

# INTRODUCCIÓN A LA ACÚSTICA

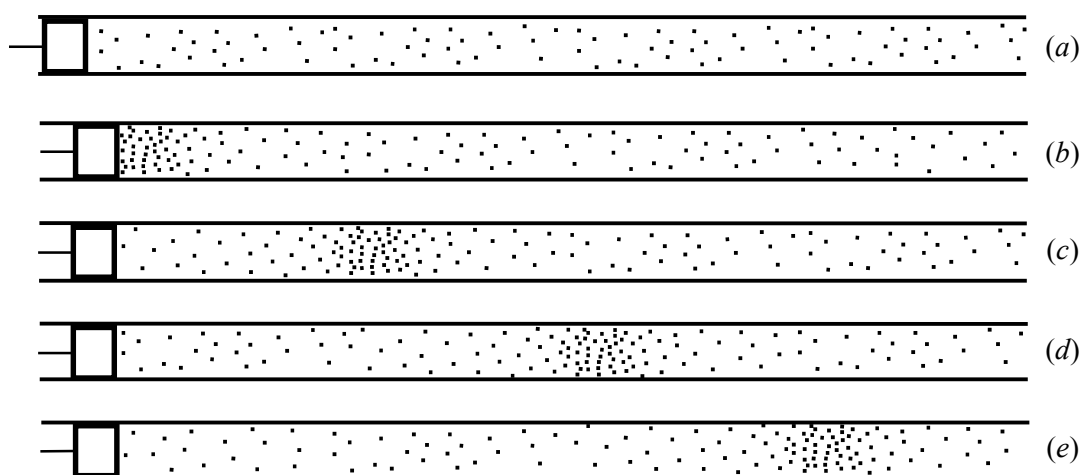
*Federico Miyara*

## 1. INTRODUCCIÓN

La *acústica* es la ciencia que estudia los diversos aspectos relativos al sonido, particularmente los fenómenos de generación, propagación y recepción de las ondas sonoras en diversos medios, así como su transducción, su percepción y sus variadas aplicaciones tecnológicas. La acústica tiene un carácter fuertemente multidisciplinario, abarcando cuestiones que van desde la física pura hasta la biología y las ciencias sociales.

Nos proponemos aquí estudiar los principios físicos de la acústica, en particular la ecuación de onda uni- y tridimensional. Sintéticamente, las ondas sonoras se originan en la interacción entre la elasticidad (compresibilidad) y la inercia (segunda ley de Newton) de un medio como el aire.

Antes de efectuar un estudio detallado analicemos conceptualmente el ejemplo de un largo tubo con un pistón en uno de sus extremos (figura 1). En el estado inicial, (a), el aire se encuentra en equilibrio. La densidad es constante en toda la extensión del tubo, al igual que la presión. En (b) el pistón empuja el aire circundante, perturbando el equilibrio. Debido a la inercia, no es posible mover instantáneamente toda la columna de aire, por lo cual el aire próximo al pistón se comprime. El aire comprimido ejerce mayor presión sobre el aire que lo rodea a menor presión, por lo que tiende a comprimirlo, a su vez descomprimiéndose. El resultado, ilustrado en (c), es que la perturbación se ha desplazado. Este proceso se repite en forma continua, como se muestra en (d) y (e). La perturbación se aleja, así, de la fuente (el pistón).



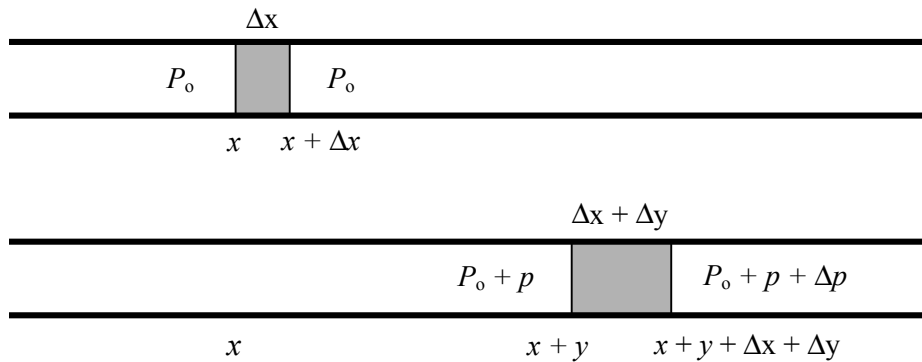
**Figura 1.** Propagación de una perturbación en un tubo. (a) El aire en reposo (moléculas repartidas uniformemente). (b) Ante una perturbación el aire se concentra cerca del pistón (aumenta la presión). (c), (d), (e) La perturbación se propaga alejándose de la fuente.

En la sección que sigue formalizaremos el razonamiento intuitivo anterior aplicando principios conocidos de la física.

## 2. LA ECUACIÓN DE ONDA UNIDIMENSIONAL

### 2.1. Ecuación de onda en un tubo de sección constante [1]

Consideremos un tubo cilíndrico de sección transversal  $A$  y extensión infinita, como el indicado en la figura 2, en dos instantes de tiempo. Las dos regiones sombreadas corresponden a la misma porción de gas. En la parte superior de la figura la presión total es constante e igual a la presión atmosférica,  $P_o$ . En la parte inferior la porción de



**Figura 2.** Un tubo de sección constante en dos instantes de tiempo diferentes. Arriba, en estado de equilibrio. Abajo, un pequeño volumen de aire se ha desplazado y expandido.

aire se ha desplazado una distancia  $y$ , y su espesor pasó de valer  $\Delta x$  a valer  $\Delta x + \Delta y$ . La presión se ha modificado en un valor  $p$  en la cara izquierda y  $p + \Delta p$  en la cara derecha, dando lugar a una fuerza neta que actúa sobre el volumen de gas. Tanto el desplazamiento como el incremento de presión son funciones de las dos variables  $x$  y  $t$ , es decir,  $y(x, t)$  y  $p(x, t)$ . Llamaremos *presión sonora* al incremento de presión  $p(x, t)$ .

Podemos aplicar la segunda ley de Newton. Para ello tengamos en cuenta que si la densidad del aire es  $\rho_o$ , entonces la masa de dicha porción es  $\rho_o A \Delta x$ . La fuerza neta que actúa en la dirección del movimiento puede calcularse teniendo en cuenta que a la presión del lado izquierdo es  $P_o + p$ , mientras que del lado derecho es  $P_o + p + \Delta p$ :

$$(P_o + p) A - (P_o + p + \Delta p) A = -\Delta p A.$$

Entonces, dado que la aceleración es  $y_{tt}$ , resulta

$$-\Delta p A = \rho_o A \Delta x \cdot y_{tt}.$$

Dividiendo por  $A$  y por  $\Delta x$  y pasando al límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ , se obtiene

$$-p_x = \rho_o y_{tt}. \quad (1)$$

Esta es una ecuación diferencial en derivadas parciales con dos funciones incógnitas: la presión  $p$  y el desplazamiento  $y$ . Se necesitará otra ecuación que las vincule para poder

despejarlas. Dicha ecuación puede obtenerse mediante las relaciones que existen entre el volumen y la presión en un medio gaseoso. Si la temperatura fuera constante (proceso *isotérmico*), la relación sería la *ley de Boyle*:

$$P \cdot V = \text{cte.}$$

Pero el gradiente de temperatura es muy bajo y la conductividad térmica del aire también, por lo que el intercambio de calor es despreciable. El proceso resulta, por consiguiente, *adiabático*. Las compresiones adiabáticas responden a la ley

$$P \cdot V^\gamma = \text{cte.} \quad (2)$$

donde  $\gamma = C_P/C_V$ , es decir, el cociente entre las capacidades caloríficas a presión constante y a volumen constante. Para gases diatómicos, como lo es esencialmente el aire,  $\gamma \cong 1,4$ . De la ecuación 2 podemos obtener la siguiente expresión incremental:

$$\frac{dP}{P} = -\gamma \frac{dV}{V}. \quad (3)$$

En el presente caso,  $dP = p$ ,  $P = P_0$ ,  $dV = A \cdot \Delta y$ ,  $V = A \cdot \Delta x$ , de donde

$$\frac{p}{P_0} = -\gamma \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Pasando al límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ , resulta,

$$\frac{p}{P_0} = -\gamma y_x. \quad (4)$$

Tenemos ahora dos ecuaciones, (1) y (4), que vinculan las incógnitas funcionales  $p(x, t)$  e  $y(x, t)$ . En general estamos más interesados en la presión que en el desplazamiento, debido a que es la magnitud que puede medirse directamente con mayor facilidad (utilizando un micrófono como transductor). Derivando la ecuación (1) con respecto a  $x$  y la (4) dos veces con respecto a  $t$  se puede eliminar  $y$ . Tenemos, finalmente,

$$p_{tt} = \frac{\gamma P_0}{\rho_0} p_{xx},$$

o bien

$$p_{tt} = c^2 p_{xx}, \quad (5)$$

ecuación conocida como *ecuación de onda unidimensional*. La constante  $c$ , dada por

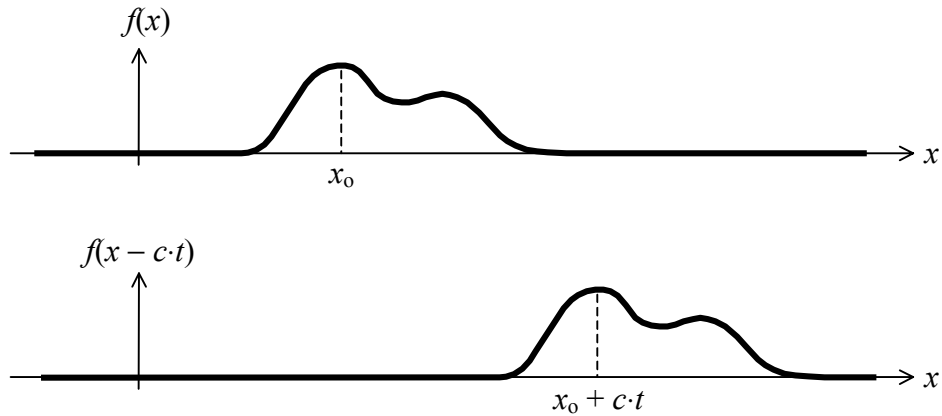
$$c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} \quad (6)$$

es la *velocidad del sonido*.

Es posible demostrar que la solución general de la ecuación (5) está dada por

$$p(x, t) = f(x - c \cdot t) + g(x + c \cdot t). \quad (7)$$

donde  $f$  y  $g$  son dos funciones arbitrarias de una variable derivables dos veces.<sup>1</sup> Cada término de esta ecuación puede interpretarse de un modo muy sencillo. Por ejemplo, si en el término  $f(x - c \cdot t)$  tomamos  $t = 0$ , tendremos la distribución inicial de presión, como se indica en la parte superior de la figura 2. Luego de un tiempo  $t > 0$  la nueva distribución de presión es la que se indica en la parte inferior. Vemos que cualquier rasgo distintivo (por ejemplo un pico) de la presión se ha movido una distancia  $c \cdot t$  hacia la derecha. Es por esta razón que  $c$  se interpreta como la *velocidad del sonido*. Es importante notar que lo que se propaga es la *distribución de presión*, no la *materia*. Cuando uno de los dos términos  $f$  o  $g$  es 0 se tiene una *onda unidireccional* o *progresiva*.



**Figura 3.** Propagación de una onda a lo largo del tubo. Arriba se indica la distribución inicial ( $t = 0$ ) de la presión a lo largo del tubo. Abajo se observa cómo luego de un tiempo  $t > 0$  la distribución de presión se ha desplazado una distancia  $c \cdot t$ .

La expresión (6) de la velocidad del sonido parecería depender en forma separada de la presión de equilibrio  $P_0$  (presión atmosférica en el caso del aire) y de su densidad  $\rho_0$ . Sin embargo, estas dos magnitudes están, en realidad, vinculadas por la *ley general de los gases*, que establece que

$$PV = nRT,$$

donde  $P$  es la presión total,  $V$  es el volumen,  $n$  la cantidad de moles de gas,<sup>2</sup>  $R$  la constante de los gases, igual a  $8,31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$  y  $T$  la temperatura absoluta. La densidad será, entonces

$$\rho_0 = \frac{nM}{V},$$

donde  $M$  es la *masa molar*, es decir la masa de 1 mol de gas. En el caso del aire la masa molar media es de  $0,0288 \text{ kg/mol}$ . Con las igualdades anteriores puede verificarse que

<sup>1</sup> Es fácil verificar que la función dada por la ecuación (7) es una solución, para lo cual basta calcular las derivadas correspondientes. Pero además, *todas* las soluciones de la ecuación (5) son de esta forma.

<sup>2</sup> Un mol se define como una masa igual al peso molecular expresado en g, y equivale a una cantidad igual a  $6,023 \times 10^{23}$  moléculas. En un gas a temperatura y presión normalizadas ( $T = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $P = 101325 \text{ Pa}$ ) corresponde a  $22,403$  litros.

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}. \quad (8a)$$

Para temperaturas cercanas a la temperatura ambiente, esta expresión puede aproximarse (para el aire) por

$$c \cong 332 + 0,608 \cdot T_C, \quad (8b)$$

donde  $T_C$  es la temperatura centígrada y  $c$  está en m/s. En particular, para  $T_C = 20^\circ\text{C}$  resulta  $c = 344$  m/s.

Las perturbaciones no sólo se propagan en los gases, sino también en cualquier medio elástico, como los líquidos y los sólidos, aunque en este último caso el análisis completo es más complicado. En la Tabla 1 se indica la velocidad del sonido aproximada en varios medios para ondas planas<sup>3</sup>.

**Tabla 1.** Velocidad del sonido para ondas planas en varios medios (Beranek, 1993)

Medio	Velocidad [m/s]
Aire a 0 °C	332
Aire a 20 °C	344
Anhídrido carbónico	260
Hidrógeno	1294
Agua a 20 °C	1482
Alcohol etílico a 20°	1170
Vapor a 100 °C	405
Acero	5200
Aluminio	5000
Bronce	3480
Corcho	500
Hormigón	3500
Granito	3950
Madera	4000
Mármol	3810
Plomo	1190
Vidrio	5000

## 2.2. Solución de la ecuación de onda con condiciones de contorno

El tubo de la figura 2 era infinitamente largo, cualidad que en la práctica no es posible. La longitud finita impone a la presión sonora ciertas condiciones en los extremos, conocidas como *condiciones de contorno* o *condiciones de borde*. La naturaleza de estas condiciones depende del tipo de terminación. Las dos terminaciones más simples son que el extremo esté abierto o cerrado.

Si un extremo, por ejemplo el correspondiente a  $x = 0$ , se encuentra abierto, la presión sonora en ese extremo es 0 en todo instante,

<sup>3</sup> En una onda plana la presión en cada instante es constante sobre cada plano perpendicular a la dirección de propagación.

$$p(0, t) = 0, \quad (9)$$

debido a que la presión externa es esencialmente constante (igual a la presión atmosférica), y en el punto de contacto debe haber continuidad.<sup>4</sup> Se dice que en dicho extremo hay un *nodo* de presión. Si, en cambio, el extremo está cerrado, lo que se anula es la velocidad de las partículas,  $y_t$ . Esto implica que la aceleración,  $y_{tt}$ , también es 0, por lo tanto, según la ecuación (1),

$$p_x(0, t) = 0. \quad (10)$$

Esto significa que la presión tiene un *máximo* o un *mínimo* en dicho extremo.

Supongamos, ahora que el tubo tiene longitud  $L$  y está abierto en ambos extremos. Entonces el análisis anterior conduce al siguiente problema de contorno:

$$\begin{aligned} p_{tt} &= c^2 p_{xx} \\ p(0, t) &= 0 \\ p(L, t) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Una manera de resolver este tipo de problemas es por *separación de variables*, es decir, buscar soluciones que puedan expresarse como

$$p(x, t) = X(x) T(t). \quad (12)$$

Estas soluciones se denominan *estacionarias*, dado que la forma espacial (es decir, la dependencia de  $x$ ) se mantiene constante e inmóvil, variando sólo su amplitud, al ser modulada por  $T(t)$ .<sup>5</sup> La ecuación de onda puede escribirse como

$$X T'' = c^2 X'' T.$$

Dividiendo por  $X T$  se tiene

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X}.$$

El lado izquierdo es una función sólo de  $t$  y el derecho sólo de  $x$ , ambos deben ser iguales a una misma constante que llamaremos, por conveniencia,  $-\eta^2$ :

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\eta^2.$$

Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias separadas:

$$\left\{ \begin{array}{l} T'' + \eta^2 c^2 T = 0 \\ X'' + \eta^2 X = 0 \end{array} \right. \quad (13)$$

<sup>4</sup> En realidad esta afirmación es sólo aproximada, ya que por el extremo abierto escapa algo de energía, haciendo que la presión sonora no sea nula. Este efecto se acentúa cuando el diámetro del tubo es considerable, requiriéndose aplicar una *corrección por extremo* a la longitud del tubo (ver 2.7).

<sup>5</sup> Esto parecería contradecirse con el concepto de onda que se desplaza. En este caso, como veremos, se superponen dos ondas iguales y sentido de desplazamiento opuesto.

Su solución puede llevarse a cabo por cualquiera de los métodos conocidos, obteniéndose

$$T(t) = T_o \text{sen}(\eta c t + \varphi_o) \quad (14)$$

$$X(x) = X_o \text{sen}(\eta x + \psi_o), \quad (15)$$

de donde

$$p(x, t) = X(x) T(t) = X_o T_o \text{sen}(\eta x + \psi_o) \text{sen}(\eta c t + \varphi_o). \quad (16)$$

Tenemos aquí varios parámetros a determinar. Para ello aplicamos las condiciones de contorno incluidas en (11):

$$p(0, t) = p(L, t) = 0. \quad (17)$$

La ecuación (16) implica que

$$X(0) = X_o \text{sen}(\psi_o) = 0, \quad (18)$$

$$X(L) = X_o \text{sen}(\eta L + \psi_o) = 0. \quad (19)$$

De (18) resulta<sup>6</sup>

$$\psi_o = 0 \quad (20)$$

y, reemplazando en (19),

$$\eta = \frac{k\pi}{L}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (21)$$

La presión sonora viene dada, entonces, por

$$p(x, t) = P \text{sen}\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \text{sen}\left(\frac{k\pi c}{L} t + \varphi_o\right). \quad (22)$$

Vemos que para cada número natural  $k$  existe una solución cuya forma es senoidal en el espacio y en su evolución temporal, según se ilustra en la figura 4.

Vemos que las únicas soluciones estacionarias posibles son de esta forma. Son todas armónicos de una frecuencia fundamental dada por:

$$f_1 = \frac{c}{2L}. \quad (23)$$

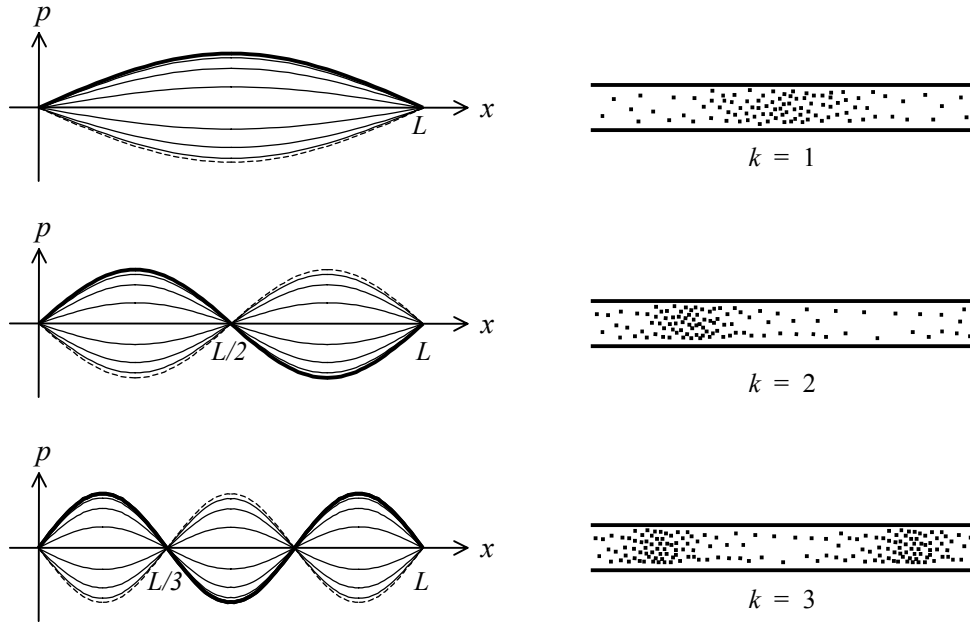
No todas las soluciones son estacionarias, pero es posible demostrar que cualquier otra solución  $p(x, t)$  puede escribirse como desarrollo en serie de las soluciones estacionarias:

$$p(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k \text{sen}\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \text{sen}\left(\frac{k\pi c}{L} t + \varphi_k\right). \quad (24)$$

---

<sup>6</sup> En realidad  $\psi_o$  podría ser cualquier múltiplo de  $\pi$ , pero el resultado no cambia si es un múltiplo par, y se invierte de signo si es impar. En este caso el signo puede ser absorbido por  $X_o$ .

Por este motivo se dice que las soluciones estacionarias forman una *base de soluciones* para el problema de contorno dado en (11).



**Figura 4.** Distribución espacial de la presión sonora en un tubo abierto para tres soluciones estacionarias ( $k = 1, 2$  y  $3$ ). A la izquierda, gráficas de las distribuciones para varios instantes. A la derecha, las moléculas de aire para la máxima amplitud de la presión.

Las condiciones de contorno impuestas en el caso de un tubo acotado pueden interpretarse como condiciones aplicadas a los puntos  $x = 0$  y  $x = L$  de un tubo infinito, del cual sólo interesa lo que sucede en el intervalo  $0 \leq x \leq L$ . En ese caso es interesante interpretar la solución estacionaria como superposición de dos ondas que se desplazan en sentidos opuestos, como establece la ecuación (7). Para ello podemos aplicar la relación trigonométrica

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)].$$

Resulta:

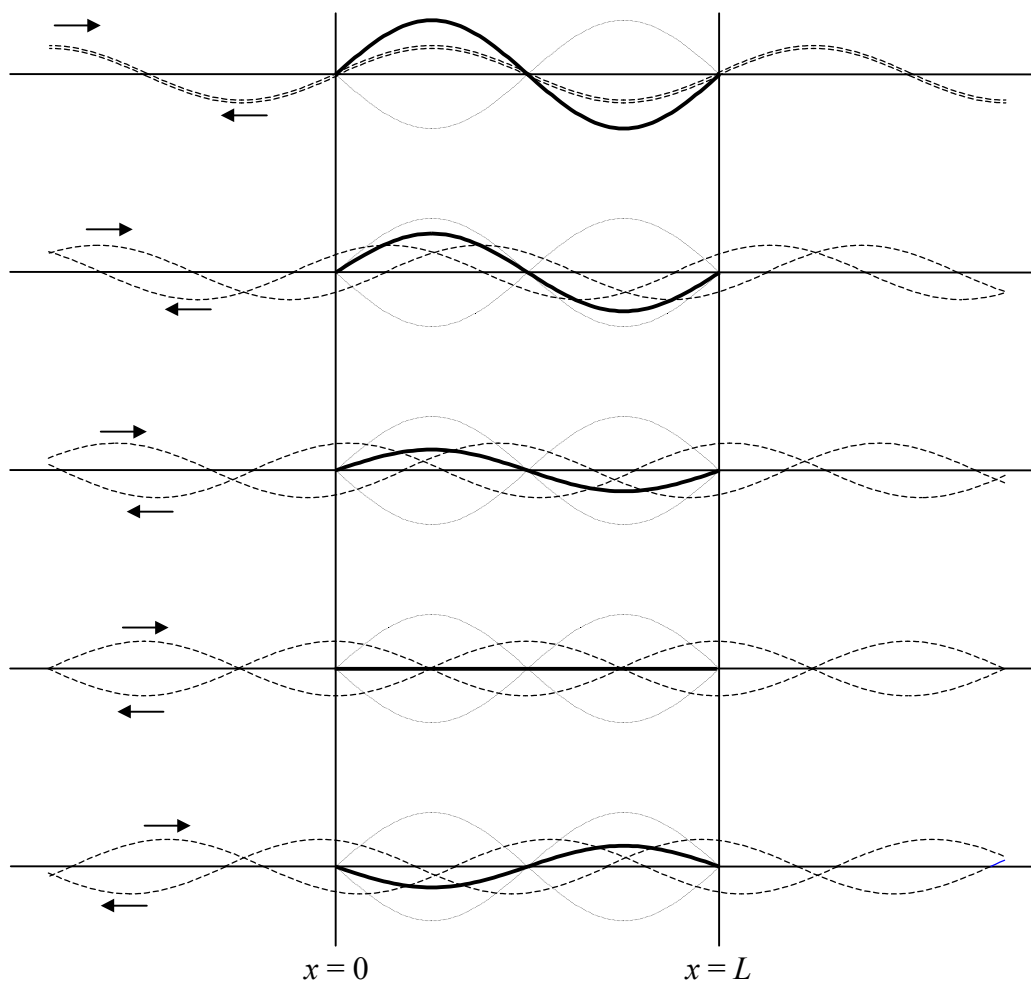
$$p_k(x, t) = \frac{P_k}{2} \left[ \cos\left(\frac{k\pi}{L}(x - ct) - \varphi_k\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{L}(x + ct) + \varphi_k\right) \right]. \quad (25)$$

La naturaleza de estas dos ondas con velocidades opuestas se ilustra en la figura 5, en la que se muestran ambas ondas en varios instantes y la superposición de ellas que da como resultado la onda estacionaria.

Como segundo ejemplo supongamos un tubo de longitud  $L$  cerrado en  $x = 0$  y abierto en  $x = L$ . Se obtiene siguiente problema de contorno:

$$\begin{aligned} p_{tt} &= c^2 p_{xx} \\ p_x(0, t) &= 0 \\ p(L, t) &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$





**Figura 5.** Una onda estacionaria en un tubo abierto en ambos extremos vista como superposición de dos ondas de la mitad de la amplitud que se desplazan en sentidos opuestos. Se muestra lo que sucede en cinco instantes de tiempo.

De la ecuación (16) resulta

$$\cos(\psi_0) = 0, \quad (27)$$

$$\sin(\eta L + \psi_0) = 0. \quad (28)$$

De (27),<sup>7</sup>

$$\psi_0 = \pi/2, \quad (29)$$

que, reemplazado en (28), conduce a

$$\eta = (2k-1)\frac{\pi}{2L}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (30)$$

<sup>7</sup> Nuevamente  $\psi_0$  podría ser  $\pi/2 + n\pi$ , pero el resultado no cambia si  $n$  es par y si  $n$  es impar cambia de signo, absorbiéndoselo en  $X_0$ .

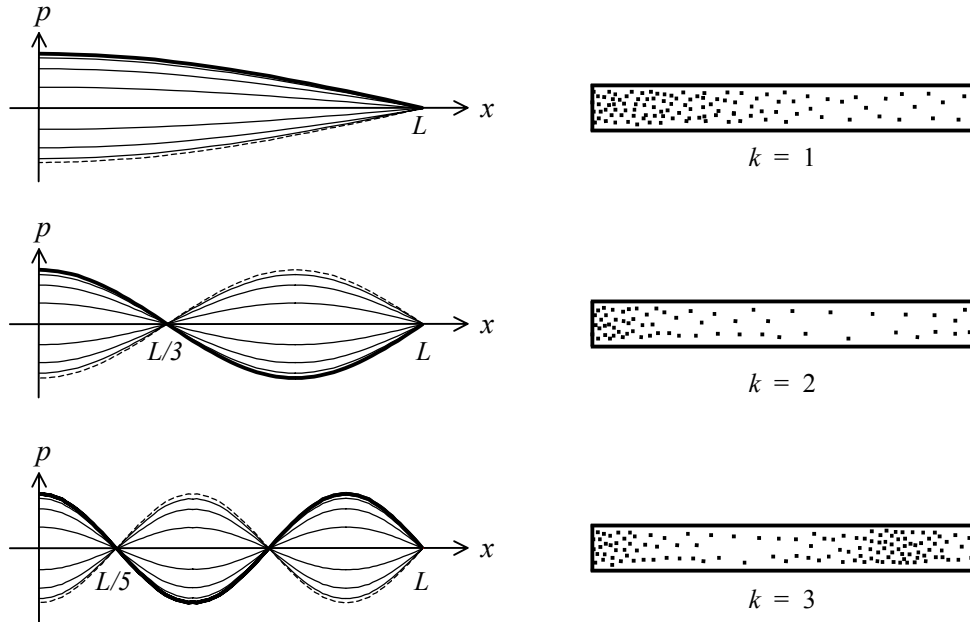
La presión sonora viene dada, entonces, por<sup>8</sup>

$$p(x, t) = P \cos\left((2k-1)\frac{\pi}{2L}x\right) \sin\left((2k-1)\frac{\pi c}{2L}t + \varphi_0\right). \quad (31)$$

Para cada número natural  $k$  existe una solución cuya forma es cosenoidal en el espacio y senoidal (desfasada) en su evolución temporal, según se ilustra en la figura 6. En este caso, la frecuencia fundamental es la mitad de la del caso anterior:

$$f_1 = \frac{c}{4L}, \quad (32)$$

y además sólo aparecen los armónicos impares  $2k - 1$ . Nuevamente en este caso los armónicos impares constituyen una base de soluciones que permite, por desarrollo en serie, expresar la solución general.



**Figura 6.** Distribución espacial de la presión sonora en un tubo semiabierto abierto para tres soluciones estacionarias ( $k = 1, 2$  y  $3$ ). A la izquierda, gráficas de las distribuciones para varios instantes. A la derecha, las moléculas de aire para la máxima amplitud de la presión.

También es posible considerar tubos cerrados en ambos extremos. En ese caso la presión adquiere máximos o mínimos espaciales en las dos terminaciones y los nodos se encuentran distribuidos simétricamente. La expresión de la frecuencia fundamental vuelve a ser la (23) y aparecen tanto los armónicos impares como los pares.

<sup>8</sup> Aquí se aplicó la relación trigonométrica  $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ .

### 2.3. Oscilaciones forzadas en un tubo cilíndrico

En la sección anterior consideramos las ondas en un tubo abierto, semiabierto y cerrado, pero supusimos que la perturbación que les dio origen ya no se encontraba presente. El resultado son los *modos normales* o *modos naturales* de oscilación, que corresponden a la respuesta libre del sistema.

Resulta de gran interés estudiar sistemas en los que se aplica una excitación externa. Existen varios tipos de excitaciones posibles. Una posibilidad es que con algún dispositivo externo se impongan en todo instante (o en todo instante  $t \geq 0$ ) los valores de la presión sonora en un determinado punto (por ejemplo en  $x = 0$ ). En este caso el dispositivo constituye una *fente de presión*. Otra posibilidad es que el dispositivo externo imponga la *cinemática* de las partículas en  $x = 0$ , es decir, la posición  $y(0, t)$  o la velocidad  $u(0, t)$ . Resulta más conveniente utilizar como variable la velocidad de las partículas que su posición, razón por la cual este tipo de dispositivo se denomina *fente de velocidad*.<sup>9</sup>

Notemos que  $u(x, t)$  puede interpretarse de dos maneras: como la velocidad en el instante  $t$  de la partícula que *en equilibrio* estaría en  $x$ , o como la velocidad de la partícula que en el instante  $t$  se encuentra *efectivamente* en  $x$ . De acuerdo con la notación que veníamos utilizando, la primera interpretación conduce a

$$u(x, t) = y_t(x, t), \quad (33)$$

mientras la segunda, a

$$u(x, t) = y_t(x, t) - y_{tx}(x, t)y(x, t). \quad (34)$$

Sin embargo, el término agregado en la ecuación (34) es despreciable, por lo cual adoptaremos la segunda interpretación (que es más simple) pero aceptaremos como válida la ecuación (33).

Si utilizamos la presión y la velocidad de las partículas como variables, las ecuaciones (1) y (4) pueden reescribirse del siguiente modo:

$$p_x = -\rho_0 u_t, \quad (35)$$

$$p_t = -\gamma P_0 u_x, \quad (36)$$

que presentan una forma convenientemente simétrica.

Analizaremos el caso del tubo con un pistón en el extremo de la figura 1. En él el pistón constituye una *fente de velocidad*, ya que su movimiento impone una velocidad dada a las moléculas de aire en contacto inmediato con él. Supongamos que el mismo se mueve según la siguiente ley:

$$u(0, t) = y_t(0, t) = h(t). \quad (37)$$

Supongamos, además, que para todo  $x \geq 0$  las condiciones iniciales son nulas, es decir,<sup>10</sup>

$$p(x, 0) = 0. \quad (38)$$

$$u(x, 0) = 0. \quad (39)$$

<sup>9</sup> Esta situación es similar a la de los circuitos eléctricos, en los que es posible imponer la tensión, mediante una *fente de tensión*, o la corriente, mediante una *fente de corriente*.

<sup>10</sup> En otras palabras, el aire se encuentra inicialmente en reposo en el tubo.

Nos proponemos obtener  $p(x, t)$ . Para ello podemos suponer que en realidad el tubo es infinito a ambos lados del origen, sólo que en 0 las moléculas se mueven según (37). Al ser el tubo infinito la solución puede expresarse por medio de la ecuación (7),

$$p(x, t) = f(x - c \cdot t) + g(x + c \cdot t). \quad (40)$$

De la condición (38) se concluye que, para  $x \geq 0$ , se cumple

$$f(x) = -g(x). \quad (41)$$

Para poder aplicar la condición (39) debemos obtener primero una expresión para  $u(x, t)$ , lo cual puede hacerse aplicando la ecuación (36). Para ello derivamos la ecuación (40) con respecto a  $t$

$$p_t(x, t) = -c f'(x - c \cdot t) + c g'(x + c \cdot t)$$

y luego, después de dividir por  $-\gamma P_0$  integramos con respecto a  $x$ :

$$u(x, t) = \frac{c}{\gamma P_0} (f(x - c \cdot t) - g(x + c \cdot t) + K_1(t)). \quad (42)$$

$K_1(t)$  es una constante de integración, en principio diferente para cada  $t$ . Alternativamente, podemos aplicar la ecuación (35), derivando ahora (40) con respecto a  $x$ ,

$$p_x(x, t) = f'(x - c \cdot t) + g'(x + c \cdot t),$$

dividiendo por  $-\rho_0$  e integrando con respecto a  $t$ :

$$u(x, t) = \frac{1}{\rho_0 c} (f(x - c \cdot t) - g(x + c \cdot t) + K_2(x)), \quad (43)$$

donde  $K_2(x)$  es una constante de integración, que en principio podría ser diferente para cada  $x$ . Sin embargo, comparando (42) y (43), resulta que  $K_1(t) = K_2(x)$ , por lo cual en realidad  $K_1(t) = K_2(x) = K$  (ya que se trata de dos funciones iguales de diferentes variables independientes, lo cual sólo es posible si ambas funciones son constantes). Esta constante representa una velocidad constante superpuesta a la velocidad de origen ondulatorio. Corresponde a un flujo de aire, como el que tiene lugar en un conducto de ventilación, y puede tomarse igual a 0 sin pérdida de generalidad. Resulta

$$u(x, t) = \frac{1}{\rho_0 c} (f(x - c \cdot t) - g(x + c \cdot t)). \quad (44)$$

Particularizando la ecuación (44) para  $t = 0$ , tenemos, de (39),

$$u(x, 0) = \frac{c}{\gamma P_0} (f(x) - g(x)) = 0. \quad (45)$$

de donde

$$f(x) = g(x). \quad (46)$$

Sustituyendo  $f(x)$  según la ecuación (41), resulta, para  $x > 0$ ,

$$g(x) = 0 \quad (47)$$

$$f(x) = 0. \quad (48)$$

Particularizando ahora la ecuación (44) para  $x = 0$ , de (37) resulta que para  $t \geq 0$  se verifica

$$u(0, t) = \frac{1}{\rho_0 c} (f(-c \cdot t) - g(c \cdot t)) = h(t).$$

Dado que para  $t \geq 0$  resulta  $c \cdot t \geq 0$ , se cumple, por (47), que  $g(c \cdot t) = 0$ , de donde, efectuando el cambio de variable  $\xi = -c \cdot t$  resulta, para  $\xi < 0$ ,

$$f(\xi) = \rho_0 c \, h\left(\frac{-\xi}{c}\right). \quad (49)$$

Estamos ahora en condiciones de escribir la solución completa para  $t > 0$ :

$$p(x, t) = \begin{cases} \rho_0 c \, h\left(t - \frac{x}{c}\right) & \text{si } t \geq \frac{x}{c} \\ 0 & \text{si } t < \frac{x}{c} \end{cases} \quad (50)$$

La interpretación de esta solución es simple e intuitiva. Si el tiempo transcurrido es suficiente como para que la onda haya llegado al punto  $x$ , entonces la presión es una versión retardada de la velocidad impresa por el pistón en el extremo  $x = 0$ . El retardo es tanto mayor cuanto más lejos se encuentre el punto  $x$  del origen. Si, en cambio, el tiempo transcurrido es menor que el requerido por la onda sonora para alcanzar el punto  $x$ , la presión sonora es nula.

Es interesante observar que de las dos ondas, sólo es diferente de 0 la que se desplaza hacia la derecha, tal como se mostraba en la figura 1. La otra onda sólo será no nula para  $x < 0$ , es decir, para la prolongación ficticia del tubo hacia la izquierda del pistón y nunca llega a manifestarse (para  $t > 0$ ) del lado derecho.

En la figura 7 se ilustra la presión sonora a lo largo del tubo para dos instantes  $t_1$  y  $t_2 > t_1$  para el caso de excitación senoidal. Vemos que para  $x \leq c \cdot t$  la presión sonora es periódica espacialmente. El periodo correspondiente se denomina *longitud de onda* y se indica con  $\lambda$ . Es fácil verificar que si la frecuencia es  $f$ , entonces la longitud de onda está dada por

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (51)$$

Tomando  $x = 0$  en la ecuación (50) observamos que en todo instante  $t > 0$  se verifica

$$p(0, t) = \rho_0 c \, u(0, t). \quad (52)$$

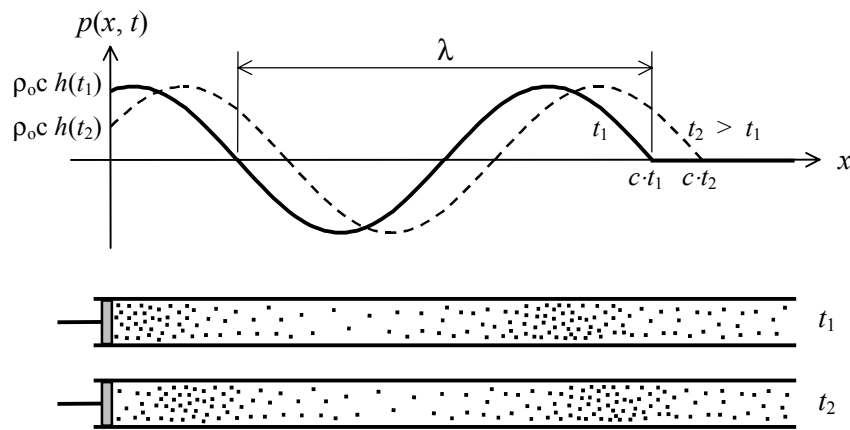
Ésta es una relación muy importante entre la presión y la velocidad de las partículas, que luego se generalizará. El producto

$$Z_{ae} = \rho_0 c \quad (53)$$

se denomina *impedancia acústica específica del aire*. La relación (52) es el equivalente acústico de la ley de Ohm. En ella se vincula una variable de tipo *fuerza* (como la tensión) con una variable de tipo *flujo* (como la corriente). Puede reescribirse en la forma:

$$Z_{ae} = \frac{p}{u}. \quad (54)$$

**Nota:** Debe aclararse que la forma sencilla de las ecuaciones (52) y (54) sólo se verifica en este caso, equivalente al caso resistivo en la electrotecnia.



**Figura 7.** Distribución espacial de la presión sonora a lo largo de un tubo semiinfinito excitado por una fuente de velocidad (pistón) senoidal en el extremo cercano en dos instantes  $t_1$  y  $t_2$ .

Como segundo ejemplo analizaremos un tubo de longitud finita  $L$  excitado por un pistón en  $x = 0$  y abierto en  $x = L$ . En este caso abandonaremos la generalidad y consideraremos excitaciones senoidales. Veremos que en este caso la solución es estacionaria. Supongamos, entonces, una excitación de velocidad dada por

$$u(0, t) = U \sin \omega t \quad (55)$$

y la condición de contorno

$$p(L, t) = 0. \quad (56)$$

Buscamos una solución estacionaria de la ecuación de onda, es decir:

$$p(x, t) = X(x) T(t).$$

Según la ecuación (16) las soluciones estacionarias son de la forma

$$p(x, t) = P \sin(\eta x + \psi_0) \sin(\eta c t + \phi_0), \quad (57)$$

por lo cual sólo resta encontrar las constantes  $\eta$ ,  $P$ ,  $\psi_0$  y  $\phi_0$ . De la condición (56) se desprende que

$$\psi_0 = -\eta L \quad (58)$$

De la ecuación (55) podemos obtener, aplicando (35), la derivada con respecto a  $x$  de la presión sonora en  $x = 0$ :

$$p_x(0, t) = -\rho_0 v_t(0, t) = -\rho_0 U \omega \cos \omega t. \quad (59)$$

A su vez, de (57),

$$p_x(0, t) = P \eta \cos(\psi_0) \sin(\eta c t + \phi_0). \quad (60)$$

Igualando, resulta:

$$-\rho_0 U \omega \cos \omega t = P \eta \cos(\psi_0) \sin(\eta c t + \phi_0), \quad (61)$$

Para que esta igualdad se cumpla debe ser

$$\phi_0 = \pi/2, \quad (62a)$$

$$\eta c = \omega, \quad (62b)$$

$$P \eta \cos(\psi_0) = -\rho_0 U \omega. \quad (63)$$

Resulta, finalmente,

$$p(x, t) = \frac{\rho_0 c U}{\cos \frac{\omega L}{c}} \sin\left(\frac{\omega}{c}(L - x)\right) \cos \omega t. \quad (64)$$

**Nota:** A diferencia del caso anterior, en el que la oscilación incluía el régimen transitorio, aquí supusimos tácitamente que ya se ha alcanzado el estado de régimen permanente.

En la figura 8 se ilustra la distribución de la presión sonora dentro del tubo para tres instantes de tiempo. Vemos que la onda estacionaria se comporta como si fuera una oscilación libre (sin excitación) en un tubo de longitud  $\pi c/\omega$ . La máxima amplitud de oscilación es inversamente proporcional a  $\cos(\omega L/c)$  y para ciertos valores de  $\omega$  se vuelve infinita. Son aquéllos para los que el argumento del coseno es un múltiplo impar de  $\pi/2$ :

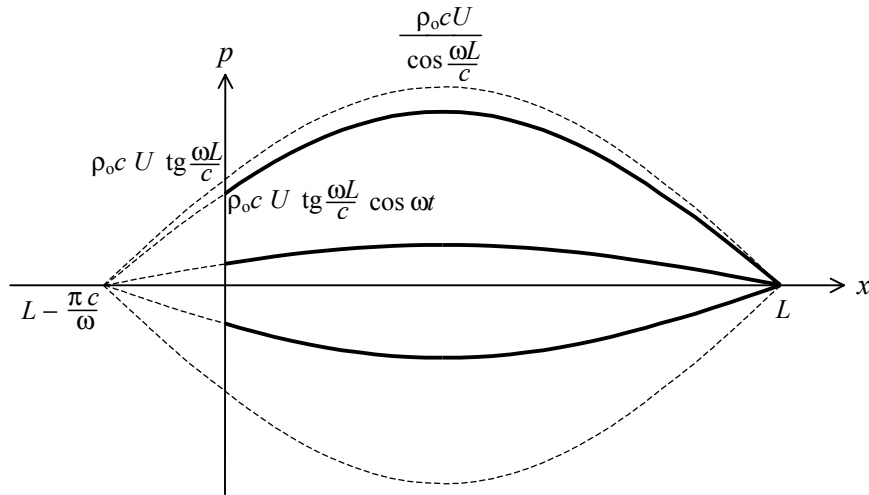
$$\omega = (2k-1) \frac{\pi c}{2L},$$

o bien, en términos de frecuencia,

$$f = (2k-1) \frac{c}{4L}. \quad (65)$$

Estas frecuencias corresponden a los modos normales de un tubo semicerrado de longitud  $L$  (ver ecuación (32)). Tal resultado era de esperarse, ya que si consideramos que el pistón es rígido, para las frecuencias indicadas en (65) es posible una oscilación estacionaria sin excitación, es decir, con el pistón inmóvil. Cualquier movimiento del pistón a esa frecuencia implicará un suministro de energía que se irá acumulando en el tubo. Aunque este efecto es “transitorio”, es un caso particular de transitorio que no se extingue en tiempo finito, razón por la que la amplitud de la presión crecerá permanente-

mente. Luego de transcurrido un tiempo infinito, la amplitud que predice la ecuación (64) será infinita. En la práctica tal situación no se verifica a causa de las pérdidas por disipación (no contempladas en la ecuación de onda ideal).



**Figura 8.** Distribución espacial de la presión sonora a lo largo de un tubo semiabierto excitado por una fuente de velocidad (pistón) en un extremo ( $x = 0$ ). Se muestran las envolventes positiva y negativa y las distribuciones para tres instantes.

Observemos que, a diferencia del caso del tubo infinito, aquí la presión está en cuadratura temporal con la velocidad impuesta por la excitación. Esto implica una dificultad para el cálculo de la impedancia acústica específica, que puede resolverse de la misma manera en que se resuelve en el caso de los circuitos eléctricos, vale decir, reformulando el problema en términos de *fásors*. Para ello suponemos que la excitación es de la forma compleja

$$v(0, t) = U e^{j\omega t}, \quad (66)$$

Si convenimos en interpretar como señal física la parte imaginaria, resultará

$$p(x, t) = j \frac{\rho_0 c U}{\cos \frac{\omega L}{c}} \operatorname{sen} \left( \frac{\omega}{c} (L - x) \right) e^{j\omega t}. \quad (67)$$

La velocidad en la posición  $x$  puede obtenerse a partir de (35), derivando la presión con respecto a  $x$ , dividiendo por  $-\rho_0$  y luego integrando con respecto a  $t$ . Resulta:

$$u(x, t) = \frac{U}{\cos \frac{\omega L}{c}} \cos \left( \frac{\omega}{c} (L - x) \right) e^{j\omega t}. \quad (68)$$

Dado que la presión es ahora proporcional a la velocidad, podemos obtener la impedancia compleja por simple división:



$$Z_{ae}(j\omega) = j\rho_0 c \frac{\sin\left(\frac{\omega}{c}(L - x)\right)}{\cos\left(\frac{\omega}{c}(L - x)\right)} = j\rho_0 c \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{c}(L - x)\right). \quad (69a)$$

Para el punto de excitación, es decir, en la posición del pistón ( $x = 0$ ), la expresión anterior se reduce a

$$Z_{ae}(j\omega) = j\rho_0 c \operatorname{tg}\frac{\omega L}{c}. \quad (69b)$$

Por ser este valor imaginario, se trata de una impedancia acústica *reactiva*, o *reactancia acústica*. Similar característica se presenta para el tubo cerrado en el extremo remoto.

## 2.4. Energía acústica

Estudiaremos ahora la energía acumulada en una onda sonora, así como la potencia que entrega una fuente tal como el pistón de los ejemplos anteriores. Las consideraciones energéticas son de gran importancia en la interacción entre sistemas o partes de un sistema.

Los sistemas acústicos son casos particulares de sistemas mecánicos, por lo cual la *energía acústica* puede descomponerse en *energía potencial* y *energía cinética*. Como en una onda sonora la distribución de la presión sonora varía de un punto a otro del espacio, conviene referirse a la *densidad de energía*, en lugar de a la energía total.

Consideremos primeramente una pequeña porción de gas de volumen  $dV$  que se mueve (localmente) con una velocidad  $v$ . Su energía cinética será

$$dE_c = \frac{1}{2} u^2 \rho_0 dV.$$

Dividiendo por  $dV$  y pasando al límite cuando  $dV$  tiende a 0 obtendremos la *densidad de energía cinética*,  $D_c$ :

$$D_c = \frac{1}{2} \rho_0 u^2. \quad (70)$$

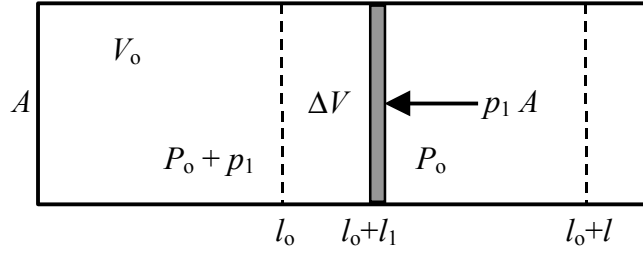
Para calcular la energía potencial tengamos en cuenta que sólo tiene interés la parte asociada a los fenómenos de compresión y expansión.<sup>11</sup> Analicemos entonces el proceso de compresión/expansión adiabática de un volumen  $V_0$ , como el indicado en la figura 9, hasta un volumen final  $V_0 + \Delta V$  a causa de un incremento de la presión total desde  $P_0$  hasta  $P_0 + p_1$ . La presión externa se mantiene igual a  $P_0$ .

Dado que inicialmente la fuerza debida a la presión  $P_0$  interna está equilibrada por una fuerza igual y contraria ejercida desde el exterior por el aire, el agente compresor sólo debe aportar una fuerza igual al incremento de presión multiplicado por el área del pistón,  $p_1 A$ . Según la ecuación (3), tomando  $dP = p_1$ ,  $P = P_0$ ,  $dV = \Delta V$ ,  $V = V_0$ ,

$$p_1 A = -\gamma P_0 \frac{\Delta V}{V_0} A = -\gamma P_0 A \frac{l_1}{l_0}. \quad (71)$$

<sup>11</sup> La energía potencial asociada con la altura carece de importancia dado que la altura de las moléculas no cambia significativamente como consecuencia del paso de una onda sonora, ni siquiera si el tubo estuviera en posición vertical.

Suponiendo que la compresión se realiza en forma cuasiestática (de manera de no incrementar la energía cinética<sup>12</sup>), la energía potencial incorporada al volumen de gas al



**Figura 9.** Cálculo de la energía potencial debida a la compresión o expansión de un volumen de gas.

desplazar el pistón desde  $l_0 + l_1$  hasta  $l_0 + l_1 + dl_1$  equivale al trabajo mecánico realizado por esta fuerza:

$$dE_p = -p_1 A dl_1 = \gamma P_0 A \frac{l_1}{l_0} dl_1. \quad (72)$$

La energía potencial total se puede obtener por integración desde  $l_1 = 0$  hasta  $l_1 = l$ :

$$E_p = \int_0^l \frac{\gamma P_0 A}{l_0} l_1 dl_1 = \frac{\gamma P_0 A}{l_0} \frac{1}{2} l^2. \quad (73)$$

Sustituyendo

$$l = -\frac{l_0}{\gamma P_0} p,$$

se obtiene

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{p^2}{\gamma P_0} A l_0.$$

Ésta es la energía potencial acumulada en el volumen  $A l_0$ . La densidad de energía potencial se obtiene dividiendo por dicho volumen:

$$D_p = \frac{1}{2} \frac{p^2}{\gamma P_0}.$$

De la ecuación (6) se desprende que  $\gamma P_0 = \rho_0 c^2$ , de donde, finalmente,

$$D_p = \frac{1}{2} \frac{p^2}{\rho_0 c^2}. \quad (74)$$

Con esta expresión de la densidad de energía potencial y la (70), correspondiente a la densidad de energía cinética, obtenemos la *densidad de energía acústica*,  $D$ ,

<sup>12</sup> Esta hipótesis es válida pues la componente cinética de la energía se considera aparte.

$$D = D_c + D_p = \frac{1}{2} \left( \rho_0 u^2 + \frac{p^2}{\rho_0 c^2} \right). \quad (75)$$

En el caso particular de una onda unidireccional o progresiva, es decir, de la forma

$$p(x, t) = f(x - c t),$$

podemos verificar, utilizando la relación (35), que<sup>13</sup>

$$p(x, t) = \rho_0 c u(x, t). \quad (76)$$

Reemplazando en (75) se obtiene el interesante resultado de que ambas componentes de la energía acústica (es decir las energías cinética y potencial) son iguales. Entonces

$$D = \frac{p^2}{\rho_0 c^2}. \quad (77)$$

Dado que la perturbación de presión se propaga con velocidad  $c$ , se deduce que la densidad de energía acústica también. En otras palabras, la energía se propaga acompañando a la perturbación de presión. Esta propiedad fundamental se verifica también para otros fenómenos ondulatorios, como los electromagnéticos, siempre que la onda sea unidireccional o progresiva.

Si, por ejemplo, un movimiento brusco del pistón de la figura 1 genera un breve pulso de presión, la energía acústica localizada en las proximidades del pistón (debido al aumento local de la presión y al movimiento impreso a las moléculas) se propagará a lo largo del tubo a grandes distancias.<sup>14</sup>

## 2.5. Potencia e intensidad acústica

Vimos en la sección anterior que una onda sonora unidireccional transporta energía. Cabe entonces definir la *potencia sonora* como la energía sonora que atraviesa una determinada sección por unidad de tiempo. Consideremos un frente de onda que en el instante  $t$  está atravesando una sección transversal de área  $A$ . Un tiempo  $dt$  más tarde dicho frente se habrá alejado una distancia  $c dt$ , como indica la figura 10. Si  $c dt$  es pequeño, la presión sonora no cambia significativamente y podemos considerar que la densidad de energía acústica es constante y está dada por (77). Esto significa que durante el intervalo  $dt$  se ha llenado un volumen  $A c dt$  con una densidad de energía  $D$ . La energía total que ha atravesado esa sección será, entonces,

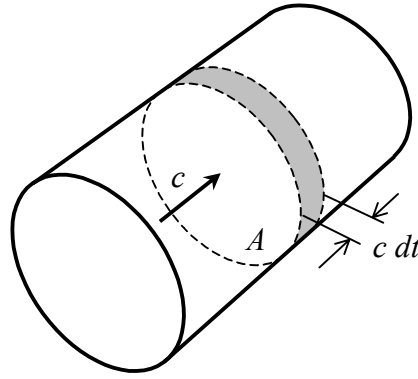
$$dE = D c A dt.$$

Dividiendo por el tiempo transcurrido se obtiene la potencia:

$$w = \frac{dE}{dt} = D c A = \frac{p^2}{\rho_0 c} A \quad (78)$$

<sup>13</sup> Esta relación había sido obtenida en (52) para el caso de un tubo semiinfinito excitado en un extremo.

<sup>14</sup> Si hay pérdidas por fricción u otras causas, la amplitud del pulso y la correspondiente energía asociada se irán reduciendo.



**Figura 10.** Geometría para el cálculo de la potencia acústica transmitida a través de la sección  $A$ .

Se define la *intensidad sonora*,  $i$ , como la potencia transmitida por una onda por unidad de superficie normal a la dirección de propagación. Si la potencia es  $w$ , y la superficie atravesada por la onda sonora es  $A$ , resulta

$$i = \frac{w}{A}, \quad (79)$$

que, para una onda unidireccional, vale<sup>15</sup>

$$i = D \cdot c = \frac{p^2}{\rho_o c} = \frac{p^2}{Z_{ae}} = p \cdot u. \quad (80)$$

Aunque fue deducida a partir de la propagación de energía en una onda unidireccional, la ecuación (80) vale en general, ya que la fuerza  $pA$  se aplica para mover las partículas una distancia  $\Delta x = u\Delta t$  en el tiempo  $\Delta t$ , por lo cual realiza un trabajo  $pAu\Delta t$ . Dividiendo por  $A$  y por  $\Delta t$  se obtiene la energía entregada por unidad de tiempo y área.

En las igualdades anteriores vemos interesantes analogías con los circuitos eléctricos si asociamos la *intensidad acústica* con la *potencia eléctrica*, la *presión sonora* con la *tensión* y la *velocidad de las partículas* con la *corriente eléctrica*:

$$\begin{aligned} p &\leftrightarrow V \\ u &\leftrightarrow I \\ i &\leftrightarrow P \\ Z_{ae} &\leftrightarrow Z \end{aligned} \quad (81)$$

Estas analogías resultarán muy útiles para la resolución de sistemas acústicos cuyo tratamiento recurriendo a las formas más elementales de las leyes físicas se vuelve muy complicado.

De acuerdo con (80), la intensidad sonora varía en el tiempo a la par de la presión. Es interesante calcular su valor medio en un intervalo de tiempo  $T$ , denominado *intensidad media*,  $I$ , que para una onda unidireccional está dado por

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt = \frac{1}{\rho_o c} \frac{1}{T} \int_0^T p^2(t) dt. \quad (82)$$

<sup>15</sup> La intensidad sonora es en realidad un *vector* cuya dirección es igual a la dirección de la velocidad de las partículas  $u$ .

El valor

$$P_{ef}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T p^2(t) dt \quad (83)$$

se denomina *valor cuadrático medio* de la presión. Su raíz cuadrada,

$$P_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T p^2(t) dt} \quad (84)$$

es el *valor eficaz* de la presión o *presión eficaz sonora* o, simplemente, *presión eficaz*. En términos de  $P_{ef}$ , la intensidad media para una onda unidireccional vale

$$I = \frac{P_{ef}^2}{\rho c} \quad (85)$$

La presión eficaz corresponde a un valor constante capaz de producir *la misma* intensidad media. Para el caso de un *tono puro*, en el que la presión *varía senoidalmente*, es decir

$$p(t) = P_{m\acute{a}x} \sin 2\pi f t, \quad (86)$$

la relación entre la presión eficaz y la presión máxima resulta ser

$$P_{ef} = \frac{P_{m\acute{a}x}}{\sqrt{2}} \quad (87)$$

de modo que

$$p(t) = \sqrt{2} P_{ef} \sin 2\pi f t. \quad (88)$$

Para un sonido periódico cualquiera descompuesto en *serie de Fourier*, se cumple:

$$P_{ef}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} P_{efk}^2 \quad (89)$$

donde  $P_{efk}$  es el valor eficaz del armónico de orden  $k$ . Esta importante fórmula, conocida como *fórmula de Parseval*, indica que la energía de los armónicos puede superponerse para obtener la energía total.

En el caso de ondas genéricas (no necesariamente unidireccionales), la presión y la velocidad estarán, en general, desfasadas, es decir,

$$u(t) = U \sin \omega t, \quad (90)$$

$$p(t) = P \sin (\omega t + \varphi). \quad (91)$$

Entonces la intensidad instantánea será:

$$i(t) = p(t) u(t) = PU \sin \omega t \sin (\omega t + \varphi). \quad (92)$$

La intensidad media  $I$ , obtenida promediando en un periodo, resulta

$$I = \frac{PU}{2} \cos \varphi = P_{ef} U_{ef} \cos \varphi. \quad (93)$$

Si en lugar de considerar funciones reales se utilizan exponenciales complejas, es decir,

$$u(t) = U e^{j\omega t}, \quad (94)$$

$$p(t) = P e^{j(\omega t + \varphi)}, \quad (95)$$

podemos obtener la intensidad media del siguiente modo:

$$I = \frac{PU}{2} \operatorname{Re} \left( e^{j(\omega t + \varphi)} e^{-j\omega t} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( P e^{j(\omega t + \varphi)} U e^{-j\omega t} \right)$$

es decir,

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( p(t) u^*(t) \right). \quad (96)$$

Esta fórmula es útil cuando se trabaja directamente con fasores.

## 2.6. Nivel de presión sonora

Debido al rango extraordinariamente amplio de la presión sonora, resulta conveniente utilizar una escala logarítmica para expresar sus valores. Así, se define el *nivel de presión sonora*,  $L_p$ , como<sup>16</sup>

$$L_p = 20 \log_{10} \frac{P_{ef}}{P_{ref}}, \quad (97)$$

donde  $P_{ef}$  es el valor eficaz de la presión sonora y  $P_{ref}$  es la *presión de referencia*, que vale

$$P_{ref} = 20 \times 10^{-6} \text{ Pa}. \quad (98)$$

El nivel de presión sonora se expresa en *decibeles*, unidad abreviada dB. Un incremento de 1 dB no representa un incremento fijo de la presión sino un *aumento relativo* de aproximadamente 12,2%.

El valor de  $P_{ref}$  se ha elegido porque *coincide con el umbral de audición normal para 1 kHz*, lo cual implica que un sonido de 1 kHz se puede percibir, en promedio, cuando  $L_p > 0$  dB. En la Tabla 2 se dan valores típicos de la presión eficaz sonora y del  $L_p$  para algunos sonidos habituales.

**NOTA:** Una razón que se suele aducir para el uso de la escala logarítmica en decibeles es que “la respuesta del oído a las intensidades es logarítmica.” Esto, según veremos,

---

<sup>16</sup> Si bien la simbología natural en castellano para *nivel de presión sonora* sería *NPS*, o eventualmente  $N_p$ , internacionalmente se utilizan símbolos provenientes de abreviaturas en inglés. Este texto se adhiera a la simbología normalizada internacionalmente por ISO (Organización Internacional de Normalización) e IEC (Comisión Electrotécnica Internacional).

no es cierto, ya que la percepción de la sonoridad sigue una ley aproximadamente potencial, con exponente 0,6.

**Tabla 2.** Presión eficaz sonora y nivel de presión sonora para algunas fuentes sonoras, ambientes y situaciones acústicas típicas.

FUENTE	$P_{ef}$ [Pa]	$L_p$ [dB]
Umbral de dolor	20	120
Discoteca a todo volumen	6,3	110
Martillo neumático a 2 m	3,6	105
Ambiente industrial ruidoso	0,63	90
Piano a 1 m con fuerza media	0,20	80
Automóvil silencioso a 2 m	0,063	70
Conversación normal	0,020	60
Ruido urbano de noche	0,0063	50
Habitación interior (día)	0,0020	40
Habitación interior (noche)	0,00063	30
Estudio de grabación	0,00020	20
Cámara sonoamortiguada	0,000063	10
Umbral de audición a 1 kHz	0,000020	0

Si bien el transductor básico utilizado en los *sonómetros* o *medidores de nivel sonoro*, es decir, el *micrófono*, produce una tensión eléctrica proporcional a la presión sonora, en la práctica la medición siempre se expresa en decibeles. Si se requiere conocer el valor de la presión eficaz sonora propiamente dicha, debe despejarse de la definición:

$$P_{ef} = P_{ref} 10^{\frac{L_p}{20}}. \quad (99)$$

**Ejemplo 1:** Calcular la presión sonora, la velocidad y el desplazamiento máximos de las partículas, la densidad media de energía y la potencia acústica que atraviesa una superficie de  $1 \text{ cm}^2$  en el caso de una onda sonora senoidal unidireccional de 70 dB y 1 kHz.

En primer lugar calculamos la presión eficaz sonora:

$$P_{ef} = 20 \times 10^{-6} 10^{\frac{70}{20}} = 0,06324 \text{ Pa}.$$

Por ser la onda senoidal, la presión máxima es

$$P_{m\acute{a}x} = \sqrt{2} P_{ef} = 0,08944 \text{ Pa}.$$

La velocidad máxima se obtiene dividiendo por la impedancia acústica específica. A 20 °C resulta:

$$U_{m\acute{a}x} = \frac{P_{m\acute{a}x}}{\rho_0 c} = \frac{0,08944 \text{ Pa}}{1,199 \text{ kg/m}^3 \times 344,03 \text{ m/s}} = 0,2168 \text{ mm/s}.$$

Para calcular el desplazamiento máximo, tenemos en cuenta que si

$$u(t) = U_{m\acute{a}x} \text{ sen } \omega t,$$

entonces, integrando,

$$y(t) = -\frac{U_{m\acute{a}x}}{\omega} \cos \omega t.$$

Resulta

$$Y_{m\acute{a}x} = \frac{0,2168 \text{ mm/s}}{2\pi \times 1000 \text{ Hz}} = 0,0345 \mu\text{m}.$$

Vemos claramente que tanto la velocidad de las partículas como su desplazamiento son muy pequeños.

Para el cálculo de la densidad de energía aplicamos la ecuación (77):

$$D = \frac{(0,09844 \text{ Pa})^2}{1,199 \text{ kg/m}^3 \times (344,03 \text{ m/s})^2} = 0,06829 \mu\text{J/m}^3.$$

Por último, la potencia acústica se obtiene mediante (78):

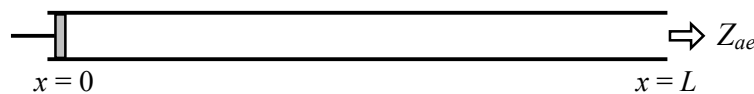
$$W = 0,06829 \mu\text{J/m}^3 \times 344,03 \text{ m/s} \times 0,0001 \text{ m}^2 = 2,349 \text{ nW}.$$

La abertura del oído humano tiene un área aproximada de  $1 \text{ cm}^2$ , por lo cual ésta es la potencia acústica que recibe al escuchar un sonido de 70 dB.

Nótese que esta potencia no puede compararse directamente con la potencia típica de un equipo de sonido, por ejemplo 50 W, por dos razones. En primer lugar, la potencia especificada en ese caso es la potencia *eléctrica* entregada al altavoz. Como los altavoces tienen muy bajo rendimiento (típicamente 2 %), sólo una fracción pequeña de la potencia eléctrica se convierte en potencia sonora. Por otra parte, la potencia *total* radiada se distribuye en un área mucho mayor, y sólo una porción muy pequeña llega a atravesar el área indicada de  $1 \text{ cm}^2$ .

## 2.7. Oscilación forzada de un tubo cilíndrico cargado con $Z_{ae}$

En el caso analizado anteriormente habíamos supuesto que la presión sonora en el extremo abierto era 0. En la realidad, la onda que llega al extremo del tubo perturba el aire exterior, haciendo que la presión sea distinta de 0. Una forma de tener en cuenta el efecto del extremo abierto es suponer que el tubo está cargado por una impedancia acústica específica  $Z_{ae}$ , como se ilustra en la figura 11. El caso ideal correspondería a  $Z_{ae} = 0$ .



**Figura 11.** Tubo cilíndrico de longitud  $L$  cargado con una impedancia acústica específica  $Z_{ae}$ .



Igual que antes, consideraremos una excitación exponencial compleja de velocidad:

$$u(0, t) = U e^{j\omega t}. \quad (100)$$

La carga en el extremo del tubo impone una nueva condición de contorno en  $x = L$ :

$$\dot{P}(L) = Z_{ae} \dot{U}(L), \quad (101)$$

donde  $\dot{P}(L)$  y  $\dot{U}(L)$  son los fasores de la presión y la velocidad en  $x = L$ .

La solución será de la forma

$$p(x, t) = \left( P_1 e^{j\frac{\omega}{c}x} + P_2 e^{-j\frac{\omega}{c}x} \right) e^{j\omega t}, \quad (102)$$

que corresponde a dos ondas exponenciales complejas que se desplazan en sentidos opuestos. Las condiciones de contorno en  $x = 0$  y en  $x = L$  permitirán definir las constantes  $P_1$  y  $P_2$ . Para obtener la expresión de la velocidad podemos utilizar la ecuación (35), derivando  $p(x, t)$  con respecto a  $x$ , dividiendo por  $-\rho_0 c$  e integrando con respecto a  $t$ . Resulta

$$u(x, t) = \frac{1}{\rho_0 c} \left( P_2 e^{-j\frac{\omega}{c}x} - P_1 e^{j\frac{\omega}{c}x} \right) e^{j\omega t}. \quad (103)$$

Apliquemos ahora las condiciones de contorno (100) y (101):

$$P_2 - P_1 = \rho_0 c U, \quad (104)$$

$$\rho_0 c \frac{P_1 e^{j\frac{\omega}{c}L} + P_2 e^{-j\frac{\omega}{c}L}}{P_2 e^{-j\frac{\omega}{c}L} - P_1 e^{j\frac{\omega}{c}L}} = Z_{ae}. \quad (105)$$

Reordenando,

$$P_1 e^{j\frac{\omega}{c}L} \left( 1 + \frac{Z_{ae}}{\rho_0 c} \right) + P_2 e^{-j\frac{\omega}{c}L} \left( 1 - \frac{Z_{ae}}{\rho_0 c} \right) = 0. \quad (106)$$

Las ecuaciones (104) y (106) constituyen un sistema del que pueden despejarse  $P_1$  y  $P_2$ . Reemplazados sus valores en (102) resulta

$$p(x, t) = \rho_0 c U e^{j\omega t} \frac{\left( 1 + \frac{Z_{ae}}{\rho_0 c} \right) e^{j\frac{\omega}{c}(L-x)} - \left( 1 - \frac{Z_{ae}}{\rho_0 c} \right) e^{-j\frac{\omega}{c}(L-x)}}{\left( 1 + \frac{Z_{ae}}{\rho_0 c} \right) e^{j\frac{\omega}{c}L} + \left( 1 - \frac{Z_{ae}}{\rho_0 c} \right) e^{-j\frac{\omega}{c}L}}. \quad (107)$$

Veamos algunos casos particulares. Si  $Z_{ae} = \rho_0 c$ , es decir, si el extremo del tubo se acopla a otro tubo de igual sección pero semiinfinito, los segundos términos del numerador y del denominador se anulan, obteniéndose la respuesta que predice la ecuación (50) para  $t$  grande (en este caso  $h(t) = U e^{-j\omega t}$ ). Si  $Z_{ae} = 0$ , situación correspondiente al tubo abierto ideal (es decir, tal que la presión se anula efectivamente en el extremo), se obtiene la respuesta obtenida en la ecuación (67). Si  $Z_{ae} = \infty$ , que correspondería a un tubo cerrado por una terminación perfectamente rígida se obtiene una respuesta similar a la (67), intercambiando el seno y el coseno. Por último, si suponemos la verdadera impedancia de radiación en el extremo del tubo, que en baja frecuencia puede aproximarse por<sup>17</sup>

$$Z_{ae} \cong \rho_0 c j \frac{\omega}{c} 0,613 a. \quad (108)$$

donde  $a$  es el radio del tubo. Entonces, para muy baja frecuencia (longitud de onda mucho mayor que  $a$ )<sup>18</sup> vale

$$1 \pm \frac{Z_{ae}}{\rho_0 c} = 1 \pm j \frac{\omega}{c} 0,613 a \cong e^{\pm j \frac{\omega}{c} 0,613 a}. \quad (109)$$

Entonces la solución (100) se reduce a

$$p(x, t) = \rho_0 c U e^{j\omega t} \frac{e^{j \frac{\omega}{c} (L + 0,613 a - x)} - e^{-j \frac{\omega}{c} (L + 0,613 a - x)}}{e^{j \frac{\omega}{c} (L + 0,613 a)} + e^{-j \frac{\omega}{c} (L + 0,613 a)}}. \quad (110)$$

Es decir, el tubo se comporta como si tuviera una terminación ideal ( $Z_{ae} = 0$ , lo cual implica que  $p(L, t) = 0$ ) pero con una longitud efectiva algo mayor que la real:

$$L_{efect} = L + 0,613 a. \quad (111)$$

En el caso en que el tubo termina al ras de una superficie perpendicular de dimensiones mayores que la longitud de onda (tubo con *pestaña*), la impedancia acústica específica en muy baja frecuencia se aproxima por<sup>19</sup>

$$Z_{ae} \cong \rho_0 c \frac{8a}{3\pi} j \frac{\omega}{c} = \rho_0 c j \frac{\omega}{c} 0,849 a. \quad (112)$$

con lo cual la longitud efectiva será

$$L_{efect} = L + 0,849 a. \quad (113)$$

Estas expresiones permiten obtener aproximaciones mucho mejores cuando se aplican fórmulas sencillas.

Puede obtenerse otra fórmula alternativa para  $p(x, t)$  mediante la fórmula de Euler para la exponencial compleja:

<sup>17</sup> Ver capítulo sobre Electroacústica.

<sup>18</sup> Para lograr un error menor del 1 % debe ser  $\lambda > 36a$

<sup>19</sup> Ver capítulo sobre Electroacústica

$$p(x, t) = \rho_0 c U e^{j\omega t} \frac{Z_{ae} \cos\left(\frac{\omega}{c}(L-x)\right) + j \rho_0 c \sin\left(\frac{\omega}{c}(L-x)\right)}{\rho_0 c \cos \frac{\omega L}{c} + j Z_{ae} \sin \frac{\omega L}{c}}. \quad (114)$$

La velocidad de las partículas se obtiene derivando con respecto a  $x$ , integrando con respecto a  $t$  y dividiendo por  $-\rho_0$ . Resulta:

$$u(x, t) = U e^{j\omega t} \frac{\rho_0 c \cos\left(\frac{\omega}{c}(L-x)\right) + j Z_{ae} \sin\left(\frac{\omega}{c}(L-x)\right)}{\rho_0 c \cos \frac{\omega L}{c} + j Z_{ae} \sin \frac{\omega L}{c}}. \quad (115)$$

Finalmente, a partir de las ecuaciones anteriores se obtiene la impedancia acústica específica:

$$Z_{ae}(x) = \rho_0 c \frac{Z_{ae} \cos\left(\frac{\omega}{c}(L-x)\right) + j \rho_0 c \sin\left(\frac{\omega}{c}(L-x)\right)}{\rho_0 c \cos\left(\frac{\omega}{c}(L-x)\right) + j Z_{ae} \sin\left(\frac{\omega}{c}(L-x)\right)}. \quad (116)$$

## 2.8. Potencia acústica entregada a un tubo cilíndrico cargado con $Z_{ae}$

Calculemos ahora la potencia acústica suministrada por el pistón al tubo cargado con una impedancia acústica específica  $Z_{ae}$ . Para ello particularizaremos (114) y (115) para  $x = 0$  y aplicaremos la ecuación (99). Tenemos, primeramente,

$$p(0, t) u^*(0, t) = \rho_0 c U^2 \frac{Z_{ae} \cos \frac{\omega L}{c} + j \rho_0 c \sin \frac{\omega L}{c}}{\rho_0 c \cos \frac{\omega L}{c} + j Z_{ae} \sin \frac{\omega L}{c}}. \quad (117)$$

Para encontrar la parte real debemos tener en cuenta que  $Z_{ae}$  es en general compleja, por lo que la representaremos como

$$Z_{ae} = \rho_0 c (R + jX) \quad (118)$$

Reemplazando en (117) y tomando parte real obtenemos

$$I = \rho_0 c \frac{U^2}{2} \frac{R}{\left(\cos \frac{\omega L}{c} - X \sin \frac{\omega L}{c}\right)^2 + \left(R \sin \frac{\omega L}{c}\right)^2}. \quad (119)$$

La potencia se determina, por último multiplicando la intensidad por el área de la sección transversal,  $A = \pi a^2$ .

A modo de ejemplo, consideremos que  $Z_{ae}$  es la *impedancia de radiación* del extremo abierto de un tubo sin pestaña. Según puede demostrarse (ver el capítulo sobre Electroacústica), en la región de baja frecuencia vale

$$Z_{ae} \cong \rho_0 c \left( 0,250 \left( \frac{\omega a}{c} \right)^2 + j 0,613 \frac{\omega a}{c} \right). \quad (120)$$

Reemplazando,

$$W = \rho_0 c \frac{U^2 A}{2} \frac{0,25 \left( \frac{\omega a}{c} \right)^2}{\left( \cos \frac{\omega L}{c} - 0,613 \frac{\omega a}{c} \sin \frac{\omega L}{c} \right)^2 + \left( 0,25 \left( \frac{\omega a}{c} \right)^2 \sin \frac{\omega L}{c} \right)^2}. \quad (121)$$

**Ejemplo 2:** Un tubo de 1 cm de radio y 1 m de largo es excitado en uno de sus extremos por un pistón que vibra a 250 Hz con una velocidad máxima de 1 mm/s. Determinar el nivel de presión sonora en la superficie del pistón y la potencia sonora radiada en el extremo libre.

Conociendo la velocidad del pistón podemos obtener la presión sonora mediante la ecuación (114) en  $x = 0$

$$\cos \frac{\omega L}{c} = \cos \frac{2\pi \times 250 \text{ Hz} \times 1 \text{ m}}{344 \text{ m/s}} = -0,1456012$$

$$\sin \frac{\omega L}{c} = \sin \frac{2\pi \times 250 \text{ Hz} \times 1 \text{ m}}{344 \text{ m/s}} = -0,9893434$$

De (120),

$$Z_{ae} = 412,8 \left( 0,25 \left( \frac{2\pi \times 250 \text{ Hz} \times 0,01 \text{ m}}{344 \text{ m/s}} \right)^2 + j 0,613 \frac{2\pi \times 250 \text{ Hz} \times 0,01 \text{ m}}{344 \text{ m/s}} \right)$$

$$Z_{ae} = (0,2152 + j 11,5548) \text{ rayl}$$

Reemplazando en (114) resulta,

$$P(0) = (0,01548 + j 3,4779) \text{ Pa}$$

Esta presión está prácticamente en cuadratura con la velocidad del pistón, por lo cual el campo es prácticamente reactivo.

El valor eficaz,

$$P_{ef} = \frac{|P(0)|}{\sqrt{2}} = 2,4593 \text{ Pa},$$

permite determinar el nivel de presión sonora resulta

$$L_p = 20 \log \frac{P_{ef}}{P_{ref}} = 101,8 \text{ dB}$$

Para el cálculo de la potencia radiada tengamos en cuenta que, dado que dentro del tubo no hay pérdidas, la potencia media que escapa por el extremo abierto debe ser igual a la que entrega el pistón, que está dada por (121). Reemplazando valores,

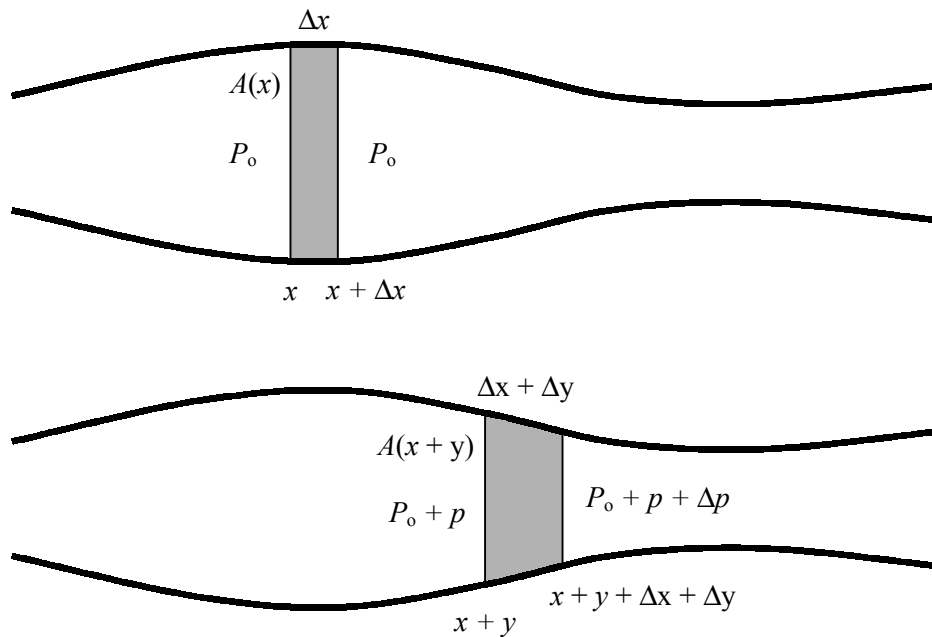
$$W = 2,431 \text{ nW}.$$

Esta potencia tan pequeña se debe a que un objeto pequeño con respecto a la longitud de onda como es el extremo de este tubo constituye un radiador sonoro muy ineficiente.

## 2.9. Ecuación de onda en un tubo de sección variable [3]

El caso de un tubo cilíndrico analizado anteriormente tiene interés en varias situaciones, por ejemplo en el caso de las guías de onda acústicas o en el de algunos instrumentos musicales de viento como el órgano, la flauta o el clarinete. En muchas otras aplicaciones es interesante analizar tubos de sección variable.

Consideremos entonces un tubo cuya sección transversal es  $A(x)$  como el indicado en dos instantes de tiempo en la figura 12. Nuevamente, las dos regiones sombreadas corresponden a la misma porción de gas. En la parte superior de la figura se representa la situación de equilibrio, es decir, en ausencia de perturbaciones. La presión total es constante e igual a la presión atmosférica,  $P_0$ . En la parte inferior la porción de aire se ha desplazado una distancia  $y$  y se ha descomprimido desde un espesor  $\Delta x$  a uno  $\Delta x + \Delta y$ . Mientras tanto, la presión sufrió un incremento  $p$  en la cara izquierda y  $p + \Delta p$  en la cara derecha, y la sección cambió de  $A(x)$  a  $A(x + y)$ .<sup>20</sup>



**Figura 12.** Un tubo de sección variable en dos instantes de tiempo diferentes. Arriba, en estado de equilibrio. Abajo, un pequeño volumen de aire se ha desplazado y expandido.

<sup>20</sup> A diferencia del caso anterior, en el que la sección era constante, es decir  $A(x) = A$ , ahora las secciones a uno y otro lado de la porción analizada son diferentes (por ejemplo,  $A(x)$  y  $A(x + \Delta x)$  en la situación de equilibrio). Sin embargo, dado que haremos tender  $\Delta x$  a 0, la diferencia no será importante. En cambio sí es importante diferenciar  $A(x)$  y  $A(x + y)$ , ya que  $y$ , pese a ser pequeño, no tenderá a 0.

Apliquemos ahora la segunda ley de Newton a la porción de aire. En este caso la masa es  $\rho_o A(x) \Delta x$ . La fuerza neta que actúa en la dirección del movimiento puede calcularse a partir de las presiones del lado izquierdo y derecho:

$$(P_o + p) A(x + y) - (P_o + p + \Delta p) A(x + y) = -\Delta p A(x + y).$$

Dado que normalmente  $y$  es pequeño, puede aproximarse  $A(x + y)$  mediante un desarrollo de Taylor de primer grado:

$$A(x + y) \cong A(x) + A'(x) y. \quad (122)$$

Entonces la fuerza neta actuante vale

$$-\Delta p A(x + y) \cong -\Delta p [A(x) + A'(x) y].$$

Aplicando la ley de Newton,

$$-\Delta p [A(x) + A'(x) y] = \rho_o A(x) \Delta x \cdot y_{tt}.$$

Dividiendo por  $A(x)$  y por  $\Delta x$  y pasando al límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ , se obtiene

$$-p_x \left[ 1 + \frac{A'(x)}{A(x)} y \right] = \rho_o y_{tt}. \quad (123)$$

Esta ecuación diferencial en derivadas parciales es a coeficientes variables, lo cual complica su resolución. Si  $y$  es pequeño (lo cual sucede para sonidos no muy intensos, como se vio en el ejemplo de la sección 2.6) el incremento *relativo* del área entre  $x$  y  $x + y$  es despreciable<sup>21</sup> y entonces se puede aproximar por

$$-p_x = \rho_o y_{tt}. \quad (124)$$

Ahora debemos particularizar a este nuevo caso la ecuación de la compresión adiabática (ecuación 3). Igual que antes,  $dP = p$ ,  $P = P_o$ . El volumen inicial será ahora  $V(x) = A(x) \cdot \Delta x$  y el incremento de volumen

$$dV = A(x + y) \cdot (\Delta x + \Delta y) - A(x) \cdot \Delta x$$

$$dV \cong [A(x) + A'(x) y] \cdot (\Delta x + \Delta y) - A(x) \cdot \Delta x.$$

Reemplazando en (3),

$$\frac{p}{P_o} = -\frac{\gamma}{A(x)} \frac{[A(x) + A'(x) y] \Delta y + A'(x) y \Delta x}{\Delta x}.$$

Pasando al límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ , resulta,

<sup>21</sup> En efecto, supongamos una bocina cónica que se expande con un ángulo de  $45^\circ$  (es decir  $\pm 22,5^\circ$ ). Se verifica fácilmente que, en ese caso,  $A'(x)/A(x) = 2/x$ . Si consideramos un nivel bastante intenso para el que  $y = 1 \mu\text{m}$ , y además  $x = 0,1 \text{ m}$ , entonces el error corresponde a  $2y/x = 2 \times 10^{-5} = 0,002\%$ .

$$\frac{p}{P_0} = -\frac{\gamma}{A(x)} [[A(x) + A'(x)y]y_x + A'(x)y].$$

Aquí podemos efectuar la misma aproximación anterior, es decir  $A'(x)y \ll A(x)$ , ya que el incremento relativo de área es muy pequeño para un desplazamiento tan pequeño como lo es  $y$  para intensidades moderadas. No sería válido, sin embargo, despreciar  $A'(x)y$  frente a  $A(x)y_x$ . Resulta, finalmente

$$\frac{p}{P_0} = -\frac{\gamma}{A(x)} [A(x)y_x + A'(x)y],$$

es decir

$$\frac{p}{P_0} = -\frac{\gamma}{A(x)} [A(x)y]_x. \quad (125)$$

Como estamos interesados en una ecuación diferencial con la presión  $p(x, t)$  como única incógnita, debemos ahora eliminar la incógnita  $y$  de las ecuaciones (124) y (125). Para ello derivamos la (125) dos veces con respecto a  $t$ . Luego invertimos el orden de derivación e introducimos las derivadas temporales dentro del corchete. Como  $A(x)$  es independiente del tiempo, dentro del corchete aparece  $y_{tt}$ , que puede ser reemplazado por el valor obtenido de la ecuación (124). Resulta:

$$p_{tt} = \frac{c^2}{A(x)} [A(x)p_x]_x. \quad (126)$$

donde  $c^2 = \gamma P_0/\rho_0$  es, igual que antes, la velocidad del sonido al cuadrado. Esta ecuación se conoce como *ecuación de Webster*, *ecuación de la corneta*, o *ecuación de la bocina*. En el caso en que  $A(x) = A$ , es fácil verificar que se reduce al caso del tubo cilíndrico.

A modo de ejemplo resolveremos el caso de una *bocina exponencial* como las utilizadas en los *altavoces de compresión* (compression drivers). Supondremos entonces que

$$A(x) = A_0 e^{x/l}, \quad (127)$$

donde  $A_0$  es el área de la sección en el origen (denominada la *garganta* de la bocina) y  $l$  la longitud para la cual el área ha crecido  $e$  veces. Reemplazando en la ecuación (126) y operando,

$$\frac{1}{c^2} p_{tt} = p_{xx} + \frac{1}{l} p_x. \quad (128)$$

Por la forma especial de  $A(x)$  la ecuación quedó reducida a una ecuación lineal a coeficientes constantes. Cuando  $l \rightarrow \infty$  la ecuación se aproxima a la ecuación de onda para el tubo cilíndrico.

Igual que antes, estamos interesados en la obtención de *soluciones estacionarias*, es decir, soluciones en las que las variables se encuentran separadas en dos factores multiplicativos:

$$p(x, t) = X(x) \cdot T(t). \quad (129)$$

Las soluciones estacionarias forman una *base de soluciones*, es decir, un conjunto de soluciones tal que cualquier otra solución puede expresarse como combinación lineal de ellas. Además, constituyen los *modos normales de oscilación* característicos del sistema. En este caso se cumple

$$\frac{1}{c^2} X T'' = X'' T + \frac{1}{l} X' T.$$

Dividiendo por  $X T$  se puede expresar como

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = \frac{X'' + \frac{1}{l} X'}{X}.$$

Dado que el lado izquierdo es una función sólo de  $t$  y el derecho sólo de  $x$ , ambos deben ser iguales a una misma constante, que llamamos  $-\eta^2$ :

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = \frac{X'' + \frac{1}{l} X'}{X} = -\eta^2.$$

Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\left\{ \begin{array}{l} T'' + \eta^2 c^2 T = 0 \\ X'' + \frac{1}{l} X' + \eta^2 X = 0 \end{array} \right. \quad (130)$$

Su solución puede llevarse a cabo por cualquiera de los métodos conocidos, obteniéndose

$$T(t) = T_o \sin(\eta c t + \phi_o) \quad (131)$$

$$X(x) = X_o e^{-x/2l} \sin\left(\frac{x}{2l} \sqrt{4\eta^2 l^2 - 1} + \psi_o\right). \quad (132)$$

Consideremos el caso particular de una bocina exponencial de longitud  $L$ , como se muestra en la figura 13. Si suponemos que la bocina está abierta en sus extremos, la presión será muy pequeña en ellos, pudiendo considerarse nula. Esto impone condiciones de contorno dadas por

$$p(0, t) = p(L, t) = 0. \quad (133)$$

para todo tiempo  $t$ . Esto significa que

$$\Psi_o = 0, \quad (134)$$

$$\frac{L}{2l} \sqrt{4\eta^2 l^2 - 1} = k \pi. \quad (135)$$

De esta ecuación se pueden obtener los valores admisibles de  $\eta$ :

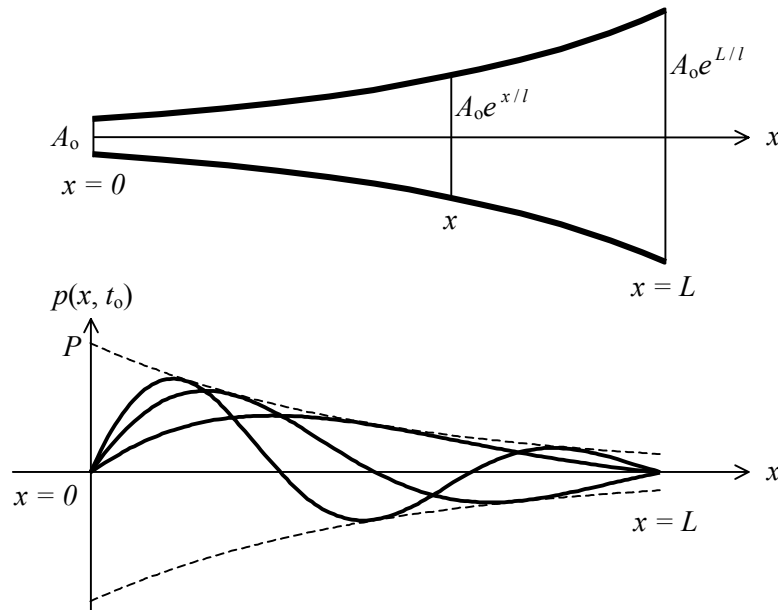


$$\eta = \frac{1}{2l} \sqrt{1 + \left( \frac{2k\pi l}{L} \right)^2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (136)$$

La presión sonora viene dada, entonces, por

$$p(x, t) = P e^{-x/2l} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{c}{2l} \sqrt{1 + \left( \frac{2k\pi l}{L} \right)^2} t + \Phi_0\right). \quad (137)$$

En la parte inferior de la figura 13 se indica la distribución de la presión sonora a lo largo de la bocina para tres valores de  $k$  para un valor de  $t$  que hace máximo el factor dependiente del tiempo. Las frecuencias no están distribuidas armónicamente, salvo en el caso en que  $l \gg L$ , es decir, cuando la bocina tiende a ser cilíndrica.



**Figura 13.** Arriba, una bocina exponencial. Abajo, distribución de la presión sonora en un instante  $t_0$  para tres soluciones estacionarias con  $k = 1, 2$  y  $3$ .

Se observa que la presión sonora va reduciendo su amplitud a lo largo de la bocina. Esto se aprovecha, en el caso de los excitadores de compresión, para reducir la presión sonora desde el valor muy elevado que produce el excitador hasta un valor apropiado para su radiación.

Por último, al igual que en el caso del tubo cilíndrico, es conveniente expresar las ecuaciones (124) y (125) en términos de la velocidad de las partículas  $v$  en lugar de su desplazamiento. Para ello, en (124) reemplazamos la aceleración por la derivada de la velocidad, y en (125) derivamos respecto al tiempo:

$$p_x = -\rho_0 u_t \quad (138)$$

$$p_t = -\frac{\gamma P_o}{A(x)} [A(x)u]_x. \quad (139)$$

Para una sección constante se reducen a las ecuaciones (35) y (36).

## 2.10. Oscilaciones forzadas en una bocina

Estudiaremos ahora la bocina exponencial excitada por un pistón en su extremo menor.<sup>22</sup> Este sistema tiene interés en electroacústica, ya que es muy utilizado en el caso de altavoces de alta frecuencia (*tweeters*).

Debido a la creciente complejidad de las ecuaciones involucradas, resulta preferible trabajar con exponenciales complejas en lugar de funciones senoidales reales. Una vez obtenida una solución al problema que se haya planteado, puede tomarse la parte imaginaria para tener una solución físicamente significativa. Supondremos, entonces, una excitación senoidal de velocidad, es decir,

$$u(0, t) = U e^{j\omega t}, \quad (140)$$

La forma general de la solución estacionaria compleja es

$$p(x, t) = P e^{\alpha x + \beta t} = P e^{\alpha x} e^{\beta t} \quad (141)$$

Los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  se pueden obtener de las ecuaciones (130):

$$\beta = j\eta c, \quad (142)$$

$$\alpha = -\frac{1}{2l} \left( 1 \pm j\sqrt{(2\eta l)^2 - 1} \right), \quad (143)$$

de donde,

$$p(x, t) = P e^{-\frac{x}{2l} \left( 1 \pm j\sqrt{(2\eta l)^2 - 1} \right)} e^{j\eta c t} \quad (144)$$

Será necesario también obtener la velocidad de las partículas, lo cual puede hacerse apelando a la ecuación (138) integrada respecto al tiempo, es decir:

$$u(x, t) = -\frac{1}{\rho_o} \int p_x(x, t) dt. \quad (145)$$

La derivación y la integración son operaciones muy simples para las funciones exponenciales. Resulta

$$u(x, t) = -j \frac{P}{\rho_o c} \frac{1}{2\eta l} \left( 1 \pm j\sqrt{(2\eta l)^2 - 1} \right) e^{-\frac{x}{2l} \left( 1 \pm j\sqrt{(2\eta l)^2 - 1} \right)} e^{j\eta c t} \quad (146)$$

o también, apelando a (144),

<sup>22</sup> Para poder colocar un pistón manteniendo la hermeticidad sería necesario agregar un pequeño tramo cilíndrico. Éste no introduce ningún efecto apreciable, debido a la reducida amplitud de oscilación.

$$u(x, t) = -j \frac{1}{\rho_0 c} \frac{1}{2\eta l} \left( 1 \pm j \sqrt{(2\eta l)^2 - 1} \right) p(x, t). \quad (147)$$

En el presente caso debe cumplirse (140). Igualando los segundos miembros de (140) y (146), recordando en este último caso que  $x = 0$ , resulta

$$\eta = \frac{\omega}{c}, \quad (148)$$

$$U = -j \frac{P}{\rho_0 c} \frac{1}{2\eta l} \left( 1 \pm j \sqrt{(2\eta l)^2 - 1} \right), \quad (149)$$

de donde

$$P = j \rho_0 c U \frac{2\omega l}{c} \frac{1}{1 \pm j \sqrt{\left(\frac{2\omega l}{c}\right)^2 - 1}}. \quad (150)$$

Reemplazando (148) y (150) en (144),

$$p(x, t) = j \rho_0 c U \frac{2\omega l}{c} \frac{e^{-\frac{x}{2l} \left( 1 \pm j \sqrt{\left(\frac{2\omega l}{c}\right)^2 - 1} \right)}}{1 \pm j \sqrt{\left(\frac{2\omega l}{c}\right)^2 - 1}} e^{j\omega t}. \quad (151)$$

Esta expresión representa dos posibles movimientos cuasi ondulatorios<sup>23</sup> en sentidos opuestos. El signo + corresponde a una onda unidireccional hacia la *boca* (extremo mayor) de la bocina, en tanto que el signo – corresponde a una onda unidireccional hacia la *garganta* (extremo menor). Sólo en el caso en que la bocina es (semi) infinitamente larga es posible considerar una sola onda.

De (147) y (148) podemos, asimismo, obtener la impedancia acústica específica para una bocina semiinfinita:

$$Z_{ae} = j \rho_0 c \frac{2\omega l}{c} \frac{1}{1 \pm j \sqrt{\left(\frac{2\omega l}{c}\right)^2 - 1}}. \quad (152)$$

Igual que antes, el signo + corresponde a la impedancia que se ve hacia las  $x$  crecientes y el signo – la observada hacia las  $x$  decrecientes.

Nótese que la impedancia acústica específica es independiente de  $x$  pero depende, en cambio, de la frecuencia. De hecho, la validez misma de las expresiones anteriores está sujeta a que

$$2\omega l \geq c, \quad (153)$$

---

<sup>23</sup> Debido a la componente real del exponente, la amplitud de la onda se reduce al aumentar  $x$ .

lo cual significa que el crecimiento de la bocina no debe ser demasiado pronunciado. Recordando la ecuación (51), que establece que la longitud de onda vale  $\lambda = c/f$ , podemos plantear la condición anterior como

$$4\pi l \geq \lambda. \quad (154)$$

Para frecuencias muy altas (o longitudes de onda muy pequeñas), la impedancia acústica específica tiende a ser puramente resistiva, como sucede en un tubo cilíndrico. Para frecuencias menores, cercanas al límite anterior, es prácticamente reactiva (es decir, casi imaginaria pura). Dicho límite se denomina *frecuencia de corte* de la bocina y está dado por

$$f_c = \frac{c}{4\pi l}. \quad (155)$$

Analícemos ahora el caso en que la bocina tiene longitud finita  $L$ . Supondremos que la boca se encuentra a presión sonora nula, es decir,

$$p(L, t) = 0. \quad (156)$$

Podemos aplicar la ecuación (144) con  $\eta = \omega/c$ , pero dado que en este caso la bocina es acotada, en principio coexisten las ondas en ambas direcciones. Resulta:

$$p(x, t) = \left( P_1 e^{-\frac{x}{2l} \left( 1 - j \sqrt{\left( \frac{2\omega l}{c} \right)^2 - 1} \right)} + P_2 e^{-\frac{x}{2l} \left( 1 + j \sqrt{\left( \frac{2\omega l}{c} \right)^2 - 1} \right)} \right) e^{j\omega t}$$

Para simplificar la notación llamemos

$$R = \sqrt{\left( \frac{2\omega l}{c} \right)^2 - 1}; \quad (157)$$

entonces

$$p(x, t) = \left( P_1 e^{-\frac{x}{2l} (1 - jR)} + P_2 e^{-\frac{x}{2l} (1 + jR)} \right) e^{j\omega t} \quad (158)$$

o bien

$$p(x, t) = \left( P_1 e^{j\frac{x}{2l} R} + P_2 e^{-j\frac{x}{2l} R} \right) e^{-\frac{x}{2l}} e^{j\omega t} \quad (159)$$

Por (156) debe ser

$$P_1 e^{j\frac{L}{2l} R} = -P_2 e^{-j\frac{L}{2l} R}$$

de donde

$$P_1 = -P e^{-j\frac{L}{2l}R} \quad (160a)$$

$$P_2 = P e^{j\frac{L}{2l}R} \quad (160b)$$

Resulta

$$p(x, t) = P \left( e^{j\frac{L-x}{2l}R} - e^{-j\frac{L-x}{2l}R} \right) e^{-\frac{x}{2l}} e^{j\omega t}. \quad (161)$$

Aplicando (145) a (158) podemos calcular la velocidad de las partículas:

$$u(x, t) = \frac{1}{j} \frac{P}{\rho_0 c} \frac{c}{2\omega l} \left( (1+jR) e^{j\frac{L-x}{2l}R} - (1-jR) e^{-j\frac{L-x}{2l}R} \right) e^{-\frac{x}{2l}} e^{j\omega t}. \quad (162)$$

Dividiendo (161) por (162) obtenemos la impedancia acústica específica en la ubicación  $x$ :

$$\begin{aligned} Z_{ae} &= j \rho_0 c \frac{2\omega l}{c} \frac{e^{j\frac{L-x}{2l}R} - e^{-j\frac{L-x}{2l}R}}{(1+jR) e^{j\frac{L-x}{2l}R} - (1-jR) e^{-j\frac{L-x}{2l}R}} = \\ &= j \rho_0 c \frac{2\omega l}{c} \frac{\text{sen} \frac{L-x}{2l} R}{\text{sen} \frac{L-x}{2l} R + R \cos \frac{L-x}{2l} R} = \\ &= j \rho_0 c \frac{\text{sen} \frac{L-x}{2l} R}{\text{sen} \left( \frac{L-x}{2l} R + \text{arctg} R \right)}. \end{aligned} \quad (163)$$

Llamando

$$\theta = \text{arctg} R = \text{arctg} \sqrt{\left( \frac{2\omega l}{c} \right)^2 - 1} = \arccos \frac{c}{2\omega l}, \quad (164)$$

resulta

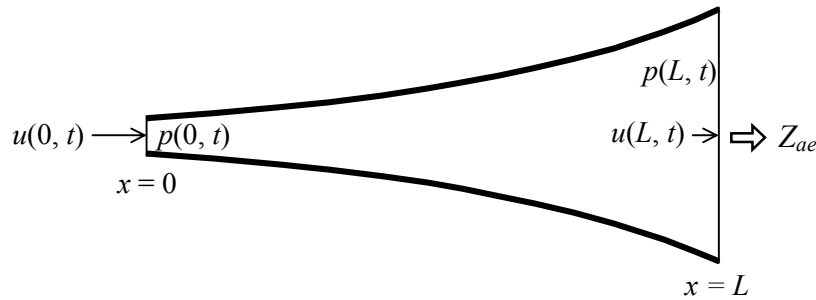
$$Z_{ae}(x) = j \rho_0 c \frac{\text{sen} \left( \frac{L-x}{2l} \sqrt{\left( \frac{2\omega l}{c} \right)^2 - 1} \right)}{\text{sen} \left( \frac{L-x}{2l} \sqrt{\left( \frac{2\omega l}{c} \right)^2 - 1} + \theta \right)}, \quad (165)$$

o bien

$$Z_{ae}(x) = j\rho_0 c \frac{\sin\left(\frac{L-x}{2l} \operatorname{tg} \theta\right)}{\sin\left(\frac{L-x}{2l} \operatorname{tg} \theta + \theta\right)}. \quad (166)$$

### 2.11. Oscilaciones forzadas en una bocina cargada con $Z_{ae}$

Consideremos ahora una bocina cargada en su boca con una impedancia acústica específica  $Z_{ae}$ , por ejemplo la impedancia de radiación (figura 14). Nos proponemos calcular la impedancia acústica específica que presenta la garganta.



**Figura 14.** Bocina exponencial de longitud  $L$  cargada con una impedancia acústica específica  $Z_{ae}$ .

La presión sonora en cualquier posición  $x$  viene dada por

$$p(x, t) = \left( P_1 e^{-\frac{x}{2l}(1-jR)} + P_2 e^{-\frac{x}{2l}(1+jR)} \right) e^{j\omega t}, \quad (167)$$

donde  $R$  es el definido en (157). Nuevamente aplicando la ley de Newton (145)

$$u(x, t) = \frac{1}{j\rho_0 c} \frac{c}{2\omega l} \left( P_1 (1-jR) e^{-\frac{x}{2l}(1-jR)} + P_2 (1+jR) e^{-\frac{x}{2l}(1+jR)} \right) e^{j\omega t}. \quad (168)$$

La impedancia acústica vista desde una ubicación  $x$  es

$$Z_{ae}(x) = j\rho_0 c \frac{2\omega l}{c} \frac{P_1 e^{j\frac{x}{2l}R} + P_2 e^{-j\frac{x}{2l}R}}{P_1 (1-jR) e^{j\frac{x}{2l}R} + P_2 (1+jR) e^{-j\frac{x}{2l}R}}. \quad (169)$$

La condición de contorno en la boca establece que  $Z_{ae}(L) = Z_{ae}$ , de donde pueden escribirse  $P_1$  y  $P_2$  en función de una única constante  $P$ :

$$P_1 = P \left( -j \frac{2\omega l}{c} + \frac{Z_{ae}}{\rho_o c} (1 + jR) \right) e^{-j \frac{L}{2l} R}, \quad (170)$$

$$P_2 = P \left( j \frac{2\omega l}{c} - \frac{Z_{ae}}{\rho_o c} (1 - jR) \right) e^{j \frac{L}{2l} R}. \quad (171)$$

Sustituyendo en (167)

$$\begin{aligned} p(x, t) = P e^{j\omega t} e^{-\frac{x}{2l}} & \left[ \left( -j \frac{2\omega l}{c} + \frac{Z_{ae}}{\rho_o c} (1 + jR) \right) e^{-j \frac{L-x}{2l} R} + \right. \\ & \left. + \left( j \frac{2\omega l}{c} - \frac{Z_{ae}}{\rho_o c} (1 - jR) \right) e^{j \frac{L-x}{2l} R} \right] \end{aligned} \quad (172)$$

Llamando, como antes,

$$\theta = \arccos \frac{c}{2\omega l},$$

podemos, luego de operar algebraicamente mediante la igualdad de Euler, reescribir la ecuación (172) en la forma más compacta que sigue:

$$p(x, t) = 2P \frac{2\omega l}{c} e^{j\omega t} e^{-\frac{x}{2l}} \left( -\sin \left( \frac{L-x}{2l} \operatorname{tg} \theta \right) + j \frac{Z_{ae}}{\rho_o c} \sin \left( \theta - \frac{L-x}{2l} \operatorname{tg} \theta \right) \right). \quad (173)$$

Para el cálculo de la velocidad de las partículas a partir de (167) procedemos en forma similar:

$$\begin{aligned} u(x, t) = \frac{P}{j\rho_o c} \frac{c}{2\omega l} e^{j\omega t} e^{-\frac{x}{2l}} & \left[ \left( -j \frac{2\omega l}{c} + \frac{Z_{ae}}{\rho_o c} (1 + jR) \right) (1 - jR) e^{-j \frac{L-x}{2l} R} + \right. \\ & \left. + \left( j \frac{2\omega l}{c} - \frac{Z_{ae}}{\rho_o c} (1 - jR) \right) (1 + jR) e^{j \frac{L-x}{2l} R} \right] \end{aligned} \quad (174)$$

Operando,

$$u(x, t) = \frac{2P}{\rho_o c} \frac{2\omega l}{c} e^{j\omega t} e^{-\frac{x}{2l}} \left( -\frac{Z_{ae}}{\rho_o c} \sin \left( \frac{L-x}{2l} \operatorname{tg} \theta \right) + j \sin \left( \theta - \frac{L-x}{2l} \operatorname{tg} \theta \right) \right). \quad (175)$$

A partir de (172) y (174) puede calcularse la impedancia acústica específica:

$$Z_{ae}(x) = \rho_0 c \frac{\frac{Z_{ae}}{\rho_0 c} \sin\left(\theta - \frac{L-x}{2l} \operatorname{tg} \theta\right) + j \sin\left(\frac{L-x}{2l} \operatorname{tg} \theta\right)}{\sin\left(\theta + \frac{L-x}{2l} \operatorname{tg} \theta\right) + j \frac{Z_{ae}}{\rho_0 c} \sin\left(\frac{L-x}{2l} \operatorname{tg} \theta\right)}. \quad (176)$$

Si suponemos el caso ideal en el que la impedancia de radiación  $Z_{ae}$  es 0 (presión nula en la boca), esta ecuación se reduce a la (166). Si se hace tender  $l$  a  $\infty$  (es decir, la bocina se vuelve cilíndrica), se obtiene el mismo resultado de la ecuación (116). Si la impedancia de radiación es  $\rho_0 c$ , lo cual se verifica aproximadamente en alta frecuencia,<sup>24</sup>

$$Z_{ae}(x) = \rho_0 c \frac{\sin\left(\theta - \frac{L-x}{2l} \operatorname{tg} \theta\right) + j \sin\left(\frac{L-x}{2l} \operatorname{tg} \theta\right)}{\sin\left(\theta + \frac{L-x}{2l} \operatorname{tg} \theta\right) + j \sin\left(\frac{L-x}{2l} \operatorname{tg} \theta\right)}. \quad (177)$$

## 2.12. Potencia acústica entregada a una bocina cargada con $Z_{ae}$

Calcularemos ahora la potencia acústica suministrada por un pistón en la garganta de una bocina cargada con una impedancia acústica específica  $Z_{ae}$  cuando el pistón se mueve con velocidad

$$u(0, t) = U e^{j\omega t}. \quad (178)$$

Para ello particularicemos primero (173) y (175) para  $x = 0$ :

$$p(0, t) = 2P \frac{2\omega l}{c} e^{j\omega t} \left( -\sin\left(\frac{L}{2l} \operatorname{tg} \theta\right) + j \frac{Z_{ae}}{\rho_0 c} \sin\left(\theta - \frac{L}{2l} \operatorname{tg} \theta\right) \right), \quad (179)$$

$$u(0, t) = \frac{2P}{\rho_0 c} \frac{2\omega l}{c} e^{j\omega t} \left( -\frac{Z_{ae}}{\rho_0 c} \sin\left(\frac{L}{2l} \operatorname{tg} \theta\right) + j \sin\left(\theta - \frac{L}{2l} \operatorname{tg} \theta\right) \right). \quad (180)$$

La constante  $P$  se obtiene igualando (180) y (178)

$$P = \rho_0 c \frac{c}{4\omega l} \frac{U}{-\frac{Z_{ae}}{\rho_0 c} \sin\left(\frac{L}{2l} \operatorname{tg} \theta\right) + j \sin\left(\theta - \frac{L}{2l} \operatorname{tg} \theta\right)}. \quad (181)$$

Ahora aplicaremos (96) para el cálculo de la intensidad media. Para ello obtenemos

$$p(0, t) u^*(0, t) = \rho_0 c U^2 \frac{-\sin\left(\frac{L}{2l} \operatorname{tg} \theta\right) + j \frac{Z_{ae}}{\rho_0 c} \sin\left(\theta - \frac{L}{2l} \operatorname{tg} \theta\right)}{-\frac{Z_{ae}}{\rho_0 c} \sin\left(\frac{L}{2l} \operatorname{tg} \theta\right) + j \sin\left(\theta - \frac{L}{2l} \operatorname{tg} \theta\right)}. \quad (182)$$

<sup>24</sup> Las bocinas se utilizan generalmente en el rango de alta frecuencia



Debemos calcular la parte real, para lo cual conviene representar  $Z_{ae}$  según (118),

$$Z_{ae} = \rho_0 c (R + jX).$$

Reemplazando y operando se obtiene la potencia acústica, luego de multiplicar por el área de la garganta:

$$W = \rho_0 c \frac{U^2}{2} A_0 \frac{R \left( \sin^2 \left( \frac{L}{2l} \operatorname{tg} \theta \right) + \sin^2 \left( \theta - \frac{L}{2l} \operatorname{tg} \theta \right) \right)}{R^2 \sin^2 \left( \frac{L}{2l} \operatorname{tg} \theta \right) + \left( X \sin \left( \frac{L}{2l} \operatorname{tg} \theta \right) - \sin \left( \theta - \frac{L}{2l} \operatorname{tg} \theta \right) \right)^2}. \quad (183)$$

Alternativamente, puede expresarse como

$$W = \rho_0 c \frac{U^2}{2} A_0 \operatorname{Re}(Z_{ae}(0)). \quad (184)$$

Para  $l \rightarrow \infty$ , es decir, cuando la bocina se reduce a un tubo cilíndrico, se verifica

$$\frac{L}{2l} \operatorname{tg} \theta \rightarrow L \frac{\omega}{c}, \quad (185a)$$

$$\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad (185b)$$

por lo cual el resultado concuerda con el obtenido en la ecuación (119) para el tubo de sección uniforme cargado con  $Z_{ae}$

Dado que para alta frecuencia la impedancia acústica específica de radiación tiende a  $\rho_0 c$ , podemos reemplazar  $R = 1$  y  $X = 0$  en (183), en cuyo caso la potencia se reduce a

$$W \cong \rho_0 c \frac{U^2}{2} A_0. \quad (186)$$

**Ejemplo 3:** Una bocina exponencial tiene 1 cm de radio en la garganta y 7 cm en la boca, siendo la longitud de 20 cm. La garganta es excitada por un pistón que vibra a 2000 Hz con una velocidad máxima de 1 mm/s. Determinar la frecuencia de corte de la bocina, la amplitud de la oscilación, la impedancia acústica específica vista por el pistón, el nivel de presión sonora en su superficie y la potencia sonora radiada por la boca.

En primer lugar calculemos la constante  $l$ :

$$l = \frac{L}{\ln(A(L)/A(0))} = \frac{L}{2 \ln(a_b/a_g)} = \frac{0,2 \text{ m}}{2 \ln(0,07/0,01)} = 0,05139 \text{ m}$$

La frecuencia de corte vale, según (155)

$$f_c = \frac{c}{4\pi l} = 534,23 \text{ Hz}$$

La amplitud de oscilación se obtiene integrando la velocidad  $U \sin(2\pi f t)$ :

$$Y = \frac{U}{2\pi f} = \frac{0,001 \text{ m/s}}{2\pi \times 2000 \text{ 1/s}} = 79,6 \text{ nm}.$$

Para calcular la impedancia acústica específica tengamos en cuenta que en la región de alta frecuencia vale, para un tubo con pestaña<sup>25</sup> (ver capítulo sobre Electroacústica)

$$Z_{ae} \cong \rho_0 c \left( 1 + j \frac{2c}{\pi a \omega} \right).$$

Esta fórmula se aplica con el radio de la boca ( $a = 0,07 \text{ m}$ ):

$$Z_{ae} \cong \rho_0 c (1 + j 0,24968).$$

$$\theta = \arg \cos \left( \frac{c}{4\pi f l} \right) = 1,4368$$

$$\text{tg } \theta = 7,4203$$

Reemplazando en (176) para  $x = 0$  resulta

$$Z_{ae}(0) = (393,22 + j 95,373) \text{ rayl} = \rho_0 c (0,9498 + j 0,23037).$$

La presión sonora en la superficie del pistón se obtiene multiplicando la velocidad por la impedancia:

$$P = U Z_{ae}(0) = 0,001 \cdot (393,22 + j 95,373) \text{ Pa} = (0,39322 + j 0,095373) \text{ Pa}.$$

Ignorando la fase, la amplitud de la presión se calcula como el módulo del fasor y, dividiendo por  $\sqrt{2}$ , resulta

$$P_{ef} = 0,28611 \text{ Pa},$$

de donde

$$L_p = 83,11 \text{ dB}.$$

Por último, para determinar la potencia media radiada podemos aplicar (184):

$$W = 1,2 \times 345 \frac{0,001^2}{2} \pi \times 0,01^2 \times 393,22 = 0,2557 \mu\text{W}.$$

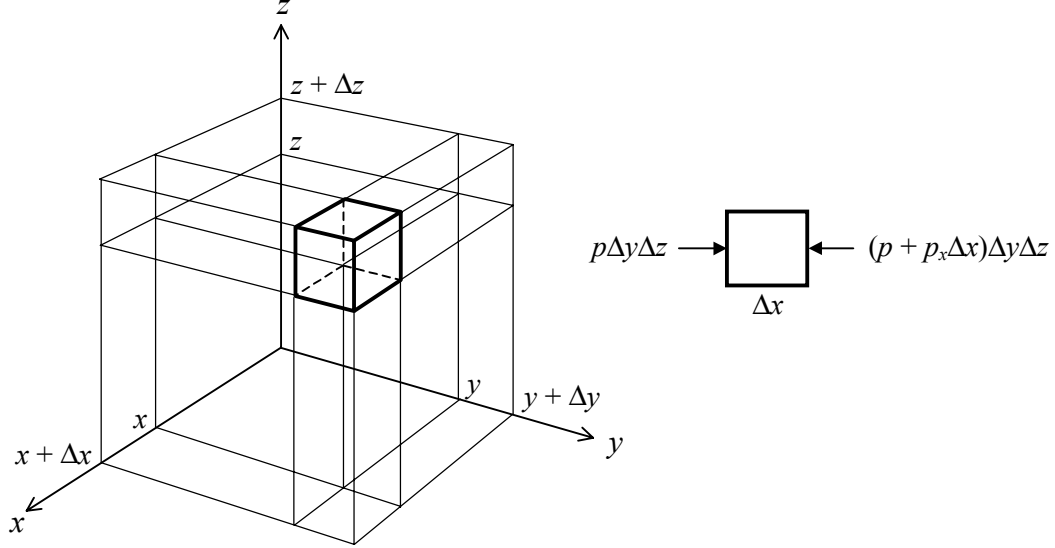
---

<sup>25</sup> En este caso conviene considerar que la boca de la bocina tiene pestaña, ya que las bocinas suelen estar al ras de un gabinete.

### 3. LA ECUACIÓN DE ONDA TRIDIMENSIONAL

#### 3.1. Extensión de la ecuación de onda a tres dimensiones

Consideremos una porción de aire con forma de paralelepípedo rectángulo de aristas  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ , ubicada en la posición  $(x, y, z)$ , tal como se indica en la figura 15.



**Figura 15.** Porción de aire sujeta a desplazamientos y compresiones y detalle de las fuerzas en dirección  $x$ .

La fuerza ejercida en la dirección  $x$  se debe a la diferencia de presiones sonoras en las caras perpendiculares al eje  $x$ , es decir,<sup>26</sup>

$$\Delta f_x = p(x, y, z, t) \Delta y \Delta z - p(x + \Delta x, y, z, t) \Delta y \Delta z.$$

Podemos escribir, utilizando un desarrollo de Taylor de primer orden

$$p(x + \Delta x, y, z, t) \cong p(x, y, z, t) + p_x(x, y, z, t) \Delta x,$$

de donde

$$\Delta f_x \cong p \Delta y \Delta z - (p + p_x \Delta x) \Delta y \Delta z = -p_x \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Análogamente para las otras componentes, de donde

$$\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z) = -(p_x, p_y, p_z) \Delta x \Delta y \Delta z = -\nabla p \Delta x \Delta y \Delta z,$$

donde  $\nabla$  es el operador *gradiente*. Por segunda ley de Newton, Esta fuerza debe igualar a la masa por la aceleración, que calcularemos como derivada temporal del vector velocidad  $\mathbf{u}$ , de modo que

<sup>26</sup> Utilizamos tipografía en negrita para los vectores, correspondiendo en ese caso los subíndices, también en negrita, a las componentes.

$$-\nabla p \Delta x \Delta y \Delta z = \rho_0 \Delta x \Delta y \Delta z \mathbf{u}_t.$$

Simplificando y pasando al límite

$$-\nabla p = \rho_0 \mathbf{u}_t. \quad (187)$$

**Nota:** En realidad el paralelepípedo que originalmente se encuentra en  $(x, y, z)$ , en un instante cualquiera se encuentra en una posición diferente, por ejemplo  $(x_1, y_1, z_1)$ . La velocidad puede entonces interpretarse de dos maneras: como la velocidad de las partículas que se encuentran en ese momento efectivamente en  $(x, y, z)$  o como la velocidad de la porción original de aire, que ahora está en  $(x_1, y_1, z_1)$ . Para la validez de la ley de Newton corresponde esta segunda interpretación, lo cual complicaría la ecuación (187), ya que al ser

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x(t), y(t), z(t), t),$$

una función de una sola variable,  $t$ , su derivada debe calcularse como

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_x \frac{dx}{dt} + \mathbf{u}_y \frac{dy}{dt} + \mathbf{u}_z \frac{dz}{dt}. \quad (188)$$

En esta ecuación se ha distinguido la derivada *total* con respecto al tiempo de  $\mathbf{u}$  (como función vectorial de una sola variable,  $t$ , ya que es la velocidad de una única porción de gas) de la derivada *parcial* con respecto al tiempo (como función de las variables  $x, y, z, t$ ). Para niveles de presión sonora no demasiado altos, los tres últimos términos son despreciables. En efecto, si suponemos una onda plana progresiva en dirección  $x$  dada por

$$\mathbf{u}(x, y, z) = (U \sin(kx - \omega t), 0, 0),$$

donde  $k = \omega/c$ , resulta

$$x(t) \cong \frac{U}{\omega} \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} = -\omega U \cos(kx - \omega t) + kU \cos(kx - \omega t) U \sin(kx - \omega t).$$

El segundo término será despreciable siempre que  $kU \ll \omega$ , es decir,

$$U \ll c.$$

Para una onda plana,

$$U = \frac{P}{\rho_0 c},$$

por lo cual debe ser

$$P \ll \rho_0 c^2 = \gamma P_0,$$

que corresponde a un nivel de presión sonora de 194 dB. Mucho antes de esto aparecen fenómenos no lineales que restan precisión a la ecuación de onda, por lo cual podemos

garantizar que la ecuación (187) es una aproximación válida para todas las aplicaciones prácticas habituales.

Dado que la porción de gas original sufrirá posiblemente compresiones y expansiones, debemos ahora obtener una segunda ecuación que vincule la presión y la velocidad contemplando la elasticidad del medio. Llamemos  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  al desplazamiento que experimenta el paralelepípedo. Notemos que este desplazamiento será finito, en tanto que el tamaño del paralelepípedo (dado por  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ ) se hará tender a 0. Tendremos

$$\begin{aligned} X &= X(x, y, z, t) \\ Y &= Y(x, y, z, t) \\ Z &= Z(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (189)$$

Si las dimensiones iniciales son  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ , las nuevas dimensiones estarán dadas por

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= \Delta x + X_x \Delta x = \Delta x(1 + X_x) \\ \Delta y_1 &= \Delta y + Y_y \Delta y = \Delta y(1 + Y_y) \\ \Delta z_1 &= \Delta z + Z_z \Delta z = \Delta z(1 + Z_z) \end{aligned} \quad (190)$$

El volumen inicial será

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z,$$

y el nuevo volumen,

$$\Delta V_1 = \Delta x_1 \Delta y_1 \Delta z_1 = \Delta x \Delta y \Delta z (1 + X_x) (1 + Y_y) \Delta z (1 + Z_z)$$

Para frecuencias y niveles de presión sonora moderadas la longitud de onda es grande comparada con la amplitud del desplazamiento por lo que  $X_x$ ,  $Y_y$ ,  $Z_z \ll 1$ , de donde

$$\Delta V_1 \cong \Delta x \Delta y \Delta z (1 + X_x + Y_y + Z_z).$$

El incremento de volumen está dado, entonces, por

$$\Delta V_1 - \Delta V \cong \Delta V (X_x + Y_y + Z_z).$$

Derivando con respecto al tiempo y conmutando el orden de derivación,

$$(\Delta V_1 - \Delta V)_t \cong \Delta V ((\mathbf{u}_x)_x + (\mathbf{u}_y)_y + (\mathbf{u}_z)_z) = \Delta V \operatorname{div}(\mathbf{u}) \quad (191)$$

donde  $\operatorname{div}(\mathbf{u})$  es la divergencia de  $\mathbf{u}$ . Dado que el primer miembro representa el caudal que sale del volumen  $\Delta V$ , esta ecuación es una versión microscópica del teorema de Gauss (o teorema de la divergencia).<sup>27</sup> Esta ecuación suele llamarse *ecuación de continuidad*.

---

<sup>27</sup> El teorema de la divergencia establece que

$$\iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{u}) dV = \iint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS,$$

es decir, la integral de volumen de la divergencia de un campo vectorial es igual al flujo de ese campo a través de la superficie

Completemos el análisis aplicando la ecuación de la compresión adiabática:

$$\frac{dP}{P} = -\gamma \frac{dV}{V}$$

En nuestro caso,  $dV \equiv \Delta V_1 - \Delta V$ ,  $V \equiv \Delta V$ ,  $dP \equiv p$  y  $P \equiv P_0$ , de donde

$$\frac{p}{P_0} = -\gamma \frac{\Delta V_1 - \Delta V}{\Delta V},$$

o, de (191),

$$p_t = -\gamma P_0 \operatorname{div}(\mathbf{u}) \quad (192)$$

Las ecuaciones (187) y (192) contienen dos incógnitas,  $p$  y  $\mathbf{u}$ . Podemos eliminar  $\mathbf{u}$  derivando (192) con respecto al tiempo y reemplazando en ella (187). Resulta

$$p_{tt} = \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \operatorname{div}(\nabla p),$$

es decir, la *ecuación de onda tridimensional*,

$$p_{tt} = c^2 (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}), \quad (193)$$

donde, igual que en el caso unidimensional del tubo,

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} \quad (194)$$

es la velocidad de propagación de la onda.

### 3.2 Soluciones de la ecuación de onda tridimensional

A diferencia de la ecuación de onda unidimensional, para la cual es posible dar una sencilla solución general en la forma de dos ondas que se propagan en direcciones opuestas, la ecuación tridimensional no admite una solución general a menos que se agreguen hipótesis específicas sobre la naturaleza del campo sonoro, tales como condiciones de simetría sugeridas por la naturaleza física del problema, o condiciones de contorno impuestas por la presencia de elementos tales como paredes, absorbentes, etc.

Analizaremos así algunos casos particulares, como las ondas planas, las ondas confinadas al interior de un recinto con paredes planas, las ondas esféricas y algunas ondas con simetría cilíndrica.

#### 3.2.1 Ondas planas

Una onda es *plana* cuando la presión sonora es, en todo momento, constante sobre planos paralelos. Es fácil ver que existen soluciones en la forma de ondas planas. Para ello basta analizar el caso particular en el que

$$p(x, y, z, t) = p_1(x, t). \quad (195)$$

Dado que en este caso la presión es independiente de  $y$  y  $z$ , resulta constante sobre planos perpendiculares al eje  $x$ . Además, es inmediato que

$$p_y = p_z = 0,$$

por lo que bastará que  $p$  satisfaga la ecuación

$$p_{tt} = c^2 p_{xx},$$

que es una ecuación de onda unidimensional. Resulta así la solución general

$$p(x, y, z, t) = g(x + ct) + h(x - ct), \quad (196)$$

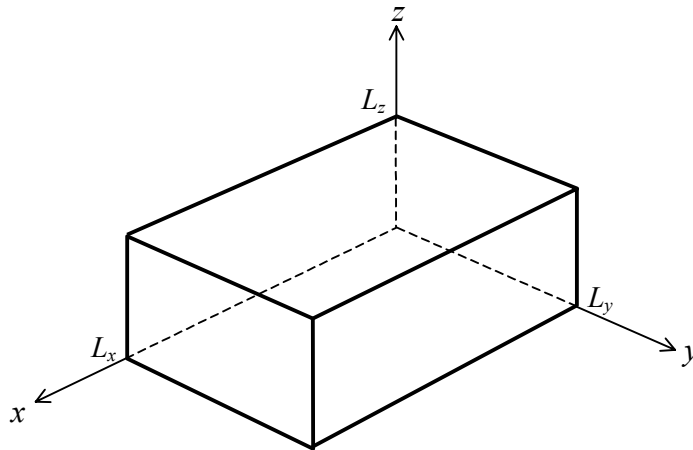
lo cual implica que la onda está formada por dos ondas que se propagan en la dirección del eje  $x$ . Todos los análisis antes realizados para las ondas unidimensionales son trasladables directamente al caso de ondas planas.

Es evidente que también son posibles ondas planas en las direcciones  $y$  y  $z$ , pero además cualquier otra dirección admite la existencia de ondas planas.<sup>28</sup>

### 3.2.2 Solución de la ecuación de onda con condiciones de contorno

Consideremos un recinto rectangular limitado por paredes perfectamente rígidas como se indica en la figura 16. Al ser las superficies rígidas, la velocidad de las partículas en dirección perpendicular es nula por lo cual, de (187) se concluye que las derivadas parciales también son nulas, resultando las siguientes condiciones de contorno

$$\begin{aligned} p_x(0, y, z, t) &= p_x(L_x, y, z, t) = 0 \\ p_y(x, 0, z, t) &= p_y(x, L_y, z, t) = 0 \\ p_z(x, y, 0, t) &= p_z(x, y, L_z, t) = 0 \end{aligned} \quad (197)$$



**Figura 16.** Recinto rectangular para el cálculo de soluciones estacionarias.

<sup>28</sup> Esto se debe a que el aire es isotrópico, pero además resulta del hecho de que el operador laplaciano,  $p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}$ , es invariante ante traslaciones y rotaciones

Igual que en el caso del tubo unidimensional, planteamos la búsqueda de soluciones estacionarias, es decir, de la forma

$$p(x, y, z, t) = P X(x) Y(y) Z(z) T(t). \quad (198)$$

Sustituyendo en la ecuación de onda

$$X'' Y Z T + X Y'' Z T + X Y Z'' T = \frac{1}{c^2} X Y Z T''.$$

Dividiendo por  $p = X Y Z T$ ,

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T}. \quad (199)$$

Dado que el primer y segundo miembro dependen de variables independientes distintas, la única posibilidad es que ambos sean constantes. Llamando  $-\eta^2$  a esa constante resulta

$$T'' + \eta^2 c^2 T = 0 \quad (200a)$$

Análogamente, dado que la suma de tres funciones de distintas variables independientes es constante, la única posibilidad es que las tres sean constantes. Resulta, así,

$$X'' + \eta_x^2 X = 0 \quad (201b)$$

$$Y'' + \eta_y^2 Y = 0 \quad (201c)$$

$$Z'' + \eta_z^2 Z = 0 \quad (201d)$$

donde las constantes  $\eta_x$ ,  $\eta_y$ , y  $\eta_z$  deben satisfacer, además,

$$\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2 = \eta^2. \quad (202)$$

Las ecuaciones (200) se resuelven mediante funciones senoidales:

$$X(x) = \text{sen}(\eta_x x + \phi_x) \quad (203a)$$

$$Y(y) = \text{sen}(\eta_y y + \phi_y) \quad (203b)$$

$$Z(z) = \text{sen}(\eta_z z + \phi_z) \quad (203c)$$

$$T(t) = \text{sen}(\eta_x c y + \psi) \quad (203d)$$

Las condiciones de contorno (197) imponen que

$$X'(0) = X'(L_x) = 0$$

$$Y'(0) = Y'(L_y) = 0$$

$$Z'(0) = Z'(L_z) = 0$$

Tomando, por ejemplo, la primera, resulta

$$\cos(\eta_x 0 + \phi_x) = 0$$

$$\cos(\eta_x L_x + \phi_x) = 0,$$

de las que se obtiene



$$\varphi_x = 0$$

$$\eta_x L_x = n_x \pi,$$

donde  $n_x$  es cualquier entero. Reemplazando en (203) y en (195), se concluye que

$$p(x, y, z, t) = P \cos \frac{n_x \pi}{L_x} x \cos \frac{n_y \pi}{L_y} y \cos \frac{n_z \pi}{L_z} z \sin \pi c \sqrt{\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2}} t. \quad (204)$$

En la dependencia temporal se ignoró la fase pues sólo representa un retardo constante. Cada terna  $(n_x, n_y, n_z)$  determina, así, un *modo normal de oscilación*. La dependencia del espacio es, en cada dirección, cosenoidal, con máximos sobre las paredes del recinto. La dependencia temporal es una senoide con frecuencia

$$f_{n_x, n_y, n_z} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2}}. \quad (205)$$

Para el análisis de las ecuaciones anteriores conviene clasificar los modos normales en tres categorías: los modos normales *axiales*, en los cuales sólo uno de los tres números  $n_x, n_y, n_z$  es no nulo, los modos normales *tangenciales*, caracterizados por tener sólo dos de los números no nulos, y los modos normales *oblicuos*, en los que  $n_x, n_y, n_z$  son todos diferentes de 0.

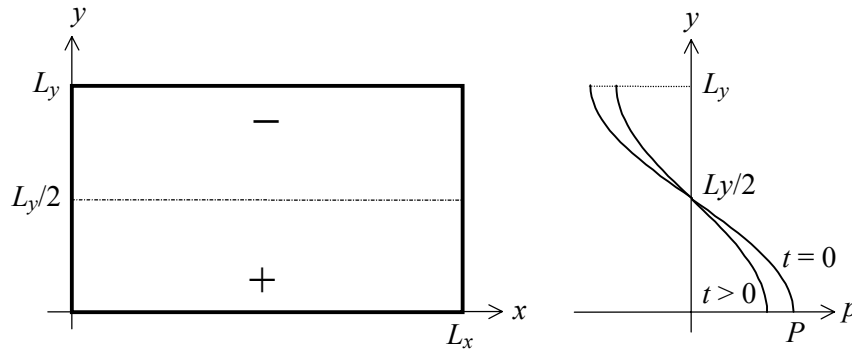
Cada modo axial equivale a dos ondas planas progresivas que se mueven en sentido opuesto en la dirección de uno de los ejes. La superposición de ambas ondas planas da una onda plana estacionaria, en forma similar al caso de un tubo. En la figura 17 se muestra el ejemplo en que  $n_x = 0, n_y = 1$  y  $n_z = 0$ , denominado modo  $(0, 1, 0)$ , habiéndose indicado la distribución de presiones a lo largo del eje y en dos instantes determinados ( $t = 0$  y  $t > 0$ ). Dado que se trata de ondas planas perpendiculares al eje y, la presión sonora es constante sobre planos paralelos al plano  $x-z$ . Sobre uno de dichos planos, ubicado en  $y = L_y/2$ , la presión es siempre nula. Dicho plano se denomina *plano nodal*.

Los modos tangenciales corresponden a la superposición de cuatro ondas planas que se mueven en forma oblicua pero perpendicular a uno de los ejes (aquel cuyo correspondiente entero es 0). Intuitivamente se puede pensar que es una onda que se refleja sucesivamente en cuatro paredes, retornando cíclicamente a la misma posición. Dado que las ondas se desplazan en forma oblicua, el resultado es una onda estacionaria pero no plana. En la figura 18 se ilustra el ejemplo en que  $n_x = 2, n_y = 1$  y  $n_z = 0$  (modo  $(2, 1, 0)$ ). En este caso se muestra la distribución de presiones según los ejes  $x$  y  $y$ . Vemos que para este modo existen tres planos nodales: dos perpendiculares al eje  $x$  y uno perpendicular al eje  $y$ .

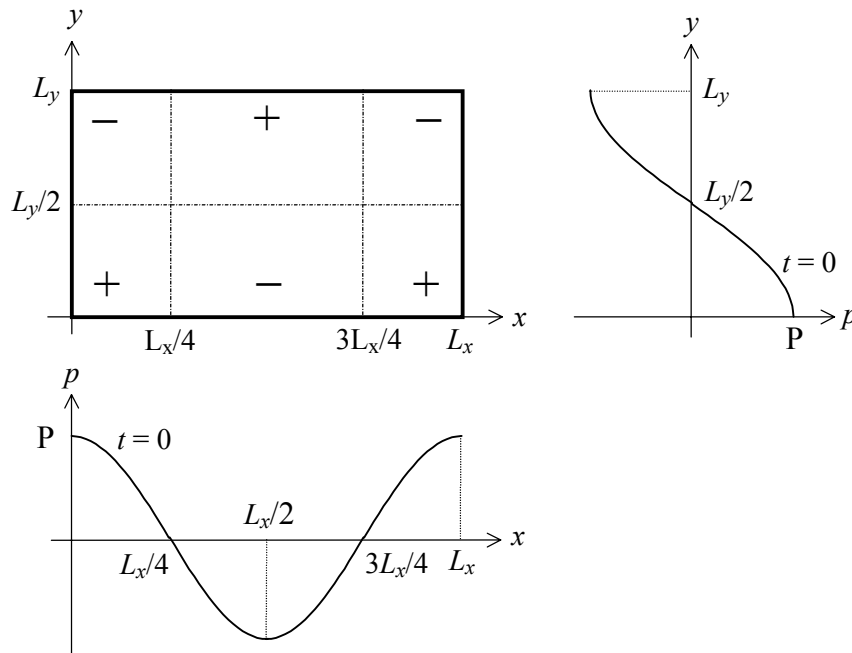
Finalmente, los modos oblicuos corresponden a ocho ondas que se desplazan de a pares en cuatro direcciones diferentes. El resultado es una onda compleja que aparenta reflejarse sucesivamente en todas las superficies del recinto. En el apéndice 3 se muestra cómo descomponer (204) como superposición de ondas planas.

A diferencia de lo que sucede en un campo difuso, en una onda estacionaria correspondiente a determinado modo normal la distribución del campo sonoro no es uniforme. Así, en las proximidades de una pared, la presión sonora será considerable, mientras que sobre los planos nodales será nula. En modos de alta frecuencia, en los cuales hay numerosos planos nodales, un desplazamiento relativamente pequeño de la cabeza puede ocasionar variaciones importantes en la sonoridad percibida. Estas irre-

gularidades constituyen defectos acústicos capaces de afectar la inteligibilidad de la palabra o la música.



**Figura 17.** Distribución espacial de presiones sonoras para un modo axial según el eje  $y$  ( $n_x = 0$ ,  $n_y = 1$ ,  $n_z = 0$ ). Se muestra dicha distribución para dos instantes de tiempo. La presión es constante sobre planos verticales perpendiculares al eje  $y$ . La línea de trazo y punto es la proyección de un *plano nodal*, es decir un plano sobre el cual la presión sonora es siempre nula. Los signos  $+$  y  $-$  indican el signo de la presión sonora en  $t = 0$ . Medio ciclo después, los signos se invierten.

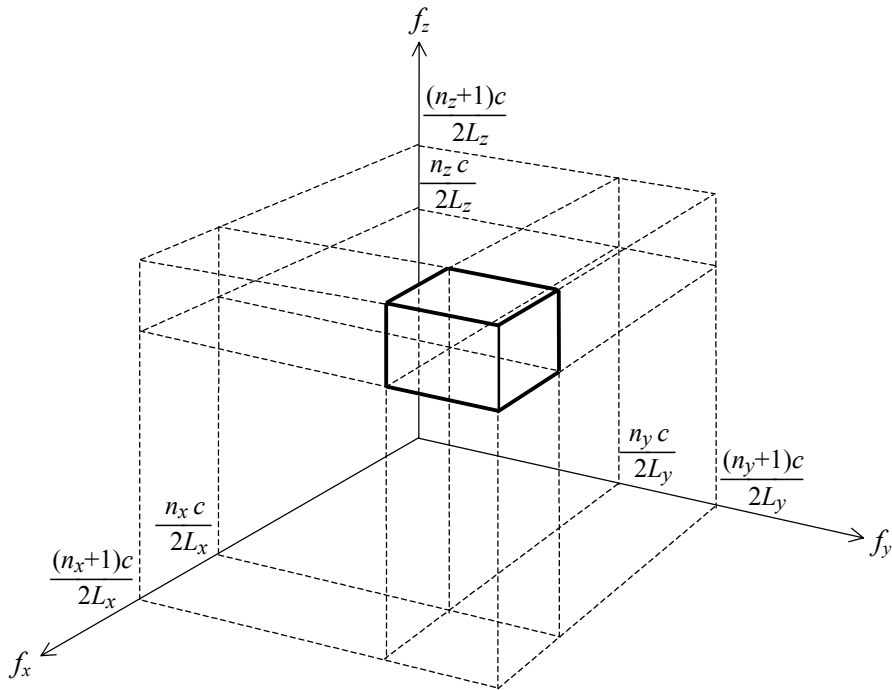


**Figura 18.** Distribución espacial de presiones sonoras para un modo tangencial según el plano  $x$ - $y$  ( $n_x = 2$ ,  $n_y = 1$ ,  $n_z = 0$ ). Se muestra dicha distribución para  $t = 0$ , y sobre dos paredes: la  $x = 0$  y la  $y = 0$ . Para este modo hay tres planos nodales: dos perpendiculares al eje  $x$ , y uno correspondiente al eje  $y$ . Los signos  $+$  y  $-$  indican el signo de la presión sonora en  $t = 0$ . Medio ciclo después, los signos se invierten.

Los diversos modos normales comentados en general no aparecen aisladamente sino superpuestos, aunque es posible excitarlos individualmente mediante un tono puro generado electrónicamente cuya frecuencia coincida con el modo normal requerido.

### 3.2.3. Distribución de los modos normales

Volviendo a la ecuación (205), la existencia de tres parámetros enteros de los cuales depende la frecuencia ( $n_x, n_y, n_z$ ) indica que la cantidad de modos normales es en principio mucho mayor que en otros sistemas vibratorios más sencillos, como una masa y un resorte o un tubo. Es interesante calcular la cantidad de modos normales comprendidos entre  $f = 0$  y  $f = f_0$ , donde  $f_0$  es un valor cualquiera de frecuencia. Para ello, podemos basarnos en que la expresión de las frecuencias de los modos normales de la ecuación (205) tiene la misma forma que el teorema de Pitágoras aplicado al cálculo de la distancia de un punto al origen de un sistema de coordenadas tridimensional cuyos ejes están graduados en frecuencia; en otras palabras, la distancia al origen de un punto de un *espacio tridimensional de frecuencias*. Si llamamos a dichos ejes  $f_x$ ,  $f_y$  y  $f_z$ , entonces los modos normales son, en este espacio de frecuencias, “puntos” cuyas coordenadas según esos ejes son  $n_x c/2L_x$ ,  $n_y c/2L_y$  y  $n_z c/2L_z$ . Pero estas coordenadas sólo pueden tomar, como se puede apreciar, valores múltiplos de  $c/2L_x$ ,  $c/2L_y$  y  $c/2L_z$  respectivamente. Cada modo normal representa, entonces, la distancia al origen de un punto de un reticulado en este espacio de frecuencias formado por paralelepípedos con lados iguales a  $c/2L_x$ ,  $c/2L_y$  y  $c/2L_z$  (figura 19).



**Figura 19.** En el espacio de frecuencias, un paralelepípedo de lados  $c/2L_x$ ,  $c/2L_y$  y  $c/2L_z$  correspondiente al modo normal  $(n_x, n_y, n_z)$ .

Una vez formulada esta interpretación, podemos considerar que los modos normales comprendidos entre 0 y  $f_0$  son los correspondientes a los puntos del reticulado que se encuentran a una distancia  $\leq f_0$  del origen, es decir los puntos dentro de un octavo de esfera de radio  $f_0$  (sólo se consideran aquí los puntos del primer octante). Dado que hay

un punto por cada paralelepípedo del reticulado y el volumen de dicho octavo de esfera es  $\pi f_o^3/6$ , resulta que la cantidad aproximada<sup>29</sup> de modos normales entre 0 y  $f_o$  es

$$N(f_o) \cong \frac{\pi f_o^3/6}{\frac{c^3}{8L_x L_y L_z}} = \frac{4}{3} \pi V \frac{f_o^3}{c^3} . \quad (206)$$

donde  $V = L_x L_y L_z$  es el volumen del recinto. Esta expresión confirma lo que habíamos intuido: la cantidad de modos normales crece muy rápidamente con la frecuencia.

También resulta interesante calcular la densidad de modos normales. Para ello, simplemente derivamos la ecuación 206 con respecto a la frecuencia:

$$\frac{dN(f)}{df} = \frac{4\pi V f_o^2}{c^3} . \quad (207)$$

La densidad de modos aumenta cuadráticamente con la frecuencia. Esta fórmula permite obtener la cantidad aproximada de modos normales en un pequeño intervalo de frecuencias  $[f_o, f_o + \Delta f]$ :

$$\Delta N \cong \frac{dN}{df} \Delta f = \frac{4\pi V f_o^2}{c^3} \Delta f . \quad (208)$$

Estas expresiones no proporcionan una buena aproximación en baja frecuencia, donde es preferible determinar los modos directamente o por medio de un pequeño programa de computadora, para lo cual se calculan todos los modos normales hasta  $n_x, n_y, n_z = 20$ , por ejemplo, y luego se reordenan y separan los 100 más pequeños.<sup>30</sup>

**Ejemplo 4:** Un pequeño estudio de grabación tiene dimensiones  $4 \text{ m} \times 3 \text{ m} \times 2,70 \text{ m}$ . a) Determinar los primeros 10 modos normales. b) Determinar cuántos modos normales existen entre 200 Hz y 210 Hz. c) Determinar cuántos modos normales hay entre 1000 Hz y 1010 Hz.

a) Mediante un algoritmo implementado en una computadora a tal efecto se obtienen los modos normales con  $L_x = 4, L_y = 3, L_z = 2,7$ , obtenemos los resultados de la tabla. Los tres primeros corresponden a modos axiales, y los otros son tangenciales excepto el modo 8, que es oblicuo. Se observa que estos primeros modos normales corresponden a frecuencias bastante bajas.

b) Podemos calcular la cantidad de modos en un intervalo de frecuencias mediante la ecuación (208):

$$\Delta N = \frac{4 \times 3,14 \times 4 \times 3 \times 2,7 \times 200^2}{344^3} 10 = 4 .$$

<sup>29</sup> Esta ecuación no es exacta porque una superficie esférica inevitablemente corta a algunos de los paralelepípedos por la mitad.

<sup>30</sup> En un recinto extremadamente largo y angosto, como por ejemplo un tubo rectangular, puede ser necesario que alguno de los multiplicadores  $n_x, n_y, n_z$  sea mayor que 20. Para habitaciones rectangulares de proporciones usuales, el límite de 20 alcanza para cubrir ampliamente los primeros 100 modos.

Modo N°	$n_x$	$n_y$	$n_z$	$f_{n_x, n_y, n_z}$ [Hz]
1	1	0	0	43,00
2	0	1	0	57,33
3	0	0	1	63,70
4	1	1	0	71,66
5	1	0	1	76,86
6	0	1	1	85,70
7	2	0	0	86,00
8	1	1	1	95,89
9	2	1	0	103,35
10	2	0	1	107,02

c) Análogamente,

$$\Delta N = \frac{4 \times 3,14 \times 4 \times 3 \times 2,7 \times 1.000^2}{344^3} 10 = 100 .$$

En la región de 1 kHz en sólo 10 Hz hay 100 modos normales, ya que los modos se encuentran mucho más cerca unos de otros.

### 3.2.4. Ondas esféricas

Un caso muy importante de propagación de ondas tridimensionales es el de las ondas con simetría esférica. Muchos problemas complejos pueden resolverse apelando a fuentes que cuando actúan solas producen ondas esféricas. Supondremos, en este caso, que

$$p(x, y, z, t) = p_1(r, t) \quad (209)$$

donde  $r$  es la distancia al centro acústico de la onda, que por simplicidad podemos suponer ubicado en el origen de coordenadas.<sup>31</sup> Entonces

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} . \quad (210)$$

Nos proponemos ver qué ecuación satisface  $p_1$  si la correspondiente  $p$  satisface la ecuación de onda. Para ello calculamos las derivadas parciales de  $p$  a partir de las derivadas de  $p_1$ . Por ejemplo, la derivada segunda respecto a  $x$  es:

$$p_{xx} = p_{1rr} \frac{x^2}{r^2} + p_{1r} \frac{r^2 - x^2}{r^3} .$$

El laplaciano se calcula entonces como

$$p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = p_{1rr} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} + p_1 \frac{3r^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{r^3} \quad (211)$$

Resulta, aplicando (210),

<sup>31</sup> En caso contrario, se puede hacer una traslación de ejes.

$$p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = p_{1rr} + p_1 \frac{2}{r}. \quad (212)$$

Por otra parte, la derivada segunda temporal de  $p$  coincide con la de  $p_1$ , con lo que la ecuación de onda pasa a ser

$$p_{1rr} + \frac{2}{r} p_{1r} = \frac{1}{c^2} p_{1tt}. \quad (213)$$

Multiplicando esta ecuación por  $r$ , en el primer miembro aparece la derivada segunda con respecto a  $r$  de una función auxiliar  $r p_1(r, t)$ , mientras que en el primer miembro aparece la derivada segunda con respecto a  $t$ , es decir:

$$(r p_1)_{rr} = \frac{1}{c^2} (r p_1)_{tt} \quad (214)$$

Puesta en esta forma, resulta que  $r p_1(r, t)$  satisface una ecuación de onda unidimensional, cuya solución es

$$r p_1(r, t) = g(r - ct) + h(r + ct),$$

o bien,

$$p_1(r, t) = \frac{g(r - ct) + h(r + ct)}{r}. \quad (215)$$

Esto demuestra que la solución está constituida por dos cuasi-ondas, una que se aleja del centro y otra que se acerca, en ambos casos con velocidad  $c$ . Si bien la forma espacial de la onda se mantiene aproximadamente, su amplitud decrece con la distancia. En la mayoría de los problemas sólo tiene sentido físico la onda que se aleja, es decir,<sup>32</sup>

$$p_1(r, t) = \frac{g(r - ct)}{r}. \quad (216)$$

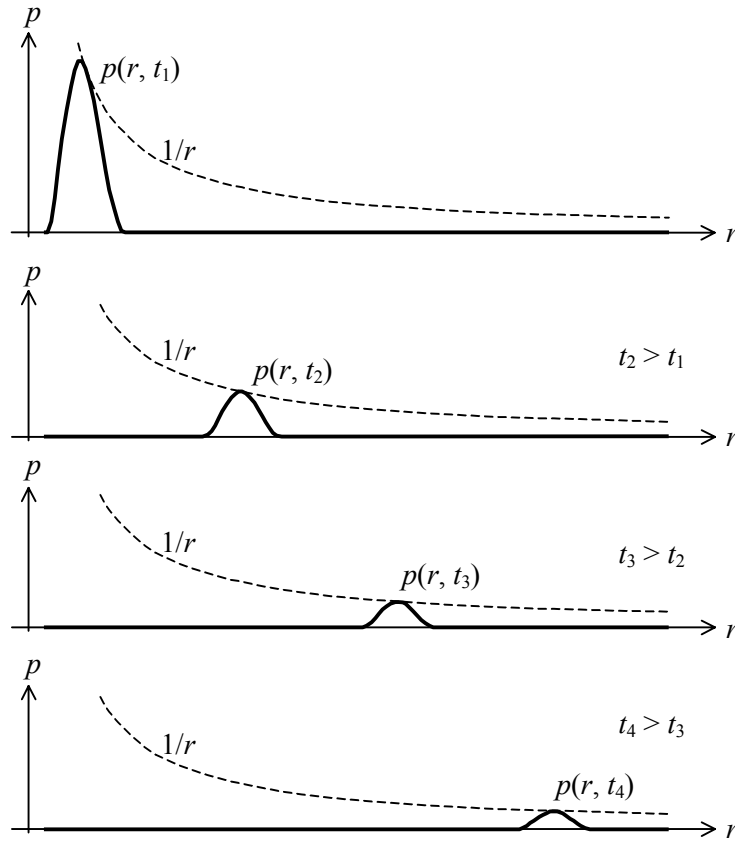
Salvo el factor de escala  $1/r$ , la forma de onda temporal es la misma para todas las distancias. En la figura 20 se muestran gráficas de la presión sonora de un pulso en varios instantes sucesivos.

Debido a la presencia de  $r$  en el denominador, idealmente se alcanzarían amplitudes infinitas en el centro acústico ( $r = 0$ ), lo cual es una imposibilidad física. En la práctica,  $r$  está limitado ya sea por el tamaño finito de la fuente que genera este tipo de ondas o porque en general sólo estamos interesados en el comportamiento a cierta distancia de la fuente.

Es interesante notar que la reducción de amplitud es no disipativa, ya que el modelo subyacente en la ecuación de onda no contempla pérdidas. Aunque aún no obtuvimos una expresión de la intensidad para una onda esférica, veremos que para  $r$  grande se aproxima a la de una onda plana. La intensidad disminuye, por lo tanto, al disminuir la presión, pero la potencia total es igual a la emitida ya que el área aumenta con el radio en igual proporción.

---

<sup>32</sup> Una posible excepción puede ser el caso de una esfera pulsante en el interior de una cáscara esférica rígida



**Figura 20.** Cuasi-onda que se aleja del centro acústico manteniendo aproximadamente la forma de onda espacial pero reduciendo su amplitud.

### 3.2.5. Oscilaciones esféricas forzadas

Podemos transponer el concepto de pistón al caso de las ondas esféricas con el fin de estudiar el comportamiento de las oscilaciones esféricas forzadas. Se trata en este caso de una pequeña *esfera pulsante* de radio  $a$  cuya superficie se expande y contrae con cierta velocidad radial (figura 21). Ello impone una condición de contorno sobre la superficie de la esfera. Supondremos como excitación una exponencial compleja:

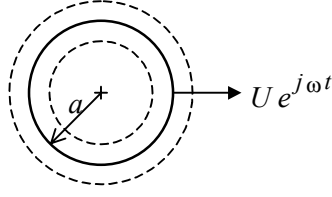
$$u_1(a, t) = U e^{j\omega t}. \quad (217)$$

Si podemos encontrar la presión sobre la superficie de la esfera podremos aplicar la ecuación (216) para extrapolarla a todo el espacio. Para ello recordemos que, con independencia de la naturaleza del campo sonoro, se cumple la ley de Newton en su forma

$$-\nabla p = \rho_0 \mathbf{u}_t.$$

En este caso, por la simetría esférica el gradiente es igual a la derivada radial de la presión multiplicada por el versor normal a la superficie,  $\mathbf{n}$ ,

$$\nabla p = p_r \mathbf{n} \quad (218)$$



**Figura 21.** Una esfera pulsante como radiador acústico.

de donde

$$-p_r = \rho_0 u_{1t} \quad (219)$$

Pero sabemos que

$$p(r, t) = \frac{g(r - ct)}{r} \quad (220)$$

por lo que

$$p_r(r, t) = \frac{g'(r - ct) r - g(r - ct)}{r^2}$$

Para el caso particular  $r = a$ ,

$$\frac{g'(a - ct)}{a} - \frac{g(a - ct)}{a^2} = -\rho_0 u_1(a, t) = -\rho_0 j\omega U e^{j\omega t} \quad (221)$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria cuya incógnita es  $g$ . Sin embargo, dado que la variable independiente se encuentra anidada dentro de una función compuesta, convenirá trabajar con una función auxiliar  $h(t)$  dada por

$$h(t) = g(a - ct). \quad (222)$$

Entonces

$$h'(t) = -c g'(a - ct),$$

de donde

$$\frac{h'(t)}{ca} + \frac{h(t)}{a^2} = \rho_0 j\omega U e^{j\omega t}$$

La solución de esta ecuación diferencial de primer orden es de la forma

$$h(t) = H e^{j\omega t} \quad (223)$$

Reemplazando,



$$\left( \frac{j\omega}{ac} + \frac{1}{a^2} \right) H = \rho_0 j\omega U ,$$

de donde

$$H = \rho_0 c \frac{\frac{j\omega a}{c}}{\frac{j\omega a}{c} + 1} aU \quad (224)$$

Podemos ahora retornar a la función original  $g$  reescribiendo la (222) como

$$g(x) = h\left(\frac{a-x}{c}\right)$$

es decir,

$$g(x) = H e^{j\omega\left(\frac{a-x}{c}\right)}$$

Por último,

$$p(r, t) = \rho_0 c U \frac{a}{r} \frac{\frac{j\omega a}{c}}{1 + \frac{j\omega a}{c}} e^{j\omega\left(t + \frac{a-r}{c}\right)}. \quad (225)$$

Vemos que, con respecto a la velocidad sobre la superficie de la esfera, la presión sufre dos retardos. El primero es  $e^{j\omega(a-r)/c}$ , el retardo debido al tiempo que demora la onda en pasar de una distancia  $a$  del centro acústico a una distancia  $r$ . El segundo retardo está dado por  $j\omega a/c / (1 + j\omega a/c)$  y se debe a la componente reactiva del campo, ya que al expandirse la esfera no sólo comprime las partículas en dirección normal a la superficie sino que además obliga a la capa de aire a expandirse lateralmente al aumentar el radio, para lo cual debe entregar energía potencial elástica. Esta energía es devuelta a la fuente cuando la capa se contrae nuevamente, de allí su carácter reactivo.

Mediante (219) podemos obtener la velocidad de la partículas, derivando  $p$  respecto a  $r$ , integrando respecto a  $t$  y dividiendo por  $-\rho_0$ :

$$u_1(r, t) = U \frac{a^2}{r^2} \frac{1 + \frac{j\omega r}{c}}{1 + \frac{j\omega a}{c}} e^{j\omega\left(t + \frac{a-r}{c}\right)}. \quad (226)$$

La impedancia acústica específica vista por la esfera pulsante se puede obtener dividiendo la presión por la velocidad para  $r = a$ . Resulta:

$$Z_{ae} = \rho_0 c \frac{\frac{j\omega a}{c}}{1 + \frac{j\omega a}{c}}. \quad (227)$$

Ésta se denomina *impedancia acústica específica de radiación*, ya que es la impedancia que opone el aire circundante al movimiento de la superficie en el proceso de radiación acústica. Dado que a cualquier distancia  $r$  del origen la capa de aire esférica correspondiente se comporta como una esfera pulsante, reemplazando  $a$  por  $r$  en (227) se obtiene la impedancia acústica específica vista por la onda a la distancia  $r$ .

Vemos que para alta frecuencia, es decir, cuando

$$\omega \gg \frac{c}{a},$$

o, en términos de la longitud de onda,

$$\lambda \ll 2\pi a,$$

la impedancia acústica específica se aproxima a la del aire para ondas planas:

$$Z_{ae} \equiv \rho_0 c. \quad (228)$$

Esta situación se da siempre que el radio de curvatura sea mayor que la longitud de onda. Para baja frecuencia, en cambio, la impedancia acústica específica es casi puramente reactiva:

$$Z_{ae} \equiv \rho_0 c \frac{j\omega a}{c}. \quad (229)$$

Si llamamos  $Z_{ae\infty}$  a la impedancia asintótica para alta frecuencia y  $Z_{ae0}$  a la impedancia asintótica para baja frecuencia, podemos ver que la impedancia total es equivalente al paralelo de ambas:

$$Z_{ae} = Z_{ae\infty} // Z_{ae0}. \quad (230)$$

Una manera alternativa de caracterizar la fuente esférica es a través del caudal total radiado (volumen por unidad de tiempo). El caudal eficaz se denomina *poder de la fuente* y es un parámetro más fundamental que la velocidad, ya que admite generalización al caso de fuentes no esféricas. Por otra parte, se puede demostrar que para cualquier fuente pequeña con respecto a la longitud de onda ( $a \ll \lambda$ ) cuya superficie vibre toda en fase el campo lejano depende solamente del caudal total  $Q$  en su superficie (Kinsler *et al.*, 1995).

En el caso de la fuente esférica el caudal se obtiene multiplicando la velocidad por el área de la esfera:

$$Q = 4\pi a^2 U. \quad (231)$$

Una ventaja de la caracterización a través del caudal es que para  $a \ll \lambda/2\pi$  se puede prescindir del tamaño de la fuente

$$p(r, t) \equiv \rho_0 c \frac{Q}{4\pi r} \frac{j\omega}{c} e^{j\omega \left( t - \frac{r}{c} \right)}. \quad (232)$$

Una fuente que cumple con esta condición se conoce como *fente simple* o *fente puntual*. Las fuentes simples son útiles para descomponer y analizar fuentes complejas

### 3.2.6. Potencia acústica e intensidad para ondas esféricas

Podemos aplicar la ecuación (96) para calcular la intensidad acústica

$$\begin{aligned}
 p(t) u^*(t) &= \rho_0 c U \frac{a}{r} \frac{\frac{j\omega a}{c}}{1 + \frac{j\omega a}{c}} U \frac{a^2}{r^2} \frac{1 - \frac{j\omega r}{c}}{1 - \frac{j\omega a}{c}} = \\
 &= \rho_0 c U^2 \frac{a^3}{r^3} \frac{\left(\frac{\omega a}{c}\right)^2 \frac{r}{a} + \frac{j\omega a}{c}}{1 + \left(\frac{\omega a}{c}\right)^2}
 \end{aligned} \tag{233}$$

La intensidad media es la mitad de la parte real de la anterior:

$$I(r) = \rho_0 c \frac{U^2}{2} \frac{a^2}{r^2} \frac{\left(\frac{\omega a}{c}\right)^2}{1 + \left(\frac{\omega a}{c}\right)^2} = \rho_0 c \frac{P^2(r)}{2} = \rho_0 c \frac{P^2(a)}{2} \frac{a^2}{r^2}. \tag{234}$$

Esta fórmula establece la importante propiedad de que la intensidad acústica de una fuente esférica varía en forma *inversamente proporcional al cuadrado de la distancia*. Si tenemos en cuenta, además, la definición de intensidad, podemos obtener la potencia media que atraviesa una superficie esférica situada a una distancia  $r$  del centro:

$$W(r) = I(r) 4\pi r^2 = \rho_0 c \frac{P^2(a)}{2} 4\pi a^2. \tag{235}$$

Como era de esperar, dicha potencia resulta constante e igual a la radiada por la superficie de la fuente esférica. Ello se debe a que el modelo subyacente es no disipativo. De hecho, la reducción de la intensidad con el cuadrado de la distancia es compensado por el aumento en idéntica proporción de la superficie que la onda atraviesa.

Es interesante observar, asimismo, que la expresión de la intensidad sigue valiendo para  $a \rightarrow 0$ , es decir, cuando la fuente tiende a una fuente simple. En ese caso se puede aproximar por

$$I(r) \cong \rho_0 c \frac{U^2}{2} \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{\omega a}{c}\right)^2 = \frac{\rho_0 c}{4\pi r^2} \frac{Q^2}{2} \frac{1}{4\pi} \frac{\omega^2}{c^2}.$$

## Notación y simbología

Símbolo	Significado
$a$	Radio de un conducto
$A$	Área de una sección transversal
$A_0$	Área de la garganta de una bocina
$c$	Velocidad del sonido
$d$	Diferencial de la variable a la que acompaña
$D$	Densidad de energía acústica
$D_c$	Densidad de energía cinética
$D_p$	Densidad de energía potencial
$\text{div}$	Operador divergencia ( $\cdot_x + \cdot_y + \cdot_z$ )
$\Delta$	Incremento pequeño de la variable a la que acompaña
$E_c$	Energía cinética
$E_p$	Energía potencial
$f$	Frecuencia
$f$	Función genérica que describe una forma de onda
$f_c$	Frecuencia de corte
$\Phi, \Phi_0$	Ángulos de fase
$g$	Función genérica que describe una forma de onda
$\gamma$	Cociente entre las capacidades caloríficas a presión y a volumen constante
$h$	Función genérica que describe una excitación
$\eta$	Constante utilizada en el método de separación de variables
$i$	Intensidad acústica instantánea
$I$	Intensidad acústica media
$k$	Número de onda ( $\omega/c$ )
$k$	Un número entero
$l$	En una bocina exponencial, distancia para la cual la sección aumenta $e$ veces
$L$	Longitud de un conducto o bocina
$L_{\text{effect}}$	Longitud efectiva de un conducto corregida por radiación en los extremos
$L_p$	Nivel de presión sonora
$\lambda$	Longitud de onda
$M$	Masa molar (peso molecular expresado en g)
$n$	Un índice entero
$\mathbf{n}$	Versor (vector unitario) normal a una superficie
$\omega$	Frecuencia angular o pulsación
$\omega_c$	Frecuencia angular de corte
$p$	Presión sonora
$p_t$	Derivada de $p$ con respecto al tiempo
$p_{tt}$	Derivada segunda de $p$ con respecto al tiempo
$p_x$	Derivada de $p$ con respecto a la posición
$p_{xx}$	Derivada segunda de $p$ con respecto a la posición
$P$	Presión total fuera de equilibrio
$P, P_{\text{máx}}$	Presión máxima
$P_{\text{ef}}$	Presión sonora eficaz
$P_{\text{ref}}$	Presión de referencia (20 $\mu\text{Pa}$ )
$P_0$	Presión de equilibrio (atmosférica)
$q$	Caudal

<b>Símbolo</b>	<b>Significado</b>
$Q, Q_{m\acute{a}x}$	Caudal máximo
$Q_{ef}$	Caudal eficaz
$R$	Constante de los gases (8,31 J/(mol·K))
$R$	Notación abreviada utilizada en las fórmulas de la bocina
$R$	Resistencia acústica específica normalizada por $\rho_0 c$
$q$	Caudal
$\rho$	Densidad del aire
$\rho_0$	Densidad del aire en equilibrio (1,1979 kg/m <sup>3</sup> a 101325 Pa y 20 °C)
$t$	Tiempo
$T$	Factor dependiente del tiempo en una onda estacionaria
$T$	Temperatura absoluta ( $T_C + 273,16$ K)
$T_C$	Temperatura centígrada
$\theta$	Ángulo utilizado en las fórmulas de la bocina (0 para $f = f_c$ , $\pi/2$ para $f = \infty$ )
$u$	Velocidad de las partículas
$u_x$	Derivada parcial con respecto a $x$ de la velocidad de las partículas
$u_t$	Derivada parcial con respecto a $t$ de la velocidad de las partículas
$\mathbf{u}$	Velocidad vectorial de las partículas en un campo tridimensional
$\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z$	Componentes de la velocidad vectorial
$U, U_{m\acute{a}x}$	Amplitud de oscilación de la velocidad de una partícula
$V$	Volumen
$w$	Potencia acústica instantánea
$W$	Potencia acústica media
$x$	Coordenada de una partícula
$X$	Factor dependiente de la posición en una onda estacionaria
$X$	Reactancia acústica específica normalizada por $\rho_0 c$
$y$	Desplazamiento de una partícula de su posición de equilibrio
$y_t$	Derivada de $y$ con respecto al tiempo
$y_{tt}$	Derivada segunda de $y$ con respecto al tiempo
$y_x$	Derivada de $y$ con respecto a la posición
$y_{xx}$	Derivada segunda de $y$ con respecto a la posición
$Y, Y_{m\acute{a}x}$	Amplitud de oscilación de una partícula
$Z_a$	Impedancia acústica
$Z_{ae}$	Impedancia acústica específica
$\nabla$	Operador gradiente

## **Bibliografía y referencias**

1. Beranek, Leo L. “Acústica”. Editorial Hispanoamericana. S. A. Buenos Aires (Arg. ), 1961
2. Beranek, Leo L. “Acoustical Measurements”. Acoustical Society of America. Cambridge, 1993.
3. Madisetti, Vijay K. ; Williams, Dougls B. (editores). “The Digital Signal Processing Handbook”. CRC-Press - IEEE Press. Boca Raton, FL, USA, 1997. Section X.
4. Kinsler, Lawrence; Frey, Austin; Coppens, Alan; Sanders, James: “Fundamentos de Acústica”. Editorial Limusa. México, 1995

## Apéndice 1: Transformada de Laplace

### A1.1. Definición y ejemplos

La transformada de Laplace de una función  $f(t)$  definida para  $t \geq 0$  es una función de la variable compleja  $s$  dada por

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt. \quad (\text{A1.1})$$

$F(s)$ , que también se escribe  $\mathcal{L}f(s)$ , está definida para aquellos valores de  $s$  en los que la integral impropia converge. Por ejemplo, la transformada de Laplace de un escalón unitario  $u(t)$  resulta

$$U(s) = \int_0^{\infty} u(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}.$$

En este caso la integral converge siempre que **Re**  $s > 0$ . En la Tabla A1.1 se indican las transformadas de Laplace de varias funciones usuales.

**Tabla A1.1**

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
1	$1 / s$
$t^n$	$n! / s^{n+1}$
$e^{at}$	$1 / (s - a)$
$\cos \omega t$	$s / (s^2 + \omega^2)$
$\text{sen } \omega t$	$\omega / (s^2 + \omega^2)$

### A1.2. Aplicación a la resolución de ecuaciones diferenciales

La propiedad más significativa de la transformada de Laplace es la fórmula para la transformada de la derivada de una función  $f(t)$ , obtenida integrando por partes:

$$\mathcal{L}f'(s) = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = f(t) e^{-st} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) (-s) e^{-st} dt,$$

de donde, si, resulta

$$\mathcal{L}f'(s) = s F(s) - f(0^+). \quad (\text{A1.2})$$

Esto permite transformar una ecuación diferencial en una ecuación algebraica. Consideremos la ecuación

$$y'(t) + y(t) = f(t). \quad (\text{A1.3})$$

Transformando ambos miembros se obtiene

$$s Y(s) - y(0^+) + Y(s) = F(s),$$

de donde

$$Y(s) = \frac{F(s) + y(0^+)}{s + 1}. \quad (\text{A1.4})$$

Si podemos encontrar la transformada inversa de  $Y(s)$ , la ecuación (A1.3) queda resuelta, es decir

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{F(s) + y(0^+)}{s + 1} \right). \quad (\text{A1.5})$$

Si bien existe una fórmula de inversión, su aplicación requiere un manejo fluido de la teoría de la integración en variable compleja y sólo se justifica en algunos casos muy especiales, por lo cual la omitiremos. La manera habitual de obtener la transformada inversa consiste en obtener alguna expresión en términos de funciones cuyas transformadas inversas se conozcan (por ejemplo, recurriendo a tablas como la A1.1).

A modo de ejemplo, supongamos que en la ecuación (A1.3) tomamos  $f(t) = u(t)$  e  $y(0^+) = 2$ . Entonces

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)} + \frac{2}{s+1}. \quad (\text{A1.6})$$

Podemos descomponer el primer término del segundo miembro en fracciones simples, resultando

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+1} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}.$$

Ahora podemos utilizar la tabla A1 para invertir los dos términos del último miembro y, dado que la transformada de Laplace es lineal, tendremos

$$y(t) = 1 + e^{-t}. \quad (\text{A1.7})$$

En la tabla A1.2 se resumen algunas propiedades importantes de la transformada de Laplace que permiten evaluar transformadas y transformadas inversas con mayor facilidad.



**Tabla A1.2**

$f(t)$	$F(s)$
$a g(t) + b h(t)$	$a G(s) + b H(s)$
$g'(t)$	$s G(s) - g(0^+)$
$\int_0^t g(\tau) d\tau$	$G(s) / s$
$t g(t)$	$- G'(s)$
$g(t - a)$	$e^{-as} G(s)$
$e^{at} g(t)$	$G(t - a)$
$g(at)$	$G(s / a) / a$
$\int_0^t g(\tau) h(t - \tau) d\tau$	$G(s) H(s)$
$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) =$	$\lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$
$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) =$	$\lim_{s \rightarrow 0^+} s F(s)$

### A1.3. Función de transferencia

Si consideramos un sistema lineal con una señal de entrada  $x(t)$  y una señal de salida  $y(t)$  relacionadas por una ecuación diferencial del tipo

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_m x^{(m)} + \dots + b_1 x' + b_0 x \quad (\text{A1.8})$$

Si suponemos, además, que las condiciones iniciales de la salida son nulas hasta la derivada  $n - 1$ , la ecuación (A1.2) puede reescribirse como

$$\mathbb{L}f'(s) = s F(s) \quad (\text{A1.9})$$

y, aplicándola reiteradamente, tendremos

$$\mathbb{L}f''(s) = s^2 F(s)$$

$$\mathbb{L}f'''(s) = s^3 F(s),$$

...

$$\mathbb{L}f^{(n)}(s) = s^n F(s), \quad (\text{A1.10})$$

de modo que podemos transformar (A1.8) del siguiente modo:

$$a_n s^n Y + \dots + a_1 s Y + a_0 Y = b_m s^m X + \dots + b_1 s X + b_0 X, \quad (\text{A1.11})$$

de donde, sacando factores comunes y reordenando,

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} X(s). \quad (\text{A1.12})$$

La función

$$H(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}. \quad (\text{A1.13})$$

es la denominada *función de transferencia* del sistema. Con ella podemos reescribir (A1.12) como

$$Y(s) = H(s) X(s). \quad (\text{A1.14})$$

Una forma alternativa de expresar (A1.13) es factorizando los polinomios del denominador y del numerador:

$$H(s) = \frac{b_m (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{a_n (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}. \quad (\text{A1.15})$$

Los valores  $p_1, \dots, p_n$  son los *polos* del sistema, y los valores  $z_1, \dots, z_m$  son los *ceros*. En un sistema físico en el que los coeficientes de la ecuación diferencial (y, por lo tanto, los coeficientes de los polinomios del denominador y del numerador) son valores reales, resulta que en caso de haber raíces complejas éstas aparecen de a pares conjugados.

#### A4. Estabilidad

Un sistema es *estable* si ante una entrada de corta duración (es decir, nula para  $t > t_M$  para algún  $t_M$ ) el sistema retorna al estado de equilibrio  $y(t) = 0$ . Una posible entrada de esas características es la función *impulso de Dirac*, que es infinita para  $t = 0$  y 0 para  $t > 0$ , siendo su integral entre 0 e  $\infty$  igual a 1. La transformada de Laplace, dada en la tabla A1.1, es 1, por lo cual aplicando A1.14 y A1.15 resulta

$$Y(s) = \frac{b_m (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{a_n (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}. \quad (\text{A1.16})$$

Podemos descomponer esta expresión en fracciones simples. Suponiendo que los polos son simples (es decir, que no se repiten), tendremos

$$Y(s) = \frac{A_1}{s - p_1} + \dots + \frac{A_n}{s - p_n}. \quad (\text{A1.17})$$

La transformada de Laplace inversa de cada término es una exponencial, de manera que

$$y(t) = A_1 e^{p_1 t} + \dots + A_n e^{p_n t}. \quad (\text{A1.18})$$

Cada uno de los términos del segundo miembro es, por definición, un *modo normal* del sistema. Para que el sistema sea estable, todos ellos deben extinguirse con el transcurso del tiempo, para lo cual los polos  $p_k$  deben tener todos parte real negativa, ya que en ese caso las exponenciales son decrecientes. Este régimen de extinción de los modos normales del sistema se suele denominar *régimen transitorio*.

## A. 5. Respuesta en frecuencia

Una señal muy importante para el ensayo y evaluación del comportamiento de diversos sistemas que procesan señales es la onda senoidal,

$$x(t) = X \sin \omega t. \quad (\text{A1.19})$$

Aplicando (A1.14), (A1.15) y la transformada del seno dada en la tabla A1, resulta

$$Y(s) = \frac{b_m(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{a_n(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (\text{A1.20})$$

Podemos descomponer esta expresión en fracciones simples. Suponiendo que los polos son simples (es decir, que no se repiten), tendremos

$$Y(s) = \frac{A_1}{s - p_1} + \cdots + \frac{A_n}{s - p_n} + \frac{B}{s - j\omega} + \frac{C}{s + j\omega}. \quad (\text{A1.21})$$

Si el sistema es *estable*, las transformadas inversas de los términos provenientes de los polos del sistema tienden a extinguirse, persistiendo únicamente los dos últimos términos, ya que sus polos tienen parte real nula. Por consiguiente, para  $t \rightarrow \infty$ ,

$$y(t) \sim B e^{j\omega t} + C e^{-j\omega t}. \quad (\text{A1.22})$$

Para terminar el cálculo hace falta precisar los valores de  $B$  y  $C$ . Estos pueden obtenerse por medio de las fórmulas

$$B = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega) Y(s) = H(j\omega) \frac{\omega X}{j\omega + j\omega} = H(j\omega) \frac{X}{2j}, \quad (\text{A1.23})$$

$$C = \lim_{s \rightarrow -j\omega} (s + j\omega) Y(s) = H(-j\omega) \frac{\omega X}{-j\omega - j\omega} = -H(-j\omega) \frac{X}{2j}.$$

Pero

$$H(\pm j\omega) = |H(j\omega)| e^{\pm j \arg H(j\omega)}, \quad (\text{A1.24})$$

de donde

$$y(t) = |H(j\omega)| X \frac{e^{j(\omega t + \arg H(j\omega))} - e^{-j(\omega t + \arg H(j\omega))}}{2j}, \quad (\text{A1.25})$$

es decir,

$$y(t) = |H(j\omega)| X \sin(\omega t + \arg H(j\omega)). \quad (\text{A1.26})$$

En otras palabras, una vez extinguido el régimen transitorio persiste un *régimen permanente* que también es senoidal y de frecuencia angular  $\omega$ , es decir, igual a la de la entrada, sólo que su amplitud está multiplicada por el módulo de  $H(j\omega)$  y su ángulo de fase es igual al argumento de  $H(j\omega)$ . Resulta, entonces, que  $H(j\omega)$  permite conocer el comportamiento del sistema, tanto en amplitud como en fase, con la frecuencia. Por ello  $H(j\omega)$  se denomina *respuesta en frecuencia* del sistema.

Es interesante notar que la respuesta en frecuencia puede determinarse experimentalmente, aun en los casos en que el cálculo teórico de la función de transferencia sea impráctico o muy dificultoso (por ejemplo, si no es posible encontrar un modelo matemático simple del sistema). Este resultado es de extrema importancia, ya que establece una conexión entre el proceso bastante abstracto de resolución de la ecuación diferencial de un sistema mediante la transformada de Laplace por un lado, y su comportamiento concreto con la frecuencia por el otro.

## Apéndice 2: Representación matricial del tubo de sección variable

### A2.1. Ecuaciones matriciales

La representación del comportamiento acústico de un tubo por medio de las ecuaciones (124) y (125) tiene carácter local. Este tipo de modelo tiene la ventaja de que permite describir con precisión lo que sucede en cada punto del interior del tubo, pero a costa de una mayor dificultad para resolver las ecuaciones diferenciales resultantes. Es posible una representación alternativa en la que sólo intervengan las presiones y velocidades en los extremos del tubo, es decir, las variables  $u(0, t)$ ,  $p(0, t)$ ,  $u(L, t)$  y  $p(L, t)$ .

Antes de llevar a cabo esta idea, sin embargo, conviene reformular las ecuaciones en términos del volumen por unidad de tiempo o *caudal*,  $q(x, t)$ . Para ello tengamos en cuenta que si las dimensiones transversales del tubo son pequeñas con respecto a la longitud de onda, las ondas son planas y por lo tanto  $u(x, t)$  depende sólo de la posición longitudinal y su dirección es normal a la superficie. Entonces,

$$q(x, t) = A(x) u(x, t). \quad (\text{A2.1})$$

Podemos reescribir las ecuaciones (124) y (125) en la forma simplificada siguiente:

$$p_x = -\frac{\rho_0}{A(x)} q_t \quad (\text{A2.2})$$

$$p_t = -\frac{\gamma P_0}{A(x)} q_x. \quad (\text{A2.3})$$

Tanto la resolución de estas ecuaciones como su eventual generalización para contemplar las pérdidas por fricción y otros mecanismos se simplifican aún más si en lugar de trabajar en el dominio tiempo lo hacemos en el dominio frecuencial, utilizando para ello la transformada de Laplace, que se aplicará para cada  $x$  como si ésta fuera un parámetro fijo. Si  $g(x, t)$  es una función, entonces su transformada será:

$$G(s, x) = \int_0^\infty g(t, x) e^{-st} dt. \quad (\text{A2.4})$$

La transformada de la derivada temporal se obtiene multiplicando por  $s$ . La transformada de la derivada espacial, en cambio, resulta de llevar la derivada afuera de la integral, por lo que se reduce a la derivada espacial de la transformada (admitimos aquí suficiente regularidad como para permitir conmutar ambos operadores). Con estas propiedades, (A2.2) y (A2.3) pueden plantearse como

$$P_x = -\frac{\rho_0 s}{A(x)} Q \quad (\text{A2.5})$$

$$sP = -\frac{\gamma P_0}{A(x)} Q_x. \quad (\text{A2.6})$$

En este sistema es posible eliminar el caudal  $Q$ , para lo cual lo despejamos de (A2.5) y derivamos respecto a  $x$ , para luego reemplazar en (A2.6). El resultado es

$$P_{xx} + \frac{A'}{A}P_x - \frac{s^2}{c^2}P = 0. \quad (\text{A2.7})$$

Si bien ésta es una ecuación en derivadas parciales, en la práctica se comporta como si fuera una ecuación ordinaria, ya que sólo aparecen las derivadas con respecto a una sola variable (la  $x$ ). Las derivadas respecto a la variable  $t$  quedaron absorbidas al aplicar la transformación de Laplace. Es, entonces, una ecuación homogénea de segundo orden a coeficientes variables con  $x$  y dependientes además del parámetro  $s$ . La solución general es de la forma

$$P(x, s) = a g(x, s) + b h(x, s), \quad (\text{A2.8})$$

donde  $g(x, s)$ ,  $h(x, s)$ , son dos soluciones linealmente independientes que dependen del parámetro  $s$ , y  $a$ ,  $b$ , son constantes. Aplicando (A2.5),

$$Q(x, s) = -\frac{A(x)}{\rho_0 s} (a g_x(x, s) + b h_x(x, s)). \quad (\text{A2.9})$$

Ahora podemos plantear el problema de relacionar las variables de *entrada*,  $Q(0, s)$  y  $P(0, s)$  con las variables de *salida*,  $Q(L, s)$  y  $P(L, s)$ . Dado que existen dos variables de entrada y dos de salida (las respectivas presiones y caudales), el problema es enteramente similar al de un cuadripolo eléctrico, y su descripción puede realizarse por medio de una representación matricial [2].

Si suponemos que la entrada está en  $x = 0$  y la salida en  $x = L$ , tendremos

$$P_{ent} = P(0, s) = a g(0, s) + b h(0, s), \quad (\text{A2.10})$$

$$Q_{ent} = Q(0, s) = \frac{-A}{\rho_0 s} (a g_x(0, s) + b h_x(0, s))$$

$$P_{sal} = P(L, s) = a g(L, s) + b h(L, s). \quad (\text{A2.11})$$

$$Q_{sal} = Q(L, s) = \frac{-A}{\rho_0 s} (a g_x(L, s) + b h_x(L, s))$$

Tenemos 4 ecuaciones y 6 incógnitas ( $a$ ,  $b$ ,  $P_{sal}$ ,  $Q_{sal}$ ,  $P_{ent}$  y  $Q_{ent}$ ). Podemos elegir dos de ellas como parámetros independientes, y luego obtener los restantes. Suponiendo conocidos  $P_{sal}$  y  $Q_{sal}$  podemos despejar las constantes  $a$  y  $b$  de las ecuaciones (A2.11), y de las (A2.10) obtener  $P_{ent}$  y  $Q_{ent}$ . Resulta, aplicando la regla de Cramer,

$$a = \frac{\begin{vmatrix} P_{sal} & h(L, s) \\ -\frac{\rho_0 s}{A} Q_{sal} & h_x(L, s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g(L, s) & h(L, s) \\ g_x(L, s) & h_x(L, s) \end{vmatrix}}, \quad b = \frac{\begin{vmatrix} g(L, s) & P_{sal} \\ g_x(L, s) & -\frac{\rho_0 s}{A} Q_{sal} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g(L, s) & h(L, s) \\ g_x(L, s) & h_x(L, s) \end{vmatrix}} \quad (\text{A2.12})$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} P_{ent} \\ Q_{ent} \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} g(0, s) & h(0, s) \\ -\frac{A}{\rho_0 s} g_x(0, s) & -\frac{A}{\rho_0 s} h_x(0, s) \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} g(L, s) & h(L, s) \\ g_x(L, s) & h_x(L, s) \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} P_{sal} & h(L, s) \\ -\frac{\rho_0 s}{A} Q_{sal} & h_x(L, s) \end{pmatrix} \quad (\text{A2.13})$$

o bien

$$\begin{pmatrix} P_{ent} \\ Q_{ent} \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} g(0, s) & h(0, s) \\ -\frac{A}{\rho_0 s} g_x(0, s) & -\frac{A}{\rho_0 s} h_x(0, s) \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} g(L, s) & h(L, s) \\ g_x(L, s) & h_x(L, s) \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} h_x(L, s)P_{sal} + h(L, s)\frac{\rho_0 s}{A}Q_{sal} \\ -g_x(L, s)P_{sal} - g(L, s)\frac{\rho_0 s}{A}Q_{sal} \end{pmatrix} \quad (\text{A2.14})$$

Esto puede expresarse en la forma

$$\begin{pmatrix} P_{ent} \\ Q_{ent} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{sal} \\ Q_{sal} \end{pmatrix} = \mathbf{K} \begin{pmatrix} P_{sal} \\ Q_{sal} \end{pmatrix}, \quad (\text{A2.15})$$

donde los parámetros  $K_{ij}$  son análogos a los parámetros A, B, C y D de las matrices de transmisión de los cuadripolos, utilizadas para describir conexiones en cascada (por ejemplo, en líneas de transmisión). Los valores resultantes son:

$$K_{11} = \frac{g(0, s)h_x(L, s) - h(0, s)g_x(L, s)}{\begin{vmatrix} g(L, s) & h(L, s) \\ g_x(L, s) & h_x(L, s) \end{vmatrix}} \quad (\text{A2.16})$$

$$K_{12} = \frac{\frac{\rho_0 s}{A} g(0, s)h(L, s) - h(0, s)g(L, s)}{\begin{vmatrix} g(L, s) & h(L, s) \\ g_x(L, s) & h_x(L, s) \end{vmatrix}} \quad (\text{A2.17})$$

$$K_{21} = \frac{-\frac{A}{\rho_0 s} g_x(0, s)h_x(L, s) - h_x(0, s)g_x(L, s)}{\begin{vmatrix} g(L, s) & h(L, s) \\ g_x(L, s) & h_x(L, s) \end{vmatrix}} \quad (\text{A2.18})$$

$$K_{22} = -\frac{g_x(0, s)h(L, s) - h_x(0, s)g(L, s)}{\begin{vmatrix} g(L, s) & h(L, s) \\ g_x(L, s) & h_x(L, s) \end{vmatrix}}. \quad (\text{A2.19})$$

Los coeficientes  $K_{ij}$  son funciones de  $s$ , y en la generalidad de los casos son demasiado complejos como para su tratamiento analítico mediante fórmulas cerradas. Si bien en el mejor de los casos las funciones  $A(x, s)$ ,  $R(x, s)$  e  $Y(x, s)$  podrían determinarse experimentalmente y luego aproximarse mediante sendas expresiones analíticas, en la práctica las dificultades para medir en forma directa la resistencia viscosa y la admitancia de las paredes del tracto vocal son enormes.

En la próxima sección analizaremos un caso sencillo al cual podremos reducir los casos reales.

## A2.2. Caso de un tubo uniforme

Supondremos ahora el caso particular de un tubo de sección, fricción y admitancia constantes a lo largo de toda su longitud para cada valor de  $s$ , es decir

$$A(x, s) = A_0(s) \quad (\text{A2.20})$$

$$R(x, s) = R_0(s) \quad (\text{A2.21})$$

$$Y(x, s) = Y_0(s) \quad (\text{A2.22})$$

Entonces la ecuación (A2.7) puede expresarse como

$$P_{xx} = \sigma^2 P, \quad (\text{A2.23})$$

donde

$$\sigma^2(s) = (\rho_0 s + AR) \left( \frac{s}{\rho_0 c^2} + \frac{Y}{A} \right). \quad (\text{A2.24})$$

La ecuación (A2.23) admite una sencilla solución general de la forma

$$P(x, s) = a \cosh(\sigma x) + b \sinh(\sigma x). \quad (\text{A2.25})$$

Con las funciones  $g(x, s) = \cosh(\sigma x)$  y  $h(x, s) = \sinh(\sigma x)$  se pueden calcular los coeficientes  $K_{ij}$ . Resulta

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\sigma L) & \frac{\rho_0 s + AR}{A\sigma} \sinh(\sigma L) \\ \frac{A\sigma}{\rho_0 s + AR} \sinh(\sigma L) & \cosh(\sigma L) \end{pmatrix}. \quad (\text{A2.26})$$

En este caso sencillo fue posible obtener una expresión cerrada para la matriz de transmisión, siempre y cuando se conozcan  $A$ ,  $R$  e  $Y$ . Aun en el caso ideal en que  $R = 0$  e  $Y = 0$  (resultando  $\sigma = s/c$ ) los coeficientes obtenidos no son funciones racionales. Esto es característico de las líneas de transmisión a parámetros distribuidos. De hecho, el tubo rígido sin pérdidas se comporta como una línea de transmisión eléctrica puramente reactiva (con el análogo a la impedancia característica igual a la impedancia acústica del



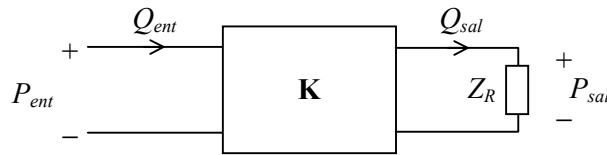
aire, es decir su impedancia acústica específica,  $\rho_0 c$ , dividida por la sección  $A$  para convertir la velocidad lineal en caudal).

### A2.3 Conducto cargado con la impedancia de radiación

Al igual que en el caso de una línea de transmisión eléctrica, es interesante el efecto de carga de la impedancia de radiación. Para baja frecuencia esta impedancia vale aproximadamente:<sup>1</sup>

$$Z_R(s) = \frac{P_{sal}(s)}{Q_{ent}(s)} \cong \frac{0,613 \rho_0 a}{\pi a^2} s = \frac{0,1951 \rho_0}{a} s, \quad (A2.27)$$

donde  $a$  es el radio del tubo. Esta relación representa la menor eficiencia de un emisor pequeño en baja frecuencia.



**Figura A2.1.** Circuito equivalente de un conducto de sección variable, representado como cuadripolo acústico, cargado por la impedancia de radiación.

Podemos escribir la ecuación (A2.15) en la forma

$$\begin{pmatrix} P_{ent} \\ Q_{ent} \end{pmatrix} = \mathbf{K} \begin{pmatrix} P_{sal} \\ Q_{sal} \end{pmatrix} = \mathbf{K} \begin{pmatrix} Z_R \\ 1 \end{pmatrix} Q_{sal}, \quad (A2.28)$$

de donde

$$P_{ent} = (K_{11}Z_R + K_{12}) Q_{sal} \quad (A2.29)$$

$$Q_{ent} = (K_{21}Z_R + K_{22}) Q_{sal} \quad (A2.30)$$

es decir

$$\frac{P_{ent}}{Q_{sal}} = K_{11}Z_R + K_{12} \quad (A2.31)$$

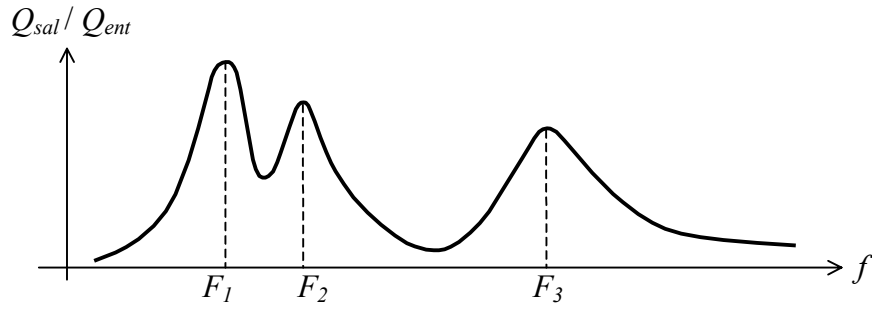
$$\frac{Q_{ent}}{Q_{sal}} = K_{21}Z_R + K_{22}. \quad (A2.32)$$

Invirtiendo esta última, se la puede representar como función de transferencia:

<sup>1</sup> Dicha relación se obtiene de la ecuación (108), extrapolando  $j\omega$  a todo el plano  $s$  y luego dividiendo por el área transversal del tubo para pasar de impedancia acústica específica ( $P/U$ ) a impedancia acústica ( $P/Q$ )

$$\frac{Q_{sal}}{U_{ent}} = \frac{1}{K_{21}Z_R + K_{22}}. \quad (\text{A2.33})$$

Los ceros  $\sigma_i$  del denominador son los *formantes* del conducto. Si los ceros son complejos, es decir  $\sigma_i = \alpha_i + j\omega_i$ , entonces  $\omega_i$  son las frecuencias (angulares) para las que la transferencia tiene máximos locales o resonancias (figura A2.2). Para cada  $\omega_i$ , la correspondiente parte real  $\alpha_i$  es (en valor absoluto) la mitad del ancho de banda (medido entre los puntos de  $-3$  dB) de la campana de resonancia.



**Figura A2.2.** Formantes de un conducto de sección variable.

### Apéndice 3: Descomposición de una onda estacionaria en ondas planas

La ecuación (206) puede expresarse como el producto de cuatro cosenos, que por simplicidad de notación reescribimos como

$$p = P \cos A \cos B \cos C \cos D$$

Podemos reescribirla mediante la relación trigonométrica

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)).$$

Para ello vamos tomando sucesivamente productos de dos cosenos y los convertimos en sumas:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}P (\cos(A+B) + \cos(A-B)) \cos C \cos D = \\ &= \frac{1}{4}P (\cos(A+B+C) + \cos(A+B-C) + \\ &\quad + \cos(A-B+C) + \cos(A-B-C)) \cos D = \\ &= \frac{1}{8}P (\cos(A+B+C+D) + \cos(A+B+C-D) + \\ &\quad + \cos(A+B-C+D) + \cos(A+B-C-D) + \\ &\quad + \cos(A-B+C+D) + \cos(A-B+C-D) + \\ &\quad + \cos(A-B-C+D) + \cos(A-B-C-D)) \end{aligned}$$

Ahora consideremos, por ejemplo, el primer término que, expresado nuevamente con la notación original, es

$$\cos \left( \frac{\pi n_x}{L_x} x + \frac{\pi n_y}{L_y} y + \frac{\pi n_z}{L_z} z + \pi c t \sqrt{\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2}} \right).$$

Buscamos los puntos en los que, para un  $t$  dado, la fase dentro del coseno sea constante, es decir,

$$\frac{n_x}{L_x} x + \frac{n_y}{L_y} y + \frac{n_z}{L_z} z + c t \sqrt{\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2}} = cte.$$

Para cada  $t$  ésta es la ecuación de un plano perpendicular a la dirección determinada por los cosenos directores  $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ , donde

$$\alpha_i = \frac{\frac{n_i}{L_i}}{\sqrt{\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2}}}, \quad i = x, y, z.$$