413) es aplicable ya sea a un medio dieléctrico o a un semiconductor.

Claramente, es más fácil considerar a la tierra como un conductor perfecto que como un semiconductor, y el que esto se pueda hacer depende mucho de la frecuencia. Si la corriente de conducción en la tierra es mucho mayor que la corriente de desplazamiento, la tierra reflejará como un buen conductor. Determinemos la frecuencia para la cual la corriente de conducción es diez veces mayor que la corriente de desplazamiento; esto es, para la cual $\gamma/\omega\epsilon = 10$. Esto indicará el orden de magnitud de la frecuencia más elevada para la cual la tierra es un buen conductor. La tabla V da algunos valores típicos de las características de

TABLA V
CARACTERÍSTICAS DE LA TIERRA

	Constante dieléctrica relativa, κ	Resistividad en ohmios metros, $1/\gamma$
Agua de mar	81	0,20-0,25
Agua dulce	81	50-1000
Pantano de agua dulce	15-25	10-100
Suelo húmedo, rico, de pastoreo	12-15	50-250
Suelo seco, rocoso, arenoso	10-14	500-1000
Roca firme	5-10	1000 y más

la tierra. Usando estos valores vemos que el agua de mar no refleja como un buen conductor por encima de 90 megaciclos; la tierra húmeda típica, más allá de un megaciclo; el suelo húmedo arenoso por encima de unos 200 kilociclos. Estos valores dan una indicación un tanto grosera del dominio de frecuencia al cual se aplica la siguiente discusión, basada en la hipótesis de tierra perfectamente conductora. A mayores frecuencias la hipótesis de reflexión perfecta puede o no introducir serios errores, dependiendo ello de la constante dieléctrica, del ángulo de incidencia y (lo más importante) del uso que se debe hacer de los datos.

Si la antena es una antena vertical única corta sobre tierra, per-

fectamente reflectora, da un diagrama polar de radiación por encima de la tierra exactamente igual al de una antena dipolar consistente en la antena real y su imagen. La ecuación (395), por lo tanto, se aplica a este caso, y como la altura efectiva h_e de la antena sobre tierra es la mitad de la longitud efectiva de la combinación antena-más-imagen, esa ecuación se transforma en:

Intensidad efectiva de campo (raíz del promedio cuadrático)

$$\text{en voltios por metro} = \eta \frac{I_0 h_e}{r \lambda} \quad (414)$$

I_0 es la raíz del promedio cuadrático de la intensidad en la base de la antena, y el significado de los otros símbolos es el que tenían en la ecuación (395).

La ecuación (414) se usa con antenas que son cortas comparadas con la longitud de onda. Si h/λ , o sea la altura medida en longitudes de onda, es menor que $1/6$, la altura efectiva de un conductor vertical es prácticamente la mitad de la altura real.

Sería evidentemente ventajoso aumentar la altura efectiva de la antena. Esto se hace aumentando la capacitancia en su extremo superior, aumentando con ello la intensidad total de corriente y mejorando su distribución. Una capacidad suficiente en el extremo superior de la antena hará que la intensidad sea prácticamente uniforme, y la altura efectiva será entonces igual a la altura real. Aun cuando la intensidad en la base de la antena no fuera aumentada, esto duplicaría la intensidad del campo de radiación y multiplicaría por cuatro la energía emitida.

Cualquier superficie de metal grande en el extremo superior de la antena daría la capacitancia adicional necesaria. Un método muy común es usar una antena de "tope" chato conectando el conductor vertical a uno o más conductores horizontales en forma de T o en forma de L invertida. El propósito primario de los conductores horizontales es el de aumentar la capacitancia y con eso aumentar la intensidad de corriente en el conductor vertical. Hay alguna emisión en los alambres horizontales, pero ésta es incidental y puede ser despreciada. La ecuación (414) se aplica a tal antena con h_e igual a la altura real si la longitud total del conductor horizontal es varias veces la altura.

La resistencia de radiación de una antena sobre tierra difiere de la de una antena dipolar, porque aunque hay alguna energía emitida en el hemisferio superior a la superficie terrestre, no hay ninguna hacia abajo. La energía total irradiada es la mitad y la

resistencia de radiación es, por lo tanto, mitad. Escribiendo $2h_e$ en lugar de l_e en la ecuación (405) y dividiendo por 2 a causa de que la energía es la mitad, se obtiene la resistencia de radiación de una antena corta vertical o de una antena de tope chato de longitud equivalente a h_e por encima de la tierra:

$$\text{Resistencia de radiación} = 1578 \left(\frac{h_e}{\lambda} \right)^2 \text{ ohmios} \quad (415)$$

Esta fórmula, en efecto, es una buena aproximación para una antena vertical de longitud igual a un cuarto de longitud de onda si se usa la correspondiente altura equivalente.

Los diagramas polares de radiación de antenas a tierra son, por supuesto, similares a los de antenas dipolares de longitud doble. Por lo tanto, las líneas gruesas de la fig. 64 se aplican a una antena vertical corta por encima de tierra y son muy aproximadas para una antena de tope chato. La parte inferior de la fig. 64b no tiene sentido para una antena con toma de tierra, pues se referiría a una región por debajo de la superficie terrestre. Análogamente, las líneas punteadas de la fig. 64 muestran el diagrama polar de radiación de una antena recta vertical de longitud igual a un cuarto de longitud de onda. Hasta esta altura, el diagrama polar de radiación no difiere del de una antena corta.

Sin embargo, si la longitud de la antena sin tierra es mucho mayor que un cuarto de longitud de onda, el diagrama polar de radiación se modifica radicalmente. Hasta una altura de seis décimos de longitud de onda la radiación horizontal aumenta, y el diagrama polar de radiación se hace una espira larga y achatada, más bien que un semicírculo. Antenas todavía más largas emiten hacia arriba con un cierto ángulo, con una onda de tierra relativamente pequeña. La elección apropiada de la altura (particularmente por razones económicas) es muy importante en el diseño de antenas.

Sistema de antenas. — Cuando se usa un conjunto de antenas emisoras, es a menudo posible obtener una buena aproximación por superposición de los campos de cada elemento emisor. Por ejemplo, dos antenas verticales que se excitan en cuadratura temporal y separadas por una distancia de un cuarto de longitud de onda, como en la fig. 67, emiten en la dirección de la antena adelantada a la atrasada, pero no en la dirección opuesta. La razón de esto está en que una onda que se propaga de la antena adelantada a la atrasada se refuerza por la onda que emite la segunda,

pues el cuarto de onda de adelante que lleva se compensa por el camino recorrido, mientras que la onda que se propaga de la atrasada a la adelantada va a estar desfasada en un semicírculo con la onda que sale de esta última, y, por lo tanto, la intensidad del campo resultante (a una distancia considerable) en esa dirección será cero. Esta es sólo una de las muchas maneras de disponer un

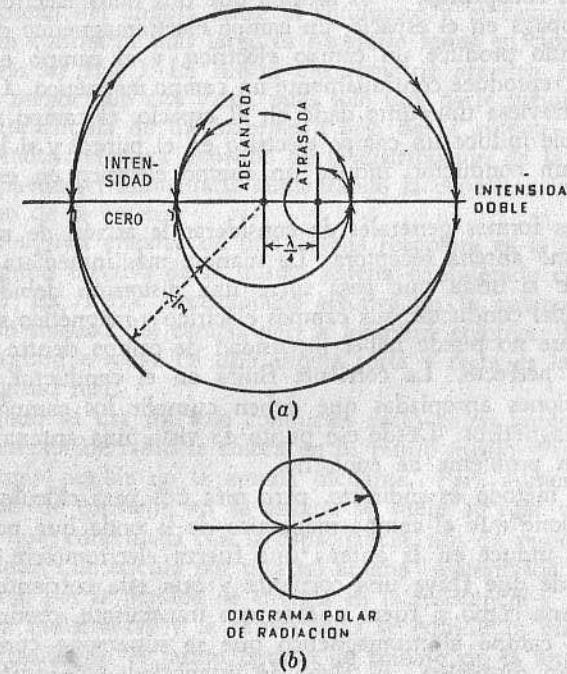


FIG. 67

conjunto de antenas de importancia práctica para obtener el diagrama polar de radiación deseado*.

Un diagrama de radiación de particular interés es el que tiene un haz concentrado como un buscador, con una pequeña dispersión de energía en otras direcciones. Un haz agudo se puede

* Una discusión sobre antenas de radio, para lo cual este capítulo da las bases teóricas, se encontrará en el Capítulo 14 de *Radio Engineering* (tercera edición), por F. E. Terman, McGraw-Hill Book Co., New York, 1947.

obtener usando un gran número de elementos emisores. Si los elementos emisores son lo suficientemente numerosos y cercanos, de modo que formen una superficie conductora, se hacen equivalentes a un espejo. En efecto, un solo emisor en el foco de un espejo se puede usar para mejorar la dirección con ondas cortas de radio, así como con ondas luminosas aun más cortas.

Antenas receptoras. — A medida que una onda electromagnética se propaga en el espacio, un campo electromagnético de cambio continuo produce un campo eléctrico, y el campo eléctrico resultante reproduce continuamente un campo magnético. Cuando la onda atraviesa un punto dado en el espacio, el campo magnético variable induce un campo eléctrico en el punto, y si la onda atraviesa un conductor, induce un campo eléctrico en ese conductor.

Hay dos formas generales de considerar la acción de un conductor como antena receptora. La manera más inmediata es observar que la onda que pasa sufre una distorsión debido a la presencia del conductor; sus campos eléctrico y magnético se debilitan porque no puede haber intensidad de campo dentro de un conductor perfecto. La corriente fluirá en el conductor, dando las condiciones apropiadas que deben cumplir los campos eléctricos y magnéticos. Desde ese punto de vista, una antena receptora es un problema de contorno.

El otro método es indirecto, pero más útil para cálculos prácticos. Supone que el campo magnético de la onda que pasa, sin distorsión, induce en la antena una fuerza electromotriz, con el resultado de que fluye una corriente y que esta corriente actúa en la antena como si fuera una antena transmisora, produciendo un nuevo campo electromagnético que se superpone con el de la onda sin distorsión. El flujo de intensidad está limitado en este caso por la capacitancia e inductancia del conductor y por su resistencia (pérdida de resistencia) y por su "resistencia de radiación". El problema se transforma en un problema de circuitos y es mucho más fácil de tratar.

Para discutirlo vamos a dividir a las antenas receptoras de radio en tres clases, aunque tal clasificación es bastante arbitraria. Vamos a considerar primero un conductor recto, aislado de tierra. La corriente que circula en ese conductor es una corriente de carga que va de extremo a extremo, limitada por la capacitancia relativa de un extremo con respecto al otro. El conductor mostrado en la figura 45, página 127, es un ejemplo, y en el campo

magnético alterno de la onda habrá una corriente alterna que va de un extremo a otro de la antena con la misma frecuencia de la onda.

La fuerza electromotriz inducida en todo el conductor recto, que es corto comparado con la longitud de onda, es el producto de la longitud del conductor, la intensidad eléctrica de la onda y el coseno del ángulo entre el conductor y el campo eléctrico. (En un conductor más largo es necesario tener en cuenta las diferencias de fase.) La fuerza electromotriz *efectiva* es, sin embargo, menor que este valor, pues sólo una parte infinitesimal de corriente circula de un extremo a otro de la antena. La fuerza electromotriz efectiva depende de la distribución de la capacitancia y puede ser aumentada aumentando la capacitancia cerca del extremo de la antena.

La *longitud efectiva* de una antena receptora es la misma que la longitud efectiva de la misma antena considerada como transmisora. La fuerza electromotriz efectiva en la antena receptora es la intensidad del campo por la longitud efectiva: $V = E \cdot l_e$. La longitud efectiva de una antena corta y recta es la mitad de su longitud real.

Cuando se usa un solo conductor recto como antena, el aparato receptor de radio se coloca en su punto medio y sustrae toda la energía posible de la antena oscilante. Para aumentar la intensidad de corriente en la antena se suele agregar una inductancia que, combinada con la capacitancia, nos da resonancia. La intensidad que circula por una tal antena "sintonizada" está limitada sólo por la pérdida de energía en la resistencia y la emitida, pues la inductancia y la capacitancia se equilibran entre sí. La sintonización da el punto óptimo de trabajo de la antena. Una antena sintonizada puede considerarse como un circuito oscilante: el voltaje entre sus extremos puede ser mucho mayor que la fuerza electromotriz inducida por la onda que pasa, pues la fuerza electromotriz inducida es sólo suficiente para mantener la oscilación natural de la intensidad de corriente. Una antena de longitud igual a una semionda está naturalmente sintonizada sin el agregado de inductancia, pues la inductancia distribuida del conductor equilibra justamente su capacitancia distribuida.

Para cálculos prácticos es posible idear un circuito equivalente, en el cual un voltaje equivalente (que representa la fuerza electromotriz equivalente de la antena) genera corriente a través de la impedancia de carga equivalente en serie con la impedancia

del aparato receptor *. El proyecto de una antena está basado en un circuito equivalente de este tipo:

Consideraremos ahora el caso de una antena de la forma de un conductor recto vertical con un extremo conectado a tierra. Este es el tipo más común de antenas receptoras. Recibe la componente de una onda polarizada con su campo eléctrico vertical. No es direccional en un plano horizontal, pues las características direccionales de una antena receptora son las mismas que las de la misma antena usada como transmisora. Esto se deduce del *teorema de reciprocidad* **.

El funcionamiento de una antena con toma de tierra no es fundamentalmente distinto del de una antena aislada de longitud doble. La intensidad está limitada por la capacitancia antena-tierra, y la mayor capacitancia de una antena a tierra compensa la menor fuerza electromotriz inducida en su menor longitud. El valor efectivo de la fuerza electromotriz se aumenta y la impedancia de la antena a tierra disminuye si una parte relativamente grande de la capacitancia con tierra está cerca del extremo superior de la antena; esto se obtiene a menudo conectando conductores horizontales en paralelo en dicho extremo del conductor vertical.

Una antena de cuadro es el tercer tipo que vamos a discutir. Su funcionamiento no es esencialmente distinto, excepto que la intensidad de corriente en el cuadro no está limitada por la capacitancia, sino por la inductancia en serie con el aparato receptor. La fuerza electromotriz se induce en el cuadro en la misma forma que en cualquier conductor. Se induce debido al campo magnético variable y es igual a la integral del campo eléctrico inducido en el cuadro ***.

Consideremos por simplicidad un cuadro rectangular con dos

* Para una discusión de este tema y otras aplicaciones técnicas véase *Radio Engineering*, F. E. Terman, tercera edición, McGraw-Hill Co., New York, 1947.

** El teorema de reciprocidad dice: las posiciones de un generador sin impedancia y un amperímetro pueden ser intercambiadas sin afectar la lectura en el amperímetro. Este teorema fué aplicado a la radiación por J. R. Carson y otros. Véase, por ejemplo, *Electromagnetics Waves*, S. A. Schelkunoff, D. Van Nostrand Co., New York, 1943, páginas 476-479.

*** Una cuestión que surge muy frecuentemente con referencia a antenas receptoras es la siguiente: ¿Es el voltaje de la antena producido por el campo eléctrico de la onda incidente, por el magnético o por ambos? Esta es una pregunta natural, pero la respuesta es clara cuando se considera que en todo punto del espacio el campo eléctrico de una onda progresiva es el

lados verticales y dos horizontales. La onda que pasa está polarizada con su vector eléctrico vertical. La fuerza electromotriz será inducida por esa onda en los lados verticales del cuadro, pero no habrá ninguna en los horizontales. Si los voltajes inducidos en los dos lados verticales fueran iguales, no habría corriente. Esta condición se cumple cuando el plano del cuadro es paralelo al plano de la onda. Pero si el cuadro gira 90 grados, de modo que su plano sea normal al plano de la onda y paralelo a la dirección de propagación, el voltaje en ambos lados verticales estará algo defasado. La onda incidente llega a un lado del cuadro antes de llegar al otro. La fuerza electromotriz total a lo largo del cuadro será la diferencia de los dos voltajes inducidos y, por lo tanto, distinta de cero. Si el cuadro es pequeño comparado con la longitud de onda de la señal recibida, la fuerza electromotriz inducida en cualquiera de los dos lados verticales es proporcional a la altura; la diferencia de fase entre los voltajes en los miembros verticales es proporcional a la base. La fuerza electromotriz a lo largo de todo el cuadro es proporcional al producto de la altura por la base y, por lo tanto, al área.

resultado de un campo magnético variable. El campo eléctrico inducido en la antena es, análogamente, el resultado de un campo magnético variable, y es indistinto que se considere la fuerza electromotriz como la integral del campo eléctrico de la onda en el espacio (lo que es cierto) o como generado por el campo magnético variable, lo que también es cierto. Esta cuestión es análoga a la pregunta si un corcho que se eleva en la cresta de una onda de agua es levantado por la presión creciente o por el mayor nivel del agua; en un movimiento ondulatorio no puede haber uno sin el otro.

Sin embargo, cuando la antena receptora está cercana a alguna perturbación eléctrica, las condiciones son muy distintas. Cerca de la fuente de la perturbación predomina el campo de inducción, y el campo de radiación es despreciable. El campo de inducción emana de las cargas cercanas, en contraposición con el campo eléctrico de radiación que es producido por un campo magnético variable. Una pantalla electrostática protegerá una antena en forma de espiral contra el *campo de inducción* de las perturbaciones eléctricas cercanas. Pero un blindaje (en la forma usual de un tubo que contiene al conductor de la espira) no va a disminuir apreciablemente la cantidad de flujo magnético que pasa a través de la espira, concatenándose con ella. Si la pantalla protectora pudiera actuar como una espira en corto circuito, reduciría el campo magnético que concatena a la antena, pero los blindajes para esta clase de antenas están ideados con una sección aisladora, de modo que no conduzcan corriente. Por lo tanto, dentro de la pantalla se podrá recibir señales de radio, eliminándose gran parte del ruido de inducción debido a las perturbaciones electromagnéticas cercanas. Otras clases de antenas no pueden ser blindadas, pues su funcionamiento depende de la capacidad con tierra, y ésta sería eliminada por una pantalla.

La misma conclusión se obtiene desde un punto de vista ligeramente diferente, aunque el principio esencial es el mismo; si la fuerza electromotriz inducida se considera proporcional a la derivada temporal del flujo magnético concatenado por el cuadro [ecuación (191)]. Es entonces inmediatamente evidente que el área es un factor de control y que la antena recibe un máximo de señal cuando su plano es normal al campo magnético de la onda.

Las antenas comunes tienen más de una vuelta, y el voltaje inducido es proporcional al número de vueltas. Es bastante simple calcular la diferencia de potencial entre los terminales de una antena de cuadro si se impide el paso de corriente. Pero cuando circula corriente es muy importante la inductancia distribuida; se debe también tener en cuenta la resistencia del conductor y la rerradiación de la antena, así como la impedancia del aparato receptor. Todas estas cantidades, junto con la inductancia de la antena, deben ser calculadas o medidas.

PROBLEMAS

1. Compárese las ecuaciones de este capítulo con las expresiones de la intensidad de campo de radiación en otro libro. Por ejemplo, la ecuación (14-1), capítulo 14, de *Radio Engineering* (tercera edición), por F. E. Terman, o la ecuación (35), capítulo XIX, de *Communication Engineering*, por W. L. Everitt.

2. Una antena alimentada en el centro, aislada, de dos metros de longitud, emite una señal de 20 metros de longitud de onda. La intensidad en el punto medio de la antena es de 100 miliamperes. ¿Cuál es la intensidad del campo emitido a 500 metros de distancia? ¿y a una milla? Usese la dirección de campo máximo.

3. Intégrase la ecuación (399) y obténgase la ecuación (400).

4. Una antena aislada tiene una longitud igual a la longitud de onda. Calcúlese una expresión para el campo de radiación análoga a la ecuación (400). Dibújese el diagrama polar de radiación. ¿Se puede introducir una "longitud efectiva"?

5. Cámbiese la fórmula (395) de modo que quede en función del voltaje y capacitancia (de extremo a extremo) de la antena en lugar de la intensidad. Si el voltaje se mantiene constante a medida que cambia la frecuencia, ¿a qué potencia de la frecuencia es proporcional la energía emitida?

6. En el problema 2, ¿cuál es la potencia emitida por metro cuadrado a una distancia de 500 metros?

7. ¿Cuál es la resistencia de radiación de la antena del problema 2? ¿Qué potencia se está emitiendo?

8. Una antena aislada de semilongitud de onda es excitada en su punto medio. ¿Qué determina el voltaje que se debe aplicar para mantener la corriente de antena necesaria?

9. Una antena dipolar de semionda horizontal está a 30 metros del suelo. Transmite una señal de 1000 megaciclos. La antena receptora está a unas 10 millas de distancia y a una altura de 10 metros. Suponiendo una reflexión perfecta en la superficie de la tierra, ¿qué fracción del rayo directo es la intensidad total de la señal recibida?

10. Las antenas del problema 9 se suben o bajan para obtener un máximo en la intensidad de la señal recibida. Determíñese la altura que ha de usarse. Discúrse la utilidad de tales alturas.

11. ¿Cuál es la resistencia de radiación de una antena recta vertical de un cuarto de longitud de onda de altura, que se eleva de un suelo perfecto? La antena es excitada en la base.

12. Una antena vertical recta tiene una altura de 0,6 de longitud de onda, que se eleva de un suelo perfecto. Calcúlese una expresión para el campo de radiación similar a la ecuación (400). Dibújese el diagrama polar de radiación. ¿Cuál es la "longitud efectiva"? (Nota: Esta altura da la onda de tierra óptima.)

13. Úsese la ecuación (415) para encontrar la resistencia de radiación de una simple antena vertical con una altura de un cuarto de longitud de onda. Úsese una altura efectiva de 0,6 de la altura real. Encuéntrese la resistencia de radiación de una antena similar si la longitud de onda emitida es 5,6 veces su altura. Úsese una altura efectiva de 0,55 veces la altura real. (Véase Ballantine "On the Radiation Resistance of a simple vertical antenna", Proc. Inst. Radio Eng., volumen 12, 1924, páginas 823-832.)

14. Para las antenas del problema 9, ¿cuál es el coeficiente de reflexión si la tierra es de labranza buena? ¿Se justificaría la hipótesis de reflexión perfecta?

15. Repítase el problema 14 para una señal verticalmente polarizada. ¿Existe una inversión de fase de la componente vertical del campo eléctrico en la reflexión? ¿Se justificaría la hipótesis de reflexión perfecta?

16. Una onda que se propaga en el aire con $\lambda = 3,0$ centímetros, incide sobre vidrio, $\kappa = 4,00$. Despréciense las pérdidas y calcúlese el ángulo de Brewster.

17. Una antena de cuadro de un metro cuadrado, con diez vueltas de alambre, se usa para recibir una señal de radio. La señal es transmitida por una antena vertical que se eleva a una altura de 5 metros por encima de tierra. La longitud de onda es de 50 metros. La antena receptora está a diez kilómetros del transmisor y se orienta de modo de tener el máximo de recepción. Está a gran altura de la superficie terrestre. Determíñese la intensidad de la señal en el receptor en microvoltios por metro, y el voltaje en circuito abierto de la antena en microvolts. La intensidad en la base de la antena receptora es de un amper.

CAPÍTULO XIII
GUIAS DE ONDA

Ondas guiadas. — Cuando se emite una onda eléctrica en el vacío, ésta es, naturalmente, una onda esférica, pues se propaga con igual velocidad en todas direcciones. No hay obstáculos y se puede extender libremente desde su origen. La presencia de alguna sustancia afecta su propagación.

La propiedad de una superficie conductora de servir como superficie de contorno a una onda eléctrica se usa en varias clases de guías de onda para dirigir la propagación de ondas eléctricas, así como un tubo acústico evita que el sonido se disperse en el espacio. Una línea de corriente industrial o una línea telefónica son una guía de onda; la superficie del alambre da un contorno sobre el cual puede terminar el campo eléctrico de una onda. La onda se propaga entonces como una onda plana de extremo a extremo del conductor. A causa de la conductividad del conductor, la onda transmitida no se dispersa como una onda esférica, sino que lo hace como una onda plana, dirigiendo su energía según la línea de transmisión.

Para mostrar la necesidad de una superficie de contorno, consideremos la onda plana de la figura 48, página 119. En el capítulo IX describimos a esta onda como extendiéndose sin límites en un plano normal a la dirección de propagación. Una onda no acotada como ésta es satisfactoria desde el punto de vista matemático, pero su energía sería infinita.

Es posible poner hojas delgadas de material perfectamente conductor en la región donde se propaga la onda sin afectar a ésta. Para ello es necesario colocarlas siempre normalmente al campo eléctrico. Si estas hojas conductoras fueran paralelas u oblicuas al campo eléctrico, circularía una corriente en ellas y produciría

distorsión del campo, pero planos conductores normales al campo, como en la figura 68, no lo perturban.

Cuando se colocan superficies conductoras en el campo, las líneas de fuerza eléctricas terminan en las cargas de las superficies, y una onda plana puede propagarse entre tales superficies y estar limitada al espacio entre ellas. No es necesario que la onda se extienda más allá.

Consideremos la superficie inferior de la figura 68. Si existe una onda por encima de ella, pero ninguna por debajo, el campo eléctrico y el magnético deben terminar en ella. El campo eléctrico sólo puede terminar en cargas eléctricas (pues de otro modo su divergencia sería nula), de modo que en dicha superficie debe haber una distribución adecuada de cargas eléctricas. El campo

magnético sólo puede terminar repentinamente en una superficie por la que circula corriente (pues de otro modo su rotor sería nulo). Por lo tanto, debe haber corrientes en la superficie de la figura 68. Estas dos exigencias no son independientes, pues cuando cambia la distribución de las cargas en la superficie, lo que es necesario para

mantener el equilibrio con la onda, su movimiento constituye una corriente. Esto no significa que las cargas circulen tan rápidamente como se propaga la onda (las moléculas del aire que transmiten una onda sonora no se propagan con la velocidad del sonido), sino que las cargas se mueven de las regiones donde la densidad de carga disminuye a donde aumenta.

Si la onda plana se mueve entre las superficies conductoras en forma normal y sin distorsión, las corrientes que circulan por las superficies deben cumplir estas dos condiciones: deben dar, simultáneamente, el rotor necesario para ser límite del campo magnético y dar la distribución apropiada de cargas para ser también límite del campo eléctrico. Veamos cómo es esto posible.

Primero. — Existe una relación definida entre el campo eléctrico y el magnético de una onda, dado por las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (416)$$

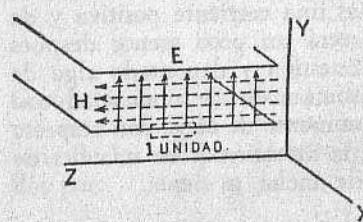


FIG. 68

Si aplicamos esta ecuación a la onda plana de la figura 68, obtenemos:

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\partial D_y}{\partial t} \quad (417)$$

Segundo. — Si σ representa la carga por unidad de área en la superficie inferior de la figura 68, tenemos:

$$\sigma = D_y \quad (418)$$

Si D cambia con el tiempo, lo mismo pasa con la densidad de carga. Consideremos un punto de la superficie conductora en el cual la densidad de carga aumenta; la carga que llega está provista por la corriente paralela al eje X . Si dicha corriente circula en la dirección positiva de las X , es una corriente positiva y da una carga positiva. Su intensidad será un poco menor después de haber pasado por el punto en cuestión y depositado algo de su carga. Cuantitativamente, la disminución de intensidad con respecto a la distancia x es igual al aumento de carga con respecto al tiempo. Si I_x es la intensidad en la dirección X en una tira de la superficie conductora de unidad de ancho, se tiene:

$$-\frac{\partial I_x}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (419)$$

Combinando ésta * con la ecuación 418, la relación necesaria en

* La ecuación (419) es un caso especial de la "ecuación de continuidad", que puede ser deducida de la siguiente manera: de las ecuaciones de Maxwell resulta:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (240)$$

Hallamos la divergencia de cada miembro de esta ecuación: en la izquierda, la divergencia del rotor es idénticamente nula; en la derecha, resulta un término para la divergencia de \mathbf{D} . En lugar de divergencia de \mathbf{D} ponemos $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$. Entonces queda:

$$\nabla \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

de donde:

$$\nabla \cdot \mathbf{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

tre el campo eléctrico variable y la intensidad de corriente es la siguiente:

$$\frac{\partial D_y}{\partial t} = -\frac{\partial I_x}{\partial x} \quad (420)$$

Esta ecuación nos da la intensidad necesaria para limitar el campo eléctrico.

Tercero. — La intensidad en la superficie conductora de la figura 68 debe estar relacionada con la intensidad del campo magnético paralelo a la superficie. Como en la ecuación (320)

$$H_z = I_x \quad (421)$$

Por diferenciación:

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\partial I_x}{\partial x} \quad (422)$$

Comparando la ecuación (422) con la (420), resulta que la misma intensidad de corriente satisfará ambas exigencias de ser límite de los campos eléctrico y magnético si éstos están relacionados por:

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{\partial D_y}{\partial t} \quad (423)$$

Pero los campos eléctrico y magnético cumplen siempre esta relación, pues es idéntica a la ecuación (417) deducida de las ecuaciones de Maxwell. La conclusión es que una onda *puede* estar limitada al espacio entre dos superficies planas paralelas perfectamente conductoras, ya que la corriente que fluye en esas superficies da un contorno adecuado para los campos eléctrico y magnético de la onda.

Para evitar la necesidad de repetir esta prueba para toda superficie conductora que actúe como guía de onda, podemos decir que *puede demostrarse*, en general, que es cierta.

La prueba es una generalización de la dada ahora para ondas planas, y el resultado se aceptará para nuestro próximo estudio de las guías de onda.

Ondas finitas. — Aunque la onda de la figura 68 es acotada en una dirección, es todavía infinita en la otra y, por lo tanto, no se puede obtener físicamente. Pero la explicación anterior sugiere dos tipos de guías de onda que son realmente útiles.

Consideremos la superficie conductora inferior de la figura 68 envuelta en forma de cilindro, y la superficie superior también envuelta de la misma manera. El resultado se muestra en la figura 69. Tendremos dos conductores paralelos cilíndricos que sirven de guía para una onda plana. Las líneas de flujo eléctricas se convierten en arcos de circunferencia y las líneas de flujo magnético se envuelven alrededor de los cilindros en un conjunto de líneas ortogonales a las anteriores.

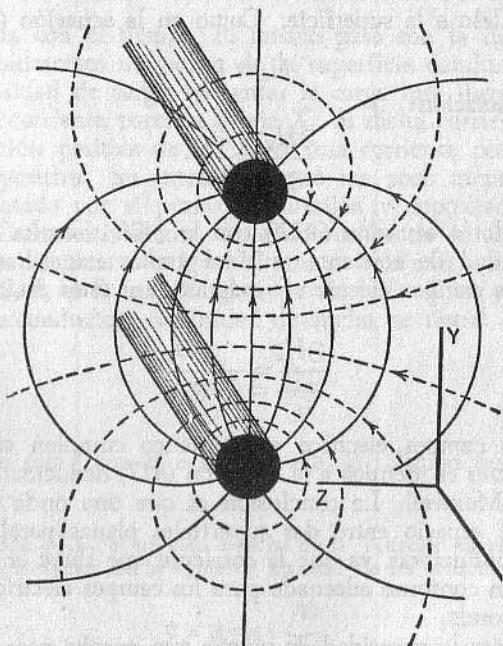


FIG. 69

Para mostrar que estos conductores, que constituyen una línea de transmisión de dos conductores paralelos, actuarán como una guía de onda satisfactoria, es necesario solamente probar que las ecuaciones de Maxwell se satisfacen en el espacio entre los conductores y a su alrededor. La demostración, aunque un tanto larga, no es difícil. Para los campos más simples de una línea de

transmisión concéntrica no ofrece ninguna dificultad. Véase el problema I, página 272.

Una onda guiada por conductores paralelos es infinita en extensión, pero su intensidad disminuye en todas direcciones y su energía es finita. Es, por lo tanto, una onda físicamente posible. La onda física en una línea así, sin embargo, difiere de la onda matemática en un sentido: debe ser generada en un punto y terminar en otro, y cerca de los extremos de la línea de transmisión la onda no es una onda plana. Sufre una especie de transición de una onda cuasi-esférica a una onda quasi-plana. Una perturbación similar tiene lugar si hay un cambio de dirección de la línea, o un cambio del diámetro o de la distancia entre los conductores. Cuando la onda no es estrictamente una onda plana, se emite alguna energía que se pierde en el espacio en lugar de seguir a los conductores. Esta pérdida por radiación es despreciable a frecuencias industriales; a radiofrecuencias puede ser muy importante.

La mayor parte del desarrollo de las ecuaciones de las líneas de transmisión está basada en la hipótesis de que la capacitancia y la inductancia de cada pequeña longitud de línea pueden ser consideradas independientemente del resto*. La hipótesis requiere justificación, pues no es evidente que no existan efectos inductivos magnéticos o influencia eléctrica entre secciones sucesivas de la línea. La justificación se obtiene con la prueba señalada más arriba: como los campos eléctrico y magnético supuestos satisfacen a las ecuaciones de Maxwell, son correctos. Pero esta justificación se obtiene sólo con conductores perfectos. Si hay resistencia, las ecuaciones de la línea de transmisión obtenidas por ese método son aproximaciones útiles y buenas, pero no son matemáticamente exactas.

Cuando los conductores cilíndricos no tienen conductividad perfecta hay alguna penetración de corriente en los conductores; a bajas frecuencias, ciertamente, la corriente penetra completamente en el conductor. La velocidad de propagación es ligeramente menor que la velocidad de la luz. La onda no es estrictamente una onda plana, sino que se curva hacia atrás acercándose al conductor. En realidad, las ecuaciones de las líneas de transmisión pueden ser consideradas como buenas aproximaciones, a menos que se apliquen a líneas de resistencia cero. (Esto es cierto aun cuando la

* Este desarrollo está dado, con una nota aclaratoria, en *Transient Electric Currents*, H. H. Skilling, capítulo IX.

resistencia de la línea y las pérdidas se incluyan en las ecuaciones.)

Guías de onda huecas. — Considerando los planos paralelos de la figura 68 puede imaginarse otro tipo de guía de onda. Una onda entre dos planos está restringida verticalmente, pero no horizontalmente. Usemos ahora otros dos planos conductores como paredes de una guía de onda rectangular, como en la figura 70.

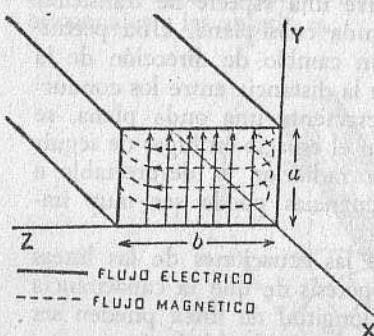


FIG. 70

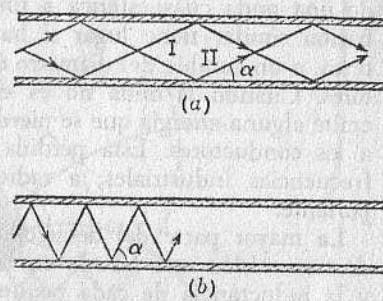


FIG. 71

Se encuentra inmediatamente una dificultad. No puede haber ningún campo eléctrico tangencial en la superficie de estos planos porque son conductores. Por lo tanto, es necesario considerar una onda en la cual la intensidad eléctrica, aunque vertical en todos los puntos, disminuya a cero en las superficies laterales de la guía. Esto se indica en el diagrama por una disminución de la densidad del flujo eléctrico.

Un campo eléctrico así, a causa de su intensidad variable, tiene una componente del rotor a lo largo del eje X y, por lo tanto, exige una componente X así como una componente Z del campo magnético. El campo magnético resultante es transversal en el punto medio de la guía de onda, pero se curva y se hace axial en los costados, como se indica por la línea punteada de la figura 70. Las líneas magnéticas del flujo forman espiras cerradas y el campo magnético es, por lo tanto, de divergencia nula, como efectivamente debe ser.

La disposición de los campos eléctrico y magnético indicada en la figura 70 no puede ser producida por ninguna onda plana del

tipo que hemos discutido en este capítulo y en algunos anteriores, pero es un tanto sorprendente encontrar que puede ser producida por dos ondas planas que se propagan dentro de la guía de onda al mismo tiempo. Ninguna de estas ondas se propaga axialmente a lo largo de la guía, sino que siguen un camino en zigzag con múltiples reflexiones en las paredes, como se muestra en la figura 71a.

Sólo una onda sinusoidal atravesará la guía sin distorsión; supongamos que las ondas I y II en la figura 71a son sinusoidales. El ángulo con el cual se propagan depende de la longitud de onda y de las dimensiones de la guía.

El punto esencial es el siguiente: dos ondas planas sinusoidales, de la misma amplitud y frecuencia, interfieren y se anulan a lo

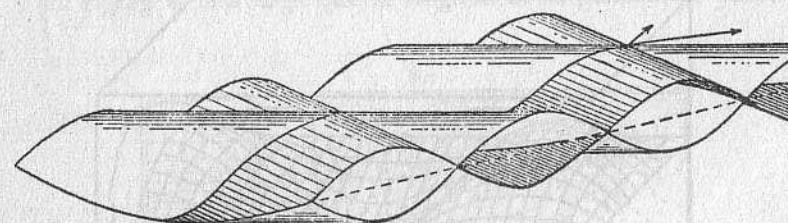


FIG. 72

largo de ciertas superficies cuando se superponen con un cierto ángulo.

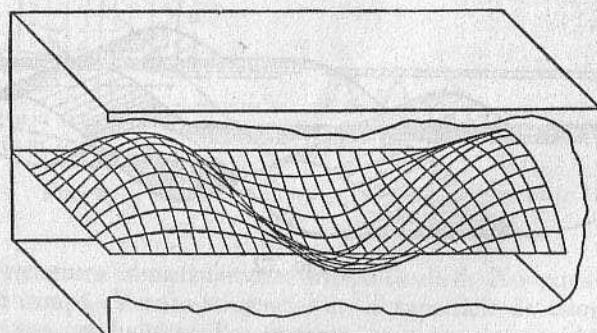
Consideremos la figura 72. Se muestran en ella dos ondas, una sombreada, la otra blanca. Se propagan en direcciones distintas representadas por las flechas. La blanca lo hace casi perpendicularmente al lector y la rayada hacia la derecha. Las ondas están cortadas de perfil por un plano vertical, cuya dirección es intermedia entre las direcciones de propagación de las dos ondas. La intersección de las dos ondas con el plano vertical da el par de curvas sinusoidales que aparece en el corte de la figura.

Las ondas representan, en esta figura, la intensidad eléctrica en dos ondas electromagnéticas. La altura con respecto al plano cero representa la intensidad eléctrica de cada punto. Cuando la intensidad de una onda es igual y opuesta a la de la otra, la intensidad eléctrica resultante es nula. Esto es cierto todo a lo largo de la línea punteada, pues en ella es donde la onda sombreada está por

arriba, la onda blanca está por debajo y a igual distancia, y viceversa.

Esto es también lo que ocurre a lo largo de otro plano, paralelo a la línea punteada, que corta a la onda en el lado alejado. A lo largo de estos planos, la suma de las dos ondas es siempre exactamente cero. En puntos intermedios la suma no es exactamente nula, y la onda resultante total tiene la forma representada en la figura 73, con un valor máximo (donde coinciden las crestas de las ondas blanca y sombreada) igual al doble de la cresta de cada componente por separado.

A causa de que la intensidad eléctrica en la superficie de contorno indicada es siempre cero, el par de ondas electromagnéticas



CORTESIA DE CHU & BARROW

FIG. 73

representado en la figura puede estar contenido en una guía rectangular de dimensiones apropiadas. Dichas ondas satisfacen la condición de que su componente tangencial en la superficie de contorno es nula. A lo largo de las caras superior e inferior de la guía el campo eléctrico es normal a la superficie conductora y en las paredes laterales es nulo. Ambas ondas siguen una trayectoria en forma de zigzag dentro de la guía, como lo muestra la figura 71, reflejándose en las caras. En realidad hay esencialmente una sola onda, pues cada una es la reflexión de la otra.

El resultado final es que una serie de vibraciones electromagnéticas se propagan a lo largo de la guía, como en la figura 73. Este diagrama muestra la naturaleza de la componente eléctrica

de la onda, pero no la de la magnética. La figura 74 muestra la distribución de ambas componentes en este tipo de onda guiada (conocida como la onda $TE_{0,1}$).

Velocidad de grupo. — Las ondas en guías huecas tienen un número de propiedades y limitaciones peculiares. Una de ellas es que la velocidad de propagación de una señal de radio se hace a una velocidad algo inferior a la velocidad de la luz. Esto se explica fácilmente en virtud del camino en zigzag seguido por las dos componentes, como se muestra en la figura 71. Cada onda plana componente se propaga con la velocidad de la luz a lo largo de su trayectoria en zigzag, pero la velocidad con que dicha onda se propaga *en la guía* será algo menor debido a que su camino en zigzag es más largo que la longitud de la guía. Si se pudiera

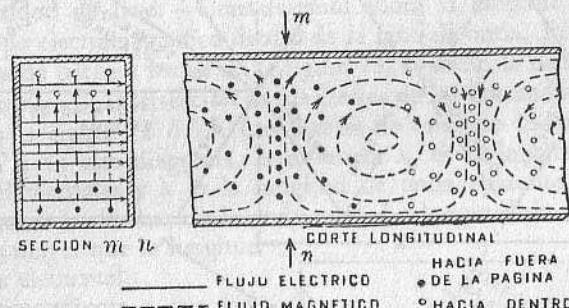


FIG. 74

observar un punto o una raya, o una envolvente de modulación telefónica, se vería que se propaga a lo largo de la guía con una velocidad algo menor que la velocidad de la luz. Su velocidad se conoce como **velocidad de grupo**, v_g .

La velocidad de grupo de una onda en una guía depende de su frecuencia. Considérense las ondas cruzadas de la figura 75, que se propagan en una guía rectangular. Como se muestra, la dirección de propagación es normal a las crestas. Para que el campo eléctrico sea cero en ambos lados de la guía, las ondas elementales se deben cruzar con un ángulo tal que se cubran en una longitud de onda en el espesor de la guía. Por lo tanto, la longitud de onda λ_c y el espesor de la guía b determinan el ángulo de las ondas elementales. Cuanto mayor es la longitud de onda de las ondas componentes, tanto mayor es el ángulo a . Para una

onda de baja frecuencia, la trayectoria en zigzag va a estar apretada, como en la figura 71b, y la velocidad de grupo va a ser relativamente baja. Finalmente, si la semilongitud de onda se hace del tamaño del espesor de la guía, las dos componentes se reflejan dando una onda estacionaria, pero sin ninguna propagación. Esta es la **frecuencia de corte** de dicha guía, y una onda de menor frecuencia no puede ser transmitida porque no puede anular el campo eléctrico en ambas caras de la guía.

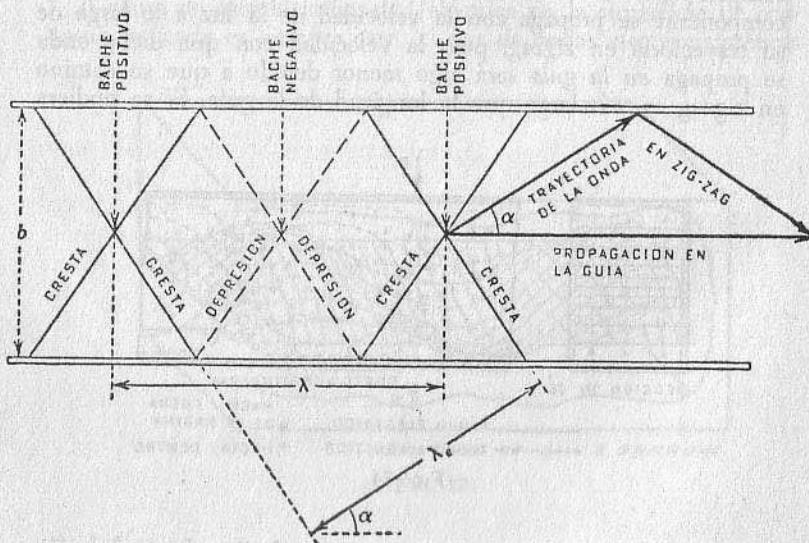


FIG. 75

La mayor longitud de onda que puede ser transmitida a lo largo de una guía rectangular con dimensiones a y b , como en la figura 70, es, por lo tanto,

$$\lambda_0 = 2b \quad (424)$$

y la frecuencia de corte es

$$f_0 = \frac{v_e}{2b} = \frac{1}{2b\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (425)$$

Nótese que en la ecuación 424 λ_0 es la frecuencia de corte de la onda *elemental*, es decir, la longitud de onda de una onda

ilimitada con la frecuencia de corte y, correspondientemente, la velocidad de propagación de una tal onda es $v_e = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ es la usada en la ecuación 425.

La velocidad de grupo de $TE_{0,1}$ es, según la figura 75:

$$v_g = v_e \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_e}{2b}\right)^2} \quad (426)$$

Depende de λ_e , longitud de onda de la onda elemental. Se ve que se aproxima a cero a la frecuencia de corte, a medida que λ_e tiende a $2b$, y se aproxima a la velocidad de la luz para ondas muy cortas.

Velocidad de fase. — Consideremos ahora la longitud de onda del campo electromagnético dentro de la guía de onda. Esta será la distancia de bache a bache de la figura 73, es decir, la distancia entre los puntos de intersección de las crestas de las dos ondas elementales en la figura 72 ó 75. Las crestas de onda se indican en la figura 75; en este diagrama, la distancia λ_e es la longitud de las ondas elementales y λ es la longitud de onda aparente o la distancia entre los baches de la onda total. La longitud de onda aparente es mayor que la longitud de onda elemental.

Correspondiente a esta longitud de onda aparente hay una velocidad aparente mayor que la velocidad de la luz. Consideremos la intersección de las crestas de las dos ondas elementales como se muestra en la figura 76. Las líneas gruesas muestran las posiciones presentes de las crestas; las líneas punteadas muestran sus posiciones una unidad de tiempo antes. La velocidad está dada por la distancia que la onda atraviesa en este intervalo. En el punto de intersección de las ondas está la cresta de la onda resultante o aparente. Este punto de intersección se propaga más rápidamente que las ondas individuales. El resultado es que si la

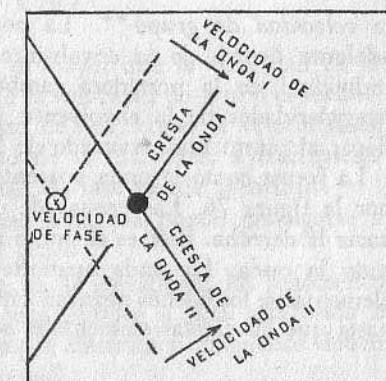


FIG. 76

representación de la onda de la figura 73 fuera visible, parecería propagarse según la guía de onda a una velocidad mayor que la de la luz. Esta velocidad aparente se llama **velocidad de fase**, pues es la velocidad con que se propaga la fase de la onda resultante.

Parece paradójico que la onda parezca propagarse en la guía a un velocidad mayor que la velocidad de la luz, mientras que la señal llevada por esas ondas se propaga a las velocidades de grupo, que es menor que la de la luz. Consideremos la figura 77 que presenta una onda "portadora" contenida dentro de una envolvente de modulación*. Si ella fuera visible en la guía de onda, la portadora aparecería propagándose con la velocidad de fase, mientras que la onda modulada lo hace con una velocidad menor,

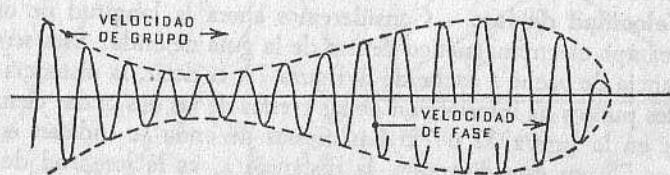


FIG. 77

la *velocidad de grupo***. La portadora parecería resbalar hacia adelante dentro de la envolvente de modulación, y cada cresta individual de la portadora cambiaría su amplitud debido a las irregularidades de la envolvente, hasta finalmente desaparecer al llegar al punto más avanzado de la moduladora.

La forma como la onda aparentemente desaparece está ilustrada por la figura 76. Las crestas de onda en esa figura desaparecen hacia la derecha. Este es el punto más lejano hasta donde ha avanzado la onda. La onda aparente es el resultado de dos ondas elementales; los baches avanzan rápidamente de izquierda a derecha hasta que las crestas elementales se han pasado mutuamente y no

* Consideremos también, como un ejemplo no-matemático, una oruga que camina rápidamente. Pequeñas ondas (transversales o de compresión, según las especies) se agitan sobre su dorso, avanzando de la cola a la cabeza. Estas ondas avanzan a la velocidad de fase, mientras que la oruga misma lo hace a la velocidad de grupo.

** Véase Capítulo XIV, páginas 275 hasta 278.

se interceptan más. Consideremos dos ondas que se propagan con un cierto ángulo en la superficie de una masa de agua, y se imaginará fácilmente la desaparición de la doble cresta.

Una ola del océano, o de un lago grande, siempre se aproxima a un muro de la costa con un pequeño ángulo. En lugar de avanzar paralelamente, de modo que en toda su extensión choque simultáneamente contra la pared, la onda llega a un extremo un poco antes que al otro. Si se observa una tal onda, se ve el rompimiento de la misma al chocar contra la pared. Este rompimiento aparece en el extremo de la pared donde incidió la ola, y luego, a medida que la ola va llegando progresivamente a toda la pared, dicho rompimiento (que señala la cresta de la onda) parece propagarse con mayor velocidad a lo largo de dicha pared. Su velocidad puede parecer muchas veces mayor que la velocidad de avance de la ola, y cuanto menor sea el ángulo que el frente de onda hace con la pared, mayor parecerá la velocidad. Esta velocidad aparente a lo largo del muro es una velocidad de fase exactamente análoga a la velocidad de fase en una guía de ondas.

La velocidad de fase de la onda $TE_{0,1}$ es, según la figura 76:

$$v_\phi = \frac{v_e}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_e}{2b}\right)^2}} \quad (427)$$

y se ve que la velocidad de fase es mayor que la velocidad de la luz en la misma proporción en que la velocidad de grupo es menor. Para ondas muy cortas la velocidad de fase, como la velocidad de grupo, se aproxima a la velocidad de la luz, pero, a frecuencias cercanas a la de corte, la velocidad de fase tiende a infinito.

Nótese particularmente que una señal no puede propagarse a la velocidad de fase, sino a la de grupo.

Deducción. — Es evidente que, ya se consideren los fenómenos dentro de una guía de onda como debidos a una sola onda o a la superposición de dos, los campos eléctrico y magnético deben satisfacer a las ecuaciones de Maxwell.

Como el campo eléctrico de la onda de la figura 70 es paralelo al eje Y, las componentes X y Z pueden igualarse a cero, como hicimos antes en las ecuaciones (429).

Se supone que la onda es sinusoidal con respecto al tiempo y,

ya que se propaga según el eje x , se describirá por una función sinusoidal de $(x - v_\phi t)$ en que v_ϕ es la velocidad de fase. Si su frecuencia es f , y $\omega = 2\pi f$, el campo eléctrico puede escribirse como la siguiente función del tiempo

$$\text{sen} \frac{\omega}{v_\phi} (x - v_\phi t) = \text{sen} (\beta x - \omega t) \quad (428)$$

El campo eléctrico debe ser cero en $z = 0$ y en $z = b$. Una forma de que esto se cumpla es teniendo una variación sinusoidal de la intensidad del campo eléctrico a lo largo del eje Z , partiendo de cero, llegando a un valor máximo en $b/2$ y volviendo nuevamente a cero donde $z = b$. Con esta distribución sinusoidal, si el máximo de la intensidad del campo es A , su valor en cualquier punto z será $\text{sen} \frac{z}{b} \pi$.

Combinando la variación con el tiempo y la variación espacial en la guía en una sola ecuación, se tiene:

$$E_y = A \text{sen} \left(\frac{z}{b} \pi \right) \text{sen} (\beta x - \omega t) \quad (429)$$

y

$$E_x = 0$$

$$E_z = 0$$

La onda de la ecuación (429) satisface las condiciones de contorno impuestas por la guía rectangular, pues la ecuación se escribió teniéndolas presente, pero dicha onda es una onda electromagnética, físicamente posible sólo si es una solución de la ecuación de las ondas

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (429)$$

y si

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (244)$$

La última condición se satisface evidentemente. Cuando la ecuación de onda se desarrolla en coordenadas rectangulares con $E_x = 0$ y $E_z = 0$, resulta simplemente [véase la ecuación (250)]

$$\frac{\partial^2 E_u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_w}{\partial z^2} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad (430)$$

Diferenciando E_y de la ecuación (429), sustituyendo en la (430), y simplificando, se obtiene:

$$\frac{\pi^2}{b^2} + \beta^2 = \mu \epsilon \omega^2 \quad (431)$$

La conclusión es que la onda propuesta en la ecuación (429) es una solución satisfactoria de la ecuación de onda si se cumple la ecuación (431). Teniendo en cuenta que $\beta = \omega/v_\phi$, la ecuación (431) se satisface con una onda cuya velocidad de fase sea:

$$v_\phi^2 = \frac{1}{\mu \epsilon - \left(\frac{\pi}{wb} \right)^2} \quad (432)$$

Esto se interpreta diciendo que la onda propuesta puede existir sólo si se propaga con una velocidad de fase que dependa de la frecuencia de la onda y de las dimensiones de la guía. Si la frecuencia es tan baja que v_ϕ^2 es negativa, no hay una solución real para la velocidad de fase, la ecuación de onda no se satisface y, por lo tanto, la onda no puede existir. Esto da la frecuencia de corte que concuerda con la dada por la ecuación (425). La ecuación (432), que da la velocidad de fase, se puede transformar de modo que corresponda con la (427).

Sabemos ahora que una onda eléctrica se propaga en la guía. Puede tener cualquier amplitud A , en la ecuación (429), pero su frecuencia debe exceder un cierto mínimo, y su velocidad de fase estará determinada por la frecuencia y las dimensiones de la guía.

Para determinar el campo magnético de la onda usamos la ecuación de Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (242)$$

Derivando parcialmente E_y , dado por la ecuación (429), y sustituyendo en la ecuación (242), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = \beta A \text{sen} \left(\frac{z}{b} \pi \right) \cos (\beta x - \omega t) \\ -\frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\mu \frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{\pi}{b} A \cos \left(\frac{z}{b} \pi \right) \text{sen} (\beta x - \omega t) \end{aligned} \quad (433)$$

Las componentes del campo magnético se encuentran integrando el segundo y tercer miembro de estas ecuaciones con respecto al tiempo. Esto da:

$$H_z = \frac{1}{\mu v_\phi} A \sin\left(\frac{z}{b}\pi\right) \sin(\beta x - \omega t) \quad (434)$$

$$H_x = \frac{\pi}{\mu \omega b} A \cos\left(\frac{z}{b}\pi\right) \cos(\beta x - \omega t)$$

$$H_y =$$

Conocemos ahora todas las componentes de los campos eléctrico y magnético de la onda guiada, y la consideración de las ecuaciones (429) y (434) muestra que la figura 74 es una representación correcta de la onda. La línea *m-n* de dicha figura es una sección de la onda, en la cual $(\beta x - \omega t)$ es ligeramente inferior a $\pi/2$.

Solución general para una guía rectangular. — En la discusión previa nos hemos referido sólo a un modo de propagación de la onda, el llamado "modo dominante", para una guía rectangular. Es el más simple y, tal vez, el más útil, pero una guía rectangular puede servir de guía a una variedad de modos. Una solución general de las ecuaciones de Maxwell da todos los modos posibles de vibración.

Consideremos una guía rectangular, como en la figura 78. Las ondas guiadas pueden, en general, tener componentes de campo en las tres direcciones coordenadas. Es siempre posible considerar la onda más general como la suma de dos ondas, una de las cuales tiene sólo campo magnético transversal y no axial, mientras que la otra tiene solamente componente axial y no transversal. La primera clase se llama *transversal magnética* u ondas *TM*; la última es una *transversal eléctrica* o *TE*. Algunas ondas, como las que hay en las líneas de transmisión, no tienen componente axial en ninguno de los dos campos, y se las llama ondas *TEM*.

Para ser completamente general, supongamos que el campo eléctrico en la guía tiene tres componentes, E_x , E_y y E_z , cada una de las cuales es una función indefinida de x , y , z y t . Aunque estas tres componentes son todavía indefinidas, deben satisfacer tres condiciones: la ecuación de onda,

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (435)$$

de divergencia nula,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (436)$$

y deben satisfacer condiciones de contorno: esto es, si las paredes de la guía se suponen perfectamente conductoras, con dimensiones como las que se indican en la figura 78, es necesario que

$$\text{en } z = 0 \text{ y en } z = b \quad E_x = E_y = 0 \quad (437)$$

$$\text{en } y = 0 \text{ y en } y = a \quad E_x = E_z = 0 \quad (438)$$

Debemos encontrar funciones que satisfagan estas exigencias.

Supongamos primero que el campo eléctrico sea una onda sinusoidal que se propaga según la guía y determinemos si una tal hipótesis es consistente con las condiciones necesarias. Escribimos las condiciones necesarias como:

$$E_x = E_{mx} e^{j\omega t - \Gamma x} \quad (439)$$

$$E_y = E_{my} e^{j\omega t - \Gamma x}$$

$$E_z = E_{mz} e^{j\omega t - \Gamma x}$$

donde E_{mx} , E_{my} y E_{mz} son funciones de y y z , pero no de x ni de t .

Prestemos atención a E_x . La ecuación de onda requiere que:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (440)$$

Introduciendo E_x , dado por la ecuación (439), y simplificando la función exponencial, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 E_{mx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{mx}}{\partial z^2} = -(\omega^2 \mu \epsilon + \Gamma^2) E_{mx} \quad (441)$$

Obtenemos una solución de esta ecuación diferencial parcial separando las variables. Mediante este procedimiento obtenemos dos ecuaciones en derivadas totales. Escribamos E_{mx} (que es una

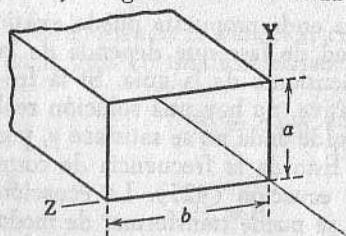


FIG. 78

función de y y z) como el producto de dos funciones: Y , una función solamente de y , y Z , una función de z solamente. Entonces $E_{mx} = YZ$, y la sustitución en la ecuación (441) da:

$$Z \frac{d^2Y}{dy^2} + Y \frac{d^2Z}{dz^2} = -(\omega^2 \mu \epsilon + \Gamma^2) YZ \quad (442)$$

de donde:

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2} = -(\omega^2 \mu \epsilon + \Gamma^2) \quad (443)$$

Podemos poner arbitrariamente

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} = -M^2 \quad \text{y} \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2} = -N^2 \quad (444)$$

de donde:

$$M^2 + N^2 = \omega^2 \mu \epsilon + \Gamma^2 \quad (445)$$

Como el miembro de la derecha de esta ecuación es una constante (no es función de y ni de z), M y N deben también ser constantes; esto hace que las ecuaciones diferenciales (444) sean ecuaciones diferenciales ordinarias, con las siguientes soluciones * (que, aunque poco familiares, pueden ser verificadas por sustitución):

$$\begin{aligned} Y &= A_1 \cos My + B_1 \sin My \\ Z &= C_1 \cos Nz + D_1 \sin Nz \end{aligned} \quad (446)$$

El producto, entonces, es:

$$E_{mx} = (A_1 \cos My + B_1 \sin My)(C_1 \cos Nz + D_1 \sin Nz) \quad (447)$$

donde A_1 , B_1 , C_1 y D_1 son constantes cualesquiera.

Para E_{my} y E_{mz} resultan soluciones similares con otras constantes arbitrarias.

Las condiciones de contorno dadas por las ecuaciones (437) y

* Si se prefiere se pueden expresar las soluciones mediante funciones hiperbólicas o exponenciales. La forma trigonométrica es aquí más conveniente. Nótese la analogía con las ecuaciones de una línea de transmisión.

(438) imponen limitaciones a la elección de las constantes de la ecuación (447), $E_x = 0$ en $z = 0$ exige que $C_1 = 0$, y en $y = 0$ exige que $A_1 = 0$. E_x será cero en $z = b$ si Nb es algún múltiplo entero de π ; esto es, si

$$N = \frac{n\pi}{b} \quad \text{donde } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (448)$$

Análogamente, para hacer $E_x = 0$ en $y = a$,

$$M = \frac{m\pi}{a} \quad \text{donde } m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (449)$$

Por lo tanto, cuando se satisfacen las condiciones de contorno, tenemos:

$$E_{mx} = B_1 D_1 \sin \frac{m\pi}{a} y \sin \frac{n\pi}{b} z \quad (450)$$

B_1 y D_1 son ambas constantes arbitrarias y se las puede reunir en una sola, K_1 . Resulta, finalmente:

$$E_x = K_1 \sin \frac{m\pi}{a} y \sin \frac{n\pi}{b} z e^{j\omega t - \Gamma x} \quad (451)$$

La introducción de las condiciones de contorno en las soluciones similares para las otras componentes da:

$$E_y = (A_2 \cos M_2 y + B_2 \sin M_2 y) \left(D_2 \sin \frac{n\pi}{b} z \right) e^{j\omega t - \Gamma x} \quad (452)$$

$$E_z = \left(B_3 \sin \frac{m\pi}{a} y \right) (C_3 \cos N_3 z + D_3 \sin N_3 z) e^{j\omega t - \Gamma x} \quad (453)$$

La condición de divergencia nula dice lo siguiente:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

Esto no puede satisfacerse a menos que B_2 y D_3 sean iguales a

cero, y $M_2 = m\pi/a$, y $N_3 = n\pi/b$. Con esto, sin embargo, sus derivadas son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial x} &= -\Gamma K_1 \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} y \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} z e^{j\omega t - \Gamma x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial y} &= -\frac{m\pi}{a} K_2 \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} y \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} z e^{j\omega t - \Gamma x} \\ \frac{\partial E_z}{\partial z} &= -\frac{n\pi}{b} K_3 \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} y \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} z e^{j\omega t - \Gamma x}\end{aligned}\quad (454)$$

y la condición de divergencia nula se satisface si

$$\Gamma K_1 + \frac{m\pi}{a} K_2 + \frac{n\pi}{b} K_3 = 0 \quad (455)$$

Es ahora posible escribir las componentes del campo eléctrico como:

$$\begin{aligned}E_x &= K_1 \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} y \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} z e^{j\omega t - \Gamma x} \\ E_y &= K_2 \cos \frac{m\pi}{a} y \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} z e^{j\omega t - \Gamma x} \\ E_z &= K_3 \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} y \cos \frac{n\pi}{b} z e^{j\omega t - \Gamma x}\end{aligned}\quad (456)$$

con la limitación para las K dada por la ecuación (455) y por Γ dado por la ecuación (445):

$$\Gamma^2 = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon \quad (457)$$

Las componentes del campo magnético en la guía se encuentran usando la ecuación de Maxwell

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \nabla \times E \quad (458)$$

Esta operación familiar se aplica a las ecuaciones 456 y da:

$$\begin{aligned}H_x &= \frac{\pi}{j\omega\mu} \left(\frac{n}{b} K_2 - \frac{m}{a} K_3 \right) \cos \frac{m\pi}{a} y \cos \frac{n\pi}{b} z e^{j\omega t - \Gamma x} \\ H_y &= \frac{-\pi}{j\omega\mu} \left(\frac{n}{b} K_1 + \frac{\Gamma}{\pi} K_3 \right) \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} y \cos \frac{n\pi}{b} z e^{j\omega t - \Gamma x} \\ H_z &= \frac{\pi}{j\omega\mu} \left(\frac{m}{a} K_1 + \frac{\Gamma}{\pi} K_2 \right) \cos \frac{m\pi}{a} y \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} z e^{j\omega t - \Gamma x}\end{aligned}\quad (459)$$

Ondas eléctricas transversales. — Las ecuaciones (456) y (459) no pueden usarse hasta que se especifique un hecho más sobre la onda a propagarse, pues contienen demasiadas constantes arbitrarias. El hecho adicional podría ser la relación de los módulos de E_x y H_x ; como un caso muy importante, especifiquemos que $E_x = 0$. La onda es entonces una onda transversal eléctrica u onda TE. Esto exige que $K_1 = 0$. Haciendo K_1 cero en las ecuaciones 455, 456 y 459, se obtienen las ecuaciones de la Tabla VI. Dos nuevos símbolos requieren aclaración: A_0 , la única constante arbitraria que queda, determina la amplitud de cada componente y, por lo tanto, la de toda la onda. Físicamente, A_0 depende de las dimensiones de la onda que se propaga en la guía; matemáticamente, $A_0 = K_2 b/n$. G es una abreviatura para una combinación de constantes que aparece frecuentemente; relaciona los factores característicos de propagación en la guía con los correspondientes factores en el espacio ilimitado, y

$$G^2 = 1 - \frac{1}{4f^2 \mu \epsilon} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (460)$$

Como en un capítulo previo η es la impedancia intrínseca del dieléctrico dentro de la guía de onda (usualmente aire) y si no hay pérdidas en el dieléctrico $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$.

$TE_{m,n}$

TABLA VI

COMPONENTES DE ONDAS ELÉCTRICAS TRANSVERSALES EN GUÍAS RECTANGULARES

$$E_x = 0$$

$$E_y = A_0 \frac{n}{b} \cos \frac{m\pi}{a} y \sin \frac{n\pi}{b} z e^{j\omega t - \Gamma_x}$$

$$E_z = -A_0 \frac{m}{a} \sin \frac{m\pi}{a} y \cos \frac{n\pi}{b} z e^{j\omega t - \Gamma_x}$$

$$H_x = \frac{A_0}{j2f\mu} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \cos \frac{m\pi}{a} y \cos \frac{n\pi}{b} z e^{j\omega t - \Gamma_x}$$

$$H_y = -\frac{G}{\eta} E_x$$

$$H_z = -\frac{G}{\eta} E_y$$

(Véase también tabla VIII)

$TM_{m,n}$

TABLA VII

COMPONENTES DE ONDAS TRANSVERSALES MAGNÉTICAS EN GUÍAS RECTANGULARES

$$H_x = 0$$

$$H_y = B_0 \frac{n}{b} \sin \frac{m\pi}{a} y \cos \frac{n\pi}{b} z e^{j\omega t - \Gamma_x}$$

$$H_z = -B_0 \frac{m}{a} \cos \frac{m\pi}{a} y \sin \frac{n\pi}{b} z e^{j\omega t - \Gamma_x}$$

$$E_x = \frac{B_0}{j2f\epsilon} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sin \frac{m\pi}{a} y \sin \frac{n\pi}{b} z e^{j\omega t - \Gamma_x}$$

$$E_y = \eta G H_z$$

$$E_z = -\eta G H_y$$

(Véase también tabla VIII)

TABLA VIII

FÓRMULAS AUXILIARES PARA ONDAS TE Y TM EN GUÍAS RECTANGULARES

$$G = \sqrt{1 - \frac{1}{4f^2\mu\epsilon} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} = \sqrt{1 - \frac{9 \times 10^{16}}{4f^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \text{ en aire (véase la nota)}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 377 \text{ ohmios en aire}$$

$$\Gamma = j\omega \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = j \frac{2\pi f G}{3 \times 10^8} \text{ por metro en aire}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon G} = \frac{2\pi f G}{3 \times 10^8} \text{ radianes por metro en aire}$$

$$v_g = \frac{G}{\sqrt{\mu\epsilon}} = 3G \times 10^8 \text{ metros por segundo en aire}$$

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon G}} = \frac{3 \times 10^8}{G} \text{ metros por segundo en aire}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon f G}} = \frac{3 \times 10^8}{f G} \text{ metros (longitud de onda en la guía)}$$

Frecuencia de corte: $G = 0$

Nota: La columna de la derecha es para una guía hueca o con dieléctrico aire. Además de los símbolos usuales, aparecen en las tablas VI, VII y VIII los siguientes:

a es la longitud de la guía en la dirección Y , en metros.

m es el número de semicírculos de la representación del campo en la guía en la dirección Y ; es un entero. Por lo tanto, a/m es la longitud de un semicírculo en la dirección Y .

b es el ancho de la guía en la dirección z , en metros.

n es el número de semicírculos del campo en la guía en la dirección z ; es un entero. Por lo tanto, b/n es la longitud de un semicírculo en la dirección z .

A_0 y B_0 son constantes arbitrarias que dan la amplitud.

f es la frecuencia en ciclos por segundo.

Ondas magnéticas transversales. — Si, por otra parte, se especifica que $H_x = 0$, obteniéndose así una onda TM , la ecuación (459) muestra que:

$$\frac{n}{b} K_2 - \frac{m}{a} K_3 = 0 \quad (461)$$

Usando esta última con la (455) en las ecuaciones generales (456) y (459), resultan las expresiones que aparecen en la tabla VII.

Modos. — Las ecuaciones de la tabla VI o tabla VII no des-

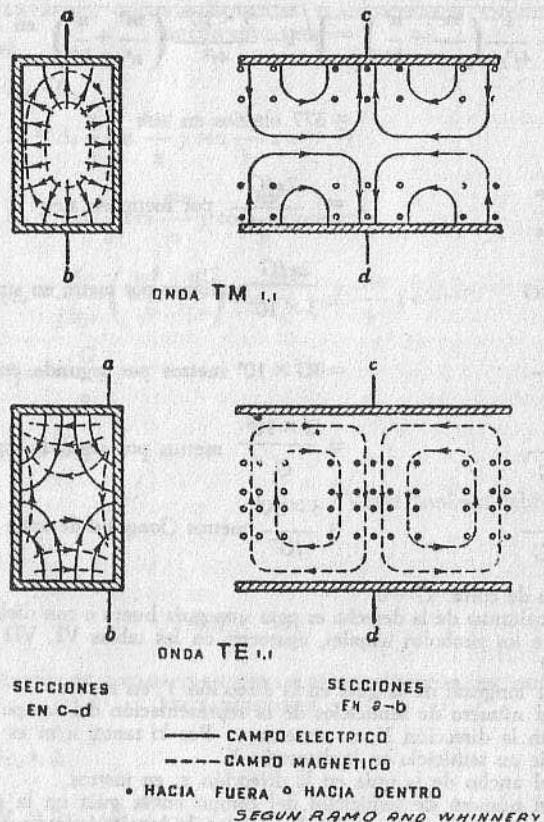


FIG. 79

criben una sola onda, sino muchas. Los coeficientes m y n pueden tomar cualquier valor entero. (Para una onda TE puede anularse cualquiera de los dos, pero si se anulan ambos, la onda desaparece; para una onda TM, la onda se anula si es cero uno de los dos.)

Cada par de enteros m, n corresponde a lo que se llama un modo de propagación. Es costumbre distinguir los distintos modos posibles, como $TE_{m,n}$ o $TM_{m,n}$. Así, si $m = 0$ y $n = 1$, en la tabla VI resulta el modo $TE_{0,1}$, y se lo reconoce como el modo discutido en la primera parte del capítulo y mostrado en la figura 74. (Este difiere del modo $TE_{1,0}$ sólo en la orientación.) Se ve que las fórmulas de las tablas VI y VIII para el modo $TE_{0,1}$ concuerdan con las ecuaciones (425) a (434). En la figura 79 se ilustran los modos $TE_{1,1}$ y $TM_{1,1}$. Todos los otros modos rectangulares resultan de repetir uno de estos modos básicos un número de veces dentro de la sección transversal de la guía.

En una guía de onda puede existir cualquier número de modos superpuestos al mismo tiempo. En esa forma, el campo en la guía no está limitado a variaciones sinusoidales con y y z . Las ecuaciones de las tablas VI y VII podrían ser propiamente escritas como sumas, cada una teniendo un número doblemente infinito de términos, que se obtienen haciendo tomar a n y m todos los valores enteros. Una tal sumación es una serie de Fourier bidimensional y se puede usar para describir cualquier distribución del campo que pueda existir en una sección transversal dada de la guía de onda. La distribución en todas las otras secciones se puede deducir luego por cálculos. Sin embargo, una propagación no-sinusoidal no se propaga como una simple onda progresiva; se distorsiona a medida que se propaga, pues los distintos modos se propagan con distintas velocidades de fase, y los modos con frecuencias inferiores a la de corte no se propagan.

Frecuencia de corte. — La constante G de la guía puede ser real o imaginaria (pero no compleja). Si G es real, Γ es imaginaria, y se puede escribir $\Gamma = j\beta$ con β real. Las ecuaciones de las tablas VI y VII son ecuaciones de ondas progresivas que describen una onda que se propaga sin amortiguamiento (como resultado de la conductividad perfecta supuesta en las paredes de la guía). La velocidad de fase de la onda se encuentra mediante $v_\phi = \omega/\beta$, con el resultado que se muestra en la tabla VIII. La longitud de onda dentro de la guía es v_ϕ/f . La velocidad de grupo se encuentra usando la ecuación (467) del capítulo XIV, que da:

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{G}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (462)$$

y estos resultados están también en la tabla VIII.

Si G es imaginaria, Γ es real. Las ecuaciones de las tablas VI y VII no describen ondas progresivas. Físicamente, un valor real de Γ indica que la guía es muy pequeña para conducir una onda de frecuencia tan baja o de un modo de orden tan alto. La frecuencia más baja que se puede propagar en una guía se llama frecuencia de corte, y es la frecuencia para la cual $G = 0$. Cualquier frecuencia menor haría G imaginaria. Así, la frecuencia de corte es:

$$f_0 = \sqrt{\frac{1}{4\mu\epsilon} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \quad (463)$$

Por debajo de la frecuencia de corte ninguna onda que penetre en la guía producirá una onda. Las ecuaciones de las tablas VI y VII muestran que, en cambio, habrá un campo en el interior de la guía que disminuye exponencialmente con la distancia x a lo largo de ella y que se alterna con la misma fase todo a lo largo de la guía. Un tal campo no conduce energía en la guía y, suponiendo paredes perfectamente conductoras, la potencia media que penetra en la guía es cero para frecuencias que estén por debajo de la de corte. La disminución exponencial de la intensidad del campo eléctrico en la guía no es un amortiguamiento en el sentido usual, pues no es el resultado de una perdida de energía. Es más bien análogo al "amortiguamiento" en un filtro sin pérdidas, y se lo llama, a veces, "amortiguamiento reactivo".

Debido a la ambigüedad de signo de la ecuación (457), Γ y, por lo tanto, β , pueden ser positivos o negativos. β positivo significa que la onda se propaga en la dirección positiva de las x ; β negativo, en la dirección negativa de las x . En efecto, puede haber propagación en cualquiera de las dos direcciones o en ambas a la vez, dependiendo de las condiciones en los extremos de la guía. Por ejemplo, si la energía entra a la guía por un extremo y existe una discontinuidad que provoca una reflexión parcial en el otro, existirán dentro de la guía una onda incidente y una reflejada. Se combinan para dar ondas estacionarias. Tales ondas estacionarias son de gran importancia práctica, pues indican el grado de irregularidad en la discontinuidad y una consecuente restricción en el flujo de energía en el sistema.

Puesto que G , el factor de la guía, es siempre menor que uno, la velocidad de fase en la guía es siempre mayor que la velocidad de una onda ilimitada, y la velocidad de grupo es correspondien-

temente menor. Esto resulta de la tabla VIII. Para una guía rectangular hueca (y también para una guía hueca de cualquier forma)

$$v_\phi v_g = \frac{1}{\mu\epsilon} = c^2 \quad (464)$$

Guías de onda cilíndricas. — La forma común de las guías, aparte de la rectangular, es la de sección circular. La solución para las ondas en tales guías es muy similar a la de las ondas en guías rectangulares. Sin embargo, una de las ecuaciones para las guías cilíndricas, la correspondiente a la ecuación (444), resulta ser una solución en forma de funciones de Bessel en lugar de funciones trigonométricas.

Usando coordenadas cilíndricas con el eje Z coincidiendo con el de la guía, se encuentran las componentes r , θ y z del campo. No daremos la solución general para todos los modos, pero en la tabla IX se describen cuatro de los más interesantes, y se los ilustra en la figura 80. En la tabla IX, a es el radio de la guía, J_0 y J_1 son funciones de Bessel*, A es la constante que da la amplitud de la onda, λ es la longitud de onda en la guía y f_0 es la frecuencia de corte en ciclos por segundo.

El modo $TE_{1,1}$ se conoce como el "modo dominante" en una guía cilíndrica. Es el de menor frecuencia de corte para dimensiones dadas de la guía. Tiene una analogía general con el modo "dominante" $TE_{0,1}$ en una guía rectangular; en efecto, si una onda $TE_{0,1}$ que se propaga en una guía rectangular, entra en una guía cilíndrica, aparece en ésta como un modo $TE_{1,1}$. Nótese que no hay analogía particular entre los modos cilíndricos $TE_{1,1}$ y $TM_{1,1}$ ni en su forma ni en otras características.

En una guía cilíndrica, el primer subíndice usado para identificar el modo es el orden de la función de Bessel en la componente axial y es también el coeficiente de θ en el factor trigonométrico. Para un modo TM el segundo subíndice es el número de la raíz de la función de Bessel en la pared de guía (donde $r = a$); y para un modo TE es el número de la raíz de la derivada de la función de Bessel en el mismo punto. Es necesario tener una raíz de la función de Bessel apropiada en la pared de la guía para que en ella se anule la componente tangencial del campo eléctrico.

* Los valores se pueden obtener en los manuales de matemáticas, tales como *Tablas de funciones*, Jahnke y Emde; Publicaciones Dover, 1943.

GUIAS DE ONDA

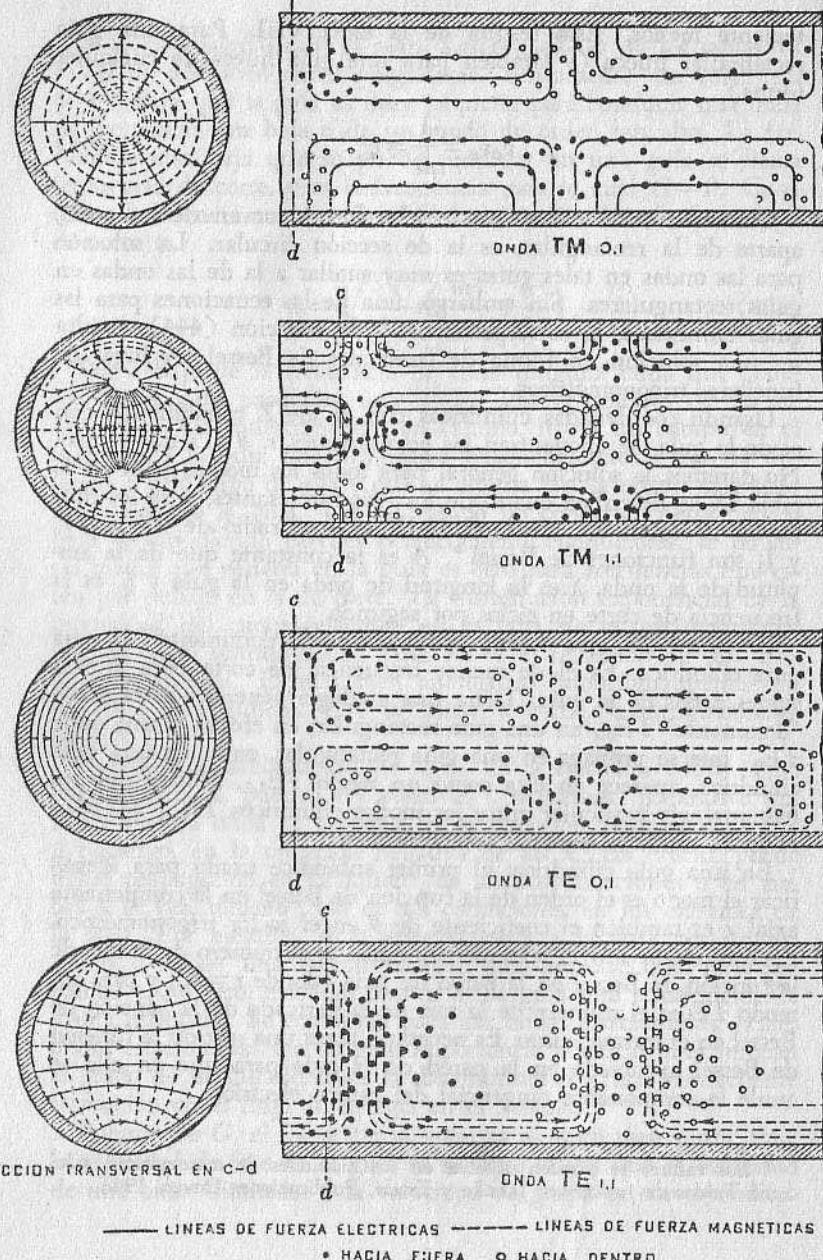


FIG. 80

GUIAS DE ONDA CILÍNDRICAS

TABLA IX

ALGUNOS MODOS EN GUIAS CILÍNDRICAS

Modo TM_{0,1}

$$E_z = AJ_0 \left(2.405 \frac{r}{a} \right) e^{j\omega t - \Gamma z}$$

$$E_r = \eta GH_\theta$$

$$E_\theta = 0$$

$$H_z = 0$$

$$H_r = 0$$

Modo TM_{1,1}

$$E_z = AJ_1 \left(3.83 \frac{r}{a} \right) \cos \theta e^{j\omega t - \Gamma z}$$

$$E_r = \eta GH_\theta$$

$$E_\theta = -\eta GH_r$$

$$H_z = 0$$

$$H_r = -j0.429 \frac{a^2 f \epsilon}{r} AJ_1 \left(3.83 \frac{r}{a} \right) \cdot \sin \theta e^{j\omega t - \Gamma z}$$

$$H_\theta = j2.61 af \epsilon AJ_1 \left(2.405 \frac{r}{a} \right) e^{j\omega t - \Gamma z}$$

$$H_\theta = -j1.64 af \epsilon A \left[J_0 \left(3.83 \frac{r}{a} \right) - \frac{a}{3.83 r} J_1 \left(3.83 \frac{r}{a} \right) \right] \cos \theta e^{j\omega t - \Gamma z}$$

$$G = \sqrt{1 - \frac{0.147}{f^2 a^2 \mu \epsilon}}$$

$$f_0 = \frac{0.383}{a \sqrt{\mu \epsilon}}$$

$$G = \sqrt{1 - \frac{0.371}{f^2 a^2 \mu \epsilon}}$$

$$f_0 = \frac{0.609}{a \sqrt{\mu \epsilon}}$$

Modo TE_{0,1}

$$E_z = 0$$

$$E_r = 0$$

$$E_\theta = -j1.64 af \mu AJ_1 \left(3.83 \frac{r}{a} \right) e^{j\omega t - \Gamma z}$$

$$H_z = AJ_0 \left(3.83 \frac{r}{a} \right) e^{j\omega t - \Gamma z}$$

$$H_r = -\frac{G}{\eta} E_\theta$$

$$H_\theta = 0$$

Modo TE_{1,1}

$$E_z = 0$$

$$E_r = j1.86 \frac{a^2 f \mu}{r} AJ_1 \left(1.84 \frac{r}{a} \right) \cdot \sin \theta e^{j\omega t - \Gamma z}$$

$$E_\theta = j3.41 af \mu A \left[J_0 \left(1.84 \frac{r}{a} \right) - \frac{a}{1.84 r} J_1 \left(1.84 \frac{r}{a} \right) \right] \cos \theta e^{j\omega t - \Gamma z}$$

$$H_z = AJ_1 \left(1.84 \frac{r}{a} \right) \cos \theta e^{j\omega t - \Gamma z}$$

$$H_r = -\frac{G}{\eta} E_\theta$$

$$H_\theta = \frac{G}{\eta} E_r$$

$$G = \sqrt{1 - \frac{0.371}{f^2 a^2 \mu \epsilon}}$$

$$f_0 = \frac{0.609}{a \sqrt{\mu \epsilon}}$$

$$G = \sqrt{1 - \frac{0.0858}{f^2 a^2 \mu \epsilon}}$$

$$f_0 = \frac{0.293}{a \sqrt{\mu \epsilon}}$$

Para todos los modos

$$\Gamma = j\omega \sqrt{\mu \epsilon} G \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon} f G} \quad v_\phi = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon} G} \quad a = \text{radio de la guía}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} G \quad \eta = \sqrt{\mu / \epsilon} \quad v_g = \frac{G}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad f_0 = \text{frecuencia de corte}$$

En cualquier diagrama, el primer subíndice se puede determinar contando el número de ceros de E_r al recorrer el perímetro de la circunferencia, y dividiendo luego por dos. El segundo subíndice es el número de ceros de E_θ a lo largo de un radio, contando el cero que hay en la pared, pero no el que pueda haber en el centro (si E_θ no existe, úsese E_z).

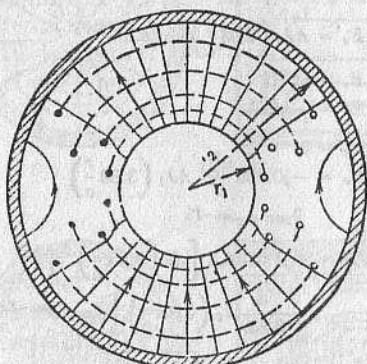


FIG. 81

axial demasiado pequeña como para propagar modos más complicados.

Entre los conductores de una línea de transmisión son posibles los modos TM y TE . El modo en una línea coaxial que corresponde a la frecuencia de corte y, por lo tanto, el que debemos evitar al elegir las dimensiones de nuestra guía, tiene un campo puramente radial; pero si el campo es radial hacia afuera en una mitad del espacio, es radial hacia adentro en la otra mitad. Véase la figura 81. El campo magnético tiene una componente axial. Este modo es análogo a dos modos rectangulares $TE_{0,1}$, cuya representación gráfica se da en la figura 74.

Como la frecuencia de corte del modo rectangular $TE_{0,1}$ es $2b$ (ecuación 424), debemos esperar que la longitud de onda en el vacío de la menor frecuencia propagada en la guía sea aproximadamente igual a la circunferencia media de la línea coaxial. Esto resulta cierto y se puede indicar con bastante aproximación que

$$\lambda_0 = 2\pi \frac{r_2 + r_1}{2} \quad (465)$$

(Esto es correcto dentro de un 4 por ciento, si $r_2/r_1 < 5$.)

Guías de onda de transmisión y de recepción. — Se envía una onda por una guía produciendo en un extremo de ésta un campo electromagnético semejante al del modo deseado. Así se puede hacer entrar ondas a una guía desde la cavidad de un resonador. El modo está entonces determinado por el diagrama del campo en la cavidad que está en la entrada de la guía.

Si el conductor interior de una línea de transmisión coaxial se corta abruptamente, el conductor exterior queda solo y actúa como una guía de onda. Una onda $TM_{0,1}$ se prolongará más allá de donde termina el conductor interior si el conductor exterior es lo suficientemente grande como para actuar de guía de ondas. Análogamente, una onda $TM_{1,1}$ se propagará más allá del extremo de una línea de dos conductores dentro de una guía cilíndrica, como se puede ver en la figura 80. En una guía rectangular, una onda $TM_{1,1}$ se podría obtener de una línea coaxial.

Se usan dentro de la guía, con gran ingenio, pequeñas antenas en forma de anillos o de cuadro para producir el campo deseado. Así, un conductor que penetra por un costado en la guía, paralelamente al campo E , producirá una onda $TE_{1,1}$ en una guía circular o una $TE_{0,1}$ en una rectangular. Una espira que penetre en un plano axial servirá al mismo propósito. Una espira en un plano transversal producirá un modo $TE_{0,1}$ en una guía cilíndrica.

Se previene la transmisión en una dirección equivocada cerrando la guía a una distancia apropiada por detrás de la antena. Una placa metálica sirve para reflejar la energía hacia la antena reforzando la señal que se propaga en la dirección primitiva.

El campo electromagnético en el punto inicial es, por supuesto, muy complicado; se lo puede considerar como la suma de muchos modos superpuestos. Los modos más complicados no se podrán propagar. Comúnmente la guía se calcula de modo que un solo modo se propague en ella, estando los otros por debajo de su frecuencia de corte.

Cualquier dispositivo usado para iniciar una onda es igualmente efectivo para recibirla en el otro extremo de la guía. La energía puede así pasar de una guía a una línea o a una cavidad.

Si el extremo de la guía se deja abierto, la energía se emite al espacio. La radiación de una guía terminada repentinamente no es muy eficaz, pues los campos de la onda guiada no pueden pasar directamente a campos de una onda ilimitada en el vacío. No están en concordancia de fase y gran parte de la energía es reflejada a la guía nuevamente. Resultan en la guía ondas estacionarias

como en el caso de alguna discontinuidad. Pero si el extremo está abierto como un cuerno, se produce una transición gradual de la guía al espacio. Algunos modos, cuyos esquemas electromagnéticos se aproximan a los de ondas en el espacio ilimitado, se irradian más fácilmente que otros. Un cuerno bien diseñado es un emisor práctico y puede tener buenas características direccionales.

Distorsión. — La discusión previa ha sido limitada a la propagación en guías de ondas sinusoidales de una sola frecuencia. Las ondas moduladas exigen la presencia de más de una frecuencia, la envolvente y la portadora. Las conclusiones a que hemos llegado no se alteran fundamentalmente si la banda de frecuencias transmitidas es angosta. Sin embargo, si la banda de frecuencias es ancha, como sucede en los pequeños pulsos cuadrados del radar y la televisión, puede ser necesario tener en cuenta las características de propagación de la guía de onda. Cualquier función del tiempo puede ser analizada en sus componentes sinusoidales por medio de un análisis de Fourier. La onda fundamental y algunas de sus armónicas (siendo de diferentes frecuencias) se propagan en la guía a velocidades algo diferentes. La componente fundamental y la armónica no tendrán en el extremo receptor la misma relación de fase que tenían en el extremo emisor. La onda total tendrá forma diferente. La tendencia general será de redondear los picos y borrar alguna característica de la onda.

Efecto de las pérdidas. — Es usualmente útil despreciar las pérdidas de energía y el amortiguamiento de ondas guiadas en guías cortas. Sin embargo, en guías largas, o en guías con material dieléctrico sólido o líquido, la pérdida puede ser considerable. Además, la pérdida es grande y el amortiguamiento es rápido en cualquier guía, si la frecuencia de transmisión está ligeramente por encima de la frecuencia de corte.

Consideremos primero la pérdida en las paredes metálicas de la guía. En la discusión previa hemos despreciado este factor. Es necesario tenerlo en cuenta. Se hace, usualmente, suponiendo la exactitud de los resultados anteriores para todas las características de la guía excepto el amortiguamiento, que se calcula partiendo de las pérdidas de energía en las paredes de la guía. Este método no es estrictamente correcto, pues la presencia de pérdidas introduce pequeños cambios en todas las características. A causa de la resistencia de las paredes de la guía, el flujo de corriente no es tan grande como debiera, la onda se curva hacia los bordes y se retrasa su velocidad de propagación y se modifica su longitud de onda. El campo del vector de Poynting de la onda está dirigido de

tal manera que tiene una pequeña componente hacia el interior de las paredes metálicas. Con amortiguamiento pequeño, sin embargo, todos estos efectos son tan pequeños que pueden despreciarse afortunadamente, pues una solución exacta de la ecuación de onda en una guía con paredes de conductividad finita sería muy difícil.

En general, se puede afirmar que todas las paredes conducen corriente, pues, si no lo hicieran, se las podría retirar sin afectar los efectos de la guía. Para determinar la distribución de corriente, consideremos que el propósito de la guía es el de permitir que fluya la corriente en las paredes y dar, por lo tanto, las condiciones de contorno adecuadas para la propagación de la onda. Sabemos, por el Capítulo X, que una superficie metálica puede actuar como superficie límite para un campo magnético alterado, y que, cuando ello sucede, el campo magnético es tangencial a la superficie metálica. La dirección de la corriente en la superficie metálica es normal a la dirección del campo magnético transversal (pues está en la dirección del rotor del campo) y la corriente por unidad de longitud es, por la ecuación (320), numéricamente igual a la componente tangencial de \mathbf{H} . Por lo tanto, considerando el diagrama del campo magnético, podemos representar la corriente en las paredes de la guía; las líneas de flujo de corriente son normales a las líneas de flujo magnético y son más densas allí donde el campo magnético lo es.

Para calcular la corriente no es necesario tener en cuenta el campo eléctrico que termina en las paredes de la guía. Mostramos ya en este capítulo que la misma distribución de corriente que servía de contorno adecuado al campo eléctrico servía para determinar el campo magnético. Esta relación es inherente a cualquier solución correcta de las ecuaciones de Maxwell. Por lo tanto, haya o no campo eléctrico que termine en las paredes de la guía, la distribución de corriente se puede encontrar a partir del campo magnético tangencial solamente.

Después de encontrar la corriente en las paredes, las pérdidas se determinan a partir de la "resistividad superficial", como fué definida en el Capítulo X. La resistividad superficial es una función de la frecuencia, siendo en realidad un efecto pelicular. Es igual a $1/\gamma\delta$ y como δ es la profundidad efectiva de penetración de corriente, la resistividad superficial puede también escribirse

$$R_s = \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\gamma}}$$

Es importante reconocer que la resistividad superficial es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la frecuencia; esto corresponde a una "profundidad pelicular" disminuida en alta frecuencia. La pérdida resulta ser I^2R_s . Para calcular el amortiguamiento cuando se conoce la pérdida es necesario calcular la energía transmitida a lo largo de la guía. Para ello, integramos el vector de Poynting $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ en cualquier sección transversal de la guía y promediamos con respecto al tiempo; el resultado es la potencia que atraviesa esa sección de la guía. En cualquier longitud de la guía se tiene:

$$P_{\text{emergente}} = P_{\text{in}} e^{-2ax}$$

(Ambos campos eléctrico y magnético se amortiguan a la misma velocidad a , de modo que la potencia se amortigua a la velocidad $2a$.) Como $P_{\text{pérdida}} = P_{\text{em}} - P_{\text{in}}$, tenemos, para un metro de longitud de la guía:

$$\frac{P_{\text{per}}}{P_{\text{in}}} = 1 - e^{-2a}$$

Desarrollando la exponencial en serie y reteniendo sólo los dos primeros términos, se obtiene una buena aproximación:

$$a = \frac{P_{\text{per}}}{2P_{\text{in}}}$$

No intentaremos una solución general para las pérdidas en todas las guías, pero indicamos los pasos principales para encontrar el amortiguamiento en una guía rectangular recorrida por un modo $TE_{0,1}$, para ilustrar los principios generales. De la tabla VI resulta:

$$E_y = \frac{A_0}{b} \sin \frac{\pi z}{b} e^{j\omega t - \Gamma x}$$

$$H_x = \frac{A_0}{j2f\mu b^2} \cos \frac{\pi z}{b} e^{j\omega t - \Gamma x}$$

$$H_z = \frac{A_0 G}{\eta b} \sin \frac{\pi z}{b} e^{j\omega t - \Gamma x}$$

En el extremo inferior de la guía (figura 70) el cuadrado del módulo de la intensidad superficial es

$$|I|^2 = |I_x|^2 + |I_z|^2 = |H_z|^2 + |H_x|^2$$

Multiplicando I^2 por R_s obtenemos una expresión para la pérdida de potencia por unidad de área. Los valores de arriba para H_x y H_z se sustituyen en esta expresión, y el resultado es la pérdida por unidad de área en una sección dada ($x = \text{constante}$) como función de z y t . El espesor z aparece dentro de un seno o un coseno al cuadrado, cuyo promedio es igual a la mitad del valor máximo. El tiempo aparece como el cuadrado de una función exponencial y, considerando que sólo tiene interés físico la componente real de la exponencial, su promedio es también la mitad de su máximo. El promedio temporal de la pérdida de energía por unidad de longitud en las superficies superior e inferior de la guía de espesor b es

$$2R_s b \left(\frac{A_0^2 G^2}{4\eta^2 b^2} + \frac{A_0^2}{16f^2 \mu^2 b^4} \right)$$

La pérdida media por unidad de longitud de ambas paredes verticales ($z=0$) se encuentra análogamente a partir de la distribución de corriente en ellas. Resulta ser:

$$2R_s a \frac{A_0^2}{8f^2 \mu^2 b^4}$$

La potencia media transmitida es la integral del campo de Poynting o, en este caso, el promedio del producto de E_y y H_z por la sección transversal:

$$\frac{A_0^2 G}{4b^2 \eta} ab$$

El amortiguamiento (nepers por metro) debido a los conductores imperfectos es la mitad de la relación de la pérdida de potencia a la potencia transmitida, o sea:

$$a = \frac{R_s \left[1 + \frac{2a}{b} (1 - G^2) \right]}{a \eta G}$$

El amortiguamiento en decibeles por metro, que es el valor usualmente empleado en la práctica, es $8,686a$.

Si la frecuencia transmitida es alta con respecto a la frecuencia de corte, el factor de guía G se aproxima a uno y a es approxima-

damente $R_s/a\eta$, aumentando como la raíz cuadrada de la frecuencia. Si la frecuencia transmitida es cercana a la frecuencia de corte, G se aproxima a cero y el amortiguamiento crece sin límite. A una frecuencia intermedia, el doble o triple de la frecuencia de corte, hay un mínimo de amortiguamiento. Las curvas de amortiguamiento para un modo rectangular $TE_{0,1}$ se muestran en la figura 82, y son típicas de otros modos y guías. La razón del gran amortiguamiento cerca de la frecuencia de corte es que la componente axial del campo se hace relativamente fuerte (a medida que G se acerca a cero) y contribuye a las pérdidas sin con-

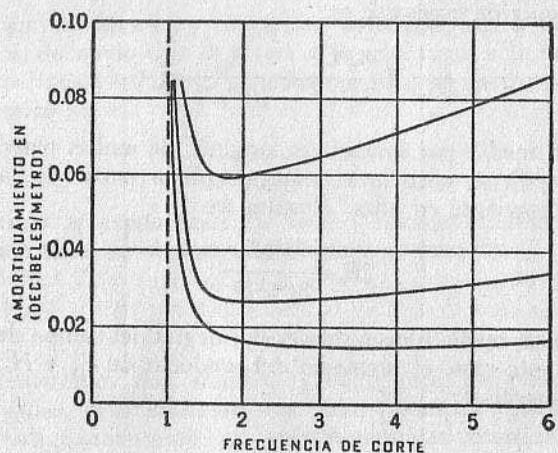


FIG. 82

tribuir a la transmisión de energía. El aumento del amortiguamiento a frecuencias muy altas, por otra parte, resulta de un "skin effect" o efecto pelicular extremo.

Una de las ondas más importantes es el modo $TE_{0,1}$ en una guía circular. En esta onda particular, mostrada en la figura 80, todas las líneas de flujo eléctrico, así como las de flujo magnético, son espiras cerradas. Ninguna línea del campo eléctrico termina en la guía. La única corriente que circula en la pared es para dar el contorno adecuado a la componente axial del campo magnético. Como en este modo (véase la tabla IX), igual que en todos los otros, la componente axial del campo se hace relativamente menor a altas frecuencias, la intensidad en las paredes se

hace menor, y este modo tiene la característica típica de ser menos amortiguado a medida que la frecuencia crece indefinidamente. Para este modo, las curvas de la figura 82 no son típicas. Si hay pérdidas en el dieléctrico interior de la guía, el amortiguamiento es un factor adicional que hay que determinar. La imperfección del dieléctrico puede incluirse en las ecuaciones de la guía de onda en la misma forma como fué incluida en el capítulo IX en las ecuaciones de las ondas en el vacío. Cuando la conductividad del dieléctrico no es nula, la ecuación de las ondas, deducida de las ecuaciones de Maxwell, debe incluir γ . Suponiendo una función sinusoidal del tiempo, escribimos en lugar de la ecuación (435),

$$\nabla^2 \mathbf{E}_0 = (-\omega^2 \mu \epsilon + j\omega \mu \gamma) \mathbf{E}_0$$

La solución para la guía de onda se deduce de esta ecuación, paralelamente al caso ya considerado en el vacío, excepto que encontramos

$$\Gamma^2 = -\omega^2 \mu \epsilon \left(G^2 - \frac{j\gamma}{\omega \epsilon} \right)$$

La parte real de Γ es a . Introducimos (como en el capítulo IX) el factor de potencia del dieléctrico como la medida práctica más conveniente de la pérdida y , desarrollando por la fórmula del binomio la expresión de Γ , resulta:

$$a = \frac{\omega \sqrt{\mu \epsilon}}{2G} \times (\text{factor de potencial})$$

Esto da a en nepers por metro para cualquier modo o guía. Para obtenerla en decibeles por metro, se multiplica por 8,686.

El amortiguamiento debido a conducción imperfecta en las paredes de la guía y al material dieléctrico imperfecto es la suma de los dos amortiguamientos componentes. Las a pueden sumarse ya como nepers o como decibeles por metro.

Guías y líneas. — La corriente en la guía cilíndrica, para una onda $TE_{0,1}$, circula alrededor de la guía. No hay componente axial de la corriente a lo largo de la guía. Esto parece extraño cuando se está acostumbrado a pensar en la línea de transmisión como un medio de conducir corriente. Pero cuando consideramos que la corriente fluye en la guía o línea sólo con el objeto de dar un contorno para los campos eléctrico y magnético, resulta un nuevo concepto.

Desde este punto de vista, los conductores de todas las guías de onda y líneas de transmisión tienen el objeto de ser recorridos por corrientes que sirvan de contorno a los campos y permitan la existencia de ondas que, siendo guiadas, no dispersen su energía inútilmente en el espacio. Este concepto puede extenderse, por cierto, a todos los conductores eléctricos, cuyo propósito es el de guiar energía en los campos eléctrico y magnético, siendo la corriente incidental.

Aunque una superficie conductora es la mejor guía de onda, no es la única clase posible. Una superficie dieléctrica también puede servir como contorno para ciertos tipos de onda. La discontinuidad entre un material de alta constante dieléctrica y otro de baja hace posible confinar una onda dentro del material de alta constante dieléctrica. La objeción práctica al uso de guías de onda dieléctricas es que las pérdidas en todos los materiales dieléctricos conocidos son demasiado grandes para una transmisión satisfactoria de ondas.

La guía de onda más apropiada para cualquier aplicación particular depende de las condiciones y particularmente de la frecuencia. A frecuencias industriales, la línea de transmisión de conductores paralelos es la mejor guía. A frecuencias de radio elevadas, es preferible la línea de conductores concéntricos, pues, aunque es más cara de construir, tiene una pérdida despreciable. Las guías de onda huecas son más fáciles de construir y de usar con ondas centimétricas y milimétricas, y trabajan bien con ciertos tipos de tubos, cavidades resonadoras, y emisores altamente direccionales. No hay duda que los tres tipos de guías de onda se continuarán usando.

PROBLEMAS

1. Una onda que se propaga en una línea concéntrica de transmisión, en la cual un conductor es un cilindro sólido y el otro un cilindro hueco coaxial, puede ser descripta en el vacío entre los conductores mediante

$$E_r = \frac{E_0}{r} \sin \frac{\omega}{v} (z - vt)$$

$$E_\theta = E_z = 0$$

a) Esta onda puede existir solamente si el campo eléctrico no tiene divergencia y si es una solución de la ecuación de onda (435). Determinese si estas condiciones se satisfacen.

PROBLEMAS

b) Usando las ecuaciones de Maxwell determinese el campo magnético de esta onda.

c) Determinese la corriente en el conductor interior, suponiendo conductividad perfecta. Muéstrese que esta corriente da un contorno adecuado para ambos campos eléctrico y magnético.

d) Determinese el campo vectorial de Poynting.

e) Determinese la velocidad de la onda si el espacio entre los conductores se llena con aceite, como en un cable de potencia, de constante dieléctrica 2,17.

2. Relacionese la velocidad de grupo de una onda en la guía rectangular hueca de la figura 60 con el ángulo entre el camino de las ondas elementales componentes y el eje de la guía. Llámese a este ángulo α .

3. Determinese el ángulo α del problema 2 en función de la longitud de onda de la componente elemental y la longitud b de la guía (véase figura 75). De éste dedúzcase la ecuación (426).

4. Determinese la velocidad de fase de la onda representada en la figura 76 y muéstrese que se puede expresar por la fórmula (427).

5. Una onda de forma $E = E_m (\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t)$ entra en una guía. Dibújese la forma de la onda al entrar y al pasar por varios puntos de la guía. La frecuencia de corte de las guías es la mitad de la frecuencia de la componente fundamental de este voltaje. Despréciense el amortiguamiento.

6. Muéstrese que la divergencia del campo eléctrico descrito por la ecuación (429) es cero en el espacio interior de la guía.

7. a) Muéstrese que la divergencia del campo magnético de la ecuación (434) es nula.

b) Pruébese que la divergencia de cualquier campo magnético dado por las ecuaciones de Maxwell (193) va a ser nulo.

8. En la nota *, al pie de la página 236, $\nabla \cdot \mathbf{t} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$ se deduce de las ecuaciones (240) y (115). Muéstrese que esta expresión se puede deducir, en cambio, de la definición de densidad de corriente en función de la carga y puede entonces combinarse con la ecuación (240) para deducir la ecuación (115) para campos no-estáticos.

9. Dedúzcase la ecuación (452) de la ecuación (435), paralelamente a como se deduce la ecuación (451) en el texto.

10. Exprésese K_x y K_z en las ecuaciones (456) en función de las constantes de las ecuaciones (452) y (453).

11. Dediúzcanse las ecuaciones (459) usando las ecuaciones de Maxwell como se sugirió.

12. Una guía hueca tiene 5 cm^2 de sección. Dibújese el factor G (tabla VIII) para un modo $TE_{1,0}$ para frecuencias desde cero hasta la frecuencia de corte, y desde ésta hasta 5 veces ella. Calcúlese la frecuencia de corte.

13. Muéstrese, a partir de las ecuaciones generales, que los modos rectangulares $TM_{1,0}$ y $TM_{0,1}$ no pueden existir.

14. Una guía hueca tiene 5 cm^2 de sección. ¿Cuál es la frecuencia de corte para cada uno de los modos siguientes: $TE_{1,0}$; $TE_{1,1}$; $TM_{1,1}$; $TM_{1,2}$?

15. ¿Cómo difiere el modo rectangular $TE_{m,n}$ del $TE_{n,m}$?

16. Hágase un esquema del modo $TE_{1,2}$ en una guía cuadrada, análogo a la representación hecha en la figura 79.

17. Represéntese el campo vectorial de la densidad de corriente en las

paredes de la guía para los siguientes modos rectangulares: $TE_{0,1}$; $TE_{1,1}$; $TM_{1,1}$. Indíquese las posiciones relativas de la densidad de corriente y de los campos eléctrico y magnético. A causa de la simetría, las corrientes en dos caras perpendiculares serán datos suficientes para cada modo.

18. Una guía hueca tiene 5 cm^2 de sección. Se excita el modo $TE_{1,0}$ en la guía con las frecuencias siguientes: a) 90 por ciento de la frecuencia de corte; b) 80 por ciento; c) la mitad. ¿A qué distancia de la guía la intensidad de la señal se reduce a 1 por ciento de la excitación?

19. Usando la tabla de funciones de Bessel, muéstrese que el campo eléctrico tangencial es cero en las caras de la guía en los cuatro modos cilíndricos de la tabla IX. Compárese con los resultados del problema 14.

20. Una guía cilíndrica hueca tiene 5 cm de diámetro. Encuéntrese la frecuencia de corte de cada uno de los cuatro modos cilíndricos. Compárese con los resultados del problema 14.

21. Compárese el significado de G en la tabla VIII y en la IX.

22. La frecuencia de una señal en una guía hueca de cobre de 5 centímetros cuadrados es de 4000 megaciclos por segundo. Se excitan los modos $TE_{1,0}$ y $TE_{1,1}$. Compárese el amortiguamiento "reactivo" del modo $TE_{1,1}$ con el amortiguamiento disipativo del modo $TE_{1,0}$, que se puede calcular aproximadamente de la figura 82.

23. La guía del problema 22 se llena con polistireno, para el cual (en este dominio de frecuencias) $\kappa = 2,50$ y el factor de potencia es 0,0008. ¿Cuál es el amortiguamiento adicional de la señal de 4000 megaciclos en el modo $TE_{1,1}$ que resulta de la pérdida en el dieléctrico? Compárese con ésta el amortiguamiento que resulta de la resistencia de la guía, como se encontró en el problema 22, notando, sin embargo, que el último es sólo una aproximación para la guía con medio dieléctrico.

CAPÍTULO XIV

ONDAS EN LA IONOSFERA

Velocidad de grupo y velocidad de fase. — La diferencia entre velocidad de grupo y de fase puede ser explicada en función de ondas elementales que se propagan con reflexiones continuas. La guía de onda es un caso especial; sin embargo, no es usualmente posible explicar las velocidades de fase y de grupo sobre la base de las ondas componentes. La condición general es la siguiente: Si la velocidad de propagación de las ondas depende de la longitud de onda, la velocidad de grupo difiere de la velocidad de fase.

El ejemplo más familiar se tiene en una onda que se dispersa en la superficie de agua. Si se tira una piedra en una superficie de agua quieta, una banda de ondas circulares concéntricas se propaga hacia afuera del punto de perturbación. Habrá un número de ondas en el grupo, como en la figura 83: las ondas cercanas al centro del grupo tienen la mayor amplitud, que decrece para las más cercanas al centro y para las más alejadas. Si se observa el fenómeno con atención, se verá que las ondas individuales se propagan con mayor velocidad que todo el grupo. Una onda que aparece en la circunferencia interior de la banda gana amplitud al avanzar hacia afuera, mientras otras aparecen detrás de ella. Despues que la onda ha pasado el centro del grupo, disminuye su amplitud

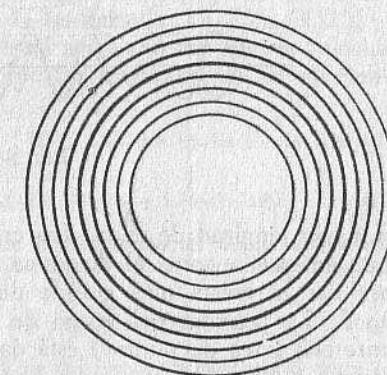


FIG. 83

hasta anularse finalmente. La onda individual se mueve con la velocidad de fase; la banda de ondas se mueve con la velocidad de grupo.

En la figura 84 se muestra una sección transversal de tal banda de ondas. En el diagrama se indica que la banda puede considerarse como la suma de dos ondas de amplitud constante, pero de frecuencia ligeramente distinta. (Esto corresponde, evidentemente, al análisis de una onda de radio modulada en la frecuencia portadora y la moduladora.) Se señalan con 1 y 2 dos crestas de la onda de menor longitud de onda; con *a* y *b* dos crestas de la

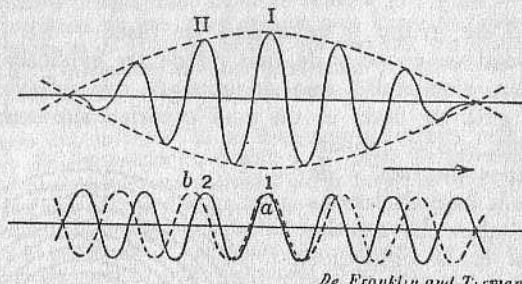


FIG. 84

de mayor longitud de onda. Las crestas 1 y *a* coinciden en el instante en que se toma el diagrama. Ahí se suman las amplitudes para dar la cresta más grande de la onda resultante, marcada con *I*. La posición del grupo de ondas (es decir, de la envolvente con línea de puntos) está dada por la posición de la cresta máxima.

Supongamos ahora que la onda de la figura 84 se propaga de izquierda a derecha, y que la naturaleza del medio es tal que las ondas de mayor longitud se propagan un poco más rápido (velocidad de fase) que las ondas cortas. En un instante posterior, la cresta *b* se va a superponer con 2. Cuando esto suceda, la cresta *a* se habrá movido más allá de la cresta 1. En consecuencia, en este instante (habiéndose movido todas las ondas una considerable distancia hacia la derecha) la cresta marcada con II tendrá el máximo de amplitud y será la cresta central del grupo resultante. Por lo tanto, el centro del grupo de ondas se habrá movido hacia la derecha una distancia menor (en una longitud de onda)

que las ondas componentes de la figura 84. La velocidad del grupo de ondas, conocida como velocidad de grupo, es, por lo tanto, menor (en este ejemplo) que la velocidad de fase.

Matemáticamente, la velocidad de fase de la onda es:

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} \quad (466)$$

como en la tabla III. La velocidad de grupo es:

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (467)$$

Por lo tanto, si β , la constante de fase, puede expresarse como una función de la frecuencia y diferenciarse, se podrá obtener la velocidad de grupo*. Por este método, la ecuación (426), que da la velocidad de grupo en una guía de ondas, se puede obtener de la velocidad de fase por medio de las fórmulas (427) o (432).

La aplicación de esta fórmula al agua muestra que la velocidad de fase es doble que la de grupo (si las ondas son lo suficiente-

* Vamos a deducir la ecuación (467). Las dos ondas de la figura 84 se expresan mediante:

$$A = M e^{j[(\omega - \Delta\omega)t - (\beta - \Delta\beta)x]} + M e^{j[(\omega + \Delta\omega)t - (\beta + \Delta\beta)x]} \quad (468)$$

Esta expresión define una onda de dos componentes de igual amplitud, pero que difieren ligeramente en la frecuencia y en el valor de β . Ordenando los términos, obtenemos:

$$A = M [e^{j(\Delta\omega t - \Delta\beta x)} + e^{-j(\Delta\omega t - \Delta\beta x)}] e^{j(\omega t - \beta x)} \quad (469)$$

La cantidad entre paréntesis es el doble del coseno, y tomando la parte real de la exponencial, se obtiene:

$$A = 2M \cos(\Delta\omega t - \Delta\beta x) \cos(\omega t - \beta x) \quad (470)$$

Este es el producto de una onda progresiva de baja frecuencia (envolvente) y otra también progresiva de alta frecuencia (la portadora). La frecuencia de la portadora es el promedio de las frecuencias de las dos componentes. La velocidad de la portadora, que es una velocidad de fase, es ω/β . La frecuencia envolvente es la mitad de la semidiferencia entre las frecuencias de las componentes. La velocidad de la envolvente es $\Delta\omega/\Delta\beta$. La velocidad de grupo es el límite de la velocidad de la envolvente cuando $\Delta\omega$ se hace muy pequeño:

$$v_g = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (471)$$

mente grandes como para ser independientes de la tensión superficial). Este resultado se obtiene de la siguiente manera:

Se sabe que la velocidad de fase de las ondas en el agua es

$$v_\phi = \frac{g}{2\pi f} = \frac{g}{\omega} \quad (472)$$

en que g es la aceleración de la gravedad y f la frecuencia de la onda. Se ve que las ondas de gran frecuencia se propagan muy lentamente. De la ecuación (466) resulta:

$$\beta = \frac{\omega}{v_\phi} = \frac{\omega^2}{g} \quad (473)$$

y diferenciando, se obtiene:

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{2\omega}{g}$$

de donde,

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = -\frac{g}{2\omega} = \frac{1}{2} v_\phi \quad (474)$$

como se afirmó más arriba.

Se debe entender que, cuando el movimiento de la onda es sinusoidal y estacionario, la velocidad de grupo no es aparente. No hay grupos; sólo pueden ser observadas ondas individuales y éstas se propagan con la velocidad de fase. Si hay presentes dos frecuencias, como en el ejemplo de la figura 84, o tres frecuencias, la de la portadora y las frecuencias laterales de una onda continuamente modulada, la situación es bien simple. Sin embargo, en una perturbación transitoria, tal como el anillo de ondas que resulta al arrojar una piedra en el agua, o la sección breve de una onda de radio emitida como un punto o una raya telegráfica, todas las ondas están presentes. El resultado es entonces extremadamente difícil de analizar*, aunque es cualitativamente similar a este caso simple.

La variación más familiar al ingeniero electricista en relación con la velocidad y la frecuencia es en una línea de transmisión con pérdidas. Si las pérdidas debidas a la resistencia y las pérdidas por escape no están proporcionadas para dar la condición de que no

* Véase, por ejemplo, *Communication Networks*, Volumen II, E. A. Guillemin, John Wiley & Sons, Nueva York, 1935.

haya distorsión, la velocidad de fase de las ondas será menor que en la misma línea sin pérdidas. La velocidad de fase de las ondas de baja frecuencia será menor que la de las de alta frecuencia. La velocidad de grupo se puede calcular conociendo la velocidad de fase. En una línea ordinaria de transmisión, la velocidad de grupo será siempre *mayor* que la velocidad de fase*.

La velocidad de fase de las ondas de radio en la ionosfera depende de la frecuencia. El efecto, en este caso, resulta del movimiento vibratorio de los electrones en la capa ionizada y la radiación de energía en diferente fase. El resultado final es una velocidad de fase mayor y una velocidad de grupo menor que la velocidad de la luz. La velocidad de grupo puede ser bastante lenta y algunos creen que esto explica la observación ocasional de señales que llegan a una estación radioreceptor a algunos segundos después que lo que llegarían si se propagaran con la velocidad de la luz en el vacío.

La ionosfera. — La ionosfera es una región que está por encima de la superficie de la tierra, en la cual hay un número considerable de electrones libres y moléculas ionizadas. La ionización existe en capas bien definidas a alturas de alrededor de 100, 200 kilómetros y más, variando del día a la noche y de estación en estación. Se cree que la radiación del sol es la responsable de la ionización. Las ondas de radio que no exceden una frecuencia crítica se reflejan en la ionosfera. La frecuencia crítica para una onda que incide oblicuamente es mayor que para una que incide normalmente. No hay un límite preciso para las capas ionizadas; la ionización crece desde un valor despreciable hasta un máximo en una distancia de kilómetros; las ondas de radio penetran más o menos profundamente en la ionosfera y son afectadas por la presencia de ionización, aun cuando finalmente regresen a tierra.

La ionosfera no refleja ondas eléctricas en la misma forma que un conductor metálico porque, primero, el número de electrones libres en la ionosfera es relativamente limitado, y, segundo, los electrones son relativamente libres como para moverse sin interferencia. Un factor importante en el comportamiento de una onda en una región ionizada es el número de electrones por centímetro cúbico. (Otros iones distintos de los electrones también se involucran en el análisis; prácticamente, sin embargo, los datos experimentales muestran que la mayor parte de los efectos de la ionosfera

* Véase E. A. Guillemin, *loc. cit.*

son el resultado de los electrones libres, y esto se debe esperar debido a su gran movilidad.)

Cuando una onda de radio incide sobre un electrón, el campo eléctrico de la onda ejerce una fuerza sobre el electrón cargado, como sobre cualquier otro cuerpo cargado. El electrón se mueve en respuesta a esta fuerza y, como el campo eléctrico es alterno, el electrón vibra. El movimiento del electrón constituye una corriente que, a su vez, afecta la propagación de la onda.

Si el electrón vibrante choca con una molécula de aire, pierde energía, pero si vibra libremente sin colisiones no habrá disipación de energía. En las capas elevadas de la ionosfera y a elevadas radiofrecuencias, un electrón puede vibrar muchas veces sin chocar. En niveles inferiores, donde el aire es más denso y a frecuencias tan bajas como las frecuencias comunes de una emisora, las pérdidas pueden influir mucho en el amortiguamiento de la onda.

Puesto que un electrón en movimiento equivale a una corriente, los campos magnéticos ejercerán una fuerza sobre él. El efecto de la componente de la onda incidente es muy pequeño como para considerarlo, pero el campo magnético terrestre tiene una importancia apreciable; el resultado principal del campo terrestre es el de introducir nuevas componentes de polarización en la onda.

Si se consideran todos los efectos, el comportamiento de la onda en la ionosfera es más bien complicado. Los principios básicos de la acción de la ionosfera se muestran mejor mediante ciertas hipótesis simplificadorias. Afortunadamente, las hipótesis que se hacen constituyen aproximaciones muy buenas para un dominio amplio de las aplicaciones prácticas.

Ondas en una región ionizada. — Consideremos una región ionizada en la cual hay tan poco aire que los electrones pueden vibrar sin chocar con las moléculas, y despreciamos el campo magnético terrestre. Una onda eléctrica pasa por esa región; es sinusoidal:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{j\omega t} \quad (475)$$

La masa del electrón es m y su carga es q (el símbolo más usual e se emplea con otro significado). El producto de la masa por la aceleración es igual a la fuerza y \mathbf{E} está polarizado según el eje X ,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = qE_x \quad (476)$$

Sustituyendo la ecuación (475) en (476) e integrando, se obtiene:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = qE_{0x} e^{j\omega t} \quad (477)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{q}{j\omega m} E_x \quad (478)$$

La primera derivada dx/dt es la velocidad del movimiento del electrón. Si hay N electrones por metro cúbico, cada uno con una carga q y moviéndose con la velocidad dada por la ecuación (478), equivalen a una densidad de corriente de

$$i_x = Nq \frac{q}{j\omega m} E_x \quad (479)$$

Más generalmente

$$i = -j \frac{Nq^2}{\omega m} \mathbf{E} \quad (480)$$

Esta corriente electrónica está fuera de fase con el campo eléctrico que la produce y es la principal diferencia entre la corriente que fluye en la ionosfera con la corriente en cualquier conductor. En un metal, el movimiento de los electrones está limitado por la resistencia del material; en la ionosfera, en que la densidad del aire es tan baja que las colisiones con las moléculas pueden despreciarse, el movimiento está limitado por la inercia de los electrones y la velocidad está, en consecuencia, fuera de fase con la fuerza que los impulsa.

Son posibles varias simplificaciones en la deducción de las ecuaciones de la propagación de ondas en un medio ionizado, pero vale la pena volver a las ecuaciones de Maxwell como punto lógico de partida. Introduciendo las ecuaciones (480) en las ecuaciones de Maxwell, obtenemos:

$$\nabla \times \mathbf{H} = i + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\frac{jNq^2}{\omega m} \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (481)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (482)$$

En la ecuación (475) supusimos un campo eléctrico sinusoidal. Como las relaciones entre los campos eléctrico y magnético y la

corriente son todas lineales, se deduce que \mathbf{H} será sinusoidal, por lo tanto:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{j\omega t} \quad (483)$$

Estas expresiones, sustituídas en las ecuaciones de Maxwell, dan:

$$\nabla \times \mathbf{H}_0 = \left(-\frac{jNq^2}{\omega m} + j\omega\epsilon \right) \mathbf{E}_0 \quad (484)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_0 = -j\omega\mu\mathbf{H}_0 \quad (485)$$

Resolviéndola como es usual, hallamos el rotor de la ecuación (484). Usamos la identidad $\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H}$, observando que la divergencia del campo magnético es nula. Así:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}_0 = -\nabla^2 \mathbf{H}_0 = \left(-\frac{jNq^2}{\omega m} + j\omega\epsilon \right) (\nabla \times \mathbf{E}_0) \quad (486)$$

Con la ecuación (485):

$$\nabla^2 \mathbf{H}_0 = -\omega^2 \mu \epsilon \left(1 - \frac{Nq^2}{\omega^2 \epsilon m} \right) \mathbf{H}_0 \quad (487)$$

Por conveniencia, escribiremos:

$$\Gamma = \omega \sqrt{-\mu \epsilon \left(1 - \frac{Nq^2}{\omega^2 \epsilon m} \right)} \quad (488)$$

y, si usamos este símbolo, la ecuación (487) se convierte en:

$$\nabla^2 \mathbf{H}_0 = \Gamma^2 \mathbf{H}_0 \quad (489)$$

que es la ecuación familiar de la onda.

Discutamos una onda específica. Elegimos una onda plana polarizada definida por:

$$H_y = H_{0y} e^{j\omega t} \quad H_x = H_z = 0 \quad (490)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0 \quad (491)$$

Véase la figura 85. Si usamos esta onda en la ecuación (489), ésta se convierte en:

$$\frac{\partial^2 H_{0y}}{\partial z^2} = \Gamma^2 H_{0y} \quad (492)$$

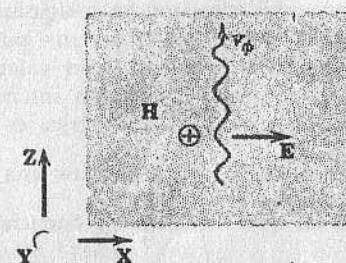
La solución de esta sencilla ecuación diferencial es *:

$$H_{0y} = H_m e^{-\Gamma z} \quad o \quad H_y = H_m e^{j\omega t - \Gamma z} \quad (493)$$

Ahora encontramos el rotor de \mathbf{H} y, de la ecuación (484), escribimos:

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \Gamma H_y = \frac{\Gamma^2}{j\omega\mu} E_x \quad (494)$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \Gamma H_y = \frac{\Gamma^2}{j\omega\mu} E_x$$



*: VECTOR HACIA DENTRO DE LA PAGINA

FIG. 85

Esto nos dice que E_x es una onda similar a H_y , y puede ser escrita

$$E_x = E_m e^{j\omega t - \Gamma z} \quad (495)$$

Si la impedancia intrínseca se define por $E_x = \eta H_y$, tenemos de la ecuación (494):

$$\eta = \frac{j\omega\mu}{\Gamma} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon \left(1 - \frac{Nq^2}{\omega^2 \epsilon m} \right)}} \quad (496)$$

Se ve en la ecuación de onda que Γ es el factor de propagación de una onda en una región ionizada. Es real o imaginario; no puede ser complejo. Si es imaginario, la onda es no amortiguada

* El signo de Γ puede ser igualmente positivo en (493), dando una onda progresiva en la dirección opuesta.

y se propaga con amplitud constante. Escribiendo $\Gamma = j\beta$, la constante de fase es

$$\beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon \left(1 - \frac{Nq^2}{\omega^2 \epsilon m} \right)} \quad (497)$$

Si la densidad de ionización es despreciable, la constante de fase se reduce a $\beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$, como en un dieléctrico perfecto. Para mayores valores de N , β es menor, y para un cierto valor crítico de N , será $\beta = 0$.

Si, por el contrario, Γ es real, no habrá propagación de la onda en el medio ionizado, pues la ecuación (495) no describe una onda a menos que Γ tenga una componente imaginaria. Con un valor real de Γ , la ecuación (495) describe una pulsación que está en fase en todas partes, disminuyendo con valores positivos de z . Esto implica que, si una región está tan intensamente ionizada y la frecuencia de la perturbación eléctrica es tan pequeña que $\frac{Nq^2}{\omega^2 \epsilon m} > 1$, la perturbación no producirá una onda, sino simplemente un campo local que se anula exponencialmente con la distancia.

Velocidad. — Es notable el hecho de que la vibración de los electrones en una región ionizada tenga el efecto de aumentar la velocidad de fase. Tenemos, según la ecuación (497),

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon \left(1 - \frac{Nq^2}{\omega^2 \epsilon m} \right)}} \quad (498)$$

Si N es cero, esto da la velocidad de fase usual en un dieléctrico. Con valores crecientes de N , la velocidad es mayor, y, a medida que se aproxima al valor crítico, más allá del cual la propagación es imposible, la velocidad de fase se aproxima a infinito.

La velocidad de grupo de una tal onda, sin embargo, es menor que en un dieléctrico perfecto. Sabiendo que $v_g = \frac{d\omega}{d\beta}$, la velocidad de grupo se encuentra fácilmente. De la ecuación (497) tenemos:

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{\mu\epsilon}{\sqrt{\mu\epsilon \left(1 - \frac{Nq^2}{\omega^2 \epsilon m} \right)}} \quad (499)$$

de donde:

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{1 - \frac{Nq^2}{\omega^2 \epsilon m}} \quad (500)$$

Puesto que cualquier región ionizada en la cual los electrones vibran libremente tiene permeabilidad y constante dieléctrica que difieren muy poco de la del vacío *, μ y ϵ , en las ecuaciones (498) y (500), pueden escribirse μ_0 y ϵ_0 . Esto es cierto en la ionosfera. Recordando que la velocidad de una onda plana en el vacío es

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \text{ las velocidades de fase y de grupo pueden escribirse:}$$

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{Nq^2}{\omega^2 \epsilon_0 m}}} \quad (501)$$

$$v_g = c \sqrt{1 - \frac{Nq^2}{\omega^2 \epsilon_0 m}}$$

Es interesante observar que

$$v_\phi v_g = c^2 \quad (502)$$

Impedancia intrínseca. — La impedancia intrínseca de un medio ionizado está dada por la ecuación (496). Esta impedancia intrínseca es mayor que la de una región no-ionizada para cualquier valor de N menor que el valor crítico, indicando que una onda tiene un campo magnético relativamente débil en comparación con su campo eléctrico. Para N mayor que el valor crítico, η es imaginario, mostrando que las componentes eléctrica y magnética del campo (que en este caso no constituyen una onda) están fuera de fase.

Reflexión normal. — Si una onda de radio llega a una capa de la ionosfera en la cual la ionización es tan densa que la onda

* Debemos señalar que μ y ϵ tienen su significado ordinario en esta deducción. Algunos autores asignan un valor ficticio de $\epsilon \left(1 - \frac{Nq^2}{\omega^2 \epsilon m} \right)$ a la constante dieléctrica de la región ionizada a fin de tener en cuenta la acción de los electrones; un tal valor es menor que lo que explica la mayor velocidad de fase.

no puede propagarse, ¿qué sucede con la energía? La energía no atraviesa la capa, pues no hay onda transmitida, ni es tampoco absorbida por la capa ionizada (despreciando las colisiones de los electrones vibrantes con las moléculas del gas); por lo tanto, la energía debe reflejarse.

Esto es, en realidad, lo que sucede. Si una onda se emite verticalmente hacia arriba desde la tierra, se aproxima a una capa de la ionosfera con incidencia normal; atraviesa las regiones bajas de la capa en la cual la ionización es cada vez más densa, propagándose con creciente velocidad de fase y decreciente velocidad de grupo a medida que se alcanza la altura de la densidad crítica de ionización. Por encima del nivel crítico no hay propagación de onda, sino un campo oscilante que se anula a mayores alturas.

La "altura virtual" de la ionosfera se encuentra experimentalmente midiendo el tiempo requerido para que una onda se propague desde la superficie terrestre hasta dicha altura y vuelva a la tierra. Dividiendo la mitad de dicho tiempo por la velocidad de la luz en el vacío, se obtiene la "altura virtual". Ésta no es la verdadera altura en la cual N tiene su valor crítico, sino un poco mayor, a causa de que la onda se propaga con una velocidad de grupo menor que c mientras atraviesa las capas inferiores de la ionosfera, justo antes y después de la reflexión. La altura virtual y la verdadera de la reflexión dependen de la frecuencia; las ondas de baja frecuencia se reflejan en las capas inferiores, mientras que las centimétricas atraviesan todas las capas de la ionosfera y penetran al espacio interplanetario. Las señales de radar que han sido recibidas después de reflejadas en la luna tienen que ser ondas de frecuencia bastante elevada para atravesar la ionosfera de la tierra.

Para saber si las ondas de radio se reflejarán en la ionosfera, conociendo la densidad de electrones podemos usar la ecuación (488). Se vió que si se cumple

$$\frac{Nq^2}{\omega^2 \epsilon m} > 1 \quad (503)$$

no puede haber propagación hacia arriba y, por lo tanto, hay reflexión. Reemplazando el valor de la masa y carga del electrón $9,11 \times 10^{-31}$ Kg, y $1,60 \times 10^{-19}$ culombios), se encuentra que habrá reflexión de una onda que se eleva *verticalmente* si su frecuencia es menor que la frecuencia crítica:

$$f = 9,0 \sqrt{N} \quad (504)$$

La frecuencia se mide en ciclos por segundo*; N significa electrones por centímetro cúbico.

Reflexión oblicua. — Las ondas de radio inciden comúnmente en la ionosfera con un ángulo oblicuo, más bien que con incidencia normal. Es usual discutir la propagación de una tal onda en función de la refracción, usando como índice de refracción la relación entre la velocidad en el vacío y la velocidad de fase en la ionosfera. Esto es consistente con la definición usual del índice de refracción en óptica y con la ecuación (360) del capítulo X. Así:

$$\text{Índice de refracción} = \frac{c}{v_\phi} = \sqrt{1 - \frac{Nq^2}{\omega^2 \epsilon m}} \quad (505)$$

La ionosfera se considera como una región de índice de refracción variable, en la cual una onda sigue una trayectoria oblicua;

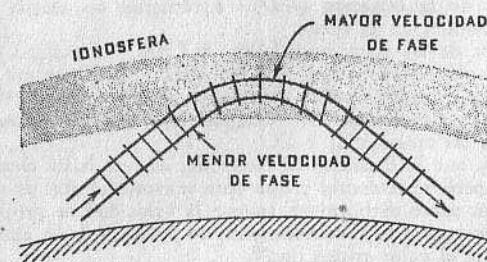


FIG. 86

el radio de curvatura está determinado por la variación del índice de refracción con la profundidad en la capa. Un rayo es devuelto a la tierra (como en la figura 86) en la misma forma que una onda luminosa o una onda en una guía son reflejadas por reflexión total, debido a que no pueden pasar de una región de mayor índice de refracción a una de menor. La ecuación (505) muestra que el índice de refracción de la ionosfera es menor que el índice de refracción del vacío (que, por definición, es 1).

Una imagen mental más sencilla resulta de considerar que la velocidad de fase es mayor en la ionosfera. Refiriéndonos de nuevo

* Nótese que si usamos N como electrones por centímetro cúbico, f será la frecuencia en kilociclos.

a la figura 86, pensemos que la parte superior de la cresta de onda se propaga más rápidamente que la inferior a causa de estar en una región más altamente ionizada. La onda se refleja nuevamente a tierra como lo muestra la figura.

Estos conceptos de "refracción" en la ionosfera son justamente otra manera de considerar el mismo fenómeno, que es también llamado "reflexión". El fenómeno, cualquiera sea el nombre que se le dé, resulta de la transferencia de energía de la onda incidente a los electrones de la ionosfera y de la rerradiación de energía por estos electrones, de tal manera de dar una nueva onda, que puede, en varios casos, ser interpretada como reflexión, refracción o simple cambio de velocidad.

PROBLEMAS

1. Dedúzcase la velocidad de grupo en una región ionizada, ecuación (500), a partir de la ecuación (497). Efectúense las etapas de diferenciación que se omiten en el texto.

2. ¿Qué factor de las ecuaciones (489) y (500) es análogo al factor de guía G del capítulo XIII? (Véase la tabla VIII.) Definase ese factor, que puede llamarse G_1 , y escribanse las ecuaciones (488), (496), (497), (498), (500) y (501) en función de G_1 . Compárese con las ecuaciones similares que aparecen en las tablas VIII y IX.

3. Suponiendo que la densidad de electrones es cero hasta cierto nivel por encima de la superficie terrestre, y que para mayores alturas es proporcional a la distancia por sobre dicho nivel, trácese la velocidad de grupo y de fase de una onda que se propaga verticalmente en función de la altura. Trácese desde $N = 0$ hasta el valor crítico de N .

4. Proyéctese una guía cónica (modo rectangular $TE_{1,0}$) de modo que tenga las mismas v y v_θ como funciones de la distancia de propagación que las correspondientes al problema 3. ¿Habrá en esta guía una reflexión correspondiente a la reflexión de una onda que incide verticalmente en la ionosfera?

5. Una onda que se propaga en el vacío entra bruscamente en una región ionizada (en una pequeña fracción de longitud de onda) en la cual \bar{N} es 0,8 del valor crítico. Tratando este problema como uno de incidencia normal, encuéntrese el factor de reflexión. Explíquese por qué esto no es típico de la ionosfera.

6. Si una región ionizada contiene un número igual de electrones e iones hidrógeno positivamente cargados, con la misma carga, pero con una masa mecánica 1.838 veces mayor, ¿qué fracción de la intensidad total producida por la onda de radio incidente resultará de la vibración de electrones? ¿La corriente debida a los electrones se sumará o restará con la debida a los iones?

7. A continuación se indican los valores de las frecuencias críticas, por encima de las cuales no hay reflexión normal, observadas en distintas horas de un día de invierno en la época del ciclo de las manchas solares que corresponde a una ionización relativamente intensa. Estos datos son para

una onda incidente verticalmente en la capa F_2 de la ionosfera. Calcúlese y trácese la densidad máxima de electrones en la capa reflectora a lo largo del día. Se da el tiempo local. El sol aparece alrededor de las 7.30

HORA (tiempo local)	FRECUENCIA CRÍTICA (megaciclos por segundo)
Medianoche	5,0
4	4,8
6	4,2
8	8,0
12	11,8
16	9,6
18	7,8
20	6,1
24	5,0

TABLA I

UNIDADES Y SÍMBOLOS

Magnitud	Símbolo	Unidad MKS	Equivalente a	Dimensión	Pág.
<i>Mecánica</i>					
Longitud	s	metro	100 centímetros	L	19
Masa	m	kilogramo	1000 gramos	M	19
Tiempo	t	segundo		T	19
Fuerza	\vec{f}	newton (volt/metro)	10^5 dynas = 102,0 gramos	LMT^{-2}	19
Energía o trabajo	W	joule (watt-segundo)	10^7 ergs	L^2MT^{-2}	19
<i>Eléctrica</i>					
Cantidad de carga	Q, q	coulomb	3×10^9 v. e. s. de q . *	Q	12
Intensidad del campo eléctrico	\vec{E}	volt/metro	3×10^{-4} v.e.s. de V /metro *	$LMT^{-2}Q^{-1}$	19
Potencial eléctrico	V	volt	$\frac{1}{300}$ v.e.s. de v .	$L^2MT^{-2}Q^{-1}$	71
Densidad de flujo eléctrico	\vec{D}	coulomb/metro cuadrado		$L^{-2}Q$	19
Flujo eléctrico		coulomb		Q	
Capacitancia o capacidad	C	faradio	9×10^9 v.e.s. de c . *	$L^{-2}M^{-1}T^2Q^2$	79
Constante dielectrica	ϵ	faradio/metro	en el vacío = ϵ_0 = $= 8,855 \times 10^{-12}$	$L^{-8}M^{-1}T^2Q^2$	19
Constante dielectrica relativa	κ	número	ϵ/ϵ_0		19
Intensidad de corriente	I	amper	3×10^9 v.e.s. de I *	$T^{-1}Q$	90
Densidad de corriente	i	ampere/metro cuadrado	$\frac{1}{3} \times 10^{-11}$ v.e.s. de R .	$L^{-2}T^{-1}Q$	91
Resistencia	R	ohm		$L^2MT^{-1}Q^{-2}$	90
Conductividad	γ	ohm/metro		$L^{-3}M^{-1}TQ^2$	91
<i>Magnética</i>					
Intensidad magnética	\vec{H}	amper (vueltas)/metro	0,01257 oersted 1,257 gilberts	$L^{-1}T^{-1}Q$ $T^{-1}Q$	108
Fuerza magnetomotriz		amper (vueltas)			
Densidad de flujo magnético	\vec{B}	weber/metro cuadrado	10 kilogausses 10^8 maxwells	$MT^{-1}Q^{-1}$ $L^2MT^{-1}Q^{-1}$	100 101
Flujo magnético	ϕ	weber	10^8 henrys absolutos	L^2MQ^{-2}	127
Inductancia	L	henry	en el vacío = μ_0 = $= 1,2566 \times 10^{-6}$	LMQ^{-2}	106
Permeabilidad relativa	μ	henry/metro	μ/μ_0		
Impedancia intrínseca	η	número	en el vacío = η_0 = $= 376,7$ ohms	$L^2MT^{-1}Q^{-2}$	107
		ohm			

* Los factores señalados con asterisco están basados en $c = 3 \times 10^8$ metros/segundo. Los valores dados para ϵ_0 y η_0 están basados en los valores más precisos (de Dorsey, *Trans. am. Phil. Soc.*, oct. 1944) de $c = 2,99773 \times 10^8$ metros/segundo.

TABLA II

FÓRMULAS Y TEOREMAS DEL ANÁLISIS VECTORIAL

Multiplicación

Producto escalar

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= AB \cos \angle A, B \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z\end{aligned}$$

Producto vectorial

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= n AB \underline{\sin \angle A, B} \\ &= i(A_y B_z - A_z B_y) + j(A_z B_x - A_x B_z) + k(A_x B_y - A_y B_x) \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Diferenciación
Coordenadas rectangulares (vectores unitarios mutuamente perpendiculares i, j, k)

$$\text{Gradiente } \nabla P = i \frac{\partial P}{\partial x} + j \frac{\partial P}{\partial y} + k \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\text{Divergencia } \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}\text{Rotor } \nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = i \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + j \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ &\quad + k \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Laplaciano } \nabla^2 F &= \nabla \cdot \nabla F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \\ \nabla^2 \mathbf{A} &= i \nabla^2 A_x + j \nabla^2 A_y + k \nabla^2 A_z\end{aligned}$$

Coordenadas cilíndricas (vectores unitarios mutuamente perpendiculares $1_r, 1_\theta, k$)

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z$$

$$\text{Gradiente } \nabla P = 1_r \frac{\partial P}{\partial r} + 1_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + k \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\text{Divergencia } \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{A_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}\text{Rotor } \nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} 1_r & 1_\theta & k \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & r A_\theta & A_z \end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$(En dos variables: \nabla \times \mathbf{A} = k \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \frac{A_\theta}{r} \right))$$

$$\text{Laplaciano } \nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{A} &= 1_r \left(\nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{A_r}{r^2} \right) + 1_\theta \left(\nabla^2 A_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{r^2} \right) \\ &\quad + k (\nabla^2 A_z)\end{aligned}$$

Coordenadas esféricas (vectores unitarios mutuamente perpendiculares)

$$1_r, 1_\theta, 1_\phi, x = r \cos \phi \sin \theta, y = r \sin \phi \sin \theta, z = r \cos \theta$$

$$\text{Gradiente } \nabla P = 1_r \frac{\partial P}{\partial r} + 1_\theta \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} + 1_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi}$$

$$\text{Divergencia } \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (A_\phi \sin \theta)$$

$$\begin{aligned}\text{Rotor } \nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} 1_r & 1_\theta & 1_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\phi \end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$\text{Laplaciano } \nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta}$$

Teoremas

Teorema de Gauss

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int \nabla \cdot \mathbf{E} dv$$

Teorema de Stokes

$$\oint \mathbf{E} \cdot ds = \int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot da$$

Campo laminar (irrotacional) y Vector potencial

$$\nabla \times (\nabla P) \equiv 0$$

e inversamente si $\nabla \times \mathbf{B} = 0$

es posible poner $\mathbf{B} = -\nabla P$

Campo solenoideal y Vector potencial

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

e inversamente si $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

es posible poner $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

TABLA III

ECUACIONES ELECTROMAGNÉTICAS

Número de la ecuación

$$240 \quad \nabla \times \mathbf{H} = \epsilon + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$193 \quad \nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$196 \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \epsilon = \gamma \mathbf{E}$$

$$115 \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

RELACIONES DE LA ONDA

$$\beta \lambda = 2\pi \quad \lambda = \frac{v}{f} = \frac{2\pi v}{\omega}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} \quad v = \frac{\omega}{\beta}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad v_\beta = \frac{d\omega}{d\beta}$$

Nota: v es la velocidad de fase y puede escribirse v_ϕ ; v_β es la velocidad de grupo.

TABLAS IV A IX

Estas tablas se encuentran insertas en las páginas que a continuación se indican:

TABLA	TÍTULO	PÁG.
IV	Potenciales electrodinámicos	197
V	Características de la Tierra	224
VI	Componentes de ondas eléctricas transversales en guías rectangulares	256
VII	Componentes de ondas transversales magnéticas en guías rectangulares	256
VIII	Fórmulas auxiliares para ondas TE y TM en guías rectangulares	257
IX	Guías de onda cilíndricas	263

INDICE GENERAL

	PÁG.
PREFACIO	7
I. EXPERIMENTOS EN UN CAMPO ELECTROSTÁTICO	11
Campos. — Flujo electrostático. — Unidades. — Problemas.	
II. ANÁLISIS VECTORIAL	22
Multiplicación de vectores. — Vectores unitarios. — Productos triples. — Campos vectoriales. — Gradiente. — Divergencia. — Rotor. — Nabla. — Coordenadas polares. — Tablas. — Problemas.	
III. ALGUNOS TEOREMAS RELATIVOS A CAMPOS	55
Divergencia. — Teorema de Gauss. — Rotor. — Teorema de Stokes. — Comparación de los teoremas. — Potencial escalar. — Campos solenoidales y vector potencial. — Problemas.	
IV. CAMPO ELECTROSTÁTICO	70
Conductores. — Campo de una esfera cargada. — Condensador esférico. — Voltaje. — Capacidad. — Polarización. — Ley de la inversa del cuadrado. — Campo dentro de una esfera hueca cargada. — El potencial integral. — Energía electrostática. — Problemas.	
V. CORRIENTE ELÉCTRICA	90
Fuerza electromotriz. — Problemas.	
VI. CAMPO MAGNÉTICO	99
Fuerza magnética. — Voltaje inducido por el movimiento. — Convención con respecto al signo. — Fuerzas entre corrientes. — Concatenación de flujo magnético. — Potencial magnético. — Energía magnética. — Materiales diamagnéticos. — Problemas.	
VII. EJEMPLOS E INTERPRETACIÓN	125
Problemas.	
VIII. HIPÓTESIS DE MAXWELL	136
Problemas.	
IX. ONDAS PLANAS	148
Campo eléctrico. — Campo magnético. — Polarización. — Notación potencial. — Propagación en un material conductor. — Pérdidas en el dielectrónico. — Potencia y vector de Poynting. — Problemas.	

	PÁG.
X. REFLEXIÓN	170
Superficies de contorno. — Conductores como contorno. — Efecto pelicular. — Reflexión de un conductor. — Reflexión dieléctrica. — Reflexión de un semiconductor. — Reflexión oblicua. — Problemas.	
XI. RADIACIÓN	196
Potenciales electrodinámicos. — Radiación. — La onda esférica. — Problemas.	
XII. ANTENAS	210
Antenas cortas. — Antena de semilongitud de onda. — Diagrama polar de radiación. — Potencia emitida. — Resistencia de radiación. — Antenas sin contacto a tierra. — Antena con toma de tierra. — Sistema de antenas. — Antenas receptoras. — Problemas.	
XIII. GUÍAS DE ONDA	234
Ondas guiadas. — Ondas finitas. — Guías de onda huecas. — Velocidad de grupo. — Velocidad de fase. — Deducción. — Ondas eléctricas transversales. — Modos. — Frecuencia de corte. — Guías de onda cilíndricas. — Modos en líneas coaxiales. — Guías de onda de transmisión y recepción. — Distorsión. — Efecto de las pérdidas. — Guías y líneas. — Problemas.	
XIV. ONDAS EN LA IONOSFERA	275
Velocidad de grupo y velocidad de fase. — La ionosfera. — Ondas en una región ionizada. — Velocidad. — Impedancia intrínseca. — Reflexión oblicua. — Problemas.	
TABLAS	291

SE TERMINÓ DE IMPRIMIR EL DÍA
VEINTE DE MARZO DE MIL NOVE-
CIENTOS CINCUENTA Y OCHO, EN
LOS TALLERES GRÁFICOS FOQUET
HNOS., MEDRANO 739, BUENOS AIRES.