

Capítulo 28

Circuitos de corriente alterna

La mayor parte de líneas de transmisión de energía eléctrica a larga distancia utilizan en la actualidad tensiones muy elevadas y corriente alterna. Históricamente, los principales inconvenientes y desventajas de la transmisión de energía mediante corriente continua de alta tensión radicaban en la dificultad y elevados gastos que suponía la conversión de la ca en cc en el extremo origen (que podría ser una central generadora de energía hidroeléctrica) y luego volver a transformarla en ca en los puntos de consumo. Debido a los recientes avances de la tecnología, se ha reavivado el interés por el empleo en las líneas de transmisión de alta tensión de corriente continua. En la ilustración puede verse una estación de conversión de cc a ca cercana a Boston (Estados Unidos), estación que se encuentra enlazada por líneas de alta tensión con corriente continua a una unidad de generación hidroeléctrica situada en James, Bay, Quebec (Canadá). Las válvulas convertidoras son elementos especiales denominados tiristores que se unen mediante conexiones Δ -Y (triángulo-estrella) a las barras de conexión que tienen salida al exterior de la central. Esta estación concreta se utiliza para convertir corriente continua en corriente alterna; pero, como otras muchas semejantes pueden funcionar en sentido inverso.



Hacia finales del siglo XIX, se planteó un cálido debate acerca de si debería utilizarse la corriente continua o alterna para suministrar energía eléctrica a los consumidores de los Estados Unidos. Thomas Edison trataba de imponer el empleo de la corriente continua mientras que Nikola Tesla y George Westinghouse apoyaban el empleo de la corriente alterna. En 1893, se escogió la corriente alterna para iluminar la Exposición Mundial de Chicago y se le proporcionó un contrato a Westinghouse para alimentar los hogares y las fábricas americanas con la corriente alterna generada en las Cataratas del Niágara.

La corriente alterna tiene la gran ventaja de que la energía eléctrica puede transportarse a largas distancias a tensiones muy elevadas y corrientes bajas para reducir las pérdidas de energía en forma de calor por efecto Joule. Luego puede transformarse, con pérdidas mínimas de energía, en tensiones más bajas y seguras con las correspondientes corrientes más altas para su empleo ordinario. Los transformadores que realizan estos cambios de tensión y de corriente, funcionan sobre la base de la inducción magnética. Estudiaremos los transformadores en la sección 28-6.

Más del 99 por ciento de la energía eléctrica utilizada hoy en día se produce mediante generadores eléctricos en forma de corriente alterna. En Norteamérica la potencia eléctrica se suministra mediante una corriente sinusoidal de 60 Hz, mientras que en prácticamente todo el resto del mundo la frecuencia es de 50 Hz. Hay otros aparatos, como los radios, los equipos de televisión y los hornos de

microondas que detectan o generan corrientes alternas de frecuencias mucho más altas. La corriente alterna se genera fácilmente mediante inducción magnética en los generadores de ca, como vimos en el capítulo 26. Aunque los generadores industriales son mucho más complicados que el sencillo dispositivo que estudiamos en la sección 26-6, están proyectados para producir una fem alterna. Vemos que, cuando es sinusoidal la salida de un generador, es también sinusoidal la corriente en una bobina, un condensador o una resistencia, aunque generalmente no esté en fase con la fem del generador. Cuando tanto la fem como la corriente son sinusoidales, pueden relacionarse fácilmente entre sí sus valores máximos. El estudio de las corrientes sinusoidales es importante porque incluso las corrientes que no son sinusoidales pueden analizarse en función de sus componentes sinusoidales utilizando el análisis de Fourier.

Examinaremos en primer lugar el comportamiento de la corriente alterna en resistencias, inductores o bobinas y condensadores, y en algunos circuitos sencillos que contienen estos elementos.

28-1 Corriente alterna en una resistencia

Al realizar el estudio de los circuitos de cc en el capítulo 23, señalábamos que las reglas de Kirchhoff se aplican a cualquier circuito en estado estacionario. Observábamos también que los estados estacionarios se alcanzan en los elementos del circuito casi inmediatamente después de que se introduzca una variación en la tensión o en la corriente. Puesto que el tiempo que se tarda en alcanzar el estado estacionario es mucho menor que el período de oscilación de los circuitos de ca, podemos aplicar las reglas de Kirchhoff a los circuitos de corriente alterna del mismo modo que lo hicimos con los de corriente continua.

Puede verse en la figura 28-1 un circuito simple de ca compuesto por un generador y una resistencia. En la figura, los signos más y menos indican el extremo de potencial más elevado y más bajo respectivamente de la fuente de fem, cuando la corriente tiene el sentido supuesto en la misma. También se han colocado signos más y menos en la resistencia para indicar el sentido de la caída de potencial correspondiente al sentido supuesto de la corriente. Obsérvese que el punto por el que la corriente entra en la resistencia está a un potencial más alto que aquél por el que sale. La caída de tensión a través de la resistencia V_R viene dada por

$$V_R = V_+ - V_- = IR \quad 28-1$$

Si la fem suministrada por el generador es \mathcal{E} , la aplicación de la regla de las mallas de Kirchhoff a este circuito nos da

$$\mathcal{E} - V_R = 0$$

Si el generador produce una fem* dada por

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{máx}} \cos \omega t$$

se tendrá

$$\mathcal{E}_{\text{máx}} \cos \omega t - IR = 0 \quad 28-2$$

La corriente en la resistencia es

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{máx}}}{R} \cos \omega t \quad 28-3$$

El máximo valor de I se presenta cuando $\cos \omega t$ tiene su valor máximo igual a 1, en cuyo caso

$$I_{\text{máx}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{máx}}}{R} \quad 28-4$$

Así podemos escribir la ecuación 28-3 como

$$I = I_{\text{máx}} \cos \omega t \quad 28-5$$

* Se vio en la sección 26-6 que la ecuación general para la fem de un generador era $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{máx}} \sin(\omega t + \delta)$. Se tiene libertad para escoger cualquier valor de la constante de fase δ conveniente, puesto que depende simplemente de la selección del origen de tiempos. Por sencillez, escogemos $\delta = \pi/2$, de modo que $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{máx}} \sin(\omega t + \pi/2) = \mathcal{E}_{\text{máx}} \cos \omega t$.

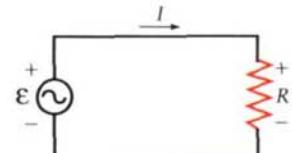


Figura 28-1 Generador de ca en serie con una resistencia R .

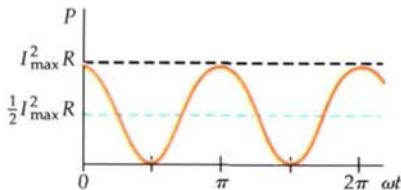


Figura 28-2 Representación gráfica de la potencia disipada en la resistencia de la figura 28-1 en función del tiempo. La potencia varía desde cero a un valor máximo $I_{\text{máx}}^2 R$. La potencia media es la mitad de la potencia máxima.

Obsérvese que la corriente que circula por la resistencia está en fase con la tensión aplicada a la misma.

La potencia disipada en la resistencia varía con el tiempo. Su valor instantáneo es

$$P = I^2 R = (I_{\text{máx}} \cos \omega t)^2 R = I_{\text{máx}}^2 R \cos^2 \omega t \quad 28-6$$

Puede verse en la figura 28-2 una representación de la potencia en función del tiempo. Varía, como puede verse, desde cero hasta su valor máximo $I_{\text{máx}}^2 R$. Normalmente nos interesa la potencia media a lo largo de uno o más ciclos. La energía W_T liberada durante el tiempo de un período ($t = T = 2\pi/\omega$) es

$$W_T = \int_0^T P dt = \int_0^T I_{\text{máx}}^2 R \cos^2 \omega t dt$$

Sustituyendo $\theta = \omega t$, se tiene

$$W_T = \frac{I_{\text{máx}}^2 R}{\omega} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta$$

La integral de esta expresión puede hallarse en las tablas y vale π . La potencia media liberada por la resistencia durante un período es esta energía dividida por T :

$$P_m = \frac{W_T}{T} = \frac{(\pi I_{\text{máx}}^2 R)/\omega}{2\pi/\omega} = \frac{1}{2} I_{\text{máx}}^2 R$$

Podríamos haber obtenido también directamente este resultado a partir de la ecuación 28-6 dándose cuenta de que el valor medio de $\cos^2 \omega t$ sobre uno o más períodos es $\frac{1}{2}$. Esto puede verse fácilmente a partir de la identidad $\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$. La representación del $\sin^2 \omega t$ tiene el mismo aspecto que la del $\cos^2 \omega t$, pero está desplazada en 90° . Ambas tienen el mismo valor medio en uno o más períodos y, como su suma es 1, el valor medio de cada una de ellas debe ser $\frac{1}{2}$. Por tanto, la potencia media disipada en la resistencia vale

$$P_m = (I^2 R)_m = \frac{1}{2} I_{\text{máx}}^2 R \quad 28-7$$

Valores eficaces

La mayoría de los amperímetros y voltímetros están diseñados para medir valores eficaces ef también llamados a veces **valores cuadráticos medios** de la corriente o de la tensión en lugar de los valores máximos o de pico. Se define el **valor eficaz ef** de una corriente I_{ef} como

$$I_{\text{ef}} = \sqrt{(I^2)_m} \quad 28-8$$

El valor medio de I^2 es

$$(I^2)_m = [(I_{\text{máx}} \cos \omega t)^2]_m = \frac{1}{2} I_{\text{máx}}^2$$

en donde hemos utilizado $(\cos^2 \omega t)_m = \frac{1}{2}$. Sustituyendo $\frac{1}{2} I_{\text{máx}}^2$ en lugar de $(I^2)_m$ en la ecuación 28-8, se tiene

$$I_{\text{ef}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_{\text{máx}} \quad 28-9$$

El valor eficaz de una magnitud cualquiera que varía sinusoidalmente es igual al valor máximo de la misma dividida por $\sqrt{2}$.

Sustituyendo $\frac{1}{2} I_{\text{máx}}^2$ por I_{ef}^2 en la ecuación 28-7, obtenemos para la potencia media disipada en la resistencia

$$P_m = I_{ef}^2 R$$

28-10

A partir de esta ecuación podemos ver que la corriente eficaz es igual a la corriente continua constante que produciría el mismo calentamiento Joule que la corriente alterna de la ecuación 28-5.

En el caso de este circuito simple de la figura 28-1, la potencia media suministrada por el generador es igual a la disipada en la resistencia:

$$P_m = (\mathcal{E}I)_m = [(\mathcal{E}_{\max} \cos \omega t)(I_{\max} \cos \omega t)]_m = \mathcal{E}_{\max} I_{\max} (\cos^2 \omega t)_m$$

o bien

$$P_m = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{\max} I_{\max}$$

Utilizando $I_{ef} = I_{\max}/\sqrt{2}$ y $\mathcal{E}_{ef} = \mathcal{E}_{\max}/\sqrt{2}$, puede escribirse así

$$P_m = \mathcal{E}_{ef} I_{ef}$$

28-11

Potencia media cedida por un generador

La corriente eficaz está relacionada con la fem eficaz de la misma forma que la corriente máxima está relacionada con la fem máxima. Puede verse esto dividiendo cada miembro de la ecuación 28-4 por $\sqrt{2}$ y utilizando $I_{ef} = I_{\max}/\sqrt{2}$ y $\mathcal{E}_{ef} = \mathcal{E}_{\max}/\sqrt{2}$:

$$I_{ef} = \frac{\mathcal{E}_{ef}}{R}$$

28-12

Las ecuaciones 28-10, 28-11 y 28-12 tienen la misma forma que las ecuaciones correspondientes a los circuitos de corriente continua, sustituyendo en estas últimas I por I_{ef} y \mathcal{E} por \mathcal{E}_{ef} . Así pues, si utilizamos valores eficaces para la corriente y la fem, podemos calcular la potencia y el calor generado empleando las mismas ecuaciones obtenidas en corriente continua.

Ejercicio

Se conecta una resistencia de 12Ω a una fem sinusoidal que tiene un valor de pico de 48 V. Hallar (a) la corriente eficaz, (b) la potencia media y (c) la potencia máxima. [Respuestas: (a) 2,83 A, (b) 96 W, (c) 192 W]

La energía eléctrica que se suministra a nuestras viviendas por la compañía de electricidad tiene una frecuencia de 50 Hz y una tensión de 220 V eficaces. (En algunas instalaciones antiguas, la tensión es de 127 V solamente. Para un consumo de potencia determinado, se requiere sólo la mitad aproximadamente de corriente a 220 V que a 127 V, pero la tensión de 220 V es mucho más peligrosa que la de 127 V. Si se recibe una descarga con 220 V, las probabilidades de que sea fatal son más elevadas que si se recibiese a 127 V.) Si se conecta un calentador de 1600 W, consumirá una corriente de

$$I_{ef} = \frac{P_m}{\mathcal{E}_{ef}} = \frac{1600 \text{ W}}{220 \text{ V}} = 7,27 \text{ A}$$

La tensión en todos los enchufes se mantiene a 220 V, con independencia de la corriente que circule. Por tanto, todos los aparatos enchufados en la red están esencialmente en paralelo. De este modo, si se enchufa un tostador de 500 W en otro punto del circuito en el que está conectado el calentador, extraerá una corriente de $500 \text{ W}/220 \text{ V} = 2,27 \text{ A}$, de modo que la corriente total a través del circuito será próxima a los 10 A. La mayoría de los cableados de las casas están calculados para soportar unas corrientes máximas del orden de 15 a 20 A. Una corriente mayor que ésta sobrecalentará el cableado y habrá peligro de incendio. Por consiguiente, cada circuito está equipado con un interruptor automático del circuito (o un fusible en los edificios antiguos). En el caso de un circuito de 20 A, el interruptor se abre (o el fusible «salta») interrumpiéndose el circuito, cuando la corriente excede de 20 A. La carga de potencia máxima que soportará un

circuito con un interruptor general de 20 A es

$$P_m = \mathcal{E}_{ef} I_{ef} = (220V)(20\text{ A}) = 4,4\text{ kW}$$

Puesto que la mayoría de los edificios modernos necesitan potencias considerablemente mayores que 4,4 kW, se instalan varios circuitos separados, cada uno con su interruptor independiente y con los enchufes necesarios.

Ejemplo 28-1

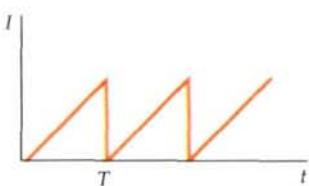


Figura 28-3 Onda en forma de diente de sierra correspondiente a la corriente del ejemplo 28-1.

Se utiliza a veces en electrónica una corriente cuya onda tiene forma de diente de sierra, como se ve en la figura 28-3. En la región $0 < t < T$, la corriente viene dada por $I = (I_0/T)t$. Hallar (a) la corriente media y (b) la corriente eficaz correspondiente a esta forma de onda.

(a) El valor medio de cualquier magnitud en un cierto intervalo T es la integral de dicha magnitud en todo ese intervalo dividido por T . La corriente media es, pues

$$I_m = \frac{1}{T} \int_0^T I dt = \frac{1}{T} \int_0^T (I_0/T)t dt = \frac{I_0}{T^2} \frac{T^2}{2} = \frac{1}{2} I_0$$

La corriente media es la mitad de la corriente máxima, como era de esperar.

(b) La corriente al cuadrado tiene un valor medio de

$$(I^2)_m = \frac{1}{T} \int_0^T I^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T (I_0/T)^2 t^2 dt = \frac{I_0^2}{T^3} \frac{T^3}{3} = \frac{1}{3} I_0^2$$

Por tanto la corriente eficaz es $I_{ef} = I_0/\sqrt{3}$.

Cuestiones

1. ¿Cuál es la corriente media que circula por la resistencia de la figura 28-1?
2. La potencia instantánea en la resistencia de la figura 28-1, ¿es alguna vez negativa?

28-2 Corriente alterna en bobinas y condensadores

El comportamiento de la corriente alterna en las bobinas y condensadores es muy diferente del que se tiene con corriente continua. Por ejemplo, cuando un condensador está en serie en un circuito de cc, la corriente se interrumpe por completo cuando el condensador está totalmente cargado. Pero si la corriente es alterna, la carga fluye continuamente entrando y saliendo alternativamente de las placas del condensador. Veremos que si la frecuencia de la corriente alterna es grande, un condensador casi no impide la circulación de la corriente. Inversamente, una bobina normalmente tiene una resistencia pequeña y, por tanto, su efecto sobre la corriente continua también lo es. Pero cuando la corriente que circula por la bobina está cambiando continuamente, se genera una fuerza contraelectromotriz que es proporcional al ritmo de variación de la corriente. Cuanto mayor es la frecuencia de la corriente que circula por una bobina, mayor será su variación por unidad de tiempo y, por tanto, mayor será la fuerza contraelectromotriz. Así, una bobina ejerce sobre la corriente alterna un efecto que es justamente el opuesto al que realiza un condensador. A frecuencias muy bajas, una bobina apenas ofrece impedimento a la corriente, pero a altas frecuencias se opone grandemente al flujo de corriente debido a dicha fuerza contraelectromotriz.

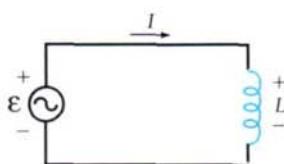


Figura 28-4 Generador de ca en serie con una bobina cuya inductancia es L .

Bobinas

En la figura 28-4 puede verse una bobina conectada a los terminales de un generador de ca. Cuando la corriente va aumentando en la bobina, se genera en ella una fem de valor $L di/dt$ debida al flujo variable (ecuación 26-20). Normalmente

la caída de potencial en la bobina debida a esta fem es mucho mayor que la originada por la resistencia de la misma, IR . En la figura se han colocado sobre la bobina unos signos más y menos para indicar el sentido de la caída de potencial cuando dI/dt es positivo para el sentido supuesto de la corriente. Obsérvese que para dI/dt positivo, el punto por el que entra la corriente en la bobina está a un potencial más elevado que el punto por el que sale. La caída de tensión en la bobina V_L viene dada entonces por

$$V_L = V_+ - V_- = L \frac{dI}{dt} \quad 28-13$$

Aplicando la regla de las mallas de Kirchhoff a este circuito, se obtiene

$$\mathcal{E} - V_L = 0$$

en donde $V_L = L dI/dt$ es el valor de la fem de la bobina. Haciendo que la fem del generador sea igual a $\mathcal{E}_{\text{máx}} \cos \omega t$, se tiene

$$\mathcal{E} = L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E}_{\text{máx}} \cos \omega t \quad 28-14$$

Multiplicando ambos miembros por dt y dividiendo por L , tendremos

$$dI = \frac{\mathcal{E}_{\text{máx}}}{L} \cos \omega t dt \quad 28-15$$

Se obtiene el valor de la corriente I integrando ambos miembros de esta ecuación:

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{máx}}}{L} \int \cos \omega t dt = \frac{\mathcal{E}_{\text{máx}}}{\omega L} \sin \omega t + C \quad 28-16$$

en donde C es una constante de integración. La constante es el valor medio de la corriente, puesto que el valor promedio de $\sin \omega t$ en uno o más ciclos es cero. Escogiendo el componente de cc de la corriente como nulo, tendremos

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{máx}}}{\omega L} \sin \omega t = I_{\text{máx}} \sin \omega t \quad 28-17$$

en donde

$$I_{\text{máx}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{máx}}}{\omega L} \quad 28-18$$

es el valor máximo de la corriente.

En la figura 28-5 se indican la corriente I y la caída de tensión V_L en la bobina en función del tiempo. La corriente no está en fase con la caída de tensión en la bobina, que es igual a la tensión del generador. A partir de la misma podemos ver que el valor máximo de la tensión se produce 90° o un cuarto de período antes de que se presente el correspondiente valor máximo de la corriente. Así pues, se dice que *la caída de tensión en una bobina adelanta a la corriente en 90°* . Podemos comprender esto físicamente. Cuando la corriente es cero, pero está creciendo, su variación por unidad de tiempo tiene su valor máximo, de modo que la fem inducida en la bobina está en su valor máximo. Un cuarto de ciclo más tarde, la corriente pasa por su máximo. En este momento, dI/dt es cero, de forma que V_L es también cero. Utilizando la identidad trigonométrica $\sin \omega t = \cos(\omega t - \pi/2)$, puede escribirse la ecuación 28-17 para la corriente como

$$I = I_{\text{máx}} \cos(\omega t - \pi/2) \quad 28-19$$

La relación entre la corriente máxima (o eficaz) y la tensión máxima (o eficaz) en el caso de una bobina, puede escribirse de una forma semejante a la ecuación 28-4 correspondiente a una resistencia. Según la ecuación 28-18, tenemos

$$I_{\text{máx}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{máx}}}{\omega L} = \frac{\mathcal{E}_{\text{máx}}}{X_L} \quad 28-20$$

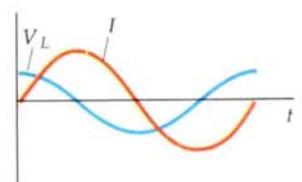


Figura 28-5 La corriente y la tensión que circula y se aplica a la bobina de la figura 28-4 en función del tiempo. La tensión máxima aparece un cuarto de período antes que se presente el máximo de la corriente. Así pues, se dice que la tensión adelanta a la corriente en un cuarto de período o 90° .

en donde

Reactancia inductiva

$$X_L = \omega L$$

28-21

se denomina **reactancia inductiva** o **inductancia**. Como $I_{\text{ef}} = I_{\text{máx}}/\sqrt{2}$ y $\mathcal{E}_{\text{ef}} = \mathcal{E}_{\text{máx}}/\sqrt{2}$, la corriente viene dada por

$$I_{\text{ef}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{ef}}}{\omega L} = \frac{\mathcal{E}_{\text{ef}}}{X_L}$$

28-22

Al igual que la resistencia, la reactancia inductiva tiene unidades de ohmio. Como puede verse en la ecuación 28-20, cuanto mayor sea la reactancia para una fem dada, menor es la corriente. A diferencia de la resistencia, la reactancia inductiva depende de la frecuencia de la corriente—cuanto mayor es la frecuencia, mayor es la reactancia.

La potencia instantánea cedida a la bobina por el generador es

$$\begin{aligned} P &= \mathcal{E}I = (\mathcal{E}_{\text{máx}} \cos \omega t)(I_{\text{máx}} \sin \omega t) \\ &= \mathcal{E}_{\text{máx}} I_{\text{máx}} \cos \omega t \sin \omega t \end{aligned}$$

y la potencia media correspondiente es nula. Puede verse utilizando la relación

$$\cos \omega t \sin \omega t = \frac{1}{2} \sin 2\omega t$$

El valor de este término oscila dos veces durante cada ciclo y es negativo la mitad del tiempo y positivo la otra mitad. Por tanto, la bobina no disipa ninguna energía. (Esto resulta cierto sólo si puede despreciarse la resistencia de la bobina.)

Ejemplo 28-2

Se coloca una bobina conectada a un generador de ca que tiene una fem máxima de 120 V. Hallar la reactancia inductiva y la corriente máxima cuando la frecuencia es 60 Hz y cuando vale 2000 Hz.

La reactancia inductiva a 60 Hz es

$$X_{L1} = \omega_1 L = 2\pi f_1 L = (2\pi)(60 \text{ Hz})(40 \times 10^{-3} \text{ H}) = 15,1 \Omega$$

y a 2000 Hz vale

$$X_{L2} = \omega_2 L = 2\pi f_2 L = (2\pi)(2000 \text{ Hz})(40 \times 10^{-3} \text{ H}) = 503 \Omega$$

El valor máximo de las corrientes a estas frecuencias es

$$I_{1,\text{máx}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{máx}}}{X_{L1}} = \frac{120 \text{ V}}{15,1 \Omega} = 7,95 \text{ A}$$

$$I_{2,\text{máx}} = \frac{120 \text{ V}}{503 \Omega} = 0,239 \text{ A}$$

Condensadores

En la figura 28-6 se muestra un condensador conectado a los terminales de un generador. Para el sentido de la corriente indicado, la corriente está relacionada con la carga por

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

De nuevo se han colocado los signos más y menos sobre las placas del condensador indicando que existe una carga positiva en la placa en donde entra la corriente.

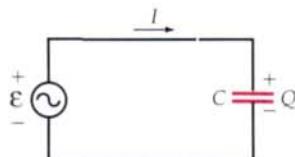


Figura 28-6 Generador de ca en serie con un condensador de capacidad C .

te y una carga negativa en la placa por donde sale la corriente. La caída de tensión en el condensador es

$$V_C = V_+ - V_- = \frac{Q}{C} \quad 28-23$$

A partir de la regla de las mallas de Kirchhoff, tenemos

$$\mathcal{E} - V_C = 0$$

o bien

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \cos \omega t = \frac{Q}{C}$$

Así pues,

$$Q = \mathcal{E}_{\max} C \cos \omega t$$

La corriente es

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega \mathcal{E}_{\max} C \sin \omega t$$

El valor máximo de I se presenta cuando $\sin \omega t = -1$, en cuyo caso

$$I_{\max} = \omega \mathcal{E}_{\max} C \quad 28-24$$

Así, la corriente puede escribirse

$$I = -\omega \mathcal{E}_{\max} C \sin \omega t = -I_{\max} \sin \omega t$$

Utilizando la identidad trigonométrica $\sin \omega t = -\cos(\omega t + \pi/2)$, se tiene

$$I = -\omega C \mathcal{E}_{\max} \sin \omega t = I_{\max} \cos(\omega t + \pi/2) \quad 28-25$$

Como sucedía con la bobina, la corriente del condensador no está en fase con la caída de tensión en el condensador, que es igual a la tensión del generador. En la figura 28-7, se han representado la corriente I y la caída de tensión en el condensador $V_C = Q/C$ en función del tiempo. Puede verse que el valor máximo de la tensión se presenta 90° o un cuarto de período después de aparecer el valor máximo de la corriente. Así pues, *la caída de tensión en un condensador está retrasada respecto a la corriente en 90°*. Es fácil, de nuevo, entender esto físicamente. La máxima variación del crecimiento de la carga dQ/dt debe ocurrir cuando la carga Q sea nula y, por tanto, V_C sea cero. Al aumentar la carga en la placa del condensador, la corriente disminuye hasta que la carga es máxima (de modo que V_C es máxima) y la corriente es cero. Entonces la corriente se hace negativa cuando la carga fluye en sentido opuesto, saliendo del condensador.

Una vez más, la relación entre la corriente máxima (o eficaz) y la tensión máxima (o eficaz) en un condensador puede escribirse en forma semejante a la ecuación 28-4 correspondiente a una resistencia. Según la ecuación 28-24, se tiene

$$I_{\max} = \omega C \mathcal{E}_{\max} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{1/\omega C} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{X_C}$$

y, análogamente,

$$I_{\text{ef}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{ef}}}{1/\omega C} = \frac{\mathcal{E}_{\text{ef}}}{X_C} \quad 28-26$$

en donde

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$28-27 \quad \text{Reactancia capacitiva}$$

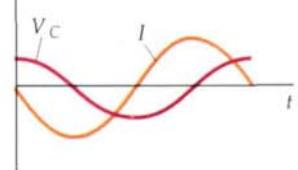


Figura 28-7 La corriente y la tensión en un condensador como el de la figura 28-6 en función del tiempo. La tensión máxima se produce un cuarto de período después de presentarse la corriente máxima. Así, se dice que la tensión retrasa respecto a la corriente en 90°.

es la denominada **reactancia capacitiva** o capacitancia del circuito. Como la resistencia y la reactancia inductiva, la reactancia capacitiva viene en unidades de ohmio, y al igual que la reactancia inductiva, depende de la frecuencia de la corriente. En este caso, cuanto mayor es la frecuencia, menor es la reactancia. Como sucede con una bobina, la potencia media que un generador de ca suministra a un condensador es cero. Esto se debe a que la fem es proporcional al $\cos \omega t$ y la corriente lo es al $\sin \omega t$, de forma que $(\cos \omega t \sin \omega t)_m = 0$. Así pues, como las bobinas, los condensadores ideales no disipan energía.

Como la carga no puede pasar a través del espacio que existe entre las placas de un condensador, puede parecer extraño que aparezca una corriente alterna de forma permanente en el circuito de la figura 28-6. Recuérdese, no obstante, que cuando un condensador descargado se conecta a los terminales de una fuente de tensión continua (como una pila), existe una corriente que disminuye exponencialmente con el tiempo hasta que las placas se cargan al mismo potencial que la pila. Consideremos un condensador inicialmente descargado aplicado a una fuente de fem, con la placa superior unida al terminal positivo. Al principio, se está introduciendo en la placa superior una carga positiva, mientras que sale la misma cantidad de la placa negativa. (Como es lógico, lo que realmente circulan son electrones en sentido opuesto al señalado.) El efecto es el mismo que si realmente fluyese carga a través del espacio situado entre las placas. Si la fuente de fem es un generador de ca, la diferencia de potencial cambia de signo cada semiperíodo, como se ve en la figura 28-7. Mantengamos constante la fem del generador pero aumentemos su frecuencia. Durante cada medio ciclo, se transfiere la misma carga $\Delta Q = 2C \mathcal{E}_{\text{máx}}$ bien hacia el condensador, o saliendo de él, pero el número de ciclos por segundo aumenta, de modo que la corriente «a través» del condensador aumenta en proporción a la frecuencia. De aquí que, cuanto mayor sea la frecuencia, menor es el impedimento que el condensador pone al flujo de cargas.

Ejemplo 28-3

Un condensador de $20 \mu\text{F}$ se conecta a un generador que tiene una fem máxima de 100 V . Hallar la reactancia capacitiva y la corriente máxima cuando la frecuencia es 60 Hz y cuando es 5000 Hz .

La reactancia capacitiva a 60 Hz vale

$$\begin{aligned} X_{C1} &= \frac{1}{\omega_1 C} = \frac{1}{2\pi f_1 C} \\ &= [2\pi(60 \text{ Hz})(20 \times 10^{-6} \text{ F})]^{-1} = 133 \Omega \end{aligned}$$

y a 5000 Hz resulta ser

$$\begin{aligned} X_{C2} &= \frac{1}{\omega_2 C} = \frac{1}{2\pi f_2 C} \\ &= [2\pi(5000 \text{ Hz})(20 \times 10^{-6} \text{ F})]^{-1} = 1,59 \Omega \end{aligned}$$

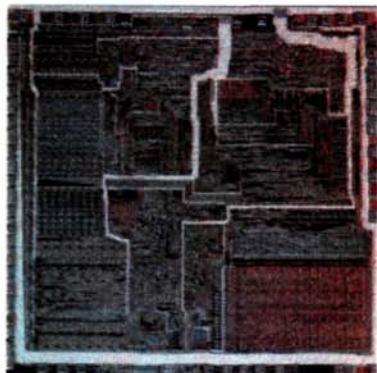
La corriente máxima es entonces

$$I_{1,\text{máx}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{máx}}}{X_{C1}} = \frac{100 \text{ V}}{133 \Omega} = 0,754 \text{ A}$$

y

$$I_{2,\text{máx}} = \frac{100 \text{ V}}{1,59 \Omega} = 62,8 \text{ A}$$

Los circuitos de las figuras 28-4 y 28-6 contienen sólo un generador y una bobina o un condensador. En ellos, la caída de tensión a través de la bobina o del condensador es igual a la tensión del generador. En circuitos más complicados que contienen tres o más elementos, la caída de tensión a través de cada uno de



(a)



(b)

(a) El microprocesador 8086 es un circuito integrado que contiene 29 000 transistores y se utiliza fundamentalmente en computadoras personales. Gran parte del proyecto y diseño del 8086 fue dibujado a mano sobre papel, que se utilizó para hacer un montaje con recortes de láminas semejantes al celofán de color rojo como se ve en (b). En la actualidad los computadores se utilizan para dibujar diseños de microcircuitos.

ellos no es igual normalmente a la tensión del generador. Resulta útil, por tanto, escribir las ecuaciones 28-22 y 28-26 en función de la caída de tensión a través de la bobina y del condensador, respectivamente. Si $V_{L,\text{ef}}$ es la caída de tensión eficaz en una bobina, la corriente eficaz que pasa por ella es

$$I_{\text{ef}} = \frac{V_{L,\text{ef}}}{\omega L} = \frac{V_{L,\text{ef}}}{X_L} \quad 28-28$$

La caída de tensión en la bobina adelanta a la corriente en 90° . Análogamente, si $V_{C,\text{ef}}$ es la tensión eficaz en las placas del condensador, la corriente eficaz en el condensador viene dada por

$$I_{\text{ef}} = \frac{V_{C,\text{ef}}}{1/\omega C} = \frac{V_{C,\text{ef}}}{X_C} \quad 28-29$$

La caída de tensión en el condensador está retrasada respecto a la corriente en 90° . También pueden escribirse las ecuaciones 28-28 y 28-29 en función de las tensiones y corrientes máximas.

Cuestiones

3. En un circuito constituido por un generador y una bobina, ¿existe algún momento en que la bobina absorbe energía del generador? ¿Existe algún momento en que la bobina suministra energía al generador?
4. En un circuito formado por un generador y un condensador, ¿existe algún momento en que el condensador absorbe energía del generador? ¿Existe algún momento en que el condensador suministra energía al generador?

28-3 Fasores

En las secciones anteriores vimos que la tensión que aparece en una resistencia está en fase con la corriente, mientras que la tensión en la bobina adelanta a la corriente en 90° , y la que existe entre las placas del condensador retrasa respecto a la corriente en 90° . Estas relaciones de fase pueden representarse mediante vectores bidimensionales denominados **fasores**. En la figura 28-8, la tensión en una resistencia se ha representado por un vector \mathbf{V}_R cuyo valor o módulo es $I_{\text{máx}}R$ y que forma un ángulo θ con el eje x . Esta tensión está en fase con la corriente. En general, una corriente estacionaria en un circuito de ca varía con el tiempo como

$$I = I_{\text{máx}} \cos \theta = I_{\text{máx}} \cos (\omega t - \delta) \quad 28-30$$

siendo ω la frecuencia angular y δ cierta constante de fase. La caída de tensión en una resistencia viene entonces por

$$V_R = IR = I_{\text{máx}}R \cos (\omega t - \delta) \quad 28-31$$

El valor instantáneo de la caída de tensión en una resistencia es así igual al componente x del vector fotor \mathbf{V}_R , que gira en sentido antihorario con una frecuencia angular ω . La corriente I puede escribirse como el componente x de un fotor I que tenga la misma orientación que \mathbf{V}_R .

Cuando se conectan juntos varios componentes en un circuito en serie, sus tensiones se suman. Cuando se conectan en paralelo, sus corrientes se suman. Sumar senos y cosenos de diferentes amplitudes y fases de forma algebraica, es complicado e incómodo. Es mucho más fácil hacerlo mediante suma de vectores.

Los fasores se emplean de la forma siguiente. Se escribe cualquier tensión o corriente como $A \cos (\omega t - \delta)$, que a su vez se considera como componente x (A_x) de un fotor A que forma un ángulo $(\omega t - \delta)$ con el eje x . En lugar de su-

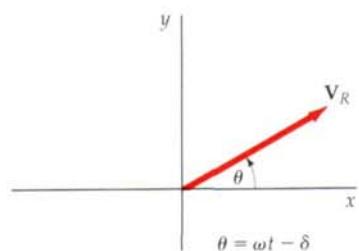


Figura 28-8 La tensión aplicada a una resistencia puede representarse mediante un vector \mathbf{V}_R denominado fotor, que tiene de módulo el valor $I_{\text{máx}}R$ y que forma un ángulo $\theta = \omega t - \delta$ con el eje x . El fotor rota con una frecuencia angular ω . La tensión $V_R = IR$ es el componente x de \mathbf{V}_R .

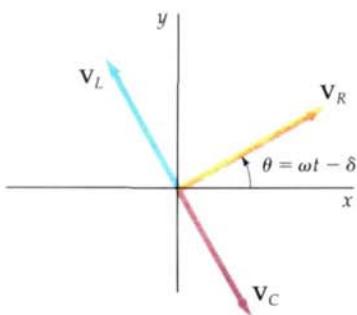


Figura 28-9 Representaciones de los fasores de las tensiones V_R , V_L y V_C . Cada vector gira en sentido antihorario con una frecuencia angular ω . En un instante cualquiera, la tensión aplicada a un elemento es igual al componente x del factor correspondiente y la suma de las tensiones es igual al componente x del vector suma $V_R + V_L + V_C$.

mar dos tensiones o corrientes algebraicamente como $A \cos(\omega t - \delta_1) + B \cos(\omega t - \delta_2)$, se representan estas magnitudes como fasores A y B y se halla la suma vectorial de los fasores $C = A + B$ geométricamente. La tensión o corriente resultante es entonces el componente x del fasor resultante, $C_x = A_x + B_x$. La representación geométrica muestra de forma conveniente las amplitudes y fases relativas de los fasores.

Consideremos un circuito que contiene una bobina L , un condensador C y una resistencia R , conectados en serie todos ellos. Por todos pasará la misma corriente, que se representa como el componente x del fasor de corriente I . La tensión en la bobina V_L se representa con un fasor V_L que tiene el valor $I_{\max}X_L$ y que adelanta al fasor de corriente I en 90° . Análogamente, la tensión en el condensador V_C se representa mediante un fasor V_C que tiene el valor $I_{\max}X_C$ y que retrasa respecto a la corriente en 90° . En la figura 28-9 pueden verse los tres fasores V_R , V_L y V_C . Según transcurre el tiempo, los tres fasores giran en sentido antihorario con una frecuencia angular ω , de modo que no varían las posiciones relativas de los vectores. En un instante cualquiera, el valor instantáneo de la caída de tensión en cualquiera de estos elementos es igual al componente x del fasor correspondiente.

28-4 Circuitos LC y LCR sin generador

En esta sección estudiaremos algunos circuitos simples que contienen bobinas, condensadores y resistencias, pero no generadores. Añadiremos un generador a estos circuitos en la próxima sección. Examinemos primero un circuito sencillo con una bobina y un condensador pero sin ninguna resistencia, como se indica en la figura 28-10. Supongamos que en el condensador existe una carga inicial Q_0 y que el interruptor está abierto. Una vez cerrado el interruptor en $t=0$, la carga empieza a circular por la bobina. En la figura se han escogido los signos de Q en el condensador y el sentido de la corriente I de forma que

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Aplicando las reglas de las mallas de Kirchhoff al circuito con los signos supuestos de Q e I , se tiene

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad 28-32$$

Sustituyendo I por dQ/dt en esta ecuación, obtenemos

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0 \quad 28-33$$

La ecuación 28-33 tiene la misma forma que la correspondiente a la aceleración de una masa situada en un muelle:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad 28-34$$

El comportamiento de un circuito LC es, por tanto, análogo al de una masa unida a un muelle, siendo L análogo a la masa m , Q análogo a la posición x y $1/C$ análogo a la constante del muelle k . Además la corriente I es también análoga a la velocidad v , puesto que $v = dx/dt$ e $I = dQ/dt$. En mecánica la masa de un objeto describe la inercia del mismo. Cuanto mayor sea la masa, más difícil será cambiar la velocidad del objeto. De forma semejante, la inductancia L puede considerarse como la inercia de un circuito de ca. Cuanto más grande es la inductancia, más difícil resulta variar la corriente I .

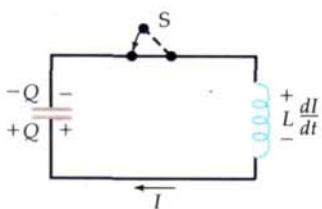


Figura 28-10 Circuito LC . Cuando se cierra el interruptor, el condensador inicialmente cargado se descarga a través de la bobina, produciendo una fuerza contraelectromotriz.

Si dividimos por L cada término de la ecuación 28-33 y reordenamos, se tiene

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC} Q \quad 28-35$$

que es análogo a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x = -\omega^2 x \quad 28-36$$

en donde $\omega^2 = k/m$. En el capítulo 12, se vio que podíamos escribir la solución de la ecuación 28-36 correspondiente al movimiento armónico simple en la forma

$$x = A \cos(\omega t - \delta)$$

en donde $\omega = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia angular, A es la amplitud y δ es la constante de fase, que depende de las condiciones iniciales. Puede ponerse la ecuación 28-35 en la misma forma escribiendo ω^2 en lugar de $1/LC$. Entonces,

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\omega^2 Q \quad 28-37$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad 28-38$$

La solución de la ecuación 28-38 es

$$Q = A \cos(\omega t - \delta)$$

Se halla la corriente derivando esta solución:

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega A \sin(\omega t - \delta)$$

Si se escoge que las condiciones iniciales sean $Q = Q_0$ e $I = 0$ en $t = 0$, la constante de fase δ es nula y $A = Q_0$. Las soluciones son entonces

$$Q = Q_0 \cos \omega t \quad 28-39$$

y

$$I = -\omega Q_0 \sin \omega t = -I_{\max} \sin \omega t \quad 28-40$$

en donde $I_{\max} = \omega Q_0$.

En la figura 28-11 se han dibujado los gráficos de Q e I en función del tiempo. La carga oscila entre los valores $+Q_0$ y $-Q_0$ con frecuencia angular $\omega = \sqrt{1/LC}$. La corriente oscila entre $+\omega Q_0$ y $-\omega Q_0$ con la misma frecuencia pero desfasada 90° respecto a la carga. La corriente es máxima cuando la carga es cero, y nula cuando la carga es máxima.

En nuestro estudio de las oscilaciones de una masa unida a un muelle vimos que la energía total es constante pero que oscila entre la energía cinética y la potencial. En nuestro circuito LC , también tenemos dos clases de energía, la eléctrica y la magnética. La energía eléctrica almacenada en el condensador es

$$U_e = \frac{1}{2} Q V_C = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Sustituyendo Q por $Q_0 \cos \omega t$, tenemos para la energía eléctrica

$$U_e = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2 \omega t \quad 28-41$$

Esta energía eléctrica oscila entre su valor máximo $Q_0^2/2C$ y cero. La energía magnética almacenada en la bobina es

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2 \quad 28-42$$

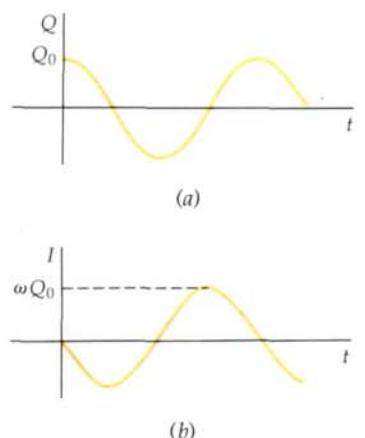


Figura 28-11 Gráficos de (a) Q en función de t y (b) I en función de t para el circuito LC de la figura 28-10.

Sustituyendo ahora el valor de la corriente dado por la ecuación 28-30, tenemos

$$U_m = \frac{1}{2} L I_{\max}^2 \operatorname{sen}^2 \omega t = \frac{1}{2} L \omega^2 Q_0^2 \operatorname{sen}^2 \omega t = \frac{Q_0^2}{2C} \operatorname{sen}^2 \omega t \quad 28-43$$

en donde hemos utilizado que $\omega^2 = 1/LC$. La energía magnética también oscila entre su valor máximo de $Q_0^2/2C$ y cero. La suma de las energías eléctrica y magnética es la energía total, que es constante en el tiempo:

$$U_{\text{total}} = U_e + U_m = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2 \omega t + \frac{Q_0^2}{2C} \operatorname{sen}^2 \omega t = \frac{Q_0^2}{2C}$$

que es la energía almacenada inicialmente en el condensador.

Ejemplo 28-4

Se carga a 20 V un condensador de $2 \mu\text{F}$ y luego se conecta una bobina de $6 \mu\text{H}$. (a) ¿Cuál es la frecuencia de la oscilación? (b) ¿Cuál es el valor máximo de la corriente?

(a) La frecuencia de la oscilación depende únicamente de los valores de la capacidad y de la inductancia:

$$\begin{aligned} f &= \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{(6 \times 10^{-6} \text{ H})(2 \times 10^{-6} \text{ F})}} = 4,59 \times 10^4 \text{ Hz} \end{aligned}$$

(b) De acuerdo con la ecuación 28-40, el valor máximo de la corriente está relacionado con el valor máximo de la carga por

$$I_{\max} = \omega Q_0 = \frac{Q_0}{\sqrt{LC}}$$

La carga inicial sobre el condensador es

$$Q_0 = CV_0 = (2 \mu\text{F})(20 \text{ V}) = 40 \mu\text{C}$$

Por consiguiente,

$$I_{\max} = \frac{40 \mu\text{C}}{\sqrt{(6 \mu\text{H})(2 \mu\text{F})}} = 11,5 \text{ A}$$

Ejercicio

Se carga un condensador de $5 \mu\text{F}$ y luego se descarga a través de una bobina. ¿Cuál deberá ser la inductancia de la bobina para que la corriente oscile con una frecuencia de 8 kHz? (Respuesta: $79,2 \mu\text{H}$)

En la figura 28-12, se incluye una resistencia en serie con el condensador y la bobina. Supongamos de nuevo que el interruptor está inicialmente abierto, que el condensador posee una carga inicial Q_0 y que cerramos el interruptor en $t=0$. Como ahora existe una caída de tensión IR en la resistencia, la regla de las mallas de Kirchhoff da

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + IR = 0 \quad 28-44a$$

o bien

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt} = 0 \quad 28-44b$$

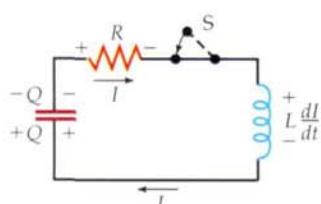


Figura 28-12 Circuito LCR .

en donde hemos puesto $I = dQ/dt$, como antes. Las ecuaciones 28-44a y b son análogas a la ecuación correspondiente al oscilador armónico amortiguado (ver ecuación 12-46):

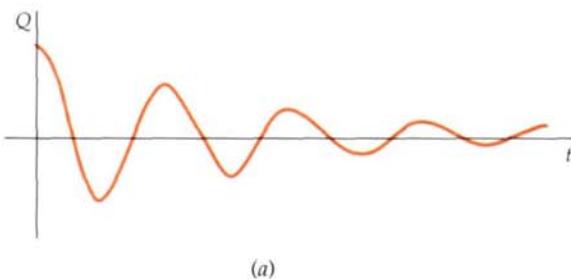
$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx + b \frac{dx}{dt} = 0$$

El primer término, $L dI/dt = L d^2Q/dt^2$, es análogo a la masa multiplicada por la aceleración, $m dv/dt = m d^2x/dt^2$; el segundo, Q/C , es análogo a la fuerza restauradora kx ; y el tercero, $IR = R dQ/dt$, es análogo al término de amortiguamiento, $bv = b dx/dt$. En la oscilación de una masa unida a un muelle, la constante de amortiguamiento b origina una disipación de energía mecánica en calor. En un circuito *LCR*, la resistencia R es análoga a la constante de amortiguamiento b y produce una disipación de energía eléctrica en calor de Joule.

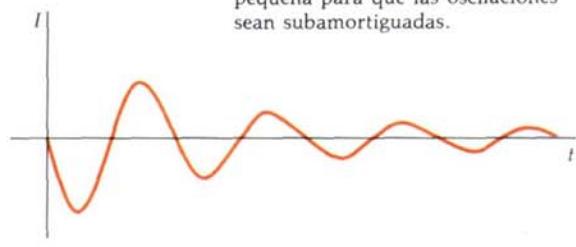
Si la resistencia es pequeña, la carga y la corriente oscilan con una frecuencia que es muy próxima a $1/\sqrt{LC}$, pero las oscilaciones se amortiguan; es decir, los valores máximos de la carga y de la corriente disminuyen en cada oscilación. Podemos comprender este hecho cualitativamente a partir de consideraciones energéticas. Si multiplicamos cada término de la ecuación 28-44a por la corriente I , se tiene

$$IL \frac{dI}{dt} + I \frac{Q}{C} + I^2 R = 0 \quad 28-45$$

El primer término de esta ecuación es el producto de la corriente por la tensión que se aplica a la bobina. Equivale al ritmo con que se introduce o se extrae la energía de la bobina; es decir, es la variación por unidad de tiempo de la energía magnética, $d(\frac{1}{2}LI^2)/dt$, que es positiva o negativa según que I y dI/dt tengan los mismos o diferentes signos. Análogamente, el segundo término es la corriente multiplicada por la tensión en el condensador. Este producto resulta ser la variación respecto al tiempo de la energía almacenada en el condensador, variación que puede ser positiva o negativa. El último término, I^2R , es el ritmo con que se disipa energía en la resistencia en forma de calor Joule y es siempre positivo. La suma de las energías eléctrica y magnética no es constante en este circuito porque en la resistencia se está disipando continuamente energía. En la figura 28-13



(a)



(b)

Figura 28-13 Gráficos de (a) Q en función de t y (b) I en función de t para el circuito *LCR* de la figura 28-12 cuando R es lo suficientemente pequeña para que las oscilaciones sean subamortiguadas.

se ven los gráficos de Q en función de t y de I en función de t cuando la resistencia R es pequeña. Si se aumenta R , las oscilaciones se amortiguan cada vez más hasta que se alcanza un valor crítico de R para el que no existe ninguna oscilación. En la figura 28-14 se ve el gráfico de Q en función de t cuando el valor de R es mayor que el valor correspondiente al amortiguamiento crítico.

Cuestión

5. Es sencillo construir circuitos *LC* que posean frecuencias de oscilación de miles de hertz o más, pero resulta difícil hacer circuitos *LC* que tengan frecuencias pequeñas. ¿Por qué?

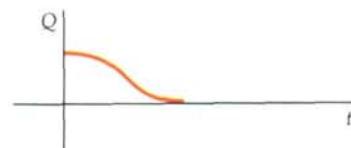


Figura 28-14 Gráfico de Q en función de t para el circuito *LCR* de la figura 28-12 cuando R es tan grande que las oscilaciones están sobreamortiguadas.

28-5 Circuitos LCR con un generador

Serie

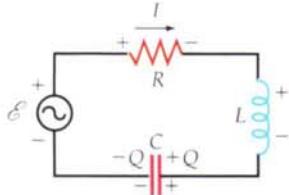


Figura 28-15 Circuito LCR serie con un generador de ca.

Un circuito importante que reúne muchas de las características de la mayoría de los circuitos de ca es el circuito *LCR* con un generador, indicado en la figura 28-15. Supongamos que la fem de un generador varía con el tiempo como $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{máx}} \cos \omega t$. En este circuito, la regla de las mallas de Kirchhoff nos da

$$\mathcal{E}_{\text{máx}} \cos \omega t - L \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} - IR = 0$$

Utilizando $I = dQ/dt$ y ordenando se tiene

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}_{\text{máx}} \cos \omega t \quad 28-46$$

Esta ecuación es análoga a la ecuación 12-63 correspondiente a la oscilación forzada de una masa en un muelle:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F_0 \cos \omega t$$

(En la ecuación 12-63, se escribió la constante de la fuerza k en función de la masa m y de la frecuencia angular natural ω_0 utilizando $k = m\omega_0^2$. En la ecuación 28-46 podría escribirse de forma semejante la capacidad en función de L y de la frecuencia natural utilizando $1/C = L\omega_0^2$.)

En lugar de resolver la ecuación 28-46, estudiaremos cualitativamente sus soluciones como hicimos con la ecuación 12-63 en el capítulo 12. La corriente en el circuito se compone de dos partes, una corriente transitoria y una corriente estacionaria. La primera depende de las condiciones iniciales, como la fase inicial del generador y la carga inicial del condensador. La corriente estacionaria, por otra parte, es independiente de dichas condiciones iniciales. La corriente transitoria disminuye exponencialmente con el tiempo y pronto resulta despreciable en comparación con la corriente estacionaria. No tendremos en cuenta a la corriente transitoria y nos concentraremos en la estacionaria.

La corriente estacionaria que se obtiene resolviendo la ecuación 28-46, es

$$I = I_{\text{máx}} \cos(\omega t - \delta) \quad 28-47$$

en donde el ángulo de fase δ viene dado por

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{X_L - X_C}{R} \quad 28-48$$

La corriente máxima es

Impedancia del circuito serie LCR

$$I_{\text{máx}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{máx}}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{máx}}}{Z} \quad 28-49$$

en donde

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad 28-50$$

La magnitud $X_L - X_C$ se denomina **reactancia total**, mientras que Z se denomina **impedancia**. Combinando estos resultados, tendremos

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{Z} \cos(\omega t - \delta)$$

28-51

También puede obtenerse la ecuación 28-51 mediante un sencillo diagrama utilizando las representaciones de los fasores estudiada en la sección 28-3. En la figura 28-16 se indican los fasores que representan las caídas de tensión en la resistencia, la bobina y el condensador. El componente x de cada uno de estos vectores es igual a la caída de tensión instantánea en el correspondiente elemento. Como la suma de los componentes x es igual al componente x de la suma de los vectores, la suma de los componentes x es igual a la suma de las caídas de tensión en todos los elementos, que según la regla de las mallas de Kirchhoff es igual a la fem instantánea. Si representamos la fem aplicada, $\mathcal{E}_{\max} \cos \omega t$, como un fensor \mathcal{E} que tiene el módulo \mathcal{E}_{\max} , tendremos

$$\mathcal{E} = V_R + V_L + V_C \quad 28-52$$

En función de los módulos

$$\mathcal{E}_{\max} = |V_R + V_L + V_C| = \sqrt{V_{R,\max}^2 + (V_{L,\max} - V_{C,\max})^2}$$

Pero $V_R = I_{\max} R$, $V_L = I_{\max} X_L$, y $V_C = I_{\max} X_C$. Así pues,

$$\mathcal{E}_{\max} = I_{\max} \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = I_{\max} Z$$

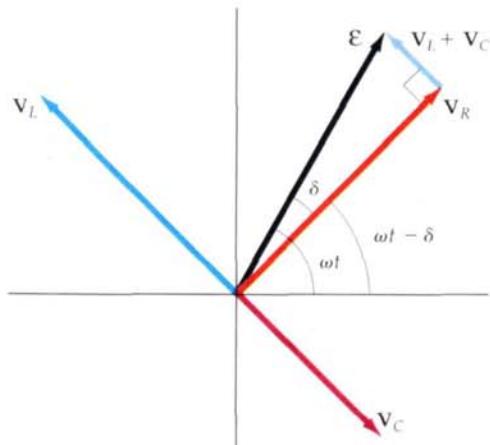


Figura 28-16 Relaciones de fase entre las tensiones de un circuito LCR serie. La tensión que se aplica a la resistencia está en fase con la corriente. La tensión que aparece en la bobina V_L adelanta a la corriente en 90° . La tensión en placas del condensador retrasa respecto a la corriente en 90° . La suma de los vectores que representan estas tensiones da un vector que forma un ángulo δ con la corriente y representa la fem aplicada. En el caso indicado en la figura, V_L es mayor que V_C y la corriente está retrasada en δ respecto a la fem.

El fensor \mathcal{E} forma un ángulo δ con V_R como se ve en la figura 28-16. A partir de ella podemos observar que

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{|V_L + V_C|}{|V_R|} = \frac{I_{\max} X_L - I_{\max} X_C}{I_{\max} R} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

de acuerdo con la ecuación 28-48. Como \mathcal{E} forma un ángulo ωt con el eje x , V_R forma un ángulo $\omega t - \delta$ con el eje x . Esta tensión está en fase con la corriente, que por tanto vendrá dada por

$$I = I_{\max} \cos(\omega t - \delta) = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{Z} \cos(\omega t - \delta)$$

Esta expresión es la ecuación 28-51. La relación entre la impedancia Z y la resistencia R y la reactancia total $X_L - X_C$ puede recordarse utilizando el triángulo rectángulo indicado en la figura 28-17.

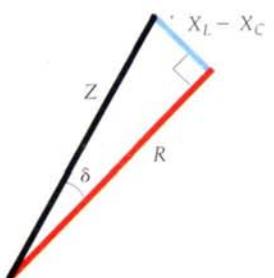


Figura 28-17 Triángulo que relaciona la reactancia capacitiva más la inductiva, a la resistencia, a la impedancia y al ángulo de fase en un circuito LCR.

Resonancia

Aunque las ecuaciones 28-50 y 28-51 parecen ser complicadas, podemos utilizarlas para aprender algunas características simples pero importantes del comportamiento del circuito de la figura 28-15. Como tanto la reactancia inductiva $X_L = \omega L$ y la reactancia capacitativa $X_C = 1/\omega C$ dependen de la frecuencia de la fem aplicada, lo mismo ocurre con la impedancia Z y con la corriente máxima I_{\max} . A frecuencias muy bajas $X_C = 1/\omega C$ es mucho mayor que $X_L = \omega L$, de modo que la impedancia es grande e I_{\max} es pequeña. El ángulo de fase δ es negativo, lo que significa que la corriente adelanta a la tensión del generador. Al ir aumentando ω , la reactancia inductiva va aumentando mientras que disminuye la reactancia capacitativa. Cuando son iguales X_L y X_C , la impedancia Z tiene su valor mínimo, igual a R , e I_{\max} tiene su valor máximo. Además el ángulo de fase δ es cero, lo que significa que la corriente está en fase con la fem aplicada. Si ω aumenta aún más, X_L resulta mayor que X_C . La impedancia aumenta y la corriente máxima disminuye. El ángulo de fase es positivo, de forma que la corriente atrasa respecto a la tensión del generador.

El valor de ω que hace iguales a X_L y a X_C se obtiene a partir de

$$X_L = X_C$$

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

o sea

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 = 2\pi f_0$$

La frecuencia f_0 (o la frecuencia angular ω_0) recibe el nombre de frecuencia natural o **frecuencia de resonancia** del circuito. La impedancia es mínima y el valor máximo de la corriente adquiere su valor más grande cuando la frecuencia de la fem es igual a la frecuencia natural. A esta frecuencia se dice que el circuito está en **resonancia**. En la resonancia, la corriente está en fase con la tensión del generador. Esta condición de resonancia en un circuito *LCR* forzado es semejante a la de un oscilador armónico simple forzado.

Señalamos anteriormente que ni las bobinas ni los condensadores disipan energía. La potencia media suministrada a un circuito *LCR* serie es, por tanto, igual a la potencia media suministrada a la resistencia. La potencia instantánea que se suministra a la resistencia es

$$P = I^2 R = [I_{\max} \cos(\omega t - \delta)]^2 R$$

Promediando sobre uno o varios ciclos y sabiendo que $(\cos^2 \theta)_m = \frac{1}{2}$, obtenemos para la potencia media

$$P_m = \frac{1}{2} I_{\max}^2 R$$

que es la misma que la dada en la ecuación 28-7. Como $V_R = I_{\max} R$, puede escribirse

$$P_m = \frac{1}{2} I_{\max} V_R$$

En la figura 28-16, puede verse que $V_R = \mathcal{E}_{\max} \cos \delta$. Así pues, puede escribirse la potencia media suministrada al circuito como

$$P_m = \frac{1}{2} I_{\max} \mathcal{E}_{\max} \cos \delta$$

En función de los valores eficaces, $I_{\text{ef}} = I_{\max}/\sqrt{2}$ y $\mathcal{E}_{\text{ef}} = \mathcal{E}_{\max}/\sqrt{2}$, la potencia media vale

$$P_m = \mathcal{E}_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \cos \delta \quad 28-53$$

La cantidad $\cos \delta$ se denomina **factor de potencia** del circuito *LCR*. En la resonancia, δ es cero y el factor de potencia vale 1.

Puede expresarse la potencia en función de la frecuencia angular ω . En el triángulo de la figura 28-17, se tiene

$$\cos \delta = \frac{R}{Z} \quad 28-54$$

Haciendo uso de este resultado y como $I_{\text{ef}} = \mathcal{E}_{\text{ef}} / Z$, se tiene para la potencia media

$$P_m = \frac{\mathcal{E}_{\text{ef}}^2 R}{Z^2}$$

A partir de la definición de impedancia Z , tenemos

$$\begin{aligned} Z^2 &= (X_L - X_C)^2 + R^2 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 + R^2 \\ &= \frac{L^2}{\omega^2} \left(\omega^2 - \frac{1}{LC} \right)^2 + R^2 \\ &= \frac{L^2}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + R^2 \end{aligned}$$

en donde hemos utilizado $\omega_0^2 = 1/LC$. Utilizando esta expresión de Z^2 , obtenemos para la potencia media en función de ω :

$$P_m = \frac{\mathcal{E}_{\text{ef}}^2 R \omega^2}{L^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 R^2} \quad 28-55$$

En la figura 28-18 se indica una gráfica de la potencia media suministrada por el generador al circuito en función de la frecuencia del generador para dos valores diferentes de la resistencia R . Estas curvas, denominadas **curvas de resonancia**, son las mismas que las curvas de potencia en función de la frecuencia en el caso de un oscilador amortiguado y forzado (ver sección 12-8). La potencia media es máxima cuando la frecuencia del generador es igual a la frecuencia de resonancia. Cuando la resistencia es pequeña, la curva de resonancia es estrecha; cuando es grande, la curva se ensancha. Puede caracterizarse una curva de resonancia por la **anchura de resonancia** Δf indicada en la figura. Esta anchura es la diferencia de frecuencias entre los dos puntos de la curva en que la potencia es la mitad de su valor máximo. Cuando la anchura es pequeña en comparación con la frecuencia de resonancia, la resonancia es aguda, es decir la curva correspondiente es estrecha.

Se definió en el capítulo 12 el factor Q para un oscilador mecánico como $Q = 2\pi E / |\Delta E|$ (ecuación 12-54), siendo E la energía total del sistema y $|\Delta E|$ la energía perdida en un ciclo. Vimos que $Q = 2\pi m / bT$, en donde m es la masa, b la constante de amortiguamiento y T el período. Como $\omega_0 = 2\pi/T$, el factor Q en el caso de un oscilador mecánico amortiguado y forzado viene dado por

$$Q = \frac{\omega_0 m}{b} \quad 28-56$$

Puede definirse de forma semejante el **factor Q** correspondiente a un circuito LCR. Como L es análogo a la masa m y R a la constante de amortiguamiento b , el factor Q de un circuito LCR viene dado por

$$Q = \frac{2\pi E}{|\Delta E|} = \frac{\omega_0 L}{R} \quad 28-57$$

Cuando la resonancia es razonablemente estrecha (es decir, cuando Q es mayor que 2 o 3), el factor Q puede aproximarse por

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta \omega} = \frac{f_0}{\Delta f}$$

28-58 Factor Q para un circuito LCR

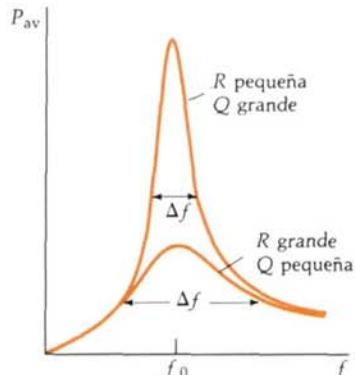


Figura 28-18 Representación gráfica de la potencia media en función de la frecuencia para un circuito LCR. La potencia es máxima cuando la frecuencia f del generador es igual a la frecuencia natural $f_0 = (1/2\pi\sqrt{LC})$ del circuito. Si la resistencia es pequeña, el factor Q es grande y la resonancia es aguda. Se mide la anchura Δf de la curva de resonancia entre aquellos puntos en que la potencia es la mitad de su valor máximo.

Una radio a bordo de un barco en las proximidades del año 1920. Junto a la izquierda del operador pueden verse las bobinas y las placas del condensador del circuito de sintonía.



Los circuitos resonantes se utilizan en los receptores de radio, en donde se varía la frecuencia de resonancia del circuito variando la capacidad. Se produce la resonancia cuando la frecuencia natural del circuito se iguala a una de las frecuencias de las ondas de radio recogidas por la antena. En la resonancia, aparece una corriente relativamente grande en el circuito de la antena. Si el factor Q del circuito es suficientemente alto, las corrientes debidas a las frecuencias de otras estaciones que no están en resonancia serán despreciables en comparación con la correspondiente a la frecuencia de la estación a que se ha sintonizado el circuito.

Ejemplo 28-5

Un circuito serie LCR con $L=2 \text{ H}$, $C=2 \mu\text{F}$ y $R=20 \Omega$ está conectado a un generador de frecuencia variable y con una fem máxima de 100 V. (a) Hallar la frecuencia de resonancia f_0 . Hallar (b) la corriente máxima I_{\max} y (c) el ángulo de fase δ cuando la frecuencia del generador es de $f=60 \text{ Hz}$.

(a) La frecuencia de resonancia es

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(2 \text{ H})(2 \times 10^{-6} \text{ F})}} = 79,6 \text{ Hz}$$

(b) Cuando la frecuencia del generador es 60 Hz, está bastante por debajo de la frecuencia de resonancia. Las reactancias capacitiva e inductiva a 60 Hz son

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(2\pi)(60 \text{ Hz})(2 \times 10^{-6} \text{ F})} = 1326 \Omega$$

y

$$X_L = \omega L = (2\pi)(60 \text{ Hz})(2 \text{ H}) = 754 \Omega$$

La reactancia total es $X_L - X_C = 754 \Omega - 1326 \Omega = -572 \Omega$. Es un valor mucho mayor que el de la resistencia, cosa que siempre ocurre cuando se está lejos de la resonancia. La impedancia total es

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(20 \Omega)^2 + (-572 \Omega)^2} \approx 572 \Omega$$

puesto que $(20)^2$ es despreciable frente a $(572)^2$. La corriente máxima es, pues,

$$I_{\max} = \frac{E_{\max}}{Z} = \frac{100 \text{ V}}{572 \Omega} = 0,175 \text{ A}$$

Este valor es pequeño en comparación con $I_{\text{máx}}$ en la resonancia, que vale $(100 \text{ V})/(20 \Omega) = 5 \text{ A}$.

(c) El ángulo de fase δ viene dado por

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \delta &= \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{-572 \Omega}{20 \Omega} = -28,6 \\ \delta &= -88^\circ\end{aligned}$$

A partir de la ecuación 28-51 (o de la figura 28-16) podemos ver que un ángulo de fase negativo significa que la corriente adelanta a la tensión del generador.

Ejemplo 28-6

Hallar la potencia media producida por el generador del ejemplo 28-5 a 60 Hz.

Como conocemos la fem máxima y hemos calculado la corriente máxima en el ejemplo anterior, es conveniente escribir la potencia media en función de estas magnitudes. Tendremos

$$\begin{aligned}P_m &= \mathcal{E}_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \cos \delta = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{\text{máx}} I_{\text{máx}} \cos \delta \\ &= \frac{1}{2} (100 \text{ V})(0,175 \text{ A})[\cos(-88^\circ)] = 0,306 \text{ W}\end{aligned}$$

Como hemos señalado, esta potencia se transforma en calor Joule en la resistencia. Podríamos haber calculado también la potencia media a partir de

$$P_m = I_{\text{ef}}^2 R = \frac{1}{2} I_{\text{máx}}^2 R = \frac{1}{2} (0,175 \text{ A})^2 (20 \Omega) = 0,306 \text{ W}$$

Ejemplo 28-7

Hallar (a) el valor Q y (b) la anchura de resonancia del circuito del ejemplo 28-5.

(a) En el ejemplo 28-5, vimos que la frecuencia de resonancia era $f_0 = 79,6 \text{ Hz}$. Por consiguiente el valor Q es

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{2\pi(79,6 \text{ Hz})(2 \text{ H})}{20 \Omega} = 50$$

(b) La anchura de la resonancia es

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q} = \frac{79,6 \text{ Hz}}{50} = 1,6 \text{ Hz}$$

Resulta ser una resonancia muy aguda. La anchura es sólo 1,6 Hz en la frecuencia de resonancia de 79,6 Hz.

Ejemplo 28-8

Hallar las tensiones máximas en la resistencia, la bobina y el condensador en la resonancia en el caso del circuito del ejemplo 28-5.

En la resonancia, la impedancia es igual a la resistencia $R = 20 \Omega$. Como la fem máxima es 100 V, la corriente máxima es

$$I_{\text{máx}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{máx}}}{Z} = \frac{100 \text{ V}}{20 \Omega} = 5 \text{ A}$$

Por tanto, la tensión máxima aplicada a la resistencia es

$$V_{R,\text{máx}} = I_{\text{máx}} R = (5 \text{ A})(20 \Omega) = 100 \text{ V}$$

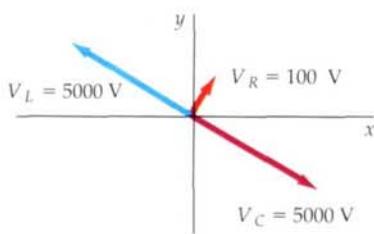


Figura 28-19 Las tensiones del ejemplo 28-8. Las tensiones que aparecen en la bobina y en el condensador de un circuito *LCR* serie están siempre desfasadas en 180° . En la resonancia tienen el mismo valor, de modo que su suma es cero, y así la suma de las tensiones en los tres elementos es igual a V_R . En este ejemplo, la caída máxima de tensión en la resistencia es 100 V, mientras que las tensiones máximas en la bobina y en el condensador son 5000 V.

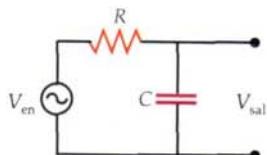


Figura 28-20 Circuito del ejemplo 28-9.

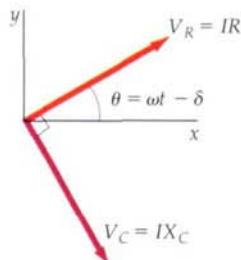


Figura 28-21 Diagrama de fasores correspondiente a las tensiones aplicadas a la resistencia y al condensador de la figura 28-20.

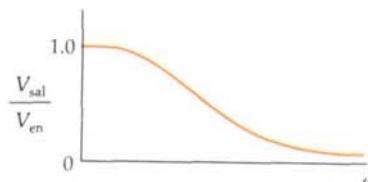


Figura 28-22 Gráfico del cociente entre la tensión de salida y la de entrada correspondiente al circuito filtro pasa baja del ejemplo 28-9.

La frecuencia de resonancia hallada en el ejemplo 28-4 era $f_0 = 79,6$ Hz. Las reactancias inductiva y capacitativa en la resonancia son

$$X_L = \omega_0 L = (2\pi)(79,6 \text{ Hz})(2 \text{ H}) = 1000 \Omega$$

y

$$X_C = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{1}{(2\pi)(79,6 \text{ Hz})(2 \times 10^{-6} \text{ F})} = 1000 \Omega$$

Ambas reactancias son iguales, como era de esperar, puesto que se hallaba la frecuencia de resonancia al igualarlas. Por ello, la tensión máxima que aparece en la bobina es

$$V_{L,\max} = I_{\max} X_L = (5 \text{ A})(1000 \Omega) = 5000 \text{ V}$$

y en el condensador

$$V_{C,\max} = I_{\max} X_C = (5 \text{ A})(1000 \Omega) = 5000 \text{ V}$$

La figura 28-19 muestra el diagrama de fasores para estas tensiones. La tensión máxima que aparece en la resistencia corresponde al valor relativamente seguro de 100 V, igual a la fem máxima del generador. Sin embargo, las tensiones máximas que aparecen aplicadas a la bobina y al condensador tienen el valor peligrosamente elevado de 5000 V. Estas tensiones están desfasadas entre sí en 180° . En la resonancia, la tensión que aparece en la bobina en un instante cualquiera es el negativo de la que aparece en el condensador, de forma que su suma es siempre nula, haciendo que la tensión en la resistencia sea siempre igual a la fem instantánea del circuito.

Ejemplo 28-9

Una resistencia R y un condensador C se encuentran en serie con un generador, que tiene una tensión dada por $V_{en} = V_0 \cos \omega t$, como se ve en la figura 28-20. Hallar la tensión en el condensador en función de la frecuencia ω .

Este circuito es más sencillo que los anteriores, porque carece de bobina. En la figura, hemos señalado la tensión del generador, tensión de entrada, y la que aparece en el condensador, tensión de salida. La figura 28-21 muestra los fasores que representan las caídas de tensión en la resistencia y en el condensador. La impedancia total del circuito es

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

en donde $X_C = 1/\omega C$. La corriente eficaz es, entonces,

$$I_{ef} = \frac{V_{en,ef}}{Z} = \frac{V_{en,ef}}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}$$

La tensión eficaz de salida que aparece en el condensador es

$$\begin{aligned} V_{sal,ef} &= I_{ef} X_C = \frac{X_C V_{en,ef}}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} \\ &= \frac{(1/\omega C)V_{en,ef}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} = \frac{V_{en,ef}}{\sqrt{\omega^2 C^2 R^2 + 1}} \end{aligned}$$

En la figura 28-22 se ve el cociente entre la tensión de salida y la de entrada en función de la frecuencia ω . Este circuito recibe el nombre de **filtro pasa baja RC**, porque se transmiten con mayor amplitud las frecuencias bajas de entrada que las altas.

Circuitos en paralelo

En la figura 28-23 se muestran una resistencia R , un condensador C y una bobina L conectados en paralelo a un generador de ca. La corriente total I procedente del generador se divide en tres corrientes, la I_R que pasa por la resistencia, la I_C por el condensador y la I_L por la bobina. La tensión instantánea V es la misma para los tres elementos. La corriente en la resistencia está en fase con la tensión y tiene una amplitud de V/R . Como la caída de tensión que aparece en la bobina adelanta a la corriente que circula por la bobina en 90° , esta última retrasa respecto a la tensión en 90° y tiene un valor de V/X_L . Análogamente, la corriente en el condensador adelanta a la tensión en 90° y tiene un valor de V/X_C . Estas corrientes se han representado mediante fasores en la figura 28-24. La corriente total I es el componente x del vector suma de las corrientes individuales como se ve en la figura. El valor de la corriente total es

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} = \sqrt{\left(\frac{V}{R}\right)^2 + \left(\frac{V}{X_L} - \frac{V}{X_C}\right)^2} = \frac{V}{Z} \quad 28-59$$

estando relacionada la impedancia Z con la resistencia y las reactancias capacitiva e inductiva por

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2} \quad 28-60$$

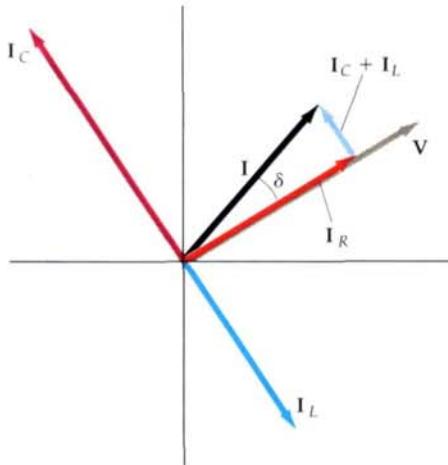


Figura 28-24 Diagrama de fasores correspondiente a la tensión y corrientes del circuito LCR paralelo de la figura 28-23. La tensión es la misma para todos los elementos. La corriente en la resistencia está en fase con la tensión. La corriente en el condensador adelanta a la tensión en 90° mientras que la de la bobina retrasa en 90° . La diferencia de fase δ entre la corriente total y la tensión depende de los valores relativos de las intensidades o corrientes, que dependen de los valores de la resistencia y de las reactancias capacitiva e inductiva.

En la resonancia, la frecuencia del generador ω es igual a la frecuencia natural $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ y las reactancias inductiva y capacitativa son iguales. A partir de la ecuación 28-60, vemos entonces que $1/Z$ adquiere su valor mínimo $1/R$, de modo que la impedancia Z es máxima y la corriente total mínima. Podemos comprender este hecho observando que, en la resonancia, $X_C = X_L$ y las corrientes en la bobina y en el condensador son iguales pero con un desfase de 180° , de modo que la corriente total es precisamente sólo la corriente que pasa por la resistencia.

Cuestiones

6. ¿Depende el factor de potencia de la frecuencia?
7. ¿Presenta algunas desventajas un circuito de sintonía de radio que posea un factor Q extremadamente grande?
8. ¿Cuál es el factor de potencia de un circuito que posee bobinas y condensadores, pero no resistencias?

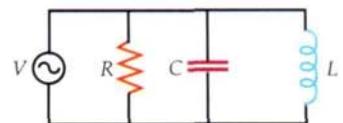


Figura 28-23 Circuito LCR paralelo.

circuit:

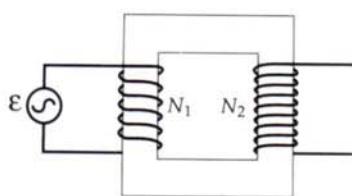
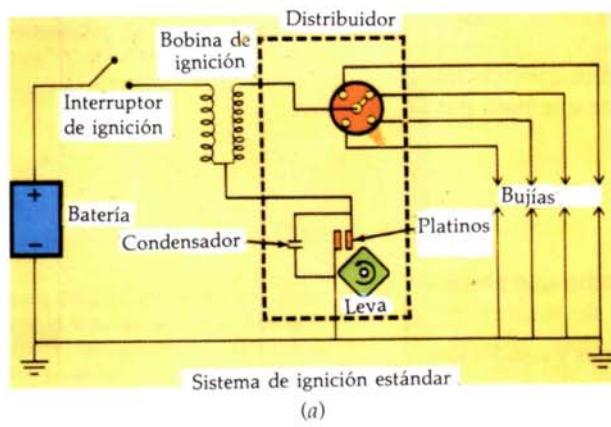


Figura 28-25 Transformador con N_1 vueltas en el primario y N_2 vueltas en el secundario.

(a) Circuito para provocar la ignición de la mezcla combustible en el motor de un automóvil. El sistema que se muestra en la foto (b) es un transformador con un arrollamiento primario de hilo grueso mientras que el secundario está construido con hilo delgado. Si tanto el conmutador de ignición como los puntos de contacto están cerrados, circula corriente a través del primario de la bobina de ignición. El eje de levas rotativo abre y cierra los puntos de contacto, originando una rápida variación en la corriente del primario de la bobina de ignición, que produce una tensión de 30 a 40 kV en el arrollamiento secundario. Esta tensión alta se distribuye mediante el contacto giratorio del «delco» a las bujías a intervalos de tiempo muy precisos, dando como resultado el salto de una chispa entre los electrodos de la bujía. Esta chispa provoca la ignición de la mezcla aire-combustible en los cilindros.



28-6 Transformadores

Un **transformador** es un dispositivo para variar las tensiones y corrientes alternas sin pérdida apreciable de potencia. Su funcionamiento se basa en el hecho de que una corriente alterna en un circuito inducirá una fem alterna en otro circuito próximo debido a la inductancia mutua entre ambos. En la figura 28-25 se indica un transformador simple compuesto por dos bobinas de hilo conductor arrolladas sobre un núcleo de hierro común. La bobina que se conecta a la fuente de entrada se denomina **primario** y la otra, **secundario**. Puede utilizarse cualquiera de los dos arrollamientos de un transformador para primario o secundario. La función del núcleo de hierro consiste en aumentar el campo magnético creado por una corriente determinada y para que se vea constreñido de forma que prácticamente todo el flujo magnético que atravesie uno de los arrollamientos atraviese el otro. El núcleo de hierro está formado por láminas para reducir las corrientes de Foucault y las pérdidas consiguientes. Existen otras pérdidas de potencia debido al calentamiento Joule de las pequeñas resistencias que forman ambos arrollamientos y a la histéresis que se presenta en el núcleo de hierro. Despreciaremos estas pérdidas y consideraremos un transformador ideal con un rendimiento del 100 por ciento, en el que toda la potencia suministrada al arrollamiento primario aparece en el secundario. Los transformadores comerciales suelen tener rendimientos comprendidos entre el 90 y el 95 por ciento.

Consideremos un transformador que tiene un generador de ca de fem \mathcal{E} conectado al primario con N_1 vueltas, mientras que el circuito del secundario, que tiene N_2 vueltas, está abierto. Debido al núcleo de hierro, existe un flujo magnético grande que atraviesa ambos arrollamientos aunque la **corriente magnetizante** I_m en el circuito primario sea muy pequeña. Podemos despreciar las resistencias de los arrollamientos en comparación con sus reactancias inductivas. El primario es entonces un circuito simple formado por un generador de fem alterna y una inductancia pura como el estudiado en la sección 28-2. La corriente (de magnetización) y la tensión en el primario están desfasadas entre sí en 90° y la potencia media disipada en el arrollamiento primario es cero. Si ϕ_{vuelta} es el flujo magnético que atraviesa una espira o vuelta del primario, la caída de tensión en él es $V_{L1} = N_1 \frac{d\phi_{\text{vuelta}}}{dt}$. Aplicando la regla de las mallas de Kirchhoff al circuito del primario se tiene entonces

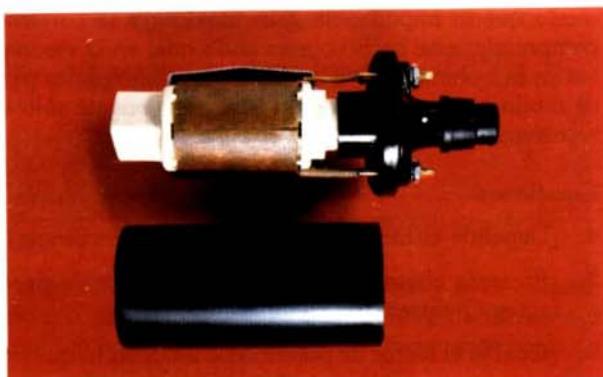
$$\mathcal{E} - N_1 \frac{d\phi_{\text{vuelta}}}{dt} = 0$$

o sea

$$\mathcal{E} = N_1 \frac{d\phi_{\text{vuelta}}}{dt} \quad 28-61$$

Si se considera que no existe ninguna pérdida de flujo en el núcleo de hierro, el flujo que atraviesa cada espira es el mismo en ambos arrollamientos. Así pues, el flujo total que atraviesa el arrollamiento secundario es $N_2 \phi_{\text{vuelta}}$, y la tensión que aparece en dicho secundario es

$$V_2 = -N_2 \frac{d\phi_{\text{vuelta}}}{dt} \quad 28-62$$



Comparando estas ecuaciones, podemos ver que

$$V_2 = -\frac{N_2}{N_1} \mathcal{E} \quad 28-63$$

Si N_2 es mayor que N_1 , la tensión en el secundario es mayor que la aplicada al primario y el transformador se designa como **transformador elevador** o de alta. Si N_2 es menor que N_1 , la tensión en el secundario es menor que en el primario y el transformador recibe el nombre de **transformador reductor** o de baja.

Consideremos a continuación lo que ocurre cuando colocamos una resistencia R denominada **resistencia de carga** conectada al secundario. Entonces aparecerá una corriente I_2 en el circuito del secundario que estará en fase con la tensión V_2 aplicada a la resistencia. Esta corriente originará un flujo adicional ϕ_{vuelta} a través de cada espira que es proporcional a $N_2 I_2$. Este flujo se opone al flujo original creado por la corriente magnetizante original I_m del primario. Sin embargo, la tensión que aparece en el arrollamiento primario está determinada por la fem del generador, que no se ve afectada por el circuito secundario. De acuerdo con la ecuación 28-61, el flujo total en el núcleo de hierro debe variar al ritmo original; es decir, el flujo total en el núcleo de hierro debe ser el mismo que cuando no existía la carga en el secundario. El arrollamiento primario extrae así una corriente adicional I_1 para mantener el flujo original ϕ_{vuelta} . El flujo que atraviesa cada espira producido por esta corriente adicional es proporcional a $N_1 I_1$. Como este flujo es igual a $-\phi'_{vuelta}$, la corriente adicional I_1 en el primario está relacionada con la corriente I_2 en el secundario por

$$N_1 I_1 = -N_2 I_2 \quad 28-64$$

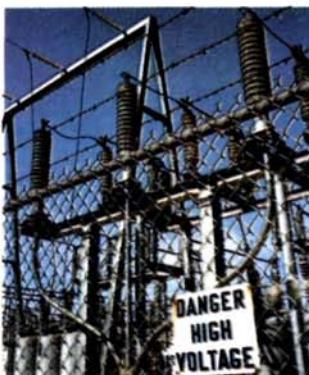
Estas corrientes están desfasadas en 180° y producen flujos que se contrarrestan. Como I_2 está en fase con V_2 , la corriente adicional I_1 está en fase con la fem aplicada. La potencia procedente del generador es $\mathcal{E}_{ef} I_{1,ef}$, y la potencia que se extrae del secundario es $V_{2,ef} I_{2,ef}$. (La corriente magnetizante no contribuye a la potencia de entrada porque está desfasada en 90° con la tensión del generador.) Si no existiesen pérdidas,

$$\mathcal{E}_{ef} I_{1,ef} = V_{2,ef} I_{2,ef} \quad 28-65$$

En la mayoría de los casos la corriente adicional en el primario I_1 es mucho mayor que la corriente magnetizante original I_m que se obtiene del generador cuando no hay carga. Esto puede demostrarse colocando una lámpara en serie con el primario. La lámpara brilla mucho más cuando existe una carga aplicada al secundario que cuando éste se encuentra abierto. Si puede despreciarse I_m , la ecuación 28-64 relaciona las corrientes totales que recorren los circuitos primario y secundario.



(a)



(b)

(a) Transformador cerrado para reducir la tensión hasta el valor adecuado a su distribución en las casas. (b) Subestación de potencia suburbana en donde los transformadores reducen la tensión procedente de las líneas de transmisión de alta tensión a valores más bajos.

Ejemplo 28-10

Un timbre funciona a 6 V con 0,4 A. Se conecta a un transformador cuyo primario contiene 2000 vueltas y está conectado a una ca de 120 V. (a) ¿Cuántas vueltas deberá tener el secundario? (b) ¿Cuál es la corriente en el primario?

(a) Como la tensión de entrada es 120 V y la de salida es 6 V, puede obtenerse la relación entre las vueltas con la ecuación 28-63:

$$\begin{aligned}\frac{N_2}{N_1} &= \frac{V_2}{\mathcal{E}} \\ &= \frac{6 \text{ V}}{120 \text{ V}}\end{aligned}$$

Así pues, el número de vueltas del secundario es de

$$N_2 = \frac{6}{120} (2000 \text{ vueltas}) = 100 \text{ vueltas}$$

(b) Como estamos suponiendo que el rendimiento de la transmisión de potencia es el 100 por ciento, las corrientes de entrada y de salida se relacionan entre sí por

$$V_2 I_2 = \mathcal{E} I_1$$

Por consiguiente, la corriente en el primario es

$$I_1 = \frac{V_2}{\mathcal{E}} I_2 = \frac{6}{120} (0,4 \text{ A}) = 0,02 \text{ A}$$

Uno de los usos más importantes de los transformadores es el del transporte de energía eléctrica. Para reducir hasta el mínimo posible las pérdidas que en forma de calor Joule I^2R tienen lugar en las líneas de transmisión de energía, resulta más económico emplear un alto voltaje y una baja corriente. Por otro lado, la seguridad en su empleo y otras consideraciones, como el aislamiento, hacen necesario utilizar la energía a voltajes más bajos con corrientes más altas cuando se quiere hacer funcionar motores o cualquier otro dispositivo o aparato eléctrico. Supóngase, por ejemplo, que cada persona de una ciudad con una población de 50 000 habitantes consume 1,2 kW de potencia eléctrica. (El consumo per cápita de potencia en los Estados Unidos es realmente algo más elevado que esta cifra.) A 120 V, la corriente requerida por cada individuo sería

$$I = \frac{1200 \text{ W}}{120 \text{ V}} = 10 \text{ A}$$

La corriente total para 50 000 personas sería entonces 500 000 A. El transporte de dicha corriente desde los generadores de una central eléctrica hasta una ciudad a muchos kilómetros de distancia requeriría conductores de tamaño enorme (en realidad, gruesos cilindros de cobre más que hilos), y la pérdida de potencia dada por I^2R sería sustancial. En lugar, pues, de transportar la potencia a 120 V, se utilizan transformadores de alta en la central para elevar el voltaje a unos valores muy elevados, tales como 600 000 V. Así se reduce la corriente necesaria a

$$I = \frac{120 \text{ V}}{600 000 \text{ V}} (500 000 \text{ A}) = 100 \text{ A}$$

Para reducir luego el voltaje a unos niveles más seguros durante su transporte dentro de la ciudad, se sitúan estaciones transformadoras a la entrada de la misma para bajar su valor hasta 10 000 V, por ejemplo. Luego en las proximidades de las casas se instalan nuevos transformadores que reduzcan otra vez el voltaje hasta 120 V (o 220 V) para su distribución en el interior de las mismas. Debido a esta facilidad para aumentar o disminuir el voltaje de la corriente alterna mediante transformadores, se utiliza ordinariamente este tipo de corriente y no la corriente continua.

Ejemplo 28-11

Una línea de transmisión de energía eléctrica tiene una resistencia de $0,02 \Omega/\text{km}$. Calcular la pérdida de potencia I^2R si se ha de transmitir una potencia de 200 kW desde una central generadora a una ciudad distante 10 km de aquélla a (a) 220 V y (b) 4,4 kV.

(a) La resistencia total de 10 km de línea es $R = (0,02 \Omega/\text{km})(10 \text{ km}) = 0,20 \Omega$. La corriente necesaria para transmitir 200 kW a 220 V es

$$I = \frac{200\,000 \text{ W}}{220 \text{ V}} = 909 \text{ A}$$

La pérdida de potencia vale entonces

$$I^2R = (909 \text{ A})^2(0,20 \Omega) = 165 \text{ kW}$$

Así pues, se desperdiciaría en pérdida alrededor del 82 por ciento de la potencia a transmitir.

(b) Si la línea de transmisión se dispone a 4,4 kV, la corriente es

$$I = \frac{200 \text{ kW}}{4,4 \text{ kV}} = 45,5 \text{ A}$$

Ahora la pérdida de potencia sería

$$I^2R = (45 \text{ A})^2(0,20 \Omega) = 414 \text{ W}$$

La pérdida de energía es considerablemente menor.

28-7 Rectificación y amplificación

Aunque es fácil disponer de corriente alterna, con frecuencia se necesita corriente continua para alimentar aparatos como radios portátiles o calculadoras. Estos dispositivos suelen entregarse con pilas o baterías adecuadas y con convertidores de ca-cc para ahorrar pilas cuando se tiene acceso a la ca. Estos convertidores contienen un transformador para reducir el voltaje desde 220 V al que se necesita (normalmente 9 V) y un circuito para convertir la ca en cc. El proceso de convertir la corriente alterna en corriente continua se denomina **rectificación**. El principal elemento de un circuito rectificador es el **diodo**. Los primeros diodos, desarrollados por John Fleming en 1904, eran tubos de vacío que contenían dos elementos principales, un cátodo que emite electrones y un ánodo, denominado la placa, que los recoge. La característica a destacar de un diodo es que conduce la corriente en un sentido y no en el otro. En la actualidad la mayoría de los diodos que se utilizan son dispositivos de semiconductores, que serán estudiados en el capítulo 39 de la versión ampliada de este libro. El símbolo para designar un diodo como elemento de un circuito es \rightarrow . La flecha indica el sentido en que puede pasar la corriente por el diodo. (Este sentido es contrario al del movimiento de los electrones.)

En la figura 28-26 se muestra en esquema un diodo de tubo de vacío. Cuando se calienta el cátodo (mediante un elemento calefactor con circuito separado), emite electrones, lo cual es un proceso denominado **emisión termoiónica** descu-



Transformador y rectificador para convertir la corriente de 120 V ca de un enchufe de pared a 9 V cc para su empleo en conexión con una radio o una calculadora, con objeto de ahorrar pilas.

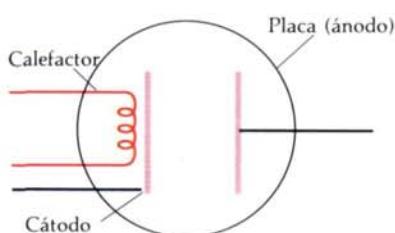
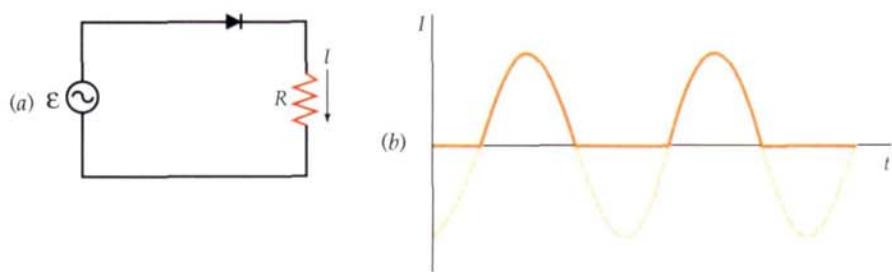


Figura 28-26 Diodo de vacío. Cuando se calienta el cátodo, emite electrones, que son arrastrados hasta la placa cuando posee un potencial más alto que el cátodo.

Figura 28-27 (a) Circuito simple compuesto por un generador de ca, un diodo y una resistencia. (b) Corriente en función del tiempo en la resistencia del circuito anterior. La corriente negativa indicada por la línea a trazos no atraviesa el diodo.



biero por Thomas Edison en 1883. Si la placa tiene un potencial más elevado que el cátodo, atrae a los electrones y el tubo conduce una corriente, que suele denominarse **corriente de placa**. Si la placa se encuentra a un potencial inferior al del cátodo, los electrones se ven repelidos y no pasa corriente por el tubo.

En la figura 28-27a se ve un circuito simple que contiene un generador de ca, un diodo y una resistencia. La corriente que recorre la resistencia se ha indicado en la figura 28-27b. Se dice entonces que el diodo es un rectificador de media onda porque circula corriente por la resistencia sólo durante medio ciclo del generador de ca. En la figura 28-28 se muestra un circuito que proporciona una rectificación de la onda completa. En él, se han conectado dos diodos a los terminales *a* y *b* de un transformador. Las salidas de los diodos se conectan entre sí y a uno de los extremos de la resistencia. El otro extremo de la misma se conecta al punto medio *c* del transformador. Cuando el punto *a* está a un potencial superior que el punto *c*, el diodo 1 conduce la corriente I_1 a la resistencia. Medio ciclo después, el punto *b* está a un potencial más alto que el punto *c* y entonces es el diodo 2 el que conduce corriente a la resistencia, I_2 . La corriente $I_1 + I_2$ que pasa por la resistencia puede verse en la figura 28-29d. Las variaciones no deseables que presenta la salida del rectificador se suele denominar el **rizado** de la corriente.

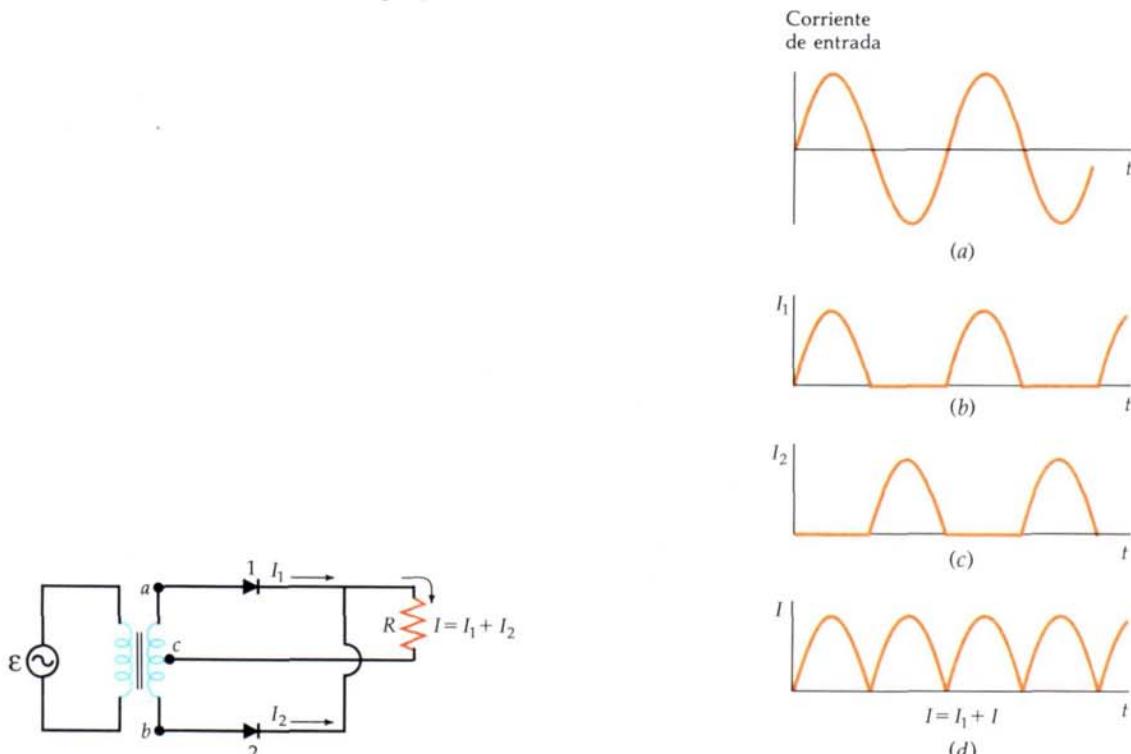
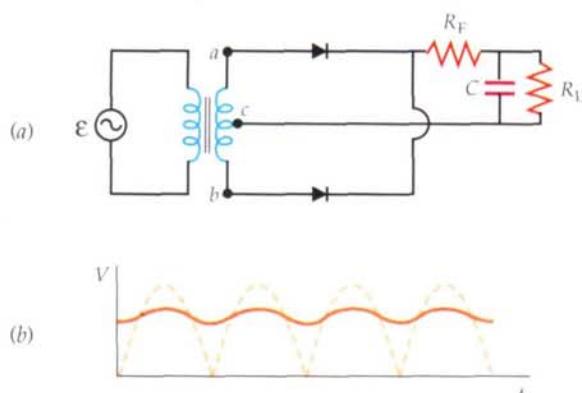


Figura 28-28 Circuito rectificador de onda completa. Cuando el potencial del punto *a* es mayor que el del punto *c*, la corriente I_1 atraviesa el diodo 1. Medio ciclo después el potencial del punto *b* es mayor que el del punto *c* y entonces la corriente I_2 pasa por el diodo 2.

Figura 28-29 (a) Corriente de entrada al transformador en el circuito indicado en la figura 28-28. (b) Corriente I_1 que atraviesa el diodo 1. (c) Corriente I_2 que atraviesa el diodo 2. (d) Corriente total $I = I_1 + I_2$ que recorre la resistencia de la figura 28-28.



En la figura 28-30a se ha añadido un filtro pasa bajo compuesto por una resistencia R_F y condensador C entre el rectificador y la resistencia de carga R_L . (Este filtro se analizó anteriormente en el ejemplo 28-9.) Se escoge la resistencia R_F de forma que sea mucho menor que R_L para que así la caída de tensión de cc (y, por tanto, la pérdida de potencia) a través de la resistencia del filtro sea pequeña en comparación con la aplicada a la resistencia de carga. La capacidad C es grande de modo que el filtro tiene una constante de tiempo $R_F C$ mucho mayor que el período existente entre los ciclos de las ondulaciones, consiguiéndose de este modo que la variación de la carga (y el potencial) del condensador debido al rizado sea muy pequeña en comparación con la que se tendría si el rizado variase lentamente. En la figura 28-30b pueden verse las formas de onda correspondientes a la entrada y salida de tensión en el filtro.

En 1907, Lee de Forest descubrió que la corriente de placa podía modificarse notablemente mediante pequeñas variaciones de la tensión de un tercer electrodo insertado entre el cátodo y el ánodo, o placa. Se indica en la figura 28-31 un diagrama del tubo de vacío llamado triodo. El tercer electrodo es una malla de hilo muy fina llamada rejilla. Igual que en el diodo, el cátodo del triodo se calienta y emite electrones que se recogen en la placa, que está a un potencial más alto (normalmente de 100 a 200 V) que el cátodo. Como la rejilla está más próxima

Figura 28-30 (a) El circuito rectificador de onda completa de la figura 28-28 con un filtro pasa bajo para suavizar las ondulaciones o rizado de la tensión rectificada. (b) Tensión de entrada (a trazos) y tensión de salida (a trazo lleno) del filtro pasa bajo.

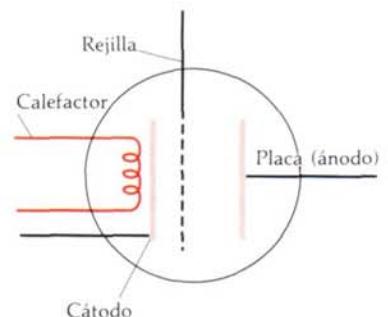
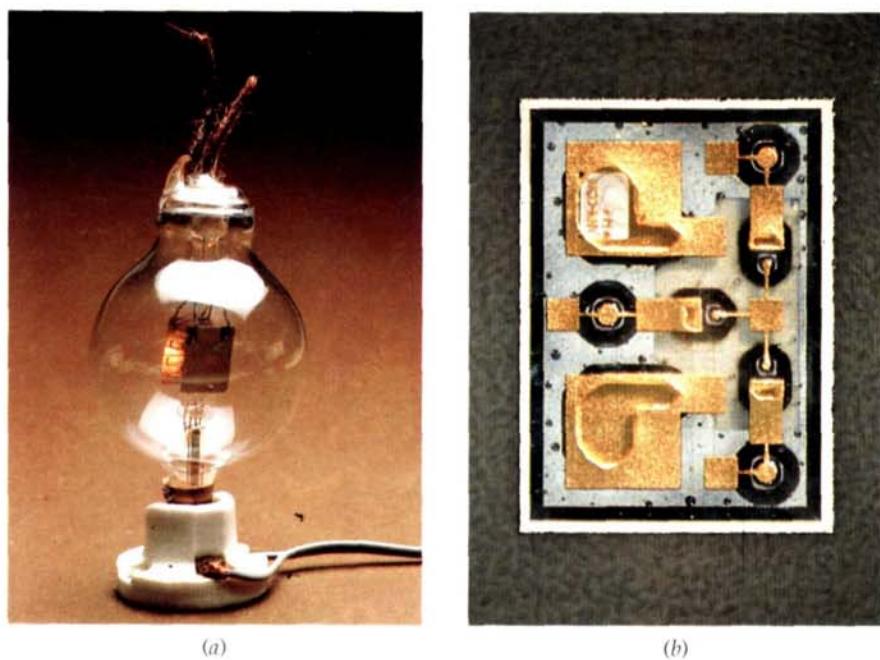
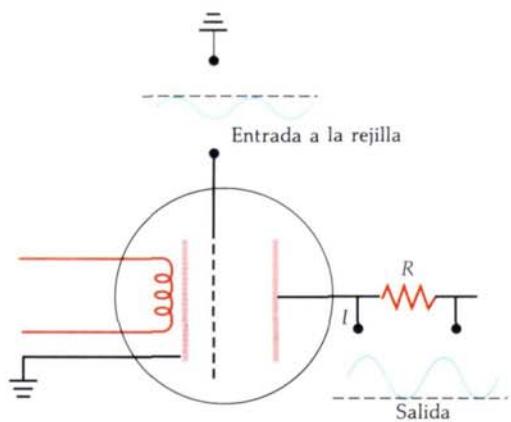


Figura 28-31 Triodo de vacío. La rejilla cercana al cátodo controla la corriente de placa. Cuando la rejilla es negativa respecto al cátodo, repele los electrones emitidos por el cátodo y disminuye la corriente de placa. Cuando la rejilla es positiva respecto al cátodo, atrae los electrones emitidos por el cátodo e incrementa la corriente de placa.



(a) Tubo triodo de vacío, inventado por Lee De Forest en 1907. A cada lado del cátodo (que se encuentra oculto para su observación en la parte central) está parcialmente visible la rejilla de control, formada por dos hilos de níquel en zigzag. Una pareja de placas de níquel que rodean a la rejilla sirven de ánodo. El tubo (sin contar su base de cerámica) tiene 9 cm de altura.
 (b) Chip de silicio que contiene seis diodos PIN (elementos oscuros de forma octogonal). Los diodos PIN funcionan como una resistencia que varía de acuerdo con la tensión que se aplica a sus extremos. Se utilizan para dejar pasar, o no, señales de microondas cortocircuitando las guías de ondas que las transmiten.

Figura 28-32 Amplificación mediante un triodo. Una pequeña señal sinusoidal que se aplique a la rejilla, da como resultado una gran señal sinusoidal a través de la resistencia R .

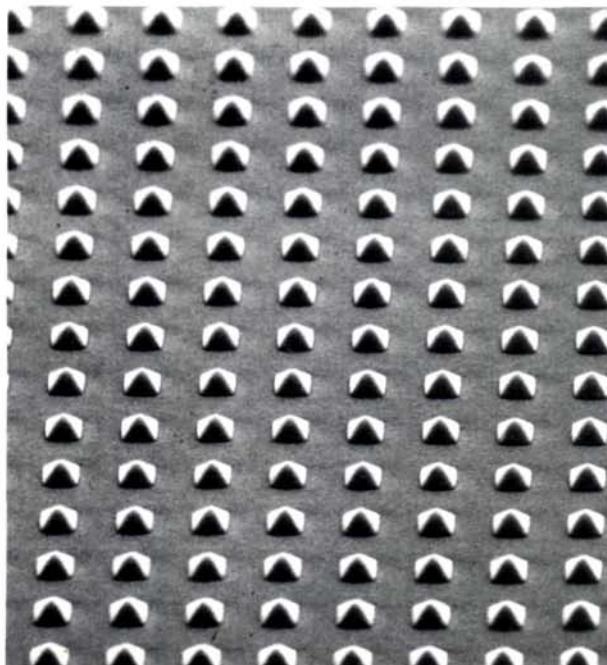


al cátodo que la placa, el potencial de la misma respecto al cátodo tiene una gran influencia sobre la corriente de placa. Cuando la rejilla está al mismo potencial que el cátodo, la corriente de placa no se ve afectada esencialmente por la rejilla. Cuando la rejilla es negativa respecto al cátodo, los electrones que éste emite se ven repelidos por la rejilla y la corriente de placa disminuye mucho. Cuando la rejilla es positiva respecto al cátodo, se ve incrementada la corriente de placa. En la figura 28-32 puede verse cómo se utiliza un triodo como amplificador. La señal de entrada es una pequeña tensión sinusoidal que se aplica entre la rejilla y el cátodo. La señal de salida es la tensión que aparece en la resistencia R . Esta señal es considerablemente mayor que la de entrada porque pequeñas variaciones de tensión en la rejilla producen cambios grandes en la corriente de placa. Hoy en día los triodos de vacío han sido sustituidos en su mayoría por transistores, que estudiaremos en el capítulo 38 de la versión ampliada de este libro.

Cuestión

9. Explicar por qué la intensidad eficaz en un circuito rectificador de media onda es la mitad que la que aparece en un rectificador de onda completa.

Los tubos de vacío pueden construirse ahora en formas miniaturizadas conocidas como elementos de vacío microeléctricos. Este tipo de tubos, en la actualidad en fase de investigación, podrán algún día sustituir los tubos de rayos catódicos de los aparatos de televisión, haciendo que sean mucho más compactos. Esta distribución de pirámides recubiertas de tungsteno y obtenidas mediante grabado en un solo cristal de silicio, pretende sustituir al cátodo. Las pirámides tienen $3\text{ }\mu\text{m}$ de altura y están separadas en $10\text{ }\mu\text{m}$. En lugar de utilizar el calor, se aplica encima de las pirámides un campo eléctrico muy intenso de modo que se emiten electrones. (A campos suficientemente grandes, los electrones superan las fuerzas que los retienen en la superficie del tungsteno.) A diferencia de los transistores, estos elementos son insensibles al calor y a la radiación. Además, considerando tamaños equivalentes, los tubos de microvacío funcionan con mayor rapidez que los transistores debido a que los electrones viajan a través de ellos sin colisiones.



Resumen

1. Se define el valor eficaz de la corriente alterna, I_{ef} , como

$$I_{\text{ef}} = \sqrt{(I^2)m}$$

Está relacionado con la corriente máxima por

$$I_{\text{ef}} = \frac{I_{\text{máx}}}{\sqrt{2}}$$

La potencia media disipada en una resistencia que transporta una corriente sinusoidal es

$$P_m = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{\text{máx}} I_{\text{máx}} = \mathcal{E}_{\text{ef}} I_{\text{ef}} = I_{\text{ef}}^2 R$$

2. La tensión que aparece en una bobina adelanta a la corriente en 90° . La corriente eficaz o máxima está relacionada con la tensión eficaz o máxima por

$$I = \frac{V_L}{X_L}$$

en donde

$$X_L = \omega L$$

es la reactancia inductiva de la bobina. La potencia media disipada por una bobina es nula.

La tensión que aparece entre placas de un condensador retrasa a la corriente en 90° . La corriente eficaz o máxima está relacionada con la tensión eficaz o máxima por

$$I = \frac{V_C}{X_C}$$

en donde

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

es la reactancia capacitiva. La potencia media disipada en un condensador es nula. Como la resistencia, las reactancias inductiva y capacitativa tienen unidades de ohmio.

3. Las relaciones de fase existentes entre las tensiones aplicadas a una resistencia, a un condensador y a una bobina en un circuito de ca, pueden describirse gráficamente mediante la representación de las tensiones por vectores bidimensionales rotatorios denominados fasores. Estos fasores giran en sentido antihorario con una frecuencia angular ω que es igual a la frecuencia angular de la corriente. El fensor I representa la corriente. El fensor V_R representa la tensión aplicada a una resistencia que está en fase con la corriente. El fensor V_L representa la tensión aplicada a una bobina y está adelantado respecto al de la corriente en 90° . El fensor V_C representa la tensión en placas de un condensador y está retrasado respecto al de la corriente en 90° . El componente x de cada fensor es igual al valor instantáneo de la corriente o de la correspondiente caída de tensión en cualquier momento.
4. Si se descarga un condensador a través de una bobina, la carga y la tensión del condensador oscilan con frecuencia angular

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

La corriente en la bobina oscila con la misma frecuencia, pero está desfasada

en 90° respecto a la carga. La energía oscila entre la energía eléctrica del condensador y la energía magnética de la bobina. Si el circuito tiene también resistencia, las oscilaciones son amortiguadas debido a que se disipa energía en la resistencia.

5. La corriente en un circuito *LCR* serie accionado por un generador de ca viene dada por

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{máx}}}{Z} \cos(\omega t - \delta)$$

en donde la impedancia Z es

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

y se calcula el ángulo de fase δ a partir de

$$\tan \delta = \frac{X_L - X_C}{R}$$

La potencia media que entra en un circuito de esta clase depende de la frecuencia y viene dada por

$$P_m = \mathcal{E}_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \cos \delta$$

en donde $\cos \delta$ recibe el nombre de factor de potencia. La potencia media tiene su valor máximo a la frecuencia de resonancia, que viene dada por

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

A la frecuencia de resonancia, el ángulo de fase δ es cero, el factor de potencia vale 1, las reactancias inductiva y capacitativa son iguales y la impedancia Z es igual a la resistencia R .

6. La agudeza de la resonancia se describe mediante el factor Q , que se define como

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R}$$

Cuando la resonancia es razonablemente estrecha, el factor Q puede aproximarse por

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f}$$

en donde Δf es la anchura de la curva de resonancia.

7. Un transformador es un aparato para variar las tensiones y corrientes alterna sin pérdida apreciable de energía. Si un transformador tiene N_1 vueltas en el primario y N_2 en el secundario, la tensión que aparece en el arrollamiento secundario está relacionada con la fem del generador aplicado al primario por

$$V_2 = - \frac{N_2}{N_1} \mathcal{E}$$

Un transformador se denomina elevador o de alta, si N_2 es mayor que N_1 de modo que la tensión de salida es más alta que la tensión de entrada. Si N_2 es menor que N_1 , se llama reductor o de baja.

8. Un diodo es un dispositivo que permite el paso de la corriente sólo en un sentido. Puede utilizarse para convertir corriente alterna en corriente continua, proceso que se denomina rectificación.
9. Pequeñas variaciones de la tensión de la rejilla de un triodo producen grandes cambios en la corriente de placa, efecto que puede utilizarse para amplificar señales de ca.

Motores eléctricos

John Dentler

Academia Naval de los Estados Unidos

El desarrollo de una amplia variedad de motores eléctricos ha revolucionado nuestra sociedad. Al comienzo del siglo XX, las máquinas de la mayoría de las grandes fábricas estaban accionadas por una o dos máquinas grandes de vapor que empleaban correas y poleas para la transmisión de la energía. Los automóviles se ponían en marcha con manivelas, los refrigeradores utilizaban grandes bloques de hielo para enfriar los alimentos y las máquinas de coser se movían mediante un pedal accionado con los pies. Hoy en día, todas estas tareas las realizan los motores eléctricos.

La gran diversidad de aplicaciones que utilizan motores eléctricos requiere que existan muchos diseños diferentes de los mismos. Los motores de los relojes eléctricos deben funcionar a una velocidad precisa. Los motores de arranque de los automóviles deben proporcionar un par de arranque muy grande. Un secador de pelo portátil debe tener poco peso y funcionar con di-



John Dentler se graduó en la Academia Naval de los Estados Unidos, en 1972, con un B.S. en Física. Después de completar el Programa de Entrenamiento en Energía Nuclear de la Armada, fue destinado como Oficial de la División de Control del Reactor al portaaviones norteamericano Nimitz. Después pasó como

instructor y director de la Unidad de Prototipos de Energía Nuclear. Siguió tres cursos sobre Ingeniería, Armamento y Operaciones, asistió a la Escuela Naval de Postgraduados, recibiendo un título Superior en Ciencias (especializándose en electro-óptica, guerra electrónica y sistemas de radar). Destinado como instructor a la Academia Naval de los Estados Unidos, enseñó Fundamentos de Ingeniería Eléctrica para todos los grados medios y el Curso de Conversión de Energía en el Curriculum Principal de Ingeniería Eléctrica. Fue nombrado Ayudante del Director del Departamento de Ingeniería Eléctrica. En la actualidad se encuentra destinado como Ingeniero de Sistemas de Energía en el Centro de Investigaciones de la Marina «David Taylor».

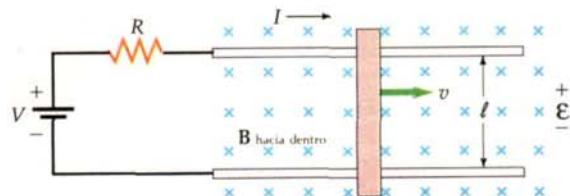


Figura 1 Motor eléctrico sencillo construido con la adición de una pila de voltaje V de la máquina lineal indicada en las figuras 26-14 y 26-16.

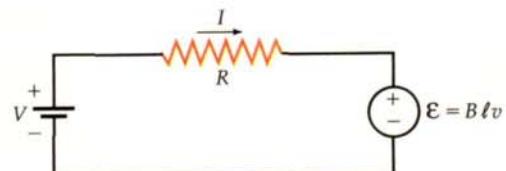


Figura 2 Circuito correspondiente al motor eléctrico lineal de la figura 1.

versas velocidades. Los técnicos proyectan los motores necesarios para las diversas aplicaciones utilizando modelos que se han deducido a partir de los principios físicos estudiados en el texto. Estos modelos son ecuaciones que predicen el comportamiento de un motor para un conjunto de especificaciones o cargas prefijadas.

El motor más sencillo del que se puede idear un modelo (o «modelar») se deriva de la máquina lineal que se presentó en la sección 26-4. La figura 1 es semejante a las figuras 26-16 y 26-16 excepto en que se ha incluido una pila de voltaje V de forma que éste tenga el mismo sentido que la fem desarrollada en la barra móvil. En general los carriles y la barra tienen resistencia e inductancia y la pila tiene resistencia interna. Por sencillez, supongamos que la inductancia es despreciable y que la resistencia total del sistema puede considerarse compuesta o equivalente a una sola resistencia R . La barra puede modelarse como una fuente ideal de fem con $\mathcal{E} = Blv$. El circuito que modela este motor lineal simple se indica en la figura 2.

Aplicando la regla de las mallas de Kirchhoff a este circuito se tiene

$$V - IR - \mathcal{E} = 0 \quad (1)$$

Sustituyendo \mathcal{E} por Blv , obtenemos

$$V - IR - Blv = 0 \quad (2)$$

Así pues, la corriente viene dada por

$$I = -\frac{Bl}{R}v + \frac{V}{R} \quad (3)$$

La corriente es, pues, una función lineal de la velocidad con tal de que V , B , l y R sean constantes. Con veloci-

Continúa

dades bajas, la fem es pequeña y la corriente es positiva (sentido horario). Cuando la velocidad es alta, la fem es mayor que el voltaje de la pila V y la corriente es negativa (sentido antihorario). Si la velocidad es $V/B\ell$, la corriente es nula.

Si los carriles de la figura 1 carecieran de rozamiento y el campo magnético fuese suficientemente ancho, la barra se aceleraría hasta alcanzar una velocidad terminal $V/B\ell$, en cuyo instante la fuerza $F=IB\ell$ sería nula porque la corriente se hace cero. Si la barra se acelera hacia la derecha mediante la acción de una fuerza exterior, la corriente carga la pila como el generador carga la batería de un automóvil. Si la barra se va frenando por la acción de una fuerza externa dirigida hacia la izquierda, la corriente se ve impulsada a circular por la barra por acción de la batería o pila. Se producirá la corriente suficiente para equilibrar la fuerza opuesta aplicada y la barra se moverá con la velocidad de equilibrio que es menor que $V/B\ell$.

Un proyectista de motores se interesa en la predicción de cómo responderá un motor (modificando su velocidad) frente a la acción de una carga. En el caso de este motor lineal, la carga es una fuerza externa aplicada a la barra. La fuerza igual y opuesta que proporciona el motor a la velocidad de equilibrio es $F=IB\ell$. Puede ordenarse la ecuación 3 para mostrar que la velocidad es una función lineal de la corriente:

$$v = -\frac{R}{B\ell} I + \frac{V}{B\ell} \quad (4)$$

Sustituyendo la corriente por $F/B\ell$ se tiene

$$v = -\frac{R}{(B\ell)^2} F + \frac{V}{B\ell} \quad (5)$$

La ecuación 5 que relaciona la velocidad con la carga se denomina *característica de funcionamiento del motor*. La figura 3 muestra un gráfico de la velocidad en función de la fuerza. La línea 1 representa v en función de F para valores típicos de la tensión V de la batería o pila y del campo magnético B . La línea 2 muestra el efecto que se consigue al aumentar la tensión V . La línea 3 a su vez muestra el efecto que produce la disminución del campo magnético B . La línea 4 representa una carga típica (por ejemplo, de rozamiento) que aumenta proporcionalmente a la velocidad. Así pues, la velocidad de funcionamiento del motor indicado en la figura 1 puede controlarse modificando, o la tensión, o el campo magnético.

El motor lineal de la figura 1 no resulta práctico para la mayoría de las aplicaciones. En su lugar, es más apropiado un motor rotatorio. En la figura 4 se ve la mayor parte de las piezas de un motor eléctrico rotatorio sencillo. Aunque este motor parece ser muy diferente del lineal, el funcionamiento de ambos motores es semejante.

De la misma forma que el motor lineal, el motor ro-

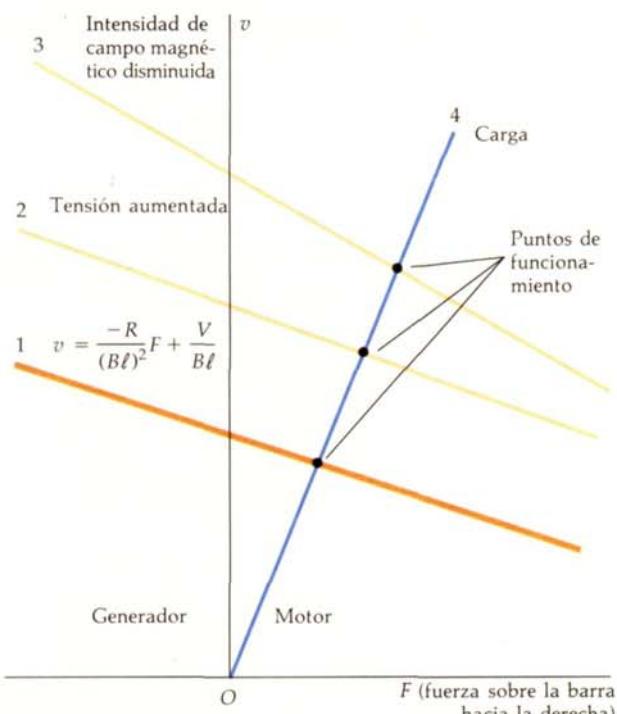


Figura 3 Gráfico de los diferentes valores de la característica de funcionamiento del motor lineal eléctrico de la figura 1 y una carga típica. La línea de carga indicada es típica en el caso de una carga de rozamiento.

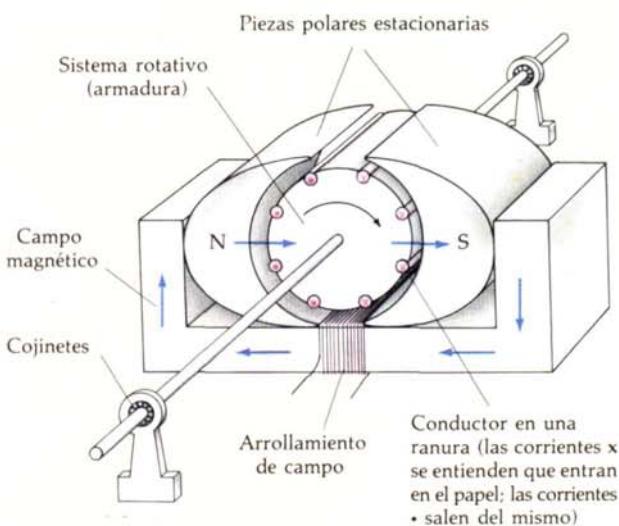


Figura 4 Motor eléctrico rotativo simple.

tatorio tiene unos conductores por los que circula corriente que reacciona con un campo externo. El campo, denominado *campo del estator*, está creado y controlado por la bobina de conductor que se ve en la parte inferior de la figura 4. El flujo procedente de la bobina pasa a través del núcleo, creando un polo norte a la izquierda del elemento rotatorio y un polo sur a su derecha. El conjunto rotor está montado sobre dos cojinetes, uno en la parte delantera y el otro en la trasera del motor. Dicho conjunto, denominado *armadura*, está compuesto por un cilindro de hierro y ocho ranuras. Las ranuras contienen conductores que son semejantes a la barra del motor lineal. Si se hace circular la corriente a través de estos conductores en el sentido indicado (de adelante hacia atrás cerca del polo sur y en sentido contrario junto al polo norte), entonces se desarrollará un par de fuerzas neto en sentido horario que hará girar la armadura. El par que aparece en el motor rotatorio es análogo a la fuerza desarrollada en el motor lineal.

La construcción de un sistema que mantenga la dirección apropiada de la corriente en cada conductor de los que forman las espiras del rotor o armadura, es una tarea complicada. Estos dispositivos se denominan *montaje comutador de escobillas*. En la figura 5 se indican las conexiones de dicho montaje correspondientes al motor de la figura 4. La figura 6 es una fotografía

de un comutador de escobillas real utilizado en un motor de arranque de un automóvil. En la fotografía se ve una armadura con muchas ranuras y un comutador con muchos segmentos. La figura 7 es una fotografía de un motor pequeño con sólo tres ranuras discretas, conteniendo cada una de ellas muchos arrollamientos y un comutador con tres segmentos (de los que sólo dos son visibles).

El comutador de escobillas indicado en la figura 5 se compone de cuatro segmentos que sobresalen a lo largo del eje del motor y de dos escobillas que conducen la corriente desde una fuente de alimentación a los segmentos. Cada segmento está conectado a dos conductores que se encuentran alojados dentro de las ranuras del rotor. Los conductores están conectados entre sí mediante conductores situados en la parte de atrás del rotor y a través de los segmentos del comutador en la parte delantera del rotor. Este método de conexión da como resultado que hayan dos trayectos eléctricos en paralelo entre las escobillas; de este modo se están utilizando todos los conductores durante la totalidad del tiempo.

En el comutador indicado en la figura 5, la corriente entra por la escobilla de la derecha. Luego sigue uno de los trayectos en paralelo a través de la armadura. Los conductores situados en las ranuras 2 y 5 llevan la corriente desde la parte delantera hacia la trasera de la armadura. Los conductores 2 y 5 están conectados a los conductores 7 y 8 mediante conexiones situadas en la parte trasera de la armadura. La corriente regresa hacia el frente a través de las ranuras 7 y 8 que se encuentran conectadas a las ranuras 3 y 4 mediante la conexión común que representan los segmentos del comutador. La corriente vuelve de nuevo hacia la parte trasera a lo largo de las ranuras 3 y 4, volviendo una vez más adelante por las ranuras 1 y 6, de donde se extraen por las correspondientes escobillas situadas a la izquierda. Las escobillas son estacionarias y contactarán con diferentes segmentos del comutador cuando la armadura haya girado 90 grados. Como la armadura posee unos arrollamientos simétricos, las ranuras situadas cada vez a la derecha harán circular siempre la corriente desde la parte delantera a la trasera del rotor, mientras que las situadas en la izquierda transportarán la corriente en sentido contrario, manteniendo así permanentemente el par en sentido horario.

El par total que hace girar el motor es la suma de los pares ejercidos por los conductores que hay en cada ranura. En cualquier posición existen cuatro conductores en la armadura que actúan en la parte derecha y otros cuatro en la izquierda; por consiguiente, el par es aproximadamente constante. Análogamente, la fem total desarrollada entre las escobillas es la suma de las fem engendradas en cada conductor. En todas las posiciones existen dos trayectos paralelos, compuesto cada uno de ellos por cuatro conductores. Según la sección 26-6, la fem desarrollada a lo largo de un solo elemento de conductor puede demostrarse que es

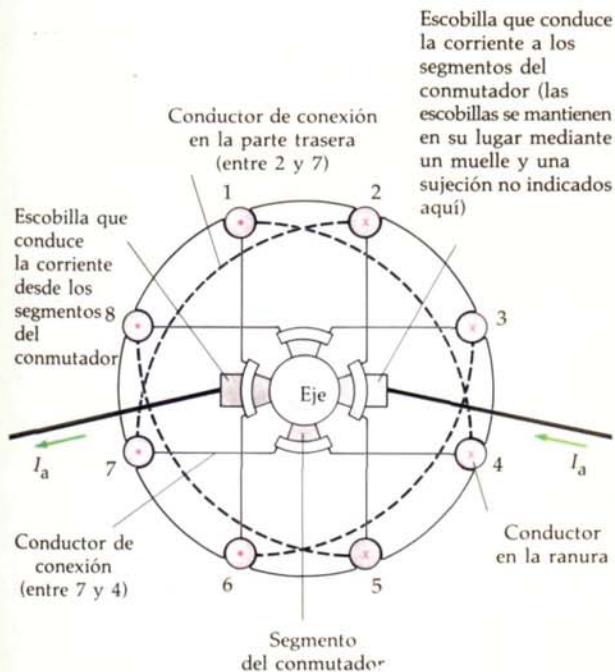
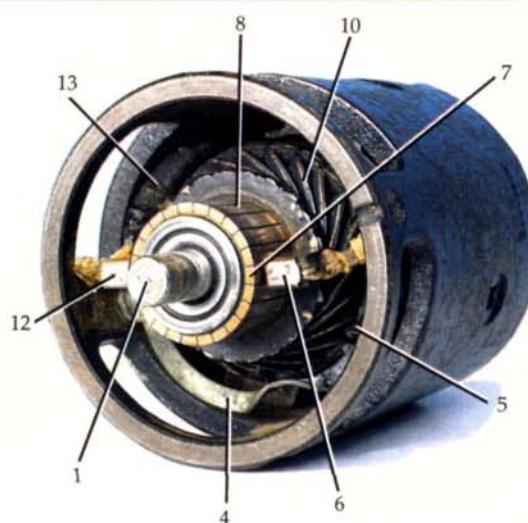
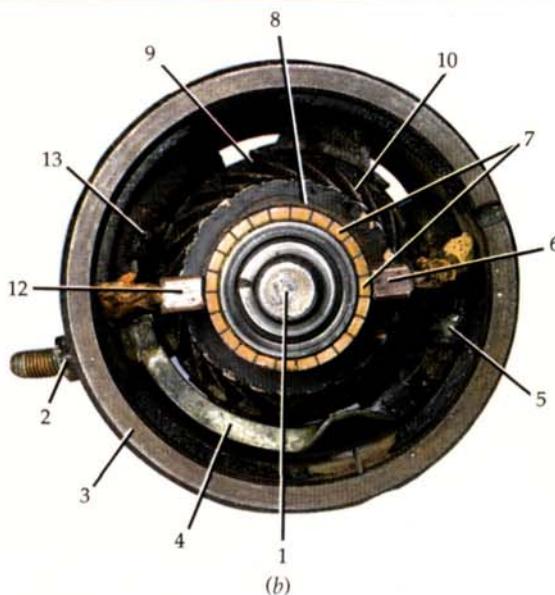


Figura 5 Sistema comutador de escobillas para el motor de la figura 4. Un comutador, en su significado más general, es un sistema de conexión y desconexión. El dispositivo indicado distribuye la corriente en la armadura de forma que mantenga la dirección adecuada en cada ranura para mantener el sentido del giro horario.

Continúa



(a)

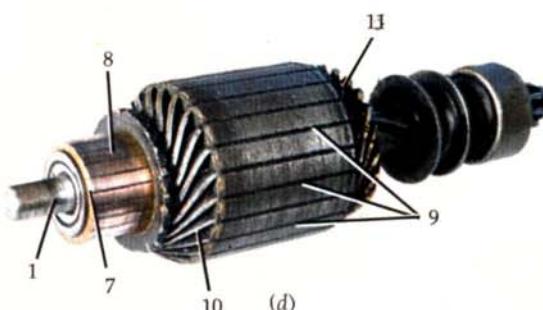


(b)

Figura 6 Diversas vistas de un motor de arranque de un automóvil. El eje (1) se soporta mediante cojinetes alojados normalmente en las tapas de la carcasa del motor (que han sido retiradas). La corriente procedente de la batería entra en el motor mediante un cable sujeto al borne (2) situado en la parte lateral del motor. El borne está aislado de la carcasa del motor (3) y se conecta a través de la carcasa a la bobina de campo por una cinta de metal (4) que pasa por debajo del eje (la longitud extra es para permitir la dilatación térmica). La cinta se bobina en la parte derecha para formar el arrollamiento correspondiente al polo derecho del estator (5). Luego se conecta esta cinta al conductor y a la escobilla de metal blando (6) de la derecha. La escobilla se mantiene prieta normalmente contra el conmutador (7) mediante una mordaza con un muelle (que también ha sido retirado). La corriente se conduce a la armadura a través de uno de los 23 segmentos conmutadores (8). La armadura (figura 6d) tiene 23 ranuras (9) conteniendo cada una de ellas un par de conductores, lo que hace un total de 46 conductores (10) (uno de los conductores de cada par está próximo al eje y queda oculto mientras que el otro queda hacia el exterior y está visible). En este motor, el sistema giratorio es la armadura. Estos conductores están interconectados en la parte trasera del motor (11) formando dos trayectos paralelos, cada uno de ellos con una longitud equivalente a la suma de 23 conductores, entre las escobillas. La corriente se conduce desde un segmento del conmutador situado a la izquierda de la escobilla del mismo lado (12) y a la cinta de metal bobinada para formar la parte izquierda del polo del estator (13). La corriente se lleva a la «masa» del automóvil a través de una conexión resistente entre el arrollamiento del polo izquierdo del estator y la carcasa del motor. Esta conexión se encuentra en el interior y en el fondo del motor y no puede verse. El trayecto o camino que sigue el flujo magnético correspondiente al campo del estator va desde su parte derecha, a través de la armadura, hacia su parte izquierda y se completa con la carcasa del motor.



(c)



(d)

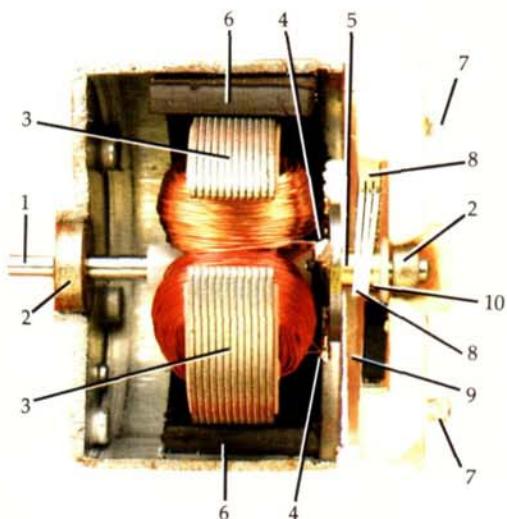


Figura 7 Motor pequeño ordinario en el que se ha cortado y retirado la mitad superior de su carcasa. El eje (1) está soportado por cojinetes (2) a la derecha y a la izquierda. La armadura está construida con 12 placas delgadas (3) de un material magnéticamente permeable, laminadas conjuntamente, formando tres ranuras y tres polos salientes. Las ranuras de esta armadura son muy grandes y contienen muchas vueltas de hilo. El conjunto de vueltas alrededor de un polo se denomina arrollamiento. Los arrollamientos están soldados juntos en sus extremos (4) y luego están conectados a los segmentos del conmutador (5). La armadura está rodeada por imanes permanentes negros (6) que crean un campo estacionario que ha de reaccionar con las corrientes y campos de la armadura. Una batería conectada a las conexiones exteriores (7) lleva la corriente a través de la escobilla superior en forma de peine (8) al segmento del conmutador de la parte superior, luego a través de los arrollamientos interconectados y finalmente de nuevo a la batería mediante el segmento conmutador de la parte inferior (9). Obsérvese cómo están separados los segmentos del conmutador (10). El funcionamiento de este motor puede considerarse de dos formas distintas. O bien la corriente que atraviesa los arrollamientos interacciona con el campo estacionario originando un par, o bien la corriente en los arrollamientos alrededor de las piezas salientes de la armadura forman polos que alternativamente repelen y atraen las piezas polares estacionarias. Un análisis cuidadoso demuestra que ambos enfoques son realmente exactamente iguales.

$$\mathcal{E} = B\ell r\omega \operatorname{sen}(\omega t + \delta) \quad (6)$$

en donde ℓ es la longitud de la armadura (desde la parte delantera hasta la trasera) y r es el radio del rotor. La fem total en la armadura será el promedio de la desarrollada a través de los dos trayectos paralelos descritos anteriormente. Las ranuras están separadas entre sí sólo 45 grados, de forma que la variación de la fem total en la armadura cuando ésta gira será relativamente pequeña. Por consiguiente, puede descartarse de la ecuación 6 el término variable con el tiempo, $\operatorname{sen}(\omega t + \delta)$, y la fem total puede expresarse como

$$\mathcal{E}_{\text{total}} = BK\omega \quad (7)$$

siendo K la denominada constante del motor, en donde

se incluyen los valores de ℓ y de r y los resultados de sumar y promediar la fem total a través de la armadura. La validez de la ecuación 7 mejora si se añaden más ranuras y segmentos de conmutación a la armadura.

La Ecuación 7 es semejante a $\mathcal{E} = Blv$, sustituyendo b por K y v por ω . La potencia cedida a la armadura es el producto de la fem por la corriente en la armadura I_a . En el caso de un motor rotativo, la carga es un par τ aplicado al eje y que se opone al sentido de la rotación. La potencia mecánica proporcionada a la carga es el producto del par por la velocidad angular. En el equilibrio, el par motor de este dispositivo es igual al par de la carga. Así pues,

$$P = \mathcal{E}I_a = \tau\omega \quad (8)$$

Sustituyendo ahora la fem por su valor $BK\omega$ tomado de la ecuación 7, se tiene

$$P = BKI_a\omega = \tau\omega \quad (9)$$

Aplicando la misma lógica utilizada para desarrollar el modelo del motor lineal, podemos representar la armadura por una simple fuente de tensión o voltaje con una resistencia exterior R_a . Las conexiones del arrollamiento de campo de la bobina indicada en la parte inferior de la figura 4 pueden conectarse en serie o en paralelo (shunt) con la armadura. Estos dos métodos de conexión dan origen a motores con características muy diferentes.

Conexión en paralelo o shunt

En la figura 8 se indica el circuito correspondiente a la conexión de campo en paralelo o shunt. Se incluye una resistencia variable, denominada reostato, para controlar el campo y, por consiguiente, controlar la velocidad del motor. Aplicando la regla de las mallas de Kirchhoff a este circuito se tiene

$$V - I_a R_a - BK\omega = 0 \quad (10)$$

que puede reordenarse para expresar la velocidad de rotación ω en función de la corriente en la armadura I_a :

$$\omega = -\frac{R_a}{BK} I_a + \frac{V}{BK} \quad (11)$$

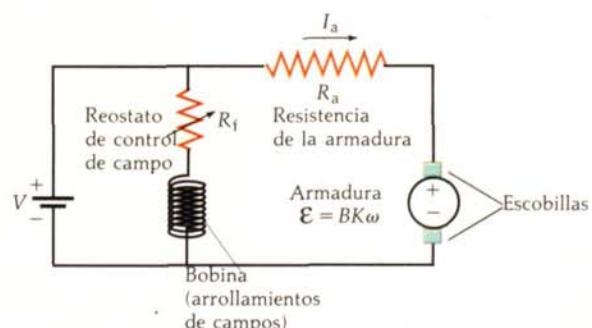


Figura 8 Circuito correspondiente a un motor shunt de cc típico.

Continúa

Si sustituimos la corriente por τ/BK según la ecuación 9, la velocidad de rotación resulta ser

$$\omega = -\frac{R_a}{(BK)^2} \tau + \frac{V}{BK} \quad (12)$$

La ecuación 12 es una ecuación lineal que relaciona la velocidad de rotación con la carga. Es análoga a la característica de funcionamiento del motor lineal. Puede controlarse la velocidad variando la tensión V , o, lo que es más corriente, variando la corriente en la bobina con el reóstato.

Cuando la corriente en la armadura es elevada, su núcleo se satura, la caída de tensión debida a la inductancia de la armadura empieza a ser significativa y la relación entre el par y la velocidad deja de ser lineal. Sin embargo, cuando las cargas son normales, la ecuación 12 describe exactamente el funcionamiento del motor. La figura 9 muestra cómo afecta la saturación de la armadura a la característica de funcionamiento.

Conexión en serie

En el circuito del motor de la figura 10, la bobina se conecta en serie con la armadura, de forma que la intensidad del campo es función de la propia corriente de la

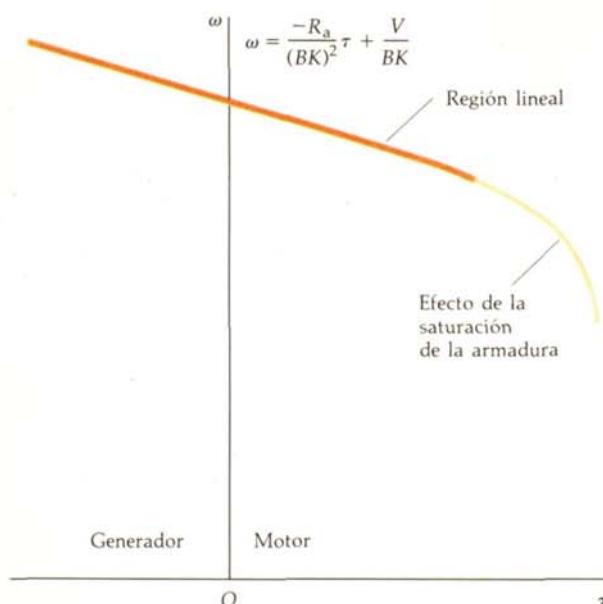


Figura 9 Representación gráfica del par en función de la velocidad de rotación en donde se ve la influencia de la saturación de la armadura sobre la característica de funcionamiento del motor shunt de cc típico.

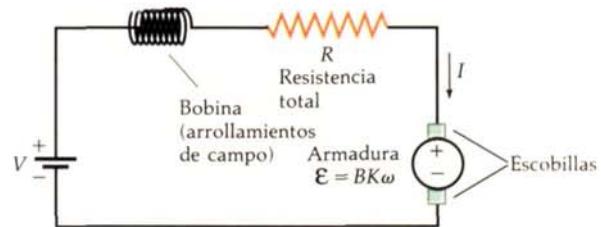


Figura 10 Circuito correspondiente a un motor serie de cc típico.

armadura. Si ésta es pequeña y el campo no se satura, puede expresarse el producto de la intensidad del campo por la constante del motor K como una función lineal de la corriente de la armadura:

$$BK = CI$$

en donde C es una cierta constante. Sustituyendo este valor de BK en las expresiones correspondientes a la fem de la armadura, a la potencia y al par, nos dan

$$\mathcal{E} = CI\omega \quad P = CI^2\omega \quad y \quad \tau = CI^2$$

La regla de las mallas de Kirchhoff da entonces

$$V - IR - CI\omega = 0$$

en donde R representa la resistencia total de la bobina y la armadura e I representa la única corriente que circula por el circuito. Así se tiene la siguiente ecuación de la velocidad en función de la corriente:

$$\omega = \frac{V}{CI} - \frac{R}{C}$$

Sustituyendo I por $\sqrt{\tau/C}$, obtenemos la ecuación que nos da la velocidad en función del par, que es la característica de funcionamiento del motor serie:

$$\omega = \frac{V}{(C\tau)^{1/2}} - \frac{R}{C}$$

En la figura 11 puede verse la característica de funcionamiento del motor serie. Comparándolo con el del motor shunt se revelan notables diferencias. A pares pequeños, el motor serie gira muy de prisa, casi sin límite (la única carga es el rozamiento de los cojinetes y del aire que rodea al rotor) mientras que el motor shunt se regula para girar a una velocidad próxima a V/BK . Con pares elevados, la velocidad del motor shunt va disminuyendo hasta que el motor se detiene, mientras que el motor serie proporciona su mayor par cuando está parado. Por consiguiente, si se necesita poner en marcha un motor de automóvil la mejor elección es el

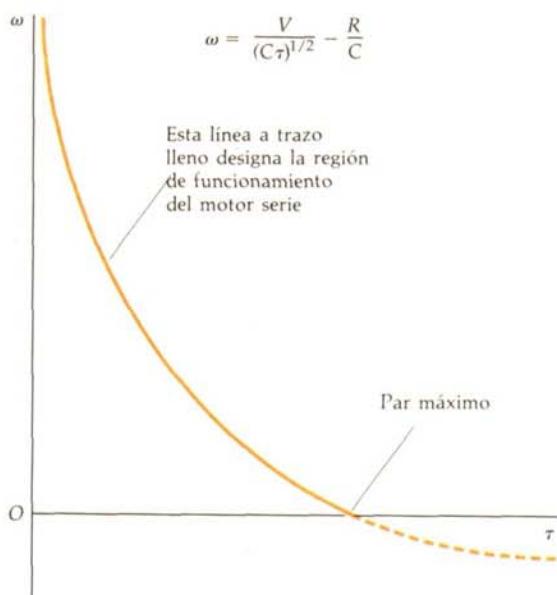


Figura 11 Representación gráfica del par en función de la velocidad de rotación en donde se ve la característica de funcionamiento del motor serie de cc típico.

motor serie, que proporciona el alto par requerido para el arranque cuando $\omega=0$. Por otra parte, para hacer funcionar una carga que deba ser muy sensible a la velocidad debe escogerse un motor shunt, como los que accionan los cassettes.

Los motores lineal, shunt y serie estudiados hasta aquí, funcionan todos ellos con corriente continua, mientras que las compañías suministradoras de energía eléctrica lo hacen en forma de corriente alterna. Con sólo modificaciones de menor importancia, se aplican los principios de construcción y funcionamiento de los motores de cc y también a los motores de ca.

El par de un motor serie es proporcional a I^2 y, por ello, es independiente del sentido de la corriente. Esto se debe a que es la misma corriente la que circula para crear el campo estacionario y por la armadura rotatoria. Con esta simple consideración, podría llegarse a la conclusión de que cualquier motor serie puede funcionar con corriente alterna. Sin embargo, una de las hipótesis que hicimos para simplificar el análisis del motor de cc es que podía despreciarse la inductancia, pero esto no es así cuando se acciona un motor con una fuente de ca. La inductancia produce dos efectos: (1) actúa como un estrangulamiento limitando la cantidad de corriente de ca para una tensión de entrada determinada y (2) varía las relaciones de fase entre la tensión y la corriente.

Un motor shunt de cc normalmente tiene unos arrollamientos de campo con una resistencia elevada y una armadura con una inductancia alta. Al aplicar una co-

rriente alterna a este tipo de motor se crearía una diferencia de fase entre las corrientes del campo y de la armadura que daría origen a un funcionamiento totalmente insatisfactorio.

Un motor serie, como el de arranque del motor de un coche de la figura 6, tiene un circuito magnético muy compacto con tolerancias muy pequeñas con objeto de poder desarrollar un par muy elevado con pequeñas dimensiones. Este sistema tiene una inductancia muy alta, lo que limita la corriente de ca que utiliza el motor. Un motor serie diseñado para funcionar con corriente alterna debe tener una inductancia relativamente pequeña, que se consigue limitando la cantidad de hierro utilizado en las piezas polares de la armadura. Este tipo de motor se denomina *motor universal*. Por su propia naturaleza resulta de poco peso y su empleo se ve limitado a sistemas que deban accionar cargas ligeras como las aspiradoras, las batidoras, los secadores de cabellos y las máquinas de coser. Sus características de funcionamiento son semejantes a las del motor de cc serie indicado en la figura 11. Examinando esta figura, ¿podría explicarse por qué el motor de una aspiradora se acelera cuando se bloquea el sistema de succión? (Indicación: La carga que debe mover el motor de la aspiradora es el aire que la atraviesa. Si el flujo disminuye, la carga también se reduce.)

El motor de ca más común es el motor de inducción. Este motor tiene un sistema rotatorio como el indicado en la figura 4, pero a diferencia del motor de cc, el interruptor y los hilos de interconexión se sustituyen por dos placas conductoras, que conectan todos los conductores contenidos en la ranura, una de ellas montada en la parte delantera y la otra en la trasera. Este tipo de montaje simplifica mucho la construcción del rotor. El problema aparece al pretender conseguir que gire un motor en cortocircuito. La solución consiste en hacer que el campo creado por el estator aparezca en rotación. Si el campo gira existirá una velocidad relativa entre el rotor y el campo del estator. Así se desarrolla una fem a través del rotor cortocircuitado, obligando a circular corriente por los conductores de las ranuras. El campo rotativo del estator produce un par sobre la corriente inducida en el rotor. Recuérdese que el motor lineal tenía que moverse hasta alcanzar la velocidad precisa para generar una fem que exactamente compensase la tensión de la fuente de alimentación. El motor de inducción responde del mismo modo, pero la tensión de la fuente al rotor es cero. Para mantener la fem próxima a cero, el rotor se mueve de forma que reduzca todo lo posible el movimiento relativo entre él mismo y el campo. Así pues, el rotor gira casi a la misma velocidad que la de rotación del campo del estator.

Existen muchos esquemas para crear la rotación aparente de un campo. La que se indica en la figura 12 se conoce como el *polo conformado*. El motor es idéntico al de la figura 4 con la excepción de que el rotor está cortocircuitado en sus dos caras o extremos mientras

Continúa

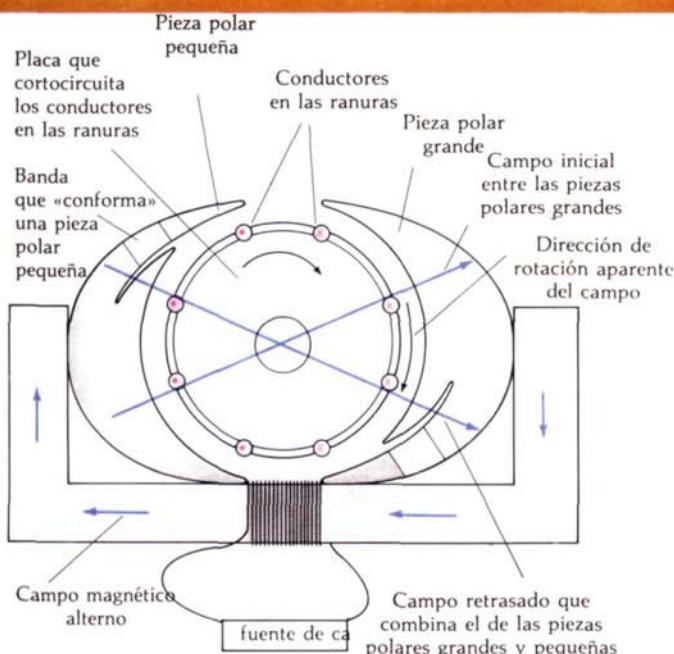


Figura 12 Motor de inducción con polos conformados.

que las piezas polares del estator poseen unos cortes, enrollándose una banda conductora alrededor de las partes más pequeñas que aparecen en los polos así cortados. Esta construcción permite que se establezca rápidamente el campo magnético entre las caras de las grandes piezas polares mientras que se retrasa entre las caras pequeñas debido a las inductancias de las bandas conductoras. El retraso de fase entre el campo que aparece entre las grandes caras polares y el campo existente entre las caras polares pequeñas, crea las características de un campo rotatorio.

En la figura 13 se muestra la característica de funcionamiento de un motor de inducción típico. El funcionamiento normal corresponde a una velocidad próxima a la velocidad de rotación del campo. Si el motor de la figura 12 estuviese conectado a una fuente de 60 Hz, la velocidad de rotación sería ligeramente inferior a las 60 rev/s.

Un rotor con conductores que envuelven un núcleo metálico y magnéticamente permeable reúne las características de una inductancia y una resistencia. El efecto de la inductancia dentro del rotor es proporcional a la frecuencia de las corrientes del rotor, que a su vez son proporcionales a la diferencia que existe entre la rotación del campo y la del rotor. Se presenta el par máximo indicado sobre la curva de característica de funcionamiento allí donde la diferencia entre la velocidad del rotor y la velocidad de rotación del campo sea lo suficientemente grande como para que los efectos de la inductancia del rotor hagan retrasar de modo significativo las corrientes del rotor. Las corrientes retrasadas del rotor no pueden interaccionar con el campo del estator y así el motor deja de girar si se aumenta la carga.

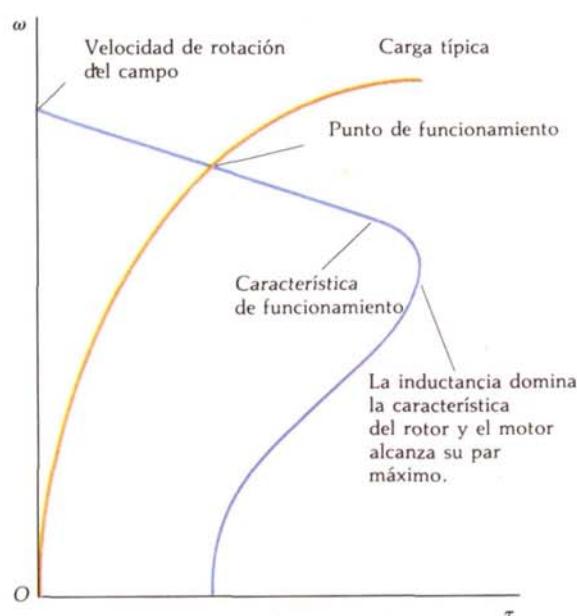


Figura 13 Representación gráfica del par en función de la velocidad donde se muestra la característica de funcionamiento de un motor de inducción típico. La línea de carga indicada es típica de una bomba centrífuga.

Se utilizan los motores con polos conformados en aparatos con cargas ligeras como los ventiladores de refrigeración que se montan en los equipos eléctricos. Existen sistemas más complejos para crear la rotación del campo que se emplean en los motores de inducción para congeladores y acondicionadores de aire. Los grandes motores de inducción emplean electricidad trifásica para hacer girar el campo. Los principios y características fundamentales de funcionamiento son los mismos para todos los motores de inducción con independencia de su tamaño o del método que se utilice para crear la rotación del campo.

Si que tenga importancia que utilicen corriente continua o alterna, todos los motores eléctricos se basan en los principios fundamentales estudiados en los capítulos 26 a 28 de este texto. En la actualidad existe una extraordinaria oportunidad para que los técnicos sepan combinar creativamente estos principios fundamentales con los avances experimentados en campos afines, como la superconductividad, y empiecen a proyectar los motores que cumplan los requisitos y necesidades que se van a necesitar en el siglo XXI. Algunos de los problemas a resolver serán el desarrollo y mejora de los coches eléctricos, de los trenes y de los satélites artificiales, entre otros muchos que irán surgiendo.

Existen muchos libros de texto excelentes en ingeniería eléctrica dedicados al tema de las máquinas o motores. Dos de mis favoritos son *Electric Machines and Power Systems* por Vincent Deltoro (Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1985) y *Electromechanical Motion Devices* por Paul Krause y Oleg Wasynczuk (McGraw-Hill, New York, 1989).

Sugerencias bibliográficas

Coltman, John W.: «The Transformer», *Scientific American*, enero 1988, pág. 86.

Este artículo describe la controversia que tuvo lugar en el si-

glo XIX entre los partidarios de la corriente alterna y los de la corriente continua y cómo el transformador ayudó a resolver el problema. También se analizan algunos de los avances más recientes en la tecnología de los transformadores.

Revisión

- A. Objetivos: Una vez estudiado este capítulo, deben poseerse los siguientes conocimientos:
1. Poder definir la corriente eficaz y relacionarla con la corriente máxima en un circuito de ca.
 2. Poder definir la reactancia capacitiva, la reactancia inductiva y la impedancia.
 3. Poder dar las relaciones de fase entre la corriente y la tensión aplicada a una resistencia, a una bobina y a un condensador.
 4. Dibujar un diagrama de fasores para un circuito *LCR* serie y a partir de él relacionar el ángulo de fase δ con la reactancia capacitativa, la reactancia inductiva y la resistencia.
 5. Poder definir el factor *Q* y estudiar su significado.
 6. Poder establecer la condición de resonancia en un circuito *LCR* serie con un generador y representar gráficamente la potencia en función de la frecuencia tanto para un circuito con *Q* bajo como con *Q* alto.
 7. Ser capaz de describir un transformador elevador o reductor.

- B. Definir, explicar o simplemente identificar:

Valores eficaces (ef)
Reactancia inductiva
Reactancia capacitativa
Fasores
Reactancia total
Impedancia
Frecuencia de resonancia
Resonancia
Factor de potencia
Curvas de resonancia
Anchura de resonancia

Factor *Q*
Filtro pasa baja
Transformador
Primario
Secundario
Corriente magnetizante
Transformador elevador
Transformador reductor
Resistencia de carga
Rectificación
Diodo
Emisión termoiónica
Corriente de placa
Rizado
Triodo
Rejilla
Amplificador

- C. Verdadero o falso: Si la afirmación es verdadera, explicar por qué lo es. Si es falsa dar un contraejemplo, es decir, un ejemplo que contradiga la afirmación.

1. La corriente alterna en una resistencia no disipa ninguna potencia porque la corriente es negativa y positiva con la misma frecuencia.
2. A frecuencias muy altas, un condensador actúa como un cortocircuito.
3. Un circuito *LCR* con un factor *Q* elevado tiene una curva de resonancia estrecha.
4. En la resonancia, la impedancia de un circuito *LCR* es igual a la resistencia *R*.
5. En la resonancia, la corriente y la tensión del generador están en fase.
6. Si un transformador aumenta la corriente, debe disminuir el voltaje.

Problemas

Nivel I

28-1 Corriente alterna en una resistencia

1. Una bombilla de 100 W se conecta a un enchufe de 120 V eficaces. Calcular (a) I_{ef} (b) $I_{\text{máx}}$ y (c) la potencia máxima.
2. Una resistencia de 3Ω se coloca en serie con un generador de 12,0 V (máximo) de 60 Hz de frecuencia. (a) ¿Cuál es la frecuencia angular de la corriente? (b) Hallar $I_{\text{máx}}$ e I_{ef} . ¿Cuál

es (c) la potencia máxima debida a la resistencia, (d) la potencia mínima y (e) la potencia media?

3. Un secador eléctrico de una lavandería de 5,0 kW eficaces se conecta a 240 V eficaces. Calcular (a) I_{ef} y (b) $I_{\text{máx}}$. (c) Calcular las mismas magnitudes para una secadora de la misma potencia que funcionara a 120 V eficaces.
4. Un interruptor de un circuito debe saltar a 15 A eficaces con una tensión de 120 V eficaces. (a) ¿Cuál es el mayor valor de $I_{\text{máx}}$ que podrá soportar el interruptor? (b) ¿Qué potencia media podrá suministrar el circuito en cuestión?

28-2 Corriente alterna en bobinas y condensadores

5. ¿Cuál es la reactancia de una bobina de 1,0 mH a (a) 60 Hz, (b) 600 Hz y (c) 6 kHz?
6. Una bobina tiene una reactancia de 100 Ω a 80 Hz. (a) ¿Cuál es su inductancia? (c) ¿Cuál es su reactancia a 160 Hz?
7. ¿A qué frecuencia será la reactancia de un condensador de 10,0 μF igual a la de una bobina de 1,0 mH?
8. Hacer un gráfico que muestre X_L en función de f para $L=3$ mH.
9. ¿Cuál es la reactancia de un condensador de 1,0 nF a (a) 60 Hz, (b) 6 kHz, y (c) 6 MHz?
10. Hallar la reactancia de un condensador de 10,0 μF a (a) 60 Hz, (b) 6 kHz, y (c) 6 MHz.
11. Hacer un esquema gráfico de X_C en función de la frecuencia f para $C=100 \mu\text{F}$.
12. Una fem de 10,0 V de valor máximo y una frecuencia de 20 Hz se aplica a un condensador de 20 μF . Calcular (a) $I_{\text{máx}}$ y (b) I_{ef} .
13. ¿A qué frecuencia es la reactancia de un condensador de 10 μF (a) 1 Ω , (b) 100 Ω y (c) 0,01 Ω ?

28-3 Fasores

14. Dibujar el diagrama de fasores resultante para un circuito LCR serie cuando $V_L < V_C$. Demostrar con dicho diagrama que la fem retrasará respecto a la corriente en un ángulo de fase δ dado por

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{V_C - V_L}{V_R}$$

28-4 Circuitos LC y LCR sin generador

15. Demostrar partiendo de las definiciones del henrio y el faradio que $1/\sqrt{LC}$ tiene unidades de s^{-1} .
16. ¿Cuál es el período de oscilación de un circuito LC compuesto por una bobina de 2 mH y un condensador de 20 μF ?
17. ¿Qué inductancia se necesita junto a un condensador de 80 μF para construir un circuito LC que oscile con una frecuencia de 60 Hz?
18. Un circuito LC tiene una capacidad C_1 y una bobina de inductancia L_1 . Un segundo circuito tiene $C_2 = \frac{1}{2}C_1$ y $L_2 = 2L_1$, y un tercero tiene $C_3 = 2C_1$ y $L_3 = \frac{1}{2}L_1$. (a) Demostrar que los tres circuitos oscilan con la misma frecuencia. (b) ¿En qué circuito será más elevada la corriente máxima si la capacidad correspondiente se carga siempre al mismo potencial V ?
19. Se carga a 30 V un condensador de 5 μF y luego se conecta a una bobina de 10 mH. (a) ¿Cuánta energía se almacena en el circuito? (b) ¿Cuál es la frecuencia de oscilación del circuito? (c) ¿Cuál es la corriente máxima en el circuito?

28-5 Circuitos LCR con un generador

20. Un circuito serie LCR con $L=10$ mH, $C=2 \mu\text{F}$ y $R=5 \Omega$ está conectado a un generador de 100 V de fem máxima y con una frecuencia angular variable ω . Hallar (a) la frecuencia de resonancia ω_0 y (b) el valor de I_{ef} en la resonancia. Cuando $\omega=8000$ rad/s, hallar (c) X_C y X_L , (d) Z e I_{ef} y (e) el ángulo de fase δ .
21. En el circuito del problema 20, supongamos que la frecuencia del generador es $f=\omega/2\pi=1$ kHz. Hallar (a) la frecuencia de resonancia $f_0=\omega_0/2\pi$, (b) X_C y X_L , (c) la impedancia total Z e I_{ef} y (d) el ángulo de fase δ .

22. Un circuito LCR serie de un receptor de radio se sintoniza mediante un condensador variable de modo que pueda resonar a frecuencias comprendidas entre 500 y 1600 kHz. Si $L=1,0 \mu\text{H}$, hallar el intervalo de valores de la capacidad necesarios para cubrir el margen de frecuencias señalado.

23. Las estaciones de radio de FM tienen frecuencias de ondas portadoras que se encuentran separadas por 0,20 MHz. Cuando la radio se sintoniza a una estación, tal como 100,1 MHz, la anchura de resonancia del circuito receptor deberá ser mucho menor que 0,2 MHz de forma que no se reciban las estaciones adyacentes. Si $f_0=100,1$ MHz y $\Delta f=0,05$ MHz, ¿cuál es el factor Q de este circuito?

24. (a) Hallar el factor de potencia del circuito de ejemplo 28-5 cuando $\omega=400$ rad/s. (b) ¿A qué frecuencia angular vale dicho factor 0,5?

25. Hallar (a) el factor Q y (b) la anchura de resonancia correspondiente al circuito del problema 20. (c) ¿Cuál es el factor de potencia cuando $\omega=8000$ rad/s?

26. Un generador de ca con una fem máxima de 20 V se conecta en serie con un condensador de 20 μF y una resistencia de 80 Ω . No hay ninguna inductancia en el circuito. Hallar (a) el factor de potencia, (b) la corriente eficaz y (c) la potencia media si la frecuencia angular del generador es 400 rad/s.

27. Una bobina puede considerarse como una resistencia y una inductancia en serie. Suponer que $R=100 \Omega$ y $L=0,4$ H. La bobina se conecta a una línea de 120 V eficaces y 60 Hz. Hallar el factor de potencia, (b) la corriente eficaz y (c) la potencia media suministrada.

28. Encontrar el factor de potencia y el ángulo de fase δ para el circuito del problema 20 cuando la frecuencia del generador es (a) 900 Hz, (b) 1,1 kHz, y (c) 1,3 kHz.

28-6 Transformadores

29. Un transformador tiene 400 vueltas en el primario y 8 en el secundario. (a) ¿Es un transformador elevador o reductor? (b) Si se conecta el primario a una tensión de 120 V eficaces, ¿cuál es la tensión en circuito abierto que aparece en el secundario? (c) Si la corriente del primario es 0,1 A, ¿cuál es la corriente del secundario admitiendo que existe una corriente imantadora despreciable y que no hay ninguna pérdida de potencia?

30. El primario de un transformador reductor tiene 250 vueltas y está conectado a 120 V eficaces. El secundario suministra 20 A a 9 V. Calcular (a) la corriente en el primario y (b) el número de vueltas que posee el secundario, suponiendo un rendimiento del 100 por ciento.

31. Un transformador tiene un primario de 500 vueltas, que está conectado a 120 V eficaces. Su bobina secundaria posee tres conexiones diferentes para dar tres salidas de 2,5; 7,5 y 9 V. ¿Cuántas vueltas son necesarias para cada una de las partes de la bobina secundaria?

32. El circuito de distribución de una línea de potencia para una urbanización residencial funciona a 2000 V eficaces. Esta tensión debe reducirse a 240 V para su empleo en las viviendas. Si el arrollamiento secundario del transformador tiene 400 vueltas, ¿cuántas vueltas poseerá el primario?

28-7 Rectificación y amplificación

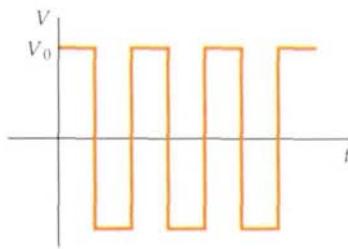
33. La corriente máxima de salida de un circuito rectificador de media onda es 3,5 A. (a) Hallar la corriente eficaz. (b) Hallar la corriente eficaz si el circuito es rectificador de onda completa con la misma corriente máxima.

34. Dibujar un gráfico de la corriente en función del tiempo si se incluye un filtro pasa baja como el de la figura 28-30a antes de la resistencia de carga de la figura 28-27.

Nivel II

35. En la figura 28-33 se indica la tensión V en función del tiempo t correspondiente a una «onda cuadrada». Si $V_0 = 12 \text{ V}$, (a) ¿cuál es la tensión eficaz de esta onda? (b) Si se rectifica esta onda alternativa de modo que sólo permanezcan las tensiones positivas, ¿cuál será ahora la tensión eficaz de la onda rectificada?

Figura 28-33 Problema 35.



36. Una corriente pulsante tiene un valor constante de 15 A durante los primeros 0,1 s de cada segundo y luego 0 durante los 0,9 s de cada segundo. (a) ¿Cuál es el valor eficaz de esta onda? (b) Cada pulso de corriente se genera mediante un pulso de 100 V. ¿Cuál es la potencia media que proporciona el generador de pulsos?

37. Se aplica una tensión de 100 V eficaces a un circuito RC serie. La tensión en placas del condensador es 80 V, ¿cuál es la tensión eficaz aplicada a la resistencia?

38. Demostrar que la fórmula $P_m = \mathcal{E}_e^2 R / Z^2$ da el resultado correcto para un circuito que contenga un generador y sólo (a) una resistencia, (b) un condensador y (c) una bobina.

39. Hacer una gráfica de la impedancia Z en función de ω para (a) un circuito LR serie, (b) un circuito RC serie y (c) un circuito LCR serie.

40. La carga sobre el condensador de un circuito serie LC viene dada por $Q = (15\mu\text{C}) \cos(1250t + \pi/4)$ estando t en segundos. (a) Hallar la corriente en función del tiempo. (b) Hallar C si $L = 28 \text{ mH}$. (c) Escribir las expresiones correspondientes a la energía eléctrica U_e , la energía magnética U_m y la energía total U .

41. Se conectan en serie a una tensión de ca de 60 Hz una resistencia R y una bobina de 1,4 H. La tensión en la resistencia es 30 V y en la bobina 40 V. (a) ¿Cuánto vale la resistencia R ? (b) ¿Cuál es la tensión de entrada de la ca?

42. Por una resistencia R circula una corriente $I = (5,0 \text{ A}) \sin 120\pi t + (7,0 \text{ A}) \sin 240\pi t$. (a) ¿Cuál es la corriente eficaz? (b) Si la resistencia R es de 12 Ω , ¿qué potencia se disipa en la resistencia? (c) ¿Cuál es la tensión eficaz que aparece en la resistencia?

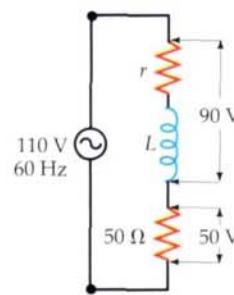
43. Una bobina tiene una resistencia en cc de 80Ω y una impedancia de 200Ω a una frecuencia de 1 kHz. Se puede despreciar la capacidad del arrollamiento de la bobina a esta frecuencia. ¿Cuál es la inductancia de la bobina?

44. Dos fuentes de tensión de ca se conectan en serie con una resistencia $R = 25 \Omega$. Una fuente viene dada por $V_1 =$

$(5,0 \text{ V}) \cos(\omega t - \alpha)$ y la otra por $V_2 = (5,0 \text{ V}) \cos(\omega t + \alpha)$, siendo $\alpha = \pi/6$. (a) Hallar la corriente que pasa por R utilizando la identidad trigonométrica correspondiente a la suma de dos cosenos. (b) Utilizar diagramas de fasores para hallar la corriente en R . (c) Hallar la corriente en R si $\alpha = \pi/4$ y la amplitud de V_2 se aumenta de 5,0 V a 7,0 V.

45. Dado el circuito de la figura 28-34, (a) hallar la pérdida de potencia en la bobina. (b) Hallar la resistencia r de la bobina. (c) Hallar la inductancia L .

Figura 28-34 Problema 45.



46. Una bobina de resistencia R , inductancia L y capacidad despreciable tiene un factor de potencia de 0,866 a una frecuencia de 60 Hz. ¿Cuál es el factor de potencia para una frecuencia de 240 Hz?

47. Por una bobina circula 15 A cuando se conecta a una línea de 220 V de ca y 60 Hz. Cuando se pone en serie con una resistencia de 4Ω y se conecta la combinación a una batería de 100 V, se observa que la corriente que proporciona la batería al cabo de un tiempo largo es de 10 A. (a) ¿Cuál es la resistencia de la bobina? (b) ¿Cuál es la inductancia de la misma?

48. Se conecta una bobina a un generador de ca de 100 V y 60 Hz. A esta frecuencia la bobina tiene una impedancia de 10Ω y una reactancia de 8Ω . (a) ¿Cuál es la corriente en la bobina? (b) ¿Cuál es el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje aplicado? (c) ¿Qué capacidad en serie se requiere para que estén en fase la corriente y el voltaje? (d) Cuál será entonces el voltaje medido en el condensador?

49. Se conecta en serie con un generador de ca de 60 Hz una bobina de $0,25 \text{ H}$ y un condensador C . Se utiliza un voltímetro de ca para medir la tensión eficaz que aparece por separado en la bobina y en el condensador. La tensión eficaz que aparece en el condensador es 75 V y en la bobina 50 V. (a) Hallar la capacidad C y la corriente eficaz en el circuito. (b) ¿Cuál será la medida de la tensión eficaz medida en el conjunto condensador-bobina?

50. Demostrar que la ecuación 28-49 puede escribirse como

$$I_{\max} = \frac{\omega \mathcal{E}_{\max}}{\sqrt{L^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 R^2}}$$

51. (a) Demostrar que la ecuación 28-48 puede escribirse como

$$\operatorname{tg} \delta = L(\omega^2 - \omega_0^2)/\omega R$$

Hallar δ aproximadamente para (b) frecuencias muy bajas y (c) frecuencias muy altas.

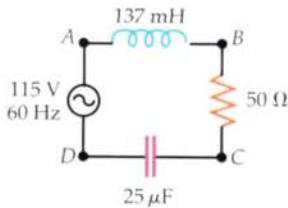
52. (a) Demostrar que en un circuito RC serie sin inductancia, el factor de potencia viene dado por

$$\cos \delta = \frac{RC\omega}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$$

(b) Hacer un gráfico que muestre el factor de potencia en función de ω .

53. En el circuito de la figura 28-35, el generador de ca produce una tensión eficaz de 115 V cuando funciona a 60 Hz. ¿Cuál es la tensión eficaz entre los puntos (a) AB , (b) BC , (c) CD , (d) AC y (e) BD ?

Figura 28-35 Problema 53.



54. Un generador de ca y frecuencia variable se conecta a un circuito LCR serie con $R=1 \text{ k}\Omega$, $L=50 \text{ mH}$ y $C=2,5 \mu\text{F}$. (a) ¿Cuál es la frecuencia de resonancia del circuito? (b) ¿Cuál es el valor Q ? (c) ¿A qué frecuencias el valor de la potencia media suministrada por el generador es la mitad de su valor máximo?

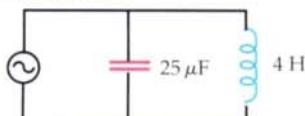
55. Un circuito LCR serie se conecta a una fuente de 500 Hz. El ángulo de fase entre la tensión aplicada y la corriente se determina que vale $\delta=75^\circ$ mediante medida hecha con un osciloscopio. Si se sabe que la resistencia total es 35Ω y la inductancia vale $0,15 \text{ H}$, ¿cuál es la capacidad del circuito?

56. Un circuito LCR serie con $R=400 \Omega$, $L=0,35 \text{ H}$ y $C=5 \mu\text{F}$ se conecta a un generador de frecuencia f variable. (a) ¿Cuál es la frecuencia de resonancia f_0 ? Hallar f y f/f_0 cuando el ángulo de fase δ es (b) 60° y (c) -60° .

57. Un físico experimental desea diseñar un circuito LCR serie con un valor Q de 10 y una frecuencia de resonancia de 33 kHz. Posee una bobina de 45 mH y resistencia despreciable. ¿Qué valores podrá utilizar para la resistencia R y la capacidad C ?

58. La tensión del generador de la figura 28-36 viene dada por $V=(100 \text{ V}) \cos \omega t$. (a) En cada rama, ¿cuál es la amplitud de la corriente y su fase respecto a la tensión aplicada? (b) ¿Cuál es la frecuencia angular ω a que se anula corriente del generador? (c) A esta resonancia, ¿cuál es la corriente en la bobina? ¿Cuál es la corriente en el condensador? (d) Dibujar un diagrama de fasores que muestre las relaciones generales entre la tensión aplicada, la corriente del generador, la corriente del condensador y la corriente en la bobina para el caso en que la reactancia inductiva es mayor que la reactancia capacitativa.

Figura 28-36 Problema 58.



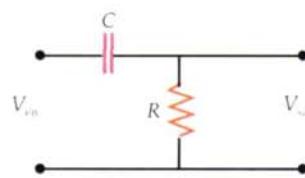
59. El circuito indicado en la figura 28-37 se denomina filtro pasa alta, porque las frecuencias de entrada elevadas se trans-

miten con una amplitud mayor que las frecuencias bajas. (a) Si la tensión de entrada es $V_{\text{en}}=V_0 \cos \omega t$, demostrar que la tensión de salida vale

$$V_{\text{sal}} = \frac{V_0}{\sqrt{(1/\omega RC)^2 + 1}}$$

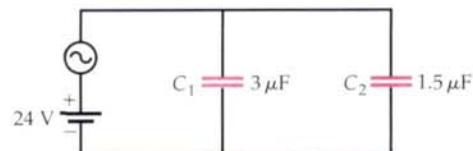
(b) A qué frecuencia angular la tensión de salida es la mitad que la de entrada? (c) Dibujar un gráfico de V_{sal}/V_0 en función de ω .

Figura 28-37 Problema 59.



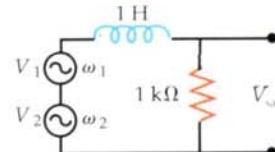
60. Un circuito se compone de dos condensadores, una batería de 24 V y una tensión de ca conectados como se indica en la figura 28-38. La tensión de ca viene dada por $(20 \text{ V}) \cos 120\pi t$ (t en segundos). (a) Hallar la carga en cada condensador en función del tiempo. Suponer que ha transcurrido un tiempo suficiente como para que los efectos transitorios hayan desaparecido prácticamente. (b) ¿Cuál es la corriente estacionaria? (c) ¿Cuál es la máxima energía almacenada en los condensadores? (d) ¿Cuál es la energía mínima almacenada en los condensadores?

Figura 28-38 Problema 60.



61. Una línea de transmisión simple transporta dos señales de tensión dadas por $V_1=(10 \text{ V}) \cos 100t$ y $V_2=(10 \text{ V}) \cos 10000t$, estando t en segundos. Se incluyen en la línea una bobina en serie de 1 H y una resistencia en paralelo de $1 \text{ k}\Omega$, como se indica en la figura 28-39. (a) ¿Cuál es la señal de tensión observada en el terminal de salida de la línea de transmisión? (b) ¿Cuál es el cociente entre la amplitud de baja frecuencia y la amplitud de alta frecuencia?

Figura 28-39 Problema 61.



62. Una bobina con resistencia e inductancia se conectan a una línea de 60 Hz y 120 V eficaces. La potencia media suministrada a la bobina es 60 W y la corriente eficaz es 1,5 A. Hallar (a) el factor de potencia, (b) la resistencia de la bobina

y (c) la inductancia de la bobina. (d) ¿Adelanta o retrasa la corriente a la tensión? ¿Cuál es el ángulo de fase δ ?

63. En un circuito LCR serie $X_C = 16 \Omega$ y $X_L = 4 \Omega$ a la misma frecuencia. La frecuencia de resonancia es $\omega_0 = 10^4 \text{ rad/s}$. (a) Hallar L y C . Si $R = 5 \Omega$ y $\mathcal{E}_{\max} = 26 \text{ V}$, hallar (b) el factor Q y (c) la corriente máxima.

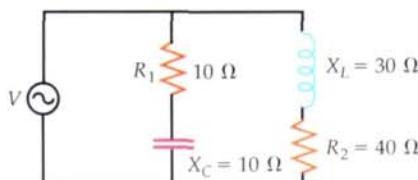
64. En un circuito LCR serie conectado a un generador de ca cuya fuerza electromotriz máxima es 200 V, la resistencia es 60Ω y la capacidad $8.0 \mu\text{F}$. La autoinducción puede variarse desde 8.0 hasta 40.0 mH mediante la inserción de un núcleo de hierro dentro del solenoide. La frecuencia angular es 2500 rad/s . Si la tensión del condensador no ha de superar los 150 V, hallar (a) la corriente máxima y (b) el margen de L que puede utilizarse con seguridad.

65. Cuando se conecta un circuito serie LCR a una línea de 60 Hz y 120 V eficaces, la corriente es $I_{\text{ef}} = 11.0 \text{ A}$ y la corriente adelanta a la tensión en 45° . (a) Hallar la potencia suministrada al circuito. (b) ¿Cuál es la resistencia? (c) Si la inductancia es $L = 0.05 \text{ H}$, hallar la capacidad C . (d) ¿Qué capacidad o inductancia habría que añadir para conseguir que el factor de potencia fuera 1?

Nivel III

66. Consideremos el circuito en paralelo indicado en la figura 28-40. (a) ¿Cuál es la impedancia de cada rama? (b) En cada rama, ¿cuál es la amplitud de la corriente y su fase relativa a la tensión aplicada? (c) Dar el diagrama de fasores de corriente y utilizarlo para hallar la corriente total y su fase relativa a la tensión aplicada.

Figura 28-40 Problema 66.



67. (a) Demostrar que la ecuación 28-48 puede escribirse

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{Q(\omega^2 - \omega_0^2)}{\omega \omega_0}$$

(b) Demostrar que cerca de la resonancia

$$\operatorname{tg} \delta \approx \frac{2Q(\omega - \omega_0)}{\omega}$$

(c) Hacer un esquema de δ en función de x siendo $x = \omega/\omega_0$, para un circuito con un Q elevado y para otro con un Q bajo.

68. Demostrar por sustitución directa que la corriente dada por la ecuación 28-47 con I_{\max} y δ dados por las ecuaciones 28-48 y 28-49 satisface a la ecuación 28-46. *Indicación:* Utilizar identidades trigonométricas para el seno y coseno de la suma de los ángulos y escribir la ecuación de la siguiente forma

$$A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t = 0$$

Puesto que esta ecuación debe ser válida en todo instante, $A=0$ y $B=0$.

69. Un determinado dispositivo eléctrico consume 10 A eficaces y tiene una potencia media de 720 W cuando se conecta a una línea de 120 V eficaces y 60 Hz. (a) ¿Cuál es la impedancia del aparato? (b) ¿A qué combinación en serie de resistencia y reactancia es equivalente este aparato? (c) Si la corriente adelanta a la fem, ¿es inductiva o capacitiva la reactancia?

70. Se conecta en serie un generador de ca con un condensador y una bobina en un circuito con resistencia despreciable. (a) Demostrar que la carga en el condensador obedece la ecuación

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}_{\max} \cos \omega t$$

(b) Demostrar por sustitución directa que esta ecuación se satisface por $Q = Q_{\max} \cos \omega t$ si

$$Q_{\max} = -\frac{\mathcal{E}_{\max}}{L(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

(c) Demostrar que la corriente puede escribirse como $I = I_{\max} \cos(\omega t - \delta)$, en donde

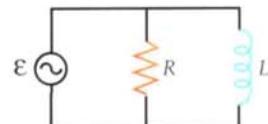
$$I_{\max} = \frac{\omega \mathcal{E}_{\max}}{L|\omega^2 - \omega_0^2|} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{|X_L - X_C|}$$

y $\delta = -90^\circ$ para $\omega < \omega_0$ y $\delta = 90^\circ$ para $\omega > \omega_0$.

71. Un método para medir autoinducciones consiste en conectar la bobina en serie con una capacidad y una resistencia conocidas, un amperímetro de ca y un generador de señales de frecuencia variable. La frecuencia del generador de señales se varía y se mantiene constante la fem hasta que la corriente es máxima. (a) Si $C = 10 \mu\text{F}$, $\mathcal{E}_{\max} = 10 \text{ V}$, $R = 100 \Omega$ e I es máxima para $\omega = 5000 \text{ rad/s}$, ¿cuánto vale L ? (b) ¿Cuál es el valor de I_{\max} ?

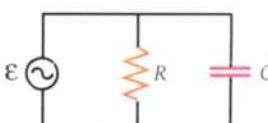
72. Una resistencia y una bobina están en paralelo aplicadas a una fem $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \cos \omega t$, como muestra la figura 28-41. Demostrar que (a) $I_R = (\mathcal{E}_{\max}/R) \cos \omega t$, (b) $I_L = (\mathcal{E}_{\max}/X_L) \cos(\omega t - 90^\circ)$ y (c) $I = I_R + I_L = I_{\max} \cos(\omega t - \delta)$, siendo $\operatorname{tg} \delta = R/X_L$ e $I_{\max} = \mathcal{E}_{\max}/Z$ con $Z^{-2} = R^{-2} + X_L^{-2}$.

Figura 28-41 Problema 72.



73. Una resistencia y un condensador están conectados en paralelo sobre una fem sinusoidal $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \cos \omega t$, como se ven en la figura 28-42. (a) Demostrar que la corriente en la resistencia es $I_R = (\mathcal{E}_{\max}/R) \cos \omega t$. (b) Demostrar que la corriente en la rama del condensador es $I_C = (\mathcal{E}_{\max}/X_C) \cos(\omega t + 90^\circ)$. (c) Demostrar que la corriente total viene dada por $I = I_R + I_C = I_{\max} \cos(\omega t + \delta)$, en donde $\operatorname{tg} \delta = R/X_C$ e $I_{\max} = \mathcal{E}_{\max}/Z$ con $Z^{-2} = R^{-2} + X_C^{-2}$.

Figura 28-42 Problema 73.



74. En la figura 28-18 se muestra una representación de la potencia media P_m en función de f del generador para un circuito LCR con un generador. La potencia media P_m viene dada por la ecuación 28-55, en donde $\omega = 2\pi f$. La «anchura a la mitad de su valor máximo» Δf es la anchura de la curva de resonancia entre los dos puntos en que P_m tiene un valor que es la mitad de su valor máximo. Demostrar que, en el caso de una resonancia muy aguda, $\Delta f \approx R/2\pi L = \Delta\omega/2\pi$ y, por tanto, que $Q = \omega_0/\Delta\omega = f_0/\Delta f$ en este caso (ecuación 28-58). *Indicación:* En la resonancia, el denominador del segundo miembro de la ecuación 28-55 es $\omega^2 R^2$. Los puntos a mitad de potencia se presentarán cuando el denominador sea aproximadamente el doble que posee cerca de la resonancia, esto es, cuando $L^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 = \omega_0^2 R^2 \approx \omega_0^2 R^2$. Sean ω_1 y ω_2 las soluciones de esta ecuación. En el caso de una resonancia aguda, $\omega_1 \approx \omega_0$ y $\omega_2 \approx \omega_0$. Entonces, aprovechando el hecho de que $\omega + \omega_0 \approx 2\omega_0$, se tiene que $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \approx R/L$.

75. Uno de los empleos de un transformador es el de *ajuste de impedancias*. Por ejemplo, la impedancia de salida de un amplificador estéreo se ajusta a la impedancia de un altavoz mediante un transformador. En la ecuación 28-65 pueden relacionarse las corrientes I_1 e I_2 con la impedancia del secundario ya que $I_2 = V_2/Z$. Utilizando las ecuaciones 28-63 y 28-64, demostrar que

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{(N_1/N_2)^2 Z}$$

y, por consiguiente, $Z_{eq} = (N_1/N_2)^2 Z$.

76. Demostrar por sustitución directa que se satisface la ecuación 28-44b por

$$Q = Q_0 e^{-Rt/2L} \cos(\omega't)$$

en donde

$$\omega' = \sqrt{(1/LC) - (R/2L)^2}$$

y Q_0 es la carga sobre el condensador cuando $t=0$.

77. (a) Calcular la corriente $I = dQ/dt$ a partir de la solución de la ecuación 28-44b dada en el problema 76, y demostrar que

$$I = -I_0 \left(\sin \omega't + \frac{R}{2L\omega'} \cos \omega't \right) e^{-Rt/2L}$$

en donde $I_0 = \omega' Q_0$. (b) Demostrar que esta expresión puede escribirse como

$$\begin{aligned} I &= -\frac{I_0}{\cos \delta} (\cos \delta \sin \omega't + \sin \delta \cos \omega't) e^{-Rt/2L} \\ &= -\frac{I_0}{\cos \delta} \sin(\omega't + \delta) e^{-Rt/2L} \end{aligned}$$

en donde $\tan \delta = R/2L\omega'$. Cuando $R/2L\omega'$ es pequeña, $\cos \delta \approx 1$ y

$$I \approx I_0 \sin(\omega't + \delta) e^{-Rt/2L}.$$